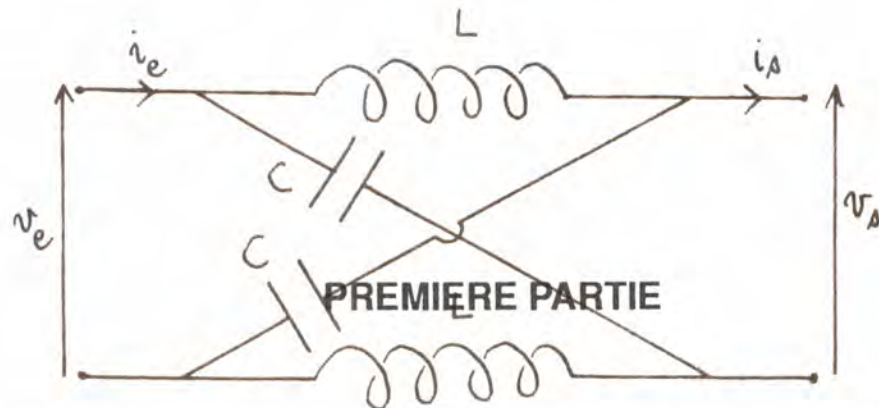


COURS DE MATHEMATIQUES

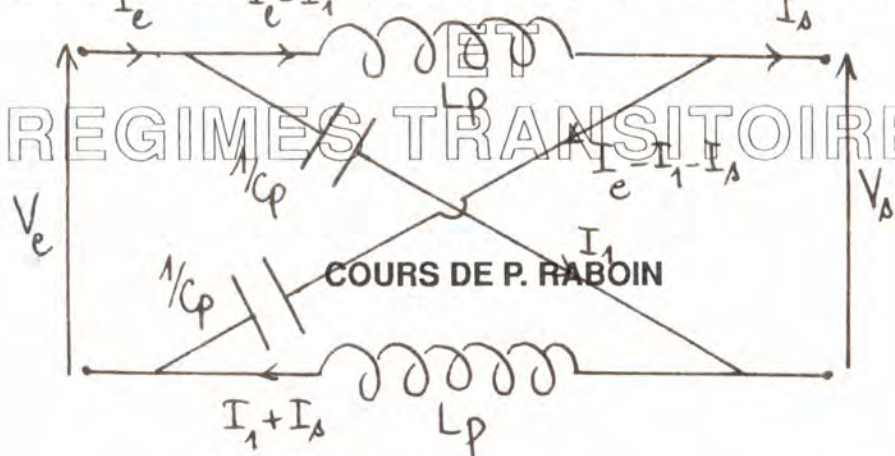
CFPET

Exemple 4 : (le filtre de WIENER-LEE)

Commençons par étudier le quadripôle suivant :



TRANSFORMATION DE LAPLACE



donne

$$V_e = \frac{1}{C_p} (I_e - I_1 - I_s) + L_p(I_e - I_1) = L_p(I_1 + I_s) + \frac{1}{C_p} I_1$$

$$I_1 = \frac{I_e - I_s}{2}$$

IRÈM DE LORRAINE

$$V_s = \frac{1}{C_p} (I_e - I_1 - I_s) - L_p(I_1 + I_s)$$

U.E.R DE MATHEMATIQUES

Table des matières

Introduction: trois circuits électriques	p 1-18
Exemple 1: le circuit intégrateur	p 1-12
Exemple 2: le circuit bouclé	p 12-15
Exemple 3: un oscillateur	p 15-18

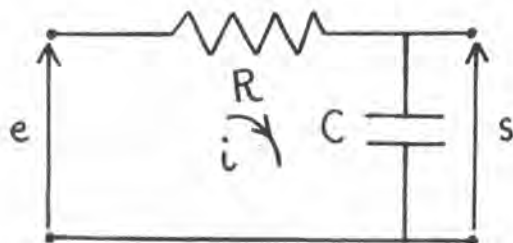
La transformation de LAPLACE (des fonctions)	p 19-
1. Définition	p 19.
2. Calcul de quelques transformées	p 20
3. Propriétés élémentaires	p 21-24
4. Application à l'étude des circuits électriques	p 24-39
5. Dans autres exemples, qui posent le problème du retour à l'originale	p 39-42.
6. Deux théorèmes limite	p 42-44
7. Une nouvelle ligne du Dictionnaire: les fonctions de BESSEL, et leurs transformées	p 44-58

Annexe 1: réduction des matrices 2×2	p 59-61
Annexe 2: la théorie de CAUCHY	p 62-80
Annexe 3: séries de FOURIER	p 81-92
Annexe 4: la formule de LAPLACE inverse	p 93-97

INTRODUCTION : TROIS CIRCUITS ELECTRIQUES

Nous allons introduire les outils mathématiques, qui seront développés dans le COURS, à propos de l'étude de 3 circuits électriques de base.

Exemple 1 : Le circuit intégrateur



i) Mise en équation :

$$\begin{cases} e = Ri + s \\ i = \frac{dq}{dt} \\ q = Cs \end{cases}$$

d'où : $RC \frac{ds}{dt} + s = e.$

Il s'agit là d'une EDO linéaire, qui s'intègre selon la méthode de variation de la constante : l'EDO homogène associée : $RC \frac{ds}{dt} + s = 0$ admet comme solution générale : $s(t) = K(t)e^{-t/\tau}$, $\tau = RC$ étant la constante de temps du circuit, $K(t) = K$ étant une constante. Faisant varier K , il vient :

$$\tau e^{-t/\tau} \cdot \dot{K}(t) = e(t),$$

d'où : $K(t) = \frac{1}{\tau} \int_0^t e(\theta) e^{\theta/\tau} d\theta + C e^{t/\tau}.$

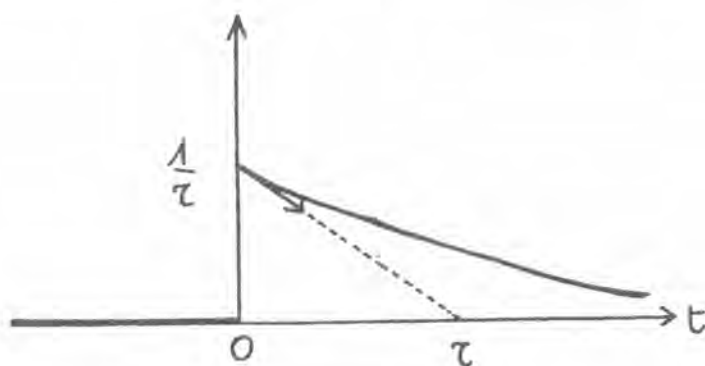
La solution générale prend donc la forme :

$$s(t) = \frac{1}{\tau} \int_0^t e^{-\frac{t-\theta}{\tau}} e(\theta) d\theta + K \cdot e^{-t/\tau}$$

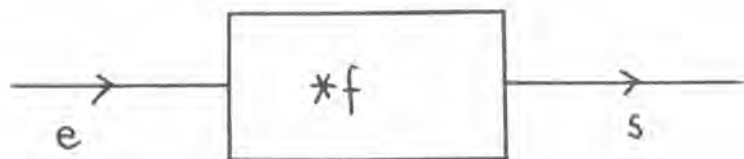
et, en l'absence de charge initiale du condensateur, on obtient :

$$s(t) = \int_0^t f(t-\theta) \cdot e(\theta) d\theta$$

où $f(t) = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau}$. $\gamma(t)$ est la fonction de transfert du dipôle :



ii) Ainsi le circuit agit-il comme un opérateur, transformant le signal d'entrée $\underline{e}$ dans le signal de sortie $\underline{s}$:



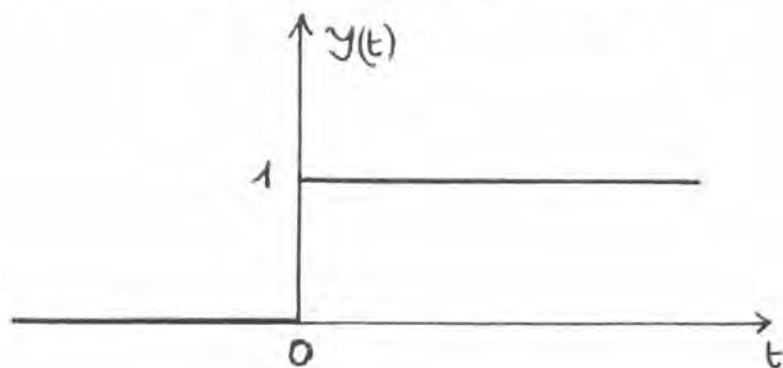
opérateur de la forme :

$$s = f * e$$

où ;
$$(f * e)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\theta) e(\theta) d\theta = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\theta) e(t-\theta) d\theta$$

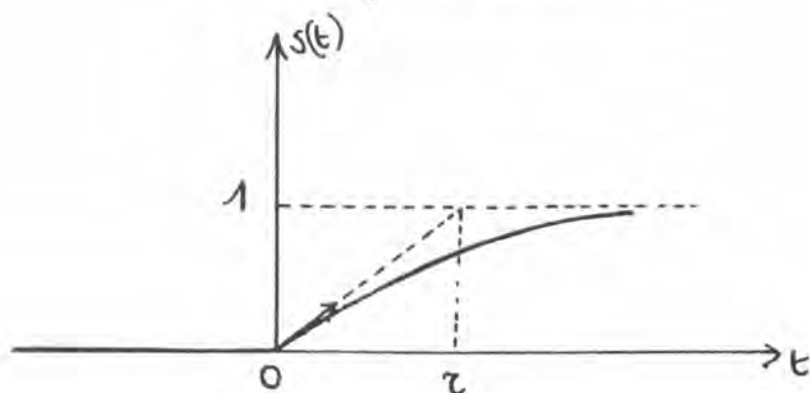
prend bien la valeur $\int_0^t f(t-\theta) e(\theta) d\theta$ pour un signal $e(t)$ nul à $t < 0$,
c'est-à-dire un signal causal. L'opération $*$ s'appelle le produit de convolution.

iii) Ainsi, si on entre un échelon unité :

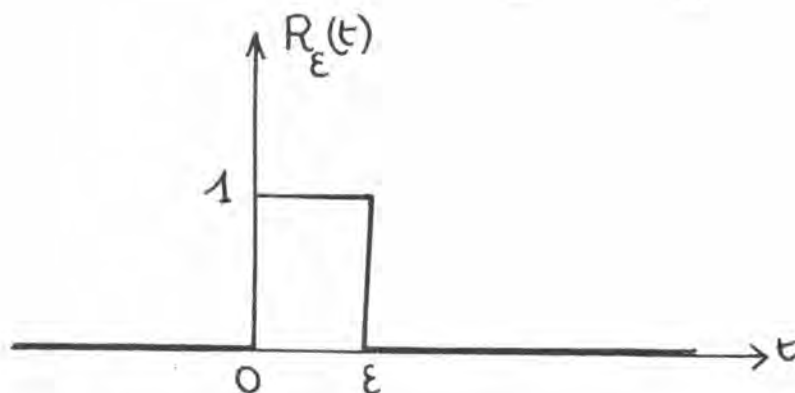


on obtient, à la sortie :

$$s(t) = \int_0^t f(\theta) d\theta = 1 - e^{-t/\tau}$$



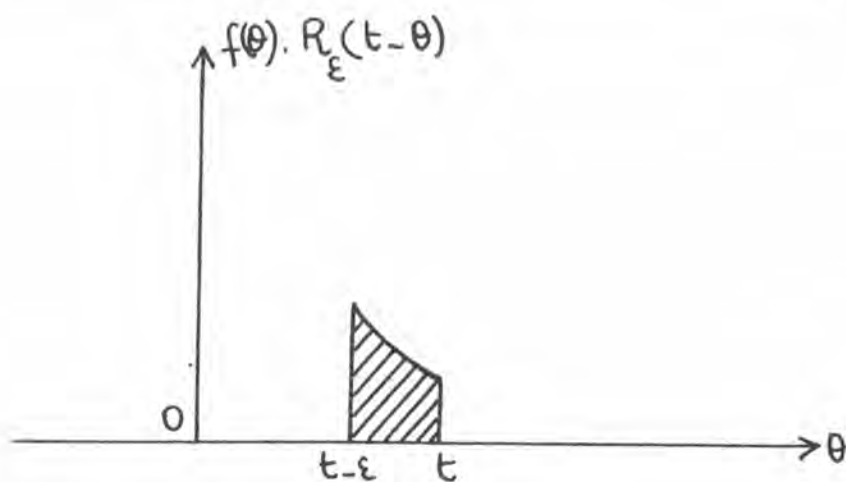
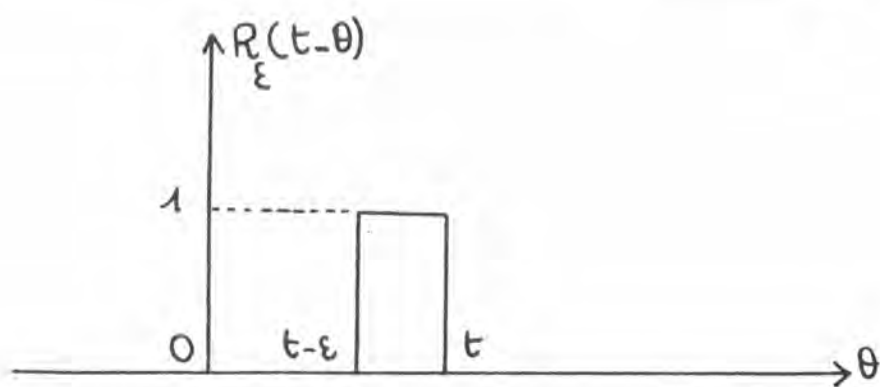
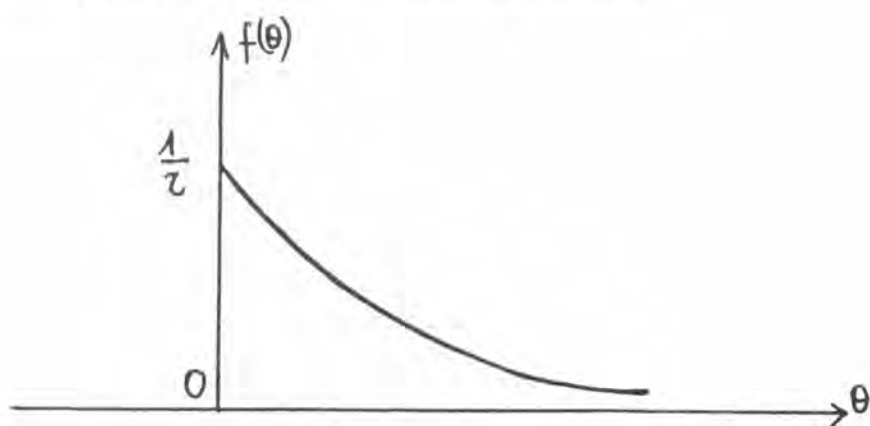
Si on envoie à l'entrée un signal rectangulaire :



le signal de sortie $s(t)$ va s'obtenir en explicitant la valeur de l'intégrale :

$$\int_0^t f(\theta) \cdot R_\epsilon(t-\theta) d\theta$$

c'est-à-dire de l'aire hachurée suivante :

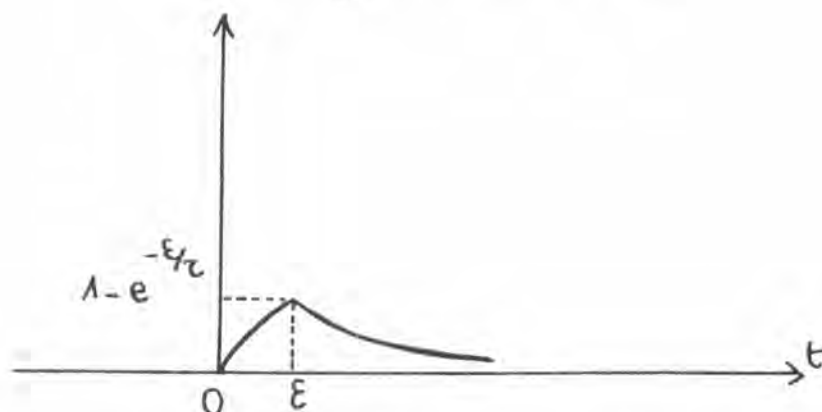


Ainsi, dans le cas de la figure, où $t > \epsilon$, on a :

$$s_{\epsilon}(t) = \int_{t-\epsilon}^t \frac{1}{\tau} e^{-\theta/\tau} d\theta = e^{-t/\tau} (e^{\epsilon/\tau} - 1)$$

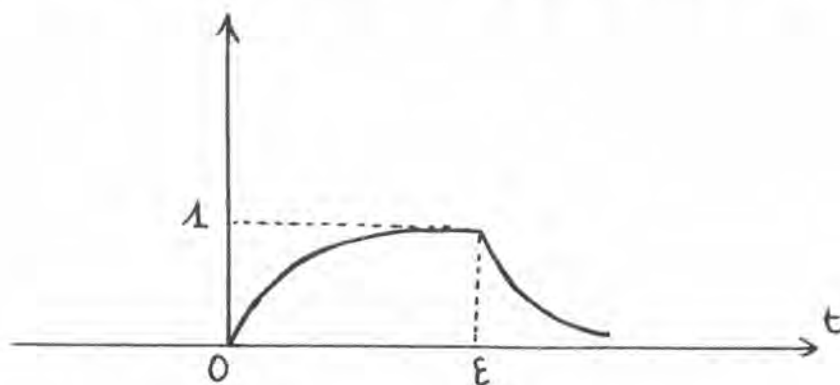
Pour $t < 0$, on a évidemment $s_\varepsilon(t) = 0$ et, pour $0 < t < \varepsilon$,

$$s_\varepsilon(t) = \int_0^t \frac{1}{\tau} e^{-\theta/\tau} d\theta = 1 - e^{-t/\tau}$$



iv) Observons sur la réponse à l'entrée rectangulaire deux cas limites.

Pour ε grand, le graphe de s_ε prend l'allure suivante :



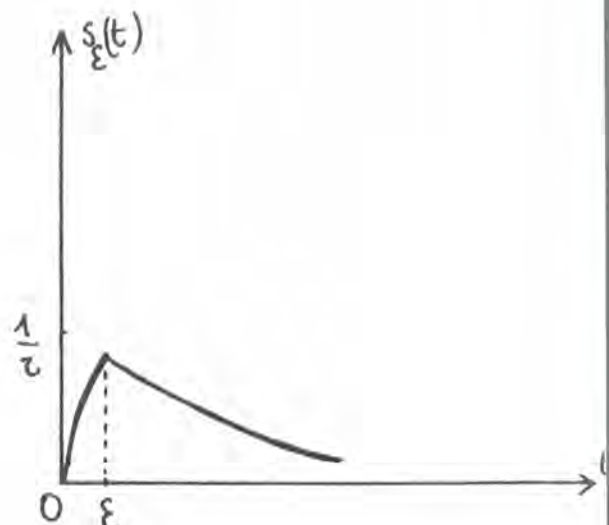
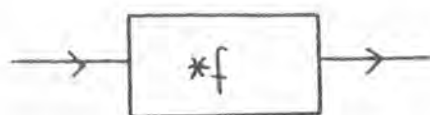
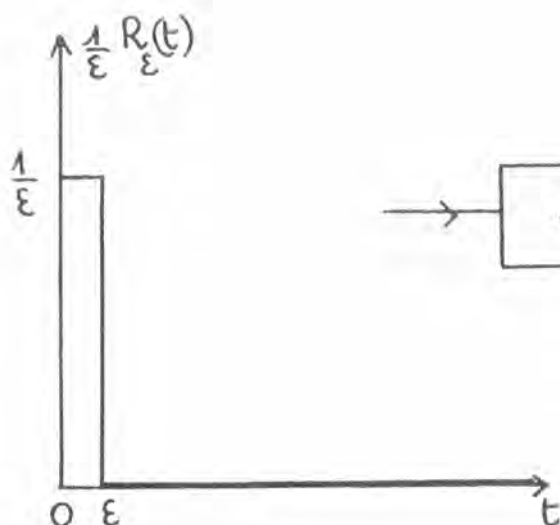
le condensateur se chargeant presque complètement.

L'énergie apportée sur le circuit est donnée par :

$$\int_0^\infty e(t)i(t)dt = \int_0^\varepsilon C \frac{ds}{dt} dt = C(1 - e^{-\varepsilon/\tau})$$

si bien qu'au signal d'entrée $\frac{1}{\varepsilon} R_\varepsilon$ correspond une énergie finie lorsque $\varepsilon \rightarrow 0_+$:

$$\frac{1 - e^{-\varepsilon/\tau}}{\varepsilon} \xrightarrow{(\varepsilon \rightarrow 0)} \frac{1}{\tau}$$



et une sortie :

$$s_{\epsilon}(t) = e^{-t/\tau} \frac{e^{\epsilon/\tau} - 1}{\epsilon} \quad \text{si } t > \epsilon$$

$$\sim f(t)$$

Ainsi, la fonction de transfert f apparaît-elle comme la réponse impulsionnelle du circuit.

v) Entrons maintenant le signal causal :

$$e_{\omega_0}(t) = e^{i\omega_0 t} \quad (t) \quad (\text{ou sa partie réelle !}).$$

La sortie sera alors :

$$s_{\omega_0}(t) = \frac{1}{\tau} \int_0^t e^{i\omega_0(t-\theta)} e^{-\theta/\tau} d\theta = e^{i\omega_0 t} \int_0^t \frac{1}{\tau} e^{-(i\omega_0 + \frac{1}{\tau})\theta} d\theta =$$

$$e^{i\omega_0 t} \frac{1}{1+i\tau\omega_0} (1 - e^{-(\frac{1}{\tau} + i\omega_0)t}) \quad \text{si } t > 0, \quad s_{\omega_0}(t) = 0 \quad \text{si } t < 0.$$

s_{ω_0} se compose donc de deux parties, à savoir :

- le signal : $-\frac{e^{-t/\tau}}{1+i\tau\omega_0} \mathcal{Y}(t)$ qui s'amortit avec le temps et qui correspond au régime transitoire, et :

- le signal : $\frac{e^{i\omega_0 t}}{1+i\tau\omega_0} \mathcal{Y}(t)$ qui, pour $t > 0$ est périodique, de même période que le signal d'entrée $e^{i\omega_0 t}$: il correspond au régime établi ou régime permanent.

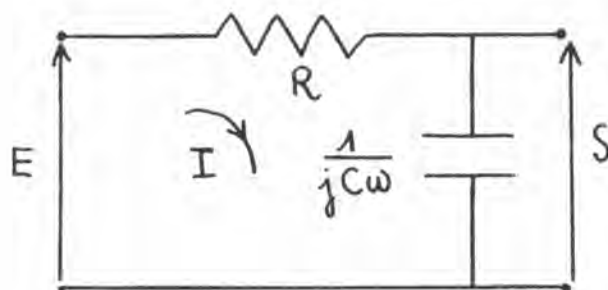
Cette décomposition n'est que la version classique de résolution de l'EDO linéaire, à coefficients constants, avec second membre :

$$RC \frac{ds}{dt} + s = e^{i\omega_0 t}$$

qui consiste à superposer à la solution générale de l'EDO homogène associée (régime transitoire), une solution particulière de l'EDO complète, solution qu'on recherche selon la méthode classique d'identification, sous la forme : $Ce^{i\omega_0 t}$ avec C complexe, tel que :

$$(iRC\omega_0 + 1) \cdot C = 1$$

On reconnaît dans ce dernier point la technique de l'impédance complexe :



$$E = (R + \frac{1}{jC\omega})I, \quad S = \frac{I}{jC\omega} \quad \text{donnant : } S = \frac{E}{1+i\tau\omega}.$$

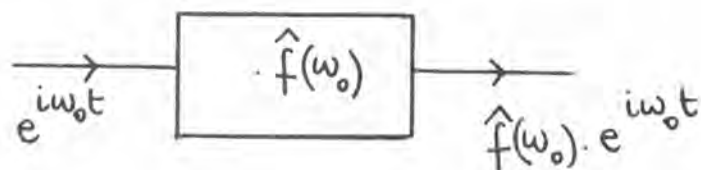
On observe qu'en entrant le signal non causal $e^{i\omega_0 t}$, on obtient à la sortie :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega_0(t-\theta)} f(\theta) d\theta = \hat{f}(\omega_0) e^{i\omega_0 t}$$

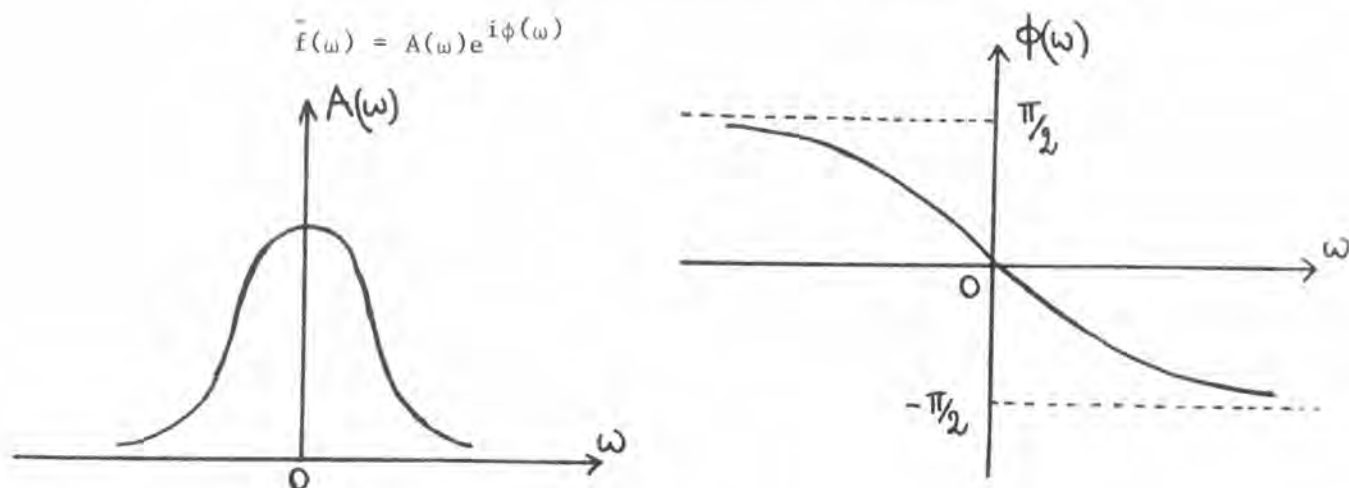
où :

$$\hat{f}(\omega_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\theta) e^{-i\omega_0 \theta} d\theta = \int_0^{\infty} \frac{1}{\tau} e^{-(\frac{1}{\tau} + i\omega_0)\theta} d\theta = \frac{1}{1+i\omega_0 \tau}.$$

On a ainsi associé à la fonction $f(t)$, une variable fonction $\hat{f}(\omega)$ appelée transformée de FOURIER de f , et qui correspond donc à la réponse fréquentielle du circuit :



Une façon de représenter $\hat{f}(\omega)$ consiste à l'écrire sous forme polaire :



vi) La transformée de FOURIER de la fonction de transfert $f(t)$ prenait la forme

$$\hat{f}(\omega) = \int_0^{\infty} e^{-i\omega\theta} f(\theta) d\theta$$

Plus généralement, introduisons la nouvelle fonction

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-p\theta} f(\theta) d\theta$$

qui est bien définie si $p \in \mathbb{C}$ et tel que $\text{Re}(p) > -\frac{1}{\tau}$: c'est la transformée de LAPLACE de f . Une simple intégration par parties montre que :

$$\begin{aligned}
 I(p) &= \int_0^{\infty} i(t) e^{-tp} dt = \int_0^{\infty} \dot{q}(t) e^{-tp} dt = \int_0^{\infty} e^{-tp} dq = \\
 &= p \int_0^{\infty} q(t) e^{-tp} dt = p \cdot Q(p)
 \end{aligned}$$

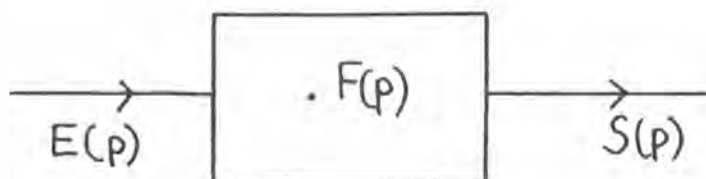
si bien que les équations de i) prennent l'aspect suivant (: après transformation de LAPLACE des membres de chacune d'elle) :

$$\begin{cases} E = RI + S \\ I = pQ \\ Q = C \cdot S \end{cases}$$

d'où l'on tire :

$$S(p) = \frac{E(p)}{1 + \tau \cdot p}.$$

Ainsi, du côté des transformées de LAPLACE, le circuit intégrateur agit-il comme un multiplicateur :



L'intérêt de la transformation paraît ainsi évident : la X est d'un maniement certainement plus commode que la x !

Ainsi, à l'entrée rectangulaire $R_{\epsilon}(t)$, de transformée de LAPLACE :

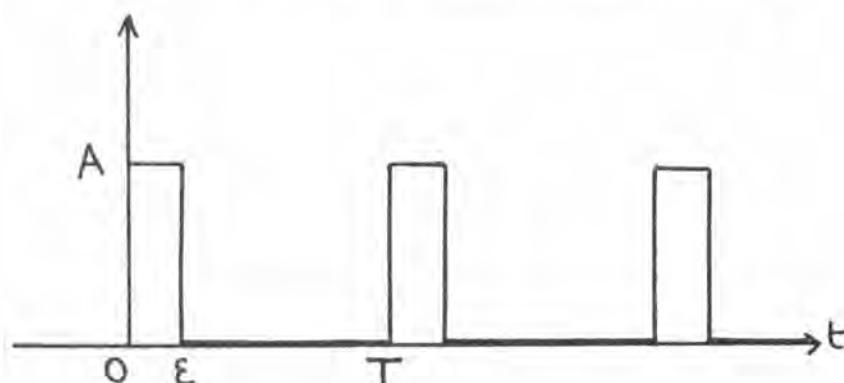
$$\int_0^{\epsilon} e^{-tp} dt = \frac{1 - e^{-\epsilon p}}{p}$$

correspond la sortie $s_{\epsilon}(t)$, de transformée de LAPLACE :

$$S_{\epsilon}(p) = \frac{1 - e^{-\epsilon p}}{p(1 + \tau p)}.$$

Naturellement, se pose maintenant le problème du retour à la fonction originale $s_{\epsilon}(t)$! Disons tout de suite que ce retour est facile dans le cas d'une fraction rationnelle, éventuellement corrigée par un facteur de retard du type $(1 - e^{-\epsilon p})$. Cependant et même dans ce cas, la structure de $s_{\epsilon}(t)$ n'est pas toujours simple à appréhender.

Ainsi, entrons un train de signaux rectangulaires :



On conçoit d'après l'étude de la réponse à $R_\varepsilon(t)$, faite en iii), que la recherche de la sortie n'est pas vraiment élémentaire : à chaque nouvelle impulsion, le condensateur possède une charge résiduelle, ce qui oblige à résoudre l'EDO avec une condition initiale non nulle, et variable à chaque étape ...

Par contre, il est facile d'obtenir $S(p)$, car :

$$\begin{aligned}
 E(p) &= \int_0^\infty e^{-tp} e(t) dt = \sum_{n \geq 0} \int_{nT_0}^{nT_0+T_0} e^{-tp} e(t) dt \\
 &= \sum_{n \geq 0} \int_0^{T_0} e^{-(nT_0+\theta)p} e(\theta) d\theta = \\
 \sum_{n \geq 0} e^{-nT_0 p} \int_0^{T_0} e^{-p\theta} e(\theta) d\theta &= \frac{1}{1-e^{-pT_0}} \int_0^\varepsilon A e^{-p\theta} d\theta = \\
 &= \frac{A}{1-e^{-pT_0}} \cdot \frac{1-e^{-\varepsilon p}}{p}
 \end{aligned}$$

si $\operatorname{Re}(p) > 0$. D'où :

$$S(p) = \frac{A(1-e^{-\varepsilon p})}{p(1+tp)(1-e^{-pT_0})}.$$

Le retour à l'original^(*) conduit, en posant :

$$x(t) = A \cdot \sum_{n \geq 0} \left(1 - e^{-\frac{t-nT_0}{\varepsilon}} \right) \cdot \mathcal{Y}(t-nT_0)$$

(*) qui sera détaillé.

à :

$s(t) = x(t) - x(t-\varepsilon)$, qui se sépare en :

- un signal transitoire : $y(t) = -A \cdot \frac{e^{\varepsilon/\tau} - 1}{e^{T_0/\tau} - 1} e^{-t/\tau}$, et :
- un régime permanent $T_0(\geq \varepsilon)$ -périodique, valant : $A \frac{e^{\varepsilon/\tau} - 1}{1 - e^{-T_0/\tau}} e^{-t/\tau}$ sur l'intervalle $[\varepsilon, T_0]$.

Cependant, grâce à la théorie des FONCTIONS ANALYTIQUES, il nous sera possible d'énoncer et d'exploiter une formule de transformation inverse à la transformation de LAPLACE :

$$s(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} S(p) e^{tp} dp$$

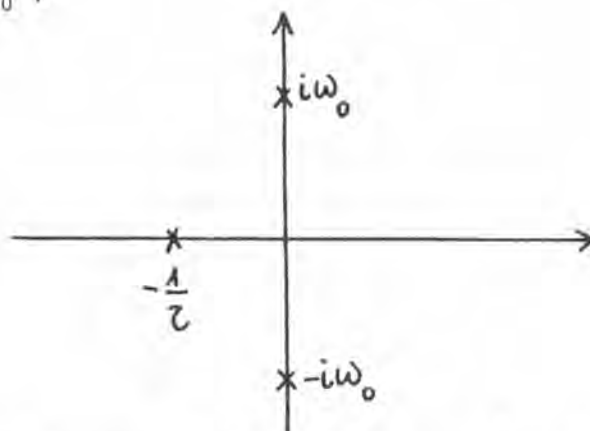
et sur laquelle il sera facile d'isoler les régimes transitoire et permanent, ce dernier apparaissant sous la forme de son développement en série de FOURIER.

Ainsi, entrant $e_{\omega_0}(t) = \cos \omega_0 t$, $\mathcal{Y}(t)$, de transformée de LAPLACE :

$$E_{\omega_0}(p) = \frac{p}{p^2 + \omega_0^2}, \text{ on obtient :}$$

$$S_{\omega_0}(p) = \frac{p}{(1+\tau p)(p^2 + \omega_0^2)}, \text{ fraction rationnelle de singularités}$$

- $1/\tau$ et $\pm i\omega_0$:



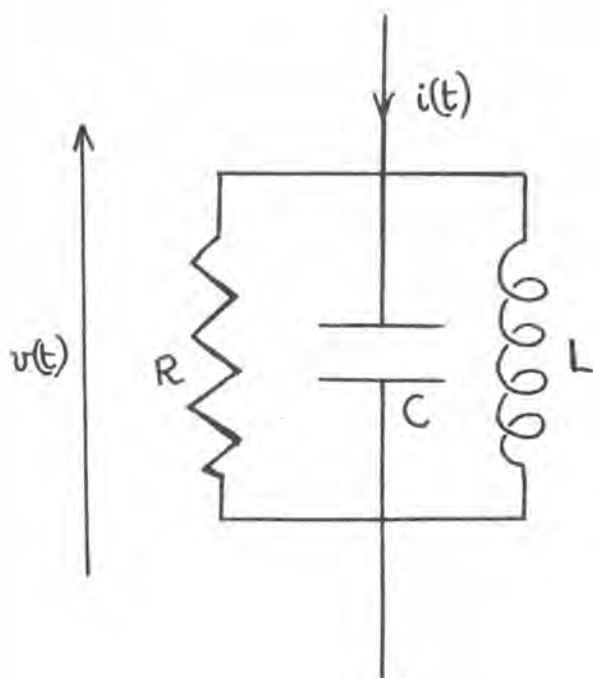
et, comme on l'a constaté en v), le pôle $(-\frac{1}{\tau}) < 0$ est associé au régime transitoire, tandis que les pôles $\pm i\omega_0 \in i\mathbb{R}$ sont associés au régime permanent !

- vii) Ainsi a-t-on associé à la fonction de transfert $f(t)$ (qui est une fonction causale, d'énergie $\int_0^{\infty} f^2(t)dt < +\infty$) :
- la fonction $\hat{f}(\omega)$, qui correspond à la réponse fréquentielle du circuit ;
 - la fonction $F(p)$ de la variable complexe p , $\text{Re } p > -\frac{1}{T}$.

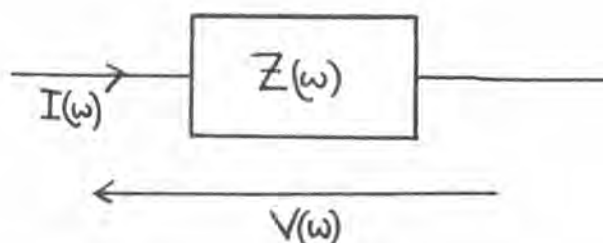
Le passage de $F(p)$ à $\hat{f}(\omega)$ se fait en faisant " $p = i\omega$ ".

La théorie des fonctions analytiques permettra de comprendre comment, sous certaines conditions, $F(p)$ est à son tour entièrement déterminée par $\hat{f}(\omega)$. Mieux, on montrera qu'en fait $\hat{f}(\omega)$ est sous certaines contraintes bien définie par $A(\omega)$ (transformation de HILBERT, problème de la synthèse des filtres...).

Exemple 2 : Le circuit-bouchon



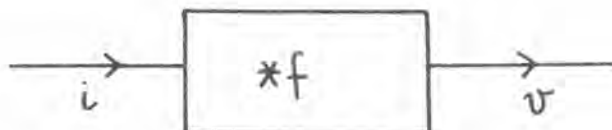
- 1) La méthode de l'impédance complexe conduit à considérer le circuit équivalent :



où l'admittance $Y(\omega)$ vaut :

$$Y(\omega) = \frac{1}{R} + jC\omega + \frac{1}{jL\omega}$$

En considérant $i(t)$ comme la grandeur d'entrée, et $v(t)$ comme la grandeur de sortie, le circuit va se comporter comme un opérateur de convolution :



où :

$$\tilde{f}(\omega) = Z(\omega) = \frac{1}{Y(\omega)} \quad \text{prend la forme :}$$

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{R}{1 + jQ \frac{\omega^2 - \omega_r^2}{\omega\omega_r}} \quad , \text{ en introduisant les grandeurs :}$$

$$\begin{cases} \omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} & , \text{ pulsation de résonance} \\ Q = R\sqrt{\frac{C}{L}} & , \text{ facteur de qualité.} \end{cases}$$

ii) Le régime du circuit est régi par l'EDO linéaire à coefficients constants :

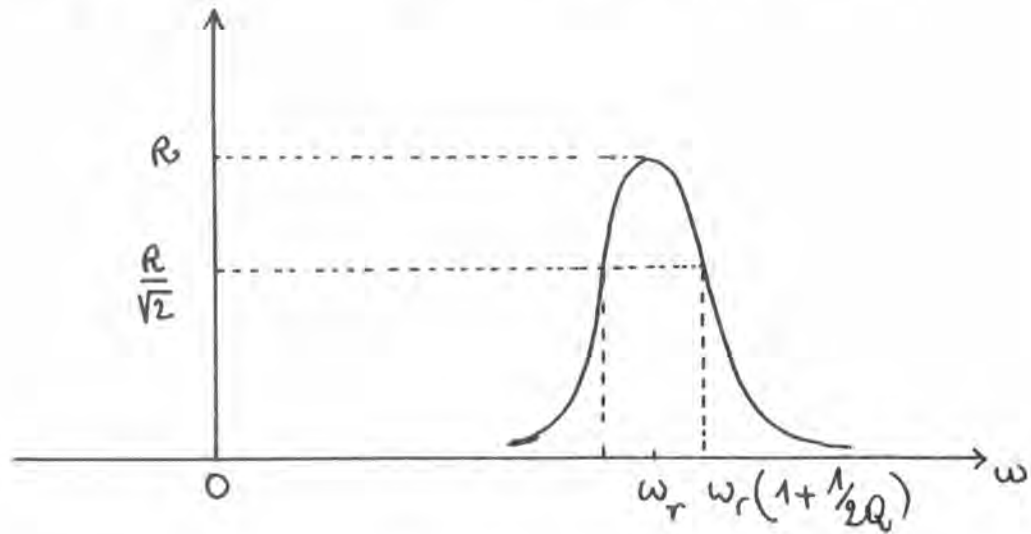
$$\ddot{q} + \frac{\dot{q}}{RC} + \frac{q}{LC} = 0 \quad \left(\dot{} = \frac{d}{dt} \right).$$

L'équation caractéristique associée : $r^2 + \frac{r}{RC} + \frac{1}{LC} = 0$ admet 2 racines complexes conjuguées si et seulement si le discriminant

$$\Delta = \left(\frac{1}{RC} \right)^2 - \frac{4}{LC} = \frac{\omega_r^2}{Q^2} (1 - 4Q^2) < 0$$

c'est-à-dire $Q > \frac{1}{2}$; cela correspond à un régime oscillant amorti.

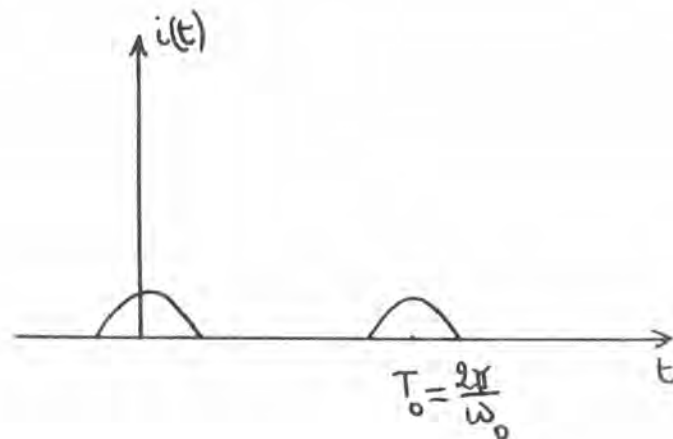
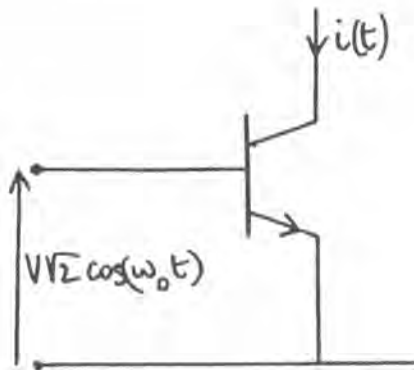
iii) Le graphe de $A(\omega) = |\hat{f}(\omega)|$ à l'allure suivante :



$$A(\omega) = \frac{R}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega^2 - \omega_r^2}{\omega \omega_r} \right)^2}}$$

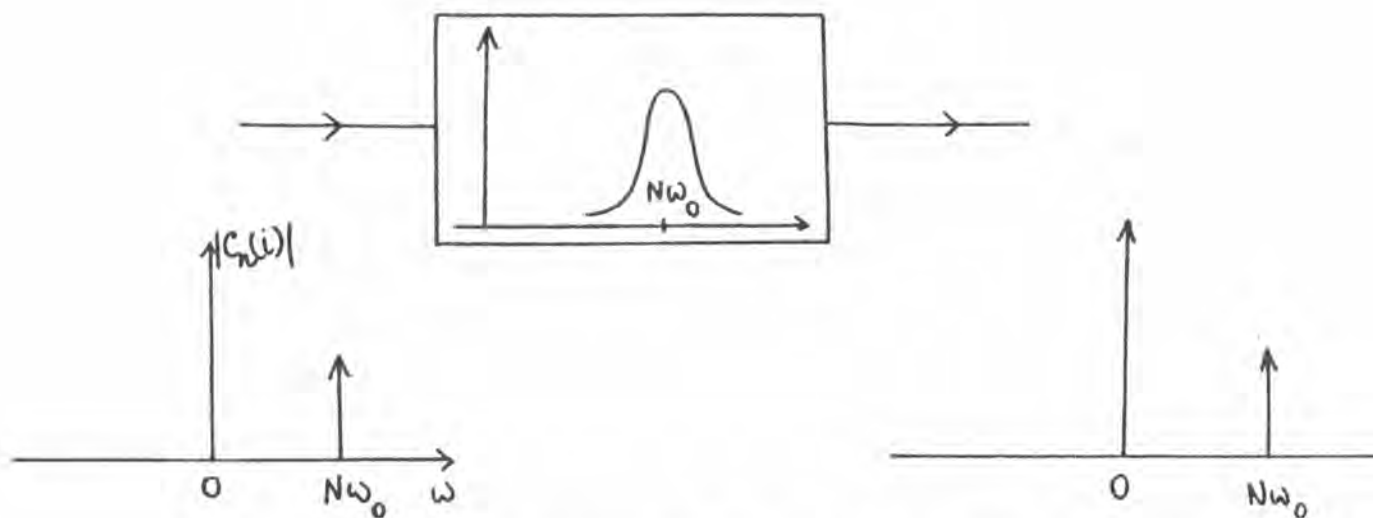
Ainsi, à l'entrée $i(t) = I\sqrt{2} \cos \omega t$, va correspondre dans la résistance un courant $s(t) = I\sqrt{2} \cdot \frac{A(\omega)}{R} \cos(\omega t - \phi(\omega))$ de même période et dont l'amplitude est corrigée par le facteur multiplicatif $\frac{A(\omega)}{R}$: pour $\omega = \omega_r$, l'amplitude n'est pas modifiée, pour ω loin de ω_r , $s(t)$ est très atténué. Plus généralement, si on entre un signal périodique, le système va se comporter comme un filtre, qui va sélectionner les harmoniques de la série de FOURIER de ce signal, proche quant à la fréquence, de la fréquence de résonance :

Supposons par exemple qu'à partir du signal $V\sqrt{2} \cos \omega_0 t$, on soit capable de fabriquer $i(t)$ de la forme



En choisissant $\omega_r = N \cdot \omega_0$ (et Q grand) avec N entier donné, l'harmonique d'ordre N dans le développement de FOURIER de i sera sélectionné : on aura ainsi réalisé un multiplicateur de fréquence !

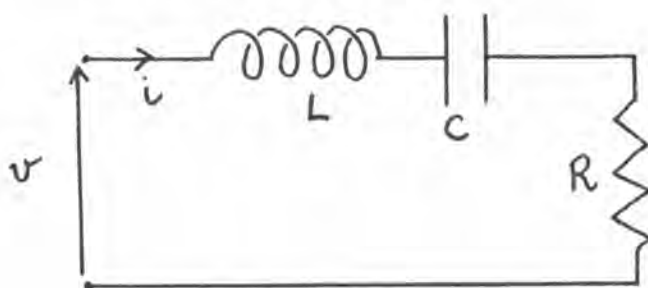
[Il est commode de donner la représentation suivante :



C'est la théorie des distributions qui nous permettra de justifier l'opération.

Exemple 3 : Un oscillateur

i) Considérons un circuit RLC série :



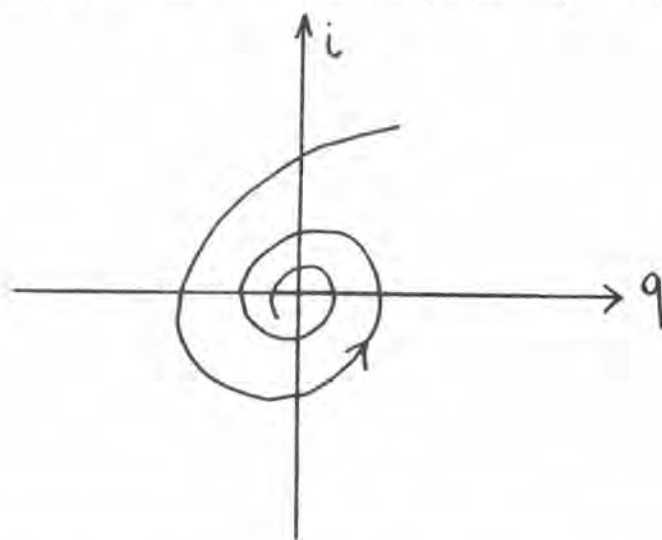
Le régime libre est régi par l'EDO : $LC\ddot{q} + RC\dot{q} + q = 0$ soit, avec les mêmes notations que précédemment :

$$\ddot{q} + \frac{\omega_r}{Q} \dot{q} + \omega_r^2 \cdot q = 0.$$

En supposant de nouveau $|Q| > \frac{1}{2}$, le régime va être de type oscillant amorti :

$$q(t) = A.e^{-\frac{\omega_r}{Q}t} \cos\left(\frac{\omega_r}{Q} \sqrt{4Q^2-1}.t + \varphi\right)$$

Afin de régulariser le phénomène, et plutôt que de tracer la courbe intégrale $q(t)$, représentons la trajectoire décrite par le point $(q(t), i(t))$ dans le plan de phase $(q, i = \dot{q})$:

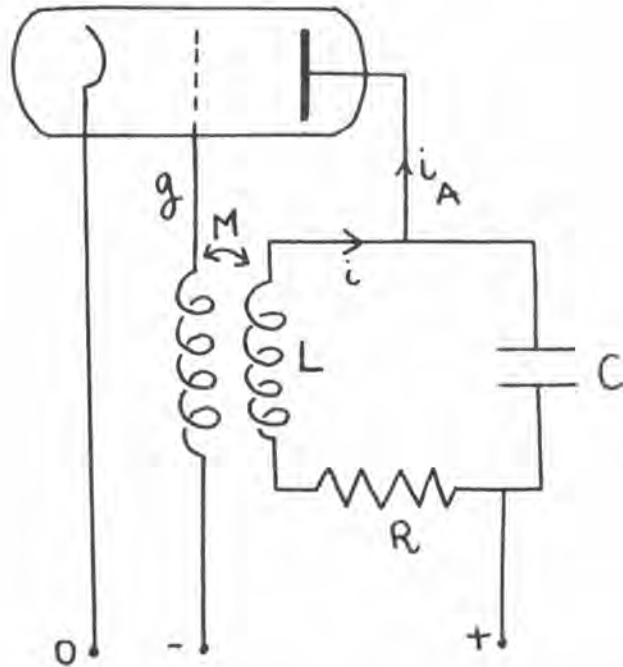


nous obtenons une spirale logarithmique, que nous avons orienté dans le sens des temps croissants : naturellement, comme Q est du signe de R , c'est-à-dire > 0 , la spirale s'enroule sur l'origine. Par contre, si R était négatif, le point (q, i) s'éloignerait de 0 le long de la même spirale. Imaginons donc qu'un dispositif soit l'analogue d'un circuit RLC, avec un élément résistif R fonction par exemple du courant i qui le traverse, de telle sorte que :

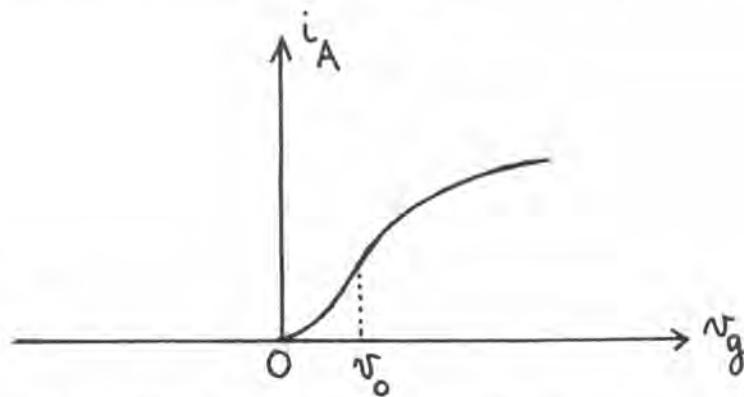
$$\begin{cases} R(i) > 0 & \text{pour } i \text{ grand} \\ R(i) < 0 & \text{pour } i \text{ petit} \end{cases}$$

on peut alors concevoir qu'il va exister une solution périodique.

ii) Les conditions précédentes étaient réalisées dans le montage suivant :



C'est l'oscillateur à lampe (avec circuit bouchon sur l'anode). Il suffit, pour comprendre le lien avec i), de savoir que la caractéristique de la lampe $i_A = (v_g)$ a l'allure suivante :



Mettons en effet le système en équation :

$$i + \frac{dq}{dt} = i_A$$

$$v_g = M \frac{di}{dt}$$

$$L \frac{di}{dt} + Ri = \frac{q}{C} = -v_A$$

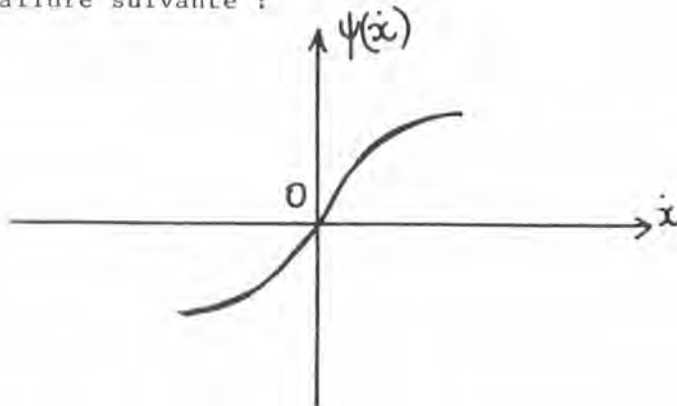
(on néglige i_g , courant grille)

En posant $x = i - \varphi(v_0)$ où v_0 est l'abscisse du point d'inflexion de φ , on obtient l'EDO :

$$LC\ddot{x} + R\dot{x} + x = \psi(\dot{x})$$

où $\psi(\dot{x}) = \varphi(Mx) - \varphi(v_0)$

à l'allure suivante :



en approchant alors $\psi(i)$ par une expression de la forme :

$$\alpha\dot{x} - \beta(\dot{x})^3$$

on est conduit à l'EDO de RAYLEIGH :

$$\ddot{x} + x - \epsilon \left(\dot{x} - \frac{\dot{x}^3}{3} \right) = 0$$

ou encore (en posant $\dot{x} = s$), à l'EDO de VAN DER POL :

$$\ddot{x} + x - \epsilon(1 - x^2)\dot{x} = 0$$

- iii) Il s'agit là d'une EDO non linéaire, dont l'étude est autrement compliquée par rapport à celle des exemples 1 et 2 ! En fait, nous nous limiterons à une étude qualitative.

LA TRANSFORMATION DE LAPLACE (des fonctions)

1. Définition

$f(t)$ est une fonction continue par morceaux (sur chaque intervalle borné de $\mathbb{R}$), avec seulement des discontinuités de première espèce ($f(t \pm 0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f(t \pm \epsilon)$ existe en tout point t), On dit que f est à croissance exponentielle s'il existe $A > 0$ et un nombre $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que :

$$|f(t)| \leq Ae^{\alpha t}, \text{ pour tout } t > 0.$$

Exemples

- i) tout polynôme est du type précédent ;
- ii) e^{t^2} n'est pas du type précédent.

Remarque :

Le nombre $\sigma_f = \inf\{\alpha \in \mathbb{R} \mid f(t)e^{-\alpha t} \text{ borné sur }]0, +\infty[\}$ s'appelle l'abscisse de sommabilité de f .

Exercice : Que vaut σ_f si f est un polynôme ?

Si $p \in \mathbb{C}$ est tel que $\operatorname{Re}(p) > \alpha$, l'intégrale impropre :

$$\int_0^{+\infty} e^{-tp} f(t) dt$$

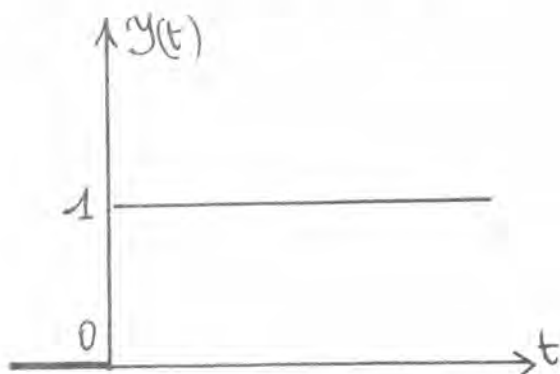
est alors convergente, puisque :

$$|e^{-tp} f(t)| \leq A \cdot e^{-t(\operatorname{Re}(p) - \alpha)}, \quad t > 0$$

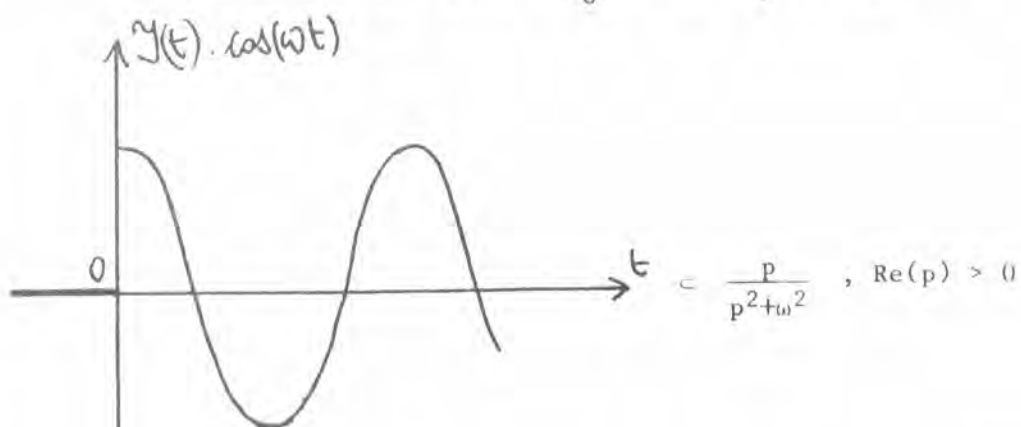
On obtient de cette manière une nouvelle fonction $F(p)$, définie sur le $\frac{1}{2}$ plan $\{p \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(p) > \alpha\}$, et appelée transformé de LAPLACE de f . La correspondance $\mathcal{L} : f \rightarrow F$ s'appelle la transformation de LAPLACE. On note :

$$\begin{array}{ccc} f(t) & \subset & F(p) \\ \text{originale} & & \text{transformée} \end{array}$$

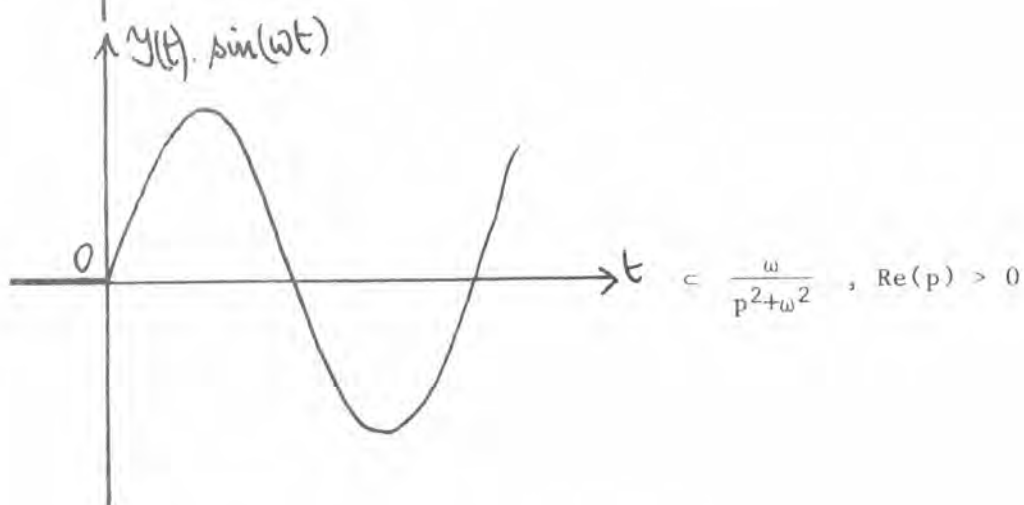
2. Calcul de quelques transformées de LAPLACE



échelon-unité $y(t) = \int_0^{\infty} e^{-tp} dt = \frac{1}{p}$, $\text{Re}(p) > 0$



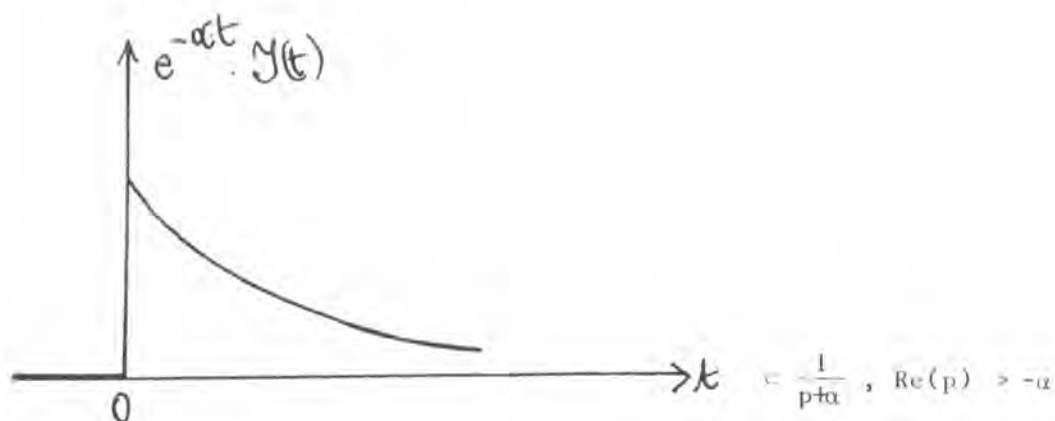
$= \frac{p}{p^2 + \omega^2}$, $\text{Re}(p) > 0$



$= \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$, $\text{Re}(p) > 0$

En effet,

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} e^{i\omega t} dt = \frac{1}{p - i\omega}, \quad \text{Re}(p) > 0.$$



Remarques :

- i) f et $\gamma.f$ ont même transformée ! Désormais, $f = \gamma.f$.
- ii) on observe sur les exemples précédents que $F(p)$ peut être prolongée au-delà du domaine naturel d'existence de l'intégrale impropre qui la définit.

3. Propriétés élémentaires

(P1) $\mathcal{L}$ est linéaire : si $f_1 \in F_1$, $f_2 \in F_2$, alors

$$af_1 + bf_2 \in aF_1 + bF_2 \quad \text{si } a, b \in \mathbb{R}.$$

Ainsi,

$$A \cos(\omega t - \varphi) = A \cos \varphi \cdot \cos \omega t + A \sin \varphi \cdot \sin \omega t$$

$$= A \cos \varphi \cdot \frac{p}{p^2 + \omega^2} + A \sin \varphi \cdot \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} = \frac{A}{p^2 + \omega^2} (p \cos \varphi + \sin \varphi).$$

(P2) Effet d'un changement d'échelle de temps : si $f(t) \in F(p)$, alors

$$f(\lambda t) \in \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{p}{\lambda}\right), \quad \lambda \neq 0.$$

En effet,

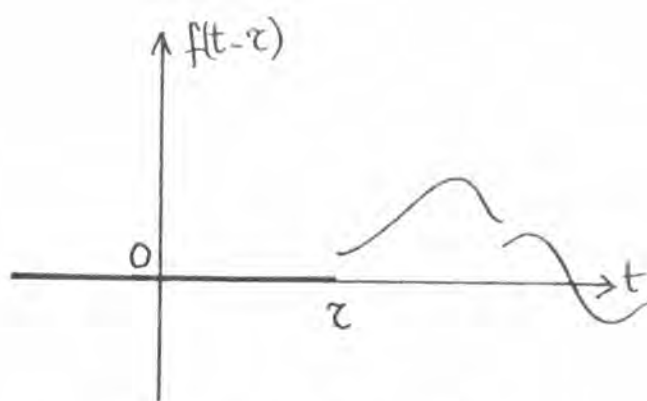
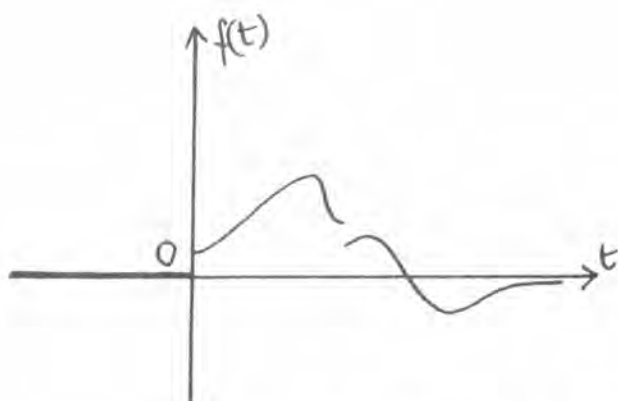
$$\int_0^\infty e^{-tp} f(\lambda t) dt = \int_0^\infty e^{-p/\lambda \cdot s} f(s) \frac{ds}{\lambda} \quad \text{par le changement de}$$

variable $t = \frac{s}{\lambda}$.

$$\text{Ainsi, } \gamma(t) \cos \omega t \in \frac{1}{\omega} \cdot \frac{\left(\frac{p}{\omega}\right)}{\left(\frac{p}{\omega}\right)^2 + 1}$$

(P3) Formule du retard :

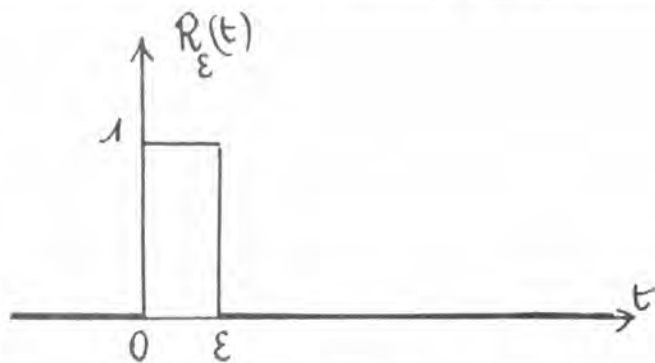
Si $f(t) \in \mathcal{F}(p)$, alors $f(t-\tau) \in e^{-\tau p} \mathcal{F}(p)$ si $\tau \geq 0$.



En effet, $\int_0^{\infty} e^{-tp} f(t-\tau) dt = \int_{-\tau}^{\infty} e^{-(\tau+s)p} f(s) ds = e^{-\tau p} \int_0^{\infty} e^{-sp} f(s) ds$

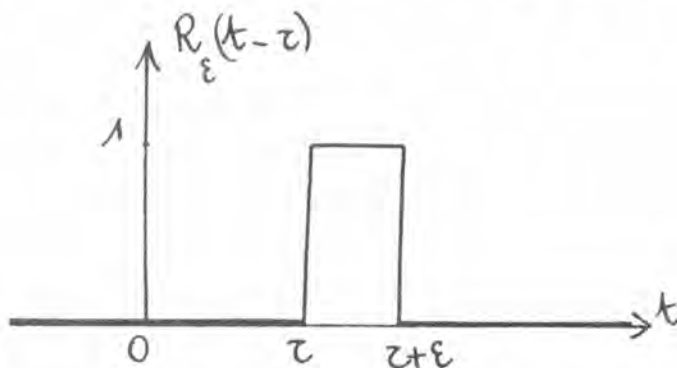
Exemple de calcul de $\mathcal{F}(p)$ à l'aide des propriétés précédentes

i)



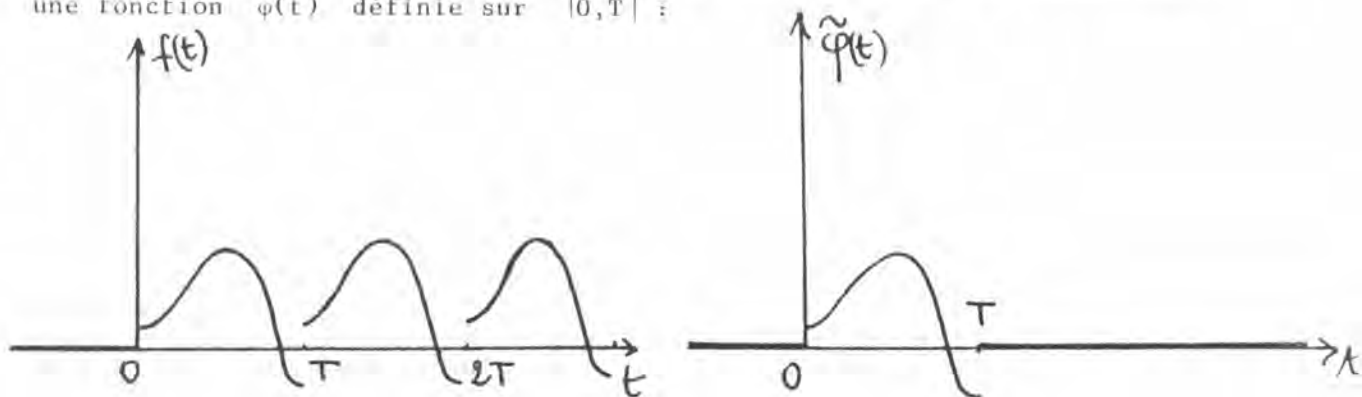
$$R_\epsilon(t) = \mathcal{Y}(t) - \mathcal{Y}(t-\epsilon) \in \frac{1}{p} - \frac{1}{p} \cdot e^{-\epsilon p} = \frac{1-e^{-\epsilon p}}{p}$$

ii)



$$R_\epsilon(t-\tau) \in \frac{1}{p} e^{-\tau p} (1-e^{-\epsilon p}).$$

iii) Soit $f(t)$ un signal T -"périodique à droite", obtenu en reproduisant une fonction $\varphi(t)$ définie sur $[0, T]$:



On peut écrire : $f(t) = \sum_{n \leq 0} \tilde{\varphi}(t - nT)$, où $\tilde{\varphi}(t)$ vaut $\varphi(t)$ sur $[0, T]$, et 0 ailleurs (: Exercice !). Alors,

$$\begin{aligned} F(p) &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{nT}^{(n+1)T} e^{-tp} f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^T e^{-(nT+s)p} \varphi(s) ds \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nTp} \int_0^T e^{-sp} \varphi(s) ds \end{aligned}$$

soit : $F(p) = \frac{\tilde{\phi}(p)}{1 - e^{-Tp}}$, si $\operatorname{Re}(p) > 0$ et si $\tilde{\varphi}(t) \in \tilde{\mathcal{L}}(p)$.

Exercice : Calculer la transformée de LAPLACE d'un "train d'impulsions rectangulaires".

(P4) On suppose que f possède en tous points de tout intervalle borné une dérivée f' , qui vérifie elle-même les propriétés de 1). Alors, si $f(t) \in F(p)$, $f'(t) \in p.F(p) - f(0_+)$.

Démonstration :

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-tp} f'(t) dt &= \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0_+ \\ A \rightarrow +\infty}} \int_{\varepsilon}^A e^{-tp} df(t) \\ &= \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0_+ \\ A \rightarrow +\infty}} \left(e^{-tp} f(t) \Big|_{\varepsilon}^A + p \int_{\varepsilon}^A e^{-tp} f(t) dt \right). \end{aligned}$$

en intégrant par parties.

Or,

$$|e^{-Ap} f(A)| \leq M.e^{-A(\operatorname{Re}(p)-\alpha)} \xrightarrow{(A \rightarrow +\infty)} 0, \text{ si } \operatorname{Re}(p) > \alpha$$

$$e^{-\epsilon p} F(p) \xrightarrow{(\epsilon \rightarrow 0_+)} f(0_+)$$

ce qui permet de conclure. On a établi au passage que $\sigma_{f^+} \leq \sigma_{f^-}$.

Plus généralement,

$$f''(t) \subset p^2 F(p) - p.f(0_+) - f'(0_+) \dots / \dots$$

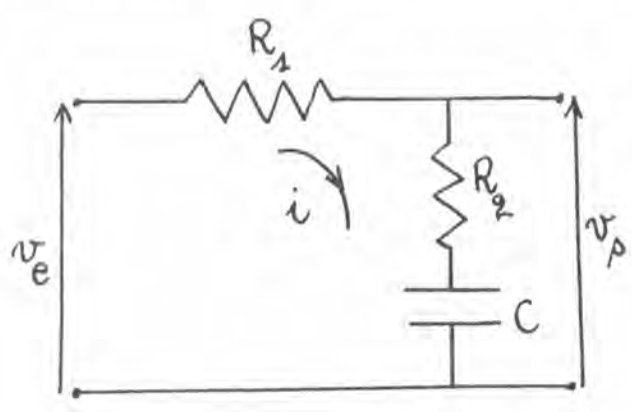
En particulier, si $f(0_+) = 0$, $f(t) \subset F(p)$ entraîne : $f'(t) \subset p.F(p)$
Ainsi, l'opération de dérivation $\frac{d}{dt}$ devient-elle l'opération de multiplication par p .

Exercice : Quelle est la transformée de LAPLACE de la rampe t . $y(t)$?

Exercice : si $f(t) \subset F(p)$, alors $\int_0^t f(s)ds \subset ?$

4. Application à l'étude des circuits électriques

Exemple 1 : (CELLULE 1 des T.P.)



Mise en équation :

$$\begin{cases} v_e = R_1 \cdot i + v_s \\ v_s = R_2 \cdot i + q/c \\ i = \frac{dq}{dt} \end{cases}$$

On suppose le condensateur initialement déchargé, et on applique à l'entrée une tension $v_e(t)$ à partir de l'instant $t = 0$.

Pour des raisons énergétiques, la charge q du condensateur ne peut subir de discontinuités, si bien que $q(0_+) = q(0_-) = 0$.

Appliquant la transformation de LAPLACE aux équations du système, on obtient, avec une notation évidente :

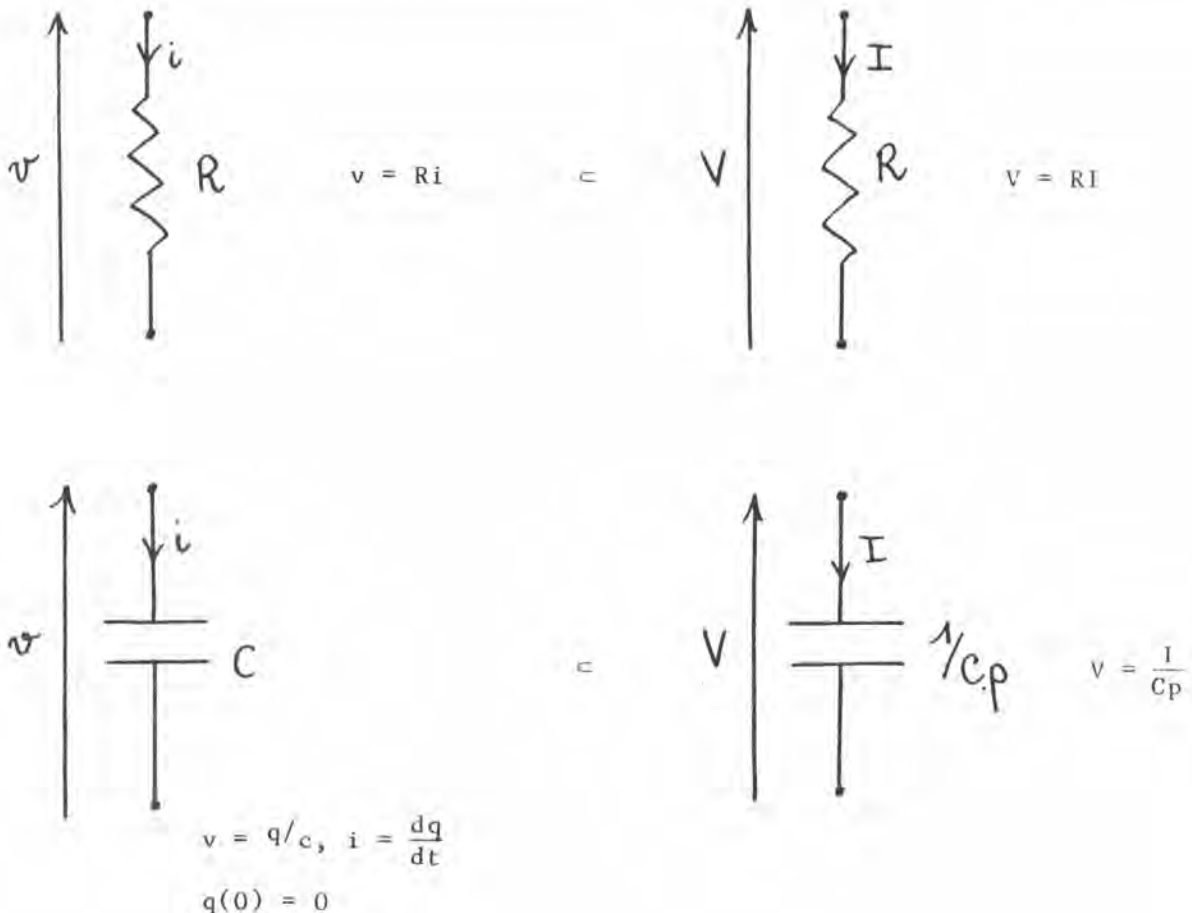
$$\begin{cases} V_e = R_1 \cdot I + V_s \\ V_s = R_2 \cdot I + \frac{Q}{C} \\ I = p \cdot Q \end{cases}$$

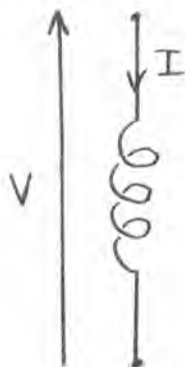
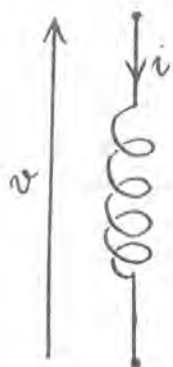
D'où l'on tire, par "un calcul algébrique" :

$$V_s = (R_2 + 1/Cp)I, \quad I = \frac{V_e}{R_1 + R_2 + 1/Cp}$$

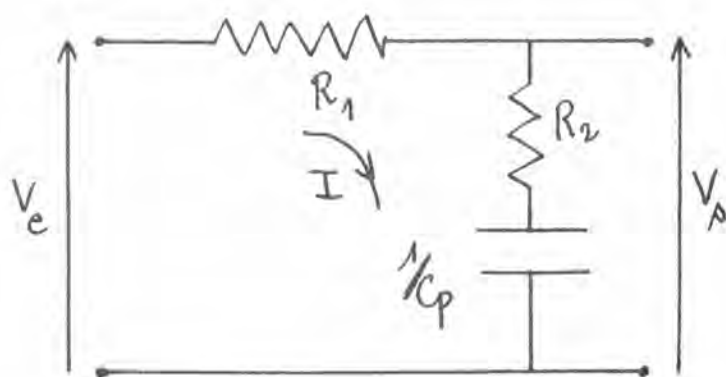
d'où :
$$V_s = \frac{1 + R_2 Cp}{1 + R Cp} \cdot V_e \quad (R = R_1 + R_2)$$

En pratique, il est plus rapide de raisonner directement sur le schéma symbolique déduit du montage réel par les substitutions suivantes au niveau des dipôles fondamentaux :





pour obtenir ici :



circuit sur lequel on lit directement :

$$V_e = (R_1 + R_2 + 1/C_p) \cdot I \quad \text{et} \quad V_s = (R_2 + 1/C_p) \cdot I$$

soit :

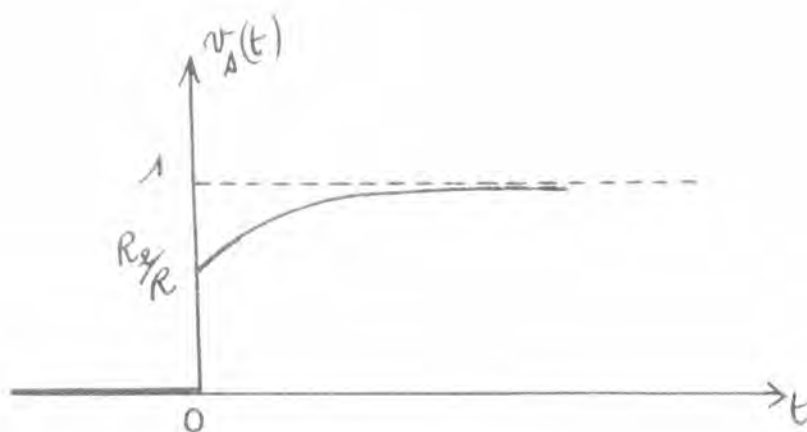
$$\frac{V_s}{V_e} = \frac{R_2 + 1/C_p}{R_1 + R_2 + 1/C_p}$$

Ainsi, (pour $R_2 = 10R_1$), et une entrée échelon-unité $v_e = \mathcal{U}$, obtient-on :

$$V_s(p) = \frac{1}{p} \cdot \frac{1 + R_2 C_p}{1 + R C_p} = \frac{1}{p} + \frac{C(R_2 - R)}{1 + R C_p} \quad (= \frac{1}{p} - \frac{C R_1}{1 + 11 C R_1 p})$$

qui apparaît comme la transformée de

$$v_s(t) = \mathcal{U}(t) \cdot (1 - \frac{R_1}{R} e^{-t/RC}) (= \mathcal{U}(t) \cdot (1 + \frac{1}{11} e^{-t/RC}))$$

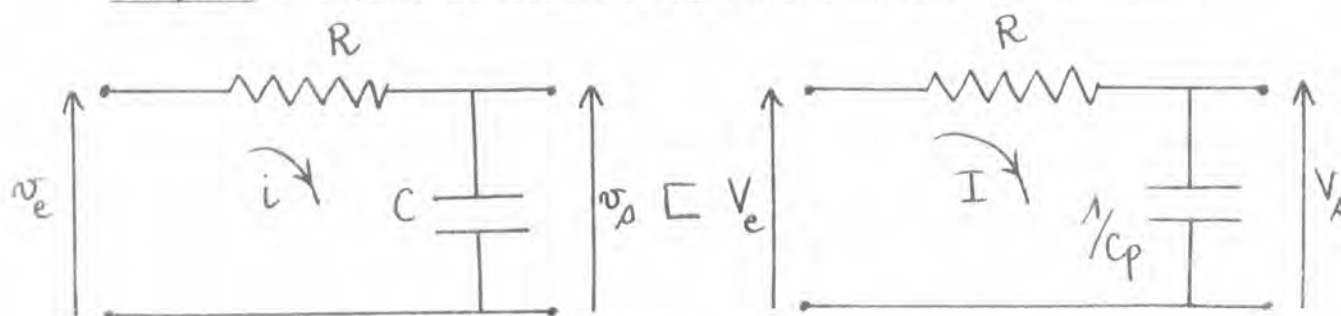


Remarque importante : On a admis ici que " $V_s(p)$ possède un seul antécédent".

Exercice 1 : Etudier la réponse à l'impulsion rectangulaire.

Exercice 2 : Faire l'étude de la CELLULE 2.

Exemple 2 : (Réponse du circuit intégrateur à un train d'impulsions).



$$\begin{cases} v_e = (R + \frac{1}{Cp}) I \\ v_s = \frac{1}{Cp} = \frac{v_e}{1 + \tau p}, \quad \tau = RC \end{cases}$$

Si $v_e(t)$ est un train T -périodique à droite d'impulsions rectangulaires d'amplitude A , et de durée ε ($< T$), alors :

$$V_e(p) = \frac{1}{1 - e^{-Tp}} \frac{A}{p} (1 - e^{-\varepsilon p})$$

et, par conséquent,

$$V_s(p) = \frac{A(1 - e^{-\varepsilon p})}{p(1 - e^{-Tp})(1 + \tau p)}, \quad \text{Re}(p) > 0.$$

Le problème est maintenant de trouver la forme de $v_s(t)$. Commençons par chercher l'originale de :

$$X(p) = \frac{1}{p(1+\tau p)(1-e^{-pT})}$$

Comme : $\frac{1}{p(1+\tau p)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1/\tau} \supset \mathcal{Y}(t) \cdot (1-e^{-t/\tau})$, il vient :

$$X(p) = \frac{1}{p(1+\tau p)} \sum_{n \geq 0} e^{-np} \overset{(*)}{\supset} \sum_{n \geq 0} \mathcal{Y}(t-nT) \cdot (1-e^{-\frac{t-nT}{\tau}}) = x(t)$$

et, à l'aide de la formule du retard,

$$v_s(t) = A(x(t) - x(t-\epsilon)).$$

Il s'agit de comprendre l'allure de $v_s(t)$!

Fixons donc un instant t dans l'intervalle $]NT, (N+1)T[$, $N \in \mathbb{N}^*$.

Alors :

$$\mathcal{Y}(t-nT) = \begin{cases} 1, & \text{si } n = 0, 1, 2, \dots, N \\ 0, & \text{si } n = N+1, N+2, \dots \end{cases}$$

car : $\begin{array}{ccc} 0 \leq (N-n) \cdot T < t-nT < (N+1-n)T \leq 0 \\ n=0, 1, \dots, N & & n=N+1, N+2, \dots \end{array}$

$$\mathcal{Y}(t-\epsilon-nT) = \begin{cases} 1, & \text{si } n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \\ 0, & \text{si } n = N+1, N+2, \dots \end{cases}$$

(*) Comme on va le voir en détail, la série de droite est de fait une somme finie à chaque instant t donné. L'intégration terme à terme :

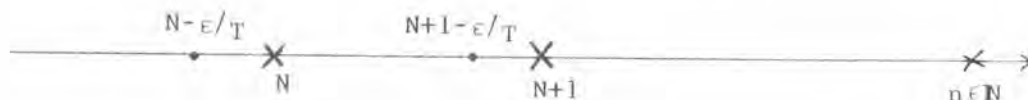
$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-tp} \sum_{n \geq 0} \mathcal{Y}(t-nT) \cdot (1-e^{-\frac{t-nT}{\tau}}) dt &= \\ &= \sum_{n \geq 0} \int_0^{+\infty} e^{-tp} \mathcal{Y}(t-nT) (1-e^{-\frac{t-nT}{\tau}}) dt \end{aligned}$$

peut être justifiée ("théorème de LEBESGUE").

car :

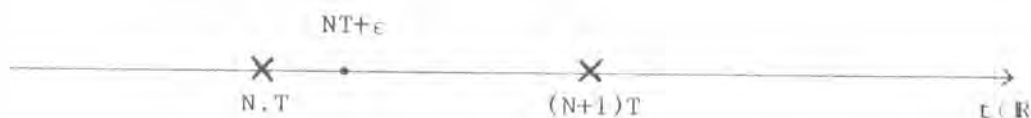
$$0 \leq \sum_{n \leq N-\varepsilon/T} (N-n)T-\varepsilon < t-\varepsilon-nT < (N+1-n)T-\varepsilon \leq 0$$

$$\quad \quad \quad : n \geq N+1-\varepsilon/T$$



Le calcul de $\mathcal{Y}(t-\varepsilon-N, T)$ soulève une petite discussion :

$$t-\varepsilon-N, T > 0 \quad \text{ssi} \quad t > N, T+\varepsilon$$



Ainsi, pour $NT+\varepsilon < t < (N+1)T$, a-t-on :

$$\begin{aligned} v_s(t) &= A \cdot \sum_{n=0}^N (1-e^{-\frac{t-nT}{\tau}}) - A \sum_{n=0}^N (1-e^{-\frac{t-\varepsilon-nT}{\tau}}) \\ &= A \sum_{n=0}^N e^{-\frac{t-nT}{\tau}} (e^{\varepsilon/\tau} - 1) \\ &= A e^{-t/\tau} (e^{\varepsilon/\tau} - 1) \frac{e^{(N+1)T/\tau} - 1}{e^{T/\tau} - 1} \end{aligned}$$

tandis que, si $NT < t < NT+\varepsilon$, l'expression précédente doit être corrigée par le terme additif :

$$A(1-e^{-\frac{t-\varepsilon-NT}{\tau}}).$$

Découpons $v_s(t)$ selon :

$$v_s(t) = -A \frac{e^{\varepsilon/\tau} - 1}{e^{T/\tau} - 1} \cdot e^{-t/\tau} + A \frac{e^{\varepsilon/\tau} - 1}{e^{T/\tau} - 1} \cdot e^{-\frac{t-(N+1)T}{\tau}}$$

Le terme :

$$y(t) = -A \frac{e^{\varepsilon/\tau} - 1}{e^{T/\tau} - 1} e^{-t/\tau}$$

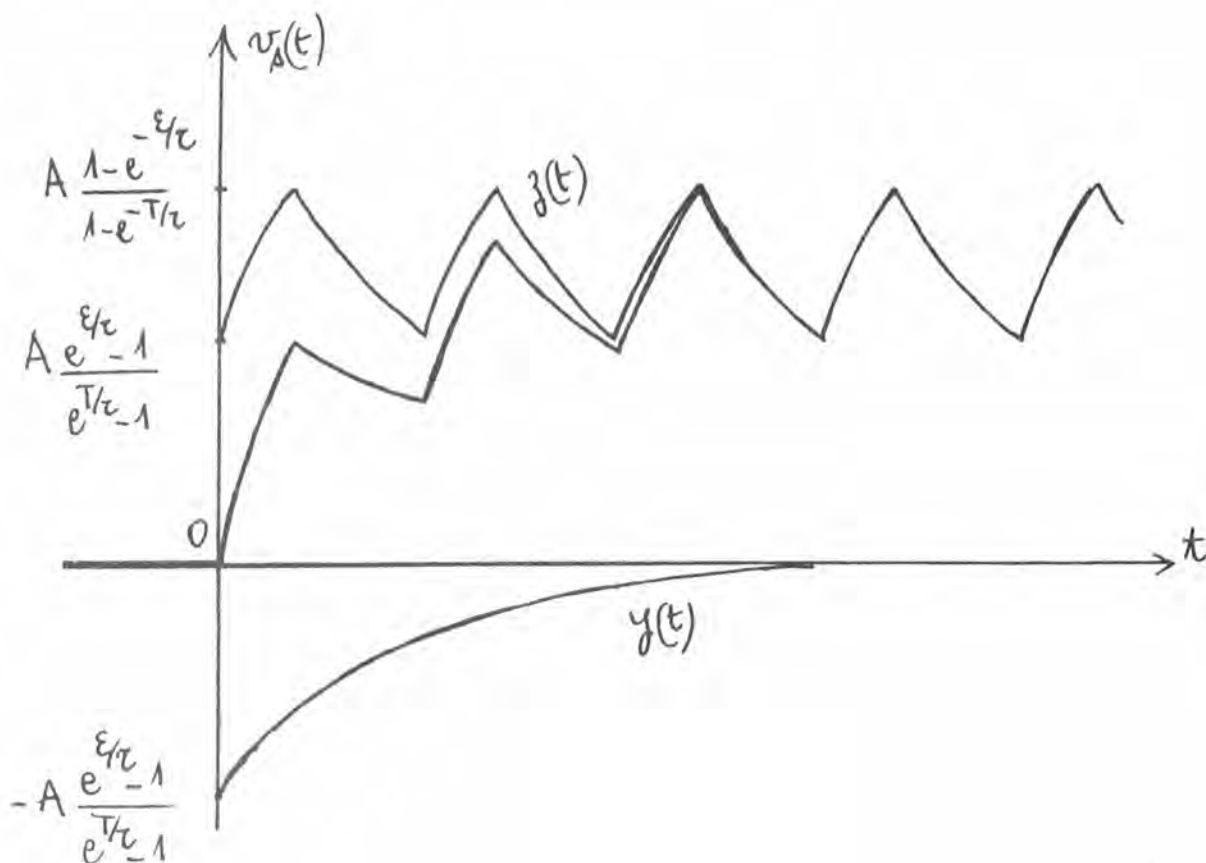
correspond à un régime transitoire, tandis que le terme :

$$z(t) = \begin{cases} A \frac{e^{\varepsilon/\tau} - 1}{1 - e^{-T/\tau}} e^{-\frac{t-NT}{\tau}}, & N.T + \varepsilon < t < (N+1).T \\ A \frac{e^{\varepsilon/\tau} - 1}{1 - e^{-T/\tau}} e^{-\frac{t-NT}{\tau}} + A(1 - e^{-\frac{t-\varepsilon-NT}{\tau}}), & NT < t < NT + \varepsilon \end{cases}$$

est la reproduction T -périodique à droite du signal $\varphi(t)$, défini sur l'intervalle $]0, T[$ par :

$$\varphi(t) = \begin{cases} A \cdot \frac{e^{\varepsilon/\tau} - 1}{1 - e^{-T/\tau}} e^{-t/\tau} + A(1 - e^{-\frac{t-\varepsilon}{\tau}}), & 0 < t \leq \varepsilon \\ A \frac{e^{\varepsilon/\tau} - 1}{1 - e^{-T/\tau}} e^{-t/\tau}, & \varepsilon \leq t < T \end{cases}$$

et correspond donc à un régime permanent.

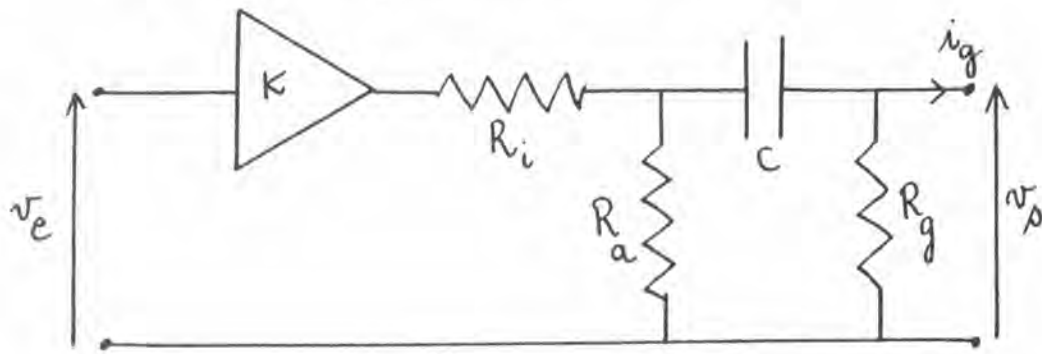


On observera à l'oscilloscope un signal T-périodique "en dents de scie".

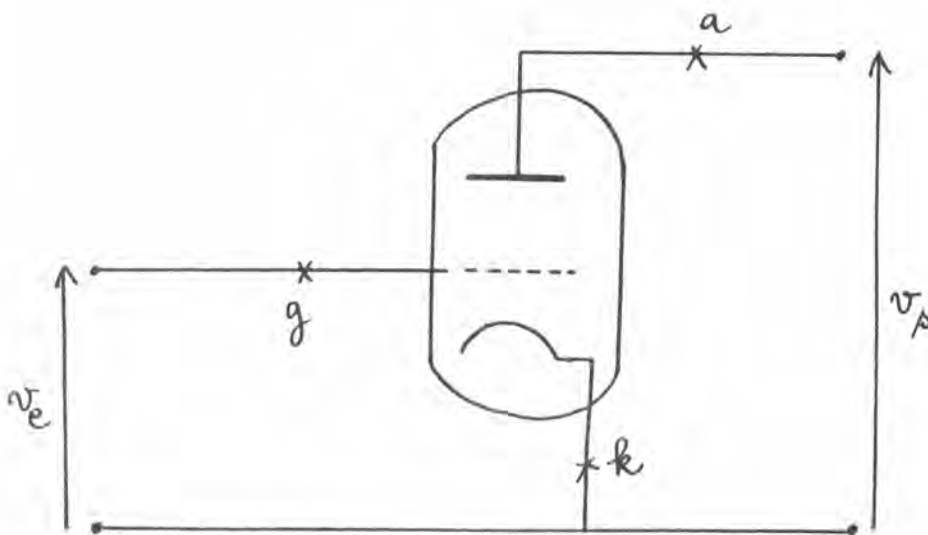
Exercice : Faire la même étude pour la CELLULE 1.

Exemple 3 : (Générateur actif de fonctions de LACUERRE)

Considérons le quadripôle (actif) suivant :



dont le fonctionnement à vide ($i_g = 0$) reflète le comportement d'un étage amplificateur de type triode, lorsqu'on tient compte des éléments parasites (R_i : résistance interne de l'anode ; R_a , R_g : résistances parallèles anode et grille ; C : capacité de couplage ; la grille est suffisamment polarisée - pour que $i_g = 0$:



En raisonnant sur le circuit symbolique, et en supposant $i_g = 0$, on est conduit aux équations suivantes :

$$K.V_e = \left(R_i + \frac{1}{\frac{1}{R_a} + \frac{1}{\frac{1}{C_p} + R_g}} \right) . I_a, \text{ la } (.) \text{ étant l'impédance}$$

d'entrée du circuit suivant l'amplificateur.

$$I_a = \frac{K.V_e - R_i . I_a}{R_a} + \frac{V_s}{R_g}, \text{ d'après la loi des mailles.}$$

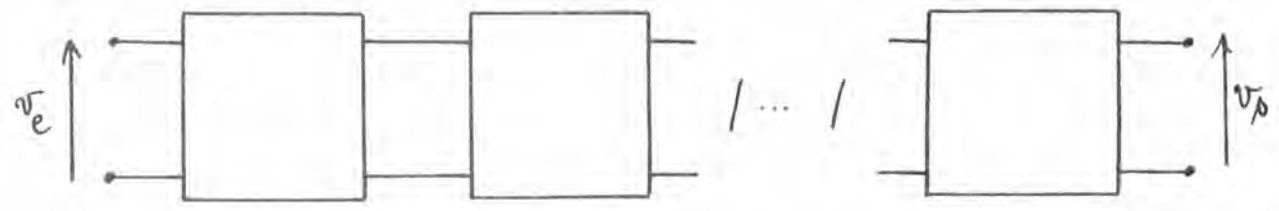
Il est alors possible, à partir de ces équations (Exercice : éliminer I_a), d'obtenir la relation entre V_s et V_e , sous la forme :

$$SR.V_e = (1 + \frac{1}{Tp}) . V_s$$

où on a posé : $R_0 = \frac{R_a R_i}{R_a + R_i}$, $R = \frac{R_0 R_g}{R_0 + R_g}$

$$T = CR_g . \frac{R_0}{R} , \quad S = \frac{1}{KR_i}$$

Montrons n amplificateurs du type précédent en cascade :



Alors, $V_s(p) = (SR . \frac{p}{p+\alpha})^n . V_e(p)$, $\alpha = \frac{1}{T}$.

En particulier, si on entre un échelon-unité, la tension de sortie aura comme transformée de LAPLACE :

$$V_s(p) = (SR)^n . \frac{p^{n-1}}{(p+\alpha)^n} .$$

Pour remonter à l'originale, nous allons utiliser une propriété de $\mathcal{L}$, duale de (P4), soit :

(P4)* Si $f(t) \in F(p)$, F est une fonction dérivable et, pour tout entier n positif,

$$(-t)^n f(t) \in F^{(n)}(p).$$

Comme cela découle du calcul suivant : (*)

$$F'(p) = \frac{d}{dp} \int_0^\infty e^{-tp} f(t) dt = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial p} (e^{-tp} f(t)) dt = \int_0^\infty e^{-tp} (-t f(t)) dt$$

On sait que : $\mathcal{Y}(t) e^{-\alpha t} \in \frac{1}{p+\alpha}$. Il vient donc, d'après (P4)* :

$$\frac{1}{(p+\alpha)^{n+1}} \supset \mathcal{Y}(t) \frac{t^n}{n!} e^{-\alpha t}, \operatorname{Re}(p) > -\alpha$$

D'où, d'après P4, $\frac{p^n}{(p+\alpha)^{n+1}} \supset \mathcal{Y}(t) \left(\frac{t^n}{n!} e^{-\alpha t} \right)^{(n)}$, car il est facile de voir que $\left(\frac{t^n}{n!} e^{-\alpha t} \right)^{(k)}(0) = 0$ si $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

Par conséquent,

$$v_s(t) = (SR)^n \left(\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\alpha t} \right)^{(n-1)} \mathcal{Y}(t).$$

Exercice : $\left(\frac{t^n}{n!} e^{-\alpha t} \right)^{(n)}$ prend la forme $P_n(t) \cdot e^{-\alpha t}$, où $P_n(t)$ est un polynôme de degré n . (: utiliser la formule de LEIBNITZ).

Définition : Le polynôme $L_n(t) = e^t \frac{d^n}{dt^n} \left(e^{-t} \cdot \frac{t^n}{n!} \right)$ s'appelle le $n^{\text{ième}}$ polynôme de LAGUERRE.

Ainsi, $\mathcal{Y}(t) \cdot L_n(t) \in \frac{(p-1)^n}{p}$, $\operatorname{Re}(p) > 0$, comme cela découle de ce qui précède, et de la propriété de $\mathcal{L}$ suivante, duale de la formule du retard :

(P3)* Si $f(t) \in F(p)$, alors $e^{\tau \cdot t} f(t) \cdot \mathcal{Y}(t) \in F(p-\tau)$.

Exercice : Etablir (P3)*.

(*) qu'on peut justifier : c'est l'objet du théorème de LEIBNITZ-LEBESGUE.

Nous reviendrons sur ce point lors de l'étude des FONCTIONS ANALYTIQUES.

En résumé,



$$v_e = y$$

$\underline{n}$ amplificateurs

$$v_s(t) = (SR)^n e^{-\alpha t} L_{n-1}(\alpha t) y(t)$$

Définition : $\ell_n(t) = e^{-t/2} L_n(t)$ est appelée $n^{\text{ième}}$ fonction de LAGUERRE.

La famille de fonctions $\{\ell_n\}_{n \geq 0}$ joue un rôle important en théorie du signal : on montre qu'elle constitue une base orthonormale de l'espace $L^2((0, +\infty))$ des signaux causaux d'énergie finie ^(*)

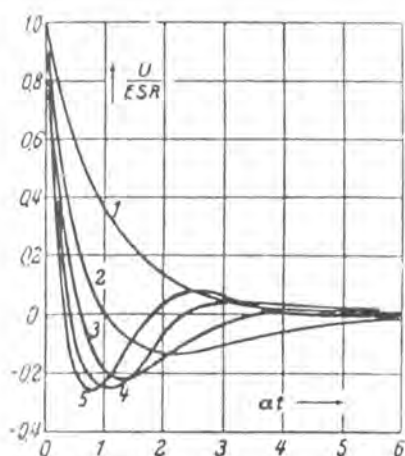


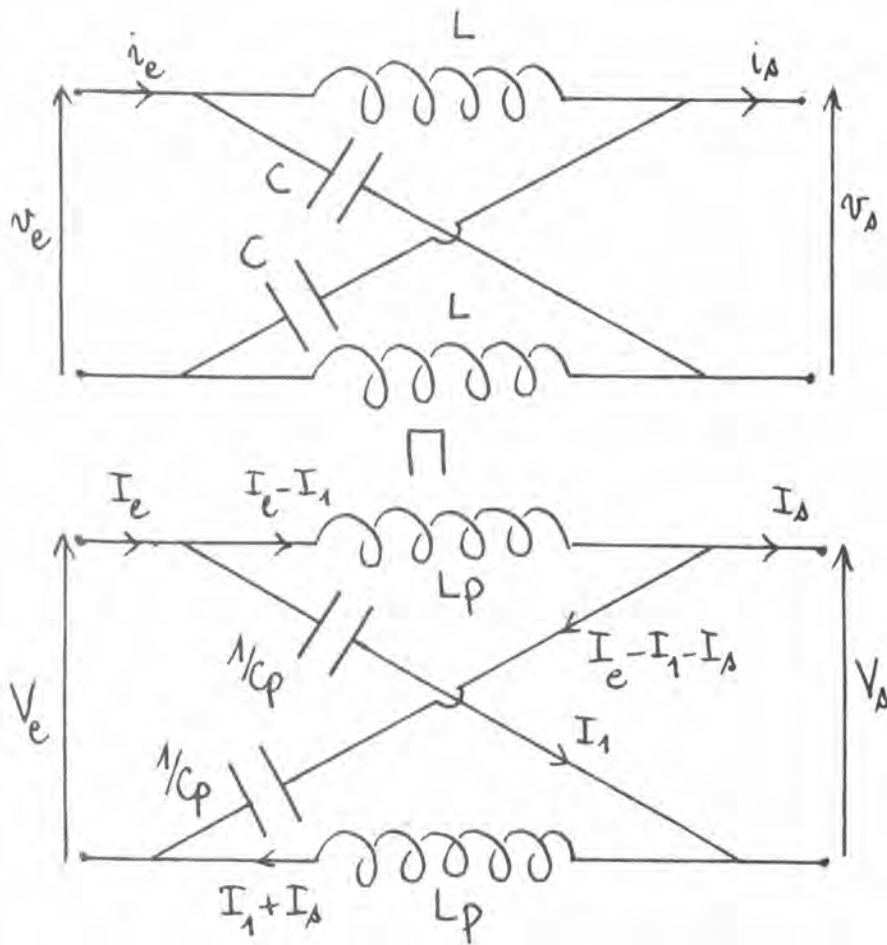
Abb. 35. Spannung am Ausgang eines Widerstandsverstärkers, dessen Eingangsseite an Gleichspannung gelegt wird, bei 1, 2, 3, 4 und 5 Stufen

Voyons un moyen de générer ℓ_n à l'aide de filtres passifs.

(*) voir le cours sur la transformation de HILBERT.

Exemple 4 : (le filtre de WIENER-LEE)

Commençons par étudier le quadripôle suivant :



$$V_e = \frac{1}{C_p} (I_e - I_1 - I_s) + L_p(I_e - I_1) = L_p(I_1 + I_s) + \frac{1}{C_p} I_1$$

donne

$$I_1 = \frac{I_e - I_s}{2}$$

$$V_s = \frac{1}{C_p} (I_e - I_1 - I_s) - L_p(I_1 + I_s)$$

D'où l'on tire :

$$\begin{cases} 2V_s = \frac{1-LCp^2}{Cp} \cdot I_e - \frac{1+LCp^2}{Cp} \cdot I_s \\ 2V_e = \frac{1+LCp^2}{Cp} \cdot I_e - \frac{1-LCp^2}{Cp} \cdot I_s \end{cases}$$

Soit, matriciellement :

$$\begin{pmatrix} V_e \\ I_e \end{pmatrix} = \frac{1}{1-LCp^2} \begin{pmatrix} 1+LCp^2 & 2Lp \\ 2Cp & 1+LCp^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_s \\ I_s \end{pmatrix}$$

On vérifie que le déterminant de la matrice de transfert :

$$\left(\frac{1+LCp^2}{1-LCp^2} \right)^2 - \frac{2Lp}{1-LCp^2} \cdot \frac{2Cp}{1-LCp^2} = 1$$

(conformément à la théorie générale des filtres passifs linéaires).

En identifiant la relation précédente avec celle, bien connue :

$$\operatorname{ch}^2 g - \operatorname{sh}^2 g = 1$$

on est conduit à poser : (*)

$$\frac{1+LCp^2}{1-LCp^2} = \operatorname{ch}(g)$$

$$\frac{2Lp}{1-LCp^2} = Z \operatorname{sh}(g) \quad \text{et} \quad \frac{2Cp}{1-LCp^2} = \frac{1}{Z} \operatorname{sh} g$$

où $Z = \sqrt{\frac{L}{C}}$ a la dimension d'une impédance.

Montons maintenant n exemplaires du filtre précédent en cascade.

Comme dans l'exemple précédent, le lien entre l'entrée et la sortie prend la forme (matricielle) :

(*) supposons dorénavant p réel : les formules obtenues à la fin du calcul se prolongeront dans un $\frac{1}{2}$ -plan complexe.

$$\begin{pmatrix} V_e \\ I_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}(g) & Z \operatorname{sh}(g) \\ \frac{1}{Z} \operatorname{sh}(g) & \operatorname{ch}(g) \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} V_s \\ I_s \end{pmatrix}$$

Calcul de la puissance $n^{\text{ième}}$ de la matrice de transfert^(*) :

Le polynôme caractéristique s'écrit :

$$P(\lambda) = (\lambda - \operatorname{ch} g)^2 - \operatorname{sh}^2 g$$

et ses racines (i les valeurs propres de la matrice) sont donc :

$$\lambda_{\pm} = \operatorname{ch}(g) \pm \operatorname{sh}(g) = e^{\pm g}$$

Les directions propres correspondantes s'obtiennent en résolvant :

$$(\operatorname{ch} g - e^{\pm g})x + Z \operatorname{sh} g y = 0$$

ce qui conduit à la matrice de passage :

$$P = \begin{pmatrix} Z & Z \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

En posant : $D = \begin{pmatrix} e^g & 0 \\ 0 & e^{-g} \end{pmatrix}$, la matrice de transfert prend donc la forme :

$$\begin{pmatrix} \operatorname{ch} g & Z \operatorname{sh} g \\ \frac{1}{Z} \operatorname{sh} g & \operatorname{ch} g \end{pmatrix} = P \cdot D \cdot P^{-1} \quad \text{où} \quad P^{-1} = \frac{1}{2Z} \begin{pmatrix} 1 & Z \\ 1 & -Z \end{pmatrix}$$

Il est alors facile de voir, par récurrence sur n , que :

$$\begin{pmatrix} \operatorname{ch} g & Z \operatorname{sh} g \\ \frac{1}{Z} \operatorname{sh} g & \operatorname{ch} g \end{pmatrix}^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1}$$

(*) voir l'ANNEXE sur la réduction des matrices 2×2 .

avec
$$D^r = \begin{pmatrix} e^{ng} & 0 \\ 0 & e^{-ng} \end{pmatrix}$$

Toutes multiplications matricielles effectuées, on obtient enfin :

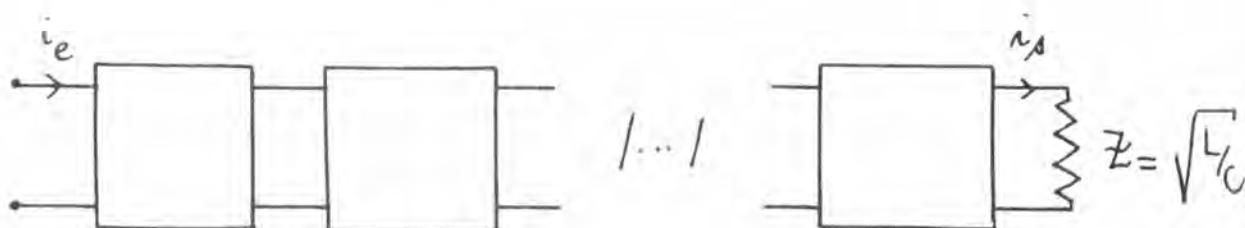
$$V_e = V_s \cdot \text{ch}(ng) + Z \cdot I_s \cdot \text{sh}(ng)$$

$$I_e = \frac{V_s}{Z} \cdot \text{sh}(ng) + I_s \cdot \text{ch}(ng)$$

Observons que si la chaîne de quadripôles est fermée sur l'impédance Z , c'est-à-dire si : $V_s = Z \cdot I_s$, on a immédiatement :

$$V_e = Z \cdot I_e$$

Z est l'impédance caractéristique du quadripôle.



Dans ces conditions, on a :

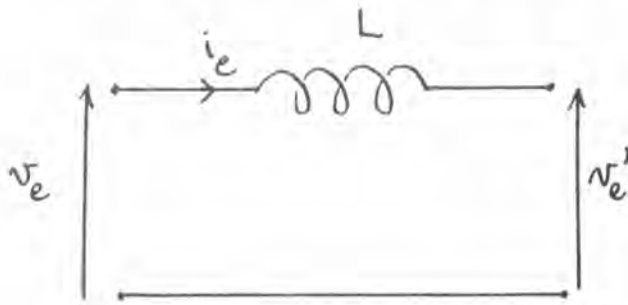
$$V_e = (\text{ch}(ng) + \text{sh}(ng)), V_s = e^{ng} \cdot V_s$$

avec
$$e^g = \text{ch } g + \text{sh } g = \frac{1+LCp^2}{1-LCp^2} + \frac{2Lp}{1-LCp^2} \cdot \sqrt{\frac{C}{L}}$$

$$= \frac{(1+\sqrt{LC}p)^2}{1-LCp^2} = \frac{1+p \cdot \sqrt{LC}}{1-p \cdot \sqrt{LC}}$$

D'où :
$$V_e = \left(\frac{1+p\sqrt{LC}}{1-p\sqrt{LC}} \right)^n \cdot V_s$$

Branchons à l'entrée une bobine L supplémentaire (*) :



il vient :
$$v_e = (1 + \sqrt{LC} \cdot p) \cdot v_e' = \frac{(1 + p\sqrt{LC})^{n+1}}{(1 - p\sqrt{LC})^n} \cdot v_s$$

(puisque : $v_e = v_e' + Lp \cdot I_e$, $I_e = \frac{1}{Z} v_e'$)

Soit enfin :

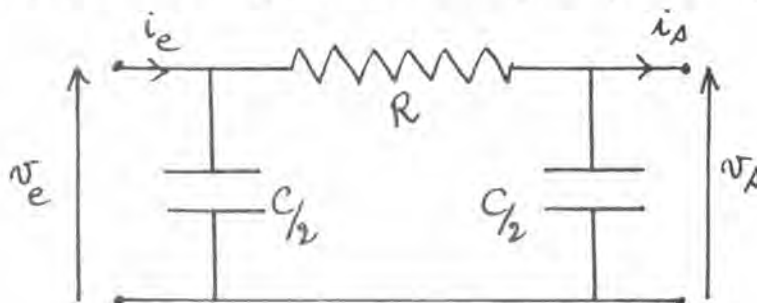
$$\frac{v_s}{v_e} = \frac{(1 - p\sqrt{LC})^n}{(1 + p\sqrt{LC})^{n+1}}$$

Exercice : Montrer que $\frac{v_s}{v_e}(p) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{LC}} \cdot \mathcal{L}_n\left(\frac{2}{\sqrt{LC}} \cdot t\right)$ (Utiliser (P2)).

5. Deux autres exemples, qui pose le problème du retour à l'originale

Jusqu'à présent, nous nous sommes tirés d'affaire lors du retour de $v_s(p)$, vers $v_s(t)$, à l'aide des propriétés élémentaires de $\mathcal{L}$. Voici maintenant deux exemples, issus de la théorie des lignes électriques à constantes réparties, montrant que le retour n'est pas toujours aussi simple.

Exemple 1 : Un câble sans induction peut être modélisé comme la mise en cascade d'un très grand nombre de quadripôle du type suivant :



(*) ébauche de "théorie de la synthèse des filtres".

On se pose le problème de la recherche du courant de court-circuit lors de la mise sous tension continue E à l'entrée,

Exercice :

- 1) Montrer que :

$$\begin{pmatrix} V_e \\ I_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{RCp}{2} & R \\ Cp(1 + \frac{RCp}{4}) & 1 + \frac{RCp}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_s \\ I_s \end{pmatrix}$$

- 2) En posant : $ch(g) = 1 + \frac{RCp}{2}$, $sh(g) = \sqrt{RCp(1 + \frac{RCp}{4})} = \frac{R}{2}^{(*)}$, montrer que :

$$\begin{pmatrix} 1 + \frac{RCp}{2} & R \\ Cp(1 + \frac{RCp}{4}) & 1 + \frac{RCp}{2} \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} ch(ng) & 2 \cdot sh(ng) \\ \frac{1}{2} sh(ng) & ch(ng) \end{pmatrix}, \text{ si } n \in \mathbb{N}.$$

- 3) En déduire que le courant cherché admet pour transformée de LAPLACE :

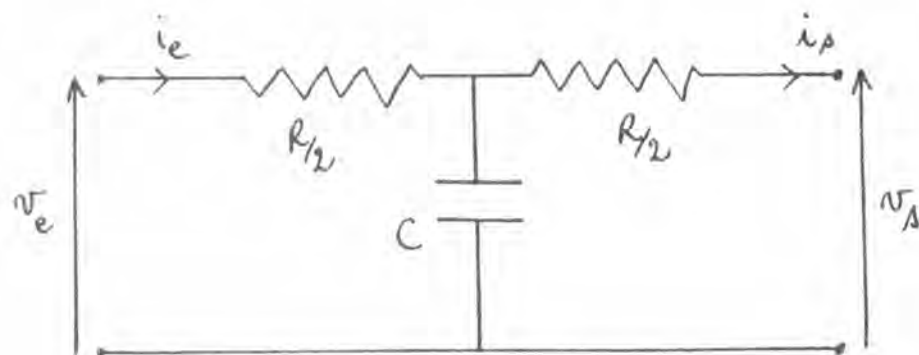
$$I_s(p) = \frac{E}{R} \cdot \frac{sh(g)}{p \cdot sh(ng)}$$

- 4) Vérifier que l'expression $\frac{sh(g)}{sh(ng)}$ est une fraction rationnelle en p , de l'ordre de $1/p^{n-1}$ lorsque $|p| \rightarrow +\infty$.

Il est donc possible en principe de retourner à l'originale, via une décomposition de la fraction rationnelle en éléments simples, c'est-à-dire de la forme $\frac{1}{(p-\alpha)^n}$, avec $\alpha \in \mathbb{C}$. Cependant, la fraction n'est pas facile à expliciter (voir la solution de la question 4) !), et nous verrons que la théorie des FONCTIONS ANALYTIQUES conduit rapidement à l'expression de $i_s(t)$ (sous la forme d'une somme d'exponentielles amorties : c'est la formule de THOMSON, que nous établirons plus loin).

Exemple 2 : On modélise le câble précédent comme la mise en cascade de n quadripôles ayant chacun la structure suivante :

(*) supposer p réel positif.



Exercice :

1) Montrer que :

$$\begin{pmatrix} V_e \\ I_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{RCp}{2} & R(1 + \frac{RCp}{4}) \\ C_p & 1 + \frac{RCp}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_s \\ I_s \end{pmatrix}$$

2) En posant : $ch(g) = 1 + \frac{RCp}{2}$, $sh(g) = \sqrt{RCp(1 + \frac{RCp}{4})} = C_p.Z$, montrer que :

$$\begin{pmatrix} 1 + \frac{RCp}{2} & R(1 + \frac{RCp}{4}) \\ C_p & 1 + \frac{RCp}{2} \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} ch(ng) & Z.sh(ng) \\ \frac{1}{Z}sh(ng) & ch(ng) \end{pmatrix}, \text{ si } n \in \mathbb{N}$$

3) On ferme la ligne sur son impédance caractéristique Z , et on applique à l'entrée une tension continue E à l'instant $t = 0$. Montrer que

$$\begin{aligned} I_s(p) &= \frac{E}{Z_p} e^{-ng} \\ &= \frac{2E}{R} \cdot \frac{1}{\sqrt{q(q+1)}} \cdot (\sqrt{q+1} - \sqrt{q})^{2n} \end{aligned}$$

Ici, c'est l'existence de radicaux qui nous empêche de remonter vers les fonctions connues, en guise d'originale $i_s(t)$. Nous parviendrons à exprimer $i_s(t)$ à l'aide d'une fonction spéciale, importante en physique au même titre que les fonctions $\exp$ ou $\cos$: la fonction de BESSEL.

6. Deux théorèmes limite

On a vu que :

$$f(t) = \mathcal{M}(t) e^{-\alpha t} \quad \frac{1}{p + \alpha} = F(p)$$

et on observe sur cet exemple que :

$$p \cdot F(p) = \frac{p}{p + \alpha} \xrightarrow{\operatorname{Re}(p) \rightarrow +\infty} 1 = f(0_+)$$

$$\xrightarrow{\substack{(p \rightarrow 0) \\ (p < 0)}} 0 = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = f(+\infty)$$

Ces comportements limites sont valides en général, et peuvent rendre des services lorsque le retour à l'original est difficile. Ainsi, dans l'exemple 1 du § 5), aura-t-on :

$$p \cdot I_s(p) = \frac{E \cdot \operatorname{sh}(g)}{R \cdot \operatorname{sh}(ng)} \underset{(p \rightarrow 0_+)}{\sim} \frac{E \cdot g}{R \cdot ng} = \frac{E}{nR}$$

et le courant de court-circuit doit-il tendre vers la valeur limite $\frac{E}{nR} = \frac{E}{R}$, R désignant la résistance totale de la ligne (comme cela est physiquement clair !).

Voici les deux énoncés précis :

(P5) (sous les conditions du § 1), $\lim_{\substack{(p \rightarrow +\infty) \\ (p \in \mathbf{R})}} pF(p) = f(0_+)$.

(P5)* Si (en outre), $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = f(+\infty)$ existe, alors $\alpha_f \geq 0$, et :

$$\lim_{(p \rightarrow 0_+)} pF(p) = f(+\infty)$$

Démonstrations :

a) Remarquons tout d'abord que :

$$|F(p)| \leq A \cdot \int_0^{\infty} e^{-(\operatorname{Re}(p) - \alpha)t} dt = \frac{A}{\operatorname{Re}(p) - \alpha} \xrightarrow{(\operatorname{Re}(p) \rightarrow +\infty)} 0 ;$$

b - Si f est dérivable, et si f' vérifie les conditions du § 1, alors, d'après (P4) et a- :

$$p.F(p) = f(0_+) + \int_0^{+\infty} f'(t) e^{-pt} dt \xrightarrow{\operatorname{Re}(p) \rightarrow +\infty} f(0_+)$$

ce qui correspond à (P5) ;

c - Pour démontrer (P5) dans le cas général, on procède par découpage : étant donné $\varepsilon > 0$, aussi petit qu'on veut, il existe $\delta > 0$ tel que :

$$|f(t) - f(0_+)| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \text{ si } 0 < t < \delta$$

$$\begin{aligned} \text{d'où } |pF(p) - f(0_+)| &= \left| \int_0^{+\infty} p e^{-pt} (f(t) - f(0_+)) dt \right| \\ &\leq \left| \int_0^{\delta} p e^{-pt} (f(t) - f(0_+)) dt \right| + \left| \int_{\delta}^{+\infty} p e^{-pt} (f(t) - f(0_+)) dt \right| \end{aligned}$$

$$\text{avec } \left| \int_0^{\delta} p e^{-pt} (f(t) - f(0_+)) dt \right| \leq \int_0^{\delta} |p| e^{-t \operatorname{Re}(p)} |f(t) - f(0_+)| dt$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{|p|}{\operatorname{Re}(p)} \text{ si } \operatorname{Re}(p) > 0$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{et : } \left| \int_{\delta}^{+\infty} p e^{-pt} (f(t) - f(0_+)) dt \right| &\leq A \cdot \int_{\delta}^{+\infty} |p| \cdot e^{-t(\operatorname{Re}(p) - \alpha)} dt \\ &\quad + |f(0_+)| \int_{\delta}^{+\infty} |p| e^{-t \operatorname{Re}(p)} dt \end{aligned}$$

$$\leq A \frac{|p|}{\operatorname{Re}(p) - \alpha} e^{-\delta(\operatorname{Re}(p) - \alpha)} +$$

$$+ |f(0_+)| \frac{|p|}{\operatorname{Re}(p)} e^{-\delta \operatorname{Re}(p)}$$

le majorant obtenu ci-dessus tend vers 0 lorsque $\operatorname{Re}(p) \rightarrow +\infty$; à ce titre, on peut choisir un nombre M tel que, si $\operatorname{Re}(p) \geq M$, il devient $\leq \frac{\varepsilon}{2}$, ce qui achève la démonstration de (P5).

d - On suppose que $f(+\infty)$ existe : $f(t)$ est donc en particulier bornée, et on peut prendre $\alpha = 0$ dans la définition du § 1 : $\sigma_f \leq 0$.

Maintenant, étant donné $\varepsilon > 0$, aussi petit qu'on veut, il est possible de trouver $B > 0$, tel que :

$$|f(t) - f(\infty)| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \text{ si } t \geq B.$$

Découpons alors : $pF(p) - f(\infty) = \int_0^{\infty} pe^{-tp}(f(t) - f(\infty))dt$ selon $\int_0^B + \int_B^{+\infty}$.
On a :

$$\left| \int_0^B pe^{-tp}(f(t) - f(\infty))dt \right| \leq p \int_0^B |f(t) - f(\infty)| dt \text{ si } p > 0$$

et :

$$\left| \int_0^{+\infty} pe^{-tp}(f(t) - f(\infty))dt \right| \leq \int_B^{+\infty} pe^{-tp} dt, \quad \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Comme $p \int_0^B |f(t) - f(\infty)| dt \rightarrow 0$, on conclut.

Remarque importante :

$$y(t)\cos(\omega t) \sim \frac{p}{p^2 + \omega^2} : \text{ici, } pF(p) = \frac{p^2}{p^2 + \omega^2} \xrightarrow{(p \rightarrow 0_+)} 0, \text{ mais } f(t)$$

n'admet pas de limite lorsque $t \rightarrow +\infty$.

7. Une nouvelle ligne du DICTIONNAIRE : les fonctions de BESSEL et leurs transformées

On rappelle que le problème à résoudre est celui de la recherche de l'originale de

$$\frac{1}{\sqrt{p(p+1)}} \cdot (\sqrt{p+1} - \sqrt{p})^{2n}$$

qui est donc liée au courant de sortie d'un cable sans induction fermé sur son impédance caractéristique, et soumis à l'échelon unité.

Afin d'exprimer la solution, il est nécessaire d'entreprendre l'étude d'une classe de fonctions spéciales, très importantes pour la Physique Mathématique : celle des fonctions de BESSEL^(*). En même temps, ce paragraphe servira d'illustration aux définitions et techniques développées dans l'ANNEXE 2.

(*) on les rencontrera de nouveau, par exemple, lors de l'étude de la modulation de fréquence.

7.1. L'EDO de BESSEL d'indice ν s'écrit :

$$(B_\nu) \quad t^2 x'' + t x' + (t^2 - \nu^2) x = 0$$

où t désigne la variable (t - temps), x la fonction inconnue, de dérivées x' et x'' , et ν un paramètre (complexe).

On commence par rechercher une solution particulière de (B_ν) sous la forme :

$$x(t) = t^r \cdot \sum_{n \geq 0} a_n t^n, \quad a_0 \neq 0$$

où l'exposant r et les coefficients (a_n) vont être obtenus par identification :

$$x'(t) = \sum_{n \geq 0} a_n (n+r) t^{n+r-1}$$

$$x''(t) = \sum_{n \geq 0} a_n (n+r)(n+r-1) t^{n+r-2}$$

et x obéit à (B_ν) si :

$$\sum_{n \geq 0} a_n (n+r)(n+r-1) t^{n+r} + \sum_{n \geq 0} a_n (n+r) t^{n+r} + (t^r - \nu^2) \sum_{n \geq 0} a_n t^{n+r} = 0$$

Après simplification pour t^r , et identification, on est conduit à :

$$\begin{cases} a_0(r^2 - \nu^2) = 0 \\ a_1((r+1)^2 - \nu^2) = 0 \\ ((n+r)^2 - \nu^2)a_n + a_{n-2} = 0, \quad n = 2, 3, 4, \dots \end{cases}$$

Comme $a_0 \neq 0$, $r^2 = \nu^2$ et a_1 , ainsi que tous les coefficients d'indices impairs s'annulent.

Pour $r = \nu$, la relation de récurrence qui lie les coefficients d'indices pairs, s'écrit :

$$4(k+\nu)k \cdot a_{2k} + a_{2(k-1)} = 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

et permet d'obtenir :

$$a_{2k} = (-1)^k \cdot \frac{a_0}{2^{2k} k! (1+\nu)(2+\nu) \dots (k+\nu)}$$

si $\nu \neq -1, -2, -3, \dots$

En particulier, pour $v = n$ entier positif, et en choisissant pour a_0 la valeur $\frac{1}{2^n n!}$, on obtient la solution à (B_n) suivante :

$$J_n(t) = \left(\frac{t}{2}\right)^n \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k (t/2)^{2k}}{k! (n+k)!}$$

J_n est définie sur $\mathbb{C}$ entier. C'est la fonction de BESSEL d'indice n .

7.2. Exercice : Montrer qu'en appliquant la transformation de LAPLACE à (B_v) , on obtient l'EDO suivante :

$$(p^2+1).X''(p)+3p.X'(p)+(1-v^2)X(p) = 0$$

L'EDO obtenue n'est apparemment (*) pas plus simple à intégrer ! La transformation de LAPLACE n'est adaptée, en général, qu'à la résolution des EDO linéaire à coefficients constants.

Il est plus fécond de reprendre la recherche de solution de (B_v) sous la forme :

$$x(t) = t^v \int_{\mathcal{C}} e^{zt} X(z) dz$$

où $\mathcal{C}$ est un chemin dans le plan complexe, X une fonction sur $\mathbb{C}$, tous deux inconnus, et qu'on va chercher selon une méthode d'identification, dite méthode de LAPLACE complexe :

$$\dot{x}(t) = \int_{\mathcal{C}} (vt^{v-1} + t^v z) e^{tz} X(z) dz$$

$$\ddot{x}(t) = \int_{\mathcal{C}} (v(v-1)t^{v-2} + 2t^{v-1}z + t^v z^2) e^{tz} X(z) dz$$

et, si x obéit à (B_v) , alors :

$$\int_{\mathcal{C}} [(2v+1)z + (1+z^2)t] e^{zt} X(z) dz = 0$$

(*) nous y viendrons au § 1.4.

On observe alors, qu'avec une intégration par parties,

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} (1+z^2)t.X(z)e^{tz}dz &= \int_{\mathcal{C}} (1+z^2)X(z)d(e^{tz}) \\ &= (1+z^2)X(z)e^{tz} \Big|_{\partial\mathcal{C}} - \int_{\mathcal{C}} [(1+z^2)X(z)]'e^{tz}dz \end{aligned}$$

ce qui nous amène à scinder l'équation selon :

$$(1+z^2)X'(z) - (2v-1)z.X(z) = 0$$

et $(1+z^2)X(z)e^{tz} = 0$ sur le bord $\partial\mathcal{C}$ (c'est-à-dire les extrémités),

Il est tout d'abord facile d'intégrer l'EDO à variables séparables :

$$\frac{X'}{X}(z) = \frac{(2v-1)z}{1-z^2}$$

selon : $X(z) = K.(1+z^2)^{v-\frac{1}{2}}$

puis il est possible de choisir $\mathcal{C}$ de sorte que :

$$(1+z^2)^{v+\frac{1}{2}}e^{tz} = 0 \text{ sur } \partial\mathcal{C}$$

puisque'il suffit par exemple de prendre $\partial\mathcal{C} = \{-i, +i\}$.

Aussi obtient-on la solution intégrale de (B_v) suivante :

$$t^v \int_{-1}^{+1} (1-u^2)^{v-\frac{1}{2}} e^{itu} du, \text{ si } \operatorname{Re}(v) > -\frac{1}{2}$$

en ayant choisi le chemin $[-i, +i[$.

Maintenant, et si, au lieu de e^{zt} , on part d'un noyau $K(t, z)$ a priori quelconque, on peut obtenir une nouvelle solution intégrale :

Exercice : Expliquer les étapes du calcul suivant :

On recherche une solution $x(t)$ sous la forme :

$$x(t) = \int_{\mathcal{C}} K(t, z)X(z)dz$$

Alors,

$$\int_{\mathcal{C}} \left[t^2 \frac{\partial^2 K}{\partial t^2} + t \frac{\partial K}{\partial t} + (t^2 - v^2) K \right] . X \, dz = 0$$

et, si K obéit à l'équation aux dérivées partielles :

(E.D.P.)
$$t^2 \frac{\partial^2 K}{\partial t^2} + t \frac{\partial K}{\partial t} + (t^2 - v^2) K = - \frac{\partial^2 K}{\partial z^2}$$

on peut scinder le problème selon :

$$X'' + v^2 . X = 0$$

et
$$X \frac{\partial K}{\partial z} - X' . K \Big|_{\partial \mathcal{C}} = 0$$

On cherche à résoudre (EDP) selon : $K(t,z) = e^{it\alpha(z)}$, et on est conduit à prendre :

$$\alpha(z) = \sin z$$

On obtient d'autre part, par exemple :

$$X(z) = e^{-ivz}$$

C'est ainsi que le chemin réel $[0, 2\pi]$ convient, pourvu que :

$$ie^{-ivz} (t \cos z + v) \Big|_{z=0}^{z=2\pi} = i(t+v)(e^{-2i\pi v} - 1) = 0$$

c'est-à-dire que v soit entier.

On est ainsi conduit à la solution intégrale suivante de $(B_{v=n})$

$$\int_0^{2\pi} e^{it \sin z - inz} dz = \int_0^{2\pi} \cos(t \sin \theta - n\theta) d\theta.$$

7.3. On a trouvé au § précédent plusieurs solutions à (B_v) , et il est naturel de se poser la question du lien qui peut les unir.

On doit tout d'abord savoir que l'ensemble des solutions à (B_v) constitue un espace vectoriel de dimension 2 : cela signifie qu'il doit exister deux solutions de base, à partir desquelles peuvent s'exprimer toutes les autres, comme combinaison linéaire.

Dans le § 7.1., nous avons explicité une solution J_ν , par un développement en série de la forme :

$$J_\nu(t) = \left(\frac{t}{2}\right)^\nu \cdot \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k (t/2)^{2k}}{k! (1+\nu)(2+\nu) \dots (k+\nu)}$$

associé au choix : $r = \nu$. Le choix $r = -\nu$ conduit, pour ν différent d'un entier positif, à une solution de la forme :

$$J_{-\nu}(t) = \left(\frac{t}{2}\right)^{-\nu} \cdot \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k (t/2)^{2k}}{k! (1-\nu)(2-\nu) \dots (k-\nu)}$$

Ces deux solutions sont indépendantes, comme le montrent leurs comportements à l'origine :

$$J_\nu(t) \underset{(t \rightarrow 0)}{\sim} (t/2)^\nu, \text{ tandis que } J_{-\nu}(t) \underset{(t \rightarrow 0)}{\sim} (t/2)^{-\nu}$$

si bien que toute autre solution de (B_ν) a la forme :

$$A \cdot J_\nu(t) + B \cdot J_{-\nu}(t).$$

Il en est ainsi en particulier des solutions intégrales obtenues au § 7.2 et, comme précédemment, une étude de leurs comportements à l'origine permet de montrer qu'elles sont proportionnelles à J_ν .

On est donc conduit, pour en particulier $\nu = n$ entier positif, aux représentations intégrales de $J_n(t)$ suivantes :

$$J_n(t) = C_n^{(*)} \left(\frac{t}{2}\right)^n \int_{-1}^{+1} (1-u^2)^{n-\frac{1}{2}} e^{itu} du$$

et :

$$J_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{it \sin \theta} e^{-in\theta} d\theta$$

appelées respectivement représentations intégrales de HANKEL et de SOMMERFELD. C'est en particulier cette dernière, que nous avons déjà rencontré dans l'ANNEXE 2, qui explique l'intérêt que présente les fonctions de BESSEL, par exemple pour la modulation de fréquence.

(*) On se calcule, via la fonction d'EULER : $e_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{(n+\frac{1}{2})}$

Exercice :

- 1) Faire le changement de fonction : $x = \frac{y}{\sqrt{t}}$ dans $B_{1/2}$, intégrer l'EDO obtenue, et en déduire que :

$$J_{1/2}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \sin t$$

- 2) Retrouver cette formule à partir du développement en série, ou d'une représentation intégrale.

7.4. Nous pouvons passer maintenant au calcul qui nous intéresse, c'est-à-dire au calcul de la transformée de LAPLACE des fonctions de BESSEL.

Voici, pour commencer, une technique directe, mais assez artificielle (: car guidée en fait par le résultat !) : dans l'EDO obtenue en 7.2., et vérifiée par la transformée de LAPLACE X de J_ν ,

$$(p^2+1)X''(p)+3p.X'(p)+(1-\nu^2)X(p) = 0$$

effectuons :

- le changement de variable : $p = \text{sh } q$ (*)

et - le changement de fonction : $X(p) = \frac{1}{\text{ch } q} Y(q)$

Exercice : Montrer que $Y(q)$ obéit à l'EDO :

$$Y''(q) - \nu^2 Y(q) = 0$$

(Attention : $\frac{dX}{dp} = \left(\frac{1}{\text{ch } q} \cdot \frac{dY}{dq} - \frac{\text{sh } q}{\text{ch}^2 q} \cdot Y \right) \cdot \frac{dq}{dp}$ avec $\frac{dp}{dq} = \text{ch } q \dots$).

La nouvelle EDO obtenue est homogène, linéaire, et à coefficients constants : sa solution générale prend, pour ν réel et positif, la forme :

$$Y(q) = Ae^{\nu q} + Be^{-\nu q}$$

D'où, en revenant à la fonction et à la variable d'origine :

$$X(p) = A \cdot \frac{e^{\nu \text{Arg sh}(p)}}{\sqrt{p^2+1}} + B \cdot \frac{e^{-\nu \text{Arg sh}(p)}}{\sqrt{p^2+1}}$$

(*) on supposera que $p > 0$, afin de légitimer sans problème les opérations.

Rappelons que : $\text{Arg sh}(p) = \log(p + \sqrt{p^2 + 1})$.

($p = \text{sh } q = \frac{e^q - e^{-q}}{2}$: posant $x = e^q$, il s'agit de résoudre l'équation du second degré : $x^2 - 2px - 1 = 0$, de solution positive : $p + \sqrt{p^2 + 1}$).

Maintenant, en vertu de la propriété P5, $pX(p)$ doit tendre vers $J_V(0) = 0$ lorsque p tend vers $+\infty$: cela conduit à prendre $B = 0$ et à écrire :

$$J_V(t) \subset C_V \cdot \frac{1}{\sqrt{p^2 + 1}(p + \sqrt{p^2 + 1})}$$

où C_V est une constante qu'il reste à déterminer.

Exercice :

- 1) Montrer que, si $J_n(t) \subset X(p)$, alors :

$$J_n^{(\odot)}(t) \subset p^n X(p) ;$$

- 2) Montrer que $p^{n+1} X(p) \xrightarrow{(p \rightarrow +\infty)} \frac{C_n}{2^n}$;

- 3) Calculer $J_n^{(\odot)}(0)$, et en déduire la valeur de C_n .

On obtient donc :

$$J_n(t) \subset \frac{(\sqrt{p^2 + 1} - p)^n}{\sqrt{p^2 + 1}}$$

• Voici une autre technique plus naturelle, qui s'appuie sur le développement en série de $J_V(t)$, mais qui nécessite une "reconnaissance de forme" du résultat.

Exercice :

- 1) Rappeler $t^{n+2k} \subset ?$;
2) En appliquant formellement la propriété $(P1)$, montrer que :

$$J_0(t) \subset \frac{1}{p} \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{(2p)^{2k}} \cdot \frac{(2k)!}{(k!)^2} \quad (*)$$

(*) l'interversion des signes $\int_0^\infty$ et $\sum_{k \geq 0}$ peut se justifier : il fait l'objet du théorème de LEBESGUE-LEIBNITZ.

et, plus généralement, que :

$$J_n'(t) = \frac{1}{p} \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \frac{(n+2k)!}{(2p)^{n+2k}}.$$

Il s'agit maintenant d'identifier le développement de droite ! Il faut savoir ici que :

$$\frac{1}{\sqrt{p^2+1}} = (p^2+1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{p} \left(1 + \frac{1}{p^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{p} \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{(2p)^{2k}} \frac{(2k)!}{(k!)^2}, \quad |p| > 1$$

comme on le vérifiera à partir du développement en série suivant :

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k \geq 0} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)}{k!} x^k, \quad |x| < 1 \quad (\text{Exercice !})$$

Ainsi retrouve-t-on :

$$J_0(t) = \frac{1}{\sqrt{p^2+1}}.$$

On présente sous la forme de 2 exercices la méthode de calcul des transformées de J_1 et de J_2 :

Exercice 1 :

1) Vérifier que :

$$(t^{-n} J_n)' = -t^{-n} J_{n+1};$$

2) Dédire de (P4) que :

$$J_1(t) = \frac{\sqrt{p^2+1}-p}{\sqrt{p^2+1}}$$

Exercice 2 :

1) Vérifier que :

$$J_{n-1} - J_{n+1} = 2J_n';$$

2) Calculer $J_2(t) = ?$

Voici enfin la bonne technique, qui s'appuie sur la représentation intégrale de SOMMERFELD et le théorème des résidus, et qui se développe sans artifices.

On part donc de :

$$J_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{it \sin \theta} e^{-in\theta} d\theta = i^{-n} \int_0^{2\pi} e^{it \cos \theta} e^{in\theta} \frac{d\theta}{2\pi}$$

la dernière égalité résultant du changement de variables " $\theta = \frac{\pi}{2} - \psi$ ".

Par conséquent,

$$J_n(t) = X(p) = \frac{1}{i^n} \int_0^\infty e^{-tp} \int_0^{2\pi} e^{it \cos \theta} e^{in\theta} \frac{d\theta}{2\pi} dt$$

ou, en intervertissant l'ordre des intégrations ^(*), et compte tenu de :

$$\int_0^\infty e^{-tp} e^{it \cos \theta} dt = \int_0^\infty e^{-(p-i \cos \theta)t} dt = \frac{1}{p-i \cos \theta}, \text{ si } \operatorname{Re}(p) > 0$$

on obtient :

$$X(p) = \frac{i^{-n}}{i^n} \int_0^{2\pi} \frac{e^{in\theta}}{p-i \cos \theta} \frac{d\theta}{2\pi}$$

Maintenant, on peut interpréter cette intégrale, comme une intégrale curviligne, le long du cercle unité (: poser " $e^{i\theta} = z$ ") :

$$X(p) = \frac{i^{-n}}{2\pi} \oint_{\odot} \frac{z^n}{p - \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})} \cdot \frac{dz}{iz}$$

soit :

$$X(p) = \frac{i^{-n}}{2\pi} \oint_{\odot} \frac{2z^n}{z^2 + 2ipz + 1} dz$$

Le trinôme : $z^2 + 2ipz + 1 = (z+ip)^2 + (p^2+1)$ possède, si p est positif, le seul zéro : $z_0 = -i(p-\sqrt{p^2+1})$ à l'intérieur du cercle unité.

D'après le théorème des résidus, on a donc :

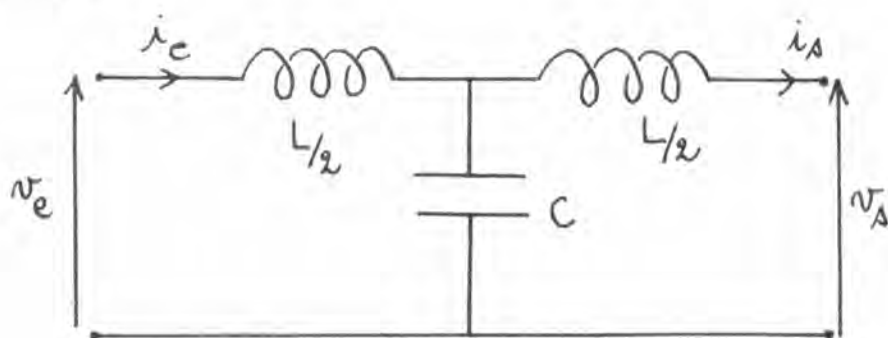
$$\begin{aligned} X(p) &= \frac{i^{-n}}{2\pi} \cdot 2i\pi \cdot \operatorname{Rés}_{z_0} \left(\frac{2z^n}{z^2 + 2ipz + 1} \right) \\ &= \frac{i^{-n}}{2\pi} \cdot 2i\pi \cdot \frac{2z_0^n}{2(z_0+ip)} \\ &= \frac{(\sqrt{p^2+1}-p)^n}{\sqrt{p^2+1}} \end{aligned}$$

(*) cette opération se justifie, en invoquant le théorème dit de LEBESGUE-FUBINI.

Remarque importante : Au cours de certains calculs, on a été amené à supposer p par exemple réel positif. Grâce au Principe du prolongement analytique, cela n'est pas gênant quant à la validité des formules finales.

7.5. Avant de répondre enfin à la question posée au début de ce paragraphe, donnons encore un exemple tiré de la théorie des lignes.

Exercice : Un câble sans perte peut être modélisé comme la mise en cascade d'un nombre élevé n de quadripôles identiques ayant chacun la structure suivante :



1) Montrer que :

$$\begin{pmatrix} v_e \\ i_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+LCp^2/2 & Lp(1+LCp^2/4) \\ Cp & 1+LCp^2/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_s \\ i_s \end{pmatrix}$$

2) En posant : $\text{ch}(g) = 1+LCp^2/2$, $\text{sh}(g) = \sqrt{LCp^2(1+LCp^2/4)}$ montrer que, si n est un entier, la puissance $n^{\text{ième}}$ de la matrice de transfert prend la forme classique :

$$\begin{pmatrix} \text{ch}(ng) & Z\text{sh}(ng) \\ \frac{1}{Z}\text{sh}(ng) & \text{ch}(ng) \end{pmatrix}$$

- 3) Montrer que si on ferme la ligne sur son impédance caractéristique Z , et si on applique à l'entrée un échelon unité, le courant de sortie $i_s(t)$ possède comme transformée de LAPLACE :

$$I_s(p) = \frac{e^{-ng}}{p \cdot Z(p)}$$

ou encore, en posant $q = \frac{\sqrt{LC}}{2} p$:

$$I_s(p) = \frac{C}{2} \cdot \frac{1}{q} \cdot \frac{(\sqrt{1+q^2}-q)^{2n}}{\sqrt{1+q^2}}$$

- 4) Expliquer enfin pourquoi :

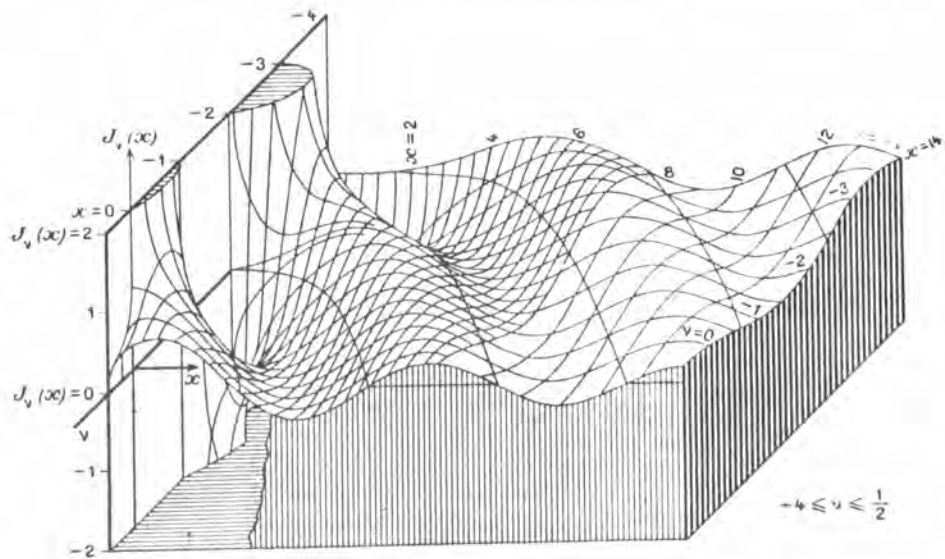
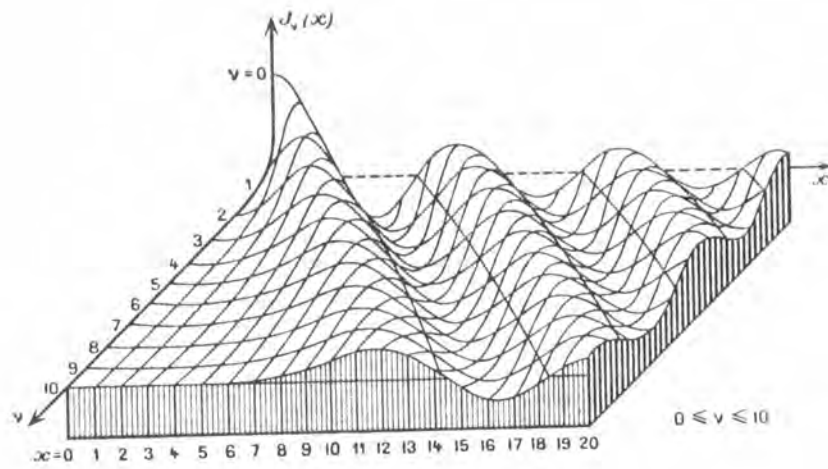
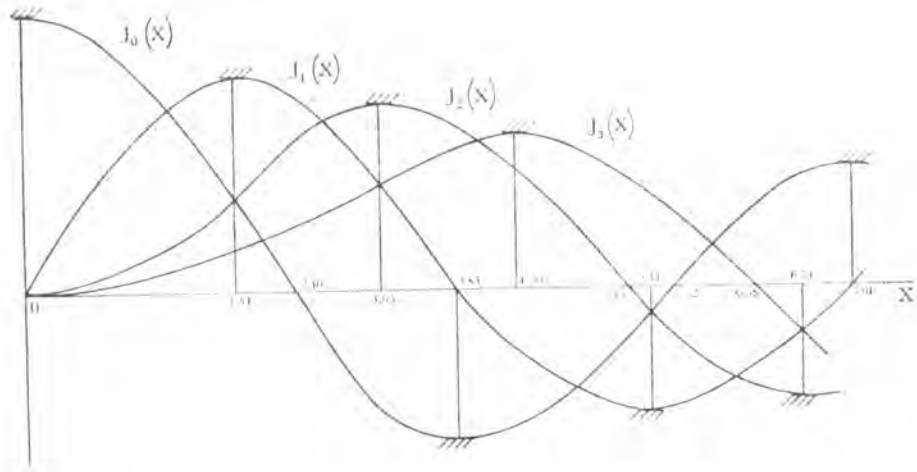
$$i_s(t) = \sqrt{\frac{C}{L}} \int_0^{2/\sqrt{LC} \cdot t} J_{2n}(s) ds$$

(Utiliser les propriétés (P2) et (P4) !).

Maintenant, pour tirer de cette formule des renseignements pratiques, il faut connaître le comportement de $J_{2n}(t)$ (puis de sa primitive). On peut consulter pour cela des Tables de fonctions de BESSEL (comme il existe des Tables de logarithmes ou des Tables trigonométriques...).

On donne à titre d'illustration les représentations graphiques des $J_\nu(t)$:

Courbes $y = J_0(x), J_1(x), J_2(x), \dots$



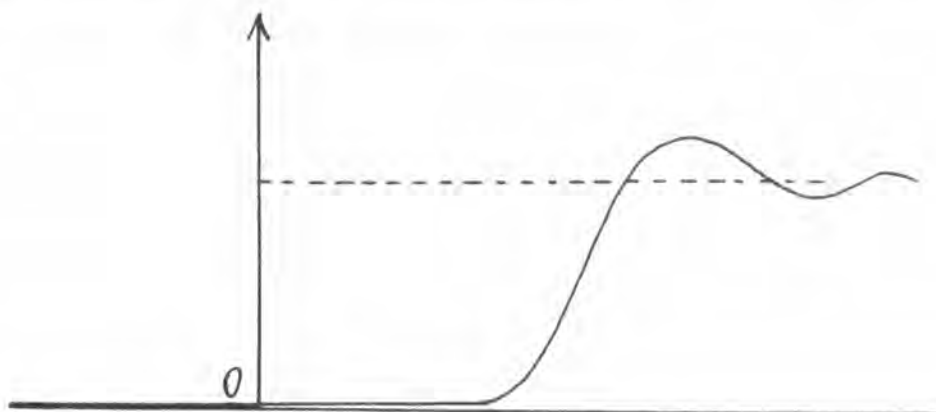
En fait, on s'intéresse ici aux valeurs de $J_v(t)$ pour des valeurs $v \approx 2n$ grandes de l'indice. On observera sur la figure 2 de la page précédente, que, lorsque v augmente, $J_v(t)$ décolle plus lentement. Par exemple, les Tables montrent que :

$$J_{18}(1) = 0,0148 \times 10^{-15}$$

$$J_{18}(10) = 0,01524 \times 10^{-3}$$

$$J_{18}(20) = 0,2511.$$

De fait, $i_s(t)$ ne devient appréciable qu'au bout d'un temps de l'ordre de $n\sqrt{LC}$, et $i_s(t)$ a l'allure suivante :



Exercice : Expliquer pourquoi $i_s(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} \sqrt{C/L}$ (utiliser (p5)^{**}).

7.6. Exercice : Pouvez-vous justifier le calcul suivant :

$$\lambda^n \cdot J_n(\lambda t) = \frac{(\sqrt{p^2 + \lambda^2} - p)^n}{\sqrt{p^2 + \lambda^2}}, \quad \lambda > 0$$

$$(i\lambda)^n \cdot J_n(i\lambda t) = \frac{(\sqrt{p^2 - \lambda^2} - p)^n}{\sqrt{p^2 - \lambda^2}}, \quad \lambda > 0$$

$$(-2i\lambda)^n e^{-\lambda t} \cdot J_n(i\lambda t) = \frac{(\sqrt{p+2\lambda} - \sqrt{p})^{2n}}{\sqrt{p(p+2\lambda)}}, \quad \lambda > 0$$

On obtient donc finalement :

$$i_s(t) = \frac{2}{R} e^{-2t/RC} \frac{1}{i^n} J_n(i \cdot 2t/RC)$$

De nouveau, on peut donc obtenir les valeurs précises de $i_s(t)$ en consultant des Tables. On montre que, pour t grand devant $n \cdot \frac{RC}{2}$, $i_s(t)$ se comporte comme :

$$\frac{2}{R} \cdot e^{-2t/RC} \cdot \frac{e^{2t/RC}}{\sqrt{2\pi} \cdot 2t/RC} = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \cdot \sqrt{\frac{C}{R}}.$$

ANNEXE 1 : REDUCTION DES MATRICES 2x2

Soit A une matrice carrée de dimension 2 :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

- 1) Lorsque A est diagonale : $A = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, ou triangulaire supé-

rieure : $A = J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, le calcul des puissances successives de A

(: lié au calcul des fonctions de transfert de plusieurs quadripôles identiques mis en cascade) et de e^{tA} (: lié à la résolution du système différentiel $\dot{X} = A.X$) est facile.

- 2) D'où l'intérêt de se ramener à la situation précédente :

Remarquons que pour une matrice diagonale

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

l'opérateur correspondant dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ concerne les directions $\vec{Re}_1$ et $\vec{Re}_2$: d'où l'idée de rechercher les vecteurs V qui définissent une droite invariante par l'opérateur $\underline{u}$ associé à A , c'est-à-dire les vecteurs $V \neq 0$, tels que :

$$A.V = \lambda.V \text{ avec } \lambda \in \mathbb{C}$$

L'équation précédente se lisant :

$$(A - \lambda I).V = 0, V \neq 0$$

λ doit satisfaire à la condition :

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

- 3) D'où la technique de réduction suivante :

- on commence par résoudre l'équation caractéristique

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc) = 0$$

- si λ est solution de l'équation précédente (on dit que λ est une valeur propre de A), c'est qu'il existe un vecteur V non nul, tel que :

$$A.V = \lambda V$$

autrement dit, la direction définie par V est invariante par A : on parle de direction propre, on dit que V est un vecteur propre de A .

- si λ_1 et λ_2 sont les 2 solutions distinctes de l'équation caractéristique il est facile de voir que les directions propres sont indépendantes :

$$\alpha V_1 + \beta V_2 = 0 \text{ entraînant, lorsqu'on applique } A,$$

$$\alpha \lambda_1 V_1 + \beta \lambda_2 V_2 = 0$$

si bien que : $\alpha(\lambda_2 - \lambda_1)V_1 = 0$, ce qui donne, comme $(\lambda_2 - \lambda_1)V_1 \neq 0$, $\alpha = 0$, puis $\beta = 0$. Dans la base $\{V_1, V_2\}$, u aura comme matrice :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{matrix} V_1 \\ V_2 \end{matrix} \\ u(V_1) \quad u(V_2)$$

Autrement dit, si :

$$P = \begin{pmatrix} p_1^1 & p_2^1 \\ p_1^2 & p_2^2 \end{pmatrix} \\ V_1 \quad V_2$$

est la matrice de passage (de la base vers la base $\{V_1, V_2\}$), on a la relation :

$$A = P \times D \times P^{-1}$$

avec :

$$P^{-1} = \frac{1}{\det P} \begin{pmatrix} -p_2^2 & p_2^1 \\ p_1^2 & -p_1^1 \end{pmatrix}$$

- dès lors, le calcul de A^n est faisable :

$$A^n = P \times D^n \times P^{-1}$$

avec :

$$D^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix}$$

- si λ est solution double de l'équation caractéristique, alors A^n peut se réduire selon l'une des 2 expressions :

$$P \times D \times P^{-1} \quad \text{ou} \quad P \times J \times P^{-1}$$

avec :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

selon qu'il existe ou non une base de vecteurs propres.

- Le calcul de J^n est facile, car on remarque que :

$$J = \lambda I + N, \quad \text{où} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{est telle que} \quad N^2 = 0.$$

ANNEXE 2 : LA THEORIE DE CAUCHY

1) Définition d'une fonction analytique sur un ouvert Ω du plan complexe :

Une application $f : z \in \Omega \rightarrow f(z) \in \mathbb{C}$ est dite analytique en $z_0 \in \Omega$ si elle est dérivable en z_0 , c'est-à-dire si :

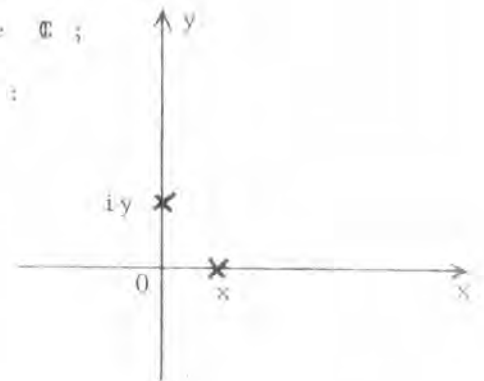
$$\lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \neq z_0}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \text{ existe : on note par } f'(z_0) \text{ cette limite, qu'on appelle dérivée de } f \text{ en } z_0.$$

Exemples :

1) $f(z) = z^2$ est analytique en tout point de $\mathbb{C}$;

2) $f(z) = \bar{z}$ n'est pas analytique en 0, car :

$$\left. \begin{aligned} \frac{f(x)}{x} &= 1 \rightarrow 1 \\ \frac{f(iy)}{iy} &= -1 \rightarrow -1 \end{aligned} \right\} : \text{la limite}$$



du rapport $\frac{f(z)}{z}$ lorsque $z \neq 0$ tend vers 0, n'existe pas !

Proposition : si $f(z) = P(x,y) + iQ(x,y)$ où $z = x + iy$, avec $P(x,y)$ et $Q(x,y)$ réelles est analytique en z_0 , alors :

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0) \end{cases}$$

Ce sont les Equations de CAUCHY-RIEMANN.

Exercice : démonstration de la proposition (s'inspirer de l'exemple 2).

Réciproquement, on montre que si les dérivées partielles de P et Q sont continues sur Ω , alors les équations précédentes suffisent à assurer l'analyticité de f .

Exemple : les composantes P et Q du champ électrostatique $\vec{E}$ créé à l'intérieur d'un domaine D du plan $\mathbb{R}^2$, dépourvu de charges, obéissent aux équations de MAXWELL :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\vec{E}) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = 0 \\ \operatorname{rot}(\vec{E}) = \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} \right) \vec{k} = 0 \end{cases}$$

ce qui signifie que $f = P - iQ$ est analytique en tout point de D : on dit que f est analytique sur D , et on note : $f \in A(D)$.

Exercice : Montrer que $\Delta P = \Delta Q = 0$.

Remarque : les propriétés connues sur les fonctions dérivables sur un intervalle de $\mathbb{R}$, et qui se démontrent à partir de la définition de la dérivée, restent valables dans le cadre présent. Par exemple, la composée de 2 fonctions analytiques est analytique.

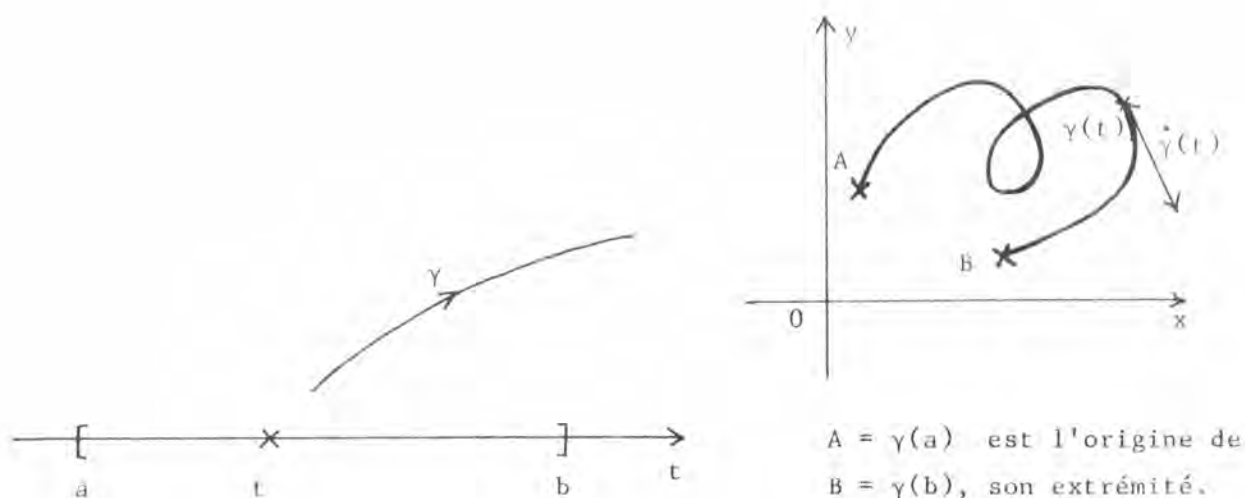
Ainsi, $\sin z$, $\operatorname{ch}(z^3 + \cos iz)$,... sont analytiques sur tout le plan complexe ; $\frac{1}{z^2+1}$ est analytique sur $\mathbb{C}$ privé des points $+i$ et $-i$,.

Proposition : La somme $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ d'une série entière est analytique dans son disque de convergence.

Exemple : la fonction de BESSEL $J_n(z)$ est analytique sur $\mathbb{C}$. (voir [1]).

2) Intégration le long d'un chemin du plan complexe

• Un chemin $\mathcal{C}$ de $\mathbb{C}$ sera la trajectoire cinématique d'un mobile de vitesse jamais nulle : plus précisément, soit γ une application d'un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$, continuellement dérivable par morceaux, avec $\dot{\gamma} \neq 0$; on orientera l'image $\mathcal{C} = \gamma(I)$ de γ selon les temps croissants :



• Etant données des fonctions continues, à valeurs complexes, α et β sur $\mathcal{C}$, on appelle intégrale de la forme différentielle $(\alpha dx + \beta dy)$ le long de $\mathcal{C}$, la quantité :

$$\int_{\mathcal{C}} (\alpha dx + \beta dy) = \int_a^b [\alpha(\gamma(t)) \cdot \dot{x}(t) + \beta(\gamma(t)) \cdot \dot{y}(t)] dt$$

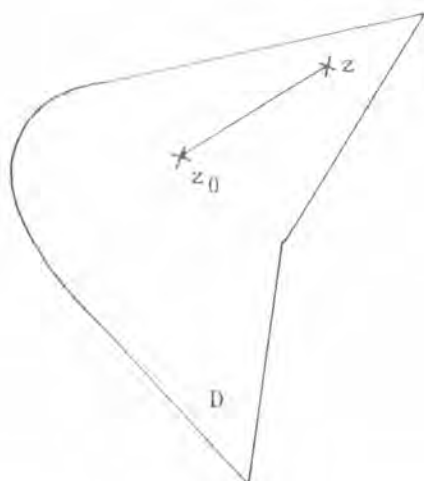
où $\gamma = x + iy$.

Remarque : un chemin $\mathcal{C}$ donné peut admettre plusieurs paramétrisations du type γ , et on montre que le symbole précédent ne dépend pas du γ choisi.

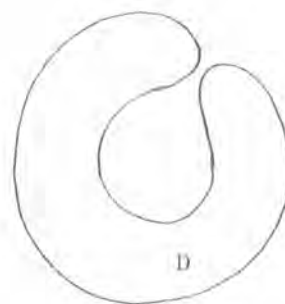
Exercice : Calculer $\int_{\mathcal{C}} z^n dz$, si $\mathcal{C}$ est le cercle unité, et si n est un entier relatif.

3) Le théorème de CAUCHY-POINCARÉ

On dira d'un domaine D du plan complexe qu'il est étoilé par rapport à l'un de ses points z_0 si, à chaque fois qu'il contient un point z , il contient le segment $[z_0, z]$:



étoilé !



non étoilé !

ENONCE : si $f \in A(D)$, D étoilé et si $\mathcal{C}$ est un chemin fermé dans D , alors :

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) dz = 0.$$

Démonstration : si $f = P+iQ$, $fdz \approx \alpha dx + \beta dy$ avec : $\frac{\partial \alpha}{\partial y} = \frac{\partial \beta}{\partial x}$. En supposant $z_0 = 0$, posons :

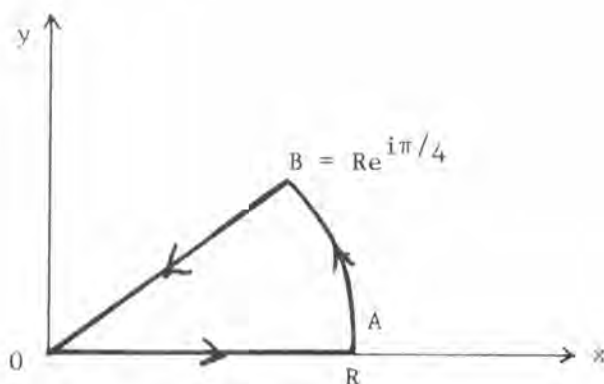
$$\varphi(z) = \int_{[0,z]} (\alpha dx + \beta dy) = \int_0^1 [\alpha(tx, ty) \cdot x + \beta(tx, ty) \cdot y] dt$$

$$\begin{aligned} \text{alors,} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x}(z) &= \int_0^1 \left[\alpha(tz) + \frac{\partial \alpha}{\partial x}(tz) tx + \frac{\partial \beta}{\partial y}(tz) \cdot ty \right] dt \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt} (t \alpha(tz)) dt \\ &= \alpha(z) \end{aligned}$$

de même, on aurait : $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \beta$ ("le champ de forces de composantes α et β , dérive du potentiel φ "). Par conséquent, $\int_{\mathcal{C}} \alpha dx + \beta dy = \varphi|_{\mathcal{C}} = 0$ ("le travail du champ le long d'une courbe est égal à l'accroissement du potentiel correspondant").

Exercice 1 : Calcul des intégrales de FRESNEL.

En intégrant la fonction : $f(z) = e^{-z^2}$ sur le contour suivant de $\mathbb{C}$ ($\because$ domaine étoilé !) :



on obtient :

$$\int_0^R e^{-t^2} dt + \int_{\text{AB}} e^{-z^2} dz = \int_{\text{OB}} e^{-z^2} dz = e^{i\pi/4} \int_0^R e^{-it^2} dt$$

d'après le théorème de CAUCHY-POINCARÉ.

Faisons tendre R vers $+\infty$:

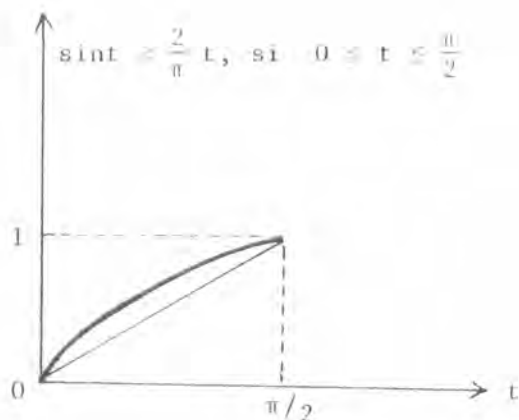
$$\int_0^R e^{-t^2} dt \xrightarrow{(R \rightarrow +\infty)} \int_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\left| \int_{\text{AB}} e^{-z^2} dz \right| = \left| \int_0^{\pi/4} e^{-R^2 e^{2it}} R i e^{it} dt \right| \leq R \int_0^{\pi/4} e^{-R^2 \cos 2t} dt$$

où :

$$\int_0^{\pi/4} e^{-R^2 \cos 2t} dt = \int_0^{\pi/2} e^{-R^2 \sin t} dt \leq \int_0^{\pi/2} e^{-R^2 2/\pi t} dt$$

car :



et il en résulte que :

$$\left| \int_{AB} e^{-z^2} dz \right| \leq \frac{\pi}{2R} \xrightarrow{(R \rightarrow +\infty)} 0.$$

Par conséquent, on obtient :

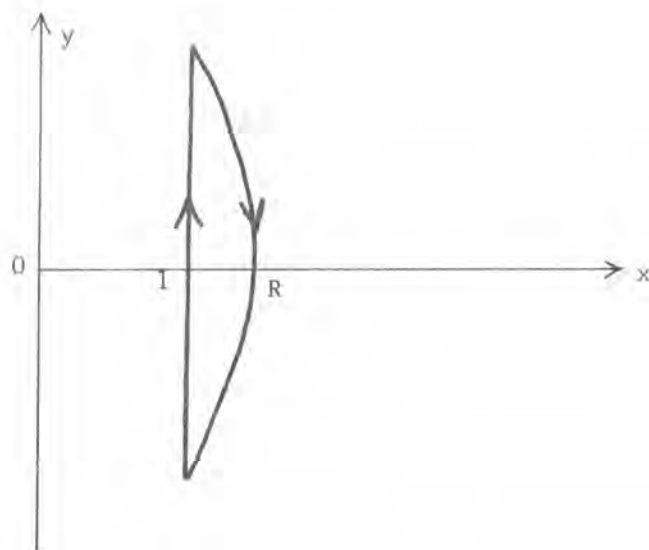
$$\int_0^\infty e^{-it^2} dt = e^{-i\pi/4} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

d'où, en séparant parties réelle et imaginaire :

$$\int_0^\infty \cos t^2 dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{4} = \int_0^\infty \sin t^2 dt.$$

Remarque : $\int_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z} = 2i\pi$, si $\mathcal{C}$ est le cercle unité ; ici, $\frac{1}{z}$ est analytique sur $\mathbb{C}^*$ ($\mathbb{C}$ privé de 0). C'est bien un lacet de $\mathbb{C}^*$, mais $\mathbb{C}^*$ n'est pas étoilé.

Exercice 2 : Soit $t < 0$ fixé. En intégrant la fonction $f(z) = \frac{e^{tz}}{z}$ sur le contour :



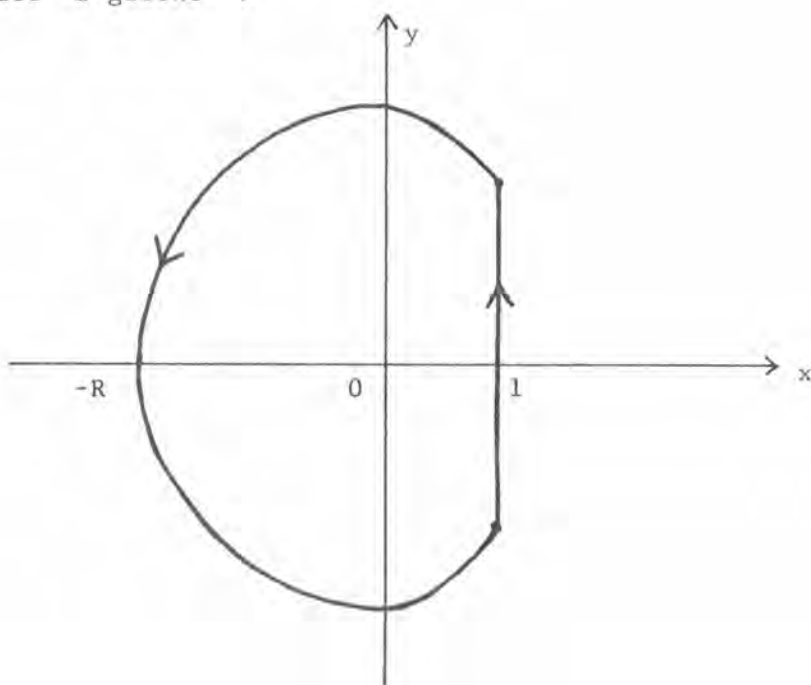
(l'arc de cercle est centré en 0), puis en faisant tendre R vers $+\infty$, montrer que :

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2i\pi} \int_{1-iR}^{1+iR} e^{tz} \frac{dz}{z} = 0$$

Rappelons que : $Y(t) = \frac{1}{p} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-tp} Y(t) dt$. Le résultat précédent se lit :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} e^{tp} \frac{1}{p} dp = Y(t), \text{ si } t < 0.$$

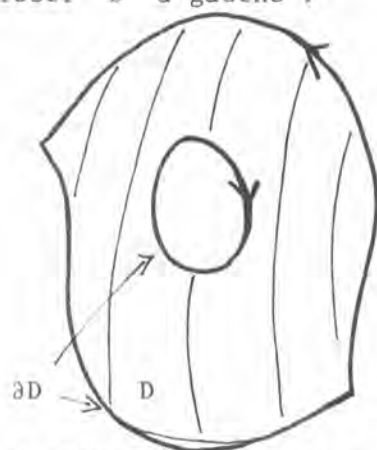
Pour $t > 0$, l'intégrale le long de l'arc de cercle ne disparaît pas à l'infini : l'idée est d'intégrer alors sur l'arc de cercle qui ferme la droite verticale "à gauche" :



pour faire apparaître $\frac{1}{2i\pi} \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} e^{tz} \frac{dz}{z}$ comme la limite de $\frac{1}{2i\pi} \int e^{tz} \frac{dz}{z}$ le long d'un lacet. Mais alors, le théorème de CAUCHY-POINCARÉ n'est plus applicable, puisque la fonction $\frac{e^{tz}}{z}$ est analytique seulement sur $\mathbb{C}^*$, domaine qui contient bien le lacet, mais n'est plus étoilé ! Nous allons apprendre à calculer l'intégrale dans de telles conditions, dans le paragraphe suivant.

4) Le théorème de CAUCHY-STOKES

Etant donné un domaine (à bord régulier) D , on oriente son bord ∂D de sorte à laisser D à gauche :



Le théorème de CAUCHY-STOKES dit que, si f est analytique sur D (et continue jusqu'au bord ∂D), alors

$$\int_{\partial D} f dz = 0$$

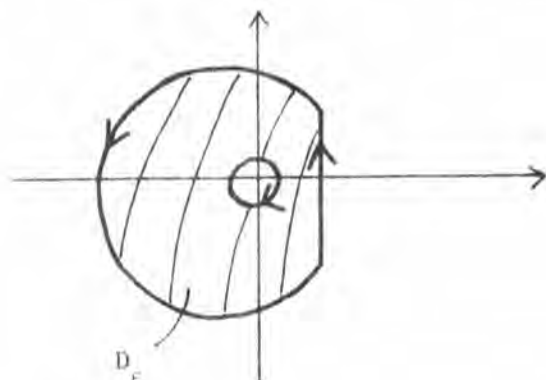
Attention : ne pas oublier de composantes dans ∂D :



D est la couronne $\{r < |z| < R\}$, $f(z) = \frac{1}{z}$ si $z \in D$.

Exercice 1 : Que dit le théorème de CAUCHY-STOKES ?

A titre d'application, en prenant comme fonction $f(z) = \frac{e^{tz}}{z}$ (où $t > 0$ est fixé), et comme domaine :



on obtient que :

$$\oint_{\partial D_\epsilon} \frac{e^{tz} dz}{z} = \int_0^{2\pi} e^{t\epsilon} e^{i\theta} i d\theta$$

d'où, en faisant tendre ϵ vers 0 :

$$\frac{1}{2i\pi} \oint \frac{e^{tz} dz}{z} = 1$$

Exercice 2 :

- 1) Montrer que $\frac{1}{2i\pi} \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} \frac{e^{tz} dz}{z} = Y(t)$ si $t \neq 0$.
- 2) Que vaut $\frac{1}{2i\pi} \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} \frac{dz}{z}$?

5) La formule de CAUCHY

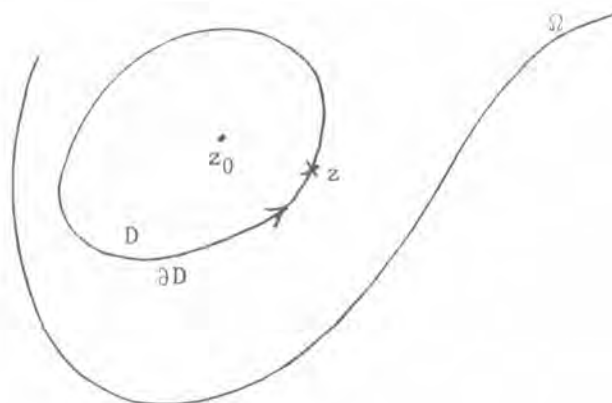
La technique de calcul qui vient d'être exposée pour le calcul de l'originale de $\frac{1}{p}$ donne, plus généralement le résultat suivant :

Si f est analytique sur le domaine Ω , alors :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = \begin{cases} f(z_0), & \text{si } z_0 \in D \\ 0, & \text{si } z_0 \in \Omega \setminus \bar{D} \end{cases}$$

pour toute partie (à bord régulier) D dans Ω .

Ainsi, en particulier, on retiendra que :

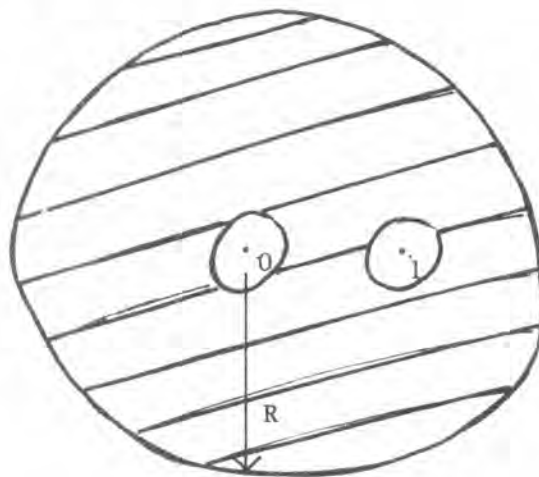


les valeurs de la fonction analytique f se calculent dans D , à partir de f au bord de D !

Exercice : Que vaut $\int_{\partial D} \frac{e^z}{z(1-z)^3} dz$ où D est le disque centré en 0 et de rayon R , selon les valeurs de $R > 0$?

Corrigé : Le cas $R < 1$ se traite par la formule de Cauchy. Soit donc $R > 1$: en appliquant le théorème de CAUCHY-STOKES sur le domaine

$$D(0;R) \setminus \{D(0;\epsilon) \cup D(1;\epsilon)\} :$$



on obtient :

$$\int_{\partial D} \frac{e^z}{z(1-z)^3} dz = \int_{\partial D(0;\epsilon)} \frac{e^z}{z(1-z)^3} dz + \int_{\partial D(1;\epsilon)} \frac{e^z}{z(1-z)^3} dz,$$

pour tout $\epsilon > 0$ petit.

La difficulté nouvelle est d'étudier le comportement de l'intégrale :

$$\int_{\partial D(1;\varepsilon)} \frac{e^z}{z(1-z)^3} dz = \int_0^{2\pi} \frac{e^{1+\varepsilon e^{it}}}{(1+\varepsilon e^{it})(\varepsilon e^{it})} \varepsilon i e^{it} dt$$

lorsque ε tend vers 0. Effectuant un développement limité de

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon e^{it}}{1+\varepsilon e^{it}} &= (1+\varepsilon e^{it} + \frac{\varepsilon^2}{2} e^{2it} + (\varepsilon^3))^{-1} (1-\varepsilon e^{it} + \varepsilon^2 e^{2it} + \mathcal{O}(\varepsilon^3)) \\ &= 1 + \varepsilon^2 \frac{e^{it}}{2} + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \end{aligned}$$

à l'ordre 3, on observe que :

$$\begin{aligned} \int_{\partial D(1;\varepsilon)} \frac{e^z}{z(1-z)^3} dz &= \frac{i\varepsilon}{\varepsilon^2} \int_0^{2\pi} (1 + \frac{\varepsilon^2}{2} e^{2it} + \mathcal{O}(\varepsilon^3)) e^{-2it} dt \\ &= i \frac{\varepsilon}{2} (2\pi + \mathcal{O}(\varepsilon)) \\ &\xrightarrow{(\varepsilon \rightarrow 0_+)} i\pi \end{aligned}$$

L'intégrale vaut donc $i\pi(2+\varepsilon)$, pour $R > 1$.

Il est important de comprendre que le terme singulier en $\frac{1}{\varepsilon^2}$ disparaît, car en facteur avec :

$$\int_0^{2\pi} e^{-2it} dt = 0$$

de par la 2π -périodicité de la fonction à intégrer.

6) Développement en série de LAURENT : la notion de résidu

Une fonction f analytique au point z_0 peut se développer en série entière au voisinage de z_0 :

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z-z_0)^n, \quad |z-z_0| < R \text{ avec } R > 0.$$

Une fonction f analytique sur le disque $D^*(z_0; R)$, centré en z_0 et de rayon R , privé de son centre, admet plus généralement un développement de la forme :

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n, \quad 0 < |z-z_0| < R, \quad R > 0.$$

C'est le développement en série de LAURENT de f en z_0 .

Exemples :

$$1) \quad \frac{1}{z^2(1-z)} = \frac{1}{z^2} (1+z+z^2+\dots+z^n+\dots) \\ = \underbrace{\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z}}_{\text{partie singulière}} + 1+z+\dots+z^n+\dots, \quad 0 < |z| < 1$$

partie singulière

$$2) \quad z^3 e^{1/z} = z^3 \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \dots + \frac{1}{n!z^n} + \dots \right) \\ = \underbrace{z^3 + z^2 + \frac{z}{2} + \frac{1}{6}}_{\text{partie régulière}} + \frac{1}{24z} + \dots, \quad 0 < |z|$$

partie régulière

3) Effectuons le produit des développements :

$$e^{z/2\omega} = \sum_{p \geq 0} \frac{1}{p!} \left(\frac{z}{2} \right)^p \omega^p \\ e^{-z/2\omega} = \sum_{q \geq 0} \frac{1}{q!} \left(-\frac{z}{2} \right)^q \frac{1}{\omega^q}$$

on obtient :

$$e^{z/2(\omega - 1/\omega)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(z) \omega^n, \quad \text{où :}$$

$$J_n(z) = \sum_{p-q=n} \frac{1}{p!} \left(\frac{z}{2} \right)^p \frac{1}{q!} \left(-\frac{z}{2} \right)^q = \left(\frac{z}{2} \right)^n \sum_{q \geq 0} \frac{(-1)^q}{q!(q+n)!} \left(\frac{z}{2} \right)^{2q}$$

est la fonction de BESSEL d'indice n .

Proposition : Le $n^{\text{ième}}$ coefficient de développement de LAURENT est donné par l'intégrale :

$$a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(z_0; r)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz, \quad \text{où } 0 < r < R.$$

Comme cela résulte du fait fondamental suivant :

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z^n} = \begin{cases} 0, & \text{si } n \neq 1 \\ 2i\pi, & \text{si } n = 1 \end{cases}$$

Exercice 1 : Etablir le point précédent.

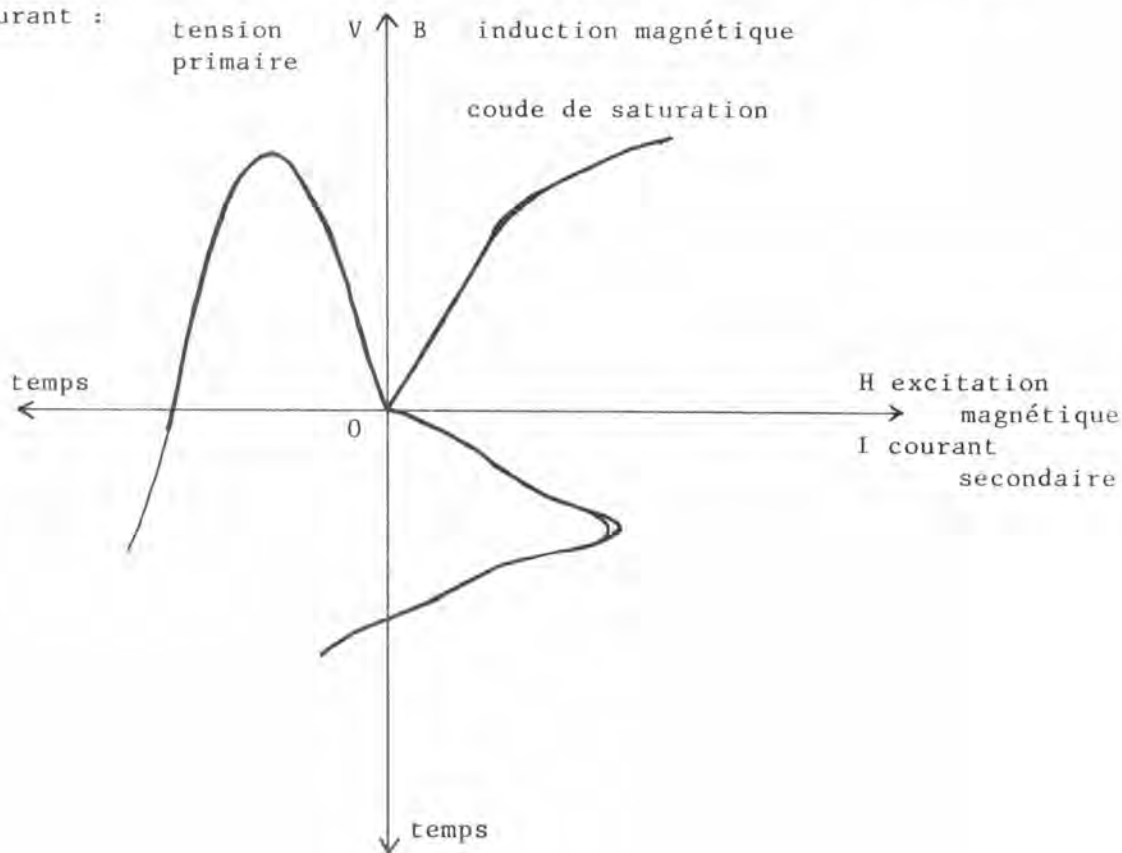
Application : D'après l'exemple 3,

$$\begin{aligned} J_n(z) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(0;1)} e^{z/2(\omega-1/\omega)} \frac{d\omega}{\omega^{n+1}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{iz \sin t - int} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \cos(z \sin t - nt) dt. \end{aligned}$$

Exercice 2 : Vérifier les égalités précédentes.

Exemples d'utilisation de la représentation intégrale précédente :

- 1) Un transformateur saturé présente le phénomène connu des pointes de courant :



; lorsque l'amplitude en tension dépasse une valeur qui correspond au crête de saturation dans la courbe d'aimantation, il y a distorsion. En approchant la courbe d'aimantation par l'expression analytique :

$$H = \alpha \cdot \text{sh } \beta B$$

(α et β sont 2 valeurs numériques déterminées expérimentalement).

Maintenant, si on applique au primaire une tension sinusoïdale en $\sin(t)$, le courant verra ses harmoniques corrigés par les coefficients de FOURIER :

$$\int_0^{2\pi/\omega} \text{sh}(\beta' \sin \omega t) e^{-in\omega t} dt$$

qui sont calculables en ayant recours aux valeurs de J_n aux points $(i\beta')$.

Exercice 3 : Etablir le lien précédent.

2) Considérons le signal modulé en fréquence :

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega t + m \sin \alpha t)$$

L'étude de l'importance de ses harmoniques amène à calculer les coefficients de FOURIER, donnés par des intégrales du type :

$$\int_0^{2\pi/\alpha} \cos(m \sin \alpha t) \cdot \cos k\alpha t \cdot dt$$

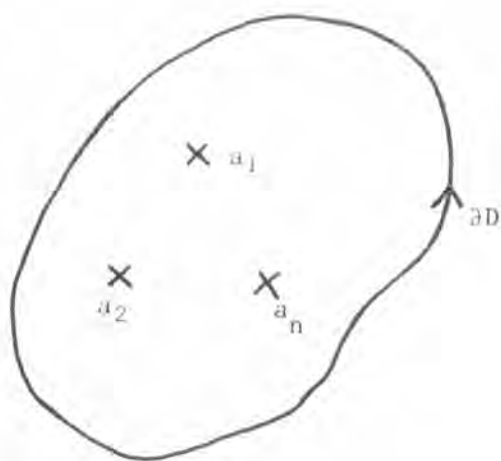
et dont les valeurs sont liées à $J_k(m)$.

Exercice 4 : Etablir le point précédent.

Définition : Le coefficient a_{-1} du terme $\frac{1}{z-z_0}$ dans le développement en série de LAURENT est appelé le résidu de f au point z_0 .

7) Le théorème des résidus : première version

Soit f une fonction analytique sur le domaine D , privé de ses n points intérieurs $a_1, a_2, \dots, a_n$. On suppose de plus f continue jusqu'au bord ∂D de D , supposé borné. Alors,



$$\int_{\partial D} f(z) dz = 2i\pi \sum_{j=1}^n \text{Rés}_{a_j}(f)$$

Démonstration : le théorème de CAUCHY-STOKES, appliqué au domaine

$$D_\epsilon = D \setminus \bigcup_{j=1}^n D(a_j; \epsilon)$$

où $\epsilon > 0$ est petit, montre que :

$$\int_{\partial D} f(z) dz = \sum_{j=1}^n \int_{\partial D(a_j; \epsilon)} f(z) dz$$

De plus,

$$\int_{\partial D(a_j; \epsilon)} f(z) dz = \int_{\partial D(a_j; \epsilon)} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k (z-a_j)^k dz$$

et :

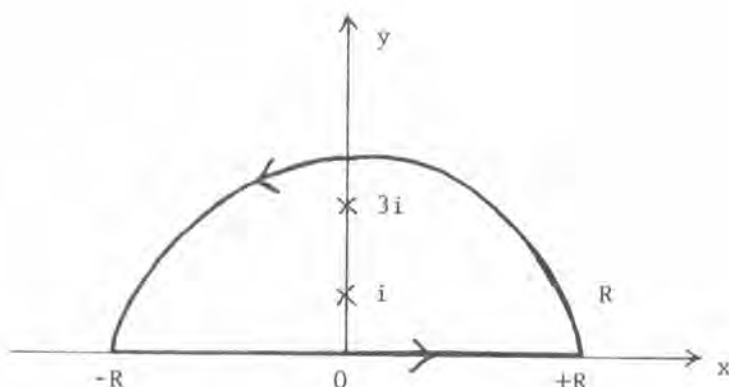
$$\int_{\partial D(a_j; \epsilon)} (z-a_j)^k dz = \begin{cases} 0, & \text{si } k \neq -1 \\ 2i\pi, & \text{si } k = -1 \end{cases}$$

comme on l'a déjà observé plusieurs fois.

Tout ceci permet de conclure.

Cet énoncé permet de calculer de nombreuses intégrales impropres.

Donnons un exemple :



$$\int_{\mathcal{C}_R} \frac{z^2 dz}{(z^2+1)(z^2+9)} = 2i\pi | \text{Rés}_i + \text{Rés}_{3i} |$$

où, le pôle i étant simple, le résidu correspondant se calcule rapidement selon :

$$\text{Rés}_i \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+9)} = \left(\frac{\frac{z^2}{z^2+9}}{2z} \right) (z = i) = \frac{i}{16} \quad (*)$$

En procédant de même pour l'autre pôle, et en faisant tendre R vers $+\infty$, on obtient :

$$\int_0^\infty \frac{t^2 dt}{(t^2+1)(t^2+9)} = \frac{\pi}{8}$$

(*) Expliquons cette formule, très utile en pratique :

si $f(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$ où N et D sont analytiques en z_0 , possède un pôle simple en z_0 , c'est-à-dire si : $D(z_0) = 0$, mais si $D'(z_0) \neq 0$, alors :

$$\text{Rés}_{z_0}(f) = \frac{N(z_0)}{D'(z_0)}.$$

En effet, $D(z) = (z-z_0) \cdot D_1(z)$ avec $D_1(z_0) \neq 0$, et :

$$f(z) = \frac{N(z)}{(z-z_0)D_1(z)} = \frac{a_{-1}}{z-z_0} + g(z)$$

avec g analytique en z_0 . En réduisant au même dénominateur puis en faisant tendre $z = z_0$, on obtient :

$$\frac{N(z)}{D_1(z)} = a_{-1} + (z - z_0)g(z)$$

d'où :

$$a_{-1} = \frac{N(z_0)}{D_1(z_0)}$$

Mais, $D'(z) = D_1(z) + (z - z_0)D_1'(z)$ entraîne que : $D_1(z_0) = D'(z_0)$
d'où la formule pratique annoncée.

8) Application au retour de l'originale dans la transformation de LAPLACE

Le résultat de l'exercice 2 du § 5, joint aux propriétés (P1) et (P3) de la transformée de LAPLACE, rend plausible l'énoncé suivant :

Théorème (dit de la transformation de LAPLACE inverse) :

Etant donnée une fonction $f(t)$ obéissant aux conditions de la définition de la page 1 du cours (et qui assurent l'existence de la transformée de LAPLACE $F(p)$ pour $\text{Re}(p) > \alpha$), elle est donnée aux points de continuité par la formule :

$$f(t) = \frac{1}{2i\pi} \int e^{pt} F(p) dp$$

où l'intégrale est prise le long du chemin sans fin vertical $|a - i\infty, a + i\infty|$ avec $a > \alpha$, dans le sens :

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{a-iA}^{a+iA} e^{pt} F(p) dp$$

Le théorème des résidus permet le calcul de cette intégrale, donc le retour à l'originale dans de nombreux cas pratiques.

Exemple 1 : Voir le § 8-1 du cours.

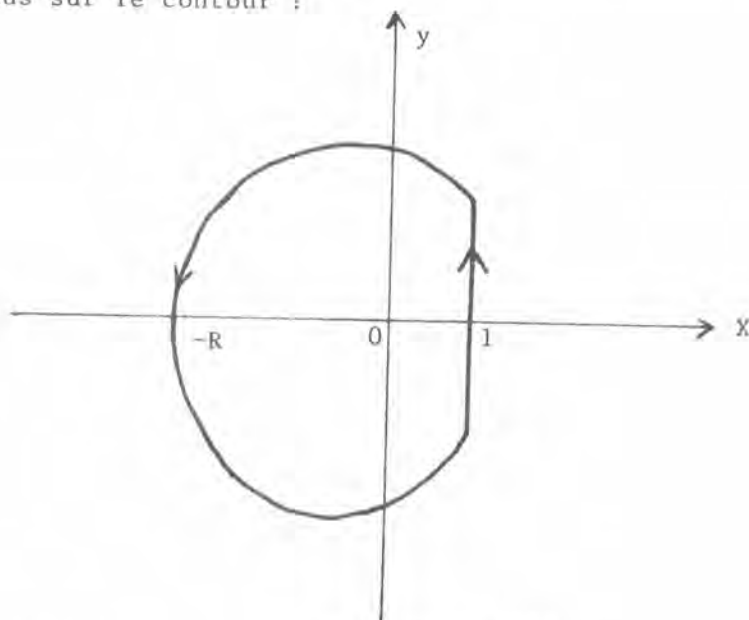
Exemple 2 : Reprenons la réponse du circuit intégrateur à un train d'impulsions (: Exemple 2 du § 4 du cours). La tension de sortie admet comme transformée de LAPLACE :

$$v_s(p) = \frac{A(1-e^{-\varepsilon p})}{p(1-e^{-Tp})(1+\tau p)}, \quad \operatorname{Re}(p) > 0.$$

Ainsi, $v_s(t)$ sera-t-il donné par l'intégrale curviligne :

$$v_s(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} \frac{A(1-e^{-\varepsilon z})}{z(1-e^{-Tz})(1+\tau z)} e^{tz} dz$$

Nous allons expliciter $v_s(t)$ pour $t > 0$, en écrivant le théorème des résidus sur le contour :



et pour la fonction $\psi : z \rightarrow e^{tz} \frac{A(1-e^{-\varepsilon z})}{z(1-e^{-Tz})(1+\tau z)}$.

Commençons donc par déterminer les pôles de ψ , en résolvant l'équation :

$$z(1-e^{-Tz})(1+\tau z) = 0$$

de racines réelles $z_1 = 0$ et $z_2 = -\frac{1}{\tau}$, et de racines imaginaires pures $z_k = 2ik\pi/T$. Les pôles étant tous simples, il est facile de calculer les résidus correspondants

$$\operatorname{Rés}_0(\psi) = A \frac{\varepsilon}{T}, \quad \operatorname{Rés}_{(-1/\tau)}(\psi) = -A \frac{1-e^{\varepsilon/\tau}}{1-e^{-T/\tau}} e^{-t/\tau}$$

$$\operatorname{Rés}_{2ik\pi/T}(\psi) = \frac{A(1-e^{-2ik\pi\varepsilon/T})}{2ik(1+2ik\pi\frac{\tau}{T})} e^{2ik\pi t/T}.$$

Il est facile de montrer que l'intégrale curviligne de $\frac{1}{z}$ le long du l'arc de cercle est un terme en $\frac{1}{R}$, lorsque le rayon R tend vers $+\infty$.

Par conséquent, $v_s(t)$ admet le développement suivant, pour $t > 0$:

$$v_s(t) = y(t) + z(t)$$

où : $y(t) = -A \frac{e^{t/\tau} - 1}{e^{T/\tau} - 1} e^{-t/\tau}$ est la partie transitoire du signal

(cette partie est associée au pôle réel non nul)

$$z(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{A(1 - e^{-2ik\pi t/T})}{2ik\pi(1 + 2ik\pi T/T)} e^{2ik\pi t/T}$$

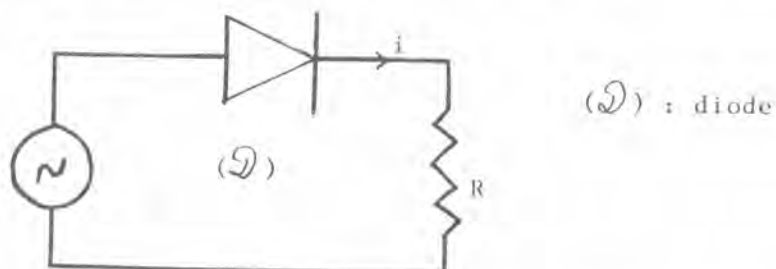
est la partie permanente, T-périodique et donnée ici par son développement en série de FOURIER.

Exercice : Vérifier qu'il s'agit bien du développement en série de FOURIER du signal en dent de scie obtenu dans le § 4 du cours. (voir l'ANNEXE 3, pour le calcul des coefficients de FOURIER).

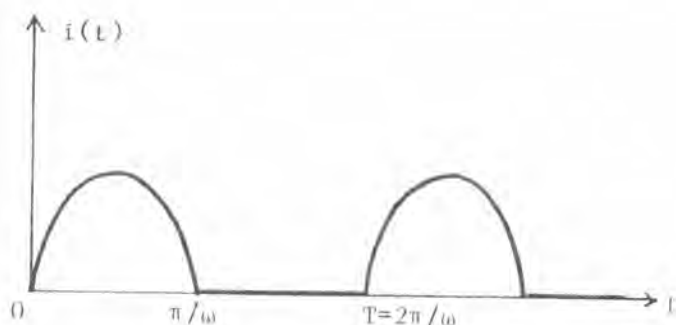
ANNEXE 3 : SERIES DE FOURIER

0 - Introduction

Considérons le système électrique suivant :



Si $v(t) = V/2 \sin(\omega t)$, le courant $i(t)$ relevé, au coefficient R près, aux bornes de la résistance pure R sur un écran d'oscillographe a la forme suivante :



Un ampèremètre à cadre mobile va donner comme indication la valeur moyenne du courant :

$$I_{\text{moy}} = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} i(t) dt$$

tandis qu'un ampèremètre thermique fournira la valeur efficace de celui-ci :

$$I_{\text{eff}} = \left(\frac{1}{T} \int_0^{T/2} i^2(t) dt \right)^{1/2}$$

Nous allons expliquer comment décomposer i en somme d'harmoniques pures, c'est-à-dire de signaux de la forme :

$$a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

en précisant dans quel sens la décomposition réalise x .

Dans la suite, E désignera l'espace des fonctions 2π -périodiques à valeurs complexes, et possédant par période un nombre fini de discontinuités de première espèce.

Pour une fonction x de E , on peut définir les coefficients de FOURIER

$$c_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(t) e^{-int} dt$$

où $n \in \mathbb{Z}$.

La série formelle $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(x) e^{int}$ (; on ne se préoccupe pas pour l'instant, de savoir si elle converge !) est appelée série de FOURIER de x .

Exercice 1 : Montrer que, si x est à valeurs réelles, la série prend la forme :

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n \geq 1} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt))$$

avec, pour tout $n \geq 0$:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t) \cos(nt) dt$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t) \sin(nt) dt$$

Exercice 2 : Si x est un signal T -périodique, comment s'écrit sa série de FOURIER ?

(Indication : $x(T/2\pi t)$ est 2π -périodique).

Exercice 3 : Ecrire la série de FOURIER du courant i de l'Exemple.

1 - La norme de l'énergie

Définition : Pour x et y dans E , posons :

$$x \cdot y = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(t) \overline{y(t)} dt$$

Proposition 1 : Il s'agit d'un produit scalaire sur E :

$$(1) \quad (\lambda x + y) \cdot z = \lambda x \cdot z + y \cdot z$$

$$(2) \quad x \cdot y = y \cdot x$$

$$(3) \quad x \cdot x \geq 0 \quad \text{et} \quad x \cdot x = 0 \quad \text{si et seulement si} \quad x = 0 \quad (\text{sauf en un nombre au plus fini de points dans chaque intervalle de longueur } 2\pi).$$

$\|x\| = \sqrt{x \cdot x}$ s'appelle la longueur ou la norme de x :

$$\|x\| = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |x(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

C'est la valeur efficace de x , et c'est la raison pour laquelle on parle de norme de l'énergie. On parlera encore de norme quadratique.

Proposition 2 : $|x \cdot y| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ (inégalité de SCHWARZ).

Si, pour n entier dans $\mathbb{Z}$, on considère la fonction e_n de E , définie par :

$$e_n(t) = e^{int}, \quad t \in \mathbb{R},$$

nous constatons que :

$$c_n(x) = x \cdot e_n$$

Proposition 3 : La famille $\{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ est orthonormale :

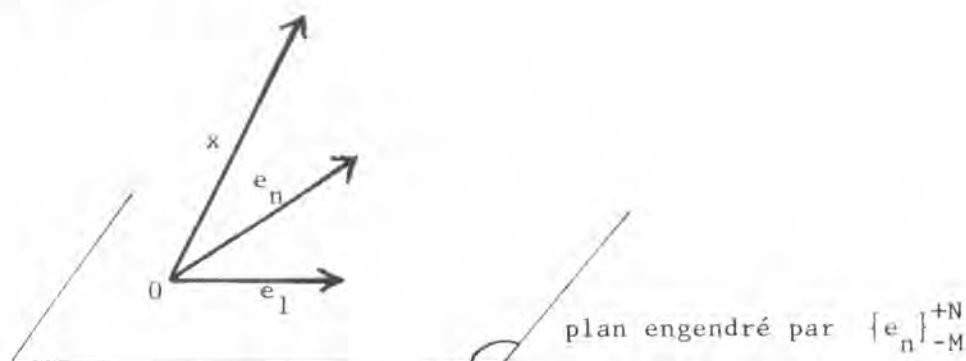
$$e_p \cdot e_q = \delta_{p,q}.$$

Posons alors le problème de la meilleure approximation suivant : Étant donné $x \in E$, étant donnés 2 entiers positifs M et N , comment faut-il choisir les coefficients γ_n dans $\mathbb{C}$ pour que l'écart en moyenne quadratique :

$$\left\| x - \sum_{n=-M}^M \gamma_n e_n \right\|$$

soit minimum ?

Géométriquement :



Proposition 4 : Il faut prendre $\gamma_n = c_n(x)$ pour tout n .

En effet :

$$\left\| s - \sum_{-M}^N \gamma_n e_n \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{-M}^N |c_n|^2 + \sum_{-M}^N |\gamma_n - c_n|^2$$

Exercice 4 : Etablir la formule précédente.

Ainsi, les coefficients de FOURIER s'introduisent-ils naturellement pour approcher au mieux, au sens de la norme de l'énergie, le signal considéré, à l'aide d'harmoniques pures.

Voici une conséquence fondamentale de la proposition précédente :

Proposition 5 : La série $\sum |c_n(x)|^2$ converge, et :

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |c_n(x)|^2 \leq \|x\|^2 \quad (: \text{inégalités de BESSEL})$$

2 - Propriétés élémentaires des coefficients de FOURIER

(P1) $c_n(\lambda \cdot x + y) = \lambda c_n(x) + c_n(y)$

(P2) Exercice 2.

(P3) $c_n(x(\cdot - \tau)) = e^{-in\tau} c_n(x), \tau \in \mathbb{R}.$

(P4) $c_n(\dot{x}) = in \cdot c_n(x)$ si $\dot{x}$ existe, et $\in E.$

Exercice 1 : Démontrer les propriétés précédentes.

(Indication : observer l'analogie avec les propriétés de $\mathcal{L}^1$).

Exercice 2 : Montrer que, si x est de classe $\mathcal{C}^p$, avec $x^{(p)} \in E$, alors :

$$c_n(x) = \frac{1}{(in)^p} c_n(x^{(p)})$$

En particulier : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^p |c_n(x)| = 0$.

3 - Le noyau de FEJER, et l'approximation en norme de l'énergie

Exercice 1 : Montrer que :

$$\sum_{m=0}^{n-1} \sum_{k=-m}^{+m} e^{ikt} = \left(\frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)} \right)^2$$

Soit $x \in E$ et n un entier positif donné. Désignons par :

$$S_n(t) = \sum_{k=-n}^{+n} C_k(x) e^{ikt}, \text{ sa } n^{\text{ième}} \text{ somme de FOURIER symétrique,}$$

et par : $\sigma_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} S_m(t)$, la moyenne arithmétique des n premières sommes de FOURIER, ou $n^{\text{ième}}$ somme de CESARO.

Exercice 2 : Vérifier que :

$$\sigma_n(t) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{k=-m}^{+m} e^{ik(t-\theta)} x(\theta) \frac{d\theta}{2\pi}$$

Ainsi a-t-on :

$$\sigma_n(t) = \int_0^{2\pi} K_n(t-\theta) x(\theta) \frac{d\theta}{2\pi}$$

où : $K_n(t) = \frac{1}{n} \left(\frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)} \right)^2$ est le noyau de FEJER.

Proposition 1 : $(K_n)_{n \geq 1}$ possède les propriétés suivantes :

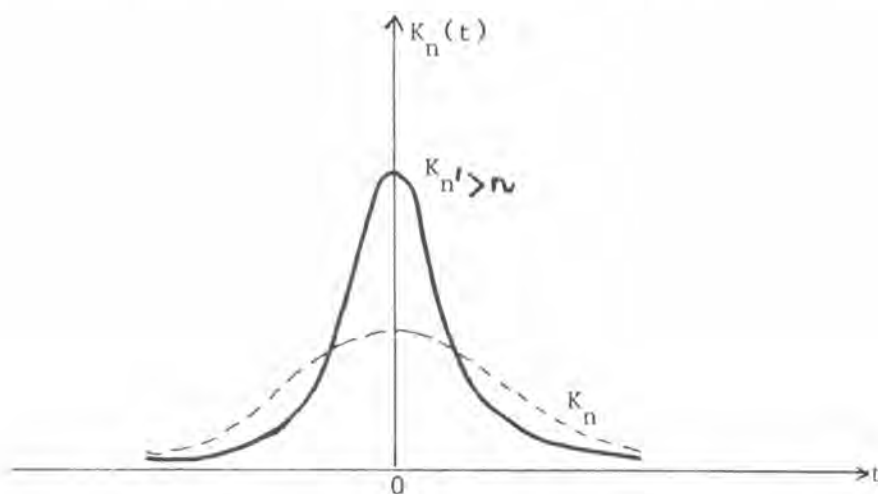
(p1) $K_n \geq 0$;

(p2) K_n est continue, 2π -périodique, et $\int_0^{2\pi} K_n(t) \frac{dt}{2\pi} = 1$;

(p3) pour tout $\delta > 0$ donné,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\delta < |t| < \pi} K_n(t) dt = 0.$$

On dit que $(K_n)_{n \geq 1}$ est une approximation de l'unité :



Proposition 2 : Si $x \in E$ est continue, alors la suite (σ_n) tend vers x lorsque n augmente indéfiniment, uniformément dans le temps.

Démonstration : A $\varepsilon > 0$ donné, petit à volonté, il est possible de trouver un nombre positif δ pour lequel :

$$|s(t') - x(t'')| \leq \varepsilon \quad \text{si} \quad |t' - t''| \leq \delta.$$

Formons alors :

$$\begin{aligned} \sigma_n(t) - x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} K_n(\theta) x(t-\theta) d\theta - x(t) \\ &= \int_{-\pi}^{+\pi} K_n(\theta) [x(t-\theta) - x(t)] \frac{d\theta}{2\pi}, \text{ d'après (p2)} \end{aligned}$$

que nous découpons selon $\int_{-\pi}^{+\pi} + \int_{\delta < |\theta| \leq \pi}$. Il vient alors :

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\delta}^{+\delta} K_n(\theta) [x(t-\theta) - x(t)] \frac{d\theta}{2\pi} \right| &\leq \int_{-\delta}^{+\delta} K_n(\theta) |x(t-\theta) - x(t)| \frac{d\theta}{2\pi} \\ &\leq \epsilon \int_{-\delta}^{+\delta} K_n(\theta) \frac{d\theta}{2\pi} \\ &\leq \epsilon \end{aligned}$$

et :

$$\left| \int_{\delta < |\theta| < \pi} K_n(\theta) [x(t-\theta) - x(t)] \frac{d\theta}{2\pi} \right| \leq \frac{2M}{2\pi} \int_{\delta < |\theta| < \pi} K_n(\theta) d\theta,$$

si M majore x : il suffit alors de choisir n assez grand pour que :

$$\frac{M}{\pi} \int_{\delta < |\theta| < \pi} K_n(\theta) d\theta < \epsilon \quad (: \text{ c'est possible, d'après (p3)})$$

pour conclure.

Plus généralement, il est facile de voir que si x est continue sur un intervalle, la série de FOURIER de x converge vers x uniformément sur cet intervalle, au sens de CESARO : c'est le théorème de FEJER.

Voici une conséquence fondamentale de la Proposition 2 :

Théorème : Pour toute fonction x de E , la série de FOURIER de x converge vers x , au sens de la norme de l'énergie :

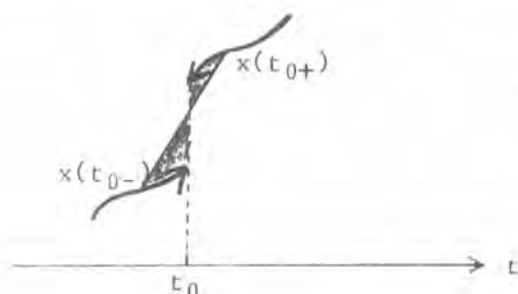
$$\lim_{N, M \rightarrow +\infty} \left\| x - \sum_{-M}^N c_n(x) e_n \right\| = 0$$

Corollaire (: égalité de BESSEL-PARSEVAL)

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(x)|^2 = \|x\|^2.$$

Démonstration :

1 - x peut s'approcher d'aussi près qu'on veut au sens de la moyenne quadratique par une fonction continue $\tilde{x}$ de E .



: l'aire ombrée est petite à volonté !

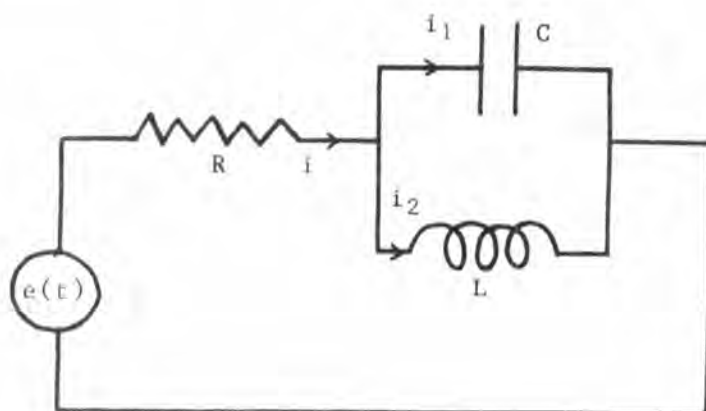
- 2 - D'après la proposition 2, $\tilde{x}$ s'approche uniformément, donc a fortiori au sens de la norme de l'énergie, par une somme de CESARO, c'est-à-dire par un polynôme trigonométrique.
- 3 - Il est alors facile de conclure, en invoquant la proposition 4 du § 1. Le corollaire résulte alors de l'inégalité du triangle :

$$| \|x\| - \| \sum_{-M}^N c_n(x) e_n \| | \leq \| x - \sum_{-M}^N c_n(x) e_n \|$$

Exercice 3 : Soit x le signal 2-périodique valant $\frac{\pi-t}{2}$ sur l'intervalle $[0, 2\pi[$ (: "signal en dents de scie"). Calculer ses coefficients de FOURIER. Que donne l'égalité de BESSEL-PARSEVAL ?

L'identité de BESSEL-PARSEVAL affirme donc que l'énergie du signal est égal à la somme des énergies de ses composantes harmoniques pures.

Exercice 4 : On considère le circuit électrique :



où : $e(t) = 100 + 80 \sin(\omega t + \frac{\pi}{6}) + 60 \sin(2\omega t + \frac{\pi}{9}) + 50 \sin(5\omega t + \frac{\pi}{3})$
 $R = 3\Omega$; $L\omega = 3\Omega$; $\frac{1}{C\omega} = 27\Omega$.

Calculer les valeurs efficaces des courants i , i_1 et i_2 .

4 Série de FOURIER du signal en dents de scie

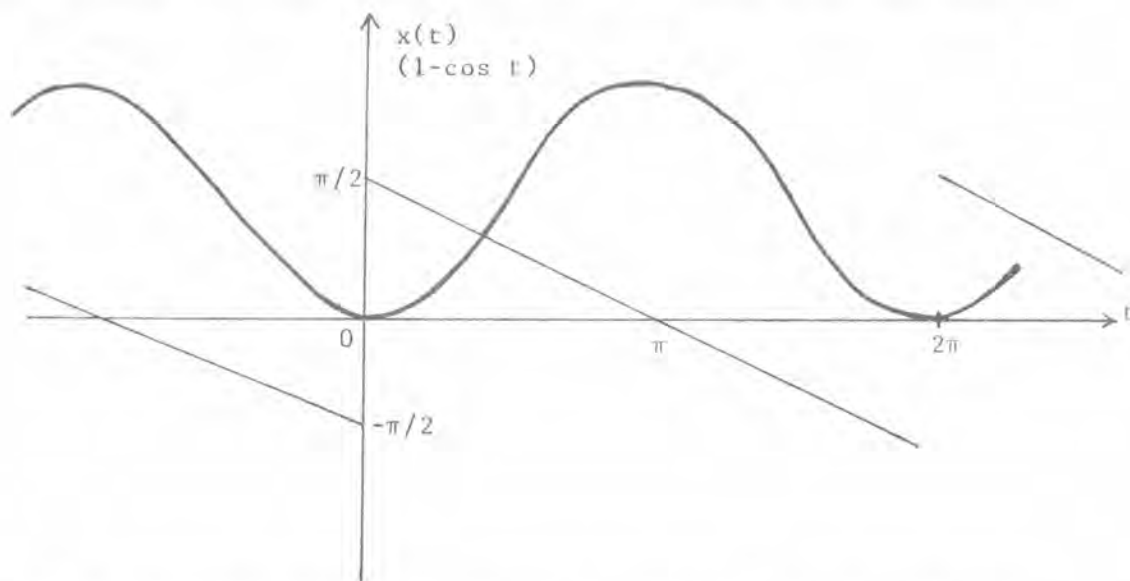
Ce signal a été défini, et ses coefficients de FOURIER calculés dans l'exercice 3 du § précédent : sa série de FOURIER s'écrit :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(nt)}{n}$$

- 1 - En vue d'étudier le lien existant à un instant donné t entre $x(t)$ et sa série de FOURIER, formons la nouvelle fonction :

$$y(t) = (1 - \cos t)x(t)$$

qui est dans E , mais qui est, de plus, dérivable à dérivée dans E .



En effet, seul les points $2k\pi$ posent un problème, et nous avons :

$$\left| \frac{y(t)}{t} \right| \leq \frac{\pi}{2} \frac{1 - \cos t}{|t|} \xrightarrow{(t \rightarrow 0)} 0$$

Il est alors assez facile de montrer que la série de FOURIER de y converge vers y uniformément sur $\mathbb{R}$:

En effet, d'après P4, pour tout N et M entiers positifs, on a :

$$\left| \sum_{n=N}^M c_n(y) e^{int} \right| = \left| \sum_{n=N}^M \frac{1}{in} c_n(\dot{y}) e^{int} \right| \leq \left(\sum_{n=N}^M \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=N}^M |c_n(y)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

d'après l'inégalité de SCHWARTZ d'où encore, d'après l'inégalité de BESSEL, la majoration :

$$\left| \sum_{n=N}^M c_n(y) e^{int} \right| \leq \left(\sum_{n=N}^M \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \|\dot{y}\|^2,$$

qui permet de conclure à la convergence uniforme de la série de FOURIER de y . Désignons alors par $z(t)$ la somme de la série :

$$z(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(y) e^{int}$$

z est une fonction continue et la série converge en norme quadratique vers z . D'après le théorème du § 3, nous avons donc $z = y$.

Nous avons en fait établi la :

Proposition : Si $x \in E$ admet une dérivée $\dot{x}$ qui est dans E , alors, la série de FOURIER de x converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers x .

Exercice 1 : Montrer que la série de FOURIER de y s'écrit :

$$\sum_{n \geq 1} b_n \sin(nt), \text{ avec : } \begin{aligned} b_n &= \frac{1}{n} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n+1} \right), \text{ si } n \geq 2 \\ b_1 &= 1 - \frac{1}{4} \end{aligned}$$

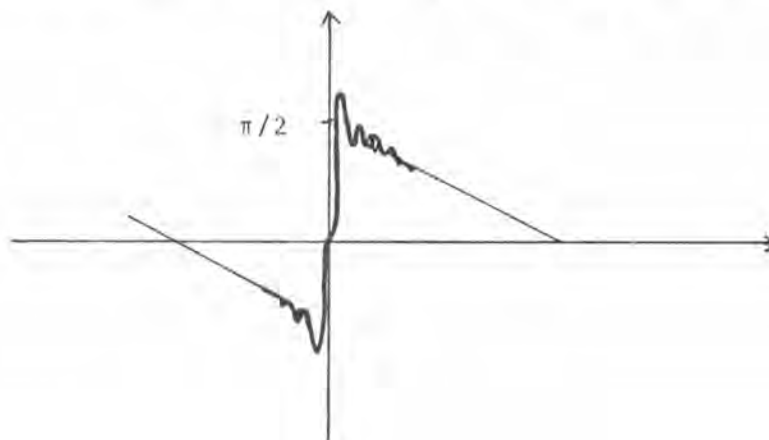
Appelons par $s_n(t)$ la somme partielle à l'ordre n de la série de FOURIER de x , par $s'_n(t)$ celle de y . Il vient :

$$(1 - \cos t) s_n(t) = s'_n(t) - \frac{1}{2n} \sin(n+1)t + \frac{1}{2(n+1)} \sin(nt)$$

Ce qui entraîne que $(1 - \cos t) s_n(t) \xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} y(t)$ pour tout t .

En particulier, $s_n(t) \xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} x(t)$ à chaque instant t , pour lequel $(1 - \cos t) \neq 0$, c'est-à-dire $t \neq 2k\pi$ avec k dans $\mathbb{Z}$. En fait, il y a même convergence uniforme sur tout intervalle de la forme $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$, avec $0 < \varepsilon$ petit.

2 - En faisant passer le signal délivré par un générateur de dents de scie dans un filtre passe-bas, on observe sur l'écran d'un oscillographe, à la sortie du filtre, un signal qui a la forme suivante :



C'est une version du phénomène de GIBBS, dont nous allons donner l'explication.

En fait, le signal observé est une somme partielle s_n de la série de FOURIER du signal en dents de scie x .

Exercice 2 : Montrer que le polynôme trigonométrique :

$$s_n(t) = \sum_{k=1}^n \frac{\sin(kt)}{k}$$

possède, dans l'intervalle $[0, \pi]$:

- un maximum relatif aux instants : $t_k' = \frac{(2k-1)\pi}{n+1}$,
- un minimum relatif aux instants : $t_k'' = \frac{2(k-1)\pi}{n}$, $k = 1, 2, \dots, \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$.

On peut en fait montrer que le premier maximum atteint est un maximum absolu, et que la suite de ces extrema :

$$s_n\left(\frac{\pi}{n+1}\right) \xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt.$$

Exercice 3 : Etablir le point précédent.

$$\text{Numériquement, } \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt = 1,85194\dots = \frac{\pi}{2} - 1,1790\dots$$

- 3 - On remarquera enfin que la série de FOURIER de x converge, en 0 , vers la moyenne $\frac{1}{2}(x(0+) + x(0-))$.

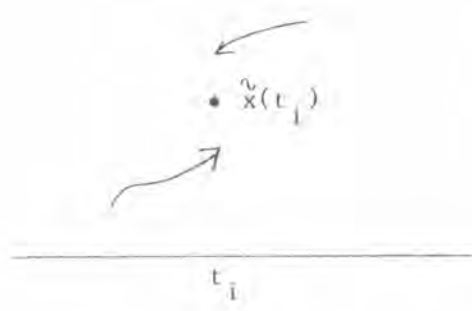
5 - Un théorème pratique de convergence ponctuelle

ENONCE : Soit $x \in E$ une fonction admettant en tous points une dérivée à droite et une dérivée à gauche. Alors, la série de FOURIER de x converge vers x sur $\mathbb{R}$, à condition d'adopter pour valeur de x en un point de discontinuité, la moyenne de ses limites à droite et à gauche.

Démonstration partielle : Soit par conséquent $\tilde{x}$ la fonction égale à x là où x est continue, et valant :

$$\tilde{x}(t_i) = \frac{1}{2} (x(t_i+0) + x(t_i-0))$$

aux points $t_1, t_2, \dots, t_N$ de discontinuité de x ;



: $s_i = x(t_i+0) - x(t_i-0)$ est le saut en t_i .

Désignons par δ le signal en dent de scie, étudié au § précédent. Alors, la fonction :

$$y(t) = \tilde{x}(t) - \sum_{i=1}^N \frac{s_i}{\pi} \delta(t - t_i)$$

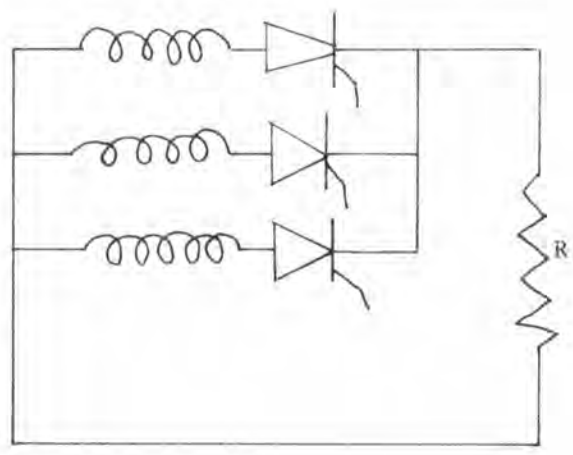
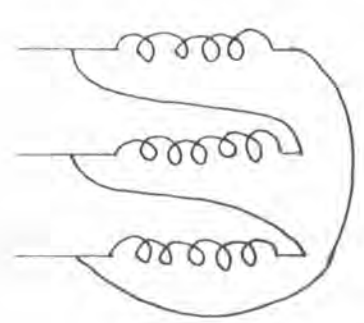
est continue sur $\mathbf{R}$, dérivable en dehors des points $t_1, \dots, t_N$, à dérivée $\dot{y} \in E$.

D'après la proposition établie au § 4, la série de FOURIER de y converge vers y , uniformément sur $\mathbf{R}$. L'étude du § 4 permet alors de conclure. De plus, la série de FOURIER de x converge vers s uniformément sur tout intervalle ne contenant aucun des points de discontinuité t_i .

Cet énoncé est suffisant pour traiter les signaux rencontrés en électricité.

Exercice 1 : On reprend le montage de l'introduction, avec un redresseur commandé. Développer en série de FOURIER la tension obtenue aux bornes de la résistance, en fonction de l'angle d'allumage du thyristor.

Exercice 2 : Même question, avec un redressement triphasé :



ANNEXE 4 : LA FORMULE DE LAPLACE INVERSE

1 - D'après les propriétés P4* et P5, toute transformée de LAPLACE $F(p)$ d'une fonction $f(t)$ obéissant aux conditions de la définition 1), est analytique dans un $\frac{1}{2}$ -plan : $\{\operatorname{Re}(p) > \alpha\}$, et tend vers 0 à l'infini : plus précisément, rappelons que :

$$|F(p)| \leq \frac{A}{\operatorname{Re}(p) - \alpha} ,$$

Voici un énoncé, intéressant en pratique, et qui donne une condition suffisante à assurer qu'une fonction F est la transformée de LAPLACE d'une fonction $f(t)$, ainsi qu'un moyen intégral d'obtenir cette fonction :

Proposition 1 : Soit $F(p)$ une fonction analytique sur le $\frac{1}{2}$ -plan complexe : $\{\operatorname{Re}(p) > \alpha\}$, qui tend vers 0 lorsque $|p| \rightarrow +\infty$, uniformément sur tout $\frac{1}{2}$ plan : $\{\operatorname{Re}(p) \geq a > \alpha\}$, et qui est telle que l'intégrale :

$$\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p) dp$$

soit absolument convergente.

Alors, $F(p)$ est la transformée de LAPLACE de la fonction :

$$f(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} F(p) dp$$

Démonstration : Calculons, pour $p_0 \in \mathbb{C}$ tel que : $x_0 := \operatorname{Re}(p_0) > a$, la quantité :

$$\int_0^\infty e^{-p_0 t} \frac{1}{2i\pi} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} F(p) dp dt$$

soit, en paramétrant le chemin vertical :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty e^{-p_0 t} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(a+is)t} F(a+is) ds dt.$$

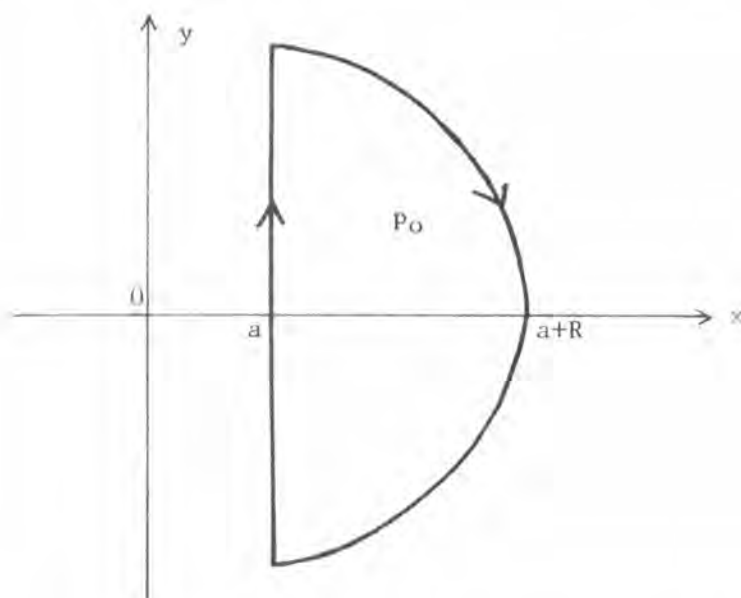
Comme :

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{-p_0 t} e^{(a+is)t} F(a+is)| ds dt &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t(x_0-a)} |F(a+is)| ds dt = \\ &= \int_0^\infty e^{-t(x_0-a)} dt \int_{-\infty}^{+\infty} |F(a+is)| ds < +\infty, \end{aligned}$$

par hypothèse, nous pouvons intervertir l'ordre des intégrations, pour obtenir :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p) \int_0^{\infty} e^{-(p_0-p)t} dt dp = - \frac{1}{2i\pi} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{F(p)}{p-p_0} dp$$

En vue d'expliciter l'intégrale de droite, on applique naturellement la formule de CAUCHY sur le contour :



et on fait $R \rightarrow +\infty$, l'hypothèse sur le comportement de $F(p)$ à l'infini étant là pour assurer que l'intégrale sur l'arc de cercle disparaît avec $\frac{1}{R}$.

2 - La formule d'inversion de LAPLACE a été rendue plausible par l'étude du retour de $\frac{1}{p}$ à l'échelon-unité $\mathcal{U}(t)$. Voici un énoncé pratique général :

Théorème ("formule de LAPLACE inverse")

On suppose que $f(t)$, outre les propriétés énoncées dans la définition, possède une dérivée à gauche, et une dérivée à droite en chaque point. Alors, à chaque instant t où f est continue, on a :

$$f(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{tp} F(p) dp \quad (a > \alpha).$$

Démonstration : Soit t_0 un instant donné. Pour $R > 0$ fixé, calculons :

$$\begin{aligned} f_R(t) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{a-iR}^{a+iR} e^{t_0 p} F(p) dp \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^{+R} e^{t_0(a+is)} \int_0^\infty e^{-t(a+is)} f(t) dt ds \end{aligned}$$

soit, en intervertissant comme précédemment l'ordre des intégrations :

$$\begin{aligned} f_R(t_0) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty e^{a(t_0-t)} f(t) \int_{-R}^{+R} e^{i(t_0-t)s} ds dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{a(t_0-t)} f(t) \frac{\sin(t_0-t)R}{t_0-t} dt \end{aligned}$$

ou, par le changement de variable $t = t_0 + s$:

$$f_R(t_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-t_0}^\infty e^{-as} f(t_0+s) \frac{\sin(Rs)}{s} ds$$

soit, comme $f(t) = 0$ si $t < 0$, et en posant : $g(t) = f(t)e^{-at}$:

$$f_R(t_0) = \frac{e^{at_0}}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t_0+s) \frac{\sin(Rs)}{s} ds$$

autrement dit :

$$g_R(t_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t_0+s) \frac{\sin(Rs)}{s} ds$$

et il s'agit de montrer que :

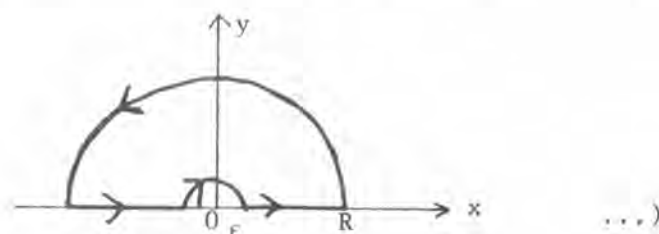
$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t_0+s) \frac{\sin(Rs)}{s} ds = g(t_0)$$

où g admet en t_0 une dérivée à gauche, et une dérivée à droite.

Remarquons pour commencer que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(Rs)}{s} ds = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(s)}{s} ds = \frac{1}{\pi} \dots$$

(: écrire le théorème de CAUCHY pour la fonction $\frac{e^{iz}}{z}$ sur le contour :



Effectuons donc l'écart :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t_0+s) \frac{\sin(Rs)}{s} ds - g(t_0) &= \\ \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (g(t_0+s) - g(t_0)) \frac{\sin(Rs)}{s} ds &= \\ \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(t_0+s) - g(t_0)}{s} \sin(Rs) ds & \end{aligned}$$

Il est alors possible de conclure, en s'appuyant sur le théorème de RIEMANN-LEBESGUE, disant que si une fonction φ est intégrable sur l'intervalle $[a, b]$, alors :

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi(s) \sin(Rs) ds = 0$$

3 - Voici pour finir l'énoncé qui généralise une situation courante rencontrée dans l'Exemple 1 du § 5, et son traitement dans l'ANNEXE 2,

Proposition 2 ("formule d'HEAVISIDE") :

Si $F(p)$ ne possède que des singularités isolées dans $\mathbb{C}$, est analytique dans le $\frac{1}{2}$ -plan $\{\operatorname{Re}(p) > \alpha\}$, si l'intégrale :

$$\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p) dp$$

est absolument convergente, et s'il existe une suite de rayons (R_n) tendant vers $+\infty$, et telle que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{|p|=R_n} |F(p)| \right) = 0$$

alors, l'originale $f(t)$ de $F(p)$ est donnée par le développement :

$$f(t) = \mathcal{Y}(t) \sum_n \text{Rés}_{p_n} (e^{pt} F(p))$$

où (p_n) désigne la suite des pôles de F , prise dans l'ordre des modules croissants.