

Université de Lorraine-Metz
Année 2025-2026

Agrégation interne

AGREGATION BLANCHE
19 novembre 2025. Durée 6 heures

Le but du problème est la construction du corps des quaternions, l'étude de certaines de ses propriétés algébriques et topologiques. On utilisera ensuite ce corps pour étudier les isométries de $\mathbb{R}^3$. On commence par introduire des notations et rappeler certains résultats qui pourront être utilisés dans le problème.

Soit E un espace vectoriel euclidien. Si x et y sont deux éléments de E , on note (x/y) leur produit scalaire. A ce produit scalaire est associé une norme définie par

$$\forall x \in E, \quad \|x\| = \sqrt{(x/x)}$$

On désigne par $End(E)$ l'anneau (pour l'addition et la composition) des applications linéaires de E dans lui même et par $GL(E)$ le groupe des automorphismes linéaires de E , c'est à dire les applications linéaires inversibles de E dans E . On note $O(E)$ le groupe des isométries de E . Précisément

$$O(E) = \{f \in End(E) / \|f(x)\| = \|x\|, \forall x \in E\}$$

$O(E)$ est un sous-groupe de $GL(E)$. On rappelle que $O^+(E)$ (resp $O^-(E)$) est formé des éléments de $O(E)$ de déterminant 1 (resp de déterminant -1).

Si $\dim(E) = 3$, on fixe une base $\mathcal{E}$ de E et on rappelle que

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \exists z \in E \text{ (unique) } / \forall t \in E, \det_{\mathcal{E}}(x, y, t) = (z/t)$$

où $\det_{\mathcal{E}}(x, y, t)$ représente le déterminant dans la base $\mathcal{E}$ des vecteurs x, y et t . On appelle ce vecteur le produit vectoriel de x et y , et le note $z = x \wedge y$. On a donc, la formule dite du produit mixte:

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \det_{\mathcal{E}}(x, y, t) = (x \wedge y / t), \quad \forall t \in E$$

On rappelle aussi que le produit vectoriel $x \wedge y$ est nul si, et seulement si, les vecteurs x et y sont colinéaires, que si $\mathcal{E} = \{i, j, k\}$ est une base orthonormée, on a

$$i \wedge j = k = -j \wedge i, \quad j \wedge k = i = -k \wedge j, \quad k \wedge i = j = -i \wedge k$$

et enfin que

$$\forall (x, y, z) \in E^3, \quad x \wedge (y \wedge z) = (x/z)y - (x/y)z$$

Définitions:

Soient k un corps commutatif et A un k espace vectoriel.

1) On dit que A est une k -algèbre, s'il existe une application $\cdot : A \times A \longrightarrow A$ k -bilinéaire telle que $(A, +, \cdot)$ est un anneau unitaire (la multiplication a un élément neutre) ce qui signifie que A est un anneau unitaire tel que $\forall(\alpha, \beta) \in K^2, \forall(x, y, z) \in A^3$,

$$(\alpha x + \beta y) \cdot z = \alpha(x \cdot z) + \beta(y \cdot z) : \quad \text{et} \quad x \cdot (\alpha y + \beta z) = \alpha(x \cdot y) + \beta(x \cdot z)$$

On note 1_A (ou 1 s'il n'y a pas de confusions possibles) l'élément neutre de la multiplication de A . Le produit de deux éléments x et y sera noté xy .

2) Si B est une autre k -algèbre, on appelle homomorphisme (resp antihomomorphisme) d'algèbres de A dans B , toute application k - linéaire de A dans B telle que

$$\forall(x, y) \in A^2, f(xy) = f(x)f(y) \quad (\text{resp } f(xy) = f(y)f(x)) \text{ et } f(1_A) = 1_B$$

si $A = B$ et que f est en plus bijective, on dit que f est un automorphisme (resp un antiautomorphisme) de l'algèbre A . On notera $Aut(A)$ le groupe des automorphismes de A .

3) On dit qu'une partie $A' \subseteq A$ est une sous-algèbre si A' est un sous-espace vectoriel de A , qu'il contient 1_A et que $\forall(x, y) \in A'^2, xy \in A'$.

4) On appelle centre de A l'ensemble noté $Z(A) = \{x \in A / \forall y \in A, xy = yx\}$.

On rappelle enfin que l'on désigne par $M_n(k)$ la k -algèbre des matrices carrées d'ordre $n \geq 1$ à coefficients dans k .

Partie I

Dans $M_2(\mathbb{C})$, soit

$$\mathbb{H} = \{M \in M_2(\mathbb{C}) / M = \begin{pmatrix} x & y \\ -\bar{y} & \bar{x} \end{pmatrix}, \text{ où } x, y \in \mathbb{C}\}$$

1) Montrer que $\mathbb{H}$ est une sous $\mathbb{R}$ -algèbre de $M_2(\mathbb{C})$. ($M_2(\mathbb{C})$ est aussi une $\mathbb{R}$ -algèbre)

2) Quelle est sa dimension?

3) $\mathbb{H}$ est-il un sous $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de $M_2(\mathbb{C})$?

4) Soit $M \in \mathbb{H}$ une matrice non nulle. Montrer que M est inversible et que $M^{-1} \in \mathbb{H}$. En déduire que $\mathbb{H}$ est un corps.

5) On considère les éléments suivants de $\mathbb{H}$:

$$1_{\mathbb{H}} = Id_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, i = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, k = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

a) Montrer que ces 4 éléments forment une base de $\mathbb{H}$ et que l'on a les relations suivantes:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = k = -ji$$

$$jk = i = -kj, \quad ki = j = -ik$$

b) Expliquer brièvement, pourquoi ces relations avec la définition de $1_{\mathbb{H}}$ suffisent pour multiplier deux éléments quelconques de $\mathbb{H}$.

On appelle $\mathbb{H}$ le corps des quaternions. On identifie le sous-espace vectoriel engendré par $1_{\mathbb{H}}$ au corps des réels (ce qui signifie que pour tout réel a , on écrit a au lieu de $a1_{\mathbb{H}}$). Le sous-espace vectoriel engendré par i, j, k sera identifié à $\mathbb{R}^3$. Il en résulte que tout élément q de $\mathbb{H}$ s'écrit de façon unique sous la forme

$$q = R(q) + P(q) = a + bi + cj + dk$$

où $R(q) = a, P(q) = bi + cj + dk$ et $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$.

On appelle $R(q)$ la partie réelle de q et $P(q)$ sa partie quaternionique. Un réel est donc un élément dont la partie quaternionique est nulle et un quaternion pur est un élément de $\mathbb{R}^3$ c'est à dire un quaternion dont la partie réelle est nulle.

c) Pour tout quaternion $q = R(q) + P(q)$, on pose $\bar{q} = R(q) - P(q)$. Montrer que l'application ainsi définie est un antiautomorphisme de l'algèbre $\mathbb{H}$. L'élément $\bar{q}$ s'appelle le conjugué de q .

6) On pose pour tout quaternion q , $\phi(q) = q\bar{q}$. Montrer que ϕ est une forme quadratique définie positive sur $\mathbb{H}$ pour laquelle la base définie au I.5) est une base orthonormée. On note $\|q\| = \sqrt{q\bar{q}}$ la norme associée.

7) Montrer que pour tout $(q, q') \in \mathbb{H}^2$, $\|qq'\| = \|q\|\|q'\|$.

8) Montrer alors que pour tout quaternion non nul q , on a $q^{-1} = \frac{\bar{q}}{\|q\|^2}$

Partie II

Le corps des quaternions est maintenant construit.

1) Montrer que $(\mathbb{H}, \|\cdot\|)$ est ainsi un espace vectoriel normé complet.

2) On pose $S = \{q \in \mathbb{H} / \|q\| = 1\}$. Montrer que S est un sous-groupe multiplicatif de $\mathbb{H}^*$ et que S est compact. Est-il connexe?

3) Soient u et v deux quaternions purs c'est à dire des éléments de $\mathbb{R}^3$. Montrer

$$uv = -(u/v) + u \wedge v$$

où le produit scalaire est celui défini en I.6) et le produit vectoriel est le produit vectoriel usuel dans $\mathbb{R}^3$ par rapport à la base orthonormée $\{i, j, k\}$.

4) Montrer que $\forall u \in \mathbb{H}$,

(i) $u^2 \in \mathbb{R}_+$ si, et seulement si, $u \in \mathbb{R}$.

(ii) $u^2 \in \mathbb{R}_-$ si, et seulement si, $u \in \mathbb{R}^3$.

5) Montrer que tout quaternion est produit de deux quaternions purs c'est à dire

$$\forall q \in \mathbb{H}, \exists (u, v) \in \mathbb{R}^3 / q = uv$$

(On cherchera d'abord u' et v' dans $\mathbb{R}^3$ tels que $u'v' = P(q)$ puis on modifiera u' ou v' pour avoir l'égalité des parties réelles).

6) Traiter explicitement le cas $q = 1 + i + j - k$. (On se contentera d'une solution)

7) Résoudre dans $\mathbb{H}$, $x^2 = \frac{1}{2} + i + j$ et $x^2 = -1$.

Que dire de l'énoncé suivant: Soient k un corps et n un entier non nul. Tout polynôme de degré n à coefficient dans k a au plus n racines dans k ?

8) Montrer, en utilisant II.4) et II.5) , que la norme définie dans la partie I.6) est l'unique norme N sur $\mathbb{H}$ telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{H}^2, \quad N(xy) = N(x)N(y)$$

9) Déterminer le centre $\mathbb{H}$. (On remarquera que pour qu'un élément soit dans le centre, il faut et il suffit qu'il commute avec les vecteurs de la base).

Partie III

Le but de cette partie est de déterminer tous les automorphismes de l'algèbre $\mathbb{H}$. Soient s un quaternion non nul et σ_s l'application de $\mathbb{H}$ dans lui même définie par

$$\forall x \in \mathbb{H}, \quad \sigma_s(x) = sxs^{-1}$$

1) Montrer σ_s est un automorphisme de l'algèbre $\mathbb{H}$ et que $\sigma_s \in O(\mathbb{H})$.

2) Montrer que la restriction de σ_s à $\mathbb{R}$ vaut l'identité et que $\sigma_s(\mathbb{R}^3) \subseteq \mathbb{R}^3$.

3) Montrer que l'application σ de $\mathbb{H}^*$ dans $Aut(\mathbb{H})$ qui à s associe σ_s est un morphisme de groupe. Quel est son noyau?

Dans la suite, On veut montrer que tout automorphisme d'algèbre de $\mathbb{H}$ est de la forme σ_s . (ce qui signifie que σ est surjectif). Pour cela, on va montrer quelques résultats préliminaires.

4) Montrer que si u et v sont deux quaternions purs alors

$$(u/v) = -\frac{1}{2}(uv + vu)$$

5) Soient u et v deux quaternions purs de même norme. On veut montrer qu'il existe un quaternion non nul q tel que $v = quq^{-1}$.

a) Etudier le cas où u et v sont colinéaires. (On remarquera que $u = \pm v$, et on cherchera $q = R(q) + P(q)$ tel que $vq = qu$)

b) On suppose que u et v ne sont pas colinéaires (mais toujours de même norme). Vérifier que

$$u(uv) - (uv)v = \|u\|^2(u - v)$$

et en déduire qu'il existe p non nul tel que $up = pv$ et conclure à l'existence de q .

6) Montrer que $P(q)$ est orthogonal à u et v .

7) Soit maintenant $\phi \in \text{Aut}(\mathbb{H})$.

a) Montrer que la restriction de ϕ à $\mathbb{R}$ vaut l'identité et que ϕ transforme tout quaternion pur en un quaternion pur de même norme. (Utiliser II.4)).

b) En déduire que la restriction de ϕ à $\mathbb{R}^3$ est un élément de $O(\mathbb{R}^3)$.

c) Montrer que ϕ est entièrement déterminé par l'image de i et de j . Montrer qu'il existe un quaternion t tel que $\phi(i) = tit^{-1}$. En déduire que $\sigma_t^{-1} \circ \phi$ est un automorphisme de $\mathbb{H}$ qui laisse fixe i .

8) Soit alors f un automorphisme de $\mathbb{H}$ qui laisse fixe i .

a) En utilisant la question 7)b) précédente, montrer qu'il existe a, b deux réels tels que

$$f(j) = aj + bk, \quad \text{et } a^2 + b^2 = 1$$

b) Montrer qu'il existe un quaternion h tel que $f(j) = hjh^{-1}$ avec $h = \beta + \lambda i + \mu k$ et β, λ et μ des réels. (Utiliser la question III.6))

c) Montrer de même que l'on a $b = 0$ ou $\mu = 0$.

d) Montrer que dans chacun des cas, il existe un quaternion h tel que f et σ_h coïncident sur i et j et conclure que $f = \sigma_h$.

9) Conclure.

10) Montrer que l'on peut choisir le quaternion associé à ϕ de norme 1. En déduire que le groupe des automorphismes de l'algèbre $\mathbb{H}$ est compact et connexe.

11) Déduire de ce qui précède, tous les antiautomorphismes d'algèbres de $\mathbb{H}$. (On pourra utiliser l'application qui à un quaternion associe son conjugué).

Partie IV

Le but de cette partie est d'utiliser les quaternions pour l'étude de $O^+(\mathbb{R}^3)$. D'après les résultats de la partie précédente, pour tout automorphisme ϕ de $\mathbb{H}$, il existe un quaternion s tel que $\phi = \sigma_s$ et la restriction de ϕ à $\mathbb{R}^3$ est un élément de $O(\mathbb{R}^3)$. On appelle ρ_s cette restriction. On veut montrer que tout élément de $O^+(\mathbb{R}^3)$ est de la forme ρ_s .

1) Montrer que $\rho_s \in O^+(\mathbb{R}^3)$. (On calculera $\det_{\mathcal{E}}(\rho_s(i), \rho_s(j), \rho_s(k))$ en utilisant le produit mixte et les relations qui lient le produit vectoriel et celui des quaternions).

2) Soit f un élément de $O^+(\mathbb{R}^3)$. Supposons que f est une symétrie.

a) Montrer que f est une symétrie droite.

b) Soit $F = \mathbb{R}s$ cette droite où $s \in \mathbb{R}^3$ est un quaternion pur. Calculer pour $x \in F$ puis pour $x \in F^\perp$, sxs^{-1} . En déduire que $f = \rho_s$. (on pourra utiliser les formules du double produit vectoriel).

3) Montrer que tout élément de $O^+(\mathbb{R}^3)$ est produit de deux symétries droites. En déduire que

$$\forall f \in O^+(\mathbb{R}^3), \exists s \in \mathbb{H} / f = \rho_s$$

- 4) En déduire que $O^+(\mathbb{R}^3)$ est compact et connexe.
- 5) Retrouver le résultat démontré dans la partie II, que tout quaternion est produit de deux quaternions purs.
- 6) Que peut-on dire si $f \in O^-(\mathbb{R}^3)$?

Dans la suite de cette partie, on va démontrer des formules qui permettent d'avoir l'axe et l'angle d'un élément de $O^+(\mathbb{R}^3)$ en fonction du quaternion qui lui est associé.

7) Soit $f \in O^+(\mathbb{R}^3)$. On suppose que $f \neq Id$ et posons $s = \alpha + t$ le quaternion associé où $(\alpha, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$. Montrer que t est non nul et qu'il est dans l'axe de f .

8) On pose $u = \frac{t}{\|t\|}$, on choisit $v \in \mathbb{R}^3$ orthogonal à u et de norme 1, puis on pose $w = u \wedge v$.

Montrer que $\{u, v, w\}$ est une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$ (la base de référence étant la base orthonormée $\{i, j, k\}$) et que si θ est l'angle de f alors la matrice de f dans cette base est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

9) Calculer alors $f(v)$ de deux façons différentes et en déduire que

$$\cos\theta = \frac{\alpha^2 + t^2}{\alpha^2 - t^2} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{2\alpha\|t\|}{\alpha^2 - t^2}$$

(On rappelle que $\|s\|^2 = \alpha^2 - t^2$ et que t^2 est négatif)

10) Montrer alors que si $\alpha \neq 0$ on a, $\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\|t\|}{\alpha}$. Ceci détermine $\frac{\theta}{2}$ à π près, donc θ à 2π près.

11) Qu'en est-il si α est nul?

12) Applications:

a) Soit r la rotation d'axe $i + j + k$ et d'angle $\frac{4\pi}{3}$. Déterminer le quaternion s tel que $r = \rho_s$.

b) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$M = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Montrer que f est une rotation et déterminer tous ses éléments(quaternion associé, angle, axe).

c) De même caractériser l'endomorphisme g de matrice

$$N = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$