



Préparation à l'agrégation interne de Mathématiques

Epreuve d'Analyse

10 problèmes corrigés

Problème n° 1

Exercice 1:

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin(2nt) \cdot \cotg(t) dt$$
$$J_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2nt)}{t} dt$$

a) calculer la valeur de I_n .

b) montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} J_n = \int_0^{\infty} \frac{\sin \theta}{\theta} d\theta$.

c) établir que $\lim_{n \rightarrow \infty} (I_n - J_n) = 0$.

d) en déduire la valeur de $\int_0^{\infty} \frac{\sin \theta}{\theta} d\theta$.

Exercice 2:

Rappeler pourquoi la suite $\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n\right)_{n \geq 1}$ est convergente. On note γ sa limite (: constante d'Euler)

a) montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln t dt = \int_0^{\infty} e^{-t} \ln t dt$

b) calculer la valeur de $\int_0^1 t^n \ln(1-t) dt$ pour $n \in \mathbb{N}$.

c) en déduire que $\gamma = -\int_0^{\infty} e^{-t} \ln t \cdot dt$.

Exercice 3 :

Pour $a, b > 0$, établir

$$\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{a+nb} = \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b} dt$$

En déduire la valeur de la somme de la série

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \dots$$

Exercice 4 :

Expliquer pourquoi la fonction

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$. Que vaut $\Gamma'(1)$?

Exercice 5:

Pour $w \in \mathbb{R}$, on pose $f(w) = \int_0^\infty e^{-t^2} \cos(wt) dt$

a) montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

b) supprimer f' à l'aide de f , et en déduire la valeur de f .

Exercice 6: Considérer l'EDO $xy'' + y' + xy = 0$

(: de Bessel, d'indice 0)

a) déterminer à l'aide d'une série entière la solution f au problème de condition initiale $y(0)=1, y'(0)=0$.

b) montrer que $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(x \sin t) dt$.

c) montrer que $F(z) = \int_0^\infty e^{-xz} f(x) dx$ est

bien définie pour $z > 0$, et expliquer pourquoi F est dérivable sur $]0, \infty[$.

d) établir la relation $F(z) = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}, z > 0$.

Exercice 1: a) $I_{n+1} - I_n = 0$ (après linéarisation), $I_1 = \frac{\pi}{2}$.

b) $I_n = \int_0^{n\pi} \frac{\sin \theta}{\theta} d\theta \rightarrow \int_0^{\infty} \frac{\sin \theta}{\theta} d\theta$, l'intégrale étant convergente.

c) $I_n - J_n = \int_0^{\pi/2} \left(\cotg t - \frac{1}{t} \right) d\left(-\frac{\cos 2nt}{2n}\right) = \frac{1}{2n} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{n^2 t} \right) \cos 2nt dt$
 on $\left| \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{n^2 t} \right) \cos 2nt dt \right| \leq \int_0^{\pi/2} \left| \frac{1}{t^2} - \frac{1}{n^2 t} \right| dt < +\infty$ quelque

$I_n - J_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$
 $(n \rightarrow \infty)$

d) d'où $\int_0^{\infty} \frac{\sin \theta}{\theta} d\theta = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 2: la suite est $\downarrow$ et minorée par 0 (car $\frac{1}{p} > \int_p^{p+1} \frac{dt}{t}$ $\forall p \geq 1$...)

a) il y a en la suite d'elts $(1 - \frac{t}{n})^n$ but $\mathbb{1}_{(0,n)}(t)$ vs e^{-t} but $\mathbb{1}_{(0,\infty)}(t)$
 on tout q't d $]0, \infty[$ (avec Taylor vte intégral... un exemple)
 d'pus $|f_n(t)| \leq e^{-t} |f(t)| \mathbb{1}_{(0,\infty)}(t) = \varphi(t)$ intégrable :

on peut conclure avec le thm de convergence dominée faible.

b) $\int_0^1 \ln(1-t) d\left(\frac{t^{n+1}-1}{n+1}\right) = -\frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{t^{n+1}-1}{t-1} dt = -\frac{1}{n+1} \int_0^1 (1+t+\dots+t^n) dt =$
 $= -\frac{1}{n+1} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n+1} \right).$

c) d'où $\int_0^m \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln t dt = n \int_0^1 \theta^n (\ln m + \ln(1-\theta)) d\theta =$
 $= \frac{n}{n+1} \ln(m) - \frac{n}{n+1} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n+1} \right) = \frac{n}{n+1} \left(\ln m - \left(1 + \dots + \frac{1}{n+1} \right) \right) \rightarrow -\frac{\gamma}{4}$

Exercice 3: il faut justifier le calcul formel suivant

C2

$$\int_0^1 t^{a-1} \sum_{n \geq 0} (-t^b)^n dt = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \int_0^1 t^{a+nb-1} dt :$$

la série de fct de tq $f_n(t) = (-1)^n t^{a+nb-1}$ converge uniformément sur tout compact de $]0,1[$, et $n \in [0,1[$ (à partir d'un certain rang), la série entière en $z = t^b$ admettant $R=1$ comme rayon de convergence. En outre, d'après le critère du reste d'une série alternée dont le tq. $|t^b| \downarrow 0$, on peut écrire que

$$\forall N, |S_N(t)| = t^{a-1} \sum_{n=0}^N (-t^b)^n \leq \frac{t^{a-1}}{1+t^b} + t^{a-1+(N+1)b} \leq \frac{t^{a-1}}{1+t^b} + 1$$

si $t \in (0,1)$, on le fctn majorante φ est intégrable sur $(0,1)$.

Autre argument (à connaître): la série de tq

$$u_n(t) = t^{a-1} \left((-t^b)^{2n} + (-t^b)^{2n+1} \right) = (-1)^n t^{a-1} \cdot t^{2nb} (1 - t^b)$$

soit la suite $(U_N(t))_{N \geq 1}$ de ses sommes partielles contrôlée au l.1 par

$$|U_N(t)| \leq t^{a-1} (1-t^b) \cdot \frac{1}{1-t^{2b}} = \frac{t^{a-1}}{1+t^b} = \phi(t)$$

$$\forall t \in (0,1)$$

intégrable sur $(0,1)$: on peut donc l'intégrer terme à terme, et comme $\frac{1}{a+nb} \rightarrow 0 \dots$

Exercice 4: chaque fct $\Gamma_n(x) = \int_0^x e^{-t} t^{n-1} dt$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, \infty[$, avec, par exemple $\Gamma'_n(x) = \int_0^x e^{-t} t^{n-1} \ln(t) dt$

de plus, pour $n > 1$, si $x \geq \varepsilon > 0$,

$$\left| \int_n^\infty e^{-t} t^{n-1} \ln t dt \right| \leq \int_n^\infty e^{-t} t^{\varepsilon-1} \ln t dt \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

que reste d'une intégrale convergente : ainsi $\Gamma'_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty}$ sur tout compact de $]0, \infty[$ vers $x \mapsto \int_0^\infty e^{-t} t^{n-1} \ln t dt$. Γ est bien dérivable sur $]0, \infty[$, avec en particulier

$$\Gamma'(1) = \int_0^\infty e^{-t} \ln t dt = -\gamma.$$

Exercice 5: a) $\forall n$, $f_n(\omega) = \int_0^n e^{-t} \omega(t) dt$ est $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ avec, par exemple $f'_n(\omega) = \int_0^n e^{-t} t f_n(\omega) dt$: comme $\int_n^\infty e^{-t} t dt \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$,

$$\dots$$

$$b) f'(\omega) = \int_0^\infty e^{-t} (-t \sin \omega t) dt = \int_0^\infty \sin \omega t \cdot d\left(\frac{e^{-t}}{t}\right) = -\frac{\omega}{2} \int_0^\infty e^{-t} \cos \omega t dt$$

donc, $\forall \omega \in \mathbb{R}$, $f'(\omega) = -\frac{\omega}{2} f(\omega)$ d'où, par quadrature

$$f(\omega) = K e^{-\frac{\omega^2}{4}} \quad \text{si} \quad K = f(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Exercice 6: a) par identification, $f(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$, $R = \infty$.

b) on intègre terme à terme

$$\int_0^{2t} \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \sin t \cdot t^{2n} dt$$

la justification est élémentaire, la série de fonctions est normalement convergente sur $[0, 2t]_t$: la connaissance de l'intégrale de Wallis permet de conclure...

c) $F_n(z) = \int_0^n e^{-xz} f(x) dx$ est $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_z^+)$ et, si $z \geq \varepsilon > 0$,

d'après b), on a $\left| \int_n^\infty e^{-xz} f(x) dx \right| \leq \int_n^\infty e^{-\varepsilon x} dx \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, d'où

la conclusion demandée.

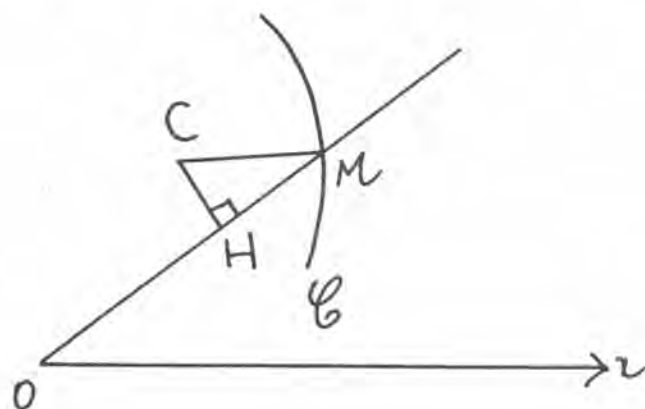
$$\begin{aligned} d) \quad F(z) &= \int_0^\infty e^{-xz} \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} dx \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \frac{1}{2^{2n}} \int_0^\infty e^{-xz} x^{2n} dx \\ &= \dots \end{aligned}$$

on conclut avec la formule de binôme. On peut aussi utiliser b) et intervertir les ordres d'intégration en justifiant.

Préparation à l'épreuve d'Analyse de l'Agégation Interne 95/96:

Problème n°2

Exercice 1: déterminer les courbes planes régulières $\mathcal{C}$ telles que



$$\overline{OH} = 2 \overline{HM}$$

où C désigne le centre de courbure en M :

on commencera par établir l'EDO

$$2\rho^2 + \rho'^2 + \rho\rho'' = 0$$

où $\rho = \rho(\theta)$ est l'équation polaire de $\mathcal{C}$, qu'on intégrera ensuite en posant $\rho' = f(\rho)$.

Exercice 2: (d'après l'épreuve de 91)

Considérer l'EDO $3(x^2+x).y'' + (8x+3).y' + 2y = 0$

1) déterminer la solution f développable en série entière à l'origine, et qui vaut 1 en $x=0$.

2) identifier cette solution (: de la forme $(1+z)^\alpha$ avec α bien choisi).

3) en déduire l'expression de la solution générale de l'EDO.

Exercice 3: 1) soit $f(z) = \sum_0^\infty c_n z^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$: montrer que, pour tout entier $n \geq 0$, on a

$$c_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz \quad \text{si } \mathcal{C} \text{ est le cercle centré}$$

en 0, de rayon $\rho \in]0, R[$, et parcouru dans le sens trigo.

En déduire que $|c_n| \leq \frac{1}{\rho^n} \cdot \sup_{|z|=\rho} |f(z)|$.

2) considérer une EDO linéaire d'ordre 2, à coefficients a et b développables en série entière à l'origine :

$$y'' + a y' + b y = 0$$

$$a(z) = \sum_{n \geq 0} a_n \cdot z^n, \quad b(z) = \sum_{n \geq 0} b_n \cdot z^n \quad |z| < R$$

a) montrer que si $y(z) = \sum_{n \geq 0} c_n z^n$ est une solution série entière, on a nécessairement

$$\forall n \geq 0, (n+1)(n+2) c_{n+2} = - \sum_{k=0}^n (k+1) c_{k+1} \cdot a_{n-k} - \sum_{k=0}^n c_k \cdot b_{n-k}$$

b) montrer que, si $|a_n|, |b_n| \leq \frac{M}{\rho^n} \quad \forall n \geq 0$, alors il existe $K > 0$ tel que $\forall n \geq 0, |c_n| \leq \frac{K}{\rho^n}$

c) en déduire que toute solution de l'EDO est développable en série entière en 0.

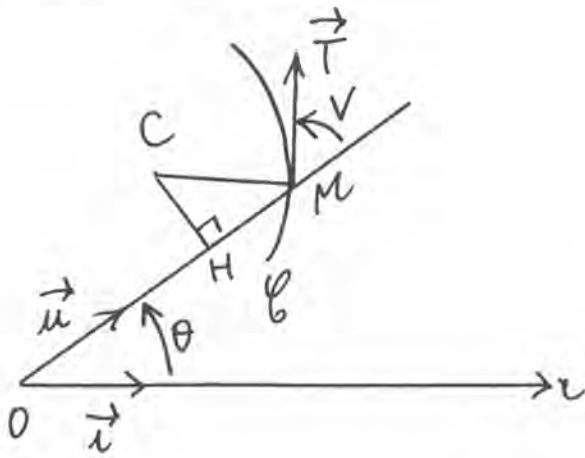
Exercice 4: pour

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

déterminer la trajectoire du système différentiel

$$\dot{\vec{x}} = A \vec{x}$$

qui part du point $M_0(3, 0, 2)$.

Exercice 1:

$$\vec{OM} = \rho \cdot \vec{u}$$

$$\varphi = (\vec{x}, \vec{T})$$

$$' = \frac{d}{ds}$$

avec notations habituelles, $\rho = 3R \sin V$

$$\text{on } R = \frac{ds}{d\rho} = \frac{ds}{ds + dV}, \quad ds = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\theta, \quad \tan V = \frac{\rho'}{\rho}$$

$$\text{donc } \frac{dV}{d\theta} = \frac{\rho'^2 - \rho \rho''}{\rho^2 + \rho'^2}, \quad \text{si bien que la relation donnée}$$

écrit

$$\rho = \frac{3\rho(\rho^2 + \rho'^2)}{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}$$

$$\text{soit } \rho\rho'' + \rho'^2 + 2\rho^2 = 0.$$

Si $\rho' = f(\rho)$, $\rho'' = f' \cdot f$ et on est conduit à l'EDO

$$\rho f f' + f^2 + 2\rho^2 = 0 \quad \text{en } f(\rho)$$

qu'on intègre en posant $f^2 = F$:

$$\frac{1}{2} \rho F' + F + 2\rho^2 = 0$$

étant linéaire d'ordre 1, s'intègre avec Lagrange pour donner

$$F(p) = \frac{K(p)}{p^2} \quad \text{où} \quad K'(p) = -4p^3$$

$$\text{soit} \quad F(p) = \frac{C - p^4}{p^2}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Ce qui donne, en remontant les étapes :

$$(pp')^2 + p^4 = C > 0$$

$$\text{soit, dans la variable} \quad R = p^2$$

$$(R')^2 = 4(C - R^2)$$

d'où, en séparant les variables

$$\frac{dR}{2\sqrt{C - R^2}} = d\theta$$

$$\text{d'où-a-due} \quad R^2 = C \sin^2(\theta - \theta_0) \quad \text{soit} \quad p(\theta) = \sqrt{C \sin^2(\theta - \theta_0)}$$

: Il s'agit d'une lemniscate de Bernoulli (dilatée, tournée).
(:C) (:θ₀)

Exercice 2: 1) la technique d'identification conduit, sur les coefficients

de $f(z) = 1 + \sum_{n \geq 1} a_n z^n$, à la relation d'évolution

$$\forall n \geq 0, \quad a_{n+1} = -\frac{3n+2}{3(n+1)} a_n$$

Comme $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \rightarrow 1$, avec Stolz, le rayon de convergence
de la série vaut $R=1$ et, à partir de $a_0=1$, on obtient

$$\forall n \geq 0 \quad a_n = (-1)^n \frac{2 \cdot 5 \dots (3n-1)}{3 \cdot 6 \dots 3n}$$

2) avec le dev $(1+z)^\alpha = 1 + \alpha z + \dots + \alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n+1) \frac{z^n}{n!} + \dots$

valable pour $|z| < 1$, on est conduit à prendre $\alpha = -2/3$:

la solution précédemment trouvée s'écrit donc $(1+z)^{2/3}$.

Fu coup, il s'agit d'une solution de l'EDO sur $] -1, \infty[$.

3) écrivait l'EDO comme le SDO

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{2}{3z(z+1)} & -\frac{(8z+3)}{3z(z+1)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$$

$$W(z) = \exp \left(\int \left(\frac{1}{z} + \frac{5/3}{z+1} \right) dz \right) = \ln |z(1+z)^{5/3}|$$

conduit, selon le plan de la leçon [24], à la solution
indépendante de f :

$$g(z) = f(z) \int \frac{dz}{z(1+z)^{4/3}}$$

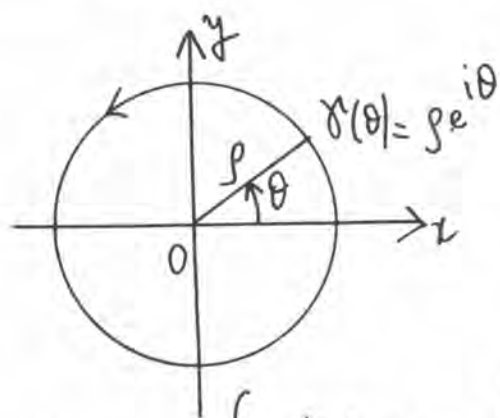
(on peut aussi poser $y = f \cdot z \dots$)

Tous calculs de $\int$ effectués, on obtient

$$g(x) = f(x) \cdot \left(\ln \frac{|\sqrt[3]{x+1} - 1|^{3/2}}{\sqrt{14}} + \sqrt{3} \operatorname{Arctg} \frac{2\sqrt{3}}{3} \left(\sqrt[3]{x+1} + \frac{1}{2} \right) \right)$$

et, sur $]-1, 1[^*$, la solution générale de l'EDO s'écrit $Af + Bg$
 avec $A, B \in \mathbb{R}$.

Exercice 3: 1)



$\gamma(\theta) = \rho e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ paramètre le cercle C
 et, par définition d'une intégrale curviligne

on a
$$\int_C \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(\rho e^{i\theta})}{(\rho e^{i\theta})^{n+1}} \cdot \rho i e^{i\theta} d\theta$$

on conclut donc en intégrant terme à terme (car comme $0 < \rho < R$,
 la série de fonctions intégrées converge normalement (en θ)
 sur $[0, 2\pi]$) , et avec le fait que

$$\int_0^{2\pi} e^{ik\theta} d\theta = \begin{cases} 0, & \text{si } k \neq 0 \\ 2\pi, & \text{si } k = 0 \end{cases}$$

$$|c_n| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\rho e^{i\theta})| \cdot \frac{d\theta}{\rho^n} \leq \frac{1}{\rho^n} \cdot \sup_{|z|=\rho} |f(z)|.$$

2) a) pr identification.

b) en supposant l'existence de $K > 0$ valable jusqu'au rang $n+1$, nous avons

$$(n+1)(n+2) |c_{n+2}| \leq \frac{MK}{\rho^{n+1}} \cdot \sum_0^n (k+1) + \frac{MK}{\rho^n} \cdot (n+1)$$

si $M \geq |a|, |b|$ on a $\rho < 1$. Soit

$$|c_{n+2}| \leq \frac{MK}{\rho^{n+1}} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{\rho}{n+2} \right) \leq \frac{MK}{\rho^{n+2}} \quad \text{si } \rho < 1$$

c) partant de $(x_0, x_1) = (1, 0)$ et $(0, 1)$, on obtient ainsi 2 relations linéaires entières indépendantes au voisinage de 0.

Exemple 4: $\lambda_p(A) = \{-2, -1 \pm 2i\}$

la solution générale s'écrit $\vec{x}(t) = C_1 \cdot e^{-2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 \cdot \vec{v}_2(t) + C_3 \cdot \vec{v}_3(t)$

$$\text{avec } \vec{v}_2(t) = e^{-t} \cdot \left(\cos 2t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \sin 2t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$$

$$C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$$

$$\vec{v}_3(t) = e^{-t} \cdot \left(\cos 2t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \sin 2t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Soit, dans la base $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} = \{ \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \}$:

$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^{-t} \\ y(t) = e^{-t} (C_2 \cos 2t + C_3 \sin 2t) \\ z(t) = e^{-t} (-C_2 \sin 2t + C_3 \cos 2t) \end{cases}$$

Compte-tenu de la condition initiale, il s'agit de tracer la courbe gauche d'équation paramétrique

$$\begin{cases} x(t) = e^{-t} \\ y(t) = e^{-t} (\cos 2t + \sin 2t) \\ z(t) = e^{-t} (-\sin 2t + \cos 2t) \end{cases}$$

inscrite sur la cone $x = y^2 + z^2$:



et qu'on oriente selon les temps croissants.

Problème n°3

Exercice 1: établir, pour $x > 0$, la relation

$$\int_0^{\infty} e^{-t^2} \sin(2tx) \frac{dt}{t} = \sqrt{\pi} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

- 1) en développant chaque membre en série entière selon x
- 2) en montrant que les deux membres ont même dérivée

Exercice 2: on considère l'EDO $x(1-x)y'' + (1-3x)y' - y = 0$

- 1) déterminer une solution développable en série entière en 0.
- 2) quelle est la forme de la solution générale?

Exercice 3: soit l'EDO $\ddot{x} + x - x^5 = 0$

- 1) l'écrire sous la forme d'un système différentiel d'ordre 1, et déterminer une intégrale première.
- 2) on considère le surface $\mathcal{S}$ d'équation cartésienne

$$\mathcal{S} = \{y^2 + z^2 - \frac{x^6}{3}\}$$

- dériver l'allure de f au voisinage des points à plan tangent horizontal.
- tracer le réseau des lignes de niveau de f .
- dériver l'allure de f .

3) déterminer la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \ddot{x} + x - x^5 = 0 \\ x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = \sqrt{\frac{2}{3}} \end{cases}$$

représenter : les courbes intégrales, la trajectoire.

Exercice 4: f et g sont deux fonctions continues

positives à support dans $[0, 1]$, et d'intégrales valant 1.

montrer que $F(\lambda) = \iint_{\{x, y \leq \lambda\}} f(x)g(y) dx dy$ définit

une fonction F dérivable sur $\mathbb{R}^+$, et calculer $F'(\lambda)$.

Exercice 5:

1) on désigne par J la solution au problème de Cauchy

$$\begin{cases} xy'' + y' + xy = 0 \\ y(1) = 1, \quad y'(1) = 0 \end{cases}$$

: déterminer son développement en série entière.

2) $(X_i)_{i \geq 1}$ désigne une suite de VA indépendantes, de

même loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$:

- montrer que $S_2 = X_1 + X_2$ a une loi de densité $\lambda^2 e^{-\lambda x} \cdot \frac{1}{x^2}$ (0, ∞)
- déterminer la loi de $S_n, n \geq 2$.

3) soit Y une VA de loi de Poisson de paramètre $a > 0$:

on considère l'application $S: \Omega \xrightarrow{1+Y(\omega)} \mathbb{R}$
 $\omega \mapsto \sum_{i=1}^{1+Y(\omega)} X_i(\omega)$

- montrer qu'il s'agit d'une VA
- à quelle condition peut-on écrire

$$\forall \alpha < \beta, \quad \mathbb{P}(S \in (\alpha, \beta)) = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(X_1 + \dots + X_n \in (\alpha, \beta)) \cdot \mathbb{P}(Y = n-1)$$

4) sous la condition précédemment trouvée, exprimer la loi de S à l'aide de la fonction J de 1).

Exercice 1:

$$1) F(x) = \int_0^{\infty} e^{-tx} \sin(2xt) \frac{dt}{t} = \int_0^{\infty} e^{-tx} \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (2xt)^{2n+1} \frac{dt}{t} \quad (*)$$

$$\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \int_0^{\infty} e^{-tx} t^{2n} dt \cdot (2x)^{2n+1} \quad \text{car} \quad \int_0^{\infty} e^{-tx} t^{2n} dt = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-\theta} \theta^{n-\frac{1}{2}} d\theta$$

$\theta = t^2$

rien autre que $\frac{1}{2} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)$ qui se calcule à partir de $\frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{-\frac{1}{2}} dt = \sqrt{\pi}$

ce qui conduit au développement

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot \frac{1}{2^n} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1) \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot (2x)^{2n+1} \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} \cdot \frac{x^{2n+1}}{n!} \end{aligned}$$

à condition toutefois de justifier l'opération (*) d'intégration terme à terme :

1) la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n(t) \doteq \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (2xt)^{2n+1} \frac{e^{-tx}}{t}$ converge uniformément sur tout compact de $[0, \infty[$ (car le rayon de convergence de la série entière du sinus est $+\infty$);

2) pour tout $N > 0$, on a

$$\left| \sum_{n=0}^N f_n(t) \right| \leq e^{-tx} \frac{\sin(2xt)}{t} \quad \text{fonction intégrable sur } (0, \infty)$$

n bien qu'on peut conclure avec le théorème de convergence dominée faible.

$$G(x) = \sqrt{\pi} \int_0^x e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi} \int_0^x \sum_{n \geq 0} \frac{(-t^2)^n}{n!} dt \stackrel{(*)}{=} \sqrt{\pi} \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^x t^{2n} dt \quad C2$$

conduit au m développement, avec une justification de (*) élémentaire puisque la série entière intégrée converge uniformément sur le compact $[0, x]$.

2) G est évidemment dérivable, avec $G'(x) = \sqrt{\pi} e^{-x^2} \forall x > 0$.

En supposant F dérivable deux fois, on aura

$$F'(x) = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x} \left(e^{-t^2} \frac{\sin(2tx)}{t} \right) dt = 2 \int_0^\infty e^{-t^2} \cos(2tx) dt$$

puis

$$F''(x) = 2 \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x} (e^{-t^2} \cos(2tx)) dt = -2 \int_0^\infty t e^{-t^2} \sin(2tx) dt =$$

$$2 \int_0^\infty \sin(2tx) d(e^{-t^2}) = -2 \int_0^\infty e^{-t^2} d(\sin(2tx)) = -4x \int_0^\infty e^{-t^2} \cos(2tx) dt$$

ce qui conduit à l'EDO $F''(x) = -2x \cdot F'(x), x > 0$

soit $F'(x) = K e^{-x^2}$ avec $K = F'(0) = 2 \int_0^\infty e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$.

Pour montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$, on introduit la suite de fonctions

$$F_n(x) = \int_0^n e^{-t^2} \sin(2tx) \frac{dt}{t}$$

dérivables (car $(t, x) \mapsto e^{-t^2} \frac{\sin(2tx)}{t}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\left[\frac{1}{n}, n\right] \times \mathbb{R}$)

avec $F'_n(x) = 2 \int_0^n e^{-t^2} \cos(2xt) dt$ et on montre que C3

1) $F_n(0) = 0 \rightarrow F(0) (!)$

2) $F'_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{u} H$ in $\mathbb{R}$, $H(x) \doteq 2 \int_0^\infty e^{-t^2} \cos(2xt) dt$

puisque $|H - F'_n|(x) \leq 2 \int_0^{1/n} e^{-t^2} dt + \int_n^\infty e^{-t^2} dt, \forall x \in \mathbb{R}$:

on voit alors que F est dérivable, avec $F' = H$.

En résumé sans difficulté avec F' , d'ici le conclusion énoncée.

Exercice 2: 1) en rebochant $y(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$, on obtient la relation d'écurance $a_{n+1} = a_n$ qui conduit à la solution $\frac{a_0}{1-x}$.

2) posant $y = \frac{z}{1-x}$, on aient $xz'' + z' = 0$ d'où

$z(x) = A \ln|x| + B$, si bien que la solution générale s'écrit sous la forme $y(x) = \frac{B}{1-x} + \frac{A \ln|x|}{1-x}$ in $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, on, plus

posément on laque intervalle $]-\infty, 0[,]0, 1[$ et $]1, \infty[$.

Exercice 3: 1) $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + x^5 \end{cases}$ $V(x, y)$ est une intégrale première si

$y \frac{\partial V}{\partial x} = (x - x^5) \frac{\partial V}{\partial y}$: ainsi $V(x, y) = y^2 + x^2 - \frac{x^6}{6}$ convient-elle.

2) - vecteur normale $\vec{N} \begin{vmatrix} \partial_x V = x - x^5 \\ \partial_y V = y \\ -1 \end{vmatrix}$ doit être vertical:

ce qui conduit aux points $P_+ (x=1, y=0, z=\frac{2}{3})$, $P_- (x=-1, y=0, z=-\frac{2}{3})$
et 0. C4

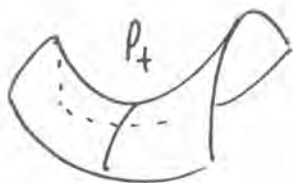
au voisinage de 0, $V(x,y) = x^2 + y^2 + o(2)$ et $\mathcal{J}$ a l'allure
d'un paraboléide



au voisinage de P_+ on a $x=1+h$, $y=k$ avec (h,k) voisin de 0,
on a le développement de Taylor

$$V(1+h, k) - V(1, 0) = -4h^2 + k^2 + o(2)$$

et P_+ est un point selle

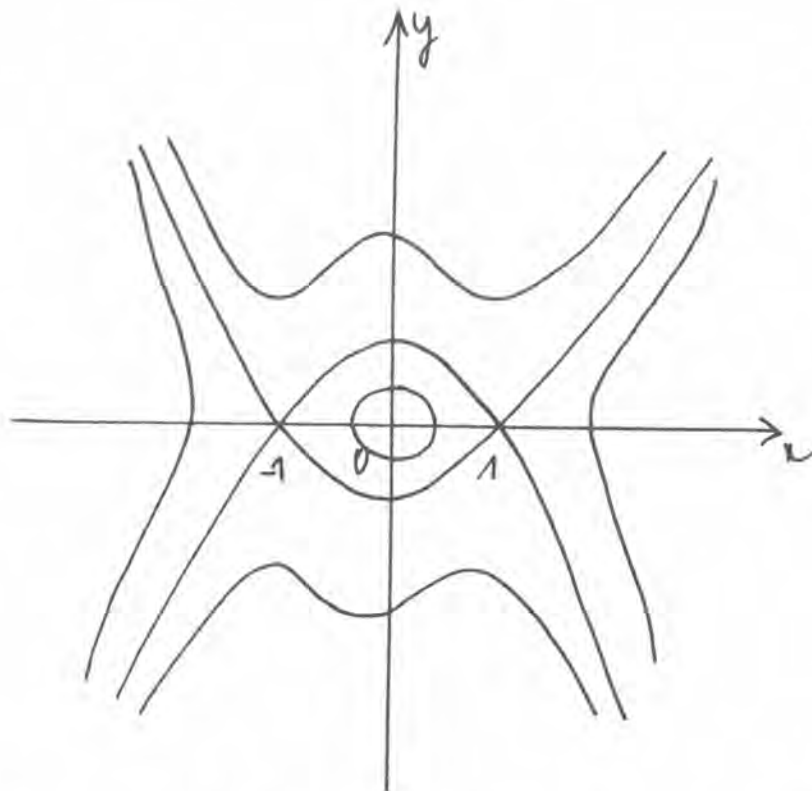


de même pour P_- , par symétrie.

- on représente l'allure de $-\mathcal{J}$: $z = -V(x,y)$:



- les courbes de niveau $\{V=V_0\}$ ayant l'allure suivante :



3) la trajectoire cherchée $(x(t), y(t))$ doit être contenue dans la ligne de niveau $V = V(0, \sqrt{\frac{2}{3}}) = \frac{2}{3}$, d'équation

$$y^2 = \frac{1}{3}(x^2 - 1)^2(x^2 + 2)$$

ce qui conduit à l'EDO d'ordre 1 à variables séparables

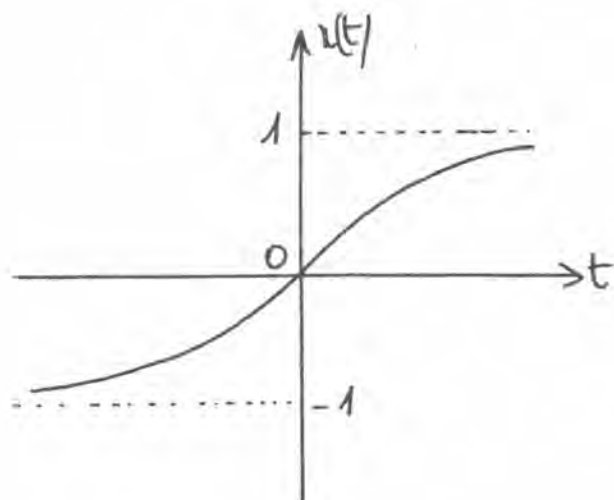
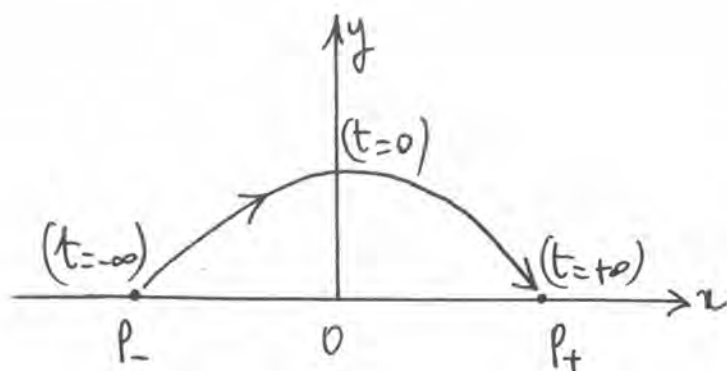
$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1 - x^2)\sqrt{x^2 + 2}$$

dont l'intégration donne

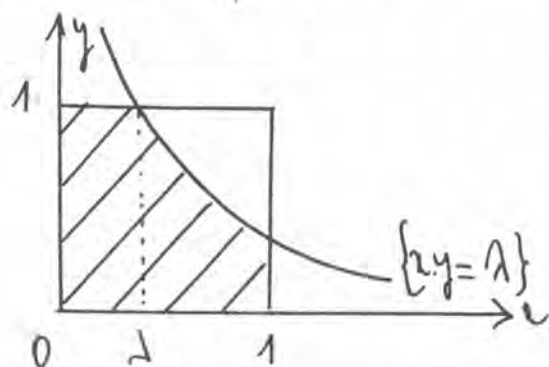
$$\int_0^{x(t)} \frac{dx}{(1 - x^2)\sqrt{x^2 + 2}} = t\sqrt{3}$$

soit, tous calculs de primitive faits $x(t) = \sqrt{2} \frac{\text{th}(3t)}{\sqrt{3 - \text{th}^2(3t)}}$

ce qui conduit aux traces suivants

: curve intégrale.: trajectoire.

Exercice 4: il est clair que $F(\lambda) = 0$ si $\lambda \leq 0$, tandis que pour $\lambda \in [0, 1]$ le domaine d'intégration:



$$\begin{aligned}
 \text{montre que} \quad F(\lambda) &= \int_0^\lambda f(x) \left(\int_0^1 g(y) dy \right) dx + \int_\lambda^1 f(x) \left(\int_0^{x/\lambda} g(y) dy \right) dx \\
 &= \int_0^\lambda f(x) dx + \int_\lambda^1 f(x) \left(\int_0^{x/\lambda} g(y) dy \right) dx
 \end{aligned}$$

et donne

$$\begin{aligned}
 F'(x) &= f(x) - f(x) \cdot \int_0^1 g(y) dy + \int_x^1 f(z) g\left(\frac{x}{z}\right) \frac{dz}{z} \\
 &= \int_x^1 f(z) g\left(\frac{x}{z}\right) \frac{dz}{z} \quad \text{pour } x \in]0, 1]
 \end{aligned}$$

enfin, $F(x) = F(1) = 1$ si $x \geq 1$.

remarque: l'exemple $f=g=\mathbb{1}_{(0,1)}$ montre que F peut ne pas être dérivable en 0.

Exercice 5: 1) $J(x) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2^n n!)^2}$, $R = +\infty$.

2) d'après l'indépendance des VA X_1 et X_2 , la densité de S_2 s'obtient par

$$\int_0^x dx e^{-x-y} \cdot dx e^{-xy} dy = x^2 e^{-x^2}, \quad x > 0$$

et, plus généralement, la densité de S_n vaut

$$x \cdot \frac{(x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-x^2} \cdot Y(x)$$

3) étant donné $0 \leq \alpha < \beta$, on a

$$\{S \in (\alpha, \beta)\} = \bigcup_{n \geq 1} \{X_1 + \dots + X_n \in (\alpha, \beta) \text{ et } Y_{n-1}\}$$

qui se présente comme une réunion dénombrable d'événements de la tribu.

si Y est indépendante de VA X_n , on a

$$\mathbb{P}(S \in (\alpha, \beta)) = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(X_1 + \dots + X_n \in (\alpha, \beta)) \times \mathbb{P}(Y = n-1) \quad (8)$$

$$= \sum_{n \geq 1} \int_{\alpha}^{\beta} d \frac{(dz)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-dz} \cdot e^{-a} \frac{a^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$\stackrel{(*)}{=} \int_{\alpha}^{\beta} \sum_{n \geq 1} d \frac{(daz)^{n-1}}{((n-1)!)^2} e^{-dz-a} da$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} d e^{-dz-a} J(2i\sqrt{dza}) da$$

donc la densité de S a pour expression $d e^{-dz-a} J(2i\sqrt{dza}) y(a)$

à condition de justifier l'opérateur $(*)$; le fait que $R = +\infty$ rend l'intégration élémentaire.

Problème n° 4.

Exercice 1: Justifier la démarche suivante :

$$\text{de } \frac{1}{n!} = \int_0^{\infty} t e^{-nt} dt = \int_0^1 \ln\left(\frac{1}{1-t}\right) \cdot (1-t)^{n-1} dt \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}^*$$

on tire

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} &= \int_0^1 \frac{1 - (1-t)^n}{t} \ln\left(\frac{1}{1-t}\right) \cdot dt \\ &= \int_0^1 \sum_{k \geq 1} \frac{t^{k-1}}{k} (1 - (1-t)^n) dt \\ &= \sum_{k \geq 1} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{(k-1)!}{k(n+1) \dots (n+k)} \right) \end{aligned}$$

soit

$$1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\frac{1}{2}}{(n+1)(n+2)} - \frac{\frac{2}{3}}{(n+1)(n+2)(n+3)} - \dots$$

Quel peut être l'intérêt de cette formule?

Exercice 2: On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \ddot{x} + x(1+x)^2 = 0 \\ x(0) = \frac{1}{3}, \quad \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$$

Tracer la trajectoire et les courbes intégrales.

Problème: (Calcul de intégrales généralisées $\int_0^\infty e^{-t} \cos(xt) \frac{dt}{\sqrt{t}}$ et $\int_0^\infty e^{-t} \sin(xt) \frac{dt}{\sqrt{t}}$).

A) (Calcul de $\int_0^\infty e^{-t^2} dt$, selon "différents procédés")

1) considérer l'intégrale double usuelle $\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} dx dy$ et passer en coordonnées polaires (voir la rédaction).

2) pour $x \geq 0$, on pose $f(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} dt$:

a) établir la continuité de f sur $[0, +\infty[$.

b) montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$, et

que $\forall x > 0, \quad f'(x) - f(x) = -\frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^\infty e^{-t^2} dt$

c) conclure.

3) pour $x \geq 0$, on pose $g(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2} dt \right)^2$, et

$$h(x) = \int_0^1 \frac{e^{-(1+t^2)x^2}}{1+t^2} dt.$$

a) montrer que g et h sont de classe $\mathcal{C}^1$.

b) calculer $g+h$.

c) conclure.

Dans la suite, on pose

$$z(x) = \int_0^\infty e^{-(1-it)t} \frac{dt}{\sqrt{t}} = u(x) + i v(x) \quad \text{avec } u(x) \text{ et } v(x) \text{ réels.}$$

B) (établissement des EDO en z , u et v)

1) rappeler pourquoi z est bien définie sur $\mathbb{R}$.

2) montrer que z est dérivable sur $\mathbb{R}$, et calculer z' en fonction de z .

3) en déduire que $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ est solution d'une EDO (30

linéaire (1) $\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$

où l'application matricielle A sera explicitée.

4) montrer aussi que u et v sont solution de l'EDO

$$(2) \quad 4(1+x^2) \cdot y'' + 12x \cdot y' + 3y = 0.$$

C) (étude de l'EDO (2))

1) expliquer pourquoi l'ensemble des solutions de (2) est un espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbb{R}$.

2) montrer que toutes les solutions de (2) sont développables en série entière sur $]-1, 1[$.

3) en utilisant les développements en série entières de fonctions cosinus et sinus, établir ceux des fonctions u et v .

4) retrouver ces développements à l'aide de 2) (et de A));
est-il facile de reconnaître u et v ?

D) (étude du SD (1))

1) rappeler pourquoi $X: t \mapsto \exp \int_0^t A(z) dz$ est la solution fondamentale de (1).

2) montrer que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, on a

$$\exp \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = e^a \begin{pmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{pmatrix}$$

3) en déduire u et v .

E) (étude de l'EDO en z)

1) intégrer l'EDO en z par "séparation des variables".

2) retrouver de cette manière u et v .

3) comment justifier le calcul?

Corrigé du Problème n° 4.

Exercice 1:

$$1 + \dots + \frac{1}{n} = \int_0^1 \frac{1 - (1-t)^n}{1 - (1-t)} \ln\left(\frac{1}{1-t}\right) dt = \int_0^1 (1 - (1-t)^n) \sum_{k \geq 1} \frac{t^{k-1}}{k} dt$$

en développant le $\ln$ en série entière $\stackrel{*}{=} \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2} \int_0^1 (1 - (1-t)^n) d(t^k)$

$$= \sum_{k \geq 1} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{(k-1)!}{k(n+1) \dots (n+k)} \right)$$

en calculant $B(k, n+1) = \int_0^1 t^{k-1} (1-t)^n dt$ à l'aide d'une suite d'intégration par parties. Comme $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (série de

Fourier), on peut conclure à condition de justifier l'opération $\times$ d'intégration terme à terme:

i) série de fonctions d.t.g. $u_k(t) = (1 - (1-t)^n) \frac{t^{k-1}}{k}$ converge

uniformément sur tt est de $[0, 1[$ (croyez à convergence de la série de $\ln \frac{1}{1-t}$ valant 1);

ii) et, d'après une suite de $f_k \geq 0$, une, pour tout $N > 0$

$$\left| \sum_{k=1}^N u_k \right| \leq (1 - (1-t)^n) \ln \frac{1}{1-t} \quad \text{intégrable sur } (0, 1)$$

On peut donc conclure à l'aide du thm d'émergence dominée faible, à

une version du test d'Euler MacLaurin, qui trouve son intérêt dans le fait que la série de Taylor $\frac{(k-1)!}{k \cdot (n+1) \dots (n+k)}$ est rapidement convergente.

Exercice 2: On commence par écrire l'EDO sous la forme du SD

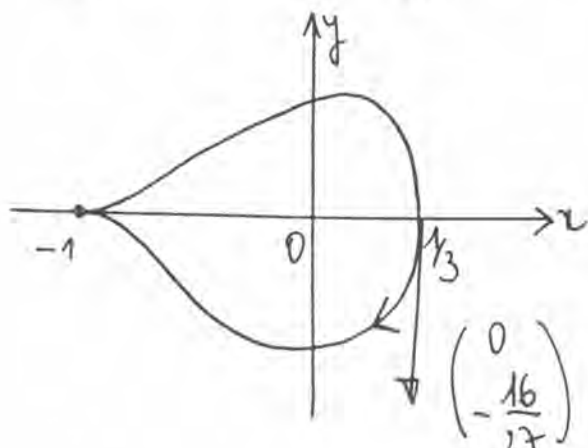
$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x(1+y)^2 \end{cases}$$

et déterminer $V(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4$ comme intégrale première: la trajectoire cherchée est par conséquent contenue dans la ligne de niveau $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / V(x, y) = V(\frac{1}{3}, 0) = \frac{1}{12}\}$, ce qui conduit à l'équation simplifiée

$$\begin{aligned} y^2 &= \frac{1}{6} - x^2 \left(\frac{x^2}{2} + \frac{4}{3}x + 1 \right) \\ &= -\frac{1}{6}(x+1)^3(3x-1) \end{aligned}$$

et permet de tracer la trajectoire comme le graphique de la fonction

$$y(x) = (x+1) \sqrt{\frac{(x+1)(3x-1)}{6}} \quad \text{symétrique par rapport à l'axe Ox :}$$



: champ au pt $(\frac{1}{3}, 0)$, qui permet d'orienter la trajectoire. (34)

remarque que $(-1, 0)$ est un équilibre P appartenant à la ligne de niveau, qui est donc constituée de $P \cup$ la trajectoire demandée. C3

Vient ensuite, pour $t > 0$

$$\int_{1/3}^{x(t)} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{(x+1)(1-3x)}} = -\frac{t}{\sqrt{6}}$$

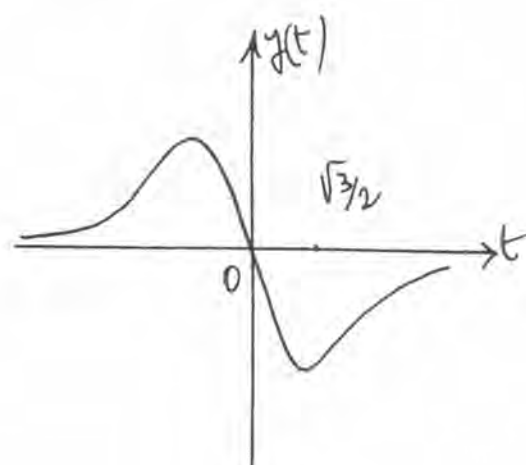
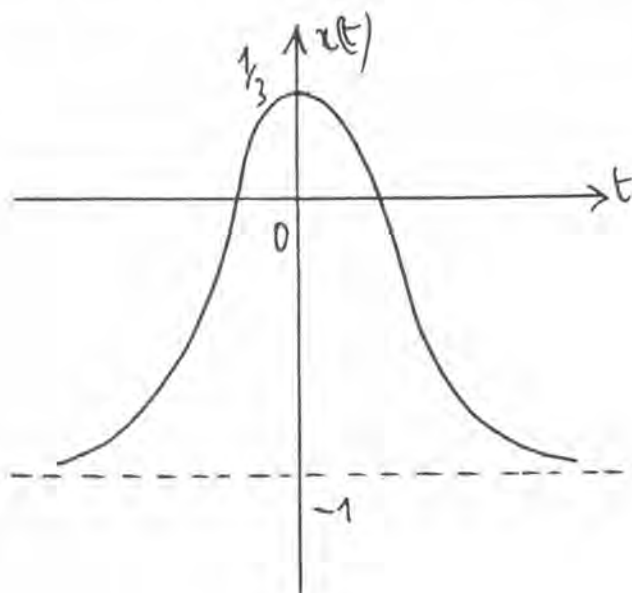
(car y devant < 0)

et un calcul de primitive donne

$$\sqrt{\frac{1-3x(t)}{1+x(t)}} = -\frac{2t}{\sqrt{6}} \quad \text{d'où} \quad x(t) = \frac{3-2t^2}{9+t^2}$$

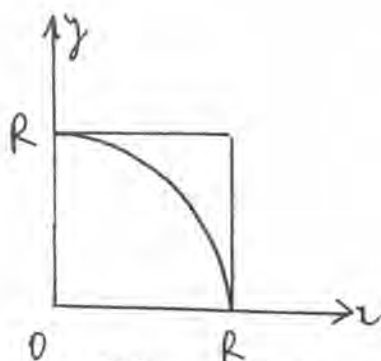
$$\text{puis : } y(t) = -\frac{48t}{(9+t^2)^2}$$

ce qui permet de tracer les courbes intégrales



Problème:

A) 1)



en notant $I_R = \iint_{\square_R} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^R e^{-x^2} dx$

et $I_R = \iint_{\square_R} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \frac{\pi}{2} \int_0^R e^{-\rho^2} \rho d\rho = \frac{\pi}{4} (1 - e^{-R^2})$

Il suffit de passer à la limite qd $R \rightarrow +\infty$ dans l'encadrement:

$$I_R < I_R < I_R \sqrt{2}$$

on obtient $\left(\int_0^\infty e^{-t^2} dt \right)^2 = \frac{\pi}{4}$ d'où $\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

2) a) suite de fonctions $f_n(x) = \int_0^n \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} dt$ est formée de fcts continues sur $\mathbb{R}$ et $\left| \int_n^\infty \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} dt \right| \leq \int_n^\infty \frac{dt}{1+t^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

montre que $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ sur $\mathbb{R}$: ainsi $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$.

b) chaque fonction f_n est dérivable, avec $f_n'(x) = - \int_0^n \frac{t^2}{1+t^2} e^{-xt^2} dt$

$\forall x \in \mathbb{R}$. en posant $g(x) = - \int_0^\infty \frac{t^2}{1+t^2} e^{-xt^2} dt$ on définit une fct

sur $]0, +\infty[$, avec

$$|g - f_n|(x) \leq \int_n^\infty e^{-xt^2} dt \leq \int_n^\infty e^{-\varepsilon t^2} dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

pour tout $x \geq \epsilon > 0$ posé: $f'_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g$ sur $[\epsilon, \infty[$, équi^{C5}

monte que f est dérivable sur $]0, +\infty[$, avec

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = - \int_0^{\infty} \frac{t^x}{1+t^x} e^{-xt^x} dt$$

$$\text{Ainsi,} \quad f'(x) - f(x) = - \int_0^{\infty} e^{-xt^x} dt = - \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{\infty} e^{-\theta^x} d\theta, \quad x > 0$$

$\theta = t\sqrt{x}$

c) en intégrant avec Lagrange, il vient $f(x) = K(x) e^x$ où

$$K'(x) = - \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \cdot \int_0^{\infty} e^{-\theta^x} d\theta$$

$$\text{d'où} \quad f(x) = k e^x + \int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt \cdot \int_0^{\infty} e^{-\theta^x} d\theta, \quad \forall x > 0$$

$$\text{avec } k \in \mathbb{R}. \quad \text{Comme } |f(x)| \leq \int_0^{\infty} \frac{dt}{1+t^x} = \pi_x \quad \forall x \geq 0, \quad k = 0$$

et nous vient, avec a)

$$f(0) = 2 \left(\int_0^{\infty} e^{-\theta^2} d\theta \right)^2$$

$$\text{d'où} \quad \int_0^{\infty} e^{-\theta^2} d\theta = \sqrt{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

$$3) a) \quad g'(x) = 2 \int_0^x e^{-t^2} dt \cdot e^{-x^2}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}$$

$$h'(x) = -2x \int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)} dt$$

$$b) \quad (g' + h')(x) = 0 \quad \text{d'où} \quad (g+h)(x) = (g+h)(0) = \frac{\pi}{4} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

c) et comme $|h(x)| \leq e^{-x} \cdot \frac{\pi}{4} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, d'après le critère de Weierstrass, on finit par avoir $C6$

$$\left(\int_0^{\infty} e^{-t} dt \right)^2 = \frac{\pi}{4}.$$

B) 1) -

2) pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$z_n(z) = \int_{\frac{1}{n}}^n e^{-(1-iz)t} \frac{dt}{\sqrt{t}}$$

on a $z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z$ sur $\mathbb{R}$ (car $\int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$ est une

intégrale convergente), z_n étant dérivable sur $\mathbb{R}$ avec

$$\forall z \in \mathbb{R}, \quad z_n'(z) = \int_{\frac{1}{n}}^n i \sqrt{t} e^{-(1-iz)t} dt \quad : \text{comme l'intégrale}$$

$$\int_0^{\infty} \sqrt{t} e^{-t} dt \text{ converge, } z_n' \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z' \text{ si } z'(z) = \int_0^{\infty} i \sqrt{t} e^{-(1-iz)t} dt, \text{ et}$$

est unique, z est dérivable avec, $\forall z \in \mathbb{R}, \quad z(z) = \int_0^{\infty} i \sqrt{t} e^{-(1-iz)t} dt$

$$z'(z) = \int_0^{\infty} i \sqrt{t} d\left(\frac{e^{-(1-iz)t}}{1-iz}\right) = \frac{-1}{2(z+i)} \cdot z(z).$$

3) soit, en séparant en Re et Im l'EDO aux valeurs complexes obtenue :

$$2(z+i) \cdot (u'(z) + i v'(z)) = -(u(z) + i v(z))$$

le SDO

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad A(z) = \frac{1}{2(z+1)} \begin{pmatrix} -z & -1 \\ 1 & z \end{pmatrix}, \quad z \in \mathbb{R}. \quad \text{C7}$$

4) -

c) 1) il s'agit d'une EDO linéaire d'ordre 2 à coefficients continus sur $\mathbb{R}$, quand on la met sous la forme canonique

$$y'' + a y' + by = 0$$

: d'après le théorème fondamental de la leçon 24, la conclusion suit.

2) a et b étant développables en série entière en 0, il doit en être de même de toutes les solutions (: Exercice 3, problème n°2).

En cherchant ces solutions via la technique d'identification:

$$y(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n, \quad \text{on est conduit à la relation d'équivalence}$$

$$\forall n \geq 0, \quad a_{n+2} = -\frac{(2n+3)(2n+1)}{4(n+1)(n+1)} a_n$$

qui montre que $R=1$.

3) il s'agit de justifier le calcul d'intégration terme à terme suivant

$$u(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \cos(xt) dt = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \cdot \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (xt)^{2n} dt \stackrel{*}{=}$$

$$* = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \int_0^\infty e^{-t} t^{2n-1/2} dt \cdot x^{2n}$$

$$\int_0^\infty e^{-t} t^{2n-1/2} dt = \Gamma(2n + \frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{4n}} \cdot \frac{(4n)!}{(2n)!} \quad \text{d'après la}$$

relation de duplication connue et le point A) qui permet de calculer $\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^\infty e^{-t} \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2 \int_0^\infty e^{-\theta^2} d\theta = \sqrt{\pi}$: ce qui donne

le DSE

$$u(x) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \cdot \frac{(4n)!}{((2n)!)^2} \cdot \left(\frac{x}{4}\right)^{2n}$$

de rayon de convergence $R=1$, comme on le voit avec Cauchy-d'Alembert.

On justifie donc le point (*):

i) le rayon de convergence de $\cos z$ étant ∞ , la série de fonctions de tz $u_n(t) = \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \cdot \frac{(-1)^n}{(2n)!} (xt)^{2n}$ converge (à x fixé)

uniformément sur tout qnt de $]0, \infty[$,

ii) de plus, pour tout $N > 0$, on a

$$\left| \sum_{n=0}^N u_n(t) \right| \leq \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \cdot \cosh(xt) \quad , \text{fonction intégrable}$$

sur $(0, \infty)$ pour $|x| < 1$: le thm de convergence dominée

conduit à conclure.

Ga opère de m par v .

4) en reprenant 2), ma, par exemple

$$\begin{cases} a_0 = u(0) = \int_0^\infty e^{-t} \frac{dt}{\sqrt{t}} = \sqrt{\pi} \\ a_1 = u'(0) = 0 \end{cases}$$

et la relation de récurrence donne bien

$$a_2 = -\frac{1.3}{1.2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{4}, \quad a_4 = \frac{1.3.5.7}{1.2.3.4} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{4^2} \dots$$

$$a_{2n} = (-1)^n \frac{1.3 \dots (4n-1)}{1.2 \dots 2n} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{4^n} = (-1)^n \frac{(4n)!}{((2n)!)^2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{4^{2n}}$$

Sommation ne immédiates ! : on cherche plutôt à intégrer l'E.O...

D) 1) rappel de Gauss

2) matrices aI et $N = b \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ commutant

on peut écrire $\exp \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = e^{aI} \times e^N$. On a évidemment $e^{aI} = e^a I$, tandis que $N^2 = b^2 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -b^2 I$

donne

$$\exp N = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n)!} b^{2n} \cdot I + \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} b^{2n+1} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et à la formule demandée.

C10

$$3) \int_0^t A(z) dz = \int_0^t \frac{1}{2(z^2+1)} \begin{pmatrix} -z & -1 \\ 1 & z \end{pmatrix} dz = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \ln(1+t^2) & -\frac{1}{2} \operatorname{Arctg} t \\ \frac{1}{2} \operatorname{Arctg} t & -\frac{1}{4} \ln(1+t^2) \end{pmatrix}$$

d'où, avec 2)

$$\begin{pmatrix} u(z) \\ v(z) \end{pmatrix} = \exp \int_0^z A(z) dz \cdot \begin{pmatrix} u(0) = \sqrt{\pi} \\ v(0) = 0 \end{pmatrix} = \dots$$

d'où tous les cols finis

$$\begin{cases} u(z) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt[4]{1+z^2}} \cos \frac{\operatorname{Arctg} z}{2} \\ v(z) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt[4]{1+z^2}} \sin \frac{\operatorname{Arctg} z}{2} \end{cases}, z \in \mathbb{R}$$

E) 1) en opérant sans scrupule, on a

$$\frac{dz}{z} = -\frac{dz}{2(z+i)} = -\frac{1}{2} \frac{z-i}{z^2+1} dz$$

qui donne

$$\ln z(z) = -\frac{1}{4} \ln(1+z^2) + \frac{i}{2} \operatorname{Arctg} z + C$$

soit, compte-tenu de $z(0) = \sqrt{\pi}$

$$z(z) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt[4]{1+z^2}} \cdot \exp \frac{i}{2} \operatorname{Arctg} z$$

2) qui donne, en séparant en Re et Im

$$u(z) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt[4]{1+z^2}} \cos \left(\frac{1}{2} \operatorname{Arctg} z \right), \quad v(z) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt[4]{1+z^2}} \sin \left(\frac{1}{2} \operatorname{Arctg} z \right) \quad (42)$$

expressions qu'on simplifie : on pose $y = \frac{1}{2} \operatorname{Arctg} z$,

$$x = \operatorname{tg} 2y \quad , \quad \cos 2y = \frac{1}{1+z^2} = 2\cos^2 y - 1 \dots$$

on obtient finalement

$$\begin{cases} u(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\sqrt{1+\sqrt{1+z^2}}}{\sqrt{1+z^2}} \\ v(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} \cdot \frac{z}{\sqrt{\sqrt{1+z^2}-1}} \end{cases}$$

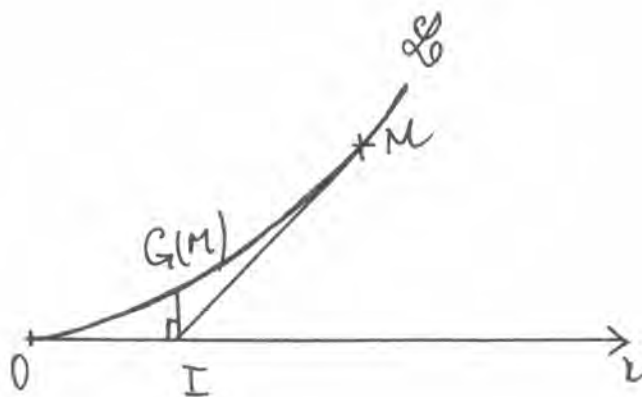
3) $\ln(z) \in \mathbb{C}$ n'a pas de sens (à ce niveau), mais

on peut vérifier que l'expression obtenue pour z satisfait l'ED

en $z \dots$

Problème n° 5.

Exercice 1 : déterminer une ligne plane homogène régulière L tangente au O à Ox et, telle que, pour tout point $M \in L$, le centre de gravité $G(M)$ de l'arc $\widehat{OM}$ se projette sur l'axe Ox selon le point d'intersection avec la tangente en M :



Exercice 2 : résoudre le problème de condition initiale

$$\begin{cases} \ddot{x} + x - \frac{3}{2}x^2 = 0 \\ x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = \frac{2}{3}\sqrt{3} \end{cases}$$

Exercice 3 : une urne contient n boules noires, et une boule blanche. On tire les boules les unes après les autres sans remise, et on note le rang N_1 de la boule blanche parmi les $(n+1)$ boules ainsi tirées. Quelle est la moyenne de N_1 ? (commencer par proposer une modélisation!)

Exercice 4 : montrer que, pour λ et μ proches de 1 et $|\alpha|$ et $|\beta|$ assez petits, l'application $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y) = (\lambda \cdot x + \alpha \sin(x+y), \mu \cdot y + \beta \sin x)$$

est un homéomorphisme.

Problème :

A) (Calcul de l'intégrale de Fresnel $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{it^2} dt$)

1) établir la convergence de l'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{it^2} dt$.

2) pourquoi peut-on écrire, à X et $Y > 0$ donné

$$\int_0^X \left(\int_0^Y e^{-xy} dy \right) \sin x dx = \int_0^Y \left(\int_0^X e^{-xy} \sin x dx \right) dy ?$$

3) calculer la valeur de $\int_0^X e^{-xy} \sin x dx$.

4) justifier le passage à la limite suivant

$$\lim_{\substack{Y \rightarrow +\infty \\ Y \in \mathbb{N}}} \int_0^X \left(\int_0^Y e^{-xy} dy \right) \sin x dx = \int_0^X \left(\int_0^{+\infty} e^{-xy} dy \right) \sin x dx$$

a' $X > 0$ fixé.

5) en déduire, à $X > 0$ fixé, la relation

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^X \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx = \int_0^{\infty} \frac{1}{1+y^4} \left((1 - \cos X \cdot e^{-y^2 X}) - y^2 \sin X \cdot e^{-y^2 X} \right) dy$$

6) justifier le passage à la limite à droite lorsque $X \rightarrow +\infty$ sur le signe $\int_0^{\infty}$, et en déduire la valeur de $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$.

7) déterminer la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dt$.

converge uniformément sur $\mathbb{R}$, et en déduire que

$$f(t) = \sum_{n \geq 1} \frac{\sin(2\pi n t)}{\sqrt{n}} \quad \text{est une fonction continue sur } \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z},$$

et 1-périodique.

2) en justifiant l'intégration terme à terme, montrer que le $n^{\text{ème}}$ coefficient de Fourier de f

$$b_n = 2 \int_0^1 f(t) \cdot \sin(2\pi n t) dt, \quad n \geq 1$$

est bien défini, et vaut $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

3) montrer que la fonction $h(t) = \sin(2\pi t) \cdot f(t)$ coïncide avec la fonction h définie en B) 3).

Que peut-on en déduire?

D) (calcul de la transformée de Fourier de φ)

Étant donnée une fonction F d'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{+\infty} |F| dt$ convergente, on définit la transformée de Fourier $\hat{F}$ en $\mathbb{R}$ par

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \hat{F}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi \xi t} F(t) dt$$

B) (étude d'une périodisée)

Pour $t \in \mathbb{R}^*$, on pose $\varphi(t) = \frac{\text{sgn}(t)}{\sqrt{|t|}}$.

1) montrer que $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{-N}^{+N} \varphi(t-k)$ définit une fonction

$g(t)$ pour $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, qui est 1-périodique et d'intégrale $\int_0^1 |g(t)| dt$ convergente.

2) en partant de l'intégration terme à terme, montrer que le $n^{\text{ième}}$ coefficient de Fourier de g

$$b_n = 2 \int_0^1 g(t) \sin(2\pi n t) dt, \quad n \geq 1$$

vaut $\frac{1}{\sqrt{n}}$. Comment s'écrit la série de Fourier de g ?

3) montrer que la fonction $h(t) = \sin(2\pi t) \cdot g(t)$ est une fonction continue 1-périodique. Comment obtenir son développement en série de Fourier?

C) (étude d'une série trigonométrique)

1) montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(2\pi n t) \sin(2\pi n t)}{\sqrt{n}}$

(47)

5) montrer que, dans le cas, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_{\frac{1}{n}}^n \hat{\phi}(z) \frac{dz}{z} = 2i \int_0^\infty \left(\int_{\frac{2\pi t}{n}}^{2\pi n t} \frac{\sin \theta}{\sqrt{\theta}} d\theta \right) \frac{\phi(t)}{\sqrt{2\pi t}} dt$$

6) en déduire que, pour toute $\phi \in \mathcal{S}$, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi \hat{\phi} dz = \int_{-\infty}^{+\infty} i\varphi \cdot \phi dz$$

(on note $\hat{\varphi} = i\varphi$ "au sens des distributions tempérées").

On dit d'une fonction ϕ qu'elle est $\mathcal{C}^\infty$ à décroissance rapide (ou vite : $\phi \in \mathcal{S}$) si

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \forall N \in \mathbb{N}, \quad \lim_{|t| \rightarrow \infty} |t|^N \phi^{(p)}(t) = 0.$$

1) montrer que, si $\phi \in \mathcal{S}$, alors $\hat{\phi} \in \mathcal{S}$.

2) pour $\phi \in \mathcal{S}$ et φ définie sur $\mathbb{R}^*$ en $\mathcal{B}$, montrer que l'intégrale généralisée

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \hat{\phi}(x) dx \quad \text{converge.}$$

3) vérifier que si $\phi \in \mathcal{S}$ est une fonction paire (respectivement impaire), sa transformée de Fourier est définie par

$$\hat{\phi}(\xi) = 2 \int_0^{\infty} \cos(2\pi \xi t) \cdot \phi(t) dt \quad (\text{resp. } 2i \int_0^{\infty} \sin(2\pi \xi t) \cdot \phi(t) dt)$$

4) en déduire que, si $\phi \in \mathcal{S}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \hat{\phi}(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{si } \phi \text{ est paire} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \int_{\frac{1}{n}}^n \hat{\phi}(x) \frac{dx}{\sqrt{x}}, & \text{si } \phi \text{ est impaire} \end{cases}$$

Exercice 1: soit $y = f(x)$ l'équation cartésienne de la ligne cherchée : $f(0) = f'(0) = 0$ et, comme

$$\overline{OI} = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \quad (\text{si } f'(x) \neq 0)$$

$$x_G = \frac{\int_{\widehat{OM}} x \, ds}{l(\widehat{OM})} = \frac{\int_0^2 t \sqrt{1+(y')^2} \, dt}{\int_0^2 \sqrt{1+(y')^2} \, dt}$$

f doit être solution de l'EDO :

$$\left(x - \frac{y}{y'}\right) \cdot \int_0^x \sqrt{1+(y')^2} \, dt = \int_0^x t \sqrt{1+(y')^2} \, dt$$

qui s'écrit (en supposant f régulière) en dérivant deux fois, ce qui donne

$$\int_0^x \sqrt{1+(y')^2} \, dt = \frac{y'}{y''} \sqrt{1+(y')^2} \quad \text{puis} \quad (1+(y')^2) y''' = (y'')^2 y'$$

$$\text{soit} \quad \frac{y'''}{y''} = \frac{y'' y'}{1+(y')^2} \quad \text{ce qui donne par quadrature}$$

$$y'' = C \sqrt{1+(y')^2} \quad \text{puis (posant } y' = \sinh u) \text{ par une}$$

$$\text{nouvelle quadrature} \quad y' = \sinh(Cx + D) \quad \text{où } y'(0) = 0 \text{ donne}$$

$$D = 0. \text{ Ainsi } y(x) = \frac{1}{C} \cosh(Cx) + A \quad \text{avec } y(0) = 0 \text{ induit}$$

à la solution $f(x) = \frac{1}{C} (\text{ch } Cx - 1)$. L est une chaînette. C2

Exercice 2: en écrivant l'EDO sous la forme du SD

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + \frac{3}{2}x^2 \end{cases}$$

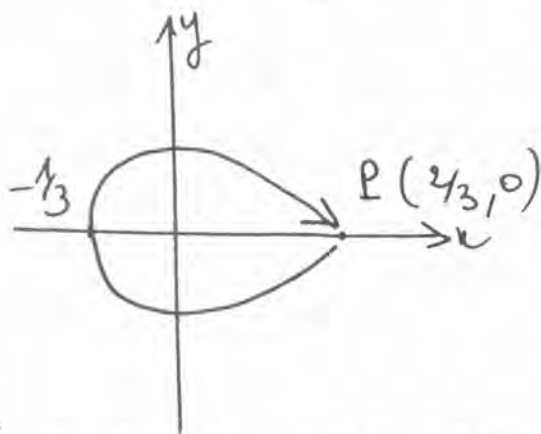
on observe que $V(x, y) = y^2 + x^2 - x^3$ est une intégrale première.

la trajectoire cherchée est donc contenue dans la ligne de niveau

$$\left\{ y^2 + x^2 - x^3 = \frac{4}{27} \right\}$$

soit l'équation implicite $y^2 = (x - \frac{2}{3})^2 \cdot (x + \frac{1}{3})$, $x \geq -\frac{1}{3}$

d'où le tracé de la trajectoire



et l'équation à variables séparable d'ordre 1 selon x

$$\dot{x} = \left(\frac{2}{3} - x\right) \cdot \sqrt{x + \frac{1}{3}}$$

Une quadrature conduit alors au résultat

$$\int_0^{x(t)} \frac{dx}{\left(\frac{2}{3} - x\right) \cdot \sqrt{x + \frac{1}{3}}} = t$$

donnant $x(t) = -\frac{1}{3} + \left(\frac{(2+\sqrt{3})e^t - 1}{(2+\sqrt{3})e^t + 1} \right)^2$ ($\xrightarrow[t \rightarrow \pm\infty]{} \pm \frac{2}{3}$, position d'équilibre)

Exercice 3: en désignant par $\mathcal{U} = \{N_1, \dots, N_n, B\}$ le contenu d'une urne $\mathcal{U}$, un événement élémentaire ω est une permutation de $\mathcal{U}$;
comme card $\mathcal{U}_{n+1} = (n+1)!$, on pose $P(\omega) = \frac{1}{(n+1)!} \forall \omega$.

Ainsi $(\Omega, \mathcal{F}, P) = (\mathcal{U}_{n+1}, \mathcal{P}(\mathcal{U}_{n+1}), P)$ où

$$\forall A \subset \Omega, \quad P(A) = \frac{1}{(n+1)!} \cdot \text{card}(A)$$

On considère donc la variable aléatoire $N_1: \begin{array}{l} \Omega \longrightarrow \{1, 2, \dots, n+1\} \\ \omega \longmapsto \text{rang de } B \end{array}$

(N_1 est évidemment mesurable!). Comme, pour $k \in \{1, \dots, n+1\}$,

on a

$$\text{card} \{ \omega / N_1(\omega) = k \} = A_n^{k-1} \times 1 \times (n-k+1)!$$

la loi de N_1 est définie par

$$P(N_1 = k) = \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{(n-k+1)!} \cdot (n-k+1)! = \frac{1}{n+1}$$

: il s'agit d'une loi uniforme, d'espérance

$$\mathbb{E}(N_1) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{n+1} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{n+2}{2}. \quad (53)$$

Exercice 4: adoptant sur $\mathbb{R}^2$ la norme $\|\cdot\|_\infty$, on voit que pour $g = I - f$,

$$\|g(x, y) - g(x', y')\|_\infty \leq (1 - \lambda + 1 - \mu + 2|a| + |b|) \| (x, y) - (x', y') \|_\infty$$

et, par conséquent, dans les conditions de l'énoncé, pour tout $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$ donné, $(x, y) \mapsto (X, Y) + g(x, y)$ est une contraction de $\mathbb{R}^2$: la conclusion d'une application du théorème du point fixe et de la remarque sur la dépendance continue du point fixe.

Problème: A) 1) la fonction $f(x, y) = e^{-xy} \sin x$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ et $\frac{\partial f}{\partial x}$, le $\frac{\partial f}{\partial y}$ (17).

$$2) \int_0^1 e^{it^2} dt \text{ est définie; } \int_1^T e^{it^2} dt = \int_1^T \frac{d(e^{it^2})}{2it} =$$

$$= \frac{e^{it^2}}{2it} \Big|_1^T + \int_1^T \frac{e^{it^2}}{2it^2} dt \quad \text{et l'intégrale } \int_1^\infty \frac{dt}{t^2} \text{ converge.}$$

il résulte que $\int_0^\infty e^{it^2} dt$ converge, comme $\int_{-\infty}^0 e^{it^2} dt$ par symétrie.

$$3) \int_0^X e^{-iy^2} \sin x \, dy = \operatorname{Im} \left(\int_0^X e^{(i-y^2)x} \, dy = \frac{e^{(i-y^2)x} - 1}{i-y^2} \right) =$$

$$-\frac{1}{1+y^4} \left((e^{-y^2 X} \cos X - 1) + y^2 e^{-y^2 X} \sin X \right).$$

$$4) \int_0^Y e^{-iy^2} \, dy = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{Y\sqrt{x}} e^{-t^2} \, dt \xrightarrow{(Y \rightarrow +\infty)} \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{\infty} e^{-t^2} \, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$$

($x > 0, y = t/\sqrt{x}$)

la suite de fonctions $(f_Y(x) = \int_0^Y e^{-iy^2} \, dy)_{Y \in \mathbb{N}}$ converge vers $(\sqrt{\pi}/2\sqrt{x})$

uniformément sur tout qst de $]0, X]$ (car, pour $x \geq \varepsilon > 0$,

$$\text{ma } \int_{Y\sqrt{x}}^{\infty} e^{-t^2} \, dt \leq \int_{Y\sqrt{\varepsilon}}^{\infty} e^{-t^2} \, dt \xrightarrow{Y \rightarrow +\infty} 0) \quad \text{et, par conséquent}$$

la suite de fcts $(x \mapsto f_Y(x) \cdot \sin x)$ converge uniformément vers

$(x \mapsto \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{\sin x}{\sqrt{x}})$ dans les mêmes conditions. En outre, pour $x > 0$,

$$|f_Y(x) \cdot \sin x| \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{|\sin x|}{\sqrt{x}} \quad \text{sur } \int_0^X \frac{|\sin t|}{\sqrt{t}} \, dt < \infty$$

une intégrale d'Abel : on peut donc conclure avec le théorème de convergence dominée.

5), 6) posant $g_X(y) = \frac{1}{1+y^4} \left((1 - \cos X \cdot e^{-y^2 X}) - y^2 \sin X e^{-y^2 X} \right)$

il vient $\lim_{\substack{X \rightarrow +\infty \\ X \in \mathbb{N}}} g_X(y) = \frac{1}{1+y^4}$ et

$$|g_X(y) - \frac{1}{1+y^4}| = \left| \frac{1}{1+y^4} e^{-y^2 X} (\cos X + y^2 \sin X) \right| \leq \frac{1+y^2}{1+y^4} e^{-\varepsilon^2 X}$$

si $y \geq \varepsilon > 0$, ce qui montre que la convergence est uniforme sur tout $[\varepsilon, +\infty[$ avec $\varepsilon > 0$; en outre, comme

$$|g_X(y)| \leq \frac{1+y^2}{1+y^4} \text{ avec } \int_0^{\infty} \frac{1+y^2}{1+y^4} dy < +\infty, \text{ il y a}$$

convergence dominée: le théorème s'applique. On obtient donc

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx = \int_0^{\infty} \frac{dy}{1+y^4} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4} \quad (\text{par identification}$$

en éléments réels) : $\int_0^{\infty} \frac{x-1}{\sqrt{x}} dx = \frac{1}{2} \sqrt{4\pi}.$

7) en opérant à partir de $e^{-y^2} \cos y$, on obtient la même valeur pour $\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx$ (car $\int_0^{\infty} \frac{y^2 dy}{1+y^4} = \int_0^{\infty} \frac{dy}{1+y^4}$ par $y = 1/y$)

D'où, finalement $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dt = \sqrt{\pi} \cdot e^{i\pi/4}$

B) 1) si $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, et pour $N > |t|$, on peut écrire C7

$$\begin{aligned} \sum_{-N}^N \varphi(t-k) &= \sum_{|k| < |t|} \varphi(t-k) + \sum_{|t| < |k| \leq N} \varphi(t-k) \\ &= \sum_{|k| < |t|} \varphi(t-k) + \sum_{|t| < k \leq N} (\varphi(t-k) + \varphi(t+k)) \end{aligned}$$

$$\text{or } \varphi(t-k) + \varphi(t+k) = \frac{-1}{\sqrt{k-t}} + \frac{1}{\sqrt{k+t}} = \frac{-2t}{\sqrt{k-t}(\sqrt{k+t} + \sqrt{k-t})}$$

est le t.g. d'une série absolument convergente. Ceci assure l'existence de la limite simple sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. De plus, si $|t| \leq T$,

$$\left| \frac{-2t}{\sqrt{k-t}(\sqrt{k+t} + \sqrt{k-t})} \right| \leq \frac{2T}{\sqrt{k-T^2} \cdot 2\sqrt{k-T}} \quad \text{pour } k > T$$

ce qui permet d'aboutir à la convergence uniforme sur toute partie $[-T, T] \setminus \mathbb{Z}$: si $t \in]0, 1[$, on peut donc écrire

$$g(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{1}{\sqrt{t-1}} \right) + \frac{1}{\sqrt{t+1}} + h(t)$$

or h est le somme d'une série de fonctions continues sur $[0, 1]$ uniformément convergente sur $[0, 1]$ et, à ce titre, continue sur $[0, 1]$

: Comme $\int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{t}} + \frac{1}{\sqrt{t-1}} \right) dt$ converge, $\int_0^1 |g(t)| dt$ converge aussi.

2) il s'agit de justifier le calcul suivant :

$$2 \int_0^1 \sum_{-\infty}^{\infty} \varphi(t-k) \cdot \sin(2\pi n t) dt = 2 \sum_{-\infty}^{\infty} \int_0^1 \varphi(t-k) \sin(2\pi n t) dt$$

(où la somme est entendue au sens $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{-N}^N$)

car alors, il vient

$$\int_0^1 \varphi(t-k) \sin(2\pi n t) dt = \int_{-k}^{-k+1} \varphi(t) \sin(2\pi n t) dt$$

(t = k + t) -k

$$\text{donc} \quad b_n = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) \sin(2\pi n t) dt = 4 \int_0^{\infty} \frac{\sin(2\pi n t)}{\sqrt{t}} dt = \frac{4}{\sqrt{2\pi n}} \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$$

et on conclut voir A) 6).

Quant à la justification du passage à la limite

$$\int_0^1 \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{-N}^N = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{-N}^N \int_0^1$$

il suffit d'inverser la dépendance de g avec h , puisque la suite de h converge uniformément sur $[0, 1]$.

3) g étant impaire, sa série de Fourier s'écrit donc

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(2nt)}{\sqrt{n}}.$$

3) en linéarisant.

C) 1) comme $2\sin nt \sin 2nt = \cos(2n-1)nt - \cos(2n+1)nt$,
une transformation d'Abel donne, pour $p > q > 1$

$$\begin{aligned} 2 \sum_q^p \frac{\sin(nt) \cdot \kappa(2nt)}{\sqrt{n}} &= \frac{\cos(2q-1)nt}{\sqrt{q}} - \frac{\cos(2p+1)nt}{\sqrt{p}} \\ &+ \sum_{q+1}^p \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n-1}} \right) \cos(2n-1)nt \end{aligned}$$

si bien que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\left| \sum_q^p \frac{\kappa(nt) \cdot \kappa(2nt)}{\sqrt{n}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{q}}$$

et critère de Cauchy permet de conclure.

La fonction $f_1(t) = \sin nt \cdot \sum_{n \geq 1} \frac{\kappa(2nt)}{\sqrt{n}}$ est donc continue

sur $\mathbb{R}$ et, pour $t \notin \mathbb{Z}$, $f(t) = f_1(t) / \kappa(nt)$ est bien

définie : f est continue sur $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

2) il s'agit de justifier l'opérateur inverse :

$$2 \int_0^1 \sin(2\pi nt) \cdot \sum_{m \geq 1} \frac{\sin(2\pi mt)}{\sqrt{m}} dt = \sum_{m \geq 1} \frac{1}{\sqrt{m}} \int_0^1 (\cos 2\pi(n-m)t - \cos 2\pi(n+m)t) dt$$

qui donne $\frac{1}{\sqrt{m}}$:

d'une part, la suite converge uniformément sur tout compact $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$ de $]0,1[$ (car 1) et $\sin(\pi t) \geq f(\pi t)$)

d'autre part, toujours d'après 1) (avec $q=1 < N=p$), on a

$$\left| \sum_{m=1}^N \frac{\sin(2\pi nt) \cdot \sin(2\pi mt)}{\sqrt{m}} \right| \leq \frac{|\sin(2\pi nt)|}{\sin \pi t}$$

où la fonction à droite est $\mathcal{C}^0([0,1])$: on peut donc appliquer le théorème de convergence dominée.

3) d'après Parseval, $h=h$.

D) 1) on considère la suite de fonctions $\psi_n : \xi \mapsto \int_{-n}^n e^{-i\pi \xi t} \phi(t) dt$

Il s'agit de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$, avec, pour tout $p \in \mathbb{N}$

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \psi_n^{(p)}(\xi) = \int_{-n}^n e^{-i\pi \xi t} \cdot (-i\pi t)^p \phi(t) dt$$

Comme $|\phi(t)| \leq \frac{C_p}{(1+|t|)^{p+2}}$ par l'hypothèse $\phi \in \mathcal{S}$, ^{C11}

la suite $(\psi_n^{\otimes p})_{n \geq 1}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_z$, ce qui permet de montrer que $\hat{\phi}$ est de classe $\mathcal{C}^p$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

$$\text{D'autre part, } \hat{\phi}'(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi \xi t} \cdot d\phi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} 2i\pi \xi \cdot e^{-2i\pi \xi t} \phi(t) dt$$

montrant que $\hat{\phi}'(\xi) = 2i\pi \xi \cdot \hat{\phi}(\xi)$ et, plus généralement,

$$\hat{\phi}^{(p)}(\xi) = (2i\pi \xi)^p \cdot \hat{\phi}(\xi) : \text{ comme } \lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \hat{\phi}(\xi) = 0, \text{ on conclut.}$$

2) Comme $|\phi(t)| \leq \frac{C}{1+|t|}$ et que $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$ converge;

3) en particulier $\hat{\phi}$ a la propriété de ϕ , d'où 4).

5) il s'agit de justifier l'intervention des ordres d'intégration:

$$\int_{\frac{1}{n}}^n \int_0^\infty \phi(t) \sin(2\pi t x) dt \cdot \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int_0^\infty \left(\int_{\frac{1}{n}}^n \frac{\sin(2\pi t x)}{\sqrt{x}} dx \right) \phi(t) dt$$

on a alors

$$\int_{\frac{1}{n}}^n \left(\int_{\frac{2\pi t}{n}}^{2\pi n t} \frac{\sin \theta}{\sqrt{\theta}} d\theta \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} dt = \int_{\frac{2\pi t}{n}}^{2\pi n t} \frac{\sin \theta}{\sqrt{\theta}} d\theta.$$

($\theta = 2\pi t x$)
 $t > 0$

On suit par cela la demande de la partie A) :

pour $0 < \varepsilon < T$, on peut écrire

$$\int_{\frac{1}{n}}^n \left(\int_{\varepsilon}^T \phi(t) \sin(2\pi t n) dt \right) \frac{dn}{\sqrt{n}} = \int_{\varepsilon}^T \left(\int_{\frac{1}{n} \cdot 2\pi t}^{n \cdot 2\pi t} \frac{\sin \theta}{\sqrt{\theta}} d\theta \right) \frac{\phi(t)}{\sqrt{2\pi t}} dt$$

prenant $\varepsilon = \frac{1}{k}$, $T = k$ avec $k \in \mathbb{N}$,

$$f_k(n) \doteq \int_{\frac{1}{k}}^k \phi(t) \sin(2\pi t n) dt \xrightarrow{(k \rightarrow \infty)} \int_0^{\infty} \phi(t) \sin(2\pi t n) dt$$

avec

$$\left| \int_0^{\frac{1}{k}} + \int_k^{\infty} \phi(t) \sin(2\pi t n) dt \right| \leq \int_0^{\frac{1}{k}} + \int_k^{\infty} |\phi| dt \rightarrow 0$$

ce qui montre qu'il y a convergence uniforme sur $\left[\frac{1}{n}, n\right]_n$.

) en posant $g_n(t) = \int_{2\pi t/n}^{2\pi n t} \frac{\sin \theta}{\sqrt{\theta}} d\theta$, comme, pour $t > 0$

$$g_n(t) \xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} \int_0^{\infty} \frac{\sin \theta}{\sqrt{\theta}} d\theta = \frac{1}{2} \sqrt{2\pi} \quad \text{d'après A)},$$

il s'agit de justifier le passage à la limite sous le signe $\int_0^{\infty} dt$:

d'autre part, comme

$$\left| \int_0^{\frac{2\pi t}{n}} \frac{\sin \theta}{\sqrt{\theta}} d\theta \right| \leq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\pi t}{n}} \quad \text{et}$$

$$\left| \int_{\frac{2\pi t}{n}}^{\infty} \frac{\sin \theta}{\sqrt{\theta}} d\theta \right| = \left| \int_{\frac{2\pi t}{n}}^{\infty} \frac{d(-\cos \theta)}{\sqrt{\theta}} \right| \leq \frac{2}{\sqrt{2\pi t}}$$

la suite $(g_n)_{n \geq 1}$ converge vers $\frac{\sqrt{2\pi}}{2}$ uniformément sur tout compact de $]0, \infty[$;

d'autre part, comme

$$\begin{aligned} |g_n(t)| &\leq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\pi t}{n}} + \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} + \frac{1}{2} \sqrt{2\pi} \\ &\leq \frac{1}{2} \sqrt{2\pi t} + \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} + \frac{1}{2} \sqrt{2\pi} \quad (n \geq 1) \end{aligned}$$

on a

$$\left| g_n(t) \cdot \frac{\phi(t)}{\sqrt{2\pi t}} \right| \leq \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{t} + \frac{1}{2\sqrt{t}} \right) |\phi(t)|$$

car, comme $\phi \in \mathcal{F}$ est impaire ($\frac{\phi(t)}{t} \xrightarrow{(0)} \phi'(0)$), la fonction de droite possède une $\int_0^\infty$ croissante : il y a donc convergence

dominée, et on peut conclure, d'abord pour ϕ impaire ; pour ϕ

puisque la fonction est équilibrée et comme $\phi = \frac{1}{2}(\phi + \check{\phi}) + \frac{1}{2}(\phi - \check{\phi})$ (général) (63)

Problème n° 6

Exercice 1: montrer que, pour $\alpha > 0$ fixé,

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-t \cdot n^{\alpha}} \underset{(t \rightarrow 0+)}{\sim} \frac{1}{\alpha} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) t^{-\frac{1}{\alpha}}.$$

Exercice 2: montrer que les deux fonctions d'une variable réelle

$$f(x) = \int_0^{\infty} \frac{\sin(tx)}{e^t - 1} dt \quad \text{et} \quad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{x^2 + n^2}$$

sont $\in C^1$ sur leur domaine de définition respectif, et que l'une prolonge l'autre.

Exercice 3: une urne contient n boules noires et 2 boules blanches B_1 et B_2 . On tire les boules une à une sans remise. Soit N_1 le rang de la première boule blanche, N_2 celui de la seconde. Soit R_1 le rang de B_1 , R_2 celui de B_2 .

a) proposer une modélisation.

- 1) exprimer N_1 et N_2 à l'aide de R_1 et R_2 .
- 2) montrer que R_1 et R_2 suivent la même loi, à déterminer.
- 3) calculer la loi de (R_1, R_2) , puis celle de (N_1, N_2) , et enfin celle de N_1 .
- 4) Quelles sont les espérances de N_1 et N_2 ?

Exercice 4: tracer l'allure de la trajectoire de la particule qui part (à $t=0$) du point $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ du plan, et qui est régie par le système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = -x + 4y \end{cases}.$$

Problème 1: (série de Fourier, série entière, et polynômes orthogonaux)

A) so $\lambda \in]-1, 1[$ fixé, on considère la fonction

$$f(\lambda, t) = \frac{1}{1 - 2\lambda \cos t + \lambda^2}$$

de la variable réelle t .

1) expliquer pourquoi $f(\lambda, \cdot)$ coïncide avec son développement en série de Fourier.

2) montrer que la suite $(a_n)_{n \geq 0}$ de coefficients de Fourier satisfait à la relation de récurrence

$$\forall n \geq 1, \quad \lambda a_{n+1} - (1 + \lambda^2) a_n + \lambda a_{n-1} = 0$$

3) en déduire le développement en série de Fourier de $f(\lambda, \cdot)$.

B) à $t \in \mathbb{R}$ fixé, on considère la fonction $f(\cdot, t)$ précédente.

1) montrer que $f(\cdot, t)$ est développable en série entière au voisinage de l'origine: on décomposera la fraction rationnelle en éléments simples, et on précisera le rayon de convergence de la série entière obtenue.

2) retrouver le développement précédent: i) à l'aide d'un produit de séries, ii) à l'aide de la partie A).

C)

1) pour $z \in]-1, 1[$, $z = \cos t$ avec $t \in]0, \pi[$, on pose

$$T_n(z) = \cos(nt)$$

pour $n \in \mathbb{N}^*$: montrer qu'on

$$P_n(z) = \frac{\sin((n+1)t)}{n+1}$$

définit ainsi deux polynômes de degré n .

2) relier ces phénomènes aux développements obtenus en A) et B), et expliquer leur relation.

3) montrer que P_n est solution de l'EDO

$$(1-x^2)y'' - 3xy' + n(n+2)y = 0$$

et déterminer pour T_n une EDO analogue.

4) comment pourrait-on établir $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ à partir de l'EDO précédente? transformer l'EDO en posant

$$y(x) = \frac{z(t)}{\sin t} \quad \text{où } x = \cos t \in]-1, 1[\quad , \text{ et}$$

donner la forme de la solution générale sur l'intervalle $] -1, 1[$.

D) On considère l'opérateur différentiel D défini sur $\mathcal{C}^2([-1, 1])$

par

$$Df(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{d}{dx} \left((1-x^2)^{3/2} \cdot f' \right)$$

1) quel est le spectre de $D|_{\mathbb{R}_n[X]}$?

2) rappeler pourquoi $(f, g) \doteq \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} f(x) g(x) dx$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{C}^0([-1, 1])$. montrer que $D|_{\mathbb{R}[X]}$

est un opérateur symétrique sur $\mathbb{R}[X]$ (muni de $(\cdot, \cdot)$).

vérifier que $(P_n)_{n \geq 0}$ est une suite orthogonale pour $(\cdot, \cdot)$.

3) montrer que toute fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[-1, 1]$ peut se développer sous la forme

$$\forall x \in [-1, 1], \quad f(x) = \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (f, P_n) \cdot P_n(x)$$

(on montrera que (f, P_n) est le $(n+1)^{\text{ième}}$ coefficient de Fourier d'une fonction 2π -périodique impaire, et on utilisera le fait, facile à établir par récurrence, que $|P_n(x)| \leq n+1 \quad \forall x \in [-1, 1]$).

Problème 2: (Série de Fourier, transformation de Fourier)

1) montrer que la fonction $\frac{1}{\cosh(t)}$ possède une transformée de Fourier, qui s'écrit

$$\widehat{\frac{1}{\cosh t}}(\xi) = 2 \int_0^{\infty} \frac{\cos(2\xi t)}{\cosh(t)} dt$$

2) montrer que

$$\widehat{\frac{1}{\cosh t}}(\xi) = \frac{4}{\pi} \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{2n+1}{(2n+1)^2 + 4\xi^2}$$

3) soit f_α la fonction 2π -périodique valant $\sin(\alpha t)$
 pour $|t| < \pi$ ($\alpha > 0$ fixé): écrire son développement en
 série de Fourier

4) en déduire l'expression de $\widehat{\frac{1}{\cosh t}}$.

Exercice 1: Comme, à $t > 0$ fixé, $e^{-tx^\alpha} \rightarrow 0$ lorsque $x \nearrow +\infty$,
 et que $\int_0^\infty e^{-tx^\alpha} dx$ converge (car $e^{-tx^\alpha} = o(\frac{1}{x})$), on
 est assuré de la convergence de la série, et on a l'encadrement

$$\int_1^\infty e^{-tx^\alpha} dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} e^{-tn^\alpha} \leq \int_0^{+\infty} e^{-tx^\alpha} dx$$

$$\text{Or, } \int_0^\infty e^{-tx^\alpha} dx = \frac{1}{\alpha} t^{-\frac{1}{\alpha}} \int_0^\infty e^{-y} y^{\frac{1}{\alpha}-1} dy = \frac{1}{\alpha} t^{-\frac{1}{\alpha}} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)$$

($y = tx^\alpha, t > 0$)

ce qui permet de conclure.

Exercice 2: 1) l'intégrale généralisée converge pour tout $x \in \mathbb{R}$,
 et définit donc $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_0^n \frac{\sin(tx)}{e^t - 1} dt \right) = f_n(x)$ où

chaque fonction f_n est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, tandis que

$$\left| \int_n^\infty \frac{\sin(tx)}{e^t - 1} dt \right| \leq \int_n^\infty \frac{dt}{e^t - 1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

mette que $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ sur $\mathbb{R}$, et $f'_n(x) = \int_0^n \frac{t \cos(tx)}{e^t - 1} dt$

$$\text{on a } \left| \int_n^\infty \frac{t \cos(tx)}{e^t - 1} dt \right| \leq \int_n^\infty \frac{t dt}{e^t - 1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{permet de conclure}$$

au fait que f est $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, avec, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \int_0^\infty \frac{x \cos(tx)}{e^t - 1} dt$. $\mathcal{C}^2$

2) Comme $\left| \frac{x}{x^2 + n^2} \right| \leq \frac{A}{n^2}$ par MSA, la série qui définit g sur $\mathbb{R}$ converge normalement sur tout qtd de $\mathbb{R}$: g est donc continue sur $\mathbb{R}$. De plus, $\left| \left(\frac{x}{x^2 + n^2} \right)' \right| = \left| \frac{n^2 - x^2}{(x^2 + n^2)^2} \right| \leq \frac{n^2 + A^2}{n^4}$ par MSA, on voit que la série dérivée converge normalement sur tout qtd de $\mathbb{R}$: g est donc dérivable, d'où $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

3) Le calcul formel

$$f(x) = \int_0^\infty \sin(tx) \cdot \sum_{n \geq 0} e^{-(n+1)t} dt = \sum_{n \geq 0} \int_0^\infty e^{-(n+1)t} \sin(tx) dt$$

$$\stackrel{a)}{=} \int_0^\infty \sum_{n \geq 0} e^{-(n+1-it)x} dt = \int_0^\infty \frac{n+1+ix}{(n+1)^2 + x^2} dt = \frac{x}{(n+1)^2 + x^2}$$

se justifie facilement à l'aide de théorème de convergence dominée, car

i) la série de fonctions converge normalement sur tout $[\varepsilon, +\infty[$

avec $\varepsilon > 0$

ii) $\left| \sum_{n \geq 0} e^{-(n+1)t} \cdot \sin(tx) \right| \leq \frac{|\sin(tx)|}{e^t - 1}$ telle que $\int_0^\infty < +\infty$

Ainsi a-t-on $f = g$ sur $\mathbb{R}$.

4) Si l'on veut sortir de $\mathbb{R}$, la convergence absolue de l'intégrale

$$\int_0^{\infty} \left| \frac{\sin(tz)}{e^t - 1} \right| dt \quad \text{ici est assurée que pour } |2\operatorname{Im} z| < 1, \quad C3$$

tandis que la série qui définit g prend un sens sur $\mathbb{C} \setminus i\mathbb{Z}$.

Exercice 3:

g) si $\mathcal{U} = \{N_1, \dots, N_m, B_1, B_2\}$ (est le contenu de l'urne),
un événement élémentaire ω sera une permutation de $\mathcal{U}$;
 on munit l'ensemble Ω de ces permutations de la tribu $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ de toutes ses parties, on pose $\forall \omega \in \Omega, P(\omega) = \frac{1}{(n+2)!}$

puis $\forall A \in \mathcal{F}(\Omega), P(A) = \frac{1}{(n+2)!} \cdot \operatorname{card}(A)$:

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est un espace de probabilité.

$$1) N_1 = R_1 \wedge R_2, \quad N_2 = R_1 \vee R_2.$$

$$2) R_1 : \Omega \longrightarrow \{1, 2, \dots, n+2\} \quad \text{et} \quad \forall k \in \{1, \dots, n+2\}$$

on a

$$\{R_1 = k\} = \{\omega \in \Omega / \omega_k = B_1\}$$

$$\text{d'cardinal } (n+1)! : P(R_1 = k) = \frac{1}{n+2} \quad \forall k \in \{1, \dots, n+2\}$$

(la VA R_1 suit donc une loi uniforme). Rien est de même
 de R_2 .

$$3) (R_1, R_2) : \Omega \longrightarrow \{1, 2, \dots, n+2\}^2 \setminus \Delta \quad \text{et, pour } 1 \leq k < l \leq n+2$$

card $\{R_1=h, R_2=k\} = n!$, à savoir que

C4

$$P(R_1=h, R_2=k) = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

On a encore $\{(N_1, N_2) = (h, k)\} = \{R_1=h, R_2=k\} \cup \{R_1=k, R_2=h\}$

à savoir que $P(N_1=h, N_2=k) = \frac{2}{(n+1)(n+2)}$. Par conséquent,

pour $h \in \{1, \dots, n+1\}$, il vient:

$$\begin{aligned} P(N_1=h) &= P\left(\bigcup_{k=h+1}^{n+2} \{N_1=h, N_2=k\}\right) \\ &= \frac{2}{(n+1)(n+2)} \cdot (n+2-h) \end{aligned}$$

ce qui détermine la loi de N_1 .

$$4) \mathbb{E}(N_1) = \sum_{h=1}^{n+1} h \cdot P(N_1=h) = \dots = \frac{n+3}{3}$$

$$\mathbb{E}(N_2) = 2 \cdot \mathbb{E}(N_1).$$

Exercice 4: 3 est vp d'ordre 2 de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ du SD.

$$\text{Ker}(A - 3I) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \doteq \vec{v}_1 \quad \text{et} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{vérifiant} \quad (A - 3I)\vec{v}_2 = \vec{v}_1.$$

La matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ triangulise A sous la forme de Jordan $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

et la solution générale du SD s'écrit

$$\vec{x}(t) = A \cdot e^{3t} \vec{v}_1 + B e^{3t} (\vec{v}_2 + t \vec{v}_1)$$

Compte-tenu de la condition initiale, la solution demandée s'écrit donc

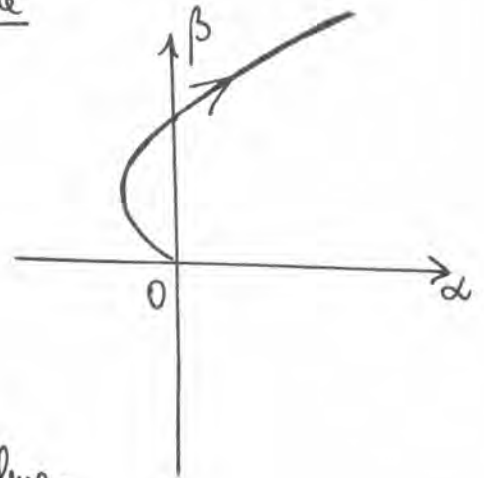
$$\vec{r}(t) = e^{3t} (t \vec{v}_1 + \vec{v}_2)$$

soit, en coordonnées polaires dans le repère $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$:

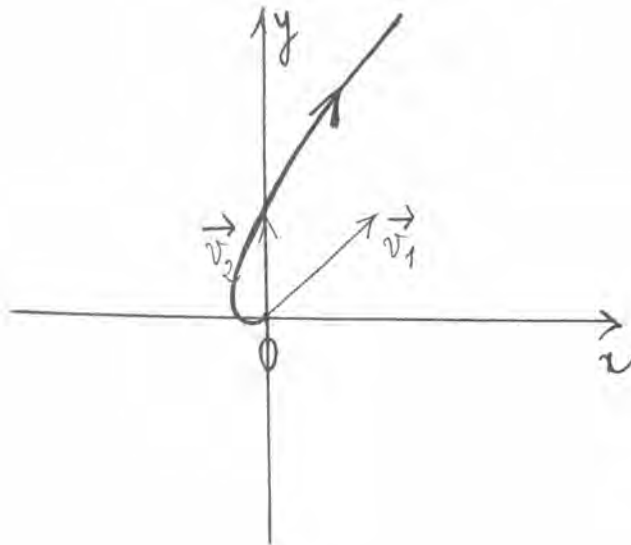
$$\begin{cases} \alpha(t) = t e^{3t} \\ \beta(t) = e^{3t} \end{cases}$$

ce qui conduit à la trajectoire suivante

t	$-\infty$	$-1/3$	0	$+\infty$
$\alpha(t)$	0	$\rightarrow -1/3e$	0	$\rightarrow +\infty$
$\beta(t)$	0		1	$\rightarrow +\infty$



soit, dans le repère d'origine à l'allure



Problème 1 :

A) 1) comme $1 - 2d \cos t + d^2 = (1 - \cos t)^2 + \sin^2 t = |1 - e^{it}|^2 > 0$
 pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(1, \cdot)$ est une fonction 2π -périodique
 paire de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$: sa série de Fourier converge donc
 normalement sur $\mathbb{R}$, vers $f(1, \cdot)$.

2) comme $1 = (1 - 2d \cos t + d^2) \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} a_n \cos nt \right)$,
 vient (à l'aide de la formule d'Euler $2 \cos t \cos nt =$
 $\cos(n+1)t + \cos(n-1)t$) et par identification

$$\begin{cases} 1 = (1 + d^2) \frac{a_0}{2} - d a_1 \\ \forall n \geq 1, \quad 0 = (1 + d^2) a_n - d(a_{n-1} + a_{n+1}) \end{cases}$$

3) en résolvant l'équation aux différences selon la technique de
 l'équation résolvante, on obtient

$$\exists A, B \in \mathbb{R} \quad \text{tq} \quad \forall n, \quad a_n = A \lambda^n + B \left(\frac{1}{\lambda}\right)^n$$

Comme $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ doit exister et être nulle, on doit avoir $B = 0$.

Il reste à calculer a_0 par quadrature :

$$a_0 = \frac{2}{2\pi} \cdot 2 \cdot \int_0^\pi \frac{dt}{1 - 2d \cos t + d^2} = \dots = \frac{2}{1 - d^2}$$

(en posant $m = \operatorname{tg}\left(\frac{t}{2}\right)$)

et il vient donc $\forall n \geq 0, a_n = \frac{2\lambda^n}{1-\lambda^2}$ (série de Fourier
 est bien normalement convergente sur $\mathbb{R}$; la suite (a_n) est à
diminution rapide, i.e. $\forall k \in \mathbb{N}, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot n^k = 0$, enfa-
 meinent au fait que $f(\lambda, \cdot)$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$).

$$\textcircled{B} \quad 1) \quad f(\lambda, t) = \frac{1}{1 - e^{it\lambda^2}} \quad \text{pour } |\lambda| < 1 \\
= \frac{1/2i \sin t}{1 - e^{it}} + \frac{-1/2i \sin t}{1 - e^{-it}} \quad \text{pour } t \notin \pi \mathbb{Z}$$

soit, en invoquant la série géométrique

$$= \frac{-1}{2i \sin t} \cdot e^{-it} \cdot \sum_0^\infty (e^{-it})^n + \frac{1}{2i \sin t} \cdot e^{it} \cdot \sum_0^\infty (e^{it})^n$$

ce qui donne le développement en série entière pour $|\lambda| < 1$:

$$f(\lambda, t) = \sum_0^\infty \frac{\sin((n+1)t)}{n! t} \cdot \lambda^n$$

en choisissant $t \in \pi \cdot \mathbb{Z}$. Le rayon de convergence de la série entière
 obtenue est égal à 1 : en effet, d'après le lemme d'Abel,
 il est ≥ 1 (car la série converge sur $] -1, 1[$) ; mais, d'autre
 part, il ne pouvait être > 1 car, comme $\lambda^n \rightarrow \infty$ pour $|\lambda| > 1$,
 cela signifierait que $\sin((n+1)t) \rightarrow 0$ (et un classique raisonnement
 par l'abondance montre que ce n'est pas le cas).

$$2) i) \frac{1}{1-e^{it}} = \frac{1}{1-e^{it}} \times \frac{1}{1-e^{-it}} \quad \text{pour } t \in \mathbb{R}$$

C8

$$= \left(- \sum_{n=0}^{\infty} e^{-i(n+1)t} \lambda^n \right) \times \left(- \sum_{n=0}^{\infty} e^{i(n+1)t} \lambda^n \right)$$

car les séries convergent absolument sur $]-1, 1[_{\lambda}$: d'après le théorème de Mertens, on peut former le série numérique produit, de t.g.

$$\begin{aligned} \forall n \geq 0, \quad c_n &= \sum_{k=0}^n e^{-i(k+1)t} \cdot e^{i(n+1-k)t} \cdot \lambda^n \\ &= e^{int} \frac{1 - e^{-2i(n+1)t}}{1 - e^{-2it}} \lambda^n \quad \text{pour } t \notin \pi \mathbb{Z} \\ &= \frac{\sin(n+1)t}{\sin t} \lambda^n. \end{aligned}$$

ii) à partir du développement en série de Fourier obtenu en A):

$$\frac{1 - \lambda^2}{1 - 2\lambda \cos t + \lambda^2} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \cos nt$$

on effectue une transformation d'Abel sur la forme

$$\begin{aligned} \frac{(1 - \lambda^2) \sin t}{1 - 2\lambda \cos t + \lambda^2} &= \sin t + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n (\sin(n+1)t - \sin(n-1)t) \\ &= (1 - \lambda^2) \cdot (\sin t + \lambda \sin 2t + \dots + \lambda^{n-1} \sin nt + \dots) \end{aligned}$$

ce qui permet de retrouver le résultat.

(77

c) 1) par la relation trigonométrique

$$\cos(n+1)t + \cos(n-1)t = 2 \cos t \cos nt$$

on obtient la relation de récurrence

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2x \cdot T_n(x)$$

qui prouve au fait que $T_0 = 1$ et $T_1 = x$, montre que

$$\forall n \geq 0, T_n \in \mathbb{R}_n[X]. \quad \text{D'autre part, } T'_{n+1}(x) = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{\sin(n+1)t}{\sin t}$$

ce qui montre que $P_n = (n+1) \cdot T'_{n+1} \in \mathbb{R}_n[X]$.

2) d'après A), on a

$$\frac{1}{1-2\lambda \cos t + \lambda^2} = \frac{1}{1-\lambda^2} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} T_n(\cos t) \cdot \lambda^n \right)$$

d'après B), on a aussi

$$\frac{1}{1-2\lambda \cos t + \lambda^2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos t) \cdot \lambda^n$$

: le lien entre les 2 développements provient de la relation trigonométrique $\sin(n+1)t - \sin(n-1)t = 2 \cos t \sin nt$ qui se lit

$$\forall n \geq 2, P_n - P_{n-2} = 2T_n$$

3) en écrivants $\sin(n+1)t = P_n(\cos t) \cdot \sin t$ et en $\frac{d}{dt}$, on

obtient $(n+1) \cos(n+1)t = -\sin^2 t \cdot P'_n(\cos t) + \cos t \cdot P'_n(\cos t)$, puis

$$-(n+1)^2 \sin(n+1)t = \sin^3 t \cdot P''_n(\cos t) - 3 \cos t \cdot P'_n(\cos t) - \sin t \cdot P_n(\cos t) \quad (78)$$

qui conduit à l'EDO donnée. Le m procédé donne par ^{C10}

Tn l'EDO

$$(1-x^2)y'' - xy' + n^2y = 0.$$

2) on pourrait chercher une solution développable en série entière
par la technique d'identification ... qui conduit à la
relation de récurrence

$$(k+1)(k+2) c_{k+2} = (k(k+2) - n(n+2)) c_k, \quad k \geq 0$$

de sorte que $c_{n+2} = 0$ ainsi que $c_{n+2h} = 0$: il
suffit donc d'imposer c_0 ou $c_1 = 0$ pour obtenir une
solution polynomiale...

Un calcul élémentaire de tronc (de fonctions impaires)
conduit à l'EDO en z

$$\ddot{z} + (n+1)^2 z = 0$$

c'est l'EH, la solution générale $z(t) = A \cos(n+1)t + B \sin(n+1)t$.

on retrouve donc la solution $P_n(x)$ de l'EDO originale, avec
une nouvelle solution $Q_n(x) = \frac{\cos(n+1)t}{n+1}$, $x = \cos t \in]-1, 1[$.

D) 1) comme, pour $k \geq 2$ entier, on a

$$Dx^k = -k(k+2)x^k + k(k-1)x^{k-2}$$

tandis que $D1=0$, $Dx = -3x$, on dérive que

la matrice de l'opérateur $D|_{\mathbb{R}_n[X]}$ dans la base canonique

$\{1, x, \dots, x^n\}$ est triangulaire supérieure, d'éléments diagonaux

$$(-k(k+2))_{k=0}^n := \text{Ap } D|_{\mathbb{R}_n[X]}.$$

Les vp sont simples, et $\text{Ker}(D|_{\mathbb{R}_n[X]} + k(k+2).I) = \mathbb{R} \cdot P_k$

puisque $Df(x) = (1-x^2)f'' - 3xf'$ (et C) 3)

$$2) (Df, g) = \int_{-1}^1 ((1-x^2)^{\frac{3}{2}} f')' \cdot g \, dx = \int_{-1}^1 ((1-x^2)^{\frac{3}{2}} g') f \, dx, \text{ comme}$$

on le voit en intégrant par parties.

$$\text{pour } n \neq m, (P_n, P_m) = \int_0^\pi \sin((n+1)t) \cdot \sin((m+1)t) \, dt = 0,$$

$$\text{tandis que } \|P_n\|^2 = \int_0^\pi \sin^2(n+1)t \, dt = \pi/2.$$

$$3) \text{ comme } (f, P_n) = \int_0^\pi f(\cos t) \cdot \sin(n+1)t \cdot \sin t \, dt, \text{ on introduit}$$

la fonction $\varphi(t) \doteq f(\cos t) \cdot \sin t$ qui est 2π -périodique, de

dans $\mathcal{C}^1$, et impaire et, par conséquent de $(n+1)^{\text{ième}}$ coefficient

de Fourier $b_{n+1}(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin(n+1)t \, dt = \frac{2}{\pi} (f, p_n)$: d'après le

théorème de Dirichlet, on a

$$\forall t, \quad f(\cos t) \cdot \sin t = \frac{2}{\pi} \sum_0^{\infty} (f, p_n) \cdot \sin(n+1)t$$

$$= \frac{2}{\pi} \sum_0^{\infty} (f, p_n) \cdot P_n(\cos t) \cdot \sin t$$

ce qui donne le résultat pour $x \in]-1, 1[$ (: après simplification par $\sin t$):

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_0^{\infty} (f, p_n) \cdot p_n(x)$$

Comme la série $\sum_0^{\infty} n \cdot |f, p_n|$ converge (: f étant $\underline{C^2}$, avec Cauchy-Schwarz et Parseval), on conclut, par prolongement sur $[-1, 1]$, le 2nd membre étant continu de par la convergence normale de la série (: il est en effet facile de vérifier, par récurrence, que $\sup_{[-1, 1]} |P_n(x)| = (n+1)$).

Problème 2:

1) $\frac{1}{\cosh t} > 0$ or intégrable et paire.

2) il s'agit de partir de l'équation suivante

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos 2\pi \xi t}{e^{\pi t} (1 + e^{-2\pi t})} dt = \int_0^{\infty} \cos 2\pi \xi t \cdot \sum_0^{\infty} (-1)^n e^{-(2n+1)\pi t} dt =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^{\infty} e^{-(n+1)it} \cos(2\alpha\zeta t) dt$$

$$\stackrel{iii}{=} \int_0^{\infty} = \operatorname{Re} \int_0^{\infty} e^{-((2n+1)+2\zeta i)it} dt = \frac{(2n+1)}{((2n+1)^2 + 4\zeta^2)\pi}$$

ce qui conduit bien à la formule annoncée. Quant à la justification de l' $\int_0^{\infty}$ terme à terme :

i) la série de fcts de t.g. $\cos 2\alpha\zeta t \cdot (-1)^n e^{-(n+1)it}$ converge normalement sur $[\varepsilon, +\infty[$, pour tout $\varepsilon > 0$;

ii) avec l'estimation de reste d'une série alternée dont le t.g. $e^{-(n+1)it}$ décroît vers 0 ($t > 0$), vient, pour tout N entier

positif

$$\left| \cos 2\alpha\zeta t \cdot \sum_{n=0}^N (-1)^n e^{-(n+1)it} \right| \leq \left| \sum_{n=0}^N (-1)^n e^{-(n+1)it} \right| \leq \\ \leq \frac{1}{h(t)} + e^{-(N+3)t} \leq \frac{1}{h(t)} + e^{-3\alpha t} = g(t)$$

où g est d'intégrale impropre convergente sur $(0, \infty)$.

Le théorème de convergence dominée faible permet donc de conclure.

3) f étant impaire, $a_n = 0$ et, pour $n \geq 1$, on a

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(xt) \sin(nt) dt = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} \frac{e^{at} - e^{-at}}{2} n \sin nt dt$$

$$\hat{=} \int_0^{\pi} e^{at} \sin nt dt = \operatorname{Im} \int_0^{\pi} e^{(a+in)t} dt = \dots = -\frac{n}{n^2 + a^2}$$

ce qui donne $b_n = \frac{1}{\pi} \frac{(-1)^n n}{n^2 + a^2} \cdot 2 \operatorname{sh}(a\pi)$.

4) avec le théorème de Dirichlet, on peut écrire

$$f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{2}{\pi} \operatorname{sh}(a\pi) \cdot \sum_{p \geq 0} \frac{(2p+1) (-1)^p}{(2p+1)^2 + a^2}$$

d'où, par un calcul élémentaire $\widehat{\frac{1}{\operatorname{ch} t}}(\xi) = \frac{1}{\operatorname{ch} \pi \xi}$:

le facteur $\frac{1}{\operatorname{ch} t}$ est donc une fonction propre de la transformation de Fourier ; elle appartient à l'espace $\mathcal{S}$ introduit dans le problème n° 5.

Problème n° 7

Exercice 1: (Calculs de la valeur de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(4n^2-1)}$).

- 1) rappeler pourquoi la série converge.
- 2) calculer sa somme, via une décomposition en éléments simples.
- 3) retourner le résultat, en considérant la série entière

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n(4n^2-1)}$$

(on liera f' à $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2n+1}$ qui vérifie l'EDO

$$2zg'(z) + g(z) = \frac{1}{1-z} \quad : \text{on remontera à } f \text{ par quadratures}).$$

Exercice 2: (calcul de $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$).

- 1) montrer que la série $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+(t+n)^2}$ définit une fonction $f(t)$ 1-périodique, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

- 2) montrer que le k-ième coefficient de Fourier de f est

donné par l'intégrale

$$c_k = 2 \int_0^{\infty} \frac{\cos(2k\pi\theta)}{1+\theta^2} d\theta, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

3) pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$g(x) = \int_0^{\infty} \frac{\sin(tx)}{t(1+t^2)} dt$$

i) montrer (en justifiant les opérations de dérivation sous le signe $\int_0^{\infty}$!) que g satisfait, sur $]0, \infty[$, l'EDO

$$g''(x) - g(x) = -\frac{\pi}{2}$$

ii) en déduire que $g(x) = \frac{\pi}{2}(1 - e^{-x})$, $\forall x \geq 0$

iii) tracer le graphe de g .

4) utiliser ce qui précède pour calculer la valeur de

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}.$$

Exercice 3: soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de VA indépendantes de même loi uniforme sur $[0, 1]$. A partir de l'intervalle $I_0 = [0, 1]$, on considère la suite des intervalles $[X_1 \dots X_n, X_1 \dots X_{n-1}]$ de longueur l_n : on demande la loi de la VA l_n . (85

(on commencera par étudier la bi de $l_1, l_2, l_3 \dots$

et on montrera que les densités f_{l_n} et $f_{l_{n-1}}$ de VA l_n et l_{n-1} sont liées par la relation

$$\forall \lambda \in (0, 1), \quad f_{l_n}(\lambda) = \int_{\lambda}^1 f_{l_{n-1}}(t) \frac{dt}{t}.$$

Problème (: étude des polynômes de Hermite).

1) expliquer pourquoi, à $x \in \mathbb{R}$ fixé, la fonction
 $q(\cdot, x) : t \mapsto e^{-t^2/2 + tx}$

est développable en série entière en $\mathbb{R}$. montrer que

$$q(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} H_n(x) \cdot t^n$$

où H_n est un polynôme de degré n . calculer H_0, H_1 et H_2 .

2) montrer que $\forall n \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}, H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} (e^{-x^2})^{(n)}$.

3) établir successivement les relations suivantes :

$$(a) \quad H'_n(x) = 2x \cdot H_n(x) - H_{n+1}(x)$$

$$(b) \quad H_{n+1}(x) = 2x \cdot H_n(x) - 2n \cdot H_{n-1}(x)$$

$$(c) \quad H'_n = 2n H_{n-1}$$

, $n \geq 1$.

$$(d) \quad H''_n(x) - 2x H'_n(x) + 2n H_n(x) = 0$$

4) montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} x^k \cdot H_n(x) e^{-x^2} dx = 0$ pour $0 \leq k < n$.

5) en déduire que $(H_n, H_m) \doteq \int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x) \cdot H_m(x) e^{-x^2} dx = 0$

si $n \neq m$, et calculer $\|H_n\|^2 = (H_n, H_n)$.

6) vérifier que $\varphi_n(x) = e^{-x^2/2} \cdot H_n(x)$ obéit à l'EDO

$$y'' + (2n+1-x^2)y = 0.$$

et, en écrivant l'EDO sous la forme

$$y'' + (2n+1)y = x^2 y$$

transformer-la avec Laplace sous la forme intégrale

$$(Ei) \quad y(x) = A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x) + \frac{1}{\omega} \int_0^x t^2 \sin \omega(x-t) \cdot y(t) dt$$

avec $\omega = \sqrt{2n+1}$.

7) montrer que φ_{2n} obéit à l'Ei

$$y(x) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!} \cos \sqrt{4n+1} x + \frac{1}{\sqrt{4n+1}} \int_0^x t^2 \sin \frac{x-t}{\sqrt{4n+1}} \cdot y(t) dt$$

8) déduire de ce qui précède le comportement asymptotique

$$H_{2n}(x) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!} e^{x^2/2} \left(\cos(\sqrt{4n+1} x) + r_n(x) \right) \quad , n \rightarrow \infty \quad (8)$$

avec $r_n(x) = O\left(\frac{1}{n^{1/4}}\right)$ uniformément en x et qtd de $\mathbb{R}_x$.

Exercice 1. 1) $0 < \frac{1}{n(4n^2-1)} \sim \frac{1}{4n^3}$ t.q. d'une série de Riemann

convergente.

2) $\frac{1}{n(4n^2-1)} = \frac{-1}{n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n-1}$ permet d'exprimer

la somme partielle S_n comme

$$S_n = -H_n + 2\left(H_{2n+1} - \frac{1}{2}H_{n-1}\right) + 1 + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= 2(H_{2n} - H_n) - 1 + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

on $H_{2n} - H_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ln 2$: $S = 2\ln 2 - 1$.

3) $\neq$ admet $R=1$ comme rayon de convergence : pour $|z| < 1$, on a donc

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{4n^2-1} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{2n-1} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{2n+1}$$

ce qui conduit à considérer $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2n+1}$ pour $|z| < 1$:

$$g'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{2n+1-1}{2n+1} z^{n-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2z} (g(z)-1)$$

soit l'EDO $2zg'(z) + g(z) = \frac{1}{1-z}$: il s'agit d'une EDO

linéaire qu'on peut intégrer avec Lagrange sur $]0, 1[$, pour

obtenir la forme de la solution générale suivante

$$\frac{1}{2\sqrt{z}} \ln \frac{1+\sqrt{z}}{1-\sqrt{z}} + \frac{k}{\sqrt{z}} \quad \text{avec } k \in \mathbb{R} \quad (88)$$

Comme $g(z) \xrightarrow{z \rightarrow 0^+} 1$, un DL(0) permet d'obtenir $k=0$ ^{C2}

dnc

$$\forall z \in [0, 1[, \quad g(z) = \frac{1}{2\sqrt{z}} \ln \frac{1+\sqrt{z}}{1-\sqrt{z}}.$$

Il s'agit que, dans les mêmes conditions,

$$f'(z) = \frac{1}{2} g(z) - \frac{1}{2z} (g(z) - 1) = \frac{1}{4} \frac{z-1}{z\sqrt{z}} \ln \frac{1+\sqrt{z}}{1-\sqrt{z}} + \frac{1}{2z}$$

Par conséquent, et pour $0 < z < 1$, on a

$$f(z) = \frac{1}{4} \int \frac{z-1}{z\sqrt{z}} \ln \frac{1+\sqrt{z}}{1-\sqrt{z}} dz + \frac{1}{2} \ln z + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

un calcul de primitive s'opère par le chgt de variable $y = \sqrt{z}$
suivi d'une $\int$ par parties ... On obtient

$$f(z) = \frac{1}{2} \frac{z+1}{\sqrt{z}} \ln \frac{1+\sqrt{z}}{1-\sqrt{z}} + \ln(1-z) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

De nouveau, C s'obtient, à partir de $f(0)=0$ et d'un

DL(0) : $C = -1$:

$$f(z) = \frac{1}{2} \frac{z+1}{\sqrt{z}} \ln \frac{1+\sqrt{z}}{1-\sqrt{z}} + \ln(1-z) - 1, \quad z \in [0, 1[.$$

Envenant enfin que au thm d'Abel:

$$S = \lim_{z \rightarrow 1^-} f(z) = 2\ln 2 - 1.$$

Exercice 2: 1) comme $\sum_{n=-N}^M \frac{1}{1+(t+n)^2} = \sum_{m=-N+1}^{M+1} \frac{1}{1+(t+m)^2}$, C3

obtenir en faisant $M, N \rightarrow +\infty$, $f(t+1) = f(t) \forall t \in \mathbb{R}$ (la série étant d'ailleurs convergente sur $\mathbb{R}$, car à $t \in \mathbb{R}$ donné on a $\frac{1}{1+(t+n)^2} \sim \frac{1}{n^2}$ ($\pm\infty$)) de plus, pour $t \in [0, 1]$,

$$\left| \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{1+(t+n)^2} \right) \right| = \frac{-2(t+n)}{(1+(t+n)^2)^2} \ll \frac{2(|n|+1)}{(1+(|n|-1)^2)^2} \sim \frac{2}{(|n|-1)^3}$$

montrant que la série dérivée converge normalement sur $[0, 1]$: f est donc $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

2) comme la série qui définit f converge normalement sur $[0, 1]$ (argument précédent), l'intégration terme à terme est justifiée:

$$c_k = \int_0^1 f(t) e^{-2i\pi k t} dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_0^1 \frac{e^{-2i\pi k t}}{1+(t+n)^2} dt$$

soit, par le chgt de variable $\theta = t+n$ dans chaque intégrale et en prenant l'intégrale généralisée finale

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad c_k = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_n^{n+1} \frac{e^{-2i\pi k \theta}}{1+\theta^2} d\theta = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^{N+1} \frac{e^{-2i\pi k \theta}}{1+\theta^2} d\theta$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2i\pi k \theta}}{1+\theta^2} d\theta$$

ou encore, comme $\int_{-\infty}^0 = \int_0^{\infty}$, $= \int_0^{\infty} \frac{e^{-2i\pi k \theta}}{1+\theta^2} d\theta$, le résultat demandé.

3) limite de fcts $g_n: x \mapsto \int_0^n \frac{\sin(tx)}{t(1+t^4)} dt$ car C4

divable sur $\mathbb{R}$, car la fonction $g(t, x) = \frac{\sin(tx)}{t} \cdot \frac{1}{1+t^4}$

est de classe $\mathcal{C}_x^1$ sur $[0, n]_t \times \mathbb{R}_x$ ($\partial_x g(t, x) = \frac{\cos(tx)}{1+t^4}$), et

na

$$g_n'(x) = \int_0^n \frac{\cos(tx)}{1+t^4} dt, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Comme $\int_n^\infty \left| \frac{\cos(tx)}{1+t^4} \right| dt \leq \int_n^\infty \frac{dt}{1+t^4} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, $g_n' \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} h$

sur $\mathbb{R}$, si $\forall x \in \mathbb{R}$, na pr $h(x) = \int_0^\infty \frac{\cos(tx)}{1+t^4} dt$. Comme

l'intégrale $\int_0^\infty \frac{f(t)}{t(1+t^4)} dt$ est bien définie, il en résulte que g

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, avec $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = \int_0^\infty \frac{\cos(tx)}{1+t^4} dt$.

Indiquons $g'(x) = \int_0^1 \frac{\cos(tx)}{1+t^4} dt + \int_1^\infty \frac{\cos(tx)}{1+t^4} dt \doteq g_1(x) + g_2(x)$:

g_1 est de classe $\mathcal{C}^1$ ($\partial_x g$ continuellement dérivable en $x \dots$)

tandis que, pour g_2 , ne pouvons pas intégrer par parties directe, pour $x > 0$

$$g_2(x) = \int_1^\infty \frac{d\left(\frac{\sin(tx)}{x}\right)}{1+t^4} = \frac{\sin(tx)}{x(1+t^4)} \Big|_{t=1}^\infty + \frac{2}{x} \int_1^\infty \frac{t \sin(tx)}{(1+t^4)^2} dt$$

On peut alors réitérer sur $x \mapsto \int_1^\infty \frac{t \sin(tx)}{(1+t^4)^2} dt$ l'argument (91)

développé par g , et partiel en ainsi une nouvelle $\mathcal{O}_x$ sur le $\mathbb{C}^5$
 n'est $\int_1^\infty$, donc, en remontant l'intégration par parties,
 nous $\int_0^\infty$. Ce qui donne

$$\begin{aligned} \forall x > 0, \quad g''(x) &= - \int_0^\infty \frac{t \Lambda(t/x)}{1+t^2} dt \\ &= - \int_0^\infty \frac{1}{t(1+t^2)} \cdot (t^2+1-1) \Lambda(t/x) dt \\ &= g(x) - \int_0^\infty \frac{\Lambda(t/x)}{t} dt \end{aligned}$$

$$\text{ou} \quad \int_0^\infty \frac{\Lambda(t/x)}{t} dt = \int_0^\infty \frac{\Lambda(\theta)}{\theta} d\theta = \frac{\pi}{2} \quad (\theta = t/x)$$

En intégrant l'ED obtenue, on obtient la forme suivante de

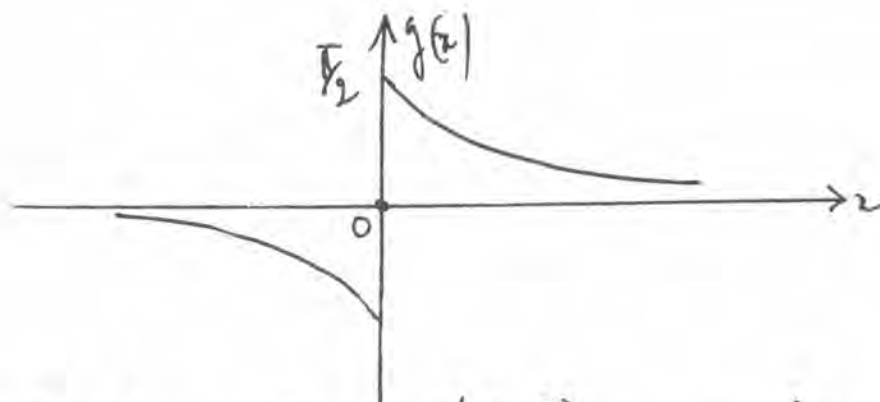
$$g(x) = A e^x + B e^{-x} + \frac{\pi}{2}, \quad A, B \in \mathbb{R}$$

$$\text{Or, comme } g \text{ est bornée} \quad \left(\left| \int_0^\infty \frac{\Lambda(t/x)}{t(1+t^2)} dt \right| \leq x \int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2} x \right)$$

on a immédiatement $A = 0$. Comme d'autre part $g(0) = 0$

donc on a $g(x) = \frac{\pi}{2} (1 - e^{-x})$, $x > 0$. On va maintenant

que g est impair. D'où l'allure de son graphe:



4) d'après 3), $c_k = 2g'(2\pi k)$ pour $k \neq 0$ tandis que $c_0 = \pi$

Comme f est $\mathcal{C}^1$, on peut donc écrire pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \pi e^{-2\pi |k|} \cdot e^{2i\pi k t} = \pi \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-2k\pi} \cos(2k\pi t) \right)$$

Faisant $t=1$, on obtient en particulier

$$1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2} = \pi \left(1 + \frac{2e^{-2\pi}}{1-e^{-4\pi}} \right) = \pi \coth \pi$$

d'où la somme demandée

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} = \frac{1}{2} (1 + \pi \coth \pi).$$

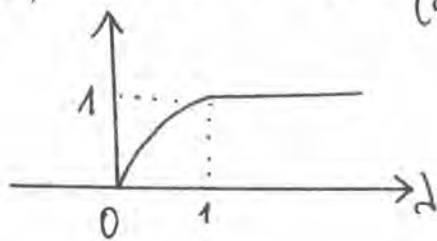
Exercice 3: on a évidemment $h_n = X_1 \dots X_{n-1} (1 - X_n) : \Omega \rightarrow (0,1)$

la F.R. de la V.A. $h_2 = X_1(1 - X_2)$ est donnée par

$$\forall \lambda \in (0,1), \quad P(h_2 \leq \lambda) = \iint_{\{x,y \leq 1\}} \chi_{(0,1)}(x) \cdot \chi_{(0,1)}(y) dy$$

car $1 - X_2 \sim \mathcal{U}(0,1)$ de façon évidente, et les V.A. sont indépendantes

ce qui donne $F_{l_2}(x) = x(1 - \ln x) \cdot \mathbb{1}_{(0,1)}(x) + \mathbb{1}_{(1,\infty)}(x)$. C7

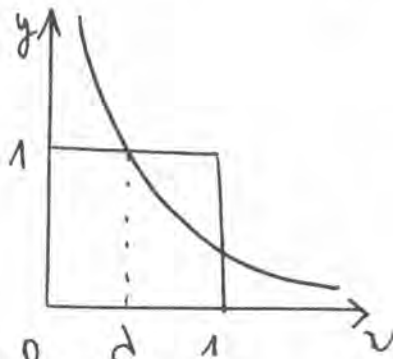


et conduit à la densité $f_{l_2}(x) = -\ln(x) \cdot \mathbb{1}_{(0,1)}(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Plus généralement, et comme $l_n = X_1 \cdot X_2 \cdots X_{n-1} (1 - X_n)$

où $X_2 \cdots X_{n-1} (1 - X_n)$ a même loi que l_{n-1} et est indépendante de X_1 , mais, pour $x \in (0,1)$

$$F_{l_n}(x) = \iint_{\{xy \leq x\}} f_{X_1}(x) f_{l_{n-1}}(y) dx dy$$



$$= \int_0^x f(x) \cdot \int_0^1 f_{l_{n-1}}(y) dy \cdot dx + \int_x^1 f(x) \int_0^{\frac{x}{y}} f_{l_{n-1}}(y) dy dx$$

ce qui donne, après $\frac{d}{dx}$, la relation d'échelle suivante entre les densités $f_{l_{n-1}}$ et f_{l_n} :

$$\forall x \in (0,1), \quad f_{l_n}(x) = \int_x^1 f_{l_{n-1}}\left(\frac{x}{y}\right) \frac{dy}{y} \quad (\text{cf: Exercice 4, p. 3})$$

à partir de laquelle on obtient facilement $f_{l_n}(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} (\ln x)^{n-1} \mathbb{1}_{(0,1)}(x)$.

Problème: 1) $\varphi(t, z) = e^{-t^2} \times e^{2tz}$ apparaît, à z fixé, comme C8
le produit de 2 séries entières de rayon de convergence ∞ :

$$\varphi(t, z) = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{n!} t^{2n} \times \sum_0^\infty \frac{(2z)^n}{n!} t^n$$

à ce titre, $\varphi(t, z) = \sum_0^\infty \frac{1}{n!} H_n(z) t^n$, $\forall t \in \mathbb{R}$, avec

$$\forall n \geq 0, \quad H_n(x) = n! \sum_{\substack{2p+q=n \\ p, q \geq 0}} \frac{(-1)^p}{p!} \cdot \frac{(2x)^q}{q!}$$

: $H_n \in \mathbb{R}_n[X]$ et, par exemple $H_0 = 1$, $H_1(z) = 2z$,

$$H_2(z) = 4z^2 - 2.$$

2) d'après Taylor, $H_n(z) = \frac{\partial^n \varphi}{\partial t^n}(0, z)$ et on conclut
 par le chgt de variable $t = x - u$.

$$\begin{aligned} 3) (a) \text{ d'après 2), } H'_n(x) &= (-1)^n \cdot (2z(e^{-z^2})^{(n)}) + (e^{-z^2})^{(n+1)} e^{2z} \\ &= 2z \cdot H_n(z) - H_{n+1}(z). \end{aligned}$$

(b) en dérivant la série entière qui donne $\varphi(\cdot, z)$, on obtient

$$2(x-t) \cdot \varphi(t, z) = \sum_0^\infty n \frac{H_n(z)}{n!} t^{n-1}$$

ce qui conduit à (b) par identification (selon les puissances de t).

(c) double de (a)-(b).

(d) en combinant (a) et (b).

4) en intégrant par parties, on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^k H_n(x) e^{-x^2} dx = (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} x^k (e^{-x^2})^{(n)} dx = (-1)^{n-1} \int_{-\infty}^{+\infty} k x^{k-1} (e^{-x^2})^{(n-1)} dx$$

si $0 < k, n$ (car $x^k (e^{-x^2})^{(n-1)} \xrightarrow{\pm\infty} 0$) : il suffit

d'itérer par volume.

5) par linéarité, $(H_n, H_m) = 0$ si $n < m$.

d'après (), ma

$$\|H_n\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x) \cdot (2x H_{n-1}(x) - 2(n-1)H_{n-2}(x)) e^{-x^2} dx$$

$$= 2 \int_{-\infty}^{+\infty} x H_n H_{n-1} e^{-x^2} dx, \text{ car } H_{n-2} \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$$

$$= 2^n \int_{-\infty}^{+\infty} x^n H_n(x) e^{-x^2} dx, \text{ car } H_{n-1}(x) = 2^{n-1} x^{n-1} + (\in \mathbb{R}_{n-2}[X])$$

$$= 2^n \cdot n \int_{-\infty}^{+\infty} x^{n-1} H_n(x) e^{-x^2} dx$$

$$= \dots = 2^n n! \int_{-\infty}^{+\infty} H_0(x) e^{-x^2} dx = 2^n n! \sqrt{\pi}.$$

6) on fait varier les constantes A et B on

$$y(x) = A(x) \cos(\omega x) + B(x) \sin(\omega x)$$

ce qui conduit au système différentiel

$$\begin{cases} A'(x) \cos(\omega x) + B'(x) \sin(\omega x) = 0 \\ -A'(x) \sin(\omega x) + B'(x) \cos(\omega x) = \frac{1}{\omega} x^2 y(x) \end{cases}$$

d'où la forme (Ei).

7) comme $\varphi(0, t) = e^{-t^2} = \sum_0^{\infty} \frac{1}{n!} H_n(0) t^n$, ma $H_n(0) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!}$

tandis que $H_{2n}'(0) = 0$ avec (c): d'où la détermination des constantes A et B.

8) pour $x > 0$, et d'après Cauchy-Schwarz, on

$$\begin{aligned} \left| \int_0^x t^2 \sin \omega(x-t) \cdot y(t) dt \right| &\leq \left(\int_0^x t^4 dt \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} H_{2n}(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\frac{x^5}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{2^{2n} (2n)! \sqrt{\pi}} \end{aligned}$$

d'après le calcul de 5). Par conséquent,

$$\varphi_{2n}(x) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!} \cos \sqrt{4n+1} x + r_n(x)$$

avec

$$\left| \frac{f_n(x)}{(2n)!/n!} \right| \leq C(x) \cdot \sqrt{\frac{2^{2n} \cdot (2n)! \cdot (n!)^2}{((2n)!)^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$$

avec C borné sur tout qtd de $\mathbb{R}$ et, d'après Wallis

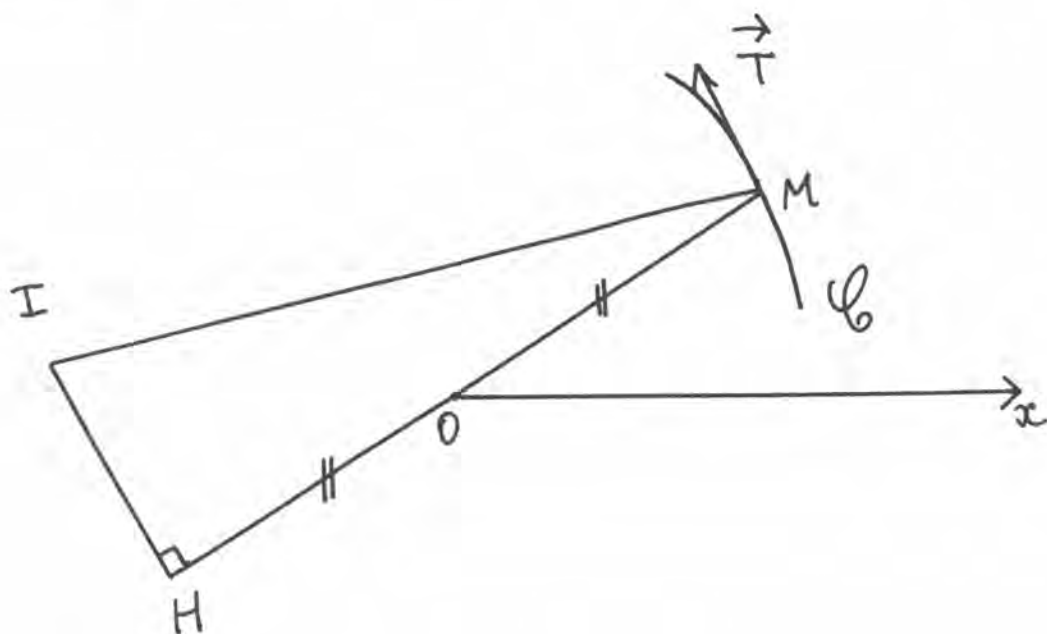
$$\frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} t \, dt \underset{(n \rightarrow \infty)}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

: la conclusion demandée suit.

Préparation à l'épreuve d'Analyse de l'Agégation Interne 95/96:

Problème n° 8

Exercice 1: caractériser les courbes $\mathcal{C}$ telles que



I étant le centre de courbure en M .

Exercice 2: soit $\sum_0^\infty a_n$ une série convergente, et soit

$(B_n)_{n \geq 0}$ une suite décroissante de fonctions positives et

continues sur l'intervalle $[0, 1]$: montrer que la

série $\sum_0^\infty a_n B_n$ définit une fonction continue sur $[0, 1]$.

Exercice 3: pour $n \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \neq 1$,
calculer la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}}{(e^{it} - z)^n} dt.$$

Exercice 4: soit
$$\begin{cases} P(x, y) = y^2 - 4x^3 + 1 \\ Q(x, y) = 2xy \end{cases} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

1) expliquer pourquoi le champ de vecteurs $\vec{F} \begin{smallmatrix} P \\ Q \end{smallmatrix}$ dérive
d'un potentiel V , que l'on explicitera ensuite.

2) résoudre le problème de condition initiale

$$\begin{cases} \dot{x} = -Q(x, y) & x(0) = 1 \\ \dot{y} = P(x, y) & y(0) = 0 \end{cases}$$

(on tracera les courbes intégrales, et la trajectoire).

Problème 1: (polynômes de Laguerre, et processus arrêté).

A) 1) une urne contient N boules rouges et M boules
blanches. On procède à une suite infinie de tirages avec
remise. On désigne par X le nombre de tirage auquel
une boule rouge sort pour la première fois : déterminer la
loi de X . (100)

2) soit $(X_k)_{k \geq 1}$ une suite de VA indépendantes ayant chacune la loi précédente (i.e. loi nulle réactive d'ordre 1):
determiner la loi de $S_2 = X_1 + X_2$, puis celle de
 $S_n = X_1 + \dots + X_n$ (au moyen de la fonction génératrice de X).

3) on considère une suite $\{X_k\}_{k \geq 1}$ de VA indépendante de $(X_k)_{k \geq 1}$,
de loi de Poisson de paramètre λ : soit X la nouvelle
variable aléatoire définie par

$$\forall \omega \in \Omega, \quad X(\omega) = X_1(\omega) + X_2(\omega) + \dots + X_{Y(\omega)+1}(\omega)$$

Montrer que la loi de X est donnée par

$$\forall n \geq 1, \quad P(X=n) = \frac{1}{n!} \left(\frac{p\lambda}{1-q\lambda} e^{-\lambda \frac{1-q}{1-q\lambda}} \right)^{(n)} (0).$$

B)

1) pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\forall x \in \mathbb{R}, \quad L_n(x) = e^x (x^n e^{-x})^{(n)}$:

vérifier qu'on définit ainsi un polynôme de degré n .

2) montrer qu'il s'agit d'une famille $(L_n)_{n \geq 0}$ de polynômes
orthogonaux pour le produit scalaire

$$(f, g) = \int_0^{\infty} f g e^{-x} dx$$

3) montrer que

$$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} L_n(z) z^n = \frac{1}{1-z} \cdot e^{-\frac{z}{1-z}}.$$

c) exprimer la loi de la VA X définie en A) 3) à l'aide des polynômes $(L_n)_{n \geq 0}$.

Problème 2 (d'après l'épreuve Analyse du CAPES externe 96).

A) Considérer le problème aux limites suivant

$$(P) \begin{cases} -y'' + c^2 y = f \text{ sur } [0, 1] & , f \in \mathcal{C}^0([0, 1]) \\ y(0) = \lambda, y(1) = \mu \text{ donnés} & , c > 0 \end{cases}.$$

1) montrer que les fonctions y_0 et y_1 définies par

$$\forall t \in \mathbb{R}, y_0(t) = \sinh(ct), y_1(t) = \sinh c(1-t)$$

forment une base de l'espace vectoriel des solutions de l'EDO homogène $-y'' + c^2 y = 0$.

2) montrer que le problème P a une unique solution qui s'écrit

$$y(t) = \frac{\sinh(ct)}{\sinh c} \left(\mu + \frac{1}{c} \int_t^1 f(s) \cdot \sinh c(1-s) \cdot ds \right) +$$

$$\frac{\sinh c(1-t)}{\sinh c} \left(\lambda + \frac{1}{c} \int_0^t f(s) \cdot \sinh cs \cdot ds \right).$$

(102)

3) montrer que la solution précédente est telle que

$$\forall t \in [0, 1], \quad y(t) \leq \frac{m_c(1-t) + m_{ct}}{m_c} \cdot \max(d, \mu) +$$

$$+ \left(1 - \frac{m_c(1-t) + m_{ct}}{m_c}\right) \cdot \frac{\sup(f)}{c^2}.$$

4) en déduire l'existence de constantes positives a, b, A et B telles que

$$\forall t \in [0, 1], \quad y(t) \leq a \max(A d, B \mu, \sup(f)).$$

B) Considérons ici le problème aux limites

$$(P') \begin{cases} -t^2 y'' - 2ty' + y = f(t) \\ y(\alpha) = d, \quad y(\beta) = \mu \end{cases} \quad \text{dans}$$

avec $0 < \alpha < \beta$, $f \in \mathcal{C}^0([\alpha, \beta])$.

1) déterminer $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que, si y est solution de l'EDO

$$-t^2 y'' - 2ty' + y = f(t)$$

alors, la fonction $z(x) = e^{-\gamma x} y(e^x)$ est solution d'une EDO de la forme

$$-z'' + c^2 z = g(x).$$

2) en déduire un encadrement de la solution au problème (P') .

Exercice 1 : avec les notations classiques (cf : conigé du Pbn°2)

on doit avoir $\cos V = 2g$, soit $g = \frac{1}{2} \cdot \frac{ds}{d\varphi} \cdot \rho \frac{d\theta}{ds}$

$$\left(\vec{T} = \cos V \cdot \vec{u} + \sin V \cdot \vec{v} = \frac{d}{ds}(g\vec{u}) = \frac{dg}{ds}\vec{u} + g \frac{d\theta}{ds}\vec{v} \right)$$

ce qui conduit à la relation angulaire $d\theta = 2 d\varphi$ ou

$d\varphi = d\theta + dV$, soit $dV = -\frac{1}{2} d\theta$: $V = -\frac{1}{2}\theta$ (à une rotation près). Comme $\tan V = \frac{\rho}{p'}$, cela donne l'EDO

rel au rayon plané $\rho(\theta)$: $\frac{\rho'}{\rho} = -\cotg \frac{\theta}{2}$ d'où

par quadrature $\rho = \frac{K}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{C}{1 - \cos \theta}$: on reconnaît

l'équation plané d'une parabole de foyer O et d'axe Ox.

Exercice 2 : il s'agit de reprendre la démonstration du théorème d'Abel

en montrant que la série converge uniformément sur $[0, 1]$. On

utilise pour cela le critère de Cauchy : à $q > p > 0$ donné,

on pose $A_{p-1} = 0$ et $\forall n \geq p$ $A_n = \sum_p^n a_k$, une

Transformation d'Abel donne

$$\sum_p^q a_n B_n = A_p \cdot B_p + \dots + (A_n - A_{n-1}) B_n + \dots + (A_q - A_{q-1}) B_q$$

$$= \sum_p^{q-1} (B_n - B_{n+1}) A_n + A_q B_q$$

A $\varepsilon > 0$ donné, on peut alors trouver $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $p > N_\varepsilon$ entraîne $\forall n \geq p$ $|A_n| \leq \varepsilon$: comme $B_n - B_{n+1} > 0$ annule B_q , on obtient donc, pour $q > p > N_\varepsilon$

$$\left| \sum_p^q a_n B_n \right| \leq \varepsilon \cdot \left(\sum_1^{q-1} (B_n - B_{n+1}) + B_q \right) = \varepsilon B_q$$

$$\leq \varepsilon B_0$$

c'est-à-dire, comme $B_0 \in \mathcal{C}_+^0([0,1])$:

($\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, $\forall q > p > N_\varepsilon$, $\forall x \in [0,1]$ on a

$$\left| \sum_p^q a_n B_n(x) \right| \leq \varepsilon \cdot \|B_0\|_\infty)$$

: suite des mêmes parties de la série de fonctions en due de Cauchy dans l'espace complet $(\mathcal{C}^0[0,1], \|\cdot\|_\infty)$, et le concluraient.

Exercice 3: on désigne par $I_n(z)$ l'intégrale à calculer (qui

est bien définie !). On peut commencer par remarquer que

$$I_n(e^{i\theta}) = e^{-in\theta} \int_0^{2\pi} \frac{e^{it}}{(e^{it-\theta} - \rho)^n} dt = e^{-i(n-1)\theta} \int_0^{2\pi} \frac{e^{it}}{(e^{it} - \rho)^n} dt$$

(c'est le vgt de variable $t = \theta + \rho$)

annule, $\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}}{(e^{it}-\beta)^n} dt = \frac{1}{(n-2)!} \int_0^{2\pi} \frac{\partial^{n-1}}{\partial \beta^{n-1}} \left(\frac{e^{it}}{e^{it}-\beta} \right) dt =$ C3

$\frac{1}{(n-2)!} \cdot I_1^{(n-1)}(\beta)$, d'après le théorème de dérivation sous le

signe $\int_0^{2\pi} (: \text{ la fonction } (t, \beta) \rightarrow \frac{e^{it}}{e^{it}-\beta} \text{ et } C^\infty \text{ sur}$

$[0, 2\pi]_t \times \{ \beta > 0, \beta \neq 1 \})$: on réduit le problème à celui du calcul de

$$I_1(\beta > 0) = \int_0^{2\pi} \frac{e^{it}}{e^{it}-\beta} dt$$

Pour $0 < \beta < 1$, on a $\frac{e^{it}}{e^{it}-\beta} = \frac{1}{1-\beta e^{-it}} = \sum_0^\infty \beta^n e^{-int}$ on

la série (dans la variable t) converge uniformément sur $\mathbb{R}$, ce qui autorise l'intégration terme à terme

$$I_1(\beta) = \sum_0^\infty \beta^n \int_0^{2\pi} e^{-int} dt = 2\pi$$

Pour $\beta > 1$, on a de même $\frac{e^{it}}{e^{it}-\beta} = -\frac{e^{it}}{\beta} \cdot \frac{1}{1-\frac{e^{it}}{\beta}} = -\sum_0^\infty \left(\frac{e^{it}}{\beta} \right)^{n+1}$

ce qui donne $I_1(\beta) = -\sum_0^\infty \frac{1}{\beta^{n+1}} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt = 0$.

En tous cas, pour $n \geq 2$, $I_n(\beta) = 0 \quad \forall \beta \in \mathbb{C}, |\beta| \neq 1$.

Remarque: on pourrait aussi développer l'intégrant avec la formule du binôme et intégrer terme à terme!

Exercice 4: 1) comme $\frac{\partial P}{\partial y} = 2y = \frac{\partial Q}{\partial x}$ sur $\mathbb{R}^2$ (défini), C4

est assurée, avec le lemme de Poincaré (sur programme de l'int !)

de l'existence d'un potentiel V qui résout d'ailleurs
facilement en résolvant le système d'EDP

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial x} = P = y^2 - 4x^3 + 1 \\ \frac{\partial V}{\partial y} = Q = 2xy \end{cases}$$

la première EDP donnant $V = y^2x - x^4 + x + C(y)$ avec
d'après la seconde EDP $2xy + C'(y) = 2xy$ donc $C = C_{\text{cte}}$:

$$V(x, y) = x(y^2 - x^3 + 1) \quad \text{constant.}$$

4) si $(x(t), y(t))$ est la solution au problème posé, on trouve

que
$$\frac{d}{dt} V(x, y) = \frac{\partial V}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial V}{\partial y} \dot{y} = P \cdot (-Q) + Q \cdot (P) = 0$$

et par conséquent

$$\forall t, \quad V(x(t), y(t)) = V(x(0), y(0)) = V(1, 0) = 0$$

ce qui entraîne la relation $y^2 - x^3 + 1 = 0$. D'où, passant
dans le SD

$$\dot{y} = y^2 - 4(y^2 + 1) + 1 = -3(y^2 + 1)$$

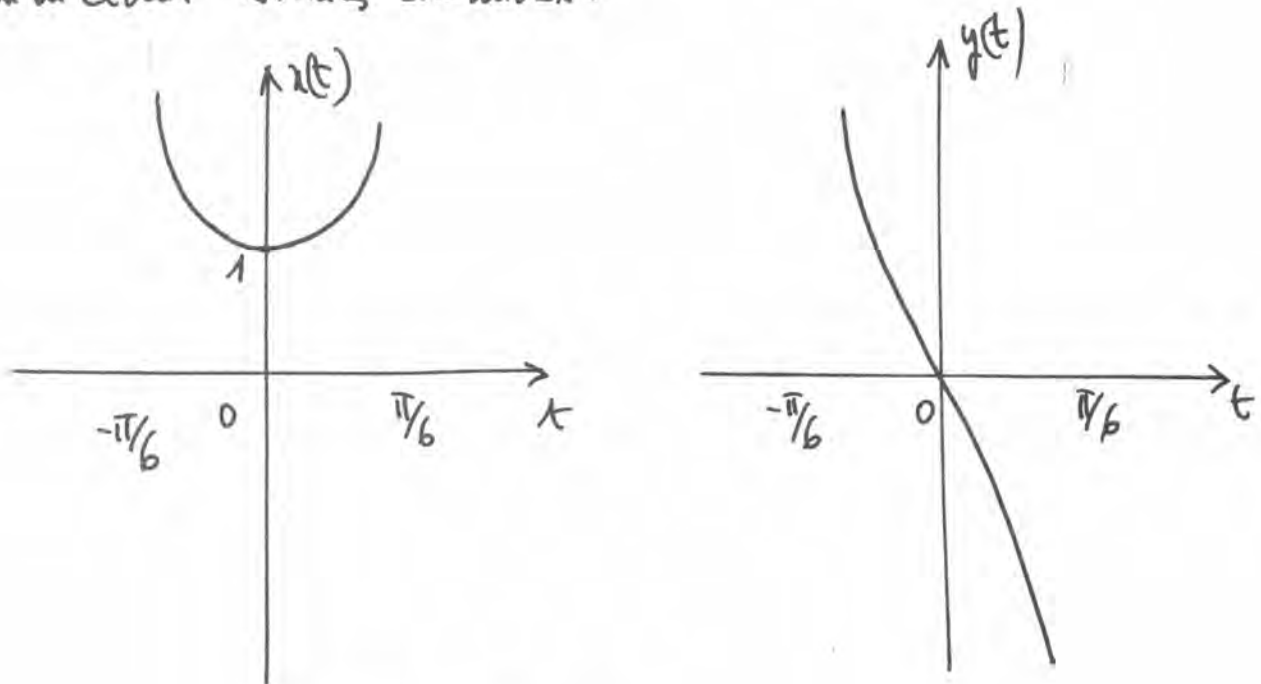
ce qui permet d'intégrer par séparation des variables:

$$\int_0^{y(t)} \frac{dy}{1+y^2} = -3t$$

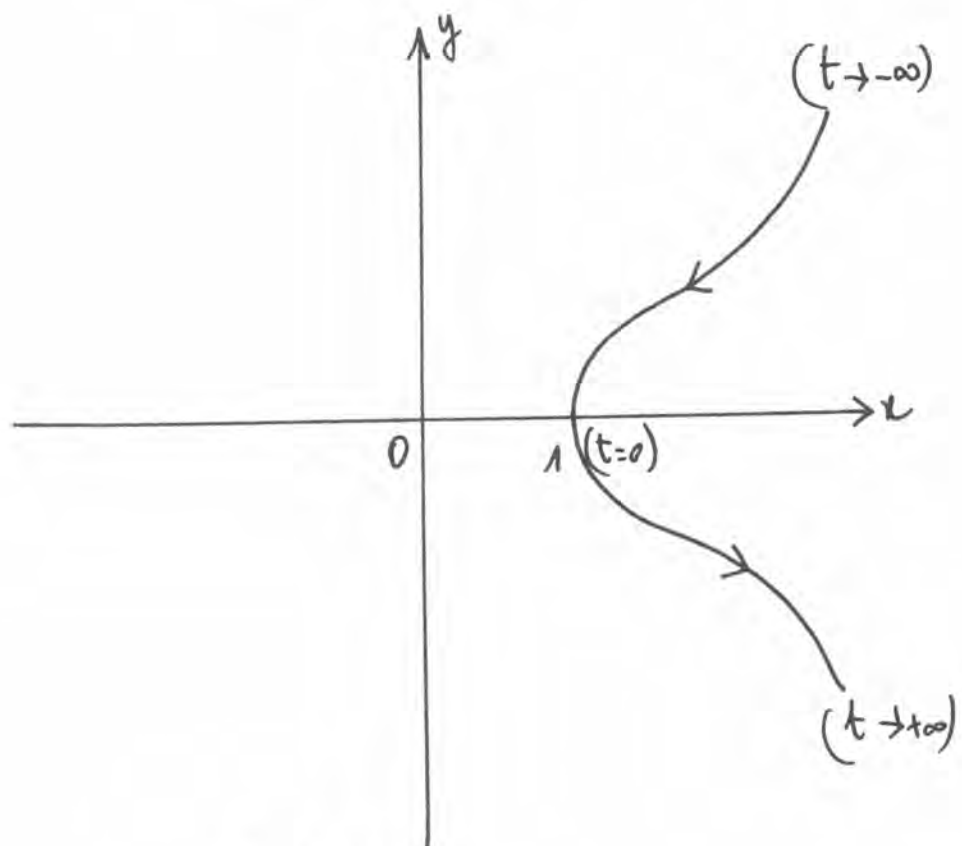
ce qui donne $y(t) = -\tan(3t)$, puis $x^3(t) = \frac{1}{\cos^2(3t)}$ C5

d'où $x(t) = \cos^{-2/3}(3t)$, pour $|t| < \pi/6$.

On en déduit les trajectoires demandées :



: trajectoires



: trajectoire

Problème 1: A) 1) on admet ici (cf leçon 27: suite de VA i C6

de même loi de Bernoulli...) l'existence d'une espèce de probabilité

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ avec $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, $\mathcal{F}$ tribu contenant
les ensembles cylindriques (de type $\{\omega \in \Omega / \pi_n(\omega) = (w_1, \dots, w_n)\}$
 $\in \mathcal{A}$, partie de $\{0, 1\}^n$) et $\mathbb{P}$ mesure de probabilité
telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall A \subset \{0, 1\}^n$, on ait

$$\mathbb{P}(\pi_n^{-1}(A)) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}_n(\omega)$$

avec $\mathbb{P}_n(\omega) = p^k q^{n-k}$ si $p = \frac{N}{M+N}$, $q = 1-p$

et k désigne le nombre de symboles 1 dans la suite finie ω .

Alors, $\{X=n\} = \pi_n^{-1}((0, \dots, 0, 1))$ d'après la loi de la VA X :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X=n) = q^{n-1} \cdot p$$

("loi binomiale négative d'ordre 1").

2) la f.g. de la VA X est donnée par

$$G_X(z) = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(X=n) \cdot z^n = \sum_{n \geq 1} p q^{n-1} z^n = \frac{pz}{1-qz}$$

pour $|z| < \frac{1}{q}$. Comme les VA (X_k) sont indépendantes,

celle de S_n est donnée par $G_X^n(z) = \frac{(pz)^n}{(1-qz)^n}$. Ainsi,

pour $n=2$, $G_{X_1+X_2}(z) = \left(\frac{pz}{1-qz}\right)^2 = \frac{p^2 z^2}{q} \left(\frac{1}{1-qz}\right)'$ (log

mit $G_{X_1+X_2}(z) = \frac{p^2 z^2}{q} \cdot \sum_{n \geq 1} n q^n z^{n-1}$, equi permet d'obtenir ^{C.7}

la loi de S_2 , donnée par

$$\forall n \geq 2, \quad P(X_1 + X_2 = n) = \frac{p^2}{q} (n-1) q^{n-1} = (n-1) p^2 q^{n-2}$$

Plus généralement

$$\forall m \geq n, \quad P(X_1 + \dots + X_n = m) = \frac{1}{n!} (G_X^n)^{(m)}(0) = \dots$$

3) On remarque, plus communément, que X est bien une VA :

$$\forall n \geq 1, \quad \{X = n\} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{X_1 + \dots + X_{k+1} = n, \mathcal{S} = k\}$$

est bien, en effet, en tant que union dénombrable d'éléments
de la tribu, un élément de $\mathcal{F}$. De plus

$$P(X=n) = \sum_{k \geq 0} P(X_1 + \dots + X_{k+1} = n, \mathcal{S} = k)$$

d'où, me l'indépendance des VA $\mathcal{S}$ et $X_1 + \dots + X_{k+1}$

$$P(X=n) = \sum_{k \geq 0} P(X_1 + \dots + X_{k+1} = n) \cdot P(\mathcal{S} = k)$$

Après 2), il vient donc

$$P(X=n) = \sum_{k \geq 0} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \frac{1}{n!} \left[\left(\frac{p z}{1 - q z} \right)^{k+1} \right]^{(n)}(0)$$

On doit justifier l'opération de dérivation terme à terme

C8

$$\left(\sum_{k \geq 0} e^{-1} \frac{1}{k!} \left(\frac{pz}{1-qz} \right)^{k+1} \right)^{(n)}(0) = \left(e^{-1} \cdot \frac{pz}{1-qz} \cdot \exp\left(\frac{1}{1-qz} \right) \right)^{(n)}(0)$$

pour conclure: il s'agit, au fond, de justifier l'opération sur la série d fonctions $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \left(\frac{dpz}{1-qz} \right)^k$, qui est immédiat (pu

$z \in]-\frac{1}{q}, \frac{1}{q}[$, la série exp. ayant un rayon de convergence ∞ ,

et la fonction $z \mapsto \frac{dpz}{1-qz}$ (étant bornée, avec ses dérivées, sur tout qtd de $]-\frac{1}{q}, \frac{1}{q}[$).

$$\begin{aligned} \text{B) 1) avec Leibniz, } L_n(x) &= e^x \sum_{k=0}^n C_n^k (x^n)^{(k)} \cdot (e^{-x})^{(n-k)} \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} C_n^k \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{k!} C_n^k x^k \in \mathbb{R}_n[X] \end{aligned}$$

i) pour $n > k > 0$, une intégration par parties donne

$$(x^k, L_n) = \int_0^\infty x^k (x^n e^{-x})^{(n)} dx = -k \int_0^\infty x^{k-1} (x^n e^{-x})^{(n-1)} dx$$

$$\text{: en itérant, on obtient } (-1)^k k! \int_0^\infty (x^n e^{-x})^{(n-k)} dx = 0.$$

Comme d'autre part $\{L_j\}_0^{n-1}$ constitue une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$,

on peut conclure.

(111)

3) Il n'agit de préciser les conditions de validité du calcul C9 formel suivant :

$$\sum_{n \geq 0} \frac{L_n(z)}{n!} z^n = \sum_{n \geq 0} \cdot \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{k!} C_n^k z^k \cdot z^{n-k}$$

$$= \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{k!} z^k \sum_{n \geq k} C_n^k z^n$$

car, par dérivation de la série géométrique $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$
 pour $|z| < 1$, on a

$$\frac{k!}{(1-z)^{k+1}} = \sum_{n \geq k} \frac{n!}{(n-k)!} z^{n-k}$$

soit $\sum_{n \geq k} C_n^k z^n = \frac{z^k}{(1-z)^{k+1}}$, ce qui permet alors de

conclure :

$$\sum_{n \geq 0} \frac{L_n(z)}{n!} z^n = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{z}{1-z} \right)^k \cdot \frac{1}{1-z} = \dots$$

Comme, d'après ce qui précède, et pour $|z| < 1$, on a

$$\sum_{k \geq 0} \sum_{n \geq k} \left| \frac{(-1)^k}{k!} C_n^k z^k z^{n-k} \right| < +\infty$$

(et vaut $\frac{1}{1-|z|} \cdot e^{|2z|/(1-|z|)}$), on sait que l'opération

d'intervention des sommations est liée.

C) d'après A) 3), on a $\forall n \geq 1$,

$$P(X=n) = \frac{1}{n!} e^{-\lambda} \cdot \frac{P}{q} \left(\frac{z}{1-z} e^{-\frac{\lambda z}{1-z}} \right)^{(n)}(0) \cdot q^n$$

avec $z = -\lambda \frac{p}{q}$. Soit, avec Leibniz

$$\begin{aligned} P(X=n) &= \frac{1}{n!} e^{-\lambda} p q^{n-1} \cdot \left(n \cdot \left(\frac{1}{1-z} e^{-\frac{\lambda z}{1-z}} \right)^{(n-1)}(0) \right) \\ &= \frac{1}{n!} e^{-\lambda} p q^{n-1} \cdot n L_{n-1} \left(-\lambda \frac{p}{q} \right) \\ &= \frac{1}{(n-1)!} p q^{n-1} e^{-\lambda} L_{n-1} \left(-\lambda \frac{p}{q} \right). \end{aligned}$$

Problème 2: A) 1) y_0 et y_1 sont solutions (l'équation

auxiliaire) c'est-à-dire $p^2 - c^2 = 0 \dots$, et il s'agit de fonctions indépendantes ($A \sinh t + B \cosh(1-t) = 0 \quad \forall t \Rightarrow A=B=0$ comme on le voit en fixant $t=0$ et $t=1$). Et, l'espace vectoriel des solutions de l'EDP homogène est de dimension 2 (cf leçon 24) : la solution demandée suit.

2) la solution générale de l'EDP avec second membre s'obtient par la méthode de Lagrange:

on pose donc $y(t) = A(t) m_{ct} + B(t) m_c(1-t)$, rec

$$\begin{cases} A'(t) m_{ct} + B'(t) m_c(1-t) = 0 \\ A'(t) c_{ct} - B'(t) c_c(1-t) = -\frac{1}{c} f \end{cases}$$

qui donne

$$\begin{cases} A'(t) = -\frac{1}{c m_c} f(t) m_c(1-t) \\ B'(t) = +\frac{1}{c m_c} f(t) m_{ct} \end{cases}$$

d'où, par quadrature

$$\begin{cases} A(t) = A_1 + \frac{1}{c m_c} \int_t^1 f(s) m_c(1-s) ds, & A_1 \in \mathbb{R} \\ B(t) = B_0 + \frac{1}{c m_c} \int_0^t f(s) m_{cs} ds, & B_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

avec, compte-tenu des conditions limites

$$\begin{aligned} y(0) &= B_0 m_c = \lambda \\ y(1) &= A_1 m_c = \mu \end{aligned}$$

l'expression demandée suit.

$$3) \quad y(t) \leq \frac{m_{ct} + m_c(1-t)}{m_c} \Delta V \mu + \frac{\sup(f)}{c m_c} \left(m_{ct} \int_t^1 m_c(1-s) ds + m_c(1-t) \int_0^t m_{cs} ds \right), \text{ et il suffit de calculer les intégrales définies.}$$

4) comme $\mu h e^t + \mu h c(1-t) = 2 \mu h \frac{c}{2} \text{ ch } c(t - \frac{1}{2}) \leq 2 \mu h \frac{c}{2} \text{ ch } \frac{c}{2} = \mu h c$
 $(0 \leq t \leq 1)$ ($\mu h c$)

$\frac{\mu h e^t + \mu h c(1-t)}{\mu h c} \in [0, 1]$, et la inclusion suit avec:
 $\boxed{\alpha = A = B = 1, \theta = \frac{1}{c^2}}$

B) 1) pour $t > 0$, on peut poser $x = \ln t$: si $y(t)$ est solution de l'EDO $-t^2 y'' - 2t y' + y = f(t)$, $z(x) = e^{-x} y(e^x)$ est

tel que 1. $y(t) = t^{\delta} z(\ln t)$

$-2t \cdot y'(t) = \delta t^{\delta-1} z(\ln t) + t^{\delta-1} z'(\ln t)$

$-t^2 \cdot y''(t) = \delta(\delta-1) t^{\delta-2} z(\ln t) + (2\delta) t^{\delta-2} z'(\ln t) + t^{\delta-2} z''(\ln t)$

Euler!

d'où, après simplification par t^{δ} , la nouvelle EDO en $z(x)$:

$-z''(x) - (1+2\delta) z'(x) + (1-2\delta + \delta(1-\delta)) z(x) = e^{-x} f(e^x)$

le choix de $\delta = -\frac{1}{2}$ conduit à la forme demandée, avec $c = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

2) en utilisant A) 4), et après quelques manipulations, on obtient

$\forall t \in [\alpha, \beta], \quad y(t) \leq \frac{1}{\sqrt{t}} \max(\sqrt{\alpha}, \mu \sqrt{\alpha}, \frac{4}{5} \sup_{t \in [\alpha, \beta]} \sqrt{t} f(t))$

d'autre part, en reprenant l'expression de y obtenue en A) 2),

on a aussi $-y(t) \leq \max(-\frac{1}{t}, -\mu, \frac{1}{c^2} \sup(f))$

d'où $y(t) \geq \min(\frac{1}{t}, \mu, \frac{1}{c^2} \inf(f))$, équivalente à

$\forall t \in [\alpha, \beta], \quad y(t) \geq \frac{1}{\sqrt{t}} \min(\sqrt{\alpha}, \mu \sqrt{\alpha}, \frac{4}{5} \inf_{t \in [\alpha, \beta]} \sqrt{t} f(t)).$

Préparation à l'épreuve d'Analyse & l'Agégation Interne 95/96

Problème n° 9

Exercice 1: soit K la fonction définie sur $[0,1] \times [0,1] \setminus \Delta$

par

$$K(x,t) = \begin{cases} (1-x) \cdot t, & \text{si } 0 \leq t < x \leq 1 \\ x \cdot (1-t), & \text{si } 0 \leq x < t \leq 1 \end{cases}$$

1) montrer que K se prolonge continuellement sur le carré $[0,1] \times [0,1]$

Considérer le problème aux limites

$$(PL)_\lambda \quad f \in \mathcal{C}^0([0,1]) : \begin{cases} \forall x \in [0,1], \int_0^1 K(x,t) f(t) dt = \lambda \cdot f(x) \\ f(0) = f(1) = 0 \end{cases}$$

2) montrer que $(PL)_\lambda$ n'admet de solution non $\equiv 0$ que si λ appartient à un ensemble dénombrable (à priori).

Exercice 2: existence, et calcul de l'intégrale généralisée

$$\int_0^\infty \ln(1 - e^{-t}) dt ?$$

Exercice 3: tracer l'allure des trajectoires du système différentiel

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X$$

Exercice 4: calculer la valeur de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(4n-1)^2}$.

Problème 1: (calcul des sommes de Gauss par la méthode de Dirichlet)

1) soit f la fonction 1-périodique, qui vaut $e^{2i\pi t^2}$ sur $t \in [0, 1]$:

a) si c_n désigne son $n^{\text{ième}}$ coefficient de Fourier, montrer que

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad \begin{cases} c_{2k} = \int_{-k}^{-k+1} e^{2i\pi t^2} dt \\ c_{2k+1} = -i \int_{-(k+\frac{1}{2})}^{-k+\frac{1}{2}} e^{2i\pi t^2} dt \end{cases}$$

b) pourquoi a-t-on $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n = 1$?

c) retrouver la valeur des intégrales de Fresnel

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(2\pi t^2) dt \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(2\pi t^2) dt.$$

Pour m entier ≥ 1 , on considère la fonction g 1-périodique
valant $\sum_{k=0}^{m-1} e^{i\pi \frac{(t+k)^2}{m}}$ pour $t \in [0, 1]$.

2) montrer que $\forall n \in \mathbb{Z}$, le $n^{\text{ième}}$ coefficient de Fourier de g est donné par

$$\int_{-\frac{1}{L}mn}^{m - \frac{1}{L}mn} e^{i\pi \frac{\theta^2}{m}} d\theta \cdot e^{-i\pi \frac{mn^2}{4}}$$

3) expliciter la valeur de $e^{-i\pi \frac{mn^2}{2}}$ (on distinguera les cas n pair et n impair)

4) en déduire la valeur de la somme de Gauss

$$G(m) = \sum_{k=0}^{m-1} e^{i\pi \frac{k^2}{m}}$$

Problème 2: (polynômes de Legendre)

Pour $x \in [-1, 1]$ et $t \in]-1, 1[$, on pose

$$\varphi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2xt + t^2}}$$

1) expliquer pourquoi, à $x \in [-1, 1]$ fixé, $q(x, \cdot)$ est développable en série entière (à l'origine).

2) montrer que le développement précédent a la forme

$$q(x, t) = \sum_{n \geq 0} P_n(x) \cdot t^n$$

où $\forall n \geq 0$, P_n est un polynôme à expliciter (à l'aide des polynômes de Tchebychev).

(on pose pour $x = \cos \theta$ et factoriser $1 - 2 \cos \theta \cdot t + t^2$)

3) justifier le calcul suivant

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-xt+t^2} \cdot \sqrt{1-2xu+u^2}} = \sum_{p \geq 0} \left(\sum_{n+m=p} \int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx \cdot t^n u^m \right)$$

où l'intégrale d qui se vaut $\frac{1}{\sqrt{t \cdot u}} \ln \frac{1 + \sqrt{t \cdot u}}{1 - \sqrt{t \cdot u}}$ pour

$t, u \in [0, 1[$

4) en déduire que

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \frac{2}{2n+1}, & n = m \end{cases}$$

Exercice 1 : 1) en écrivait, à $x_0 \in [0, 1]$ donné,

$$|(1-x) \cdot t - (1-x_0)x_0| = |(t-x_0)(1-x) + \underbrace{(x_0-x)}_{=0}| \leq |t-x_0| + |x-x_0|$$

on obtient, avec $\tilde{K}(x_0, x_0) = x_0(1-x_0)$, $K(x, t) - K(x_0, x_0) = O(\|(x, t) - (x_0, x_0)\|_{\infty}^2)$.

2) pour $f \in C^0([0, 1])$, on définit $F: x \in [0, 1] \mapsto \int_0^1 K(x, t) f(t) dt$:

$$F(x) = \int_0^x t f(t) dt \cdot (1-x) + \int_x^1 (1-t) f(t) dt \cdot x$$

montrons que F est dans C^2 , avec

$$F'(x) = -\int_0^x t f(t) dt + x f(x) \cdot (1-x) - (1-x) f(x) \cdot x + \int_x^1 (1-t) f(t) dt$$

puis

$$F''(x) = -x f(x) - (1-x) f(x) = -f(x)$$

Ainsi, si f est solution du $(P)_\lambda$, doit-on avoir

$$\lambda f'' + f = 0, \quad f(0) = f(1) = 0$$

ce qui impose $\lambda = \frac{1}{\omega^2}$ avec $\omega \in \pi \cdot \mathbb{Z}$ si l'on veut obtenir une solution non triviale.

Exercice 2: $\ln(1-e^{-t}) < 0$ et $\sim -e^{-t}$: $\sim \ln t$ ^{C2}
($t \rightarrow \infty$)

à la convergence par le critère de comparaison. On justifie le calcul suivant

$$\int_0^\infty \ln(1-e^{-t}) dt = \int_0^\infty -\sum_{n=1}^\infty \frac{e^{-nt}}{n} dt = -\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} \int_0^\infty e^{-nt} dt$$

$$= -\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = -\frac{\pi^2}{6} :$$

• la série de fonctions $\sum_{n=1}^\infty \frac{e^{-nt}}{n}$ converge uniformément sur tout compact $[E, T]$ de $]0, \infty[$ (car la rapidité de convergence de la série $\ln(1-z) = -\sum_{n=1}^\infty \frac{z^n}{n}$ vaut $1 > e^{-\varepsilon}$)

• comme $0 < \sum_{n=1}^N \frac{e^{-nt}}{n} < -\ln(1-e^{-t}) \quad \forall N \in \mathbb{N}^*, t > 0$, il y a convergence dominée.

Exercice 3: le polynôme caractéristique s'écrit

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & -4 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 7$$

à la valeur propre $\lambda = i\sqrt{7}$ on trouve associé le sous-espace propre

engendré par vecteurs de $\mathbb{C}^2$ $\begin{pmatrix} 4 \\ -1-i\sqrt{7} \end{pmatrix} = \vec{V}_1 - i\vec{V}_2$ ou

$\{\vec{V}_1, \vec{V}_2\}$ formant une base de $\mathbb{R}^2$. Alors,

$$\vec{z}(t) = e^{i\sqrt{7}t} (\vec{V}_1 - i\vec{V}_2) = \vec{x}(t) + i\vec{y}(t) \quad \text{est solution}$$

fondamentale du SD, et les trajectoires sont, dans $\{\vec{V}_1, \vec{V}_2\}$
121

de cercles centrés en 0, et parcourus dans le sens trigonométrique. C3
 Dans le repère original, il s'agit donc d'ellipses ...

Exercice 4: une décomposition en éléments simples donne

$$\frac{n}{(4n^2-1)^2} = \frac{1/8}{(2n-1)^2} - \frac{1/8}{(2n+1)^2}$$

il vient que $\forall N \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{n=1}^N \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{1}{8} \left(1 - \frac{1}{(2N+1)^2}\right)$: &
 nous veut $1/8$.

Problème 1:

1) a) $\forall k \in \mathbb{Z}$, $c_k = \int_0^1 e^{2i\pi t^2 - 2i\pi kt} dt$

en particulier,

$$c_{2k} = \int_0^1 e^{2i\pi \left((t-k)^2 - k^2\right)} dt = \int_{(t=k+\theta)-k}^{-k+1} e^{2i\pi \theta^2} d\theta$$

$$c_{2k+1} = \int_0^1 e^{2i\pi \left(\left(t - \frac{2k+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{2k+1}{2}\right)^2\right)} dt = -i \int_{\left(t = \frac{2k+1}{2} + \theta\right) - \left(k + \frac{1}{2}\right)}^{-\left(k - \frac{1}{2}\right)} e^{2i\pi \theta^2} d\theta$$

b) f est continue et ϕ^1 p.u.c.: d'après le thm de

Dirichlet, $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n \cdot e^{2i\pi n t}$: on obtient l'égalité demandée en faisant $t=0$. C4

c) ce qui donne

$$1 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi \theta} d\theta \right) (1-i)$$

$$\left(\text{détailler } \sum_{-2K}^{2K} c_n e^{2i\pi n t} = \sum_{-K}^K c_{2k} e^{4i\pi k t} + \sum_{-(K-1)}^{K-1} c_{2k+1} e^{2i\pi(2k+1)t} \right.$$

et faire $K \rightarrow +\infty$), soit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi \theta} d\theta = \frac{1+i}{\sqrt{2}} : \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(2\pi \theta) d\theta = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(2\pi \theta) d\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

2) par définition, $\forall n \in \mathbb{Z}$

$$c_n = \sum_{k=0}^{m-1} \int_0^1 e^{\frac{2i\pi}{m}((t+k)^2 - mnt)} dt = \sum_{k=0}^{m-1} \int_{-\frac{mn}{2}+k}^{-\frac{mn}{2}+k+1} e^{\frac{2i\pi}{m}\theta} d\theta \cdot e^{-\frac{2i\pi}{m}(\frac{mn}{2})}$$

$$\left((t+k)^2 - mnt = t^2 + 2\left(k - \frac{mn}{2}\right)t + k^2 = \left(t + \left(k - \frac{mn}{2}\right)\right)^2 + k m n - \frac{m^2 n^2}{4} \right)$$

et le conclure suit avec Charles.

3) si n est pair, $e^{-i\pi \frac{mn^2}{2}} = 1$; si n est impair,

on obtient

$$e^{-i\pi \frac{mn^2}{2}} = \begin{cases} 1, & n \\ -i, & n \\ -1, & n \\ i, & n \end{cases} \quad \begin{matrix} m \equiv 0 \pmod{4} \\ m \equiv 1 \pmod{4} \\ m \equiv 2 \pmod{4} \\ m \equiv 3 \pmod{4} \end{matrix}$$

4) comme en 1) b), on a

$$G(m) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n$$

soit, avec 2) et 3)

$$G(m) = \sum_{n \text{ pair}} \int_{\frac{1}{L}mn}^{\frac{1}{L}(m+1)n} e^{2i\pi \frac{\theta}{m}} d\theta + \sum_{n \text{ impair}} \int_{\frac{1}{L}mn}^{\frac{1}{L}(m+1)n} e^{2i\pi \frac{\theta}{m}} d\theta \cdot \left. \right\}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi \frac{\theta}{m}} d\theta \cdot \left(1 + \left\{ \cdot \right\} \right)$$

d'où, avec 1) c)

$$G(m) = \begin{cases} (1+i)\sqrt{m} & , n \equiv 0 [4] \\ \sqrt{m} & , n \equiv 1 [4] \\ 0 & , n \equiv 2 [4] \\ i\sqrt{m} & , n \equiv 3 [4] \end{cases}$$

Problème 2 :

1) le plus simple est d'invoquer le principe de substitution :

la fraction $z \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-z}}$ est développable en série entière

en 0, avec un rayon de convergence $R=1$:

à $x \in [-1, 1)$ donné, si $|t| < \sqrt{1-x^2} - |x|$, on C6

$2|t| + t^2 < 1$ et $\varphi(x, \cdot)$ se décompose en série entière.

remarque: le principe de substitution n'est pas explicitement au programme (on trouve sa démonstration dans J. Dieudonné, Calcul infinitésimal p. 170- , par exemple). L'argument (de produit) de 2) est donc mieux adapté.

2) posant $x = \cos \theta$ avec $\theta \in [0, \pi]$, on a la factorisation

$$1 - 2xt + t^2 = (1 - te^{i\theta})(1 - te^{-i\theta})$$

On sait (formule du binôme) que, pour $|t| < 1$,

$$\frac{1}{1 - te^{i\theta}} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} e^{in\theta} t^n$$

D'après la règle du produit de 2 séries entières, on a, toujours pour $|t| < 1$

$$\frac{1}{1 - te^{i\theta}} \cdot \frac{1}{1 - te^{-i\theta}} = \sum_0^\infty c_n(\theta) t^n$$

$$\text{avec, } \forall n \geq 0, \quad c_n(\theta) = \sum_{\substack{p+q=n \\ p, q \geq 0}} \frac{1}{2^{2p}} \binom{2p}{p} \cdot \frac{1}{2^{2q}} \binom{2q}{q} e^{i(p-q)\theta}$$

En dérivant par $f(x,t)$ la fonction ainsi développée,
 on a $f^2 = \varphi^2$ et $f(x,0) = 1 = \varphi(x,0)$:
 comme $f(x,\cdot)$ et $\varphi(x,\cdot)$ sont continues, il en
 résulte que, pour $|t|$ assez petit, $f(x,t) = \varphi(x,t)$.
 Le développement en série entière de $\varphi(x,\cdot)$ s'écrit donc
 sous la forme

$$\varphi(\cos \theta, t) = \sum_0^{\infty} c_n(\theta) t^n$$

avec

$$c_n(\theta) = \frac{1}{2^n n!} \sum_{p+q=n} C_{2p}^p C_{2q}^q \cdot T_{p-q}(\cos \theta)$$

$$\text{car } c_n(\theta) = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n \varphi}{\partial t^n}(x,0) \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \cos(p-q)\theta =$$

$$= T_{p-q}(\cos \theta), \quad T_k \text{ désignant le } k^{\text{ème}} \text{ polynôme de Tchebychev}$$

(cf problème n° 6). Ainsi a-t-on

$$\forall n \geq 0, \quad c_n = \frac{1}{2^n n!} \sum_{p+q=n} C_{2p}^p C_{2q}^q \cdot T_{p-q}$$

3) la série précédente converge en t sur tout

x de $] -1, 1[$, à x près de $[1, 1]$: on peut donc

effectuer le produit des séries (absolument convergentes) et, ^{C8}
 en reprenant la démonstration de ce point (théorème de Mautens)
 on s'assure de la convergence uniforme en x sur $[-1, 1]$,
 à t et $u \in [0, 1[$ fixés: on peut donc intégrer
 terme à terme.

Posant $S = t+u$, $P = t \cdot u$, le changement de variable

$$x = \frac{S(1+P)}{4P} + \frac{1-P}{2\sqrt{P}} \cdot \sqrt{\frac{S^2}{4P} - 1} \operatorname{ch} \theta$$

élimine les $\sqrt{\cdot}$.

On conclut enfin à l'aide du développement de $\ln \frac{1+v}{1-v}$

en série entière: la suite $\left(\sqrt{\frac{2n+1}{2}} \cdot P_n \right)_{n \geq 0}$ est orthogonale

pour le produit scalaire $(f, g) = \int_{-1}^1 f g dx$. C'est la suite

des polynômes orthogonaux de Legendre.

Préparation à l'épreuve d'Analyse de l'Agégation Interne 95/96

Problème n° 10

Exercice 1: (généralisation des exercices, problèmes n° 2 et n° 8)

$$\varphi? \quad \overline{OH} = k \overline{HM}, \quad k \in \mathbb{R} \text{ fixé}$$

Exercice 2: Soit le système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 \cdot y \\ \dot{y} = x(1-y^2) \end{cases}$$

déterminer les positions d'équilibre ; vérifier que $x^2 \cdot (y^2 - 1)$ est une intégrale première ; déterminer la solution du problème de condition initiale $x(0) = 1, y(0) = 0$.

Exercice 3: (à l'aide d'une série entière,) résoudre le problème de condition initiale

$$\begin{cases} (1-x^2)y'' - 2xy' + 12y = 0 \\ y(0) = 0, y'(0) = 3 \end{cases}$$

Problème 1:

1) préciser le domaine de définition de la fonction

$$f_a(z) = \sqrt{\frac{a}{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-az}}{e^x - z} \cdot \frac{dx}{x^{3/2}}$$

où a est un paramètre positif.

2) montrer que f_a est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -\infty, 1[$.

3) pour $\lambda \geq 0$, on pose $F(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-(x^2 + \lambda/x)} dx$:

calculer $F(\lambda)$ (sachant que $F(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$).

4) montrer que f_a est développable en série entière à l'origine, avec

$$\forall |z| < 1, \quad f_a(z) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2\sqrt{an}} \cdot z^{n-1}$$

5) justifier la relation

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-ax}}{e^x - 1} \cdot \frac{dx}{x^{3/2}} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2\sqrt{an}}, \quad a > 0.$$

Problème 2: (polynômes de Bernstein)

Pour f continue sur $[0, 1]$, on pose $\forall n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$:

$$B_n(f)(x) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} x^j (1-x)^{n-j} f\left(\frac{j}{n}\right)$$

1) pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $\varphi(t) = (xe^t + 1 - x)^n$
si $t \in \mathbb{R}$: en calculant $\varphi(0)$, $\varphi'(0)$ et $\varphi''(0)$ de 2
manières différentes, calculer $B_n(1)$, $B_n(x)$, $B_n(x^2)$.

2) montrer que $B_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{u} x^u$ sur $[0, 1]$.

Pour $f, g \in \mathcal{C}_R^0([0, 1])$, on dit $f \leq g$ si $\forall x \in [0, 1]$, on a:

$$f(x) \leq g(x)$$

Un endomorphisme A (i.e. du $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathcal{C}_R^0([0, 1])$)
est dit positif si $\forall f \geq 0$, on a $A(f) \geq 0$.

3) i) montrer que si A est un endomorphisme positif de
 $\mathcal{C}_R^0([0, 1])$, alors $\forall f \in \mathcal{C}_R^0([0, 1])$, $|A(f)| \leq A(|f|)$

ii) soit $f \in \mathcal{C}_R^0([0, 1])$ et $\varepsilon > 0$ fixés: montrer qu'il
existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x, y \in [0, 1]$, on a

$$|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon + \alpha(x-y)^2$$

iii) en déduire que, pour tout endomorphisme A de $\mathcal{C}_R^p([0,1])$, on a

$$\forall y \in [0,1], \quad |A(f) - f(y) \cdot A(1)| \leq \varepsilon A(1) + \alpha \cdot (A(x^2) - 2y \cdot A(x) + y^2 \cdot A(1)).$$

4) Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'endomorphismes de $\mathcal{C}_R^0([0,1])$

telle que

a) $\forall n$, A_n est positif.

b) les suites $(A_n(1))$, $(A_n(x))$ et $(A_n(x^2))$ convergent uniformément sur $[0,1]$, respectivement vers 1, x et x^2 .

i) montrer que la suite $(A_n(x^2) - 2x \cdot A_n(x) + x^2 A_n(1))$ converge uniformément vers 0 sur $[0,1]$.

ii) montrer que, $\forall f \in \mathcal{C}_R^0([0,1])$, la suite $(A_n(f))$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

5) déduire de tout cela le théorème de Weierstrass: toute fct continue sur $[0,1]$ est limite unif. d'une suite de polynômes.

Corrige du problème n° 10

C1

Exercice 1: on adopte les notations de l'exercice 1 du problème 2:

la mise en équation conduit à l'EDO d'ordre 2

$$\rho \rho'' + (k-1) \rho'^2 + k \rho^2 = 0$$

où ne figure pas la variable θ : on pose donc

$$\rho' = f(\rho) \quad : \quad \rho'' = f'(\rho) \cdot \rho' \quad \text{et l'EDO devient}$$

$$\rho f f' + (k-1) f^2 + k \rho^2 = 0$$

en posant $g = f^2$, on obtient une EDO linéaire d'ordre 1:

$$\rho g' + 2(k-1)g = -2k\rho^2$$

et la méthode de variation de la constante donne, pour $k \neq 0$

$$g(\rho) = \int^{\rho} \rho^{2-2k} (B^2 - \rho^{2k}) \quad , \text{ avec } B \in \mathbb{R}$$

soit

$$\rho' = \pm \rho^{1-k} \sqrt{B^2 - \rho^{2k}}$$

qui donne, par quadrature $\rho^k(\theta) = \pm B \sin\left(\frac{\theta - \theta_0}{k}\right)$:

modulo une similitude, la poutre est du type

$$\rho^k = A \sin \theta$$

($k=2$ donne une lemniscate ; $k=-\frac{1}{2}$ une parabole,
 $k=\frac{1}{2}$ une hyperbole)

Tandis que $k=0$ conduit à l'EDO $\rho \rho'' - \rho'^2 = 0$

qui s'intègre par double quadrature, pour donner une spirale logarithmique ($\rho = C e^{\theta - \theta_0}$).

Exercice 2: les équilibres s'obtiennent en résolvant le système

$$\begin{cases} x^2 y = 0 \\ x(1-y^2) = 0 \end{cases}$$

ce qui conduit aux pôles de l'axe Oy. En a bien

$$x^2 y \cdot \frac{\partial V}{\partial x} + x(1-y^2) \cdot \frac{\partial V}{\partial y} = x^2 y \cdot (2x(y^2-1)) + x(1-y^2)(2xy) = 0$$

La trajectoire recherchée est contenue dans la ligne de niveau

$$x^2 \cdot (y^2 - 1) = 1(-1) = -1$$

ce qui conduit à considérer l'EDO d'ordre 1 :

$$\dot{x} = \pm v \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{v^2}}$$

qui, par quadrature donne

$$x^v(t) = \frac{1}{\omega^2 t}$$

d'où, comme $x(0) = +1$, la solution demandée $x(t) = \frac{1}{\cos t}$ définie par $|t| < \frac{\pi}{2}$, tandis que $y(t) = \frac{\dot{x}}{x^v}(t) = \sin t$.

Exercice 3: $y(x) = \sum_0^{\infty} a_n x^n$ solution de l'ED

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} = (n-3)(n+4)a_n$$

et, compte-tenu des données initiales, $a_0 = 0$, $a_1 = 3 \dots$ ce qui

$$\text{donne } y(x) = -5x^3 + 3x.$$

Problème 1:

1) $f(z)$ est définie sur $\mathbb{C} \setminus]1, +\infty[$: comme

$$\frac{e^{-\frac{1}{z}}}{|e^z - z| z^{\frac{3}{2}}} \sim_{(+\infty)} \frac{e^{-z}}{z^{\frac{3}{2}}} = o\left(\frac{1}{z^2}\right) \quad \text{l'intégrale converge}$$

absolument en $+\infty$, tandis qu'en $0+$, et pour $z \notin]1, \infty[$

$$\left| \frac{e^{-q_n}}{(e^1 - z)^{3/2}} \right| \leq \frac{e^{-q_n}}{|e^1 - z| \cdot x^{3/2}} \xrightarrow{(x \rightarrow 0+)} 0 \quad \text{+ coisance comprise} \quad C4$$

ce qui montre que l'intégrant a pôle en $x=0$ et est continue.

Pour z réel > 1 , l'intégrale diverge logarithmiquement.

2) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $g_n(z) = \int_{\frac{1}{n}}^n \frac{e^{-q_n}}{e^1 - z} \cdot \frac{dx}{x^{3/2}}$ est

de bon b' sur $]-\infty, 1[$ (la fonction $(x, z) \mapsto \frac{e^{-q_n}}{e^1 - z} \cdot \frac{1}{x^{3/2}}$

étant b' sur $]0, \infty[\times]-\infty, 1[$) et, $\forall z < -1$, on

$$g_n'(z) = \int_{\frac{1}{n}}^n \frac{e^{-q_n}}{(e^1 - z)^2} \cdot \frac{dx}{x^{3/2}}. \quad \text{De plus, pour } z \leq -1 - \varepsilon$$

$$\text{avec } \varepsilon > 0, \text{ on a } 0 < \frac{e^{-q_n}}{(e^1 - z)^2 x^{3/2}} < \frac{e^{-q_n}}{(e^1 - (1 - \varepsilon))^2 x^{3/2}} = \varphi_\varepsilon(x)$$

et l'intégrale $\int_0^\infty \varphi_\varepsilon(x) dx$ converge : ceci permet de voir

que $g_n' \xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} g_\varepsilon$ sur $]-\infty, -1 - \varepsilon]$ avec

$$\forall z < -1, \quad g_\varepsilon(z) = \int_0^\infty \frac{e^{-q_n}}{(e^1 - z)^2 x^{3/2}} dx$$

Il en résulte que f est b' sur $]-\infty, -1[$, avec $f'(z) = \dots$

3) la fonction F est continue sur $\mathbb{R}$ (: chaque fonction ^{C5})

$$F_n(x) = \int_0^x e^{-(x^2 + \frac{d^2}{x^2})} dx \quad \text{d'or, et} \quad F_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{u} F \text{ sur } \mathbb{R}$$

De plus, chaque fct F_n est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $\forall x \in \mathbb{R}$

$$F'_n(x) = -2x \int_0^x e^{-(x^2 + \frac{d^2}{x^2})} \frac{dx}{x^2}$$

et, comme

$$0 < \int_0^{\infty} e^{-(x^2 + \frac{d^2}{x^2})} \frac{dx}{x^2} < \frac{1}{n^2} \cdot \frac{\sqrt{u}}{2}$$

la suite $(F'_n)_n$ converge uniformément sur tout qtd de $\mathbb{R}_+$:

F est donc dérivable, avec

$$F'(x) = \int_0^{\infty} -2x \cdot e^{-(x^2 + \frac{d^2}{x^2})} \frac{dx}{x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Pour $x > 0$, le changement de variable $y = \frac{1}{x}$ donne alors

$$F'(x) = -2 \int_0^{\infty} e^{-(\frac{1}{y^2} + y^2)} dy = -2 F(x)$$

d'où $F(x) = C e^{-2x}, \quad x > 0$ avec

$$C = F(0) = \frac{\sqrt{u}}{2} : \quad \forall x \geq 0, \quad F(x) = \frac{\sqrt{u}}{2} e^{-2x}.$$

4) il s'agit de justifier l'intégration terme à terme suivante: C6

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{a}{z}} \cdot \sum_{n \geq 0} e^{-(n+1)z} z^n \cdot \frac{dz}{z^{3/2}} =$$

$$\sum_{n \geq 0} \int_0^{\infty} e^{-\left((n+1)z + \frac{a}{z}\right)} \frac{dz}{z^{3/2}} \cdot z^n$$

car il vient ensuite, $\forall n \geq 0$

$$\int_0^{\infty} e^{-\left((n+1)z + \frac{a}{z}\right)} \frac{dz}{z^{3/2}} = \frac{2}{\sqrt{a}} F(\sqrt{(n+1)a})$$

par les changements de variables $x = y^2$ puis $y = \frac{\sqrt{a}}{z}$.

Mais comme $\int_0^{\infty} \frac{e^{-a/z}}{e^z - |z|} \frac{dz}{z^{3/2}}$ converge pour $|z| < 1$,

on justifie classiquement par convergence dominée.

5) f_a est continue sur le disque $\overline{D}(0; 1)$, tandis que

la série entière obtenue en 4) converge pour $z = 1$: on

en déduit donc à l'égalité demandée avec le théorème d'Abel.

Problème 2:

C7

$$\begin{aligned} 1) \quad \varphi(t) &= (1 + \alpha t + \alpha \frac{t^2}{2} + b(t^3))^n \\ &= 1 + n\alpha t + \left(n\frac{\alpha}{2} + \frac{n(n-1)}{2}\alpha^2\right)t^2 + b(t^3) \end{aligned}$$

donc $\varphi(0) = 1$, $\varphi'(0) = n\alpha$, $\varphi''(0) = n\alpha(1 + (n-1)\alpha)$

d'autre part, avec Newton, $\varphi(t) = \sum_{j=0}^n C_n^j (1-\alpha)^{n-j} \alpha^j e^{jt}$

donc, par dérivation terme à terme

$$\sum_{j=0}^n C_n^j (1-\alpha)^{n-j} \alpha^j = 1$$

$$\sum_{j=0}^n C_n^j (1-\alpha)^{n-j} \alpha^j \cdot j = \varphi'(0)$$

$$\sum_{j=0}^n C_n^j (1-\alpha)^{n-j} \alpha^j \cdot j^2 = \varphi''(0)$$

En comparant, il vient donc $B_n(1) = 1$

$$B_n(\alpha) = \alpha$$

$$B_n(\alpha) = \frac{1}{n}\alpha + \frac{n-1}{n}\alpha^2$$

2) d'après 1), $|B_n(\alpha) - \alpha| = \left| \frac{\alpha - \alpha^2}{n} \right| \leq \frac{1}{n}$, $\forall \alpha \in [0, 1]$.

3) i) comme $-|f| \leq f \leq |f|$, il vient l'encadrement

$$-A(|f|) = A(-|f|) \leq A(f) \leq A(|f|)$$

d'où la conclusion.

ii) d'après le théorème de Heine, il existe $\delta_\varepsilon > 0$ tel que CB

$$\forall x, y \in [0, 1], |x - y| \leq \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

d'autre part, $F(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{(x - y)^2}$ est une fonction continue sur le compact $K_\varepsilon: [0, 1] \times [0, 1]_y, |x - y| \geq \delta_\varepsilon$

et y est donc bornée : $\alpha = \sup_{K_\varepsilon} |F|$ convient.

iii) d'après i) et ii) !

4) i) les fonctions u et v étant bornées sur $[0, 1]$,

la suite converge uniformément sur $[0, 1]$ vers la fonction

$$v^2 - 2u \cdot v + u^2 = 0$$

ii) d'après 3) iii) érit pour A_n et i), on

$$\forall y \in [0, 1], |A_n(f) - f \cdot A_n(1)|(y) \leq \varepsilon A_n(1)(y) +$$

$$+ \alpha (A_n(v)(y) - 2y \cdot A_n(u)(y) + y^2 \cdot A_n(1)(y))$$

et la conclusion suit en faisant $n \rightarrow \infty$.

5) -