

Notations.

Dans tout le sujet, \mathbb{R} désignera le corps des nombres réels et \mathbb{N} l'ensemble des entiers naturels. De plus, n désignera un entier naturel strictement supérieur à 1.

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. Pour X est une variable aléatoire réelle définie sur Ω , on note $\mathbf{E}(X)$ son espérance (lorsqu'elle existe) et $\mathbf{V}(X)$ sa variance (lorsqu'elle existe).

On rappelle que, sous réserve d'existence, la covariance de deux variables aléatoires X et Y définies sur Ω est le nombre réel noté $\mathbf{Cov}(X, Y)$ et défini par

$$\mathbf{Cov}(X, Y) = \mathbf{E}((X - \mathbf{E}(X))(Y - \mathbf{E}(Y))) = \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y).$$

En conséquence, sous réserve de l'existence de $\mathbf{V}(X)$, $\mathbf{V}(Y)$ et $\mathbf{V}(X + Y)$:

$$\mathbf{V}(X + Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y) + 2\mathbf{Cov}(X, Y).$$

Objectifs du problème.

Soit X une variable aléatoire définie sur Ω . On se place dans le contexte où la loi de X n'est pas complètement spécifiée et où cette loi dépend d'un paramètre θ inconnu. Le but de l'estimation consiste à approcher la valeur de ce paramètre θ , ou éventuellement la valeur de son image $g(\theta)$ par une fonction réelle g .

La première partie revient sur quelques résultats au sujet des séries entières. La deuxième partie étudie les familles sommables. Dans les deux dernières parties, on se place dans le cas où X est une variable aléatoire définie sur Ω suivant une loi de Poisson de paramètre θ inconnu et on développe quelques outils pour l'estimation de ce paramètre.

I. Séries entières.

1. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses? On justifiera soigneusement les réponses.
 - (a) Affirmation : « soient $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ deux suite de nombre réels positifs, telles que la série de terme général v_k converge et que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_k \leq v_k$. Alors la série de terme général u_k converge également ».
 - (b) Affirmation : « soient $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ deux suite de nombre réels, telles que la série de terme général v_k converge et que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_k \leq v_k$. Alors la série de terme général u_k converge également ».
 - (c) Affirmation : « soit $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels tous non nuls. On suppose que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{k+1}}{u_k} \right| = \ell,$$

avec $\ell < 1$. Alors la série de terme général u_k converge absolument ».

- (d) Affirmation : « soit $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions réelles continues définies sur un même intervalle I , telle que pour tout $x \in I$, la suite $(u_k(x))_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel $U(x)$. La fonction U ainsi définie sur I est continue ».

2. *Question de cours.* Soit $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. On rappelle que le rayon de convergence de la série entière de terme général $u_k x^k$ est défini par

$$R = \sup\{x \in \mathbb{R} \mid (|u_k x^k|)_{k \in \mathbb{N}} \text{ est majorée}\} \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}.$$

(a) Soit $x \in \mathbb{R}$.

- i. Montrer que si $|x| < R$, alors la série de terme général $u_k x^k$ converge absolument.
- ii. Montrer que si $|x| > R$, alors la série de terme général $u_k x^k$ diverge.

On considère alors la fonction $S :]-R, R[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k x^k.$$

- (b) Soit $R' \in]0, R[$. Montrer que la série de terme général $u_k x^k$ converge uniformément sur $[-R', R']$. Que peut-on en déduire sur la régularité de S ?
 - (c) Montrer que le rayon de convergence de la série de terme général $(k+1)u_{k+1}x^k$ est égal à R .
 - (d) Montrer que S est indéfiniment dérivable sur $]-R, R[$.
3. Soit r un entier naturel non nul. Déterminer le rayon de convergence de la série entière de terme général $\frac{k^r x^k}{k!}$. Déterminer sa somme lorsque $r = 1$ et lorsque $r = 2$.
4. On note, pour tout entier $N \geq 1$, α_N le nombre de partitions de l'ensemble $\llbracket 1, N \rrbracket$ et on convient que $\alpha_0 = 1$.
- (a) Calculer α_1 , α_2 et α_3 .
 - (b) Montrer que pour tout entier $N \geq 0$,

$$\alpha_{N+1} = \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} \alpha_k.$$

- (c) Montrer que, pour tout $N \geq 0$, $\alpha_N \leq N!$.
- (d) En déduire que la série entière de terme général $\frac{\alpha_N x^N}{N!}$ converge pour tout x réel tel que $|x| < 1$. On note $f(x)$ sa somme.
- (e) Montrer que f est dérivable sur $]-1, 1[$ et que pour tout $x \in]-1, 1[$, $f'(x) = e^x f(x)$.
En déduire que pour tout $x \in]-1, 1[$, $f(x) = e^{e^x - 1}$.
- (f) En déduire que pour tout entier naturel N ,

$$\alpha_N = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^N}{k!}.$$

II. Familles sommables.

Soit $I \subset \mathbb{N}^n$. Les éléments de I seront notés sous la forme $\underline{i} = (i_1, i_2, \dots, i_n)$.

Cas des familles sommables de réels positifs.

Soit $u = (u_{\underline{i}})_{\underline{i} \in I}$ une famille de réels positifs ou nuls indexée par I . On dit que u est sommable lorsque la borne supérieure suivante est finie :

$$\sup \left\{ \sum_{\underline{i} \in J} u_{\underline{i}}, J \subset I \text{ et } J \text{ fini} \right\} < +\infty.$$

Dans ce cas, on note

$$\sum_{\underline{i} \in I} u_{\underline{i}} = \sup \left\{ \sum_{\underline{i} \in J} u_{\underline{i}}, J \subset I \text{ et } J \text{ fini} \right\}.$$

Soit $u = (u_{\underline{i}})_{\underline{i} \in I}$ et $(v_{\underline{i}})_{\underline{i} \in I}$ deux familles de réels positifs et a, b deux réels positifs.

5. On suppose que pour tout $\underline{i} \in I$,

$$u_{\underline{i}} \leq v_{\underline{i}}.$$

Montrer que si v est sommable, alors u est sommable.

6. On suppose que u et v sont sommables. Montrer que la famille $au + bv$ définie par

$$(au + bv)_{\underline{i}} = au_{\underline{i}} + bv_{\underline{i}}$$

est sommable et que

$$\sum_{\underline{i} \in I} (au_{\underline{i}} + bv_{\underline{i}}) = a \left(\sum_{\underline{i} \in I} u_{\underline{i}} \right) + b \left(\sum_{\underline{i} \in I} v_{\underline{i}} \right).$$

7. On considère $(I_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une famille de sous-ensembles de I tels que

$$\triangleright \bigcup_{k \in \mathbb{N}} I_k = I.$$

$$\triangleright \text{Pour tout } k, l \in \mathbb{N}, \text{ distincts, } I_k \cap I_l = \emptyset.$$

Par convention, si $I_k = \emptyset$, on pose

$$\sum_{\underline{i} \in I_k} u_{\underline{i}} = 0.$$

On suppose que u est sommable.

- (a) Montrer que la famille $(u_{\underline{i}})_{\underline{i} \in I_k}$ est sommable pour tout $k \in \mathbb{N}$.

- (b) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^p \left(\sum_{\underline{i} \in I_k} u_{\underline{i}} \right) \leq \sum_{\underline{i} \in I} u_{\underline{i}}.$$

- (c) Montrer que la série de terme général $\sum_{\underline{i} \in I_k} u_{\underline{i}}$ converge. Sa somme est notée $\sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{\underline{i} \in I_k} u_{\underline{i}}$.

(d) Montrer que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{i \in I_k} u_i \leq \sum_{i \in I} u_i.$$

8. Réciproquement, montrer que si la famille $(u_i)_{i \in I_k}$ est sommable pour tout $k \in \mathbb{N}$ et si la série de terme général $\sum_{i \in I_k} u_i$ converge, alors $(u_i)_{i \in I}$ est sommable et

$$\sum_{i \in I} u_i \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{i \in I_k} u_i.$$

9. Dédurre des questions précédentes le résultat suivant, appelé *théorème de sommation par paquets* :

$(u_i)_{i \in I_k}$ est sommable pour tout $k \in \mathbb{N}$ et la série de terme général $\sum_{i \in I_k} u_i$ converge si et seulement si $(u_i)_{i \in I}$ est sommable. De plus, dans ce cas,

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{i \in I_k} u_i.$$

Cas des familles sommables de réels quelconques.

Soit $u = (u_i)_{i \in I}$ une famille de réels indexée par I . On dit que u est sommable lorsque la famille de réels positifs ou nuls $|u| = (|u_i|)_{i \in I}$ est sommable.

Soit $u = (u_i)_{i \in I}$ une famille de réels indexée par I . Pour tout $i \in I$, on pose

$$u_i^+ = \max(u_i, 0) \quad \text{et} \quad u_i^- = \max(-u_i, 0).$$

Ceci définit deux familles $u^+ = (u_i^+)_{i \in I}$ et $u^- = (u_i^-)_{i \in I}$ de réels positifs ou nuls.

10. Soit $u = (u_i)_{i \in I}$ une famille de réels indexée par I . Montrer que la famille u est sommable si et seulement si les familles u^+ et u^- sont sommables.

Pour $(u_i)_{i \in I}$ une famille sommable de réels, on définit alors sa somme par

$$\sum_{i \in I} u_i = \left(\sum_{i \in I} u_i^+ \right) - \left(\sum_{i \in I} u_i^- \right).$$

11. Soient $u = (u_i)_{i \in I}$ et $v = (v_i)_{i \in I}$ deux familles sommables de réels.

(a) Montrer que la famille $u + v$ définie par

$$(u + v)_i = u_i + v_i$$

est sommable et

$$\sum_{i \in I} (u_i + v_i) = \left(\sum_{i \in I} u_i \right) + \left(\sum_{i \in I} v_i \right).$$

(b) Soient a et b deux réels. Montrer que la famille $au + bv$ définie par

$$(au + bv)_i = au_i + bv_i$$

est sommable et déterminer sa somme en fonction des sommes de u et v .

12. On considère $(I_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une famille de sous-ensembles de I tels que

$$\triangleright \bigcup_{k \in \mathbb{N}} I_k = I.$$

\triangleright Pour tout $k, l \in \mathbb{N}$, distincts, $I_k \cap I_l = \emptyset$.

Par convention, si $I_k = \emptyset$, on pose

$$\sum_{i \in I_k} u_i = 0.$$

Montrer que $(u_i)_{i \in I_k}$ est sommable pour tout $k \in \mathbb{N}$ et la série de terme général $\sum_{i \in I_k} |u_i|$ converge si et seulement si $(u_i)_{i \in I}$ est sommable. De plus dans ce cas, vérifier que

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{i \in I_k} u_i.$$

Application : Théorème du transfert.

13. Soit X_1, X_2, \dots, X_k des variables aléatoires réelles discrètes définies sur Ω et φ une application définie sur \mathbb{R}^n à valeurs dans \mathbb{R} telle que $T = \varphi(X_1, X_2, \dots, X_k)$ soit encore une variable aléatoire réelle discrète définie sur Ω . Pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, l'univers-image de X_i est noté

$$X_i(\Omega) = \{x_{i,j} \mid j \in I_i\},$$

où I_i est une partie de \mathbb{N} . On pose $I = I_1 \times \dots \times I_n$.

Montrer que les deux assertions (A_1) et (A_2) suivantes sont équivalentes :

(A_1) T admet une espérance.

(A_2) La famille $\left(\varphi(x_{1,i_1}, x_{2,i_2}, \dots, x_{n,i_n}) \mathbf{P} \left(\bigcap_{k=1}^n [X_k = x_{k,i_k}] \right) \right)_{i \in I}$ est sommable.

De plus dans ce cas, vérifier que

$$\mathbf{E}(T) = \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_n) \in I} \varphi(x_{1,i_1}, x_{2,i_2}, \dots, x_{n,i_n}) \mathbf{P} \left(\bigcap_{k=1}^n [X_k = x_{k,i_k}] \right).$$

III. Estimateurs.

Soit I un intervalle ouvert, non vide, inclus dans $]0, +\infty[$.

On considère une variable aléatoire X définie sur Ω suivant une loi de Poisson dépendante d'un paramètre réel $\theta \in I$, inconnu : autrement dit, $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et, pour tout entier naturel k ,

$$\mathbf{P}([X = k]) = \frac{\theta^k}{k!} e^{-\theta}.$$

On cherche à approcher la valeur de ce paramètre θ , ou éventuellement la valeur de son image $g(\theta)$ par une fonction réelle g définie sur I .

14. (a) À l'aide des résultats de la première partie, montrer que X admet des moments d'ordre r pour tout r entier naturel non nul (c'est-à-dire que X admet une espérance pour tout r entier naturel non nul) puis que l'espérance et la variance de X sont égales à θ .

(b) Donner une interprétation combinatoire des moments d'ordre r de X lorsque $\theta = 1$.

15. Soit n variables aléatoires Y_1, Y_2, \dots, Y_n définies sur Ω , mutuellement indépendantes, suivant des lois de Poisson de paramètre respectif $\theta_1, \dots, \theta_n$. Montrer que la variable aléatoire $\sum_{i=1}^n Y_i$ suit la loi de Poisson de paramètre $\sum_{i=1}^n \theta_i$. *Indication* : on pourra démontrer d'abord le cas $n = 2$.

Soient X_1, X_2, \dots, X_n des variables aléatoires réelles définies sur Ω , mutuellement indépendantes, et de même loi que X . Soit φ une application définie sur \mathbb{R}^n et à valeurs dans \mathbb{R} telle que $\varphi(X_1, X_2, \dots, X_n)$ soit encore une variable aléatoire définie sur Ω .

- ▷ Le n -uplet (X_1, X_2, \dots, X_n) est appelé un n -échantillon de la loi de X et la variable aléatoire $T_n = \varphi(X_1, X_2, \dots, X_n)$ est appelée un estimateur de $g(\theta)$.
- ▷ Après une réalisation de l'expérience aléatoire associée à Ω , on note x_1, x_2, \dots, x_n les valeurs prises par X_1, X_2, \dots, X_n : ce sont les observations de l'échantillon. Le réel $t = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est appelé une réalisation de l'estimateur T_n de $g(\theta)$ et est choisie comme estimation ponctuelle de la valeur de $g(\theta)$.

Autrement dit, estimer ponctuellement $g(\theta)$, c'est décider d'accorder à $g(\theta)$ la valeur expérimentale $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Les outils suivants vont nous permettre d'étudier les estimateurs et de choisir le plus pertinent : soit (X_1, X_2, \dots, X_n) un n -échantillon de la loi de X et T_n un estimateur de $g(\theta)$ admettant une espérance $\mathbf{E}(T_n)$, dépendant éventuellement de θ .

- ▷ Le réel $\mathbf{E}(T_n) - g(\theta)$ est appelé biais de T_n et est noté $b_\theta(T_n)$.
- ▷ L'estimateur T_n est dit sans biais lorsque $b_\theta(T_n) = 0$, c'est-à-dire lorsque $\mathbf{E}(T_n) = g(\theta)$.
- ▷ Si l'estimateur T_n admet une variance $\mathbf{V}(T_n)$, dépendant éventuellement de θ , on appelle risque quadratique de T_n le réel

$$r_\theta(T_n) = \mathbf{E}((T_n - g(\theta))^2) = b_\theta(T_n)^2 + \mathbf{V}(T_n).$$

En particulier si T_n est sans biais, alors $r_\theta(T_n) = \mathbf{V}(T_n)$.

Une suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ d'estimateurs de $g(\theta)$ admettant une espérance est dite asymptotiquement sans biais lorsque $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_\theta(T_n) = 0$.

On commence par étudier deux estimateurs de θ : la moyenne et la variance empiriques. Soit (X_1, X_2, \dots, X_n) un n -échantillon de la loi de X . On définit la moyenne empirique \overline{X}_n de X_1, X_2, \dots, X_n et la variance empirique \overline{S}_n de X_1, X_2, \dots, X_n par

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \quad \text{et} \quad \overline{S}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k - \overline{X}_n)^2.$$

16. Montrer que \overline{X}_n est un estimateur sans biais de θ et que son risque quadratique est $\frac{\theta}{n}$.

17. (a) Montrer que

$$n\overline{S}_n = \sum_{k=1}^n X_k^2 - n\overline{X}_n^2.$$

En déduire $\mathbf{E}(\overline{S}_n)$.

(b) Montrer que \overline{S}_n est un estimateur asymptotiquement sans biais de θ .

(c) Montrer que $\widehat{S}_n = \frac{n}{n-1}\overline{S}_n$ est un estimateur sans biais de θ . Cet estimateur est appelé *variance empirique corrigée*.

18. (a) Montrer que

$$n\overline{S}_n = \left(\sum_{k=1}^n (X_k - \theta)^2 \right) - n(\overline{X}_n - \theta)^2.$$

(b) En déduire que $n\overline{S}_n$ admet une variance donnée par la formule suivante :

$$\mathbf{V}(n\overline{S}_n) = n\mathbf{V}((X - \theta)^2) - 2n^2\mathbf{Cov}((X_1 - \theta)^2, (\overline{X}_n - \theta)^2) + n^2\mathbf{V}((\overline{X}_n - \theta)^2).$$

(c) Montrer que

$$n^4\mathbf{E}((\overline{X}_n - \theta)^4) = n\mathbf{E}((X - \theta)^4) + 3n(n-1)\theta^2.$$

Indication : on remarquera que lorsqu'on développe $\left(\sum_{k=1}^n (X_k - \theta) \right)^4$, on obtient des termes de la forme $(X_i - \theta)^4$ ou $(X_i - \theta)^2(X_j - \theta)^2$ ou $(X_i - \theta)^3(X_j - \theta)$ ou $(X_i - \theta)^2(X_j - \theta)(X_k - \theta)$ ou $(X_i - \theta)(X_j - \theta)(X_k - \theta)(X_l - \theta)$ avec i, j, k, l distincts deux à deux, dont on précisera l'espérance.

(d) En déduire que

$$n^2\mathbf{V}((\overline{X}_n - \theta)^2) = \frac{\mathbf{E}((X - \theta)^4) + (2n - 3)\theta^2}{n}.$$

(e) Montrer que

$$n^2(\overline{X}_n - \theta)^2 = \sum_{k=1}^n (X_k - \theta)^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (X_i - \theta)(X_j - \theta).$$

(f) En déduire que

$$n^2\mathbf{E}((X_1 - \theta)^2(\overline{X}_n - \theta)^2) = \mathbf{E}((X - \theta)^4) + (n - 1)\theta^2,$$

puis que

$$\mathbf{Cov}((X_1 - \theta)^2, (\overline{X}_n - \theta)^2) = \frac{\mathbf{E}((X - \theta)^4) - \theta^2}{n^2}.$$

(g) Déduire des questions précédentes que

$$\mathbf{V}(\widehat{S}_n) = \frac{1}{n}\mathbf{E}((X - \theta)^4) - \frac{n-3}{n(n-1)}\theta^2.$$

IV. Inégalité de Cramer-Rao.

Le meilleur estimateur possible est un estimateur sans biais de variance minimale. Pour étudier cet extremum, nous allons établir l'inégalité de Cramer-Rao.

On se place toujours dans $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et on considère de nouveau X une variable aléatoire définie sur Ω suivant une loi de Poisson dépendante d'un paramètre réel $\theta \in I$ inconnu avec I intervalle non vide ouvert inclus dans $]0, +\infty[$. On considère les fonctions suivantes :

$$f : \begin{cases} I \times \mathbb{N} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (\theta, k) & \longmapsto \mathbf{P}([X = k]) = \frac{\theta^k}{k!} e^{-\theta}. \end{cases}$$

$$g : \begin{cases} I \times \mathbb{N} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (\theta, k) & \longmapsto \ln(f(\theta, k)). \end{cases}$$

On définit sous réserve d'existence l'information de Fisher de X par

$$F_X(\theta) = \mathbf{V} \left(\frac{\partial g}{\partial \theta}(\theta, X) \right).$$

19. Montrer que pour tout $\theta \in I$,

$$\mathbf{E} \left(\frac{\partial g}{\partial \theta}(\theta, X) \right) = 0,$$

puis que

$$F_X(\theta) = \frac{1}{\theta}.$$

Soit φ une fonction réelle telle que $\varphi(X)$ soit une variable aléatoire définie sur Ω , admettant une espérance $\mathbf{E}(\varphi(X))$ et une variance $\mathbf{V}(\varphi(X))$ pour tout $\theta \in I$. L'inégalité de Cramer-Rao affirme que

$$\mathbf{V}(\varphi(X)) \geq \frac{\left(\frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{E}(\varphi(X)) \right)^2}{F_X(\theta)}.$$

Nous allons démontrer cette inégalité.

20. (a) Montrer que la fonction $\psi : \theta \longmapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \varphi(k) f(\theta, k)$ est définie et dérivable sur I et que pour tout $\theta \in I$,

$$\psi'(\theta) = \sum_{k=0}^{+\infty} \varphi(k) \frac{\partial f}{\partial \theta}(\theta, k).$$

(b) En déduire que

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{E}(\varphi(X)) = \mathbf{E} \left(\varphi(X) \frac{\partial g}{\partial \theta}(\theta, X) \right).$$

21. On fixe temporairement $\theta \in I$ et on considère la fonction Q_θ suivante dépendant d'une variable réelle t :

$$Q_\theta(t) = \mathbf{E} \left(\left(\varphi(X) - \mathbf{E}(\varphi(X)) + t \frac{\partial g}{\partial \theta}(\theta, X) \right)^2 \right).$$

- (a) Montrer que Q_θ est un polynôme de degré 2 défini sur \mathbb{R} .
- (b) Étudier le discriminant de Q_θ .
- (c) En déduire l'inégalité de Cramer-Rao.

Nous allons généraliser cette inégalité à nos estimateurs.

Soit (X_1, X_2, \dots, X_n) un n -échantillon de la loi de X . On appelle fonction de vraisemblance pour les observations (k_1, k_2, \dots, k_n) de l'échantillon la fonction du paramètre $\theta \in I$ définie de la façon suivante :

$$\mathcal{L}(\theta, k_1, k_2, \dots, k_n) = \mathbf{P} \left(\bigcap_{j=1}^n [X_j = k_j] \right).$$

On définit, sous réserve d'existence, l'information de Fisher de l'échantillon (X_1, X_2, \dots, X_n) par

$$F(\theta) = V \left(\frac{\partial \ln(\mathcal{L})}{\partial \theta}(\theta, X_1, X_2, \dots, X_n) \right).$$

22. Montrer que pour tout $\theta \in I$,

$$\mathbf{E} \left(\frac{\partial \ln(\mathcal{L})}{\partial \theta}(\theta, X_1, X_2, \dots, X_n) \right) = 0,$$

puis que

$$F(\theta) = nF_X(\theta).$$

Soit $T_n = \varphi(X_1, X_2, \dots, X_n)$ un estimateur de $g(\theta)$ admettant une espérance pour tout $\theta \in I$ avec g dérivable sur I . On dit que T_n est régulier lorsque les deux conditions suivantes sont vérifiées :

▷ Pour tout $\theta \in I$, la famille

$$\left(\varphi(k_1, k_2, \dots, k_n) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta}(\theta, k_1, k_2, \dots, k_n) \right)_{(k_1, k_2, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n}$$

est sommable.

▷ La relation suivante est vérifiée :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sum_{(k_1, k_2, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n} \varphi(k_1, k_2, \dots, k_n) \mathcal{L}(\theta, k_1, k_2, \dots, k_n) \right) \\ &= \sum_{(k_1, k_2, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n} \varphi(k_1, k_2, \dots, k_n) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta}(\theta, k_1, k_2, \dots, k_n). \end{aligned}$$

- 23. (a) Montrer que tout estimateur T_n de $g(\theta)$ admettant une espérance est régulier.
- (b) En déduire que pour tout $\theta \in I$,

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{E}(T_n) = \mathbf{E} \left(T_n \frac{\partial \ln(\mathcal{L})}{\partial \theta}(\theta, X_1, X_2, \dots, X_n) \right) = \mathbf{E} \left((T_n - g(\theta)) \frac{\partial \ln(\mathcal{L})}{\partial \theta}(\theta, X_1, X_2, \dots, X_n) \right).$$

- 24. Montrer que si T_n est un estimateur sans biais de $g(\theta)$ admettant un moment d'ordre 2 pour tout $\theta \in I$, alors

$$\mathbf{V}(T_n) \geq \frac{g'(\theta)^2}{nF_X(\theta)}.$$

Un estimateur sans biais de $g(\theta)$ admettant un moment d'ordre 2 est dit efficace s'il atteint la borne de Cramer-Rao, c'est-à-dire si

$$\mathbf{V}(T_n) = \frac{g'(\theta)^2}{nF_X(\theta)}.$$

25. Montrer que \overline{X}_n est un estimateur efficace de θ .
26. Nous allons maintenant chercher les estimateurs réguliers sans biais efficaces de θ .
 - (a) Soit T_n un estimateur efficace et sans biais de θ admettant un moment d'ordre 2. Montrer que T_n et \overline{X}_n sont presque sûrement liées par une relation affine.
 - (b) Montrer qu'il existe deux estimateurs de θ sans biais et efficaces et admettant un moment d'ordre 2, dont l'un est \overline{X}_n . Que peut-on penser du second pour les applications pratiques ?

————— FIN DU SUJET —————