



# **PREPARATION A L'AGREGATION INTERNE DE MATHEMATIQUES**

**Exemples d'Analyse et Probabilité**

**TOME 1**



# TABLE DES MATIERES DU TOME 1

|                                                                                                                                                       | Pages   |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------|
| <b>1</b> Exemples d'étude de suites de nombres réels ou complexes .....                                                                               | 1-5     |
| <b>2</b> Exemples d'étude de suites ou de séries divergentes .....                                                                                    | 6-11    |
| <b>3</b> Exemples d'étude de suites définies par une relation de récurrence<br>$u_{n+1} = f(u_n)$ .....                                               | 12-22   |
| <b>5</b> Exemples de suites de polynômes orthogonaux, et applications ..                                                                              | 23-39   |
| <b>6</b> Comparaison sur des exemples des divers modes de convergence<br>d'une suite ou d'une série de fonctions d'une variable réelle ....           | 40-52   |
| <b>7</b> Exemples d'applications du théorème des accroissements finis<br>pour une fonction numérique d'une variable réelle .....                      | 53-59   |
| <b>8</b> Exemples d'encadrement de fonctions numériques .....                                                                                         | 60-64   |
| <b>9</b> Exemples d'utilisation d'intégrales pour l'étude de suites et de<br>séries .....                                                             | 65-71   |
| <b>10</b> Exemples de calcul d'intégrales définies .....                                                                                              | 72-80   |
| <b>11</b> Exemples d'utilisation de développements limités .....                                                                                      | 81-84   |
| <b>12</b> Exemples de développements asymptotiques .....                                                                                              | 85-96   |
| <b>13</b> Exemples d'étude de convergence et de convergence absolue<br>d'intégrales impropres .....                                                   | 97-107  |
| <b>14</b> Exemples d'étude de fonction définie par une intégrale .....                                                                                | 108-121 |
| <b>15</b> <b>16</b> Exemples d'étude des séries numériques et exemples<br>d'étude de séries réelles ou complexes non absolument<br>convergentes ..... | 122-127 |
| <b>17</b> Recherche des valeurs approchées de la somme d'une série<br>convergente .....                                                               | 128-143 |

Ce document de travail couvre les leçons de la seconde épreuve d'Analyse qui ont été faites dans les Années 92-94 à l'Université de Nancy I dans le cadre de la Préparation à l'Agrégation Interne.

Le lecteur remarquera l'absence d'énoncés détaillés : à lui de se poser des questions concernant l'exemple cité, et de trouver des éléments de réponse dans des corrigés plus ou moins détaillés.

Le niveau et l'originalité des exemples sont assez inégaux ; les références sont le plus souvent données, mais elles renvoient parfois à une littérature qui ne figure pas à la bibliothèque de l'Agrégation Interne. C'est là sans doute un reproche justifié à l'utilisation directe du document, et l'on prévoit, pour la suite, de traiter des exemples systématiquement tirés d'un manuel scolaire.

On espère cependant que ce recueil sera utile au candidat : pour **la préparation à l'Ecrit d'Analyse**, car de nombreux exemples constituent autant de problèmes d'Analyse Classique faisant appel aux théorèmes fondamentaux (dans cet esprit, on a joint une liste de  $5 \times 14$  exercices) et, par **la préparation à l'Oral** il serait bon de constituer des fiches sur des thèmes intervenant dans plusieurs Leçons :

$$\sum_1^{\infty} \frac{\sin(nt)}{n}, \quad H_n(x), \quad \ddot{x} + x = |\sin t|, \dots$$

## - 1 -

## EXEMPLES D'ETUDE DE SUITES DE NOMBRES REELS OU COMPLEXES

Les leçons [2], [3], [9], [23] fournissent déjà de nombreux exemples, sans oublier les leçons [15], [16] où on considèrera les suites de sommes partielles des séries étudiées.

On complète ici par quelques exemples classiques, ou plus difficiles.

$$[1] \quad a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

$$b_n = a_n + \frac{1}{n!}$$

$$c_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

1) La suite  $(a_n)$  est **de Cauchy**, car, si  $p > q$

$$a_p - a_q = \frac{1}{(q+1)!} + \dots + \frac{1}{p!} \leq \frac{1}{(q+1)!} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{p-q-1}\right)$$

$$\leq \frac{2}{(q+1)!} \xrightarrow{(q \rightarrow \infty)} 0$$

elle converge donc, vers  $e = \sum_0^{\infty} \frac{1}{n!}$ .

2) Les suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  sont **adjacentes** :

$(a_n)$  est évidemment croissante ;

$$b_{n+1} - b_n = -\frac{n-1}{(n+1)!} < 0 ;$$

$$0 < b_n - a_n \xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} 0$$

par conséquent  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = e$ .

3) La limite commune  $e$  des suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  n'est pas rationnelle car avec  $e = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ , on aurait :

$$1 + \frac{1}{n!} + \dots + \frac{1}{q!} < \frac{p}{q} < 1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{q!} + \frac{1}{q!}$$

qui donne, en multipliant par  $q!$

$$N_q < p(q-1)! < N_q + 1$$

avec  $N_q \in \mathbb{N}$ , ce qui est absurde.

4) D'après la formule du binôme de Newton, on a

$$\begin{aligned} c_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{1}{n^k} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right). \end{aligned}$$

Cette expression montre que la suite  $(c_n)$  est **croissante**, et **majorée** par la suite  $(a_n)$  : elle est donc convergente, et sa limite est  $\leq e$ . Mais encore

$$\frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) < \frac{1}{k!} \quad \text{pour tout } n$$

ce qui permet de justifier le fait que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \sum_{k=0}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \right) = e$$

(argument de convergence dominée : à  $\varepsilon > 0$  donné, on commence par choisir  $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$  tel que

$$\sum_{N_\varepsilon+1}^{\infty} \frac{1}{k!} < \varepsilon$$

et alors, si  $n > N_\epsilon$ , on peut écrire que

$$0 < e - c_n < \sum_0^{N_\epsilon} \left( \frac{1}{k!} - \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \right) + 2\epsilon$$

$$< 3\epsilon$$

pour  $n \geq N'_\epsilon \geq N_\epsilon \dots$ .

5) Dans la résolution approchée du problème de condition initiale

$$\begin{cases} \dot{x} = x \\ x(0) = 1 \end{cases} \quad (: \text{ de solution } x(t) = e^t)$$

selon la **technique d'itération** (leçon de cours [8]), on est conduit à l'instant  $t = 1$ , à considérer la suite  $(a_n)$ , tandis que la **méthode d'Euler** (leçon de cours [13]), apparaît la suite  $(c_n)$ .

[2]  $(a_n)$  est une suite telle que, pour tout  $n$  et  $m$

$$a_n + a_{n-1} \leq a_{n+m} \leq a_n + a_m + 1$$

alors la suite  $\left(\frac{a_n}{n}\right)$  converge.

1) On commence par montrer que la suite  $\left(\frac{a_{2n}}{2^n}\right)$  est convergente :

Comme  $\frac{a_n}{n} - \frac{1}{2n} \leq \frac{a_{2n}}{2^n} \leq \frac{a_n}{n} + \frac{1}{2n} \quad \forall n \geq 1$ , une récurrence montre en effet que

$$\left| \frac{a_{2n+1}}{2^{n+1}} - \frac{a_{2n}}{2^n} \right| \leq \frac{1}{2^{n+1}}, \quad \forall n \geq 0.$$

: la série de terme général  $\left( \frac{a_{2n+1}}{2^{n+1}} - \frac{a_{2n}}{2^n} \right)$  est absolument convergente, donc convergente, ce qui permet de conclure.

2) Si on écrit  $n \in \mathbb{N}$  en binaire :

$$n = 2^m + \epsilon_1 2^{n-1} + \dots + \epsilon_m \quad \text{où } \epsilon = 0 \text{ ou } 1$$

il vient

$$a_n \leq a_{2^m} + \varepsilon_1 a_{2^{m-1}} + \dots + \varepsilon_m a_1 + (1 + \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_m)$$

$$a_n \geq a_{2^m} + \varepsilon_1 a_{2^{m-1}} + \dots + \varepsilon_m a_1 - (1 + \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_m)$$

par conséquent

$$\left| \frac{a_n}{n} - \frac{2^n}{n} \frac{a_{2^m}}{2^n} - \varepsilon_1 \frac{2^{m-1}}{n} \frac{a_{2^{m-1}}}{2^{m-1}} - \dots - \frac{\varepsilon_m}{n} \frac{a_1}{1} \right| \leq \frac{m+1}{n} \leq \frac{\ell n(n)+1}{n \ell n(2)}$$

et tend vers 0 lorsque  $n \rightarrow +\infty$

3) On va donc procéder par découpage : à  $\delta > 0$  donné, il existe  $N_\delta \in \mathbb{N}^*$  tel que

$$\ell - \delta \leq \frac{a_{2^k}}{2^k} \leq \ell + \delta, \text{ si } k \geq N_\delta$$

(:  $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{2^n}}{2^n}$  existe, d'après 1)). Alors, pour  $n$  assez grand

$$\left| \frac{a_n}{n} - \ell \right| \leq \left| \frac{2^n}{n} \left( \frac{a_{2^m}}{2^m} - \ell \right) + \dots + \frac{\varepsilon_m}{n} \left( \frac{a_1}{1} - \ell \right) \right| + \frac{\ell n(n) + K(\delta)}{n \ell n(2)}$$

car  $1 = \frac{2^m}{n} + \varepsilon_1 \frac{2^{m-1}}{n} + \dots + \frac{\varepsilon_m}{n}$  donne

$$\left| \frac{a_n}{n} - \ell \right| \leq \delta \left( \frac{2^n}{n} + \varepsilon_1 \frac{2^{m-1}}{n} + \dots + \varepsilon_{m-N_\delta} \frac{2^{N_\delta}}{n} \right) + \frac{1}{n} C(\delta) + \frac{\ell n(n) + K(\delta)}{n \ell n(2)}$$

... ce qui permet de conclure.

4) Ce critère de convergence est utilisé dans l'étude du nombre de rotation d'un morphisme de  $\mathbb{U}$ .



**3)**  $a_n \geq 0$  tel que  $a_{nm} \leq a_n a_m \quad \forall n, m$  alors la suite  $(a_n^{\frac{1}{n}})$  converge.

1)  $\ell = \inf_{n \geq 1} a_n^{\frac{1}{n}}$  existe et il s'agit de montrer que, si  $b > \ell$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel

que, si  $n \geq N$ , on a  $\ell \leq a_n^{\frac{1}{n}} < b$

2) (par définition de la borne inférieure), il existe  $m \in \mathbb{N}$  tel que  $c = a_m^{\frac{1}{m}} < b$ . Pour  $n > m$ , si on effectue la division euclidienne  $n = mq + r$ , avec  $0 \leq r \leq m-1$ , il vient

$$a_n \leq a_m^q a_r \leq c^n \frac{a_r}{c^r} \leq K c^n$$

où  $K = \sup_{0 \leq r \leq m-1} \frac{a_r}{c^r} \in \mathbb{R}^+$ .

Par conséquent :  $a_n^{\frac{1}{n}} \leq K^{\frac{1}{n}} c$

et, si  $n$  est assez grand,  $a_n^{\frac{1}{n}} < b$  (puisque  $\lim_{n \rightarrow \infty} K^{\frac{1}{n}} c = c < b$ ).

3) Critère utile dans la formule de rayon spectral.

**4)**  $(\varepsilon_n)_{n \geq 0} \subset \{-1, 0, 1\}$

$$a_n = \varepsilon_0 \sqrt{2 + \varepsilon_1 \sqrt{2 + \varepsilon_2 \sqrt{2 + \dots \sqrt{2 + \varepsilon_n \sqrt{2}}}}}$$

la suite  $(a_n)$  converge.

1) La suite est bien définie, car  $\sqrt{2 + \sqrt{2}} + \dots < 2$ .

2) En raisonnant par récurrence sur  $n$ , on montre que

$$a_n = 2 \sin \left( \frac{\pi}{4} \sum_{k=0}^n \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1 \dots \varepsilon_k}{2^k} \right)$$

3) Et comme la série de terme général  $\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1 \dots \varepsilon_k}{2^k}$  est absolument convergente, on conclut.

**Références :**

**2)** Polya-Szegő 1, Arnold 2

**3)** Demazure

**4)** Polya-Szegő 1

## - 2 -

### EXEMPLES D'ETUDE DE SUITES OU DE SERIES DIVERGENTES

**1**  $(\cos n), (\sin n); (\cos n\theta), \sin(n\theta).$

1) Pour montrer que la suite  $(\cos n)$  diverge, on peut **raisonner par l'absurde**, en supposant que  $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \cos n$  existe, et en cherchant une contradiction à l'aide des

**opérations sur les limites de suites convergentes** : comme  $\cos 2n = 2\cos^2 n - 1$ ,  $\ell$  doit être tel que  $\ell = 2\ell^2 - 1$ , ce qui conduit à  $\ell = 1$  ou  $\ell = -\frac{1}{2}$ .

La relation  $\cos(n+1) = \cos n \cos 1 - \sin n \sin 1$  montre que  $\ell' = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin n$  existe et, comme  $\cos^2 n + \sin^2 n = 1$  on doit avoir  $\ell^2 + \ell'^2 = 1$ , ce qui donne :

si  $\ell = 1$ ,  $\ell' = 0$

si  $\ell = -\frac{1}{2}$ ,  $\ell' = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

Comme  $\sin 2n = 2 \sin n \cos n$ , on doit aussi avoir  $\ell' = 2\ell\ell'$  ce qui impose  $\ell = 1$ ,  $\ell' = 0$  et entre en contradiction avec  $\ell = \ell \cos 1 - \ell' \sin 1$  car  $\cos 1 \neq 1$ .

2) On montre que **l'ensemble  $\{\cos n, n \in \mathbb{N}\}$  est partout dense dans  $[-1, +1]$**  (ce qui entraîne la divergence de la suite).

Plus généralement, si  $\theta_0 \notin 2\pi\mathbb{Q}$  ( $\theta_0$  angle non commensurable avec  $\pi$ ), alors l'orbite  $\{e^{in\theta_0} / n \in \mathbb{N}\}$  de 1 par la rotation d'angle  $\theta_0$  est partout dense sur le cercle-unité  $\mathbb{U}$  du plan complexe.

Au contraire, il est clair que si  $\theta_0 = 2\pi \frac{p}{q}$  avec  $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ , la suite  $(e^{in\theta_0})$  admettra comme valeurs d'adhérence les points  $\{e^{in\theta_0}\}_{n=0}^{n=q-1}$  (on suppose  $\frac{p}{q}$  irréductible).

Soit  $N \in \mathbb{N}^*$ , et divisons  $\mathbb{U}$  en  $N$  arcs de même longueur  $\frac{2\pi}{N}$ . Les points  $e^{in\theta_0}$  sont 2 à 2 distincts (car  $e^{in\theta_0} = e^{im\theta_0} \Rightarrow (n-m)\theta_0 \in 2\pi\mathbb{Z}$  et  $\theta_0 \notin 2\pi\mathbb{Q}$ ). Par conséquent, 2 des  $(N+1)$  points  $(1, e^{i\theta_0}, \dots, e^{iN\theta_0})$  se trouvent sur le même arc et, (\*) s'il s'agit des points  $e^{ip\theta_0}$  et  $e^{iq\theta_0}$ , cela signifie que

---

(\*) Principe des boîtes de DIRICHLET, selon Arnold, 1.

$$|e^{i(p-q)\theta_0} - 1| \leq 2\sin\left(\frac{\pi}{N}\right)$$

Ainsi, à  $\varepsilon > 0$  donné, on peut trouver  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  tel que

$$|e^{in_\varepsilon\theta_0} - 1| \leq \varepsilon$$

et, comme  $e^{in_\varepsilon\theta_0} \neq 1$ , cela permet de construire de proche en proche une suite  $(\varphi(n))$  telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{i\varphi(n)\theta_0} = 1.$$

Ainsi 1 est-il **valeur d'adhérence** de la suite  $(e^{in\theta_0})$  (donc de la suite  $(\cos n\theta_0)$ ).

Mais le même raisonnement montre qu'il en est ainsi de tout point  $e^{i\theta}$  de  $\mathbb{U}$  :

En effet, les points  $(e^{ikn_\varepsilon\theta_0})_k$  sont 2 à 2 distants de moins de  $\varepsilon$ , et ils sont tous distincts, par conséquent, il en existe un,  $e^{ikn_\varepsilon\theta_0}$  tel que

$$|e^{i\theta} - e^{ikn_\varepsilon\theta_0}| \leq \varepsilon$$

d'où la conclusion.

$$\boxed{2} \quad \left( \frac{\operatorname{tg} n}{n} \right)$$

1) Si la suite était convergente, d'après la relation trigonométrique

$$\frac{\operatorname{tg}(n+1)}{n+1} = \frac{1}{n+1} \frac{\frac{\operatorname{tg} n}{n} + \frac{1}{n}}{1 - \operatorname{tg} n \frac{\operatorname{tg} n}{n}}$$

la limite serait nulle.

2) (d'après la leçon 23), on sait qu'il existe deux suites  $(p_j)$  et  $(q_j)$  qui tendent en croissant vers  $+\infty$  et qui sont telles que, pour tout  $j$

$$a) \quad \left| \frac{\pi}{2} - \frac{p_j}{q_j} \right| < \frac{1}{q_j^2}$$

b)  $p_j \cdot q_{j-1} - p_{j-1} q_j = (-1)^{j-1}$

c)  $q_j$  impair

Dans ces conditions, pour  $j$  assez grand, on a

$$\begin{aligned} |\operatorname{tg} p_j| &= \left| \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} q_j - \left( \frac{\pi}{2} - \frac{p_j}{q_j} \right) q_j \right) \right| \\ &= \left| \cotg \left( \frac{\pi}{2} - \frac{p_j}{q_j} \right) q_j \right| \\ &> \cotg \frac{1}{q_j} \end{aligned}$$

d'où  $\left| \frac{\operatorname{tg} p_j}{p_j} \right| > \frac{1}{p_j} \cotg \frac{1}{q_j}$

avec  $\frac{1}{p_j} \cotg \frac{1}{q_j} \underset{j \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2}$

ce qui contredit 1), et permet ainsi de conclure à la divergence de la suite  $\left( \frac{\operatorname{tg} n}{n} \right)$ .

**3**  $(a_n)$  est une suite qui tend en croissant vers  $+\infty$  de sorte que  $a_{n+1} - a_n \rightarrow 0$   
(exemple :  $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ )  
étude de la suite  $(e^{2i\pi a_n})$ .

1) Pour voir que la suite  $(e^{2i\pi a_n})$  diverge, il suffit, d'après le **critère de Cauchy**, de montrer qu'il existe une suite extraite  $(a_{\varphi(n)})$  telle que

$$\forall n, \quad |e^{2i\pi a_{\varphi(n+1)}} - e^{2i\pi a_{\varphi(n)}}| > \sqrt{3}.$$

2) Pour cela, il suffit de s'assurer que

$$\frac{1}{3} \leq a_{\varphi(n+1)} - a_{\varphi(n)} \leq \frac{2}{3}.$$

Or, comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_{n+1} - a_n) = 0$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que si  $n \geq N$ ,

$$0 < a_{n+1} - a_n < \frac{1}{3}.$$

D'autre part, comme  $\lim_{p \rightarrow +\infty} a_p = +\infty$ , si  $\varphi(n)$  est supposé connu, l'ensemble

$$\left\{ p / a_p - a_{\varphi(n)} \geq \frac{1}{3} \right\} \text{ est non vide :}$$

si on désigne par  $\varphi(n+1)$  son **plus petit élément**, alors :

$$\frac{1}{3} \leq a_{\varphi(n+1)} - a_{\varphi(n)} \leq \frac{2}{3}$$

(car si on avait  $a_{\varphi(n+1)} - a_{\varphi(n)} > \frac{2}{3}$ , cela nierait la définition de  $\varphi(n+1)$ ) : d'où la conclusion.

**4**  $\theta \notin \mathbb{Q}$ , étude de la suite  $(x_n = n\theta - [n\theta])$ .  
 $(n\theta - [n\theta])$ .

On va montrer que la suite est partout dense dans  $[0,1]$  (donc divergente) et, plus précisément, qu'elle est **équirépartie**, dans le sens où :

pour tout  $[\alpha, \beta] \subset [0,1]$ , si  $v_n(\alpha, \beta) = |\{x_n / x_n \in [\alpha, \beta]\}|$  alors

$$v_n(\alpha, \beta) \underset{(n \rightarrow +\infty)}{\sim} n(\beta - \alpha).$$

1) La suite  $\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{n=N} e^{2i\pi k x_n} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$  pour tout entier  $k > 0$  ; en effet

$$\sum_{n=1}^{n=N} e^{2i\pi k x_n} = \sum_{n=1}^{n=N} e^{2i\pi k n \theta} = e^{2i\pi k \theta} \cdot \frac{1 - e^{2i\pi k N \theta}}{1 - e^{2i\pi k \theta}} \text{ est une suite bornée.}$$

2) Par conséquent, pour tout polynôme trigonométrique

$$P(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{k=K} (a_k \cos(2k\pi x) + b_k \sin(2k\pi x))$$

on a

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{n=N} P(x_n) = a_0 = \int_0^1 P(x) dx$$

3) Pour  $\alpha, \beta \in ]0, 1[$ , et pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe deux polynômes trigonométriques  $p_\varepsilon$  et  $P_\varepsilon$  tels que

$$p_\varepsilon < \chi_{[\alpha, \beta]} < P_\varepsilon$$

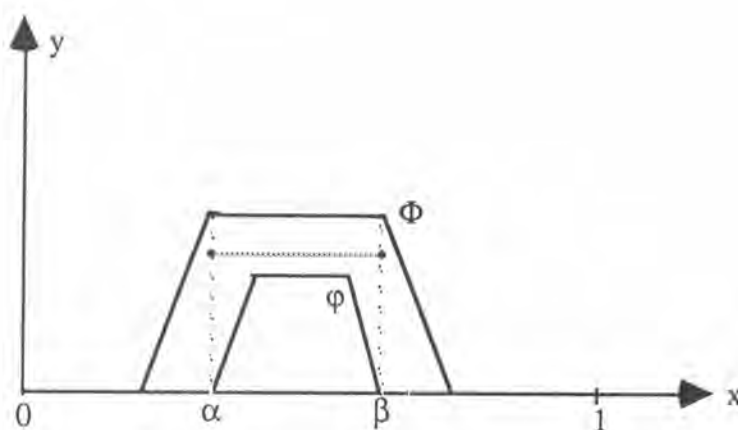
et

$$\int_0^1 (P_\varepsilon - p_\varepsilon) dx < \varepsilon.$$

En effet, il existe pour commencer deux fonctions continues  $\alpha$  et  $\Phi$  à support dans  $[0, 1]$  et telles que

$$\varphi < \chi_{[\alpha, \beta]} < \Phi$$

$$\int_0^1 (\Phi - \varphi) dx < \varepsilon$$



Ensuite, les suites de Féjer des 1-périodisées de  $\varphi$  et  $\Phi$  convergent uniformément vers  $\varphi$  et  $\Phi$  sur  $[0, 1]$  (: Leçon Série de Fourier), ce qui permet de conclure.

4) Par conséquent

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{n=N} p_{\varepsilon}(x_n) - \int_0^1 p_{\varepsilon}(x) dx &< \frac{1}{N} v_N(\alpha, \beta) - (\beta - \alpha) \\ &< \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{n=N} p_{\varepsilon}(x_n) - \int_0^1 p_{\varepsilon}(x) dx \end{aligned}$$

donne, en faisant tendre  $N$  vers  $+\infty$  :

$$\beta - \alpha = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} v_N(\alpha, \beta)$$

(il existe  $N_{\varepsilon} \in \mathbb{N}$  tel que, si  $N > N_{\varepsilon}$ , on ait :

$$2\varepsilon < -\varepsilon - \int_0^1 (P_{\varepsilon} - p_{\varepsilon}) dx < \frac{1}{N} v_N(\alpha, \beta) - (\beta - \alpha) < \int_0^1 (P_{\varepsilon} - p_{\varepsilon}) dx + \varepsilon < 2\varepsilon$$

d'où la conclusion annoncée.

**5** Dans la Leçon **3** , prendre un exemple de **suite oscillante**.

**6** Leçon **15** , exemples **1** et **3** de **séries divergentes**.

**Références :**

- 2** Revue de l'A
- 3** Ovaert-Verley, Analyse 1
- 4** Polya-Szegő 1.

# - 3 -

## EXEMPLES D'ETUDE DE SUITES DEFINIES PAR UNE RELATION DE RECURRENCE $u_{n+1} = f(u_n)$

### 1) $f$ affine sur $\mathbb{R}^N$

$$f(u) = A.u + b$$

où  $A \in M_N(\mathbb{R})$ ,  $b \in \mathbb{R}^N$  sont donnés : avec  $N = 2$  ou  $3$ , on pourra mettre en évidence les phénomènes signalés dans la Leçon de Cours correspondante à l'aide de quelques exemples :

$$A = P.B.P^{-1}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$1) \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

cas où on se ramène à supposer que  $b = 0$ , par le changement de variable  $v = u - \ell$ , avec

$$\ell = (I - B)^{-1}.b.$$

On expliquera ici l'importance de la position initiale par rapport **aux sous-espaces stables contractant et dilatant**, et on observera le caractère **oscillant** pour la valeur propre **(-1)**.

$$2) \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad B' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \cos 1 & -\sin 1 \\ 0 & \sin 1 & \cos 1 \end{pmatrix}$$

qui exhibent des phénomènes d'**oscillation** ou de **densité** (: selon la commensurabilité de l'angle de rotation avec le nombre  $\pi$ ).



$$3) \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

On expliquera ici que la suite ne peut converger que si  $b \in \text{Im}(I-A)$ , et on assistera alors à un phénomène de **résonance-terme séculaire**.

Dans le même ordre d'idée, on pourra aussi étudier **une équation aux différences linéaires à coefficients constants d'ordre 2 ou 3** : voir l'exemple [6] de la Leçon [19], qu'on pourra traiter aussi par la technique matricielle précédente, et qu'on pourra compléter par une autre, à coefficients variables ( $u_{n+1} = f_n(u_n)$ ) avec l'exemple [7] de la même Leçon [19].

## [2] $f$ homographique sur $\mathbb{R}$

$$u_{n+1} = \frac{3u_n+2}{u_n+3}, \quad u_0 \neq -3$$

$$\frac{f(x)-\sqrt{2}}{f(x)+\sqrt{2}} = \frac{3-\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}} \cdot \frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}$$

conduit à faire le changement de variable

$$v = \frac{u-\sqrt{2}}{u+\sqrt{2}}$$

qui transforme la relation de récurrence en

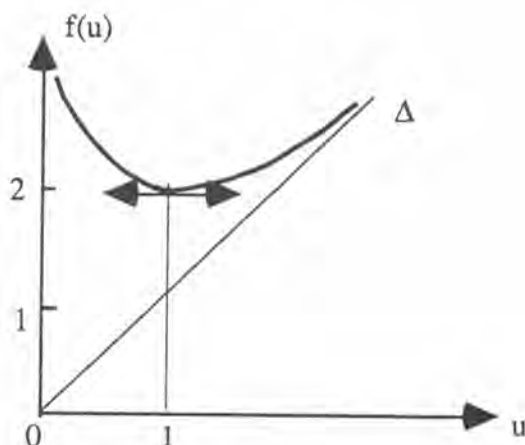
$$v_{n+1} = \frac{3-\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}} \cdot v_n$$

et donne 
$$v_n = \left( \frac{3-\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}} \right)^n v_0 :$$

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \sqrt{2}.$$

$$[3] \quad \begin{cases} u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n} \\ u_0 > 0 \end{cases}$$

1)



$u_{n+1} > u_n$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$  (si la suite  $(u_n)$  était bornée elle convergerait vers un point fixe de  $f$ ).

2) Si  $v = u^2$ ,

$$v_{n+1} = v_n + 2 + \frac{1}{v_n}$$

: comme  $v_{n+1} > v_n + 2$ ,  $v_n > v_0 + 2n$ . En posant

$$v_n = v_0 + 2n + \delta_n, \text{ il vient}$$

$$\delta_{n+1} = \delta_n + \frac{1}{v_n} < \delta_n + \frac{1}{v_0 + 2n}$$

ce qui entraîne

$$\begin{aligned} \delta_n &< \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{v_0 + 2p} < \frac{1}{v_0} + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p} \\ &< C_0 + \frac{1}{2} \ln(n) \end{aligned}$$

et, par conséquent

$$v_n \underset{(n \rightarrow +\infty)}{\sim} 2n \text{ donc } u_n \underset{(+\infty)}{\sim} \sqrt{2n}.$$

3) De plus, on a

$$\begin{aligned} v_n &= v_0 + 2n + \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{v_p} \\ &= v_0 + 2n + \frac{1}{2} \ln n + o(\ln n) \end{aligned}$$

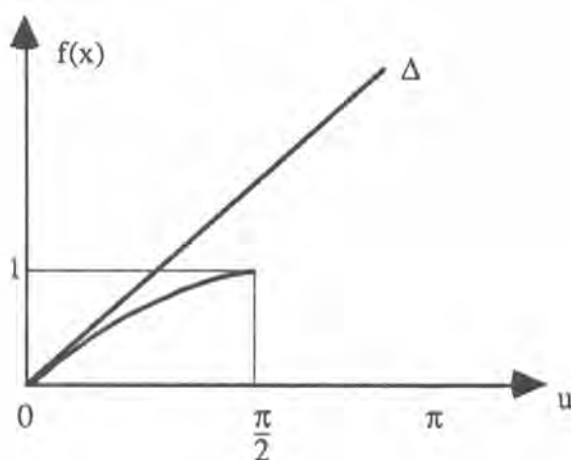
donc

$$u_n = \sqrt{2n} + \frac{\ln n}{4\sqrt{2n}} + o\left(\frac{\ln n}{\sqrt{n}}\right).$$

4

$$\begin{cases} u_{n+1} = \sin(u_n) \\ u_0 \in ]0, \pi[ \end{cases}$$

1)



$u_{n+1} \leq u_n, u_n \geq 0$  : la suite converge, vers 0.

2) On veut préciser le comportement de  $(u_n)$ , en justifiant le calcul formel suivant :

$$\text{si } u_n \sim \frac{C}{n^\alpha}, \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\sin u_n}{u_n} \text{ donne en comparant les DL}_0 :$$

$$" 1 - \frac{1}{6} \cdot \frac{C^2}{n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{3\alpha}}\right) = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) "$$

d'où  $\frac{\alpha}{n} = \frac{C^2}{6n^2\alpha}$  et  $\alpha = \frac{1}{2}$ ,  $C = \sqrt{3}$

l'équivalent attendu serait  $u_n \underset{(n \rightarrow +\infty)}{\sim} \sqrt{\frac{3}{n}}$ .

3) Pour  $\lambda > 0$ , on considère donc la suite

$$\left( u_n^\lambda = \frac{\lambda}{\sqrt{n}} \right)_{n \geq 1}$$

et, en vue de la comparer à  $(u_n)$ , on commence par étudier les quotients :

$$\frac{u_{n+1}^\lambda}{u_n^\lambda} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2n} + \frac{3}{8n^2} - \dots$$

par conséquent

$$a) \quad \frac{u_{n+1}^\lambda}{u_n^\lambda} < 1 - \frac{1}{2n} + \frac{3}{8n^2} < 1 - \frac{1}{6} (u_n^\lambda)^2$$

pourvu que :  $\frac{1}{2n} > \frac{1}{6} \cdot \frac{\lambda^2}{n}$ , soit  $\lambda < \sqrt{3}$  (et  $n \geq N$  assez grand) ;

$$b) \quad \frac{u_{n+1}^\lambda}{u_n^\lambda} > 1 - \frac{1}{2n} > 1 - \frac{1}{6} (u_n^\lambda)^2 + 1 - \frac{1}{120} (u_n^\lambda)^4$$

pourvu que :  $\frac{1}{2n} < \frac{1}{6} (u_n^\lambda)^2 - \frac{1}{120} (u_n^\lambda)^4$ , soit  $\lambda > \sqrt{3}$  (et  $n \geq N$  assez grand).

4) On fixe  $\lambda < \sqrt{3}$  : Comme  $u_{N+p}^\lambda \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{} 0$ , il existe  $p \in \mathbb{N}$  tel que l'on ait  $u_N > u_{N+p}^\lambda$  et alors, d'après le point a) précédent, il vient que

$$u_{N+1} = \sin(u_N) > \sin(u_{N+p}^\lambda) > u_{N+p}^\lambda - \frac{1}{6} (u_{N+p}^\lambda)^3 > u_{N+p}^\lambda$$

et, par récurrence, si  $n \geq N$

$$u_n > u_{n+p}^\lambda$$

c'est-à-dire

$$\sqrt{n} u_n > \lambda \cdot \sqrt{\frac{n}{n+p}}$$

Comme  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n}{n+p}} = 1$ , et quitte à diminuer un peu  $\lambda$ , on a donc montré que, si  $\lambda < \sqrt{3}$ , il existe un rang  $N_\lambda$ , à partir duquel on a :

$$\sqrt{n} \cdot u_n > \lambda.$$

5) De la même façon, on montrerait que, si  $\lambda > \sqrt{3}$ ,  $\sqrt{n} \cdot u_n < \lambda$ , à partir d'un certain rang.

6) Il résulte des points 4) et 5), que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \cdot u_n = \sqrt{3}$ .

(: à  $\epsilon > 0$  donné, en prenant  $\lambda = \sqrt{3} \pm \epsilon$  dans 4), 5) on peut trouver  $N_\epsilon \in \mathbb{N}$  tel que, si  $n \geq N_\epsilon$ , on ait

$$\sqrt{3} - \epsilon < \sqrt{n} \cdot u_n < \sqrt{3} + \epsilon).$$

**5) Le calcul des nombres de Catalan : exemple [8] de la Leçon [19].**

**6) Une résolution d'équation numérique par une technique d'itération : exemple [1] de la Leçon [7], et Leçon [4].**

**7) Une étude de cas non linéaire :  $f_\mu(x) = \mu x(1-x)$ .  $\mu$  est un paramètre qui varie entre 0 et 4,  $x_0 \in [0,1]$  (fonction logistique).**

En faisant varier  $\mu$ , on peut passer en revue quelques cas de comportement typiques de la non-linéarité.

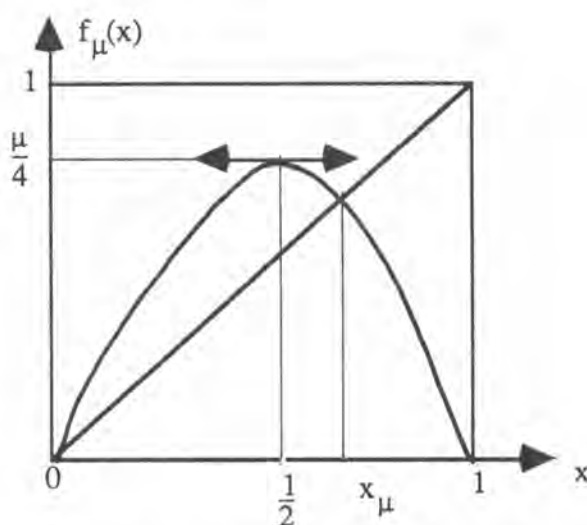
1) Pour  $0 < \mu < 1$ , 0 est le seul point fixe, et  $(u_n)$  tend en décroissant vers 0. De plus,

$$|f'_\mu(x)| = \mu|1-2x| \leq \mu < 1$$

et la convergence est  $\mu$ -géométrique.

2) Pour  $\mu > 1$ , il apparaît le nouveau point fixe

$$x_\mu = 1 - \frac{1}{\mu} \in ]0,1[ :$$



Comme  $f'_\mu(x_\mu) = 2 - \mu$ , on voit le rôle des valeurs 2 et 3 du paramètre :

3) Pour  $1 < \mu < 2$ , comme  $f'_\mu(0) = \mu$ ,  $0$  devient instable.

Graphiquement, on observe que :

$$\begin{cases} \text{si } 0 < u_0 < x_\mu, \text{ la suite } (u_n) \uparrow x_\mu \\ \text{si } x_\mu < u_0 < 1, \text{ la suite } (u_n) \downarrow x_\mu \end{cases}$$

et on justifie ces observations, en étudiant la fonction

$$g_\mu(x) = f_\mu(x) - x$$

(on explicitera les calculs pour  $\mu = \frac{3}{2}$ , par exemple).

4) Pour  $2 < \mu < 3$ , la suite  $(u_n)$  perd son caractère monotone avec le changement de signe de  $f'_\mu(x_\mu)$ . Pour étudier les suites extraites  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$ , on est amené à considérer la fonction itérée

$$f_\mu^2 = f_\mu \circ f_\mu$$

donnée par  $f_\mu^2(x) = \mu^2 x(1-x) \cdot (1-\mu x(1-x))$

et l'écart  $g_\mu^2(x) = f_\mu^2(x) - x$

(on fera les calculs sur l'exemple  $\mu = \frac{5}{2}$ ).

5) L'étude de l'équation

$$g_\mu^2(x) = \mu x(x-x_\mu)(-\mu^2 x^2 + \mu(\mu+1)x - (\mu+1)) = 0$$

montre qu'elle possède, outre les racines 0 et  $x_\mu$  et si le discriminant

$$\Delta_\mu = \mu^2(\mu+1)^2 - 4\mu^2(\mu+1) = \mu^2(\mu+1)(\mu-3) > 0$$

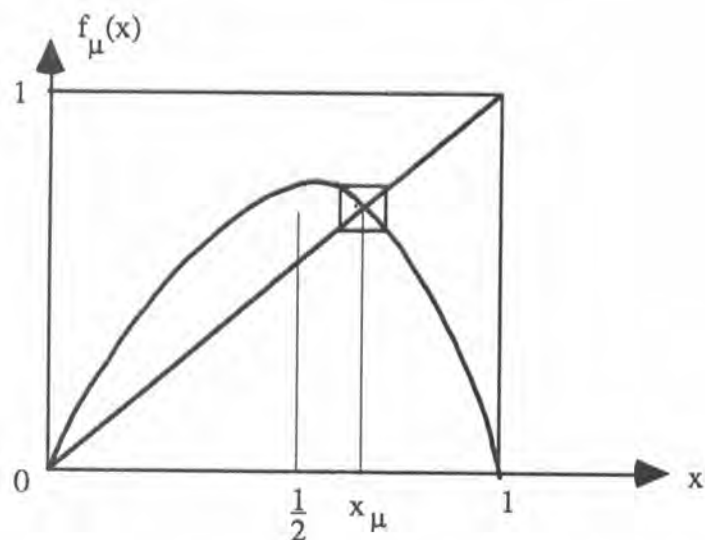
deux nouvelles racines :

$$x_\mu^\pm = \frac{\mu+1 \pm \sqrt{(\mu+1)(\mu-3)}}{2\mu}.$$

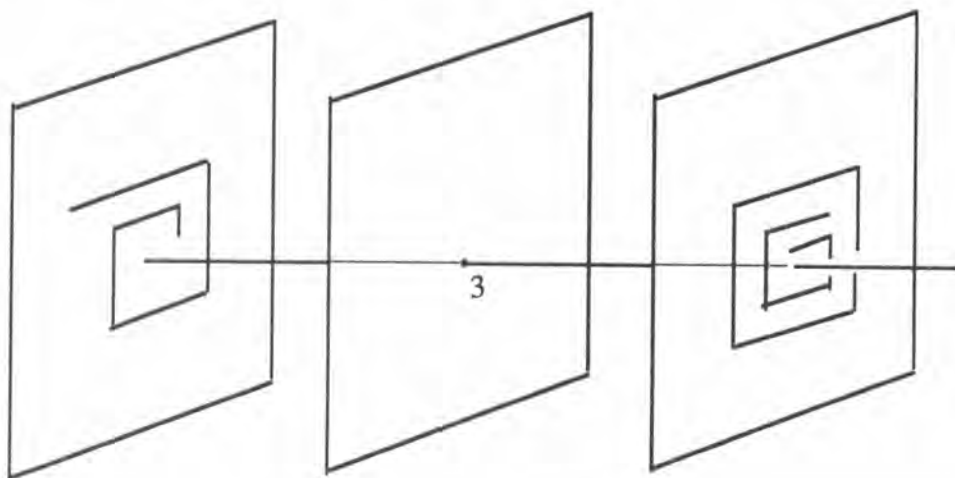
En termes de  $f_\mu$ , cela signifie que, pour  $\mu > 3$ ,

$$f_\mu(x_\mu^\pm) = x_\mu^\mp$$

Ainsi, si  $u_0 = x_\mu^-$ ,  $u_1 = x_\mu^+$  et  $u_{2n} = u_0$ ,  $u_{2n+1} = u_1$  : la suite  $(u_n)$  est 2-périodique :



Lorsque  $\mu$  traverse la valeur 3, le point fixe  $x_\mu$  perd sa stabilité, au profit d'un 2-cycle :



(On comparera avec le phénomène d'Andronov-Hopf, étudié dans la Leçon [21], Exemple [9] ).



6) Le calcul de  $(f_\mu^2)'(x_\mu^\pm) = -\mu^2 + 2\mu + 4$  montre que, pour  $\mu > 1 + \sqrt{6}$ , le 2-cycle perd à son tour sa stabilité ... au profit d'un 4-cycle ...

7) On termine en étudiant le cas limite  $\mu = 4$  :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 4u_n(1-u_n) \\ u_0 \in ]0, 1[ \end{cases}$$

a) A l'aide du changement de variable

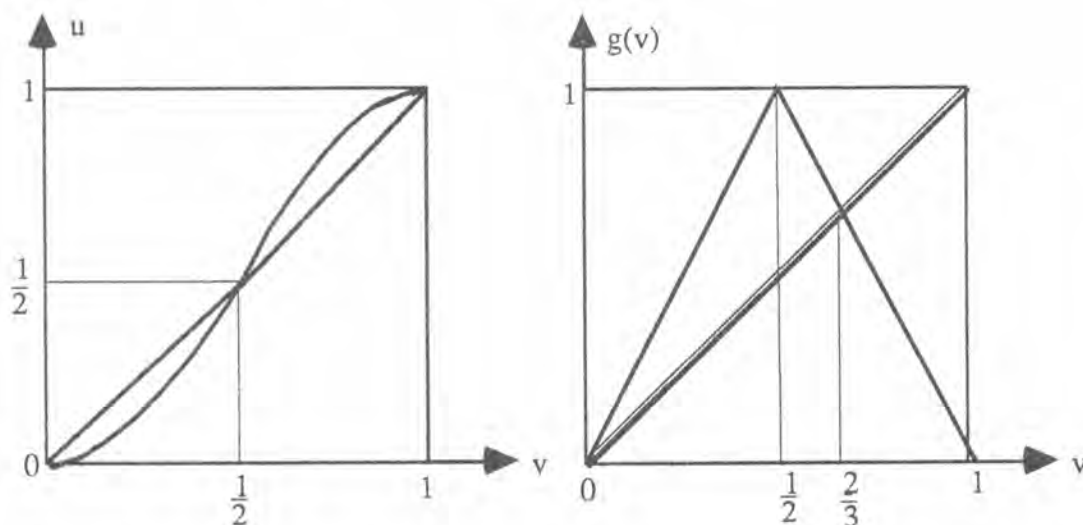
$$u = \sin^2\left(\frac{\pi}{2} v\right), \quad v \in [0, 1]$$

le relation de récurrence devient

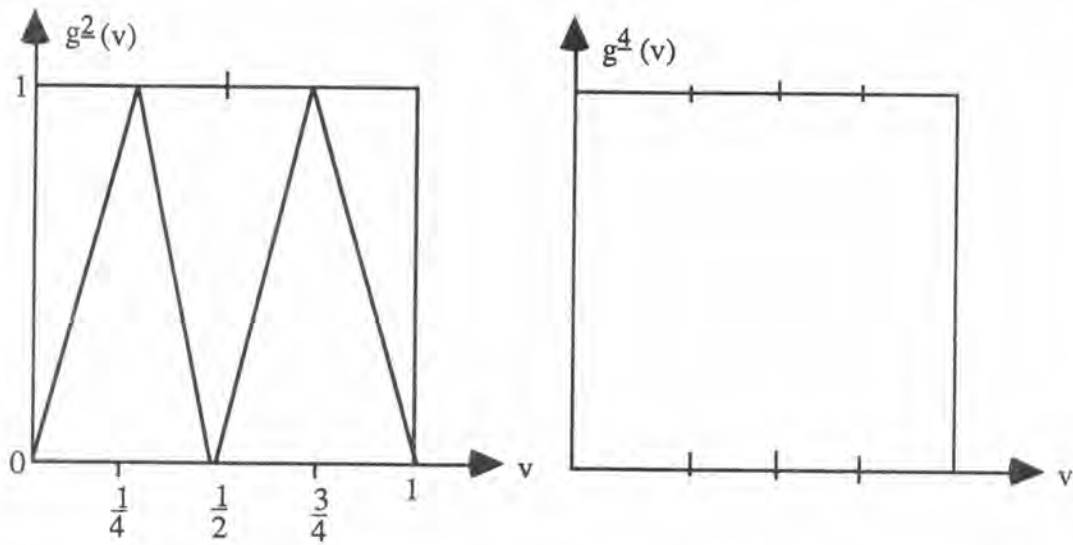
$$v_{n+1} = g(v_n)$$

avec :

$$g(v) = \begin{cases} 2v, & \text{si } v \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ 2(1-v), & \text{si } v \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$



b) Il est alors facile de comprendre comment évolue le graphe des itérés  $g^{2^n}$  de  $g$  :



pour comprendre qu'il existe des  $2^n$ -cycles, avec  $n$  aussi grand qu'on veut.

c) Le système est très sensible à la position initiale ...

# - 5 -

## EXEMPLES DE SUITES DE POLYNOMES ORTHOGONAUX, ET APPLICATIONS

- On commence par rappeler quelques généralités :  
si  $\rho \in \mathcal{C}^0([a,b], [0,+\infty[)$  est une fonction-poids telle que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , l'intégrale  $\int_a^b x^n \rho(x) dx$  ait un sens, le **procédé d'orthogonalisation de Schmidt** permet d'assurer l'existence d'une unique suite  $(P_n)_{n \geq 0}$  telle que  $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$  et que

$$(P_n | P_m) = \int_a^b P_n(x) P_m(x) \rho(x) dx = \delta_{n,m}$$

(en effet, si  $P_n(x) = \sum_{i=0}^n c_n^i x^i$  avec  $c_n^n \neq 0$ , le système linéaire

$$\sum_{i=0}^n c_n^i (x^i | x^j) = 0 \quad j = 0, 1, \dots, n-1$$

de  $n$  équations aux  $n$  inconnues  $\{c_n^i, i = 0, 1, \dots, n-1\}$  possède une unique solution, car le **déterminant de Gram**  $\det((x^i | x^j))_{0 \leq i, j \leq n-1}$  est strictement positif ; on détermine ensuite  $c_n^n$  par la condition de normalisation  $\|P_n\|^2 = (P_n | P_n) = 1$ ).

- On a choisi de présenter 4 exemples, qui permettent d'illustrer sur chacun d'eux un **aspect des propriétés** des suites de polynômes orthogonaux, et en insistant sur le côté **application**.

L'exemple [1], des **polynômes de LEGENDRE**, est intéressant pour la Physique par sa fonction génératrice, qui n'est autre que le noyau du potentiel newtonien.

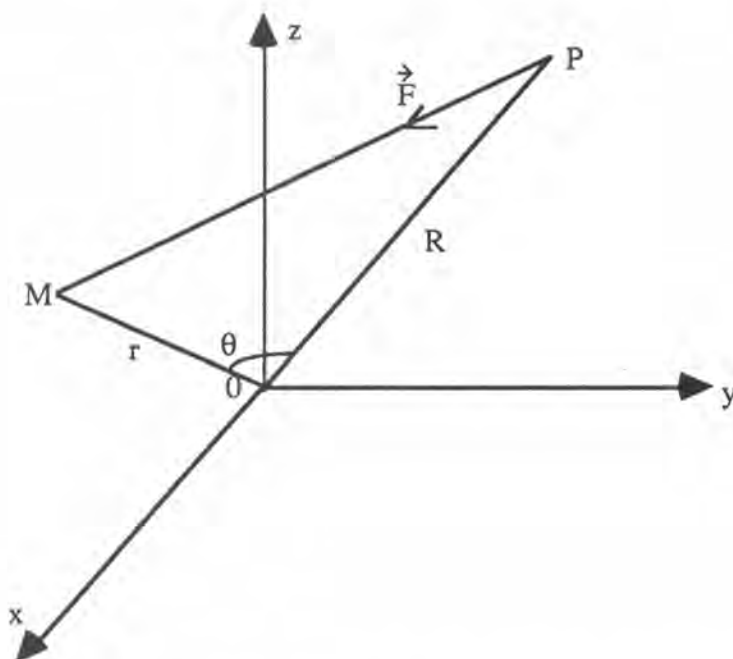
On profite de l'exemple [2], des **polynômes de TCHEBYCHEV** pour exposer la méthode de quadrature approchée de GAUSS (qui peut être utile pour la Leçon : Calcul approchée d'une intégrale définie).

Avec l'exemple [3], des **polynômes de HERMITE**, on a privilégié l'aspect équation différentielle tandis que sur l'exemple [4], des **polynômes de LAGUERRE**, on illustre le fait que la famille polynomiale peut servir de base complète dans un espace de fonctions.

**Référence** : Pour se limiter aux ouvrages de la bibliothèque de l'Agrégation, on cite le POLYA-SZEGO 2-VI.

## [1] Polynômes de Legendre

1) Le champ d'attraction newtonien créé par une masse placée en M, dérive d'une fonction potentielle en  $\frac{1}{MP}$  :



Comme  $MP^2 = r^2 + R^2 - 2rR \cos \theta$ , cela conduit à considérer la fonction

$$\varphi(x, \rho) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2x\rho + \rho^2}} \text{ avec } x \in [-1, +1].$$

2) Pour  $x = \cos \theta$ ,  $1 - 2x\rho + \rho^2 = (1 - \rho e^{i\theta})(1 - \rho e^{-i\theta})$  ; on connaît les développements (du binôme) des fonctions

$$f_{\theta}(\rho) = \frac{1}{\sqrt{1 - \rho e^{i\theta}}} = \sum_{n \geq 0} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} e^{in\theta} \rho^n, \quad 0 \leq \rho < 1$$

$$g_{\theta}(\rho) = f_{-\theta}(\rho).$$

Comme  $\varphi^2(\cos \theta, \rho) = f_\theta^2(\rho) g_\theta^2(\rho) = (f_\theta(\rho) g_\theta(\rho))^2$  et que  $\varphi(\cos \theta, 0) = f_\theta(0) g_\theta(0)$ , on peut donc écrire que

$$\begin{aligned}\varphi(\cos \theta, \rho) &= f_\theta(\rho) g_\theta(\rho) \\ &= \sum_{p \geq 0} \frac{1}{2^{2p}} C_{2p}^p \rho^p e^{ip\theta} \sum_{q \geq 0} \frac{1}{2^{2q}} C_{2q}^q \rho^q e^{-iq\theta} \\ &= \sum_{n \geq 0} c_n(\theta) \rho^n\end{aligned}$$

où, d'après la règle de multiplication de deux séries entières

$$c_n(\theta) = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{p+q=2n} C_{2p}^p C_{2q}^q \cos(p-q)\theta \quad (;\in \mathbb{R}).$$

Comme  $\cos(p-q)\theta$  est un polynôme en  $\cos \theta$  (c'est le polynôme  $T_{p-q}$  de l'exemple [2] ) on a démontré que, pour  $|\rho| < 1$  :

$$\frac{1}{\sqrt{1-2x\rho+\rho^2}} = \sum_{n \geq 0} P_n(x) \rho^n$$

où  $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$  est le  $n^{\text{ième}}$  polynôme de LEGENDRE. La fonction  $\varphi$  est la fonction génératrice de Legendre. Le calcul explicite des premiers polynômes donne

$$P_0 = 1 ; P_1(x) = x ; P_2(x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{8}.$$

3) Pour montrer que la famille  $(P_n)_{n \geq 0}$  est orthogonale pour le produit scalaire

$$(fg) = \int_{-1}^{+1} f(x)g(x)dx$$

on considère l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1-2xu+u^2} \sqrt{1-2xv+v^2}} \quad \text{pour } u, v \in ]-1, +1[ :$$

si  $uv > 0$ , elle vaut  $\frac{1}{\sqrt{uv}} \ln \frac{1+\sqrt{uv}}{1-\sqrt{uv}}$ .

(en posant  $S = u+v$ ,  $P = uv$ , faire le changement de variable

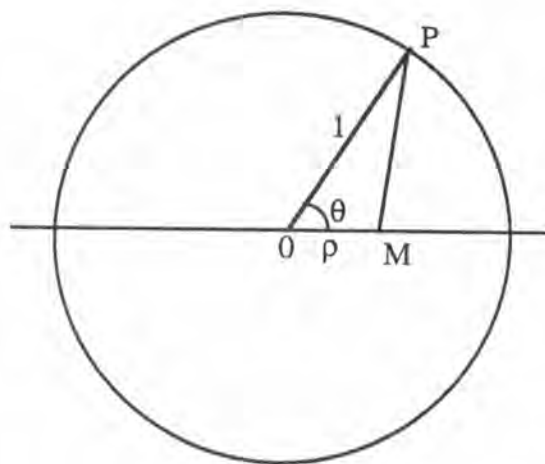
$$x = \frac{S(1+P)}{4P} + \frac{1}{2\sqrt{P}} (1-P) \sqrt{\frac{S^2}{4P} - 1} \operatorname{ch}(\theta) \dots )$$

D'autre part, après avoir effectué le produit

$$\left( \sum_{p \geq 0} P_p(x) u^p \right) \left( \sum_{q \geq 0} P_q(x) v^q \right) = \sum_{n \geq 0} \left( \sum_{p+q=n} P_p(x) P_q(x) u^p v^q \right)$$

on peut intégrer terme à terme, et on conclut en identifiant les deux séries entières en  $(uv)$  obtenues (en développant d'autre part  $\frac{1}{\sqrt{uv}} \ln \frac{1+\sqrt{uv}}{1-\sqrt{uv}}$ ).

4) On a déjà rencontré le calcul du potentiel d'une circonférence plane



dans les **exemples d'intégrales dépendant de paramètre** :

$$V = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{1-2\rho \cos \theta + \rho^2}}$$

et une expression développée a été étudiée en [3] des **Exemples de séries entières et applications**. On montre ici comment obtenir cette expression à l'aide des polynômes de Legendre :

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{n \geq 0} P_n(\cos \theta) \rho^n d\theta \\ &= \sum_{n \geq 0} \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_n(\cos \theta) d\theta \right) \rho^n \end{aligned}$$

(à  $0 \leq \rho < 1$  fixé, la série de fonctions de  $\theta$  converge normalement sur  $[0, 2\pi]$ )

Or

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_n(\cos \theta) d\theta = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{p=0}^{p=n} C_{2p}^p C_{2(n-p)}^{n-p} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(2n-p)\theta d\theta$$

donne

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_n(\cos \theta) d\theta = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{p=0}^{p=n} C_{2p}^p C_{2(n-p)}^{n-p} \delta_{2n-p,0}$$

et, par conséquent

$$V = \sum_{n \geq 0} \left( \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \right)^2 \rho^{2n}$$

## [2] Polynômes de Tchebychev

1) En posant  $T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$ , on définit, à  $n \in \mathbb{N}$  donné, un élément  $T_n \in \mathbb{R}_n[X]$  : En effet,

$$\begin{aligned} T_{n+1}(\cos \theta) &= \cos(n+1)\theta \\ &= \cos \theta T_n(\cos \theta) - \sin \theta \sin n\theta \end{aligned}$$

où  $T_n'(\cos \theta)(-\sin \theta) = -n \sin(n\theta)$ ,

donne, en posant  $x = \cos \theta$ , la relation de récurrence

$$T_{n+1}(x) = x T_n(x) + \frac{x^2-1}{n} T_n'(x)$$

et, comme  $T_1(x) = x$ , on peut conclure.

2) Par le changement de variable  $x = \cos \theta$ , on a :

$$\int_{-1}^{+1} T_n(x) T_m(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^\pi \cos(n\theta) \cos(m\theta) d\theta = \frac{\pi}{2} \delta_{n,m}$$

ce qui montre que  $\left( \sqrt{\frac{2}{\pi}} T_n \right)_{n \geq 0}$  est la suite des polynômes orthogonaux, pour le poids  $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  sur l'intervalle  $]-1, +1[$ .

3) Comme  $\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta = 2\cos n\theta \cdot \cos \theta$ , on a aussi la relation de récurrence

$$T_{n+1}(x) = 2x T_n(x) - T_{n-1}(x)$$

qui, regardée comme une équation aux différences, permet (en considérant l'équation résolvante  $\lambda^2 - 2x\lambda + 1 = 0$  à  $|x| \geq 1$  donné ...) permet d'obtenir l'expression développée suivante

$$T_n(x) = \frac{1}{2} \left( (x + \sqrt{x^2 - 1})^n + (x - \sqrt{x^2 - 1})^n \right).$$

en particulier  $T_n(x)$  commence par  $2^{n-1} x^n$ .

4) Le graphe de  $T_n$  est à mettre en relation avec les courbes de Lissajous des électriciens ; on peut montrer que le polynôme  $\bar{T}_n = 2^{1-n} \cdot T_n$  est le polynôme de degré  $n$  normalisé (c'est-à-dire commençant par  $x^n$ ) qui s'écarte de 0 le moins possible sur l'intervalle  $[-1, +1]$  : soit en effet  $P_n(x) = x^n + \dots$  un polynôme normalisé tel que



$$\sup_{[-1,+1]} |P_n| < \sup_{[-1,+1]} |\bar{T}_n| = 2^{1-n},$$

et considérons le polynôme  $(\bar{T}_n - P_n) \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$  :

$$(\bar{T}_n - P_n)(x_k = \cos \frac{k\pi}{n}) = 2^{1-n}(-1)^k - P_n(x_k)$$

est alors du signe de  $(-1)^k$  pour  $k = 0, 1, \dots, n$  ( $|\bar{T}_n(x_k)| = 2^{1-n}$  pour  $k = 0, 1, \dots, n$ ), donc (d'après le théorème de la valeur intermédiaire) posséderait  $n$  racines distinctes. D'où la conclusion annoncée :

$$\sup_{[-1,+1]} |P_n| \geq \sup_{[-1,+1]} |\bar{T}_n|, \quad \forall P_n(x) = x^n + \dots$$

Ce résultat est le point de départ de la théorie de la meilleure approximation uniforme, si utile en synthèse des filtres ...

**5)** On suppose qu'il existe une **formule de quadrature numérique (dite de GAUSS)** qui soit exacte pour les polynômes de degré  $\leq (2k+1)$  et le poids  $\rho$

$$\int_{-1}^{+1} P(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{i=0}^k \lambda_i P(x_i), \quad \forall P \in \mathbb{R}_{2k+1}[X]$$

et on commence par chercher les  $x_i$  et les  $\lambda_i$  : si  $P_{k+1}(x) = \prod_{i=0}^k (x-x_i)$ , on devra avoir

$$\int_{-1}^{+1} P_{k+1}(x) Q(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0, \quad \forall Q \in \mathbb{R}_k[X]$$

ce qui explique déjà que  $P_{k+1}$  doit être proportionnel à  $T_{k+1}$  ; par conséquent, on prendra

$$x_i = \cos \frac{2i+1}{k+1} \frac{\pi}{2}, \quad i = 0, 1, \dots, k$$

Maintenant, pour obtenir les coefficients  $\lambda_i$ , on considère les polynômes de LAGRANGE

$$\ell_i(x) = \prod_{j \neq i} \left( \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right) \quad ( : \ell_i(x_j) = \delta_{i,j} )$$

Comme  $\ell_i \in \mathbb{R}_k[X]$ , on peut écrire que

$$\int_{-1}^{+1} \ell_i(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lambda_i$$

On montre maintenant qu'avec les choix précédents de  $(x_i)_{0 \leq i \leq k}$  et  $(\lambda_i)_{0 \leq i \leq k}$ , la formule

$$\int_{-1}^{+1} P(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{i=0}^k \lambda_i P(x_i)$$

est exacte, si  $P \in \mathbb{R}_{2k+1}[X]$  :

Si  $P \in \mathbb{R}_k[X]$ , elle est exacte car les polynômes  $\{\ell_i\}_{i=0}^{i=k}$  forment une base de  $\mathbb{R}_k[X]$  ; si  $\deg P \geq k+1$ , on effectue la division euclidienne

$$P = T_{k+1} Q + R \quad \text{où } R \in \mathbb{R}_k[X]$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} P(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= (T_{k+1}|Q) + \int_{-1}^{+1} R(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= 0 + \sum_{i=0}^k \lambda_i R(x_i) \end{aligned}$$

où  $R(x_i) = P(x_i)$ ,  $\forall i$  : d'où la conclusion.

6) Un grand intérêt de la formule réside dans la simplicité des coefficients  $\lambda_i$

$$\begin{aligned}\lambda_i &= \int_{-1}^{+1} \frac{T_{k+1}(x)}{(x-x_i)T'_{k+1}(x_i)} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \int_0^\pi \frac{\cos(k+1)\theta}{\cos \theta - \cos \theta_i} d\theta \frac{\sin \theta_i}{(k+1)\sin(k+1)\theta_i}, \quad \theta_i = \frac{2i+1}{k+1} \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

on montre que  $\lambda_i = \frac{\pi}{k+1} \quad \forall i = 0, 1, \dots, k :$

$$\int_{-1}^{+1} f(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \sim \frac{\pi}{k+1} \sum_{i=0}^k \left( \cos \left( \frac{2i+1}{k+1} \cdot \frac{\pi}{2} \right) \right).$$

7) Dans l'estimation de l'approximation de Lagrange d'une fonction  $f$  de classe  $\mathcal{C}^{n+1}$  sur  $[a, b]$ , sur les points  $x_0 < x_1 < \dots < x_n$  :

$$f - L_n(f) \leq \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)} \cdot \omega \quad (*)$$

où  $\omega(x) = \prod_{j=0}^n (x-x_j)$ , la norme étant celle de la convergence uniforme sur  $[a, b]$ , se

pose naturellement la question du choix des points d'interpolation qui minimiserait  $\omega$ .

Pour des points équidistants  $x_j = a + j \cdot h$  où  $h = \frac{b-a}{n}$ , avec le changement de variable  $x = a + s \cdot h$  il vient

$$\omega(x) = h^{n+1} \varphi(s)$$

où  $\varphi(s) = s(s-1) \dots (s-n)$

de sorte que

$$\begin{aligned}\varphi_{[0,n]} &\geq \left| \varphi \left( \frac{1}{2} \right) \right| = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2} \\ &\geq \frac{(2n)!}{2^{2n+1}(n!)}\end{aligned}$$

---

(\*) voir la leçon [7].

si bien que  $\omega > \sim \left(\frac{b-a}{e}\right)^n$ .

En posant  $x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cdot y$ , et en prenant comme points d'interpolation les  $x_j$  associés aux racines  $y_j = \cos \theta_j$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$  de  $T_{n+1}$ , il vient

$$\omega(x) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1} \prod_{j=0}^n (y - y_j) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1} 2^{-n} T_{n+1}(y)$$

de sorte que

$$\omega = \left(\frac{b-a}{4}\right)^n.$$

Pour  $n$  grand, l'erreur d'interpolation sera donc beaucoup plus petite (pour  $n = 30$ ,  $\left(\frac{e}{4}\right)^n < 7 \cdot 10^{-6}$ ).

### 3 Polynômes de HERMITE

1) On introduit les polynômes  $H_n$  dans la leçon Exemples de développements en série entière et applications, via la fonction génératrice

$$e^{-t^2+2tx} = \sum_{n \geq 0} H_n(x) \frac{t^n}{n!}$$

et où il est établi que  $H_n \in \mathbb{R}_n[X]$ , et que

i)  $H'_n(x) = 2x H_n(x) - H_{n+1}(x)$

ii)  $H_{n+1}(x) - 2x H_n(x) + 2n H_{n-1}(x) = 0$

iii)  $H'_n(x) = 2n H_{n-1}(x)$ .

2) A partir des relations i) et iii), on obtient

$$H''_n(x) = 2 H_n(x) + 2x H'_n(x) - 2(n+1)H_n(x)$$

$H_n$  est donc solution de l'équation différentielle :

$$y'' - 2xy' + 2xy = 0$$

équation différentielle qu'on pourra intégrer selon la technique d'identification de Cauchy, pour constater qu'elle possède en effet une solution polynomiale de degré  $n$ .

3) Comme  $H_n(x) = \frac{\partial^n}{\partial t^n} \Big|_{t=0} e^{-t^2+2tx} = (-1)^n e^{-x^2} (e^{-x^2})^n$

une intégration par parties donne, pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} x^k H_n(x) e^{-x^2} dx &= (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} x^k (e^{-x^2})^n dx \\ &= (-1)^{n+1} \int_{-\infty}^{+\infty} k x^{k-1} (e^{-x^2})^{n-1} dx \\ &= k \int_{-\infty}^{+\infty} x^{k-1} H_{n-1}(x) e^{-x^2} dx \end{aligned}$$

si  $(f/g) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)e^{-x^2} dx$  pour  $f, g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$

et telles que  $\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)e^{-x^2} dx$  et  $\int_{-\infty}^{+\infty} g^2(x)e^{-x^2} dx$  convergent la relation précédente :

$$(x^k | H_n) = k(x^{k-1} | H_{n-1})$$

permet de montrer ( : par récurrence sur  $n$ ) que

$$(x^k | H_n) = 0 \text{ si } 0 \leq k \leq n-1.$$

De plus, on a

$$\begin{aligned}
 \|H_n\|^2 &= (H_n | 2x H_{n-1} - 2(n-1)H_{n-2}) \\
 &= (H_n | 2^n x^n), \text{ car } H_{n-1}(x) - 2^{n-1}x^{n-1} \in \mathbb{R}_{n-2}[X] \\
 &= 2^n n (H_{n-1} | x^{n-1}) \\
 &= \dots \\
 &= 2^n n! (H_0 | 1) \\
 &= 2^n n! \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \\
 &= 2^n n! \sqrt{\pi}
 \end{aligned}$$

En conclusion, la suite  $\left( \frac{H_n}{2^{n/2} \sqrt{n!} \pi^{1/4}} \right)_{n \geq 0}$  est la suite des polynômes orthogonaux pour le poids  $e^{-x^2}$  sur  $\mathbb{R}$ .

4) On peut éliminer le terme en  $y'$  dans l'équation différentielle obtenue en 2), en posant  $y(x) = e^{\frac{x^2}{2}} z'(x)$  de sorte que  $z$  obéisse à  $z'' + (2n+1-x^2)z = 0$  : l'équation différentielle précédente possède comme solution particulière la  **$n^{\text{ième}}$  fonction de Hermite**

$$\varphi_n(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{H_n(x)}{2^{n/2} \sqrt{n!} \pi^{1/4}}$$

qui est normalisée dans  $L^2(\mathbb{R})$ , dans le sens où

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n^2(x) dx = 1.$$

Il est possible de montrer que les seules valeurs du paramètre  $\varepsilon$  dans l'équation différentielle  $z'' + (2\varepsilon - x^2)z = 0$  pour que celle-ci possède une solution normalisée sont les valeurs (quantifiées)  $n + \frac{1}{2}$ .

#### 4 Polynômes de LAGUERRE

1)  $L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x})$  s'explicite, avec la formule de Leibniz, comme

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k C_n^k \frac{n!}{k!} x^k \in \mathbb{R}_n[X].$$

2) Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $1 \leq k < n$ , on a, en intégrant par parties

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-x} x^k L_n(x) dx &= \int_0^\infty x^k (x^n e^{-x})' dx \\ &= -k \int_0^\infty x^{k-1} (x^n e^{-x}) dx \end{aligned}$$

et, en raisonnant par récurrence sur  $n$ , il en résulte que la famille  $\{L_n / n \in \mathbb{N}\}$  est orthogonale pour le produit scalaire  $(f/g) = \int_0^\infty e^{-x} f(x)g(x)dx$ . De plus,

$$\begin{aligned} \|L_n\|^2 &= (L_n / (-1)^n x^n) = (-1)^n \int_0^\infty x^n e^{-x} L_n(x) dx \\ &= (-1)^n (-n) \int_0^\infty x^{n-1} (x^n e^{-x}) dx \end{aligned}$$

donne, en itérant

$$\|L_n\|^2 = n! \int_0^\infty e^{-x} x^n dx = (n!)^2$$

si bien que la suite  $\left(\frac{L_n}{n!}\right)_{n \geq 0}$  est la suite des polynômes orthogonaux pour le poids  $e^{-x}$  sur  $[0, +\infty[$ .

3) On justifie, pour  $|z|(1+|x|) < 1$ , le calcul suivant :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) \frac{z^n}{n!} &= \sum_{n \geq 0} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k \frac{x^k}{k!} z^n \\ &= \sum_{k \geq 0} \left( \sum_{n \geq k} C_n^k z^n \right) \frac{(-x)^k}{k!} \\ &= \sum_{k \geq 0} \frac{(-x)^k}{k!} \cdot \frac{z^k}{(1-z)^{k+1}} \\ &= \frac{1}{1-z} e^{-\frac{xz}{1-z}} \end{aligned}$$

4) Si  $\varphi_n(x) = e^{-\frac{x}{2}} \frac{L_n(x)}{n!}$  est la  $n^{\text{ième}}$  fonction de Laguerre, on a donc

$$\int_0^{\infty} \varphi_n(x) \varphi_m(x) dx = \delta_{nm}$$

et 
$$\sum_{n \geq 0} \varphi_n(x) t^n = \frac{1}{1-t} e^{-\frac{1}{2} \cdot \frac{1+t}{1-t} \cdot x} \doteq g(x, t).$$

On montre que le développement ci-dessus a lieu dans  $L^2([0, +\infty[)$ , c'est-à-dire que

$$\int_0^{\infty} \left( g(t, x) - \sum_{n=0}^{n=N} \varphi_n(x) t^n \right)^2 dx \xrightarrow{(N \rightarrow +\infty)} 0.$$

En effet, en notant  $(f | g) = \int_0^{\infty} f(x)g(x)dx$  pour  $f$  et  $g$  de carré intégrable, il

vient, pour l'intégrale précédente l'expression développée

$$\|g(., t)\|^2 - 2 \sum_{n=0}^{n=N} (g(., t) | \varphi_n)^2 + \sum_{n=0}^{n=N} t^{2n}$$



avec :

$$\begin{aligned} (g(.,t)|\varphi_n) &= \int_0^\infty \frac{1}{1-t} e^{-\frac{1}{2} \cdot \frac{1+t}{1-t} \cdot x} e^x \frac{1}{n!} (x^n e^{-x})^n dx \\ &= \frac{1}{1-t} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{-t}{1-t}\right)^n \int_0^\infty e^{-\frac{xt}{1-t}} x^n \cdot e^{-x} dx \end{aligned}$$

en intégrant  $n$  fois par parties

$$= t^n$$

si bien que

$$\|g(.,t) - \sum_{n=0}^{n=N} \varphi_n t^n\|^2 = \frac{1}{1-t^2} - \sum_{n=0}^{n=N} t^{2n}$$

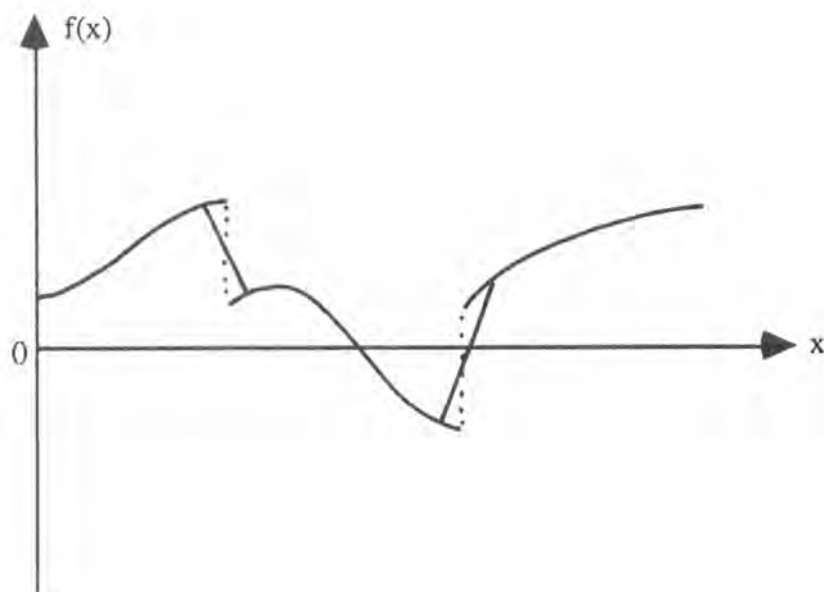
et la conclusion suit, pour  $|t| < 1$ .

5) La fonction  $t \rightarrow \frac{1+t}{1-t}$  étant une bijection de  $[0,1[$  sur  $[0,+\infty[$ , il en résulte que toute fonction  $x \rightarrow e^{-\alpha x}$  où  $\alpha > 0$  se développe en série (de Fourier-Bessel) des fonctions de Laguerre  $\varphi_n$ , au sens de la norme . . .

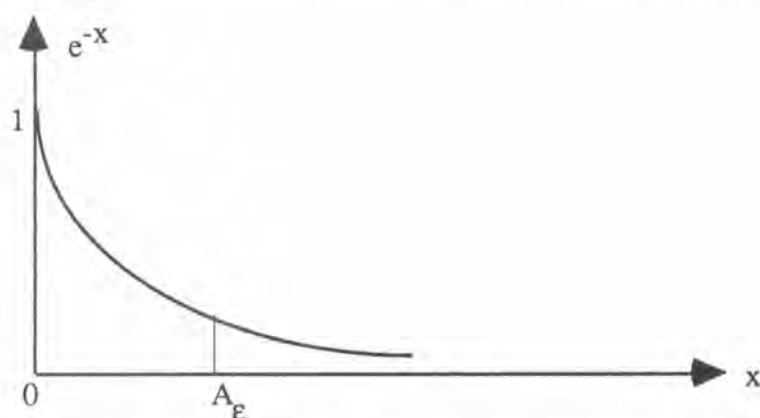
Comme conséquence, on montre qu'il en est de même de toute fonction  $f \in \mathcal{CM}_{\mathbb{R}}^0([0,+\infty[)$  dont l'intégrale impropre  $\int_0^\infty f^2(x)dx$  converge (l'Automaticien parle de signal causal d'énergie finie, et utilise ce type de développement ...) :

à  $\varepsilon > 0$  donné, il existe  $A_\varepsilon > 0$  tel que  $\int_{A_\varepsilon}^\infty f^2(x)dx \leq \varepsilon^2$  puis une fonction  $g \in \mathcal{C}^0$

telle que  $\text{supp}(g) \subset [0, A_\varepsilon]$  et  $\int_0^\infty (g - \mathbf{1}_{[0, A_\varepsilon]} f)^2 dx \leq \varepsilon^2$  :



On considère maintenant la fonction  $\tilde{g}(y) = g(-\ln y) : \tilde{g} \in \mathcal{C}^0([0,1])$ ,  
 $\text{supp}(\tilde{g}) \subset [e^{-A_\varepsilon}, 1]$



d'après le théorème de Weierstrass<sup>(\*)</sup>, on peut trouver une fonction polynomiale  $P_\varepsilon(y)$   
 telle que,  $\forall y \in [0,1]$ , on ait :

$$|P_\varepsilon(y) - \frac{\tilde{g}(y)}{\sqrt{y}}| \leq \varepsilon$$

et il vient alors

$$\int_0^\infty (g(x) - e^{-\frac{x}{2}} P_\varepsilon(e^{-x}))^2 dx = \int_0^1 \left( \frac{\tilde{g}(y)}{\sqrt{y}} - P_\varepsilon(y) \right)^2 dy \leq \varepsilon.$$

---

(\*) au programme ! on fera une démonstration via le théorème de Féjer, par exemple.

En conséquence, on a obtenu que

$$\int_0^{\infty} (f(x) - e^{-\frac{x}{2}} P_{\varepsilon}(e^{-x}))^2 dx \leq 3\varepsilon^2$$

où, d'après le début du §, il existe une combinaison linéaire  $\sum_{n=0}^N C_n \varphi_n$  telle que

$$\left\| e^{-\frac{x}{2}} P_{\varepsilon}(e^{-x}) - \sum_{n=0}^N C_n \varphi_n \right\|^2 \leq \varepsilon^2$$

si bien que

$$\left\| f - \sum_{n=0}^N C_n \varphi_n \right\| \leq 2\varepsilon.$$

### Références

- 1** Courant-Hilbert 1.
- 2** Crouzeix-Mignot.  
Demailly.
- 3** Courant-Hilbert 1  
Nikiforov-Ouvarov.
- 4** Courant-Hilbert 1.

# - 6 -

## COMPARAISON SUR DES EXEMPLES DES DIVERS MODES DE CONVERGENCE D'UNE SUITE OU D'UNE SERIE DE FONCTIONS D'UNE VARIABLE REELLE

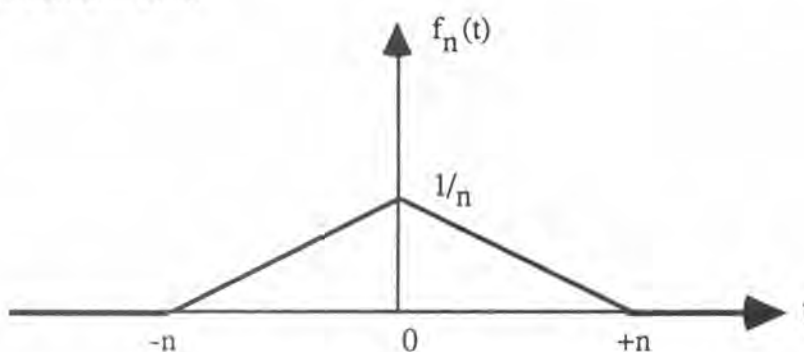
On rappelle quelques points fondamentaux :

- 1) Dans  $\mathcal{C}_\mathbb{R}^0([a,b])$  avec  $[a,b]$  compact

$$N_1 \leq \sqrt{b-a} \cdot N_2 \leq (b-a)N_\infty$$

et l'étude de la suite  $(t^n)_n$  sur  $[0,1]$  montre que ces normes ne sont pas équivalentes.

- 2) L'étude de la suite



montre que, sur  $\mathbb{R}$ , ces normes ne sont pas comparables.

- 3) Sur un compact  $[a,b]$ , si  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f$  selon  $N_\infty$ , il en est donc de même selon  $N_2$  et  $N_1$  : le théorème de convergence dominée faible conduit à la même conclusion sous les conditions

H1)  $f_n \xrightarrow{u} f$  sur tout compact de  $]a,b[$ .

H2) il exisyste  $\varphi > 0$  telle que  $|f_n| \leq \varphi$  sur  $]a,b]$  et  $\int_a^b \varphi dt$  converge ; alors  $f_n \rightarrow f$  selon  $N_1$  ; on a un énoncé analogue sur  $\mathbb{R}$ .

4) La convergence simple entraîne la convergence uniforme sur le compact  $[a,b]$  si  $f_n$  et  $f$  sont continues et si : ou bien la suite est monotone (Dini), ou bien chaque fonction  $f_n$  est (par exemple) croissante (Leçon 31).

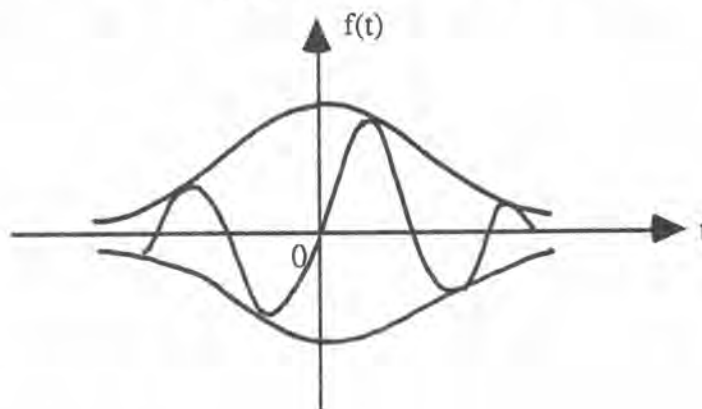
5) Si  $f_n \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}^0([a,b])$  et si  $f_n \xrightarrow{u} f$  sur  $[a,b]$ , alors  $f \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}^0([a,b])$ .

6) Comme le montre l'exemple de la suite  $\left( \frac{1-t^n}{1+t^n} \right)$  sur l'intervalle  $[0,2]$ , l'espace  $(\mathcal{C}_{\mathbb{R}}^0([a,b]), N_1)$  n'est pas complet.

7) Par contre,  $(\mathcal{C}_{\mathbb{R}}^0([a,b]), N_{\infty})$  l'est, et, en particulier, toute série de fonctions continues normalement convergente selon  $N_{\infty}$ , converge uniformément.

1  $\left( f_n(t) = \frac{\sin nt}{1+n^2 t^2} \right)_{n \geq 0}$

1)  $f_n(t) = f(nt)$  où  $f(t) = \frac{\sin t}{1+t^2}$  est  $\gamma^{\infty}$  sur  $\mathbb{R}$ , et a un graphe de la forme



2) Si  $t = 0$ ,  $f_n(t)$  et, pour  $t > 0$

$$|f_n(t)| \leq \frac{1}{1+n^2 t^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

par conséquent :  $f_n \xrightarrow{s} 0$  sur  $\mathbb{R}$ .

3) Comme  $\sup_{\mathbb{R}} |f_n| = \sup_{\mathbb{R}} |f| \geq f\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$ ,  $(f_n)$  ne converge pas uniformément (vers 0) sur  $\mathbb{R}$ .

4) Pour  $t \geq \varepsilon > 0$ ,  $|f_n(t)| \leq \frac{1}{1+n^2\varepsilon^2} \xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} 0$  ce qui montre que la suite  $(f_n)$  converge (vers 0) uniformément sur tout compact de  $\mathbb{R}^*$  (et même sur tout  $\mathbb{R} \setminus ]-\varepsilon, +\varepsilon[$ ).

$$5) \quad \int_{\mathbb{R}} |f_n(t)| dt = \frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}} \frac{|\sin \theta|}{1+\theta^2} d\theta \leq \frac{\pi}{n}$$

montre que  $f_n \rightarrow 0$  selon la norme  $N_1$  (comme cela était prévisible avec le théorème de convergence dominée faible).

6) Plus généralement, pour tout  $p \geq 1$ ,  $f_n \rightarrow 0$  selon  $N_p$ .

$$\boxed{2} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nt)}{n}, t \in \mathbb{R}.$$

1) Avec Abel, il y a convergence simple sur  $\mathbb{R}$ .

2) En reprenant la démonstration d'Abel, on s'assure même de la convergence uniforme sur tout intervalle de la forme  $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$ , avec  $0 < \varepsilon < \pi$  :

$$\sum_M^N \frac{\sin(nt)}{n} = \sum_M^N \frac{S_n(t) - S_{n-1}(t)}{n}$$

$$\text{où} \quad S_n(t) = \sum_1^n \frac{\sin(kt)}{k} = \frac{1}{2\sin(\frac{t}{2})} \left( \cos\left(\frac{t}{2}\right) - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) t \right)$$

donne, après une transformation d'Abel

$$\left| \sum_M^N \frac{\sin(nt)}{n} \right| \leq \frac{1}{\sin(\frac{\varepsilon}{2})} \cdot \frac{2}{M}, \quad \forall t \in [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$$

et le fait que  $(\mathcal{C}_{\mathbb{R}}^0([\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]), N_{\infty})$  est complet conduit à la conclusion.

$$3) \quad \text{Si } S_N(t) = \sum_{n=1}^N \frac{\sin(nt)}{n},$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N\left(\frac{\pi}{N+1}\right) = \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt > 0.$$

(Leçon [28], Exemple 1) ; Comme  $S(0) = 0$ , cela montre que la série ne peut converger uniformément sur un voisinage de 0.

**Remarque** : Dans la leçon [28], on a calculé (via une transformation intégrale) la somme  $S$  (fonction en dents de scie) qui présente un saut de  $\pi$  à l'instant  $t = 0$ , d'où un "nouvel" argument de non convergence uniforme ...

4)  $\left( N_{\infty}(S_N) = \sup_{0 \leq t \leq 2\pi} |S_N(t)| + S_N\left(\frac{\pi}{N+1}\right) \right)_N$  est une suite convergente, ce qui montre que la suite  $(S_N)_N$  est uniformément bornée sur  $[0, 2\pi]$  donc, par périodicité, sur  $\mathbb{R}$ . D'après le théorème de convergence dominée, il en résulte que  $S_N \rightarrow S$  selon  $N_1$  et  $N_2$  sur  $[0, 2\pi]$ .

5) En particulier,  $N_2^2(S_N) = \pi \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} \rightarrow N_2^2(S)$

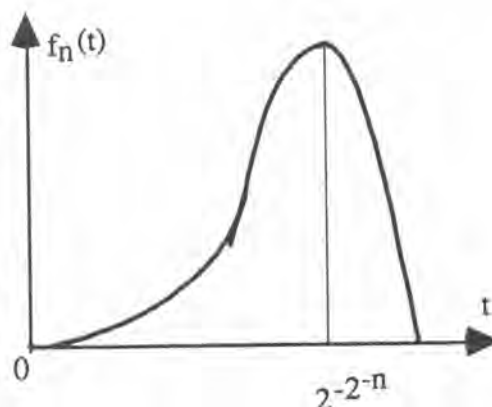
(c'est une conséquence du théorème de Parseval, vu dans la leçon [23]).

[3]  $\left( 4^{\alpha n} (t^{2n} - t^{2n+1}) \right)_n, 0 \leq t \leq 1, \alpha > 0.$

1) Si  $t = 1$ ,  $f_n(t) = 4^{\alpha n} (t^{2n} - t^{2n+1}) = 0$  et pour  $0 \leq t < 1$ ,  $f_n(t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 : f_n \xrightarrow{s} 0$  sur  $[0, 1]$ .

2) Le calcul de  $\dot{f}_n(t) = 2^{(2\alpha+1)n} t^{2n+1} (1 - 2t^{2n})$  permet de dresser le tableau de variation de  $f_n$  :

|                |   |               |   |
|----------------|---|---------------|---|
| t              | 0 | $2^{-2^{-n}}$ | 1 |
| $\dot{f}_n(t)$ |   | + 0 -         |   |
| $f_n(t)$       |   | $M_n$         |   |
|                | 0 |               | 0 |



et de montrer que  $N_{\infty}(f_n) = 2^{2(\alpha n - 1)} \rightarrow \infty$ .

Ainsi la suite ne converge-t-elle pas uniformément sur  $[0,1]$ .

3) Mais il est facile de montrer que  $f_n \xrightarrow{u} 0$  sur tout compact de  $[0,1[$ .

4) On calcule

$$N_1(f_n) = 4^{\alpha n} \int_0^1 (t^{2^n} - t^{2^{n+1}}) dt = \frac{2^{(2\alpha+1)n}}{(2^n+1)(2^{n+1}+1)} \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{2^{(2\alpha-1)n}}{2}$$

pour conclure au fait que

$$N_1(f_n) \rightarrow \begin{cases} \infty, & \text{si } \alpha > \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}, & \text{si } \alpha = \frac{1}{2} \\ 0, & \text{si } 0 \leq \alpha < \frac{1}{2} \end{cases}$$

: pour  $\alpha < \frac{1}{2}$ ,  $f_n \rightarrow 0$  selon  $N_1$  mais ce n'est plus le cas pour  $\alpha \geq \frac{1}{2}$ .

5) plus généralement, on peut exprimer la norme  $N_p(f_n)$  à l'aide de la première intégrale eulérienne :

$$\begin{aligned} N_p^p(f_n) &= 2^{2\alpha p n} \int_0^1 (t^{2^n} - t^{2^{n+1}})^p dt \\ &= 2^{(2\alpha p - 1)n} \int_0^1 \theta^{p-1+2^n} (1-\theta)^p d\theta \\ &= 2^{(2\alpha p - 1)n} B(p+2^{-n}, p+1) \end{aligned}$$

où

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \quad x, y > 0.$$



Si bien que, pour  $p > 1$

$$N_p(f_n) \rightarrow \begin{cases} \infty, & \text{si } \alpha > \frac{1}{2p} \\ B(p, p+1), & \text{si } \alpha = \frac{1}{2p} \\ 0, & \text{si } 0 \leq \alpha < \frac{1}{2p} \end{cases}$$

**Remarque :** On sait que, si  $q > p$ ,  $N_p < N_q$  et l'examen de la suite  $(f_n)$  montre que ces deux normes ne sont pas équivalentes sur  $[0,1]$ .

$$\boxed{4} \quad \sum_1^{\infty} \frac{t}{n^p + n^q t^2}$$

On propose une étude détaillée des convergences simples, uniforme, et uniformes sur certains compacts, selon les valeurs positives ou nulles des paramètres  $p$  et  $q$ . On étudie les convergences  $N_1$  et  $N_2$  sur quelques valeurs.

$$1) \quad f_n(t) = \frac{t}{n^p + n^q t^2} = -f_n(-t)$$

$$\text{pour } t > 0, f_n(t) \underset{(n \rightarrow +\infty)}{\sim} \begin{cases} \frac{t}{n^p}, & \text{si } p > q \\ \frac{t}{1+t^2} \cdot \frac{1}{n^p}, & \text{si } p = q \\ \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{n^q}, & \text{si } p < q \end{cases}$$

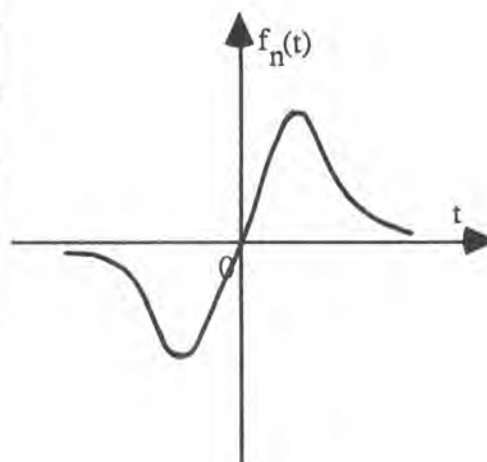
si bien sur la convergence simple sur  $\mathbb{R}$  est assurée seulement si  $p$  ou  $q$  est strictement supérieur à 1.

2) Si  $p > 1$ , pour  $t \geq 0$ ,  $0 \leq f_n(t) \leq \frac{t}{n^p}$  et la série converge uniformément sur tout compact de  $\mathbb{R}$ .

Si  $q > 1$ , pour  $t \geq \varepsilon > 0$ ,  $0 < f_n(t) \leq \frac{t}{n^q}$  et on a la même conclusion sur tout compact de  $\mathbb{R}^*$  (et même sur tout ensemble de la forme  $\mathbb{R} \setminus ]-\varepsilon, +\varepsilon[$ ).

Comme  $\dot{f}_n(t) = \frac{n^{p-q} t^2}{(n^p + n^q t^2)^2}$ , on obtient le tableau de variation suivant

|                |   |                   |           |
|----------------|---|-------------------|-----------|
| t              | 0 | $\frac{p-q}{n^2}$ | $+\infty$ |
| $\dot{f}_n(t)$ |   | +                 | -         |
| $f_n(t)$       |   | $M_n$             |           |

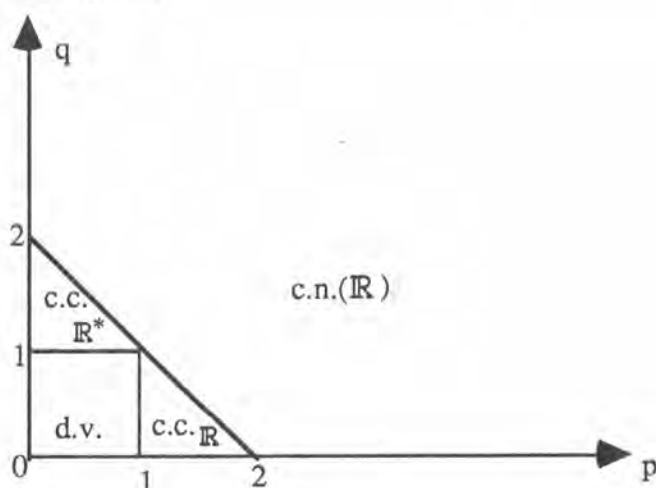


d'où l'on déduit que

$$N_\infty(f_n) = f_n\left(\frac{p-q}{n^2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{p-q}{n^2}}.$$

Si  $\frac{p-q}{n^2} > 1$ , la série converge donc normalement, donc uniformément sur  $\mathbb{R}$ .

En résumé :



3) On peut écrire que

$$\sum_1^\infty \frac{t}{n^p + n^q t^2} \geq \int_0^\infty \frac{t \, dx}{x^p + x^q t^2} \text{ si } p, q > 0$$

où l'intégrale se simplifie en posant  $x = t^\alpha y$  et en choisissant  $\alpha$  pour rendre l'intégrant homogène en  $t$  : avec  $\alpha = \frac{2}{p-q}$ , on obtient

$$t^{\frac{q+p-2}{q-p}} \cdot \int_{\frac{2}{t^{\frac{q-p}{2}}}}^{\frac{2}{t^{\frac{q-p}{2}}}} \frac{dy}{y^p+y^q}$$

ce qui va permettre l'étude du comportement de la somme  $S$  de la série en 0 :  
pour  $p+q \leq 2$ ,  $q > 1 \geq p$ , on obtient

$$t^{\frac{q+p-2}{q-p}} \int_{\frac{2}{t^{\frac{q-p}{2}}}}^{\infty} \frac{dy}{y^p+y^q} \xrightarrow{(t \rightarrow 0_+)} \begin{cases} +\infty, & \text{si } p+q < 2 \\ \int_0^{\infty} \frac{dy}{y^p+y^q}, & \text{si } p+q = 2 \end{cases}$$

(avec des signes - lorsque  $t \rightarrow 0_-$ ).

En conséquence,  $S$  n'est pas continue en 0, et la convergence ne saurait donc être uniforme sur un voisinage de l'origine.

4) Il reste à étudier le secteur  $p > 1 > q$ ,  $p+q \leq 2$  :

$$\sum_{N-1}^{2N} \frac{t}{n^p+n^q t^2} > N \frac{t}{(2N)^p+(2N)^q t^2}$$

montre que  $N_\infty(S_{2N}-S_N) > \frac{N^{1-\frac{p+q}{2}}}{2^{1+\frac{p+q}{2}}}$

si bien que la série ne saurait converger uniformément sur  $\mathbb{R}$ .

5) Chaque fonction  $f_n$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , et l'intégrale impropre  $\int_0^{\infty} f_n(t) dt$  diverge. On peut donc se poser le problème de la convergence  $N_1$  sur  $[0, T]$  avec  $T > 0$  fixé.

Seule la région  $\{(p, q) / 0 < p < 1, p+Q \leq 2\}$  pose problème. On étudie deux cas typiques :

a)  $p = \frac{1}{2}, q = \frac{3}{2} : f_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n} (1+nt^2)}$  la somme  $S$  est continue sur  $\mathbb{R}^*$ , et possède une limite en 0, d'après l'encadrement

$$\int_1^{\infty} \frac{t \, dx}{\sqrt{x} (1+xt^2)} < S(t) < \frac{1}{1+t^2} + \int_1^{\infty} \frac{t \, dx}{\sqrt{x} (1+xt^2)}$$

qui montre que  $S(0+) = \int_0^{\infty} \frac{dy}{\sqrt{y} (1+y)}$ .

D'après la version faible du théorème de convergence donnée, on en déduit que  $S_N \rightarrow S$  selon  $N_1$  dans  $[0, T]$ .

b)  $p = \frac{1}{2}, q = \frac{5}{4} : f_n(t) = \frac{t}{\sqrt{n} (1+n^{3/4} t^2)}$ .

On sait alors que  $S(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0+]{} +\infty$ . Cependant, pour tout  $\varepsilon > 0$ , on peut écrire que

$$\int_{\varepsilon}^T S(t) dt = \sum_1^{\infty} \int_{\varepsilon}^T f_n(t) dt = \sum_1^{\infty} I_n(\varepsilon)$$

où  $I_n(\varepsilon) = \frac{1}{2n^{5/4}} \ln \frac{1+n^{3/4} T^2}{1+n^{3/4} \varepsilon^2}$ .

Comme

$$0 < I_n(\varepsilon) < \frac{1}{2n^{5/4}} \ln (1+T^2 n^{3/4})$$

et  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{2n^{5/4}} \ln(1+T^2 n^{3/4})$  converge, la série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} I_n$  converge normalement  $[0, T]$  : sa somme est continue et, par conséquent

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{\varepsilon}^T S(t) dt = \int_{\varepsilon}^T S(t) dt$$

existe, et vaut

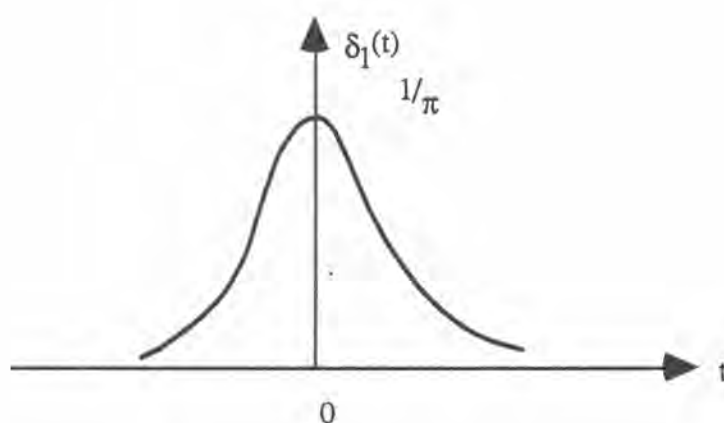
$$\sum_{n \geq 1} \frac{\ln(1+T^2 n^{3/4})}{2n^{5/4}}.$$

On a montré que  $S_N \rightarrow S$  selon  $N_1$  sur  $[0, T]$ .

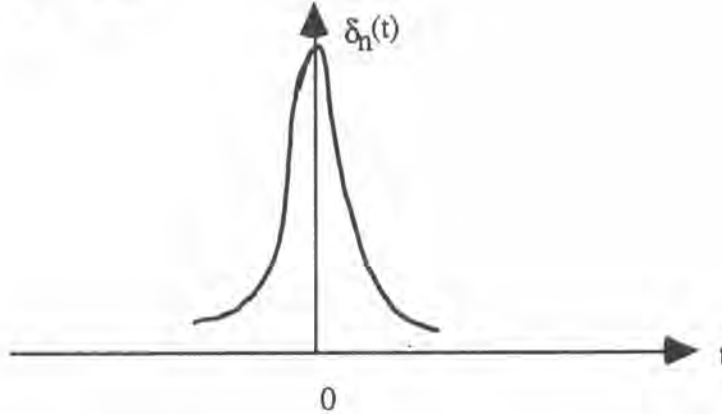
**Remarque :** 1) On illustre le fait que  $(\mathcal{C}_{\mathbb{R}}^0([0, T]), N_1)$  n'est pas complet.  
2) On a démontré un théorème de convergence monotone.

## 5 Etude d'une suite de DIRAC

1) On part de la fonction  $\delta_1(t) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+t^2}$ ,  $t \in \mathbb{R}$  :



qui est positive, et telle que  $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_1(t) dt = 1$ , pour introduire la suite de fonctions  $(\delta_n(t) = n \cdot \delta_1(nt))_{n \geq 1}$  :



2)  $\delta_n(0) = \frac{n}{\pi} \rightarrow +\infty$  avec  $n$ , tandis que, si  $t \neq 0$ , on a

$$\delta_n(t) = \frac{n}{\pi} \cdot \frac{1}{1+n^2 t^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Pour  $|t| \geq \varepsilon > 0$ , on a

$$0 < \delta_n(t) < \frac{n}{\pi} \cdot \frac{1}{1+n^2 \varepsilon^2} \xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} 0$$

et la convergence est donc uniforme sur tout  $\mathbb{R} \setminus [-\varepsilon, +\varepsilon]$ , avec  $\varepsilon > 0$ , et en particulier sur tout compact de  $\mathbb{R}^*$ , tandis que  $N_\infty(\delta_n) = \frac{n}{\pi} \rightarrow \infty$ .

3)  $N_1(\delta_n) = 1 \quad \forall n$ .

La suite  $(\delta_n)_{n \geq 1}$  ne converge pas dans  $\mathcal{C}^0 \cap L^1$  selon  $N_1$  (: espace des fonctions continues d'intégrale absolument convergente sur  $\mathbb{R}$ ) car, si tel était le cas, et si  $\delta$  désigne sa limite, on aurait, pour tout  $0 < \varepsilon < T$  par exemple,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\varepsilon}^T S(t) dt \right| &\leq \int_{\varepsilon}^T |\delta - \delta_n|(t) dt + \int_{\varepsilon}^T \delta_n(t) dt \\ &\leq N_1(\delta - \delta_n) + T \cdot N_{\infty}^{[\varepsilon, T]}(\delta_n) \end{aligned}$$

ce qui entraînerait que  $\delta = 0$  sur  $[\varepsilon, T]$  : ainsi  $\delta$  serait nulle sur  $\mathbb{R}^*$  (donc sur  $\mathbb{R}$ ) et  $N_1(\delta) = 0$ , ce qui contredit  $N_1(\delta_n) = 1 \quad \forall n \geq 1$ .

4) Soit  $\varphi$  une fonction continue bornée sur  $\mathbb{R}$ . Alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_n(t) \cdot \varphi(t) dt = \varphi(0).$$

On le voit en formant la différence

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_n(t) \cdot \varphi(t) dt - \varphi(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_n(t) \cdot (\varphi(t) - \varphi(0)) dt$$

et en écrivant que  $\varphi$  est continue en 0 : à  $\varepsilon > 0$  donné, il existe  $\alpha > 0$  tel que, si  $|t| < \alpha$  on ait

$$|\varphi(t) - \varphi(0)| \leq \varepsilon$$

si bien que

$$\left| \int_{-\alpha}^{+\alpha} \delta_n(t) \cdot (\varphi(t) - \varphi(0)) dt \right| \leq \varepsilon \int_{-\alpha}^{+\alpha} \varphi_n(t) dt \leq \varepsilon$$

D'autre part

$$\begin{aligned} \left| \int_{\alpha}^{+\infty} \delta_n(t) \cdot (\varphi(t) - \varphi(0)) dt \right| &\leq 2N_{\infty} \int_{\alpha}^{+\infty} \delta_n(t) dt \\ &\leq 2N_{\infty}(\varphi) \int_{n\alpha}^{\infty} \frac{d\theta}{\pi \cdot (1+\theta^2)} \end{aligned}$$

montre qu'il existe  $N$  entier positif tel que, si  $n \geq N$ ,

$$\left| \int_{|t| > \alpha} \delta_n(t) \cdot (\varphi(t) - \varphi(0)) dt \right| \leq \varepsilon$$

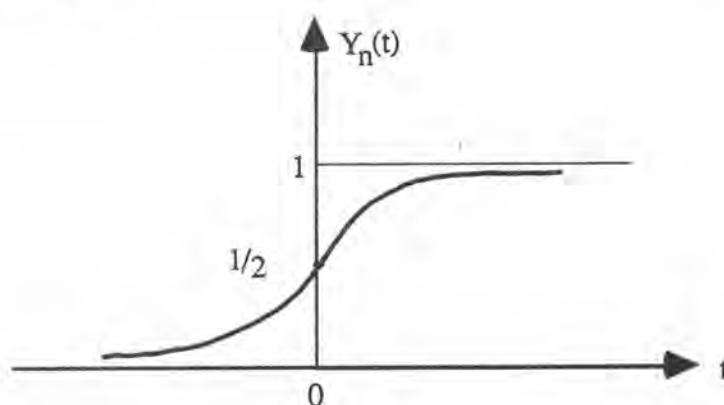
et la conclusion suit.

(On dit que la suite  $(\delta_n)$  **converge faiblement** vers la mesure de DIRAC  $\delta$ :  $\varphi \rightarrow \varphi(0)$ ).

### 5) La suite des primitives

$$Y_n(t) = \int_{-\infty}^t \delta_n(\theta) d\theta = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{nt} \frac{d\theta}{1+\theta^2} = \frac{1}{\pi} \left( \text{Arctg } nt + \frac{\pi}{4} \right)$$

converge simplement sur  $\mathbb{R}$  vers la fonction échelon-unité  $Y$  (qui vaut 1 à  $t > 0$ , 0 à  $t < 0$ , et  $\frac{1}{2}$  à  $t = 0$ ) :



Il n'y a évidemment pas convergence uniforme sur  $\mathbb{R}$  (puisque  $Y$  est discontinue à l'origine) ; par contre, on s'assure de la convergence uniforme sur tout  $\mathbb{R} \setminus [-\varepsilon, +\varepsilon]$ , avec  $\varepsilon > 0$ .

**6** Voir feuille Leçon **18** .

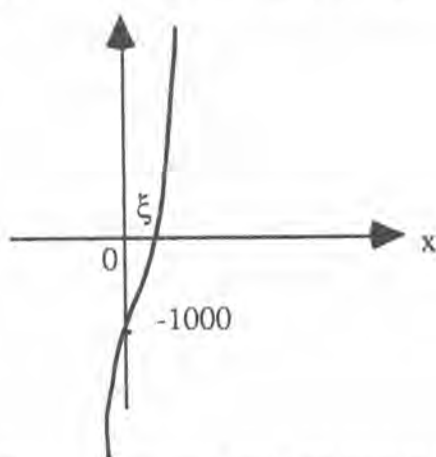


# - 7 -

## EXEMPLES D'APPLICATIONS DU THEOREME DES ACCROISSEMENTS FINIS POUR UNE FONCTION NUMERIQUE D'UNE VARIABLE REELLE

**1** Résolution de l'équation  $x^3+x-1000=0$  selon la technique d'itération.

1)  $f(x) = x^3+x-1000$  ayant pour graphe :



l'équation possède exactement une racine  $\xi$  et, comme  $f(10) > 0 > f(9)$  (d'après le théorème de la valeur intermédiaire),  $\xi \in ]9,10[$

2) Ecrivant l'équation sous la forme

$$x = \sqrt[3]{1000-x} = \varphi(x)$$

il s'agit de rechercher le point fixe  $\xi$  de l'application  $\varphi$ .

Or,  $\varphi([9,10]) \subset [9,10]$  et, comme

$$\varphi'(x) = -\frac{1}{3} (1000-x)^{-\frac{2}{3}}$$

on a :  $|\varphi'(x)| \leq \frac{1}{3} 990^{-\frac{2}{3}} = k \approx \frac{1}{300}, \quad \forall x \in [9,10].$

3) Le théorème des accroissements finis permet alors d'assurer la convergence de la suite itérée

$$\begin{cases} x_0 = 10 \\ x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad n \geq 0 \end{cases}$$

en montrant qu'il s'agit d'une suite de Cauchy.

En effet, pour tout  $n \geq 0$

$$|\varphi(x_n) - \varphi(x_{n-1})| = |x_{n+1} - x_n| \leq k |x_n - x_{n-1}|$$

ce qui entraîne que, si  $n, p \geq 0$

$$|x_{n+p} - x_n| \leq \frac{k^n}{1-k} |x_1 - x_0|$$

et ce qui permet de conclure.

4) La limite  $\xi$  de la suite  $(x_n)_{n \geq 0}$  est le point fixe cherché (: d'après la continuité de l'application  $\varphi$ ) et on a établi la formule d'erreur

$$|x_n - \xi| \leq \frac{k^n}{1-k} |x_1 - x_0|.$$

## 2 Résolution du problème de condition initiale

$$\dot{x} = \frac{x^2}{1-t \cdot x}, \quad x(0) = 1$$

selon la technique d'itération.

1) Pour  $a > 0$  (qui sera précisé dans la suite), on considère l'application  $\phi$  de l'espace  $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}^0([-a, +a])$  dans lui-même, définie par

$$\phi(x)(t) = 1 + \int_0^t \frac{x^2(s)}{1-s \cdot x(s)} ds, \quad \forall t \in [-a, +A].$$

: la solution au problème posé n'est autre que le point fixe  $\xi$  de l'application  $\phi$ .

2) Si  $x \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}^0([-a, +a])$  est tel que  $N_{\infty}(x) = \sup_{|t| \leq a} |x(t)| \leq b$  alors, pour tout  $t \in [0, a]$ , on a, si  $ab < 1$  :

$$|\phi(x)(t)| \leq 1 + \int_0^t \frac{b^2}{1-ab} ds \leq 1 + \frac{ab^2}{1-ab}$$

et, en raisonnant de même pour  $t \in [-a, 0]$ , on en déduit que

$$N_{\infty}(\phi(x)) \leq 1 + \frac{ab^2}{1-ab} ;$$

3) Si  $x_1$  et  $x_2 \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}^0([-a, +a])$  avec  $N_{\infty}(x_1)$  et  $N_{\infty}(x_2) \leq b$ , on a, pour  $t \in [-a, +a]$  :

$$|\phi(x_1) - \phi(x_2)|(t) \leq \int_0^t \left| \frac{x_1^2(s)}{1-s x_1(s)} - \frac{x_2^2(s)}{1-s x_2(s)} \right| ds$$

où, d'après le **théorème des accroissements finis**

$$\left| \frac{x_1^2(s)}{1-s x_1} - \frac{x_2^2(s)}{1-s x_2} \right| \leq \frac{b \cdot (2+ab)}{(1-ab)^2} \cdot |x_1 - x_2|(s)$$

car  $\left| \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x^2}{1-s \cdot x} \right) = \frac{x(2-s \cdot x)}{(1-s \cdot x)^2} \right| \leq \frac{b \cdot (2+ab)}{(1-ab)^2}$ .

Si bien que,

$$N_{\infty}(\phi(x_1) - \phi(x_2)) \leq \frac{ab \cdot (2+ab)}{(1-ab)^2} \cdot N_{\infty}(x_1 - x_2).$$

4) Choisissons maintenant  $a > 0$ ,  $b > 0$  tel que

i)  $a \cdot b < 1$

ii)  $1 + \frac{ab^2}{1-ab} \leq b$

iii)  $k = \frac{ab(2+ab)}{(1-ab)^2} < 1$

(On s'assurera qu'un tel choix est possible, avec  $a \in [3-2\sqrt{2}, 3+2\sqrt{2}]$  et  $b > 0$  assez petit ...).

Dans ces conditions,  $\phi$  est une application contractante sur la boule de rayon  $b$  dans  $(\mathcal{C}_{\mathbb{R}}^0([-a, +a]), N_{\infty})$ , ce qui permet d'assurer la convergence de la suite des itérés par  $\phi$ , à partir de la position initiale.

**3** Etude de la série numérique  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\lambda n \pi)}{n}$ .

On lira la démonstration de la divergence dans le § 7 de l'exemple **5**, de la leçon

**18** : le **théorème des accroissements finis** permet de comparer la série à

l'intégrale impropre  $\int_1^{\infty} \cos(\lambda t \pi) \frac{dt}{t}$ .

**4** Démonstration du théorème de SCHWARZ sur les fonctions de classe  $\mathcal{C}^2$ .

Soit  $f$  une application du carré  $C = [-1,1] \times [-1,1]$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , de classe  $\mathcal{C}^1$  et qui possède des dérivées seconde

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

sur  $C$ , qui sont en outre continues sur  $(0,0)$  : il s'agit de montrer que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) :$$

Pour  $(x,y) \in C$ ,  $t \in [0,1]$ , on pose

$$F(t) = f(tx,y) - f(tx,0)$$

$$G(t) = f(x,ty) - f(0,ty)$$

Alors

$$F(1) - F(0) = f(x,y) - f(x,0) - f(0,y) + f(0,0)$$

$$= G(1) - G(0).$$

D'après le **théorème des accroissements finis**, on s'assure de l'existence de nombres  $\alpha, \beta, \alpha_1, \beta_1$  de  $(0,1)$  tels que

$$\begin{aligned} F(1) - F(0) &= F'(\alpha) \\ &= x(\partial_x f(\alpha x, y) - \partial_x f(\alpha x, 0)) \\ &= x \cdot y \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\alpha x, \beta y) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} G(1)-G(0) &= \dot{G}(\beta_1) \\ &= y(\partial_y f(x, \beta_1 y) - \partial_y f(0, \beta_1 y)) \\ &= y.x \partial_{xy}^2 f(\alpha_1 x, \beta_1 y) \end{aligned}$$

En comparant, il vient donc :  $\partial_{xy}^2 f(\alpha_1 x, \beta_1 y) = \partial_{yx}^2 f(\alpha x, \beta y)$  et, comme les fonctions sont continues en  $(0,0)$ , on conclut en faisant tendre  $(x,y)$  vers  $(0,0)$ .

**5** Estimation de l'erreur d'interpolation de Lagrange.

Soit  $f \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}^{(n+1)}([a,b])$ , et soit  $x_0, x_1, \dots, x_n$   $(n+1)$  points de  $[a,b]$ . On désigne par  $Lf$  le polynôme (de degré  $n$ ) qui interpole  $f$  sur les points (supposés distincts) :

$$Lf(x) = \sum_{i=0}^{i=n} f(x_i) \ell_i$$

où

$$\ell_i(x) = \prod_{\substack{j \neq i \\ 0 \leq j \leq n}} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad (: \in \mathbb{R}_n[X])$$

Etant donné  $x \neq x_0, x_1, \dots, x_n$ , on considère la fonction polynomiale

$$P(t) = Lf(t) + \frac{f(x) - Lf(x)}{\omega(x)} \omega(t)$$

où

$$\omega(x) = \prod_{j=0}^{j=n} (x - x_j)$$

Comme  $(P-f)$  s'annule  $(n+2)$  fois ( $:$  en  $x$ , et en  $x_0, x_1, \dots, x_n$ ), d'après le **théorème de Rolle**, sa dérivée d'ordre  $(n+1)$  s'annule au moins une fois : il existe  $\xi \in (a,b)$  tel que

$$f^{(n+1)}(\xi) = P^{(n+1)}(\xi) = \frac{f(x) - Lf(x)}{\omega(x)} (n+1)!$$

Ce qui permet d'estimer l'écart

$$f(x) - Lf(x) = \frac{1}{(n+1)!} \omega(x) f^{(n+1)}(\xi).$$

## 6 (Théorème de DARBOUX)

Soit  $f$  une fonction numérique dérivable sur  $[a,b]$  : on montre que  $f'$  satisfait au théorème des valeurs intermédiaires.

Si  $\lambda$  est un nombre compris entre  $f'(a+)$  et  $f'(b-)$  on considère la fonction  $F$  définie sur  $[a,b]$  par

$$F(x) = f(x) - \lambda(x-a)$$

$F$  atteint sa borne inférieure en un point  $x_0$  du compact  $[a,b]$ . Comme

$$F'(a+) = f'(a+) - \lambda < 0$$

$$F'(b-) = f'(b-) - \lambda > 0$$

(si on suppose que  $f'(a+) < \lambda < f'(b-)$ , par exemple) c'est que  $x_0 \in ]a,b[$ , et par conséquent

$$F'(x_0) = f'(x_0) - \lambda = 0$$

ce qui permet de conclure.

## 7 (règle de L'HOSPITAL)

1) Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a,b]$ , et dérivable sur  $]a,b[$ . On suppose que  $f'$  a une limite  $\ell$  en  $a$  ; on montre alors que  $f$  est dérivable en  $a$ , de dérivée  $\ell$  : en effet, si  $h > 0$ , il existe  $\xi_h \in ]a, a+h[$  tel que l'on ait

$$f(a+h) - f(a) = h \cdot f'(\xi_h)$$

maintenant, si  $h \rightarrow 0+$ ,  $\xi_h \rightarrow a+$  et, par hypothèse,  $f'(\xi_h) \rightarrow \ell$  : il en résulte que

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \text{ existe, et vaut } \ell.$$

2) Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continues sur  $[a,b]$ , dérivables sur  $]a,b[$ , et nulles en  $a$ . On montre que si le quotient  $\frac{f'}{g'}$  possède une limite  $\ell$  en  $a$ , alors le quotient  $\frac{f}{g}$  a aussi  $\ell$  comme limite en  $a$  : il suffit bien sûr de montrer que, pour tout  $h > 0$ , il existe  $\xi_h \in ]a, a+h[$  tel que

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{g(a+h)-g(a)} = \frac{f'(\xi_h)}{g'(\xi_h)}$$

et, pour ce faire, on considère la fonction

$$F(x) = f(a+h)-f(x) - \frac{f(a+h)-f(a)}{g(a+h)-g(a)} (g(a+h)-g(x))$$

sur  $[a,b]$  :  $F$  est continue sur  $[a,a+h]$ , dérivable sur  $]a,b[$ , et  $F(a) = F(a+h) = 0$  ; d'après le **théorème de Rolle**, il existe  $\xi_h \in ]a,a+h[$  tel que  $F'(\xi_h) = 0$ , d'où la conclusion annoncée.

### 8 (Théorème de SARD)

Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0,1]$ , à valeurs réelles, et soit  $\varepsilon > 0$  donné.

Comme  $f'$  est continue sur le compact  $[0,1]$ , et d'après le théorème de HEINE, il existe  $\delta_\varepsilon > 0$  tel que

$$\forall x,y \in [0,1], |x-y| \leq \delta_\varepsilon \Rightarrow |f'(x)-f'(y)| \leq \varepsilon.$$

On divise alors l'intervalle  $[0,1]$  en  $N_\varepsilon \geq \frac{1}{\delta_\varepsilon}$  sous-intervalles de même longueur : si l'intervalle  $\left[ \frac{k}{N_\varepsilon}, \frac{k+1}{N_\varepsilon} \right]$  contient un point  $x_0$  tel que  $f'(x_0) = 0$ , alors, d'après le **théorème des accroissements finis**, pour tout couple  $(x,y)$  dans l'intervalle, on a :

$$|f(x)-f(y)| \leq \frac{1}{N_\varepsilon} \cdot \varepsilon.$$

Par conséquent, l'ensemble des valeurs critiques de  $f$ , c'est-à-dire l'ensemble

$$A = \{f(x_0) / x_0 \in [0,1] \text{ tel que } f'(x_0) = 0\}$$

peut être recouvert par une réunion d'intervalles, de longueur totale inférieure à  $N_\varepsilon \times \frac{\varepsilon}{N_\varepsilon} = \varepsilon$ .

( $A$  est de mesure nulle).

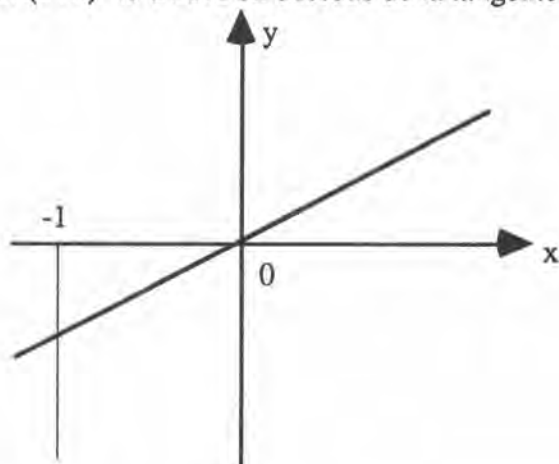
# - 8 -

## EXEMPLES D'ENCADREMENT DE FONCTIONS NUMERIQUES

$$\boxed{1} \quad x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x, \quad x > 0$$

$$x - \frac{x^2}{2(x+1)} < \ln(1+x) < x, \quad -1 < x < 0.$$

1) D'après la **convexité** de la fonction  $-\ln(1+x)$  sur  $] -1, +\infty[$ , on sait que le graphe de  $\ln(1+x)$  se trouve en dessous de la tangente à l'origine :



ce qui donne  $\ln(1+x) < x, \forall x > -1$ .

2) Pour  $|x| < 1$ ,  $\ln(1+x)$  possède le développement en série entière

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$$

et le **critère de Leibniz pour une série alternée** apprend que, si  $0 < x < 1$ ,

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x.$$

3) Pour  $-1 < x < 0$ , le développement précédent montre que :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} \left( 1 - \frac{2}{3}x + \frac{2}{4}x^2 - \dots \right)$$



avec  $1 - \frac{2}{3}x + \frac{2}{4}x^2 - \dots < 1 - x + x^2 - \dots = \frac{1}{1+x}$

si bien que  $\ln(1+x) > x - \frac{x^2}{2(1+x)}$ .

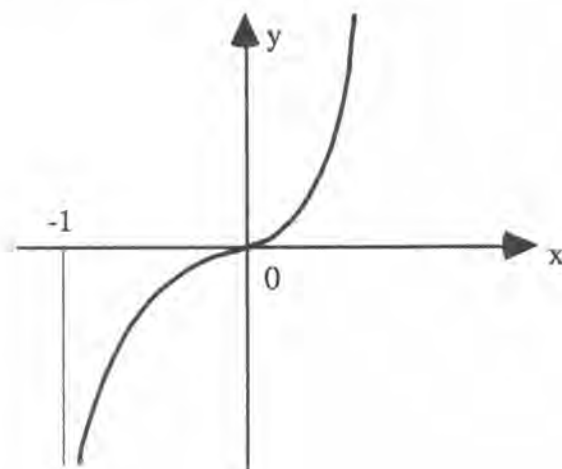
4) Pour  $x > 0$ , la formule de Taylor avec reste intégral

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \int_0^x \frac{x-t}{(1+t)^3} dt$$

montre que  $\ln(1+x) > x - \frac{x^2}{2}$ .

5) Ce que confirme une étude graphique :

Si  $f(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$  pour  $x > -1$ .



\(x(\)

2)

$$\sqrt{\pi} + \frac{e^{-x^2}(1-2x^2)}{4x^3} - \frac{3}{8} \cdot \frac{e^{-x^2}}{x^5} < \int_0^x e^{-t^2} dt < \sqrt{\pi} + \frac{e^{-x}(1-2x^2)}{4x^3}, \quad x > 0.$$

1)  $\int_0^x e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi} - \int_x^\infty e^{-t^2} dt$  (Leçon 29, exemple 4).

2) Par le changement de variable  $t = \sqrt{\theta}$ ,

$$\int_x^\infty e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} \int_{x^2}^\infty \frac{e^{-\theta}}{\sqrt{\theta}} d\theta$$

et les intégrations par parties successives conduisent à transformer l'intégrale selon

$$\begin{aligned} \int_{x^2}^\infty \frac{e^{-\theta}}{\sqrt{\theta}} d\theta &= \int_{x^2}^\infty \frac{d(-e^{-\theta})}{\sqrt{\theta}} = \frac{e^{-x^2}}{x^2} - \int_{x^2}^\infty \frac{e^{-\theta}}{2\theta^{3/2}} d\theta \\ &= \frac{e^{-x^2}}{x^2} - \frac{1}{2} \frac{e^{-x^2}}{x^3} + \frac{3}{4} \int_{x^2}^\infty \frac{e^{-\theta}}{\theta^{5/2}} d\theta \end{aligned}$$

c'est-à-dire au début du développement asymptotique de la fonction -erreur

$$\text{Erf}(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt :$$

$$\text{Erf}(x) = \sqrt{\pi} + \frac{e^{-x^2}}{4x^3} (1-2x^2) + R(x)$$

avec, par conséquent

$$R(x) = -\frac{3}{8} \int_{x^2}^\infty \frac{e^{-\theta}}{\theta^{5/2}} d\theta$$

tel que, pour  $x > 0$ , on ait l'encadrement

$$0 > \bar{R}(x) > -\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{x^5} \int_{x^2}^\infty e^{-\theta} d\theta$$

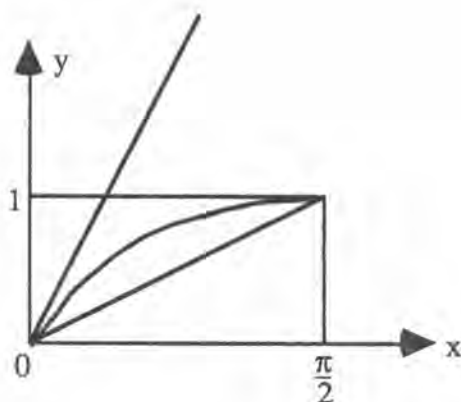
et conduit à l'encadrement annoncé.

3) En poussant les intégrations par parties, on améliorera l'encadrement ... voir d'autres exemples de même nature dans la Leçon [\[12\]](#), ainsi que l'Annexe de la Leçon [\[17\]](#).

$$\boxed{3} \quad \frac{2}{\pi} x \leq \sin x \leq x, \quad x \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

$$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x, \quad x \geq 0.$$

1)



: la convexité de sinus sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$  conduit bien au premier encadrement.

2) Avec le développement en série entière de  $\sin x$ , et l'argument de Leibniz sur les séries alternées, on obtient le deuxième.

3) La minoration  $\sin(x) \geq \frac{2}{\pi} x$  sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$  s'avère utile dans la démonstration du fait que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R \sin \theta} d\theta \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} \text{(lemme de Jordan)}.$$

$$\boxed{4} \quad rx^{r-1}(x-y) \leq x^r - y^r \leq ry^{r-1}(x-y) \text{ si } 0 < r < 1, x, y > 0.$$

1) Si  $x \neq y$ , on a

$$\frac{x^r - y^r}{x - y} = x^{r-1} + x^{r-2}y + \dots + xy^{r-2} + y^{r-1}$$

ce qui donne, si par exemple  $x > y > 0$  :

$$r.y^{r-1} < \frac{x^r - y^r}{x - y} < r.x^{r-1}$$

et permet de conclure.

2) On peut aussi utiliser le théorème des accroissements finis, appliqué à la fonction

$$f(t) = t^r \text{ sur } [x, y] \subset ]0, +\infty[.$$

# - 9 -

## EXEMPLES D'UTILISATION D'INTEGRALES POUR L'ETUDE DE SUITES ET DE SERIES

1) Etude de la suite  $(C_{2n}^n)_n$

On introduit les intégrales de Wallis  $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \, dt$ .

1)  $I_0 = \frac{\pi}{2}$  et  $n \cdot I_n = (n-1) \cdot I_{n-2}$  donnent

$$I_{2n} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2^{2n}} C_{2n}^n.$$

2)  $\frac{I_{n+2}}{I_n} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$ .

$$\frac{I_{n+2}}{I_n} = \frac{n+1}{n+2} \text{ donnent } \frac{I_{n+1}}{I_n} \rightarrow 1.$$

3)  $(n+1)I_n I_{n+1} = I_0 I_1 = \frac{\pi}{2}$  donne  $I_n^2 \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{\pi}{2n}$  et par conséquent :

$$C_{2n}^n \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}.$$

2)  $\left( \frac{n\sqrt{n!}}{n} \right)_{n \geq 1}$

$$\ell_n \left( \frac{n\sqrt{n!}}{n} \right) = \frac{1}{n} \ell_n \left( \prod_{k=1}^n \frac{k}{n} \right)$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} \ell_n \left( \frac{k}{n} \right)$$

qui tend vers  $\int_0^1 \ell_n(t) dt = t \ell_{nt-t} \Big|_0^1 = -1$

(en tant que **somme de Riemann** pour une intégrale impropre convergente, car  $t \rightarrow \ell_n(t)$  est monotone : voir l'argument détaillé en Leçon [10], exemple [1], 3).

Par conséquent

$$\frac{n\sqrt{n!}}{n} \underset{(n \rightarrow \infty)}{\sim} \frac{1}{e}.$$

$$[3] \quad \left( \frac{\pi}{n} \sum_{k=0}^n \sin \frac{k\pi}{n} \right)_{n \geq 1}$$

1) Pour l'intérêt de cette suite, on renvoie à la Leçon [28], exemple [1] (phénomène de Gibbs).

2) Il s'agit d'une suite de **sommes de Riemann**, qui converge vers l'intégrale définie

$$\int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt.$$

$$[4] \quad \left( S_n(t) = \sum_{k=1}^n \frac{\sin(kt)}{k} \right)_{n \geq 1}$$

: il s'agit d'étudier la suite des sommes partielles de Fourier de la fonction en dents de scie  $h(t)$  : on calcule  $\dot{S}_n$ , pour **transformer**  $S_n(t)$  **sous une forme intégrale** dont le comportement, lorsque  $n \rightarrow +\infty$ , est étudié dans la référence précédente.

[5] Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note par  $p_n$  le reste de la division de  $n$  par  $p \in \{1, 2, \dots, n\}$  : comportement de la probabilité que  $p_n > \frac{p}{2}$ , lorsque  $n \rightarrow \infty$ .

1) Si  $n = p \cdot q + p_n$ ,  $0 \leq p_n < p$ ,  $q = \left[ \frac{n}{p} \right]$  (: partie entière de  $\frac{n}{p}$ ), et

$$0 \leq \frac{2n}{p} - 2 \left[ \frac{n}{p} \right] = \frac{2p_n}{p} < 2$$

montre que si  $p_n \geq \frac{p}{2}$ ,  $\left[ \frac{2n}{p} \right] - 2 \left[ \frac{n}{p} \right] = 1$

si  $p_n < \frac{p}{2}$ ,  $\left[ \frac{2n}{p} \right] - 2 \left[ \frac{n}{p} \right] = 0$ .

2) Et la probabilité cherchée est donc donnée par

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{p=1}^n \left( \left[ \frac{2n}{p} \right] - 2 \left[ \frac{n}{p} \right] \right).$$

3) La fonction  $f$ , définie sur  $]0,1]$  par

$$f(t) = \left[ \frac{2}{t} \right] - 2 \left[ \frac{1}{t} \right]$$

est intégrable sur  $[0,1]$  au sens de Riemann :

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in \left( \frac{1}{m+1}, \frac{2}{2m+1} \right) \\ 0 & \text{si } t \in \left( \frac{2}{2m+1}, \frac{1}{m} \right) \end{cases} \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

montre que  $f$  est bornée sur  $]0,1]$ , et que pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $f|_{[\varepsilon,1]}$  est une fonction en escalier, ce qui permet de conclure (\*).

De plus,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{p=1}^n f\left(\frac{p}{n}\right) = \int_0^1 f(t)dt$  : en effet, à  $\varepsilon > 0$  donné, on écrira

que :

$$\left| \int_0^1 f dt - u_n \right| \leq \varepsilon + \frac{1}{n} \sum_{1 \leq p < \frac{\varepsilon}{n}} f\left(\frac{p}{n}\right) + \left| \int_{\varepsilon}^1 f dt - \frac{1}{n} \sum_{\frac{\varepsilon}{n} \leq p \leq n} \right|$$

---

(\*) On prendra la définition donnée dans le Cours de M. Morlet 1 p. 81.

$$\text{où } \left| \int_{\varepsilon}^1 f(t) dt - \frac{1}{n} \sum_{\frac{\varepsilon}{n} \leq p \leq n} f\left(\frac{p}{n}\right) \right| \leq \varepsilon \text{ pour } n \geq N_{\varepsilon}.$$

4) Maintenant, on a encore, avec la relation de Chasles

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(t) dt &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{p=1}^{n-1} \int_{\frac{1}{p+1}}^{\frac{1}{p}} f(t) dt \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{p=1}^{n-1} \left( \frac{2}{2p+1} - \frac{1}{p+1} \right) \\ &= 2 \sum_{p \geq 3} \frac{(-1)^{p-1}}{p} \\ &= 2 \ln 2 - 1 \end{aligned}$$

et, en conclusion  $u_n \xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} 2 \ln 2 - 1 (\sim 0.39)$ .

**6** et **7** : les exemples **3** et **5** de la Leçon **15**.

**8** Calcul de  $S = \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{2^n}$ .

1) On considère la série entière

$$f(x) = \sum_1^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$$



de rayon de convergence  $R = 1$ . En dérivant terme à terme dans l'intervalle de convergence  $] -1, +1[$  il vient

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n}$$

puis 
$$(zf')(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1} = \frac{1}{1-z}.$$

3) En intégrant de 0 à  $z \in [0, 1[$ , il vient donc

$$zf'(z) = \int_0^z \frac{dt}{1-t} = -\ln(1-z)$$

puis 
$$f(z) = - \int_0^z \frac{\ln(1-t)}{t} dt$$

3) En particulier, on a donc

$$S = f\left(\frac{1}{2}\right) = - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1-t)}{t} dt$$

: le calcul de  $S$  est ramené à celui d'une **intégrale**.

On pose

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1-t)}{t} dt.$$

En intégrant par parties, il vient :

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} \ln(1-t) d(\ln t) = \left( \ln\left(\frac{1}{2}\right) \right)^2 + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln t}{1-t} dt$$

soit, en posant

$$J = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ell n t}{1-t} dt$$

la relation  $I = J + (\ell n 2)^2$ .

D'autre part, le changement de variable  $t = 1-\theta$  donne

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ell n \theta}{1-\theta} d\theta$$

et, par conséquent

$$I+J = \int_0^1 \frac{\ell n t}{1-t} dt = -\frac{\pi^2}{6}$$

d'après l'exemple [4] de la Leçon [10].

Ainsi, il vient

$$2I - (\ell n 2)^2 = -\frac{\pi^2}{6}$$

d'où enfin

$$S = \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2} (\ell n 2)^2$$

[9] Expression intégrale de la constante d'Euler  $C$ .

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ell n n \right)$$

existe, comme on le voit en comparant la série harmonique à l'intégrale  $\int \frac{dt}{t}$ . On peut effectuer les transformations suivantes

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ell n n = \int_0^1 (1+t+\dots+t^{n-1})dt - \ell n(n)$$

où 
$$\int_0^1 (1+t+\dots+t^{n-1})dt = \int_0^1 \frac{1-t^n}{1-t} dt = \int_0^n \left(1 - \left(1 - \frac{\theta}{n}\right)^n\right) \frac{d\theta}{\theta}$$

si bien que 
$$\begin{aligned} C &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_0^n \left(1 - \left(1 - \frac{\theta}{n}\right)^n\right) \frac{d\theta}{\theta} - \int_1^n \frac{d\theta}{\theta} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_0^1 \left(1 - \left(1 - \frac{\theta}{n}\right)^n\right) \frac{d\theta}{\theta} - \int_1^n \left(1 - \frac{\theta}{n}\right)^n \frac{d\theta}{\theta} \right) \\ &= \int_0^1 \frac{1-e^{-\theta}}{\theta} d\theta - \int_1^\infty \frac{e^{-\theta}}{\theta} d\theta. \end{aligned}$$

On justifiera le passage à la limite sous le signe  $\int$  à l'aide de l'encadrement

$$0 < e^{-\theta} - \left(1 - \frac{\theta}{n}\right)^n < \frac{\theta^2}{2n}, \quad \forall \theta \geq 0$$

(voir : Leçon [11](#) , exemple [3](#) ).

**10** Leçon [17](#) , et le complément sur la formule d'Euler-Mac Laurin.

# - 10 -

## EXEMPLES DE CALCUL D'INTEGRALES DEFINIES

$$\boxed{1} \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln(1-2r \cos \theta + r^2) d\theta, \quad r \geq 0.$$

- 1) Comme  $1-2r \cos \theta + r^2 = (r - \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta = |r - e^{i\theta}|^2 \geq 0$ .  
 $\forall \theta \in [0, 2\pi], \forall r \geq 0$ , l'intégrale

$$I(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln(1-2r \cos \theta + r^2) d\theta$$

est définie pour  $r \neq 1$  ; si  $r = 1$ , il s'agit de l'intégrale impropre

$$I(1) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln\left(2 \cdot 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \ln(2 \sin t)^2 dt$$

qui converge avec  $\int_0^{\pi} \ln(\sin t) dt$ .

- 2) Pour  $r \neq 1$ ,  $I(r)$  est la **limite des sommes de Riemann**

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left| r - e^{\frac{2ik\pi}{n}} \right|^2$$

(: obtenue en choisissant les points de subdivision

$$\theta_k = \frac{2k\pi}{n}, \quad k = 1, 2, \dots, n).$$

Comme  $\prod_{k=1}^n \left( r - e^{\frac{2ik\pi}{n}} \right) = r^n - 1$ , il vient donc

$$I(r) = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln |r^n - 1|^{\frac{2}{n}}$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq r < 1 \\ 2 \ln r, & \text{si } r > 1 \end{cases}$$

3) Le cas  $r = 1$  se ramène, comme on l'a vu, au calcul de  $\int_0^{2\pi} \ln(\sin t) dt$  ; comme

$t \rightarrow \ln(\sin t)$  est une fonction croissante sur  $]0, \frac{\pi}{2}]$ , on a, pour tout  $n$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2n}} \ln(\sin t) dt < \frac{\pi}{2n} \sum_{k=1}^n \ln\left(\sin k \frac{\pi}{2n}\right) < \int_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t) dt$$

A partir de

$$x^{2n-1} = (x^2 - 1) \prod_{k=1}^{n-1} \left( x - e^{ik \frac{\pi}{n}} \right) \left( x - e^{-ik \frac{\pi}{n}} \right)$$

qui donne 
$$\prod_{k=1}^{n-1} \left( x^2 - 2x \cos k \frac{\pi}{n} + 1 \right) = \frac{x^{2n} - 1}{x^2 - 1}$$

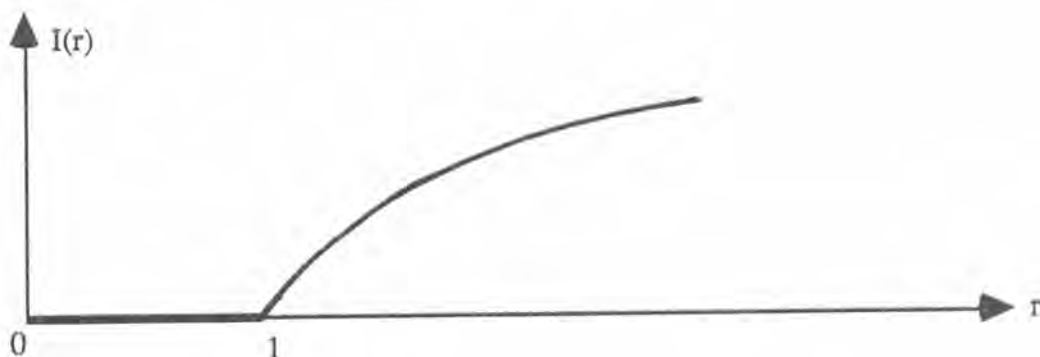
on obtient, en faisant  $x \rightarrow 1$  :

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin \left( k \frac{\pi}{2n} \right) = \frac{\sqrt{n}}{2^n}$$

et, en faisant tendre  $n \rightarrow +\infty$  dans l'encadrement précédent, il vient

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2n} \ln \left( \frac{\sqrt{n}}{2^n} \right) = -\frac{\pi}{2} \ln(2).$$

Par conséquent  $I(1) = 0$



4) On peut aussi calculer  $I(1)$  en introduisant les intégrales

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t) dt \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos t) dt$$

par le **changement de variable**  $t = \frac{\pi}{2} - t$ ,  $I = J$  et

$$I+J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \left( \frac{\sin 2t}{2} \right) dt = -\frac{\pi}{2} \ln 2 + 2I.$$

5) Pour  $r \neq 1$ , on peut dériver sous le signe  $\int$  pour obtenir

$$I'(r) = \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r - \cos \theta}{1 - 2r \cos \theta + r^2} d\theta$$

où 
$$\frac{r - \cos \theta}{1 - 2r \cos \theta + r^2} = \frac{r - \cos \theta}{|r - e^{i\theta}|^2} = \operatorname{Re} \left( \frac{1}{r - e^{-i\theta}} \right)$$

avec 
$$\frac{1}{r - e^{-i\theta}} = \frac{-e^{i\theta}}{1 - re^{i\theta}} = - \sum_{n=0}^{\infty} r^n e^{i(n+1)\theta} \quad \text{pour } 0 \leq r < 1.$$

Maintenant, à  $r \in [0,1[$  fixé, la série de fonctions de la variable  $\theta$

$$\sum_{n \geq 0} r^n \cos(n+1)\theta$$

converge normalement sur  $[0,2\pi]$ , ce qui permet d'intégrer terme à terme, pour donner

$$I'(r) = -\frac{1}{\pi} \sum_{n \geq 0} r^n \int_0^{2\pi} \cos(n+1)\theta \, d\theta = 0.$$

Par conséquent,  $I(r) = I(0) = 0 \quad \forall r \in [0,1[$ .

6) Pour,  $r > 1$ , on peut utiliser le même procédé, pour obtenir

$$I'(r) = \frac{1}{\pi} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{r^{n+1}} \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} \, d\theta = \frac{2}{r}$$

ce qui donne

$$I(r) = 2\ell n(r) + C^{te}.$$

Ce qui conduit à remarquer que

$$\begin{aligned} I(r) - 2\ell n(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ell n\left(1 - \frac{2}{r} \cos \theta + \frac{1}{r^2}\right) \, d\theta = I\left(\frac{1}{r}\right) \\ &= 0 \quad \text{si } r > 1 \end{aligned}$$

d'où  $I(r) = 2\ell n r$ , si  $r > 1$ .

2  $\int_0^{2\pi} \frac{\cos nt}{\lambda - \cos t} \, dt, \quad \lambda > 1.$

1) Comme  $\lambda > 1$ , il s'agit bien d'une intégrale définie.

2) Qu'on peut regarder comme le  $n^{\text{ième}}$  coefficient de Fourier de la fonction  $2\pi$ -périodique paire  $f_\lambda : t \rightarrow \frac{1}{\lambda - \cos t}$ .

3) Comme  $f_\lambda$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux, elle coïncide avec son développement de Fourier (Dirichlet) :

$$\frac{1}{\lambda - \cos t} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} a_n \cos nt, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

ce qui permet d'obtenir les coefficients **par identification** en écrivant que

$$1 = (\lambda - \cos t) \left( \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} a_n \cos nt \right)$$

... ce qui conduit à la **relation de récurrence**

$$0 = \lambda a_n - \frac{1}{2} (a_{n-1} + a_{n+1}), \quad \forall n \geq 1$$

et 
$$1 = \lambda \frac{a_0}{2}$$

(qu'on peut vérifier, directement, sur l'expression  $a_n$ ).

4) On résout l'équation aux différences avec l'équation résolvante  $p^2 - 2\lambda p + 1 = 0$ , de solutions

$$p_{\pm} = \lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 1}$$

$a_n$  est donc de la forme  $A p_+^n + B p_-^n$ , mais ( $\because$  Bessel) doit tendre vers 0 lorsque  $n \rightarrow +\infty$  ; par conséquent

$$a_n = B p_-^n = \frac{2}{\lambda} p_-^n$$



et on a obtenu :

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos nt}{\lambda - \cos t} dt = \frac{2\pi}{\lambda} (\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 1})^n.$$

5) Pour  $\lambda > 1$ , l'intégration terme à terme suivante est justifiée :

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos nt}{\lambda - \cos t} dt = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} \cos nt \cos^k t dt \frac{1}{\lambda^k}$$

et le calcul des coefficients

$$\int_0^{2\pi} \cos nt \cos^k t dt = 2 \int_0^{\pi} \cos nt \cos^k t dt$$

se ramène à celui des intégrales

$$\int_{-1}^{+1} T_n(x) x^k \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

c'est-à-dire à connaître le développement de  $n^{\text{ième}}$  polynôme de Tchebychev  $T_n$  (: Leçon 5, exemple 2) dans la base formée par les monômes.

$$\boxed{3} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(t^2 - \sin^2 \theta) d\theta, \quad t > 1.$$

1) L'intégrale  $I(t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(t^2 - \sin^2 \theta) d\theta$  est définie pour  $t > 1$ , et  $I$  est dérivable sur  $]1, +\infty[$  avec

$$I'(t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2t}{t^2 - \sin^2 \theta} d\theta, \quad \forall t > 1.$$

2) On calcule  $I(t) = 2t \int_0^{\infty} \frac{du}{t^2 + (t^2)u^2} = \frac{\pi}{\sqrt{t^2-1}}$ .

3) Sur  $]1, +\infty[$ ,  $I$  est donc de la forme

$$I(t) = \pi \ln(t + \sqrt{t^2-1}) + C$$

où la constante  $C$  est donnée par

$$C = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(1 - \frac{\sin^2 \theta}{t^2}\right) d\theta - \pi \ln\left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{t^2}}\right).$$

$$\text{Comme } 0 \geq \ln\left(1 - \frac{\sin^2 \theta}{t^2}\right) \geq \ln\left(1 - \frac{1}{t^2}\right),$$

on obtient, en faisant  $t \rightarrow +\infty$

$$C = -\pi \ln 2$$

4) D'où

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(t^2 - \sin^2 \theta) d\theta = \pi \ln \frac{t + \sqrt{t^2-1}}{2}, \quad \forall t > 1.$$

4  $\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t} dt.$

1) Comme  $\int_0^1 \ln t \, dt = t \ln t = t|_0^1$  a un sens, il s'agit d'une intégrale convergente.

2) (après avoir remarqué qu'une intégration par parties ne permet pas le calcul), on justifie le calcul d'intégration terme à terme suivant (\*).

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\ell_n t}{1-t} dt &= \int_0^1 \sum_{n \geq 0} t^n \ell_n t dt \\ &= \sum_{n \geq 0} \int_0^1 t^n \ell_n t dt \end{aligned}$$

où, en intégrant par parties, on obtient pour  $n \geq 0$

$$\int_0^1 t^n \ell_n t dt = \int_0^1 \ell_n t d\left(\frac{t^{n+1}}{n+1}\right) = - \int_0^1 \frac{t^n}{n+1} dt = -\frac{1}{(n+1)^2}.$$

3) On s'est donc ramené au calcul de la somme de la série  $\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2}$ , qui vaut  $\frac{\pi^2}{6}$  (: Leçon [28], par exemple).

Ainsi

$$\int_0^1 \frac{\ell_n t}{1-t} dt = -\frac{\pi^2}{6}.$$

$$\boxed{5} \quad \int_0^1 \ell_n t \ell_n(1+t) dt.$$

---

(\*) La série de fonctions  $f_n(t) = t^n \ell_n t$  converge normalement sur  $[0, 1-\varepsilon]$  pour  $0 < \varepsilon < 1$  et la suite des sommes partielles est contrôlée par  $-\frac{\ell_n t}{1-t}$ , intégrable sur  $[0, 1]$ .

On justifie le calcul suivant :

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \ln t \ln(1+t) dt &= \sum_1^{\infty} (-1)^{n-1} \int_0^1 \frac{t^n}{n} \ln t \, dt \\
 &= \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)^2} \\
 &= \sum_1^{\infty} (-1)^n \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} \right) \\
 &= 2-2\ln 2 - \frac{\pi^2}{12} .
 \end{aligned}$$

6  $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^4} .$

7  $\int_4^5 \frac{dt}{t\sqrt{t^2-4t+3}}$

... ou tout autre calcul d'intégrale définie se faisant par le calcul de primitives.

8  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \, dt$  (intégrale de Wallis)

... ou tout autre suite d'intégrales définies se calculant à l'aide d'une relation de récurrence, obtenue à l'aide d'une intégration par parties.

# - 11 -

## EXEMPLES D'UTILISATION DE DEVELOPPEMENTS LIMITES

**1**  $\begin{cases} x = \cos^3 t + \sin^3 t \\ y = \cos 3t \end{cases}$  : Etude locale en (1,1).

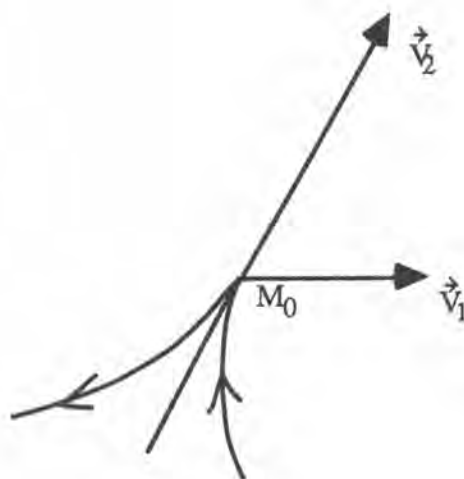
$$\begin{cases} x(t) = 1 - \frac{3}{2}t^2 + t^3 + \mathcal{O}(t^4) \\ y(t) = 1 - \frac{9}{2}t^2 + \mathcal{O}(t^4) \end{cases}$$

montre que  $\overrightarrow{M_0M_t} = \xi(t)\vec{V}_1 + \eta(t)\vec{V}_2$

car  $\vec{V}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{V}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

et  $\begin{cases} \xi(t) = t^3 + \mathcal{O}(t^4) \\ \eta(t) = -\frac{3}{2}t^2 + \mathcal{O}(t^4) \end{cases}$

ce qui permet le tracé local :



**2**  $f(x) = \frac{x^7 - 2x^5 + 21}{x^{10} - 3x^2 + 1}$  est décroissante au voisinage de  $+\infty$ .

$f(x) \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{1}{x^3}$  :  $f(x) > 0$  pour  $x \geq X$  assez grand et alors  $f$  est dérivable.

$$\frac{f'}{f}(x) = \frac{7x^6 - 10x^4}{x^7 - 2x^5 + 1} - \frac{10x^9 - 6x}{x^{10} - 3x^2 + 1}$$

$$= \frac{7}{x} \left( 1 - \frac{8}{x^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^4}\right) \right) - \frac{10}{x} \left( 1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^4}\right) \right)$$

$$\underset{(+\infty)}{\sim} -\frac{3}{x}$$

ce qui permet de conclure.

[3]  $\operatorname{ch} x - \frac{12+5x^2}{12-x^2} \underset{(0)}{\sim} \frac{x^6}{180}.$

[4]  $\lim_0 \frac{1}{x^4} (1 - \cos(1 - \cos x)) = ?$

[5] Les équations

$$x^3 + y^3 - 2xy^2 + x - 2y + 2 = 0$$

et  $x^3 + y^3 - 2xy^2 + x^2 + y^2 - x - 6y + 7 = 0$

définissent, au voisinage du point  $A(1,2)$  des courbes qu'on demande de situer relativement.

Si  $f(x,y) = x^3 + y^3 - 2xy^2 + x - 2y + 2$ , comme  $\frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = -2 \neq 0$ , localement autour de  $A$ ,  $\{f = 0\}$  est bien un graphe  $\{y = \varphi(x)\}$ , avec  $\varphi$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  (d'après le théorème de la fonction implicite). Il en résulte que  $\varphi(1+.)$  possède, en 0, un développement limité à tous ordres. On peut obtenir ce développement, ou bien en dérivant l'identité  $f(x, \varphi(x)) = 0$  en  $x = 1$  (ce qui permet d'obtenir  $\varphi'(1), \dots$ ), ou bien selon la technique d'identification consistant à poser

$$\varphi(1+h) = 2 + a_1 h + \mathcal{O}(h^2)$$

dans  $f(1+h, \varphi(1+h)) = 0 \dots$

On doit choisir

$$\varphi(1+h) = 2 + 2h - \frac{3}{2}h^2 + \mathcal{O}(h^3)$$

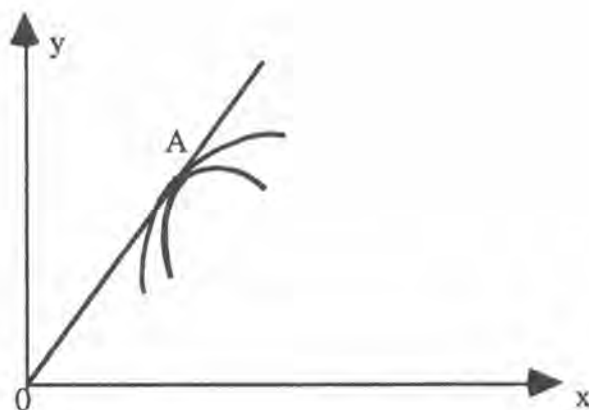
et, de la même façon pour la solution  $\psi$  de la seconde équation

$$\psi(1+h) = 2+2h-4h^2+\mathcal{O}(h^3).$$

La tangente commune a donc comme équation

$$y = 2+2(x-1) = 2x$$

et la seconde courbe est, localement en dessous de la première, elle-même sous sa tangente :



6  $x^2y''+4xy'+(2-x^2)y = 1$

recherche d'une solution sur  $\mathbb{R}$ .

1) En posant  $y = \frac{z}{x^2}$ , on obtient sur  $\mathbb{R}^*$

$$z'' - z = 1$$

d'où la forme de la solution générale (: il s'agit d'une équation différentielle linéaire) sur  $\mathbb{R}^*$  :

$$y = \frac{Ae^x + Be^{-x} - 1}{x^2}, \quad x \neq 0.$$

2) Comme, en 0

$$y(x) = \frac{A+B-1}{x^2} + \frac{A-B}{x} + \frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{6}x + \mathcal{O}(x^2)$$

le choix  $A = B = \frac{1}{2}$  conduit à

$$y(x) = \frac{\operatorname{ch} x - 1}{x^2}$$

qui s'avère être solution sur  $\mathbb{R}$ .



# - 12 -

## EXEMPLES DE DEVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES

Les notions de base sont dans **Dieudonné** Calcul infinitésimal, chapitre III.

L'exemple [1] permet d'introduire la notion d'échelle de comparaison, et de montrer comment obtenir des développements asymptotiques à partir des développements de Taylor et de règles de calcul simples.

L'exemple [2] étudie le comportement des sommes partielles (ou des restes) d'une série divergente (ou convergente) et leur relation avec les intégrales.

L'exemple [3] traite d'une intégrale qui dépend d'un paramètre, et illustre le fait qu'un développement asymptotique (bien que "divergent") peut s'avérer plus utile qu'un développement en série entière dans l'approximation de la fonction.

L'exemple [4] est une illustration du fait que la méthode de variation de la constante permet de transformer une équation différentielle en équation intégrale, dont la résolution par itération conduit au développement asymptotique obtenue (Leçon : exemple de résolution d'équations différentielles).

**Références :** [1] est traité dans **Dieudonné**, ou **Bourbaki** FVR Chapitre V : [2] figure dans **Chambadal-Ovaert** Analyse 2, où on trouvera de nombreux autres exemples (en particulier l'exemple (trop ?) classique de Stirling) ; pour [3] et [4], la bonne référence est **Erdelyi** ou **Copson** (asymptotic expansion ... qui ne figurent malheureusement pas à la bibliothèque du concours mais on trouvera les généralités de [4] dans **Dieudonné** chapitre XIV.

(En complément, on traitera la méthode de Laplace et celle de la phase stationnaire).

[1]  $(1+x)^{\frac{1}{x}}$  en 0, en  $+\infty$ .

$$f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}} = \exp \frac{\ln(1+x)}{x} \text{ est définie pour } x > -1.$$

1) D'après le théorème de composition des séries entières,  $f(x)$  possède un développement en série entière, de rayon de convergence  $R = 1$ . Comme

$$f'(x) = f(x) \cdot \left( -\frac{1}{2} + \frac{2}{3}x + \dots + (-1)^n \frac{n}{n+1} x^n + \dots \right) \text{ pour } |x| < 1$$

la technique d'identification donne, en posant

$$f(x) = e \cdot \sum_{n \geq 0} a_n x^n$$

$$a_0 = 1$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{p=0}^n (-1)^{p+1} \frac{p+1}{p+2} a_{n-p} \quad \text{si } n \geq 0$$

ce qui permet le calcul de proche en proche de la suite  $(a_n)_{n \geq 0}$  et donne, en particulier, le développement limité de  $f$  à l'origine

$$f(x) = e \left( 1 - \frac{x}{2} + \frac{1}{24} x^2 - \dots \right).$$

2) Lorsque  $x \rightarrow +\infty$ , on a

$$\mathcal{L}n(1+x) = \mathcal{L}n + \mathcal{L}n \left( 1 + \frac{1}{x} \right)$$

si bien que la connaissance du développement en série entière de  $\mathcal{L}n(1+x)$  permet d'obtenir le développement asymptotique de  $\frac{1}{x} \mathcal{L}n(1+x)$  par rapport à l'échelle  $x^\alpha (\mathcal{L}n x)^\beta$  :

$$\frac{1}{x} \mathcal{L}n(1+x) = \frac{\mathcal{L}n x}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2x^3} + \dots$$

Par composition avec le développement de l'exponentielle, on en déduit le développement asymptotique de  $f(x)$  par rapport à l'échelle précédente.

Par exemple, comme

$$\mathcal{L}n(x) = \frac{1}{x} \mathcal{L}n(1+x) = \frac{\mathcal{L}n x}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2x^3} + \sigma \left( \frac{1}{x^3} \right)$$

on a

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + h(x) + \frac{h^2(x)}{2} + \frac{h^3(x)}{6} + \sigma \left( \left( \frac{\mathcal{L}n x}{x} \right)^3 \right) \\ &= 1 + \frac{\mathcal{L}n x}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{(\mathcal{L}n x)^2}{2x^2} + \frac{(\mathcal{L}n x)^3}{6x^3} + \sigma \left( \frac{(\mathcal{L}n x)^3}{x^3} \right). \end{aligned}$$

$$\boxed{2} \quad \sum_1^n k.e^{\ell n k/k^3}.$$

1) Comme  $f(x) = xe^{\ell n x/k^3} \underset{(+\infty)}{\sim} x$ , la série de t.g.  $f(k)$  diverge vers  $+\infty$ .

2) On montre que  $S_n = \sum_1^n f(k) \underset{(+\infty)}{\sim} I_n = \int_1^n f(x)dx :$

$$\frac{f'}{f}(x) = \frac{1}{x} + \left( \frac{\ell n x}{x^3} \right)' = \sigma(1), f' > 0$$

$$\Delta_n = -S_n + I_n = \sum_1^{n-1} \int_k^{k+1} (-f(k)+f(x))dx > 0$$

de plus, à  $\varepsilon > 0$  donné,  $\exists X_\varepsilon > 0$  tel que si  $x < X_\varepsilon$ , on a

$$0 < \frac{f'}{f}(x) < \varepsilon \text{ soit } 0 < (\ell n f)'(x) < \varepsilon$$

d'où, pour  $x \geq k > X_\varepsilon$  et par  $\int_k^x$

$$0 < \ell n \frac{f(x)}{f(k)} < \varepsilon(x-k)$$

soit, pour  $X_\varepsilon$  entier, il s'ensuit que

$$0 < \Delta_n < \Delta_{X_\varepsilon} + (e^\varepsilon - 1)(S_n - S_{X_\varepsilon})$$

et la conclusion car  $S_n \rightarrow +\infty :$

$$0 < \frac{I_n}{S_n} - 1 < (e^\varepsilon - 1) + \Delta_{X_\varepsilon} + (e^\varepsilon - 1)(-S_{X_\varepsilon})/S_n$$

entraîne, pour  $n$  assez grand

$$0 < \frac{I_n}{S_n} - 1 < e^\varepsilon - 1 < e^\varepsilon - 1 + \varepsilon = 0(\varepsilon).$$

$$3) \quad \text{Comme } f(x) \underset{(+\infty)}{\sim} x, \quad \int_1^x f(t) dt \sim \frac{x^2}{2} :$$

à  $\varepsilon > 0$  donné, il existe  $X_\varepsilon > 0$  tel que, pour  $x \geq X_\varepsilon$ , on a

$$(1-\varepsilon)x < f(x) < (1+\varepsilon)x$$

$$\text{d'où, par } \int_{X_\varepsilon}^x \text{ pour } x > X_\varepsilon.$$

$$(1-\varepsilon)(x^2 - X_\varepsilon^2) / 2 < \frac{\int_{X_\varepsilon}^x f(t) dt}{\left(\frac{x^2}{2}\right)} < (1+\varepsilon) \left( 1 - \frac{X_\varepsilon^2}{x^2} \right) + \frac{2}{x^2} \int_1^{X_\varepsilon} f(t) dt$$

$< 1+2\varepsilon$ , pour  $x$  assez grand.

$$\text{Par conséquent } S_n \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{n^2}{2}.$$

$$4) \quad f(x) = x \left( 1 + \frac{\ln x}{x^3} + o\left( \frac{\ln x}{x^3} \right)^2 \right)$$

$$= x + o\left( \frac{\ln x}{x^2} \right)$$

et la série de t.g.  $\frac{\ln k}{k^2} = o\left( \frac{1}{k^{3/2}} \right)$  converge :

$$C = \sum_1^\infty (f(k)-k) \text{ existe, et}$$

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2} + C - \sum_{n+1}^\infty (f(k)-k)$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + C - \sum_{n+1}^{\infty} \frac{\ell n k}{k^2} - \sum_{n+1}^{\infty} r(k)$$

où  $r(x) = f(x) - x - \frac{\ell n x}{x^3}$ .

5) On montre que  $\sum_{n+1}^{\infty} \frac{\ell n k}{k^2} \underset{(+\infty)}{\sim} \int_n^{\infty} \frac{\ell n x}{x^2} dx :$

si  $g(x) = \frac{\ell n x}{x^2}$ ,  $g'(x) = \frac{1}{x^3} - \frac{2}{x^3} \ell n x \underset{(+\infty)}{=} \sigma(g(x)) < 0$  donc, à  $\varepsilon > 0$  donné, on peut trouver  $X_\varepsilon > 0$  pour lequel, si  $x > X_\varepsilon$ , on a

$$\left| \frac{g'}{g}(x) \right| \leq \varepsilon$$

alors, pour  $X_\varepsilon < k \leq x \leq k+1$

$$-\varepsilon \leq \ell n \frac{g(x)}{g(k)} \leq \varepsilon$$

$$e^{-\varepsilon} \leq \frac{g(x)}{g(k)} \leq e^{\varepsilon}$$

d'où, pour  $n > X_\varepsilon$

$$0 < \sum_{n+1}^{\infty} g(k) - \int_{n+1}^{\infty} g(x) dx = \sum_{n+1}^{\infty} \int_k^{k+1} (g(k) - g(x)) dx < (1 - e^{-\varepsilon}) \sum_{n+1}^{\infty} g(k)$$

et la conclusion suit.

Par conséquent

$$\sum_{n+1}^{\infty} \frac{\ell n k}{k^2} \sim \int_n^{\infty} \ell n x d\left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{\ell n n}{n} + \frac{1}{n}.$$

6)  $r(x) = O\left(\frac{\ell n^2 x}{x^5}\right) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$  entraîne que  $\sum_{n+1}^{\infty} r(k) = O\left(\frac{1}{n}\right) :$

à  $\varepsilon > 0$  donné,  $|r(x)| < \frac{\varepsilon}{x^2}$  pour  $x > X_\varepsilon$  bien choisi et, par conséquent

$$\left| \sum_{n+1}^{\infty} r(k) \right| < \varepsilon \sum_{n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \frac{\varepsilon}{n}.$$

En conclusion, on a montré que

$$S_n = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} + C - \frac{\ln n}{n} - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

7) Les fonctions  $\varphi_{\alpha,\beta}(x) = x^\alpha (\ln x)^\beta$   $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  forment une échelle de comparaison au voisinage de  $+\infty$  ( $\varphi_{\alpha,\beta} = o(\varphi_{\alpha',\beta'})$  ssi  $(\alpha, \beta) < (\alpha', \beta')$  selon l'ordre lexicographique sur  $\mathbb{R}^2$ ).

En poursuivant le DA de  $f$ , et en raisonnant comme en 5) et 6), on obtient le DA de  $S_n$  (selon l'échelle  $\varphi_{\alpha,\beta} | \mathbb{N}$ ) ; par exemple :

$$S_n = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} + C - \frac{\ln n}{n} - \frac{1}{n} - \frac{(\ln n)^2}{4n^4} - \frac{\ln n}{8n^4} - \frac{1}{32n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right).$$

3) 
$$I(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \text{ en } 0+, \text{ en } +\infty.$$

1) Comme  $\frac{e^{-t}}{t} = o(e^{-t})$  en  $+\infty$ ,  $I(x)$  est défini par une intégrale impropre convergente si  $x > 0$ .

2) Pour  $x > 0$ , une intégration par parties donne

$$I(x) = \int_x^{+\infty} \frac{d(-e^{-t})}{t^2} = \frac{e^{-x}}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{-e^{-t}}{t^2} dt$$

où 
$$0 < \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} dt < \frac{1}{x^2} \int_x^{+\infty} e^{-t} dt = \frac{e^{-x}}{x^2}$$

ce qui montre que

$$I(x) = \frac{e^{-x}}{x} + \sigma\left(\frac{e^{-x}}{x}\right) \quad \text{quand } x \rightarrow +\infty.$$

3) En itérant, on obtient, plus généralement

$$I(x) = \sum_{n=1}^m (-1)^{n-1} (n-1)! \frac{e^{-x}}{x^n} + (-1)^m m! \int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t^{m+1}} dt$$

$$\text{où} \quad = \int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t^{m+1}} dt = \frac{e^{-x}}{x^{m+1}} - (m+1) \cdot \int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t^{m+2}} dt$$

$$= \sigma\left(\frac{e^{-x}}{x^m}\right) \text{ en } +\infty$$

de sorte qu'on a le DA à tous ordres de  $I(x)$  par rapport à l'échelle de comparaison  $\left(\frac{e^{-x}}{x^n}\right)_{n \geq 1}$  au voisinage de  $+\infty$ .

**Remarques :**

1) La série de t.g.  $\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$  diverge pour tout  $x > 0$ .

2) Le reste du DA à l'ordre  $m$  :

$$\left| (-1)^m m! = \int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t^{m+1}} dt \right| \leq m! \frac{1}{x^{m+1}} e^{-x}$$

est donc contrôlé, en l.l, par le terme d'ordre  $(m+1)$  (comme dans la règle de Leibniz sur les séries alternées convergentes).

3) Pour  $x = 10$ , en prenant  $m = 10$ , le calcul de  $\sum_1^{10}$  donne la valeur de  $I(10)$  avec

une erreur majorée par  $e^{-10} \frac{10!}{10^{11}} \sim 1.6 \cdot 10^{-10}$ .

4) Pour  $x > 0$ ,  $I'(x) = -\frac{e^{-x}}{x}$  soit, en développant  $e^{-x}$  en série entière

$$\begin{aligned} I'(x) &= -\frac{1}{x} \left( 1 - x + \frac{x^2}{2} - \dots \right) \\ &= -\frac{1}{x} + 1 - \frac{x}{2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{n-1}}{n!} + \dots \end{aligned}$$

ce qu'on peut lire

$$(I + \ln)'(x) = 1 - \frac{x}{2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{n-1}}{n!} + \dots$$

d'où

$$I(x) = -\ln(x) + x - \frac{x^2}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n \cdot n!} + \dots + A$$

où  $A \in \mathbb{R}$  est une constante, qu'on va calculer : on rappelle que la constante d'Euler est définie par :

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \right)$$

On modifie la (.) de sorte à faire apparaître  $I$  :

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n &= \int_0^1 (1+x+\dots+x^{n-1}) dx - \int_1^n \frac{dx}{x} \\ &= \int_0^1 \frac{1-x^n}{1-x} dx - \int_1^n \frac{dx}{x} \end{aligned}$$

où

$$\int_0^1 \frac{1-x^n}{1-x} dx = \int_0^n \left( 1 - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \right) \left( x = 1 - \frac{t}{n} \right)$$

de sorte que

$$\begin{aligned} C &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_0^1 \left( 1 - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \right) \frac{dt}{t} - \int_1^n \left( 1 - \frac{t}{n} \right)^n \frac{dt}{t} \right) \\ &= \int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t} dt - \int_1^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt \end{aligned}$$

On justifie le passage à la limite, grâce au fait que

$$e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = e^{-t} \left( 1 - e^t \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \right) = e^{-t} \int_0^t \left( e^\theta \left(1 - \frac{\theta}{n}\right)^n \right)' d\theta$$



$$= \frac{e^{-t}}{n} \int_0^t e^{\theta} \theta \left(1 - \frac{\theta}{n}\right)^{n-1} d\theta > 0, < \frac{e^{-t}}{n} e^t \int_0^t \theta d\theta = \frac{t^2}{2n}.$$

En effet, cela montre que

$$i) \quad \left| \frac{1-e^{-t}}{t} - \frac{1}{t} \left(1 - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right) \right| \leq \frac{t}{2n} < \frac{1}{2n}$$

ii)  $\frac{1}{t} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{u} \frac{e^{-t}}{t}$  sur tout compact de  $[1, +\infty[$  et la convergence est dominée). Par conséquent

$$\begin{aligned} A &= \lim_{x \rightarrow 0+} (I(x) + \ln x) \lim_{x \rightarrow 0+} \left( \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt - \int_x^1 \frac{dt}{t} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} \left( \int_x^1 \frac{e^{-t}-1}{t} dt + \int_1^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt \right) \\ &= -C \end{aligned}$$

et

$$I(x) = -C - \ln(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n.n!}, \forall x > 0$$

ce qui donne, en particulier, le DL est en fait un développement en série entière (de rayon de convergence infini) mais, du point de vue numérique, le calcul de  $I(10)$  avec la même précision que la précédente (1;6.10) nécessite plus de 40 termes (: avec le critère de Leibniz, il s'agit de résoudre l'inégalité  $\frac{10^n}{n.n!} < 1.6 \cdot 10^{-10}$ ) : comme quoi, un DA ("divergent") peut rendre plus de services qu'un développement en série convergente ...

**4**  $x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0, \nu \text{ paramètre}$

Il s'agit de préciser le comportement des fonctions de Bessel au voisinage de  $+\infty$ .

1) On commence, par un changement de fonction inconnue pour éliminer la dérivée première : en posant  $y = \varphi.z$ , l'équation différentielle devient

$$\varphi \cdot z'' + \left(2\varphi' + \frac{\varphi}{x}\right) z' + \left(\varphi'' + \frac{\varphi'}{x} + \left(1 - \frac{v^2}{x^2}\right)\varphi\right) z = 0$$

le choix de  $\varphi$  tel que  $2\varphi' + \frac{\varphi}{x} = 0$ , soit  $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$  conduit à l'équation en  $z$

$$z'' + \left(1 + \frac{\frac{1}{4} - v^2}{x^2}\right) z = 0$$

2) Qu'on regarde comme une perturbée de l'équation de l'oscillateur harmonique  
 $y'' + y = 0$

: la méthode de variation de la constante va permettre de transformer l'équation en  $z$  selon une équation intégrale

$$z'' + z = - \frac{\frac{1}{4} - v^2}{x^2} z$$

$z(x) = A(x)\cos x + B(x)\sin x$  avec

$$\begin{cases} A'(x)\cos x + B'(x)\sin x = 0 \\ -A'(x)\sin x + B'(x)\cos x = - \frac{\frac{1}{4} - v^2}{x^2} z(x) \end{cases}$$

donne

$$\begin{cases} A(x) = A - \lambda \int_x^\infty \frac{\sin t}{t^2} z(t) dt \\ B(x) = B + \lambda \int_x^\infty \frac{\cos t}{t^2} z(t) dt \end{cases} \quad \lambda \doteq \frac{1}{4} - v^2$$

à condition de supposer la convergence des intégrales impropres : sous cette hypothèse,  $z$  obéit à l'équation intégrale

$$z(x) = A \cos x + B \sin x + \lambda \int_x^\infty \frac{1}{t^2} \sin(x-t) z(t) dt$$

singulière, par  $\int_x^\infty$ . Réciproquement, toute solution continue de cette E.I. solutionne l'EDO.

3) En cherchant à résoudre l'E.I. selon  $z = \sum_0^\infty z_n \lambda^n$  la technique d'identification conduit à poser

$$\begin{aligned} z_0 &= A \cos + B \sin \\ z_n &= \phi(z_{n-1}) \quad n \geq 1 \end{aligned}$$

où  $\phi$  est l'opérateur intégral défini par

$$\phi z^{(x)} = \int_x^\infty \frac{1}{t^2} \sin(x-t) z(t) dt$$

pour justifier le procédé itératif, il faut estimer successivement les  $z_n$  obtenus de proche en proche :

$$z_0(x) = A \cos x + B \sin x \quad A, B \in \mathbb{R}$$

$$z_1(x) = \int_x^\infty \frac{1}{t^2} (\sin(x-t)) \cdot (A \cos t + B \sin t) dt$$

est bien définie sur  $]0, +\infty[$  et, pour  $x > 0$

$$|z_1(x)| \leq (|A| + |B|) \int_x^\infty \frac{dt}{t^2} = \frac{(|A| + |B|)}{x}$$

... de proche en proche, on s'assure que  $z_n \in \mathcal{C}^0(]0, +\infty[)$  et que

$$|z_n(x)| \leq \frac{(|A| + |B|)^n}{n!} \frac{1}{x^n}, \quad x > 0.$$

4) Cette inégalité assure la convergence uniforme de la série de fonctions

$$\sum_0^{\infty} z_n(x) \lambda^n$$

sur tout intervalle  $[\varepsilon, +\infty[$ , avec  $\varepsilon > 0$  donné.

De plus, comme

$$\sum_0^{\infty} |\lambda^n z_n(t)| \leq \exp(|A|+|B|) \frac{|\lambda|}{t} \leq \exp(|A|+|B|) \frac{|\lambda|}{x}$$

l'intégrale  $\int_0^{+\infty}$  terme à terme de la série est justifiée pour tout  $x > 0$ , et

$$z = \sum_{n \geq 0} z_n \lambda^n$$

est donc une solution  $\in \mathcal{C}^0([0, +\infty[)$  de l'EI.

5) Le développement précédent fournit en particulier le DA de la solution, selon  $\left(\frac{1}{x^n}\right)_{n \geq 0}$  au voisinage de  $+\infty$ . La fonction de Bessel  $J_\nu$  a un comportement sinusoïdale en  $+\infty$

$$J_\nu(x) \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{C_\nu}{\sqrt{x}} \sin(x - \varphi_\nu) + \sum_0^{\infty} \frac{a_n^\nu}{x^{n+3/2}}.$$

6) L'étude des solutions développables en série de puissance donne le comportement asymptotique en 0.

7) Avec la formule de Liouville, on peut déduire de 5) le comportement de la solution générale de l'équation différentielle.

# - 13 -

## EXEMPLES D'ETUDE DE CONVERGENCE ET DE CONVERGENCE ABSOLUE D'INTEGRALES IMPROPRES

Avant d'aborder l'étude des 4 exemples corrigés, il sera bon de réviser les techniques de base sur les exemples suivants :

$$\begin{array}{lll}
 1) & \int_1^{\infty} \frac{\cos t}{t^2 + \ln t} dt, & \int_1^{\infty} \frac{\cos t}{1+t^2} dt, & \int_1^{\infty} \frac{\ln t}{t^2+1} dt, \\
 2) & \int_1^{\infty} \frac{\cos t}{t} dt, & \int_1^{\infty} \frac{\cos^2 t}{t} dt, & \int_1^{\infty} \frac{\cos 2t}{t} dt, \\
 3) & \int_0^{\infty} \frac{\sin(\frac{1}{t})}{t} dt, & \int_0^{\infty} \sin t \sin(\frac{1}{t}) dt, & 
 \end{array}$$

L'introduction de paramètres permet de passer en revue les différentes méthodes d'étude.

$$\boxed{1} \quad \int_0^{\infty} \frac{t^{\alpha}}{1+t^{\beta} \sin^2 t} dt, \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

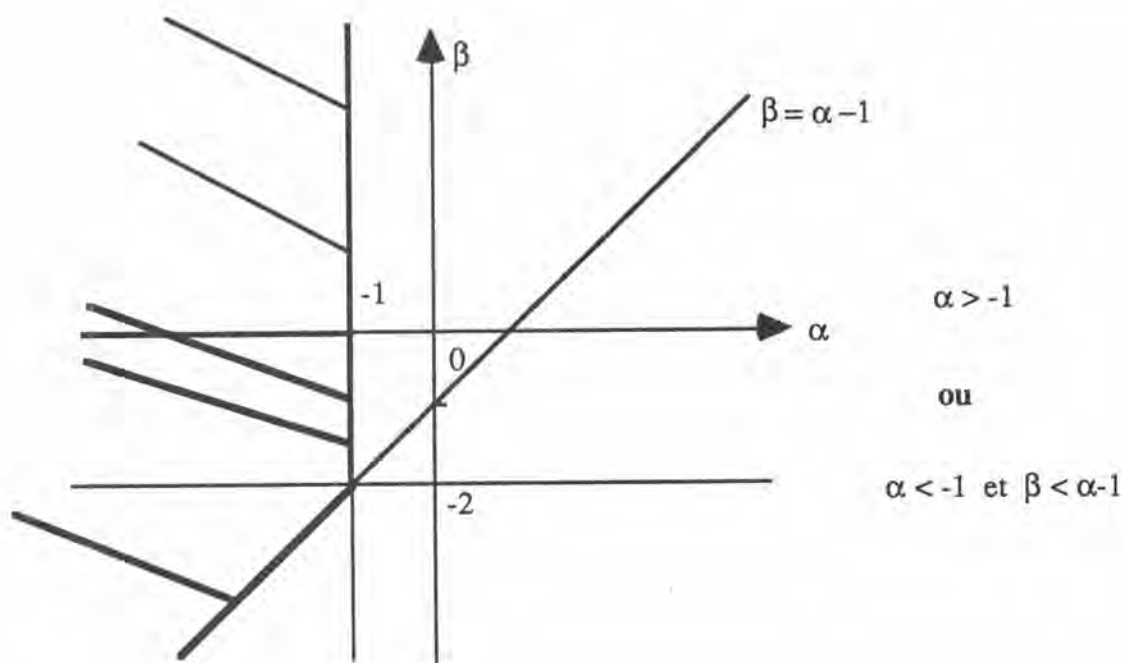
$$1) \quad f(t) = \frac{t^{\alpha}}{1+t^{\beta} \sin^2 t} > 0 \text{ sur } ]0, +\infty[.$$

$$f(t) \underset{(0)}{\sim} t^{\alpha} \quad \text{si } \beta+2 > 0$$

$$\frac{t^{\alpha}}{2} \quad \text{si } \beta+2 = 0$$

$$t^{\alpha-(\beta+2)} \quad \text{si } \beta+2 < 0$$

et le critère de comparaison montre qu'il y a CV pour



2) Si  $\beta > 0$

$$f(t) \underset{(+\infty)}{\sim} t^\alpha \text{ et } \int_1^\infty f(t) dt \text{ CV pour } \alpha < -1.$$

Si  $\beta = 0$ , on a la même conclusion, par l'encadrement

$$\frac{t^\alpha}{2} \leq f(t) \leq t^\alpha$$

on suppose donc que  $\beta > 0$  :

$$\text{Si } \alpha > 0, \text{ comme } \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t) dt \geq \frac{(n\pi)^\alpha}{1 + ((n+1)\pi)^\beta} \cdot \pi$$

l'  $\int_1^\infty f(t) dt$  DV si  $\alpha \geq \beta$  (d'après le critère de Cauchy), et on va donc supposer que

$0 < \alpha < \beta$ . Alors :

$$(n\pi)^\alpha \int_0^\pi \frac{d\theta}{1 + ((n+1)\pi)^\beta \sin^2 \theta} \leq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t) dt \leq ((n+1)\pi)^\alpha \int_0^\pi \frac{d\theta}{1 + (n\pi)^\beta \sin^2 \theta}$$

où 
$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{1 + A \sin^2 \theta} = \frac{\pi}{\sqrt{A+1}}$$

ce qui montre

$$c n^{\alpha - \frac{\beta}{2}} < \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t)dt \leq C n^{\alpha - \frac{\beta}{2}}$$

Par conséquent l'  $\int_1^{\infty} f(t)dt$  converge pour  $\alpha - \frac{\beta}{2} < -1$

$$\left( : \text{pour } \alpha - \frac{\beta}{2} \geq -1, \int_1^{N\pi} f(t)dt \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} +\infty \text{ et, pour } \alpha - \frac{\beta}{2} < -1, \int_1^T f(t)dt \leq C \sum_1^{N+1} n^{\alpha - \frac{\beta}{2}} \right.$$

où  $N = \left\lceil \frac{T}{\pi} \right\rceil$  ) .

Il reste à étudier le cas  $\alpha \leq 0$  :

Si  $\alpha = 0$ , l'encadrement précédent montre que  $\int_1^{\infty} f(t)dt$  converge si  $\beta > 2$  ;

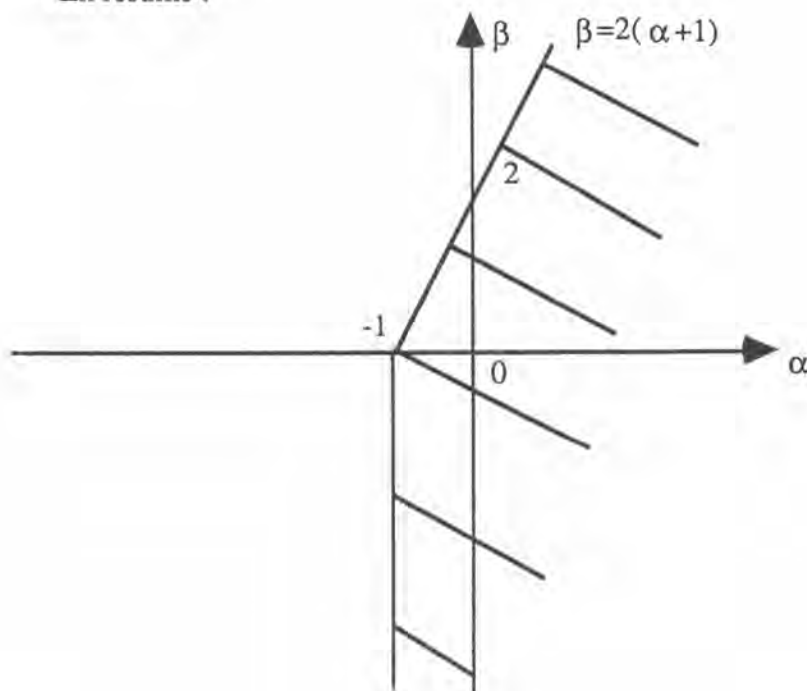
Si  $\alpha < 0$ .

$$((n+1)\pi)^{\alpha} \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{1+((n+1)\pi)^{\beta} \sin^2 \theta} \leq \int_{n\pi}^{n\pi+\pi} f(t)dt \leq (n\pi)^{\alpha} \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{1+(n\pi)^{\beta} \sin^2 \theta}$$

soit  $c n^{\alpha - \frac{\beta}{2}} \leq \int_1^{\infty} f(t)dt \leq C n^{\alpha - \frac{\beta}{2}}$

et  $\int_1^{\infty} f(t)dt$  converge pour  $\alpha - \frac{\beta}{2} < -1$ .

En résumé :



et l'intégrale  $\int_0^{\infty} \frac{t^{\alpha}}{1+t^{\beta}\sin^2 t} dt$  diverge dans la réunion des zones hachurées.

$$\boxed{2} \quad \int_3^{\infty} \frac{\cos t}{\cos t + \ell n t} dt$$

1)  $f(t) = \frac{\cos t}{\cos t + \ell n t}$  est continue sur  $[3, +\infty[$  de signe variable, avec celui de  $\cos t$ , et tend vers 0 à l'infini.

2) Le critère d'Abel ne s'applique pas directement, car  $(\cos t + \ell n t)$  n'est pas monotone ; comme  $\int_3^{\infty} \frac{\cos t}{\ell n t} dt$  converge d'après le même critère, on étudie la nature de l'intégrale

$$\int_3^{\infty} \frac{\cos^2 t}{\ell n t (\ell n t + \cos t)} dt$$

où  $g(t) = \frac{\cos t}{\ell n t} - f(t)$  est positive sur  $[3, +\infty[$ .

$$3) \quad g(t) > \frac{\cos^2 t}{\ell n t (\ell n t + 1)} = \frac{\cos 2t + 1}{2 \ell n t (\ell n t + 1)}$$

où  $\int_3^{\infty} \frac{\cos 2t}{\ell n t (\ell n t + 1)} dt$  converge (d'après Abal) tandis que  $\int_3^{\infty} \frac{dt}{\ell n t (\ell n t + 1)}$  diverge :  
en effet

$$0 < \frac{1}{\ell n t (\ell n t + 1)} \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{1}{(\ell n t)^2} \text{ et } \frac{1}{(\ell n t)^2} \underset{(+\infty)}{>} \frac{1}{t}$$

si bien que le critère de comparaison permet de conclure.

En conclusion, l'intégrale  $\int_3^{\infty} \frac{\cos t}{\cos t + \ell n t} dt$  diverge car pour  $T > 3$



$$\int_3^T f(t)dt = \int_3^T \frac{\cos t}{\ell n t} dt + \int_3^T g(t)dt$$

où  $\lim_{T \rightarrow +\infty} \int_3^T \frac{\cos t}{\ell n t} dt$  existe, d'où

$$\int_3^T g(t)dt \geq \int_3^T \frac{\cos 2t}{2 \ell n t (\ell n t + 1)} dt + \frac{1}{2} \int_3^T \frac{dt}{\ell n t (\ell n t + 1)}$$

avec  $\lim_{T \rightarrow +\infty} \int_3^T \frac{\cos 2t}{2 \ell n t (\ell n t + 1)} dt$  existe, et  $\int_3^T \frac{dt}{\ell n t (\ell n t + 1)} \rightarrow +\infty$ .

$$\boxed{3} \quad \int_1^{\infty} \frac{\cos(\ell n t)^2}{t^{\beta}} dt, \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

1) Pour  $\alpha \geq 0$ ,  $f(t) = \frac{\cos(\ell n t)^{\alpha}}{t^{\beta}}$  est continue sur  $[1, +\infty[$  et l'intégrale ne pose pas de problème en 1 ; au contraire, pour  $\alpha < 0$ ,  $\cos(\ell n t)^{\alpha}$  oscille lorsque  $t \rightarrow 1+$ .

2) Pour  $\varepsilon > 0$ , un changement de variable donne

$$\int_{1+\varepsilon}^T f(t)dt = \int_{\ell n(1+\varepsilon)}^{\ell n(T)} \frac{\cos(\theta)^{\alpha}}{e^{(\beta-1)\theta}} d\theta$$

Pour  $\alpha < 0$ , un nouveau changement de variable conduit à

$$\int_{1+\varepsilon}^T f(t)dt = -\frac{1}{\alpha} \int_{\ell n^{\alpha}(T)}^{\ell n^{\alpha}(1+\varepsilon)} u^{\frac{1}{\alpha}-1} e^{(1-\beta)u^{\frac{1}{\alpha}}} \cos(u) du$$

et on s'est ainsi ramené ( : pour étudier  $\int_1^T f(t)dt$  à étudier la convergence de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} u^{\frac{1}{\alpha}-1} e^{(1-\beta)u^\alpha} \cos(u) du \text{ pour } \alpha < 0.$$

La fonction  $\varphi(u) = u^{\frac{1}{\alpha}-1} e^{(1-\beta)u^\alpha}$  tend vers 0 lorsque  $u \rightarrow +\infty$ , et le calcul de  $\varphi'$  montre que  $\varphi$  est décroissante en  $+\infty$  :

$$\varphi'(u) = e^{(1-\beta)u^\alpha} u^{\frac{2}{\alpha}-2} \left( \frac{1-\alpha}{\alpha} u^{-\frac{1}{\alpha}} + \frac{1-\beta}{\alpha} \right)$$

où  $(.) \xrightarrow{(u \rightarrow +\infty)} -\infty$ .

D'après le critère d'Abel, l'intégrale  $\int_1^T f(t) dt$  est donc convergente.

D'ailleurs,  $|\varphi(u)| < Cu^{\frac{1}{\alpha}-1}$ , et il y a **convergence absolue**.

3) Si  $\alpha = 0$ ,  $\int_2^\infty f(t) dt = \int_2^\infty \cos t \frac{dt}{t^\beta}$  converge si  $\beta > 1$  ;

Si  $\alpha < 0$ ,  $\cos(\ell n t)^\alpha \xrightarrow{(t \rightarrow +\infty)} 1$  et le critère de comparaison permet de conclure de la même façon.

Pour  $\alpha > 0$ , on se ramène, comme au § 2), à l'étude de

$$\int_{\ell n^\alpha 2}^{\ell n^\alpha T} u^{\frac{1}{\alpha}-1} e^{(1-\beta)u^\alpha} \cos(u) du$$

lorsque  $T \rightarrow +\infty$ . On étudie, pour commencer, le comportement de la fonction

$$\varphi(u) = u^{\frac{1}{\alpha}-1} e^{(1-\beta)u^\alpha}$$

lorsque  $u \rightarrow +\infty$  : les règles de croissances comparées montrent que :

$$\varphi(u) \xrightarrow{(u \rightarrow +\infty)} \begin{cases} 0 & \text{si } \beta > 1, \alpha > 0 \\ & \beta = 1, \alpha > 1 \\ 1 & \text{si } \alpha = \beta = 1 \\ +\infty & \text{si } \beta < 1, \alpha > 0 \\ & \beta = 1, 0 < \alpha < 1 \end{cases}$$

pour  $\beta < 1$  ou ( $\beta = 1$  et  $0 < \alpha < 1$ ), comme  $\varphi(u)$  tend en croissant vers  $+\infty$ , l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \varphi(u) \cos(u) du$$

diverge, d'après le critère de Cauchy, car

$$\int_{2n\pi - \frac{\pi}{4}}^{2n\pi + \frac{\pi}{4}} \varphi(u) \cos(u) du \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \varphi\left(2n\pi - \frac{\pi}{4}\right) \frac{\pi}{2} \xrightarrow{(n \rightarrow +\infty)} +\infty$$

et il en est évidemment de même pour  $\alpha = \beta = 1$ .

Il reste donc à étudier les cas où :

•  $\beta = 1, \alpha > 1$

soit l'intégrale impropre

$$\int_0^{+\infty} u^{\frac{1}{\alpha}-1} \cos(u) du$$

qui converge, d'après le critère d'Abel, pour  $\alpha > 1$ .

•  $\beta > 1, \alpha > 0$

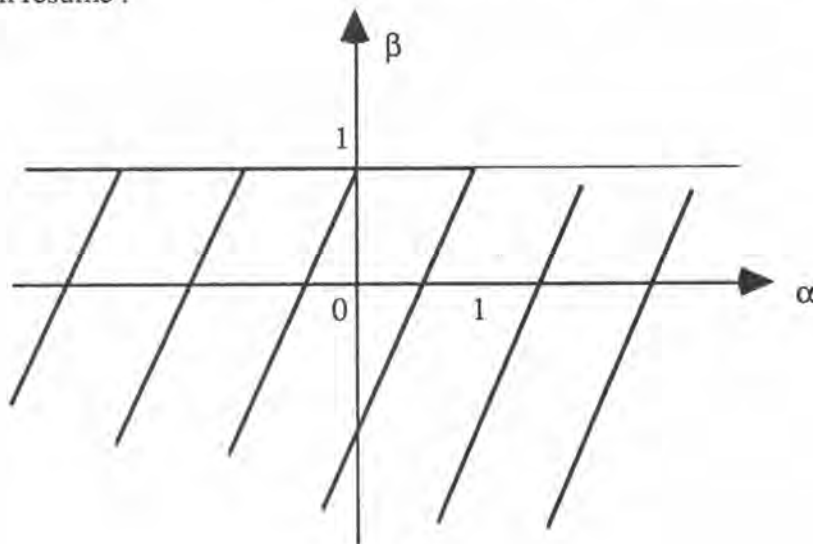
pour lequel

$$\left| u^{\frac{1}{\alpha}-1} e^{(1-\beta)u^\alpha} \cos(u) \right| < u^{\frac{1}{\alpha}-1} e^{(1-\beta)u^\alpha}$$

avec  $\frac{1}{u^\alpha} \cdot e^{-(1-\beta)u^\alpha} \underset{(+\infty)}{=} \sigma\left(\frac{1}{u^2}\right)$

ce qui permet de conclure à la convergence absolue de l'intégrale.

En résumé :



4) Et l'étude précédente montre qu'il y a absolue convergence en dehors de la zone hachurée, sauf sur la  $\frac{1}{2}$ -droite  $\{\beta = 1, \alpha > 1\}$ , le long de laquelle l'intégrale prend

forme  $\int_0^\infty \frac{\cos u}{u^\gamma} du$ , avec  $\gamma < 1$ .

4  $\int_0^\infty t^\alpha |\cos t| t^\beta dt, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

1)  $f(t) = t^\alpha |\cos t|^\beta$  est continue et positive sur  $]0, +\infty[$ .

2) Au voisinage de 0,

$$f(t) = t^\alpha e^{t^\beta \ln(1 - \frac{t^2}{2} + t^{2\varepsilon(t)})} \quad \text{où} \quad \lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon(t) = 0$$

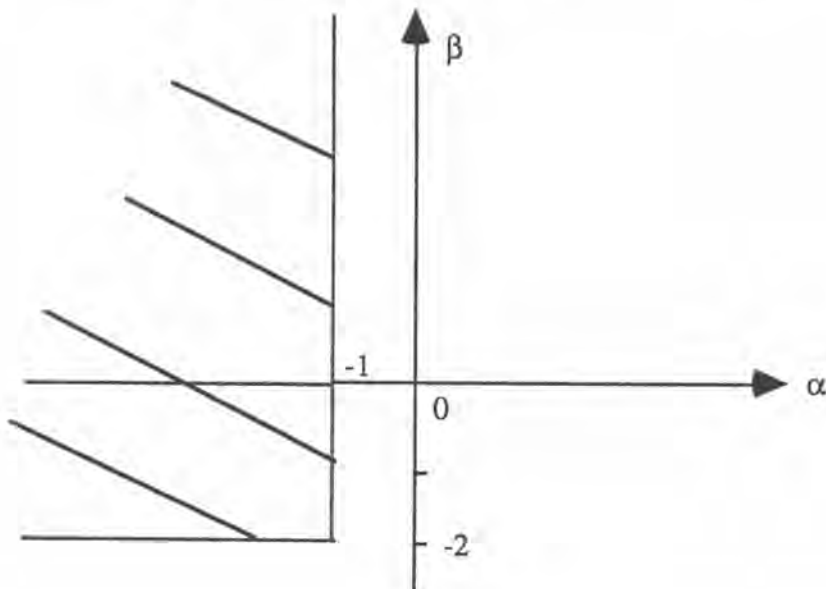
$$= t^\alpha e^{t^\beta (-\frac{t^2}{2} + t^{2\varepsilon(t)})}$$

ce qui montre que, pour  $\beta+2 < 0$ ,  $f(t) \sim t^{\beta+2}$  et il n'y a donc aucun problème pour l'  $\int_0^1 f(t)dt$ , tandis que, si  $\beta+2 \geq 0$ ,

$$f(t) \sim t^{\alpha}$$

et l'intégrale  $\int_0^1 f(t)dt$  converge si  $\alpha > -1$ .

En résumé,  $\int_0^1 f(t)dt$  converge en dehors de la zone hachurée suivante :



3) En  $+\infty$ , si  $\beta < 0$ ,  $f(t) \leq t^{\alpha}$  et l'  $\int_1^{\infty} f(t)dt$  converge si  $\alpha < -1$ ; pour  $\alpha \geq -1$  elle diverge, car, pour  $t$  assez grand ( $t > T_{\epsilon}$ ),  $t^{\beta} \leq \epsilon$  avec  $\epsilon$  donné à l'avance, si bien que

$$\int_{2n\pi - \frac{\pi}{4}}^{2n\pi + \frac{\pi}{4}} t^{\alpha} |\cos t|^{\beta} dt \geq \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\epsilon} \cdot \frac{C}{n^{-\alpha}}$$

et ce qui permet de conclure.

On étudie le cas  $\beta = 0$  de la même manière.

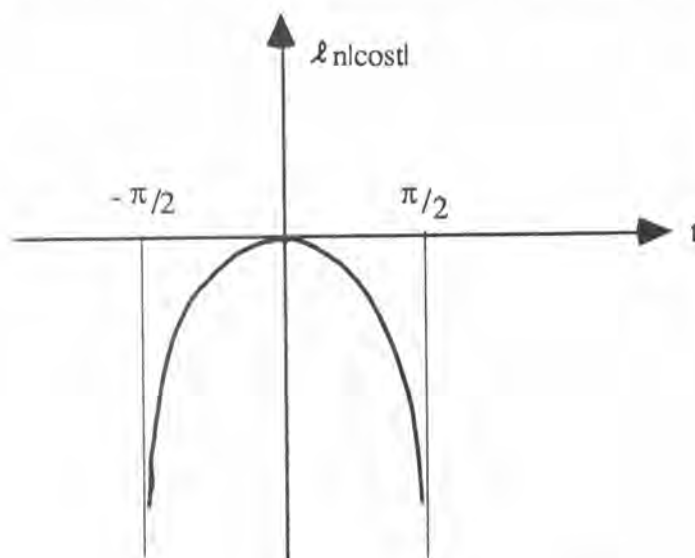
Pour  $\beta > 0$ , si  $\alpha \geq 0$ , on a :

$$\int_{2n\pi - \frac{\pi}{4}}^{2n\pi + \frac{\pi}{4}} f(t) dt \geq (2n\pi - \frac{\pi}{4})^\alpha e^{(2n\pi - \frac{\pi}{4})^\beta} \ell n \frac{\sqrt{2}}{2} \xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} \infty$$

et l'  $\int_0^\infty$  est donc divergente ; si  $\alpha > 0$ , on a l'encadrement

$$\begin{aligned} ((n + \frac{1}{2})\pi)^\alpha \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} e^{((n - \frac{1}{2})\pi)^\beta \ell n |\cos t|} dt &\leq \int_{n\pi - \frac{\pi}{2}}^{n\pi + \frac{\pi}{2}} f(t) dt \\ &\leq ((n - \frac{1}{2})\pi)^\alpha \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} e^{((n - \frac{1}{2})\pi)^\beta \ell n |\cos t|} dt. \end{aligned}$$

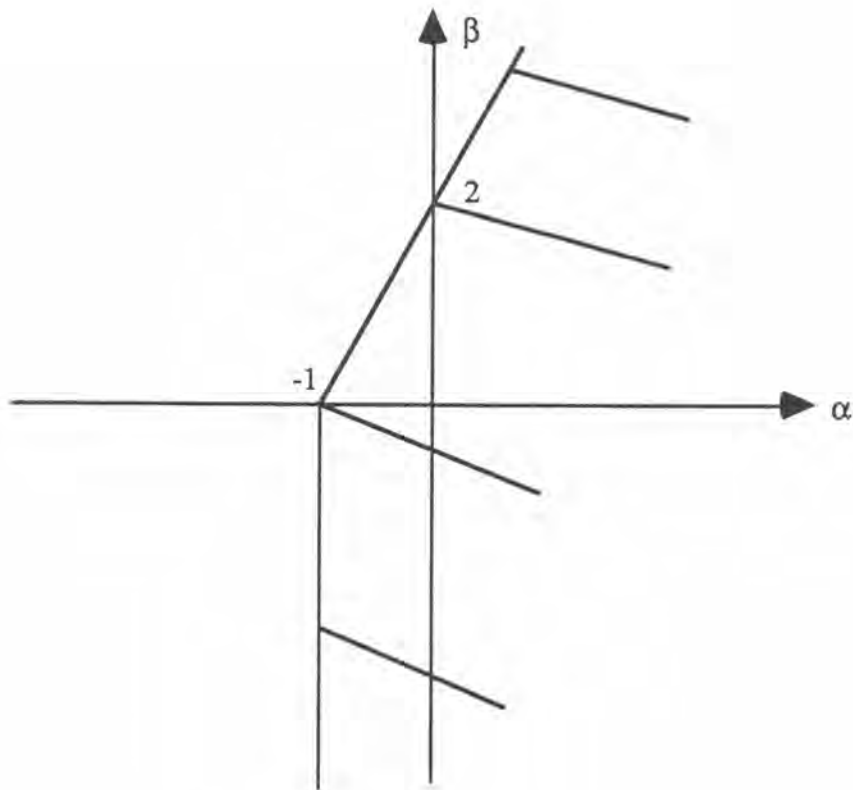
Or, la méthode de Laplace, présentée dans la leçon [29], exemple [7], montre que



$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} e^{\lambda \ell n |\cos t|} dt \underset{(\lambda \rightarrow +\infty)}{\sim} 2 \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}}.$$

Par conséquent (comme  $f > 0$ ),  $\int_1^\infty f(t)dt$  est ici de même nature que la série de terme général  $n^{\alpha - \frac{\beta}{2}}$  et converge donc si  $\frac{\beta}{2} - \alpha > 1$ .

En résumé :



# - 14 -

## EXEMPLES D'ETUDE DE FONCTION DEFINIE PAR UNE INTEGRALE

La variable peut apparaître dans les bornes de l'intégrale (exemple [1] ) ou sous l'intégrale (l'exemple [2] est mixte, [3] et [4] ).

Dans les exemples [1] et [2], l'étude de la fonction est poussée jusqu'au tracé du graphe, et comprend le développement en série entière à l'origine, le développement asymptotique en  $+\infty$ .

L'exemple [3] est un calcul de transformée de Laplace (qui n'entre pas dans le cadre de l'énoncé de septembre 93, car  $\frac{\sin t}{t}$  n'est pas absolument intégrable sur  $[0, +\infty[$ ) qui permet d'exposer une étude de continuité non triviale (le critère de convergence dominée ne s'appliquant pas, il faut recourir à celui d'Abel), et d'obtenir la valeur de  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ .

L'exemple [4] traite un cas à deux variables réelles. L'intégrale étudiée apparaît dans de nombreuses questions (outre celles citées (: potentiel newntonien d'une circonférence, longueur d'une lemniscate), citons le calcul de la longueur d'une ellipse, ou celui de la période des oscillations d'un pendule simple).

**Références :** Pour [1], [2] Cagnac-Ramis-Commeau Analyse 1 ; pour [3] Bourbaki FVR 1 P. 127 ; pour [4] The Mathematical Gazette vol 76 n° 476 (Recent calculations of  $\pi$  : the Gauss-Salamin algorithm).

**Exercices complémentaires :** du type [1], [2] :

$$\int_x^{x^2} \ln(t) dt ; \frac{1}{x-1} \int_1^x \frac{t^2}{\sqrt{1+t^8}} dt ; \int_1^x \frac{\sqrt{1+t^2}}{t^2} dt$$



du type [3] :

$$\int_0^{\infty} e^{-t^2} \cos(xt) dt \left( = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-x^2/4} \right); \quad \int_0^{\infty} \frac{1-e^{-xt^2}}{t^2} dt \left( = \sqrt{\pi x} \right)$$

$$\int_0^{\infty} \exp\left(-t^2 - \frac{x^2}{t^2}\right) dt \left( = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2x} \right).$$

Un autre exemple à 2 variables :

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-xt} - e^{-yt}}{t} dt.$$

Plus généralement

$$\int_0^{\infty} \frac{f(xt) - f(yt)}{t} dt \text{ avec } f \text{ continue en } 0, x, y > 0, \text{ et } \int_1^{\infty} \frac{f(t)}{t} dt$$

convergente.

Enfin, et pour signaler que l'étude d'une fonction définie par une intégrale peut ne pas aboutir au tracé du graphe, on proposera

$$[5] \quad I(x) = \int_0^{\pi} \cos(x \sin t) dt$$

en montrant comment la méthode de Laplace complexe fait apparaître  $I$  dans la recherche de solution intégrale à l'équation différentielle de Bessel (Leçon Exemple de résolution d'équation différentielle).

$$[1] \quad I(x) = \int_x^{2x} \operatorname{Arctg}(t) dt.$$

1) On peut expliciter  $I$  par un calcul de primitive, une intégration par partie donnant

$$\begin{aligned} \int \operatorname{Arctg}(t) dt &= t \cdot \operatorname{Arctg}(t) - \int \frac{t}{1+t^2} dt \\ &= t \cdot \operatorname{Arctg}(t) - \frac{1}{2} \ln(1+t^2) \end{aligned}$$

d'où 
$$I(x) = 2x \operatorname{Arctg}(2x) - x \operatorname{Arctg}(x) - \frac{1}{2} \ln \frac{1+4x^2}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}.$$

$$2) \quad I(-x) = \int_{-x}^{-2x} \operatorname{Arctg}(t) dt = \int_x^{2x} \operatorname{Arctg}(\theta) d\theta = I(x)$$

$I$  est donc une fonction paire.

3) Comme primitive de fonction continue,  $I$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , avec

$$I'(x) = 2 \cdot \operatorname{Arctg}(2x) - \operatorname{Arctg}(x)$$

en conséquence

$$\operatorname{tg} I'(x) = \frac{\frac{4x}{1-4x^2} - x}{1 + \frac{4x^2}{1-4x^2}} = 4x^3 + 3x$$

et 
$$I(x) = \int_0^x \operatorname{Arctg}(4t^3 + 3t) dt$$

4) On connaît le développement en série entière de

$$\operatorname{Arctg}(t) \left( = \int_0^t \frac{d\theta}{1+\theta^2} \right) = t - \frac{t^3}{3} + \dots + (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{2n+1} + \dots$$

de rayon de convergence  $R = 1$  : pour  $|x| < \frac{1}{2}$ , et on peut intégrer terme à terme pour obtenir le développement de

$$I(x) = \frac{3}{2} x^2 - \frac{5}{4} x^4 + \dots + (-1)^n \frac{2^{2(n+1)} - 1}{(2n+1)(2n+2)} x^{2(n+1)} + \dots$$

En particulier, on a évidemment  $I'(0) = 0$ , et le graphe de  $I$  admettra  $y = \frac{3}{2} x^2$  comme parabole osculatrice.

5)  $I'(x) > 0$  si  $x > 0$  :  $I$  est croissante à droite.

$$I''(x) = \frac{4}{1+4x^2} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{3}{(1+4x^2)(1+x^2)} > 0 : I \text{ est donc convexe.}$$

6) On étudie le comportement de  $I$  en  $+\infty$  :

$$I(x) = \int_x^{2x} \operatorname{Arctg}(t) dt > x \cdot \operatorname{Arctg} x$$

montre que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} I(x) = +\infty$  pour  $x > 0$

$$\begin{aligned} \frac{I(x)}{x} &= \frac{1}{x} \int_x^{2x} \operatorname{Arctg}(t) dt < \frac{1}{x} \operatorname{Arctg}(2x) \int_x^{2x} dt = \operatorname{Arctg}(2x) \\ &> \frac{1}{x} \operatorname{Arctg} x \int_x^{2x} dt = \operatorname{Arctg}(x) \end{aligned}$$

montre que  $I(x) \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{\pi}{2} x$   
on forme donc

$$\begin{aligned} I(x) - \frac{\pi}{2} x &= \int_x^{2x} \left( \operatorname{Arctg}(t) - \frac{\pi}{2} \right) dt \\ &= \int_x^{2x} -\operatorname{Arctg}\left(\frac{1}{t}\right) dt \end{aligned}$$

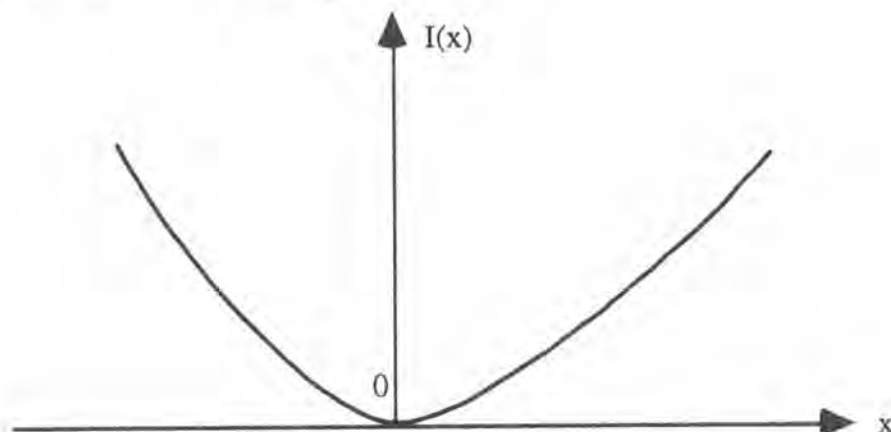
soit, par le changement de variable  $t = \frac{1}{\theta}$

$$I(x) - \frac{\pi}{2} x = \int_{\frac{1}{2x}}^{\frac{1}{x}} \frac{\operatorname{Arctg} \theta}{\theta^2} d\theta$$

intégrale qu'il s'agit d'étudier pour  $x \rightarrow +\infty$  : en reprenant le développement en série entière de  $\operatorname{Arctg} \theta$  il vient, pour  $x > 1$

$$\begin{aligned} I(x) - \frac{\pi}{2} x &= - \int_{\frac{1}{2x}}^{\frac{1}{x}} \left( \frac{1}{\theta} - \frac{\theta}{3} + \dots + (-1)^n \frac{\theta^{2n-1}}{2n+1} + \dots \right) d\theta \\ &= -\ln(2) + \frac{1}{8x^2} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{2n(2n+1)} \left( 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \right) \frac{1}{x^{2n}} + \dots \end{aligned}$$

En particulier, ce développement asymptotique de  $I$  en  $+\infty$  montre que le graphe de  $I$  admet, lorsque  $x \rightarrow +\infty$ , l'asymptote  $y = \frac{\pi}{2}x - \ln(2)$ , en restant au-dessus :



$$\boxed{2} \quad I(x) = \int_0^1 e^{xt^2} dt.$$

$$1) \quad I \text{ est } \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}), I'(x) = \int_0^1 t^2 e^{xt^2} dt > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$I \text{ est croissante (et convexe, car } I''(x) = \int_0^1 t^4 e^{xt^2} dt > 0).$$

2) Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on peut écrire

$$I(x) = \int_0^1 \sum_{n \geq 0} \frac{t^{2n}}{n!} x^n dt = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{(2n+1)n!}$$

en particulier

$$I(x) = 1 + \frac{x}{3} + o(x^2) \text{ en } 0.$$

$$3) \quad \text{Pour } x > 0, I(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{\sqrt{x}} e^{\theta^2} d\theta > \frac{1}{\sqrt{x}} \int_{\sqrt{x}/2}^{\sqrt{x}} e^{\theta^2} d\theta > \frac{1}{\sqrt{x}} e^{x/4} \sqrt{x}/2$$

ce qui montre que le graphe de  $I$  possède une branche exponentielle en  $+\infty$ . Plus précisément,

$$\int_0^{\sqrt{x}} e^{\theta^2} d\theta = \int_0^1 e^{\theta^2} d\theta + \int_1^{\sqrt{x}} e^{\theta^2} d\theta$$

et, en intégrant par parties

$$\int_1^{\sqrt{x}} e^{\theta^2} d\theta = \int_1^{\sqrt{x}} \frac{d(e^{\theta^2})}{2\theta} = \frac{e^x}{2\sqrt{x}} - \frac{e}{2} + \frac{1}{2} \int_1^{\sqrt{x}} \frac{e^{\theta^2}}{\theta^2} d\theta$$

où

$$e^{\theta^2} \int_1^{\sqrt{x}} \frac{e^{\theta^2}}{\theta^2} d\theta = \int_1^{\sqrt{x}} \frac{d(e^{\theta^2})}{2\theta^3} = \frac{e^x}{2x^{3/2}} - \frac{e}{2} + \frac{3}{2} \int_1^{\sqrt{x}} \frac{e^{\theta^2}}{\theta^4} d\theta$$

avec

$$\left| \int_1^{\sqrt{x}} \frac{e^{\theta^2}}{\theta^4} d\theta \right| \leq e^x \int_1^{\sqrt{x}} \frac{d\theta}{\theta^4}$$

montre que

$$\int_0^{\sqrt{x}} e^{\theta^2} d\theta = \frac{e^x}{2\sqrt{x}} + o\left(\frac{e^x}{2\sqrt{x}}\right) \text{ en } +\infty$$

d'où

$$I(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^x}{2x}.$$

Plus généralement, on établit le développement asymptotique de  $I$  au voisinage de  $+\infty$ , par rapport à l'échelle de comparaison  $\left(\frac{e^x}{x^n}\right)_{n \geq 0}$  :

$$I(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^x}{2x} \left( 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \left(\frac{1}{x}\right)^n \right)$$

4) Pour  $x < 0$ ,  $I(x) = \frac{1}{\sqrt{-x}} \int_0^{\sqrt{-x}} e^{-\theta^2} d\theta$  : comme l'intégrale impropre  $\int_0^{+\infty} e^{-\theta^2} d\theta$  converge (vers  $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ ),

$$I(x) \underset{(x \rightarrow -\infty)}{\sim} \frac{1}{2} \sqrt{-\frac{\pi}{x}}$$

on peut préciser le comportement au voisinage de  $-\infty$ , par le développement asymptotique de la fonction erreur

$$\text{Erf}(x) \doteq \int_x^{\infty} e^{-t^2} dt = \int_{x^2}^{\infty} \frac{e^{-\theta}}{2\sqrt{\theta}} d\theta$$

au voisinage de  $+\infty$ , selon l'échelle  $(\frac{e^{-x^2}}{x^n})_{n \geq 1}$  :

$$\int_{x^2}^{\infty} \frac{e^{-\theta}}{2\sqrt{\theta}} d\theta = \int_{x^2}^{\infty} \frac{d(-e^{-\theta})}{2\sqrt{\theta}} = \frac{e^{-x^2}}{2x} + \int_x^{\infty} \frac{e^{-\theta}}{2} d(\theta^{-1/2})$$

$$= \frac{e^{-x^2}}{2x} + \frac{1}{4} \int_{x^2}^{\infty} \frac{d(e^{-\theta})}{\theta^{3/2}}$$

$$= \frac{e^{-x^2}}{2x} - \frac{e^{-x^2}}{2^2 \cdot x^3} + \frac{3}{2^3} \int_{x^2}^{\infty} \frac{e^{-\theta}}{\theta^{5/2}} d\theta$$

où  $\left| \int_{x^2}^{\infty} \frac{e^{-\theta}}{\theta^{5/2}} d\theta \right| \leq \frac{1}{x^5} \int_{x^2}^{\infty} e^{-\theta} d\theta = \frac{e^{-x^2}}{x^5}$

Plus généralement

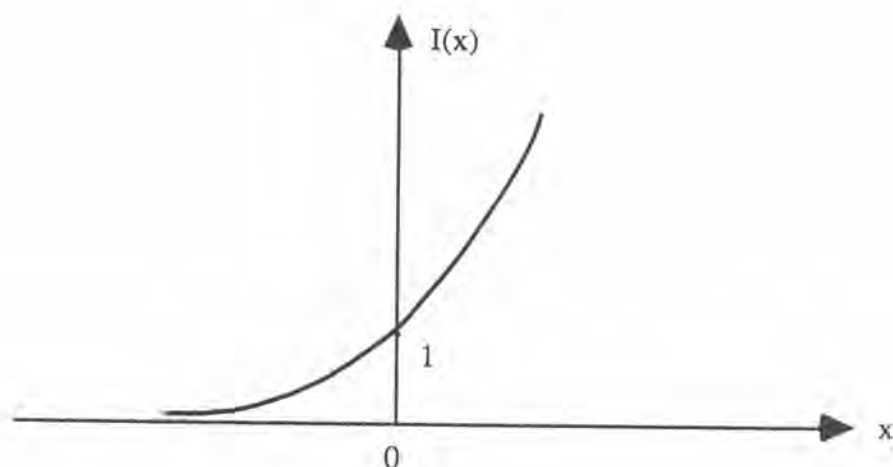
$$\int_{x^2}^{\infty} \frac{e^{-\theta}}{2\sqrt{\theta}} d\theta = e^{-x^2} \sum_{n=0}^m (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n+1}n!} \frac{1}{x^{2n+1}} + o\left(\frac{e^{-x^2}}{x^{2n+3}}\right)$$

valable pour tout entier  $m$  (le reste étant d'ailleurs contrôlé par le 1<sup>er</sup> terme négligé, comme dans la règle de Leibniz, la série étant cependant divergente ...). Par conséquent

$$I(x) \underset{(-\infty)}{\sim} \frac{1}{\sqrt{-x}} \left( \frac{\sqrt{\pi}}{2} - e^x \left( \frac{1}{2\sqrt{-x}} - \frac{1}{4x\sqrt{-x}} + \dots \right) \right)$$

$$\underset{(-\infty)}{\sim} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{-\pi}{x}} + \frac{e^x}{2x} - \dots$$

5)



$$\boxed{3} \quad I(x) = \int_0^{\infty} e^{-xt} \frac{\sin t}{t} dt$$

1)  $I$  est définie sur  $[0, +\infty[$  : comme  $\left| \frac{\sin t}{t} \right| \leq 1$ , l'intégrale converge absolument pour  $x > 0$  tandis que, pour  $x = 0$ ,  $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt$  converge (sans être absolument convergente).

2)  $I$  est  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $]0, +\infty[$  car il y a convergence dominée pour  $\frac{\partial^n}{\partial x^n} \left( e^{-xt} \frac{\sin t}{t} \right)$  sur  $[\varepsilon, +\infty[$  pour tout  $\varepsilon > 0$  donné, et, en particulier

$$I'(x) = \int_0^\infty -e^{-xt} \sin t dt, \quad \forall x > 0.$$

Un calcul élémentaire donne alors

$$I'(x) = -\frac{1}{1+x^2}, \quad x > 0.$$

3) On montre que  $I$  est continue sur  $[0, +\infty[$  : comme  $(x, t) \rightarrow e^{-xt} \frac{\sin t}{t}$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$ , pour tout entier  $n > 0$ ,  $I_n : x \rightarrow \int_0^n e^{-xt} \frac{\sin t}{t} dt$  est continue sur  $[0, +\infty[$  en particulier ; si on démontre que  $I_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{u} I$  sur  $[0, +\infty[$ , on pourra conclure. Il s'agit donc de montrer que  $\int_n^\infty e^{-xt} \frac{\sin t}{t} dt$  peut être rendu uniformément petite en  $x \geq 0$  pour  $n$  assez grand : en posant :  $H_n(t) = \int_n^t \frac{\sin \theta}{\theta} d\theta$  pour  $t \in \mathbb{R}$ , une intégration par parties donne

$$\int_n^T e^{-xt} \frac{\sin t}{t} dt = \int_n^T e^{-xt} dH_n(t)$$



$$\begin{aligned}
 &= e^{-xt} H_n(t) \Big|_{t=n}^{t=T} - \int_n^T H_n(t) (-xe^{-xt}) dt \\
 &= e^{-xt} H_n(t) + x \int_n^T H_n(t) e^{-xt} dt
 \end{aligned}$$

d'où

$$\left| \int_n^T e^{-xt} \frac{\sin t}{t} dt \right| \leq \sup_{t \geq n} |H_n(t)| e^{-nx} \leq \sup_{t \geq n} |H_n(t)|$$

pour  $x \geq 0$  mais

$$H_n(t) = \int_n^t \frac{d(-\cos \theta)}{\theta} = O\left(\frac{1}{n}\right) \text{ uniformément en } t \geq n$$

ce qui permet de conclure.

(à  $\varepsilon > 0$  donné, il existe  $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$  pour lequel, si  $n \geq N_\varepsilon$

$$\left| \int_n^T e^{-xt} \frac{\sin t}{t} dt \right| \leq \varepsilon \quad \forall T \text{ et } \forall x \geq 0,$$

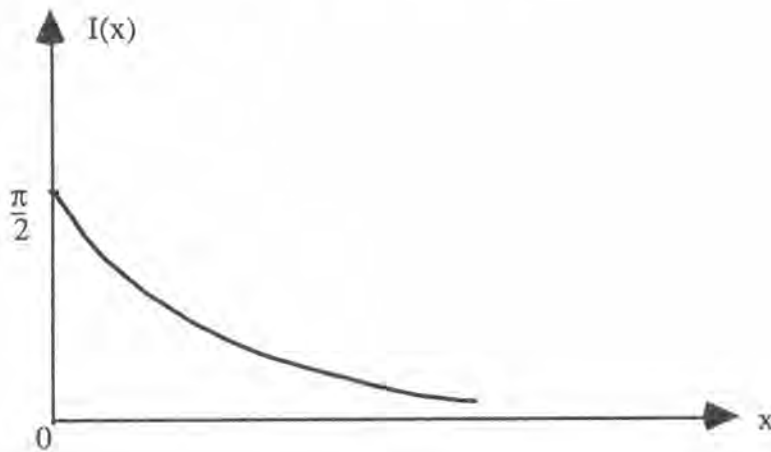
4) D'après ce qui précède

$$I(x) = I(0) - \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = I(0) - \operatorname{Arctg}(x)$$

en particulier  $\lim_{x \rightarrow +\infty} I(x) = I(0) - \frac{\pi}{2}$

mais, comme  $|I(x)| \leq \int_0^\infty e^{-xt} dt = \frac{1}{x}$  pour  $x > 0$ , il en résulte que :  $I(0) = \frac{\pi}{2}$ .

En conclusion :  $I(x) = \operatorname{Arctg}\left(\frac{1}{x}\right)$ ,  $x \geq 0$  :



5) En particulier,  $\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$ .

4) 
$$I(a,b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta}}.$$

1) Pour  $a, b \neq 0$ ,  $I(a,b)$  est une intégrale définie et  $I(a,b) = I(|a|, |b|)$  pour  $a = 0$  ou  $b = 0$ , l'intégrale impropre diverge :  $I$  est donc une fonction définie sur  $\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 / a, b \neq 0\}$  et on peut limiter l'étude sur  $D = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 / a > 0 \text{ et } b > 0\}$ .

2)  $I(a,b) = I(b,a)$  par le changement de variable  $\theta = \frac{\pi}{2} - \theta$ .

$$I(a,b) = \frac{\pi}{2a}$$

$$I(\lambda a, \lambda b) = \frac{1}{\lambda} I(a,b) \text{ pour } \lambda > 0. \text{ (I est homogène de degré 1).}$$

3)  $I$  est  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $D$ , et

$$\frac{\partial I}{\partial a}(a,b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-a \cos^2 \theta}{\sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta}} d\theta < 0 \text{ sur } D.$$

4) En posant  $u = \operatorname{tg} \theta$

$$I(a,b) = \int_0^{\infty} \frac{du}{\sqrt{(1+u^2)(a^2+b^2u^2)}}$$

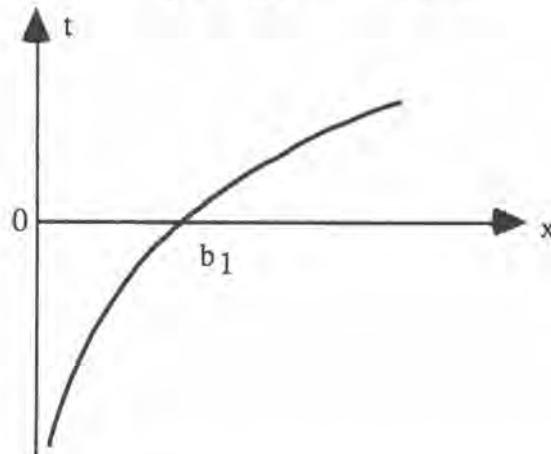
soit, avec  $t = b.u$ , la forme

$$I(a,b) = \int_0^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{(t^2+a^2)(t^2+b^2)}} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{(t^2+a^2)(t^2+b^2)}}.$$

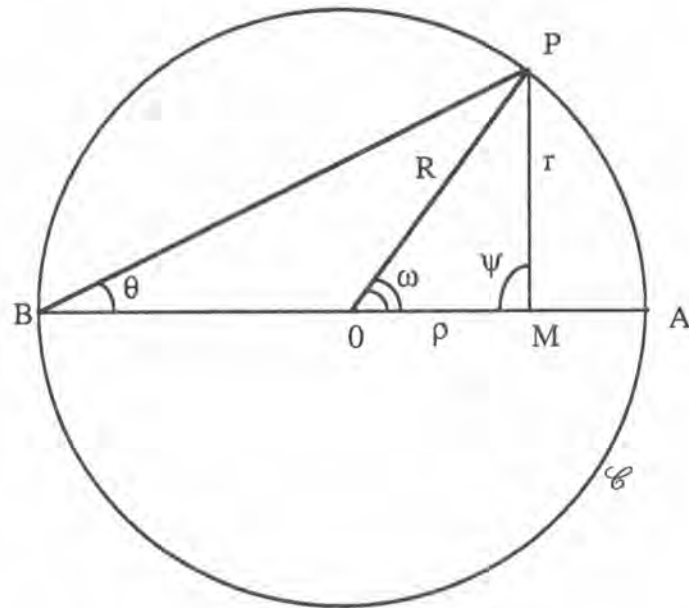
Si on introduit  $a_1 = \frac{a+b}{2}$ ,  $b_1 = \sqrt{ab}$ , les moyennes arithmétique et géométrique de  $a$  et

$b$ , on montre que :  $I(a_1, b_1) = I(a, b)$

par le changement de variable  $t = \frac{1}{2} \left( x - \frac{ab}{x} \right)$  dans  $I(a_1, b_1)$  :



5) Une des origines physiques de  $I$  donne plus naturellement la relation précédente : il s'agit de calculer le potentiel newtonien créé par une circonférence plane homogène de masse unité en un point intérieur



$$V(M) = \int_C \frac{ds}{MP}$$

Avec le paramètre  $\theta$  ( $r^2 = \rho^2 + R^2 - 2\rho R \cos 2\theta$ ,  $ds = R d\omega$ ),

on obtient :

$$V(M) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{MA^2 \cos^2 \theta + MB^2 \sin^2 \theta}}$$

tandis qu'en adoptant comme paramètre l'angle  $\psi$

$$(x = \rho - r \cos \psi, y = r \sin \psi$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \dots)$$

on est conduit à l'expression

$$V(M) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{\sqrt{R^2 - \rho^2 \sin^2 \psi}}.$$

Par conséquent

$$I(a,b) = \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{\sqrt{R^2 - \rho^2 \sin^2 \psi}} \quad (\doteq J(R,\rho))$$

avec  $a = MA = R - \rho$ ,  $b = MB = R + \rho$ .

Mais on a évidemment

$$I(a,b) = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{a^2 - (a^2 - b^2) \sin^2 \theta}} \quad (= J(a, \sqrt{a^2 - b^2}))$$

et, par conséquent

$$I(a,b) = I(a_1,b_1) \text{ où } \begin{aligned} a_1 &= a - \sqrt{a^2 - b^2} \\ b_1 &= a + \sqrt{a^2 - b^2} \end{aligned}$$

ce qui conduit à la relation obtenue en 4).

6) Etant donnés  $a > b > 0$ , il est bien connu que les suites  $(a_n)_{n \geq 0}$  et  $(b_n)_{n \geq 0}$  définies par

$$\begin{aligned} a_0 &= a & a_{n+1} &= \frac{a_n + b_n}{2} \\ b_0 &= b & b_{n+1} &= \sqrt{a_n \cdot b_n} \end{aligned} \quad n \geq 0$$

sont adjacentes, et convergent vers la moyenne arithmético-géométrique  $g(a,b)$  de  $a$  et  $b$ ; d'ailleurs, la convergence est rapide, car, si l'on pose  $c_n = \sqrt{a_n^2 - b_n^2}$

$$c_n^2 = a_n^2 - b_n^2 = \frac{1}{4} (a_{n-1} - b_{n-1})^2 = \frac{1}{4} c_{n-1}^2 \frac{a_{n-1} - b_{n-1}}{a_{n-1} + b_{n-1}} < \frac{1}{4} c_{n-1}^2$$

de sorte que  $c_n < \frac{c_0}{2^n}$ .

7) D'après ce qui précède

$$I(a,b) = I(a_n, b_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} I(g(a,b), g(a,b)) = \frac{\pi}{2g(a,b)} \text{ et la relation obtenue } I(a,b) = \frac{\pi}{2g(a,b)} \text{ permet d'approcher } I \text{ rapidement.}$$

8) A titre d'illustration, calculons une valeur approchée du périmètre  $P$  de la lemniscate  $r^2 = \cos 2\theta$ :

$$P = 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}} = 4 \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} \quad (t = \operatorname{tg} \theta)$$

soit, en posant  $t = \cos \theta$

$$P = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1+\cos 2\theta}} = 4I(\sqrt{2}, 1)$$

et

| $n$ | $a_n$        | $b_n$        |
|-----|--------------|--------------|
| 0   | 1.4142135623 | 1.           |
| 3   | 1.1981402347 | 1.1981402346 |

- 15 16 -

**EXEMPLES D'ETUDE DE SERIES NUMERIQUES  
ET  
EXEMPLES D'ETUDE DE SERIES REELLES OU  
COMPLEXES NON ABSOLUMENT CONVERGENTES**

1  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(4n^2-1)}$  +

1) Comme  $\frac{1}{n(4n^2-1)} \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{1}{4n^3}$ , d'après Riemann et le critère de comparaison, la série converge.

2) Pour calculer sa somme, on peut décomposer le terme général

$$\frac{1}{n(4n^2-1)} = \frac{-1}{n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n-1}$$

et utiliser le fait que la somme harmonique

$$\begin{aligned} H_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \\ = \ln n + \varepsilon_n, \text{ où } \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0. \end{aligned}$$

En effet, la somme partielle  $S_n$  de la série étudiée s'écrit alors comme

$$\begin{aligned} S_n &= -H_n + \left(H_{2n+1} - \frac{1}{2} H_n\right) + \left(H_{2n-1} - \frac{1}{2} H_{n-1}\right) \\ &= \ln \frac{(2n+1)(2n-1)}{n^2} - 1 \end{aligned}$$

et tend par conséquent vers

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{n(4n^2-1)} = 2\ln 2 - 1.$$

3) On pourrait aussi introduire la série entière

$$f(z) = \sum_1^{\infty} \frac{z^n}{n(4n^2-1)}$$

de rayon de convergence  $R = 1$ .

Par dérivation, on a, pour  $|z| < 1$

$$\begin{aligned} f'(z) &= \sum_1^{\infty} \frac{z^{n-1}}{4n^2-1} \\ &= \frac{1}{2} \sum_1^{\infty} \frac{z^{n-1}}{2n-1} - \frac{1}{2} \sum_1^{\infty} \frac{z^{n-1}}{2n+1} \end{aligned}$$

où le calcul de

$$g(z) = \sum_0^{\infty} \frac{z^n}{2n+1}, \quad |z| < 1$$

peut se faire à partir de

$$\begin{aligned} g'(z) &= \sum_1^{\infty} \frac{n}{2n+1} z^{n-1} \\ &= \frac{1}{2} \sum_1^{\infty} z^{n-1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z} (g(z)-1) \\ &= -\frac{1}{2} \ln(1-z) - \frac{1}{2z} (g(z)-1) \end{aligned}$$

en résolvant une équation différentielle.

$$\boxed{2} \quad \sum_2^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$$

Comme  $f(t) = \frac{1}{(\ln t)^{\ln t}}$  tend vers 0 en décroissant, la série est de même nature que l'intégrale impropre  $\int_2^{\infty} f(t)dt$ .

Cette intégrale impropre s'étudie facilement par le changement de variable  $t = e^u$  :

$$\int_2^T \frac{dt}{(\ln t)^{\ln t}} = \int_{\ln 2}^{\ln T} \frac{du}{e^u \ln(u/e)}$$

Comme  $u^2 \cdot e^{-u \ln(u/e)} \xrightarrow{(u \rightarrow +\infty)} 0$ , on conclut à la convergence.

$$\boxed{3} \quad \sum_1^{\infty} \frac{\cos n}{\ln n + \cos n}$$

1) La série  $\sum \frac{\cos n}{\ln n}$  converge d'après le critère d'Abel, mais le critère ne s'applique pas directement à la série étudiée, car la suite  $(\ln n + \cos n)$  n'est pas croissante.

2) On étudie donc la série de terme général

$$\frac{\cos n}{\ln n} - \frac{\cos n}{\ln n + \cos n} = \frac{\cos^2 n}{\ln n (\ln n + \cos n)} > 0$$

équivalent à  $\frac{\cos^2 n}{\ln^2 n} = \frac{1}{2} \frac{\cos 2n+1}{\ln^2 n}$ .

3) La série  $\sum_2^{\infty} \frac{\cos 2n}{\ln^2 n}$  converge, avec le critère d'Abel et la série  $\sum_2^{\infty} \frac{1}{\ln^2 n}$  diverge, après comparaison avec la série harmonique  $\left( \frac{n}{\ln^2 n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty \right)$ .

**En conclusion**, la série proposée est divergente.



$$\boxed{4} \quad \sum_1^{\infty} \sin(n) \cdot \sin\left(\frac{1}{n}\right)$$

1) Comme  $\left(\sin \frac{1}{n}\right)$  décroît vers 0, la série converge d'après le critère d'Abel.

2) En écrivant que

$$\begin{aligned} \left| \sin n \cdot \sin \frac{1}{n} \right| &> \sin^2 n \cdot \sin \frac{1}{n} \\ &> \frac{1}{2} (1 - \cos 2n) \cdot \sin \frac{1}{n} \end{aligned}$$

on constate que la série n'est pas absolument convergente.

3) En effet, la série  $\sum \frac{\cos 2n}{n}$  converge d'après le critère d'Abel, tandis que la série harmonique diverge. Par conséquent

$$\sum_{n=1}^N \left| \sin n \cdot \sin \frac{1}{n} \right| > \frac{1}{2} \sum_1^N \sin \frac{1}{n} - \frac{1}{2} \sum_1^N \frac{\cos 2n}{n}$$

où le membre de droite tend vers  $+\infty$  avec  $N$ .

$$\boxed{5} \quad \sum_1^{\infty} \frac{\cos(\ell n n)}{n} \text{ ou } \sum_1^{\infty} \frac{e^{i\ell n n}}{n}$$

traité dans l'exemple  $\boxed{5}$  de la Leçon  $\boxed{18}$ .

$$\boxed{6} \quad \sum_0^{\infty} \frac{\cos n}{n+2\cos n}$$

1) En s'appuyant sur la série  $\sum_1^{\infty} \frac{\cos n}{n}$ , on montre, comme dans l'exemple  $\boxed{3}$ , qu'il s'agit d'une série convergente.

2) Par contre, et suivant en cela [4], on montre qu'elle n'est pas absolument convergente.

$$[7] \quad \sum_1^{\infty} \frac{\sin \sqrt{n}}{\sqrt{n}}.$$

1) Le critère d'Abel ne s'applique pas directement car, si  $\sqrt{n}$  tend en croissant vers  $+\infty$ , on ne peut pas montrer que la suite des sommes partielles

$$\left( \sum_1^n \sin \sqrt{k} \right)_n \text{ est bornée.}$$

2) On considère donc la fonction

$$f(t) = \frac{\sin \sqrt{t}}{\sqrt{t}}, \quad t > 0$$

telle que 
$$f'(t) = \frac{\cos \sqrt{t}}{2t} - \frac{\sin \sqrt{t}}{2t^{3/2}}$$

et 
$$f''(t) = \frac{-\sin \sqrt{t}}{4t^{3/2}} - \frac{\cos \sqrt{t}}{2t^2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{\sin \sqrt{t}}{t^{5/2}} - \frac{\cos \sqrt{t}}{4t^2}$$

montre que 
$$|f''(t)| \leq \frac{C}{t^{3/2}}.$$

3) D'après la leçon [17], Annexe, on a donc

$$\int_n^{n+1} f(t) dt = \frac{1}{2} (f(n) + f(n+1)) + \epsilon_n$$

avec 
$$|\epsilon_n| \leq \frac{K}{n^{3/2}}$$

(formule des trapèzes), et la série de terme général  $\frac{1}{2} (f(n) + f(n+1))$  diverge donc, avec

l'intégrale impropre 
$$\int_1^{\infty} \frac{\sin \sqrt{t}}{\sqrt{t}} dt.$$

4) Comme  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = 0$ , il en est donc de même de la série proposée.

$$\boxed{8} \quad \sum_1^{\infty} \frac{\sin n}{n},$$

$$\boxed{9} \quad \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

donnent d'autres exemples, classiques, pour la Leçon  $\boxed{16}$ .

# - 17 -

## RECHERCHE DES VALEURS APPROCHEES DE LA SOMME D'UNE SERIE CONVERGENTE

On expose quelques méthodes sur les exemples

$$S = \sum_1^{\infty} \frac{1}{1+n^2} \quad \text{et} \quad S' = \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2}.$$

1) Pour tout  $N > 0$ ,

$$R_N = \sum_{N+1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} < \int_N^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} < \frac{1}{N}$$

tandis que  $\left| R'_N = \sum_{N+1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} \right| < \frac{1}{1+(N+1)^2} < \frac{1}{N^2}$

: le calcul direct de  $S$  ( $S'$ ) nécessite, pour avoir une précision de  $10^{-4}$ , celui de  $10^4$  ( $10^2$ ) termes.

2) (la méthode de KUMMER)

a) On sait calculer la somme de la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)\dots(n+p)} \quad p \geq 1$$

qui vaut  $\frac{1}{p \cdot p!}$  : l'idée consiste à développer  $\frac{1}{1+n^2}$  dans l'échelle  $\left( \frac{1}{n(n+1)\dots(n+p)} \right)_p$ .

b) On fait l'opération pour  $p = 2$ , en écrivant

$$\frac{1}{n^2+1} = \frac{a}{n(n+1)} + \frac{b}{n(n+1)(n+2)} + \epsilon_n$$

où  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{n^2+1} = 1$

puis 
$$b = \lim_{n \rightarrow \infty} n(n+1)(n+2) \left( \frac{1}{n^2+1} - \frac{1}{n(n+1)} \right) = 1$$

ce qui donne

$$\epsilon_n = \frac{n-3}{n(n^2+1)(n+1)(n+2)} < \frac{1}{n^4}.$$

c) Si bien que

$$S = \frac{1}{1.1!} + \frac{1}{2.2!} + \sum_{n=1}^N \epsilon_n + r_N$$

avec 
$$0 < r_N < \int_N^{\infty} \frac{dt}{t^4} = \frac{1}{3N^3}$$

de sorte que, pour obtenir  $S$  à  $10^{-4}$  près, il suffit de calculer 15 termes.

d) Comme on connaît  $\xi(2p)$  avec les nombres de Bernoulli, on aurait pu s'appuyer sur l'échelle de comparaison  $\left(\frac{1}{n^{2p}}\right)_p$  : c'est ainsi que

$$\frac{1}{n^2+1} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{n^2}} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{n^{2(p+1)}}$$

donne, à l'ordre 2

$$\frac{1}{n^2+1} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^4} + \epsilon_n$$

avec 
$$0 < \epsilon_n = \frac{1}{n^4(1+n^2)} < \frac{1}{n^6}$$

de sorte que 
$$S = B_1 - B_2 + \sum_{n=1}^{n=N} \frac{1}{n^4(1+n^2)} + r_N \quad \text{où} \quad 0 < r_N < \frac{1}{5N^5}$$

: pour obtenir  $S$  à  $10^{-5}$  près, il suffit de calculer 10 termes.

### 3) (la méthode d'EULER-ABEL)

a) On considère la série entière

$$f(z) = \sum_1^{\infty} \frac{z^n}{1+n^2}$$

de rayon de convergence  $R = 1$ , sur laquelle on effectue une transformation d'Abel :

$$(1-z) f(z) = \sum_1^{\infty} a_n (z^n - z^{n+1}), \quad a_n = \frac{1}{1+n^2}, \quad n \geq 1$$

$$a_0 = 0$$

$$= \sum_1^{\infty} (a_{n+1} - a_n) z^n$$

valable pour  $|z| < 1$ . Ainsi,

$$f(z) = \frac{1}{1-z} \sum_1^{\infty} (\Delta_1 a_n) z^n$$

où 
$$\Delta_1 a_n = \frac{1}{1+(n+1)^2} - \frac{1}{1+n^2} = -\frac{2n+1}{(1+n^2)(1+(n+1)^2)}$$

est tel que :  $|\Delta_1 a_n| \leq \frac{2}{n^3}$ .

b) En faisant  $z = -1$  dans l'expression précédente (la série  $\sum_1^{\infty} (\Delta_1 a_n) z^n$  converge normalement sur  $[-1, +1]$ ), on obtient

$$S' = \frac{1}{2} \sum_1^N (-1)^n \Delta_1 a_n + r'_N$$

où 
$$|r'_N| \leq \frac{1}{N^3}$$

si bien qu'une précision de  $10^{-4}$  ne nécessite plus que le calcul de 22 termes.

c) On peut évidemment itérer le procédé ... qui est particulièrement performant sur les séries alternées lentement convergentes. Ainsi, sur la série  $\sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ , 6 transformations conduisent à une valeur de S à  $10^{-5}$  près, en calculant 2 termes.

#### 4) (application de la formule sommatoire d'EULER-MAC LAURIN)

a) On commence par calculer  $f^{(2k-1)}$  pour  $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$  : Comme

$$f(t) = \frac{1}{2i} \left( \frac{1}{t-i} - \frac{1}{t+i} \right),$$

il vient pour tout  $n \geq 0$

$$f^{(n)}(t) = \frac{(-1)^n n!}{2i} \left( \frac{1}{(t-i)^{n+1}} - \frac{1}{(t+i)^{n+1}} \right)$$

soit, en posant  $t = \tan \theta = \frac{1}{i} \cdot \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}$  ( $|\theta| < \frac{\pi}{2}$ ) et comme alors

$$t \pm i = \pm i \frac{e^{\mp i\theta}}{\cos \theta}$$

$$f^{(n)}(\tan \theta) = (-1)^n n! i^n \cos^{n+1}(\theta) : \frac{e^{i(n+1)\theta} - (-1)^{n+1} e^{-i(n+1)\theta}}{2}$$

et, en particulier

$$f^{(2k-1)}(\tan \theta) = (-1)^{k+1} (2k-1)! \cos^{2k}\theta \sin(2k\theta).$$

b) Pour  $N > M > 1$ , et en posant  $\theta_M(\theta_N) = \text{Arctg } M$  ( $\text{Arctg } N$ ), on a donc

$$\sum_M^N \frac{1}{1+n^2} = \theta_N - \theta_M + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1+M^2} + \frac{1}{1+N^2} \right) +$$

$$\sum_{k=1}^{K-K} \frac{B_k}{2k} \left( \frac{\sin(2k \theta_N)}{(1+N^2)^k} - \frac{\sin(2k \theta_M)}{(1+M^2)^k} \right) + R_K^{M,N}$$

où 
$$R_K^{M,N} = (-1)^K \int_{\theta_M}^{\theta_N} \cos^{2K} \theta \sin 2(K+1)\theta \varphi_{2K+1}(\operatorname{tg} \theta) d\theta.$$

Faisant  $N \rightarrow +\infty$ , on obtient

$$\sum_M^\infty \frac{1}{1+n^2} = \operatorname{Arctg} \frac{1}{M} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+M^2} - \sum_{k=1}^{k=K} \frac{B_k}{2k} \frac{\sin(2k \theta_M)}{(1+M^2)^k} + R_K^M$$

avec 
$$R_K^M = (-1)^K \int_{\theta_M}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2K} \theta \sin 2(K+1)\theta \varphi_{2K+1}(\operatorname{tg} \theta) d\theta$$

estimé par 
$$|R_K^M| \leq \frac{1}{2} (2K+1) B_K \int_{\theta_M}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2K} \theta d\theta$$

$$\leq \frac{1}{2} (2K+1) B_K \frac{1}{(1+M^2)^K} \frac{1}{M}$$

soit encore 
$$|R_K^M| \leq \frac{(2K+1) B_K}{2} \frac{1}{M^{2K+1}}.$$

**Par exemple**, avec  $M = 4$  et  $K = 3$ , on obtient

$$|R_3^4| \leq \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot \frac{1}{42} \cdot \frac{1}{4,173} < 5 \cdot 10^{-6}.$$

**5)** La somme  $S'$  peut être obtenue à l'aide de l'exemple de développement en série de Fourier 5 de la Leçon 28, en y faisant  $\alpha = i$  :

$$S' = \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{\operatorname{sh} \pi} - 1 \right).$$

**6)** La même référence permet le calcul de la somme  $S$  :

$$F_\alpha(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{int}}{n-\alpha} = -\frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} e^{-i\pi\alpha} e^{i\alpha t}$$



a été établie pour  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$  et  $t \in ]0, 2\pi[$ .

Mais il est tout d'abord facile de voir que cette relation reste vraie pour  $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$  ; elle donne en particulier, pour  $\alpha = i$  :

$$1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1} \sin(nt) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nt)}{n^2+1} = \frac{\pi e^{\pi}}{\operatorname{sh} \pi} e^{-t}$$

toujours pour  $t \in ]0, 2\pi[$ .

Maintenant, et comme  $\frac{n}{n^2+1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n(n^2+1)}$ , on peut mettre la relation précédente sous la forme

$$1 + 2h(t) - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nt)}{n(n^2+1)} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nt)}{n^2+1} = \frac{\pi e^{\pi}}{\operatorname{sh} \pi} e^{-t}$$

où les deux séries de fonctions sont normalement convergentes sur  $\mathbb{R}$  ; il est donc possible de faire tendre  $t$  vers  $0+$ , pour obtenir l'égalité

$$1 + 2 \frac{\pi}{2} + 2.S = \frac{\pi e^{\pi}}{\operatorname{sh} \pi}$$

qui donne  $S = \frac{1}{2} (\pi \coth \pi - 1)$ .

7) En écrivant la formule d'Euler-Mac Laurin pour  $M = 0$ , on obtient

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=0}^{n=N} \frac{1}{1+n^2} = \frac{\pi}{2} - \alpha_N + \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{1+N^2} \right) + \\ &+ \sum_{k=1}^K (-1)^k \frac{B_k}{2k} \frac{\sin(2k\alpha_N)}{(N^2+1)^k} + (-1)^K \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2K} \sin(2K+1)\theta \cdot \varphi_{2K+1}(\operatorname{tg} \theta) d\theta \\ &+ r_K^N \end{aligned}$$

avec 
$$r_K^N = (-1)^{K+1} \int_{\theta_N}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2K}\theta \cdot \sin 2(K+1)\theta \cdot \varphi_{2K+1}(\operatorname{tg}\theta) d\theta$$

où on a introduit l'angle  $\alpha_N = \frac{\pi}{2} - \theta_N = \operatorname{Arctg}\left(\frac{1}{N}\right)$ .

Comme  $|r_K^N| \leq \frac{1}{2} (2K+1) B_K \frac{1}{(1+N^2)^K} \frac{1}{N}$ , on a :

$$r_K^N = O\left(\frac{1}{(1+N^2)^K}\right) \text{ quand } N \rightarrow +\infty.$$

Si  $C_K = (-1)^K \int_0^{\frac{\pi}{2}}$ , en écrivant le développement pour  $K$  et  $K+1$ , et en faisant

$N \rightarrow +\infty$ , on s'aperçoit que  $C_K = C_{K+1} \left(= S - \frac{\pi-1}{2}\right)$ .

On a donc obtenu le DA de  $S_N$  selon l'échelle  $\left(\frac{1}{(1+N^2)^K}\right)_K$  (: Leçon 12).

## ANNEXE : La formule sommatoire d'EULER-MAC LAURIN

1) On part de la formule du trapèze sur  $[0,1]$  :

$$\int_0^1 f(t)dt \sim \frac{1}{2} (f(0)+f(1))$$

en rappelant comment établir une majoration de l'erreur de la méthode (pour une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$ ) :

Si  $E(h) = \int_0^h f(t)dt - \frac{h}{2} (f(0)+f(h))$  pour  $h \in [0,1]$  , il s'agit d'estimer

$E(1)$ . Or

$$E(0) = 0$$

$$E'(h) = \frac{1}{2} (f(h)-f(0)) - \frac{h}{2} f'(h) \text{ donne } E'(0) = 0$$

$$E''(h) = -\frac{h}{2} f''(h)$$

donnent, selon la formule de Taylor avec reste intégral :

$$E(1) = \int_0^1 E'(h)dh = \int_0^1 E'(h)d(-(1-h)) = - \int_0^1 (1-h) \frac{h}{2} f''(h)dh$$

d'où  $|E(1)| \leq \frac{1}{12} \sup_{[0,1]} |f''|$ .

2) On peut aussi estimer l'erreur de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(t)dt &= \int_0^1 f(t)d\left(t - \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} (f(1)+f(0)) - \int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right) f'(t)dt \end{aligned}$$

de sorte que

$$E(1) = - \int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right) f'(t) dt$$

3) Afin d'étendre la formule sur  $[n, n+1]$ , on introduit la fonction 1-périodique  $\varphi_1$  qui vaut  $\left(t - \frac{1}{2}\right)$  en l'intervalle  $[0, 1]$ , de sorte que

$$\begin{aligned} \int_n^{n+1} f(t) dt &= \int_0^1 f(n+\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2} (f(n) + f(n+1)) - \int_0^1 \varphi_1(\theta) f'(n+\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2} (f(n) + f(n+1)) - \int_n^{n+1} \varphi_1(t) f'(t) dt \end{aligned}$$

Donc, pour  $M < N$  entiers, en sommant sur  $n$  entre  $M$  et  $(N-1)$ , il vient

$$\frac{1}{2} f(M) + f(M+1) + \dots + f(N-1) + \frac{1}{2} f(N) = \int_M^N f(t) dt + \int_M^N \varphi_1(t) f'(t) dt$$

d'où la formule sommatoire

$$\sum_M^N f(n) = \int_M^N f(t) dt + \frac{1}{2} (f(M) + f(N)) + \int_M^N \varphi_1(t) f'(t) dt.$$

4) Afin de poursuivre l'estimation de  $E(1)$  à coups d'intégrations par parties, on va construire une suite  $(\Phi_n)_{n \geq 2}$  de primitives de  $\varphi_1$  sur  $]0, 1[$ .

On considère donc la fonction génératrice

$$F(t, x) = \sum_{n \geq 0} \Phi_n(t) x^n$$

où  $\Phi_1 = \varphi_1$ ,  $\Phi_0 = 1$ ,  $\dot{\Phi}_n = \Phi_{n-1} \quad \forall n \geq 2$ .

Alors, formellement pour l'instant, on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial t}(t,x) &= \sum_{n \geq 1} \dot{\Phi}_n(t) x^n = x + \varphi_1(t) x^2 + \dots \\ &= x f(t,x)\end{aligned}$$

ce qui donne, par quadrature, la forme de

$$f(t,x) = K(x) e^{t \cdot x}$$

On précise la construction de la suite  $(\Phi_n)_{n \geq 2}$ , en supposant que, pour tout  $n \geq 2$ , on a

$$\bar{\Phi}_n = \int_0^1 \Phi_n(t) dt = 0$$

Alors, on aura

$$\int_0^1 f(t,x) dt = 1 = K(x) = \int_0^1 e^{tx} dt = K(x) \frac{e^x - 1}{x}.$$

Ceci amène à considérer la fonction

$$f(t,x) = \frac{x \cdot e^{tx}}{e^x - 1}.$$

D'après la leçon Série entières (et inégalités de Cauchy), à  $t$  fixé,  $f(t,.)$  est développable en série entière

$$(1) \quad \frac{x e^{tx}}{e^x - 1} = \sum_{n \geq 0} \Phi_n(t) \frac{x^n}{n!}, \quad |x| < R \quad (R > 0).$$

En particulier, on a

$$\Phi_0(t) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x - 1} e^{tx} = 1$$

$$\Phi_1(t) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left( \frac{x}{e^x - 1} e^{tx} - 1 \right) = t - \frac{1}{2} = \varphi_1(t).$$

Plus généralement, pour tout  $n$

$$\Phi_n(t) = \frac{\partial^n}{\partial x^n} \Big|_{x=0} \left( \frac{x e^{tx}}{e^x - 1} \right)$$

ce qui, avec la formule de Leibniz, montre que  $\Phi_n$  est un polynôme de degré  $n$  :

$$\Phi_n(t) = \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k \frac{\partial^{n-k}}{\partial x^{n-k}} \Big|_{x=0} \left( \frac{x}{e^x - 1} \right) t^k$$

Comme on l'a vu dans la Leçon Série Entière et Application, la connaissance de la fonction génératrice  $F$  permet de trouver des relations sur les coefficients  $\Phi_n$  : ainsi, comme

$$F(t+1, x) = e^x F(t, x)$$

et en identifiant les développements en série entière (selon  $x$ ) des deux membres, on obtient que

$$(2) \quad \Phi_n(t+1) = \sum_{\substack{p+q=n \\ p, q \geq 0}} \frac{n!}{p!q!} \Phi_p(t) = \sum_{p=0}^n C_n^p \Phi_p(t)$$

On a aussi

$$F(t+1, x) = x e^{tx} + F(t, x)$$

qui donne, selon le même procédé

$$(3) \quad \Phi_n(t+1) = \Phi_n(t) + n t^{n-1}$$

De même

$$F(1-t, x) = F(t, -x)$$

donne

$$(4) \quad \Phi_n(1-t) = (-1)^n \Phi_n(t).$$

Maintenant, on calcule

$$\begin{aligned}\dot{\Phi}_n(t) &= \frac{\partial^n}{\partial x^n} \Big|_{x=0} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{x e^{tx}}{e^x - 1} \right) \\ &= \frac{\partial^n}{\partial x^n} \Big|_{x=0} \left( x \frac{x e^{tx}}{e^x - 1} \right)\end{aligned}$$

avec la formule de Leibniz

$$= n \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} \Big|_{x=0} \left( \frac{x e^{tx}}{e^x - 1} \right)$$

$$(5) \quad \dot{\Phi}_n = n \Phi_{n-1}, \quad \forall n \geq 1.$$

$\Phi_n(0)$  s'obtient en développant

$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{x}{2} + \dots$$

en série entière. Comme  $\frac{x}{e^x - 1} - \left(1 - \frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2} \operatorname{th}(x)$  est une fonction paire, ce développement prend la forme

$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{x}{2} + \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{B_n}{(2n)!} x^{2n}$$

Les nombres  $B_n$  sont appelés **nombre de BERNOULLI**.

Ainsi

$$\Phi_n(t) = t^n - \frac{n}{2} t^{n-1} + \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} C_n^{2k} (-1)^{k-1} B_k t^{n-2k}$$

et, avec (3) en  $t = 0$ , on obtient (en changeant  $n$  en  $2n$ )

$$(-1)^{n-1} B_n = 1 - n + \sum_{k=1}^n C_{2n}^{2k} (-1)^{k-1} B_k$$

ce qui permet le calcul de proche en proche des nombres  $B_n$ , à partir de :

$$B_1 = \frac{1}{6}, \quad B_2 = \frac{1}{30}, \quad B_3 = \frac{1}{42}, \dots$$

5) En supposant  $f$  régulière, on a donc

$$\begin{aligned} \int_0^1 \phi_1(t) f'(t) dt &= \frac{1}{2} \phi_2 f' \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \phi_2 f'' dt \\ &= \frac{1}{2} B_1 (f'(1) - f'(0)) - \frac{1}{2} \int_0^1 \phi_2 f'' dt \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} \int_0^1 \phi_2 f'' dt &= \frac{1}{3} \phi_3 f'' \Big|_0^1 - \frac{1}{3} \int_0^1 \phi_3 f''' dt \\ &= -\frac{1}{3} \int_0^1 \phi_3 f''' dt \end{aligned}$$

car

$$\phi_2(1) = \phi_2(0) = B_1 \quad \text{tandis que} \quad \phi_3(1) = -\phi_3(0) = 0.$$

Si bien que

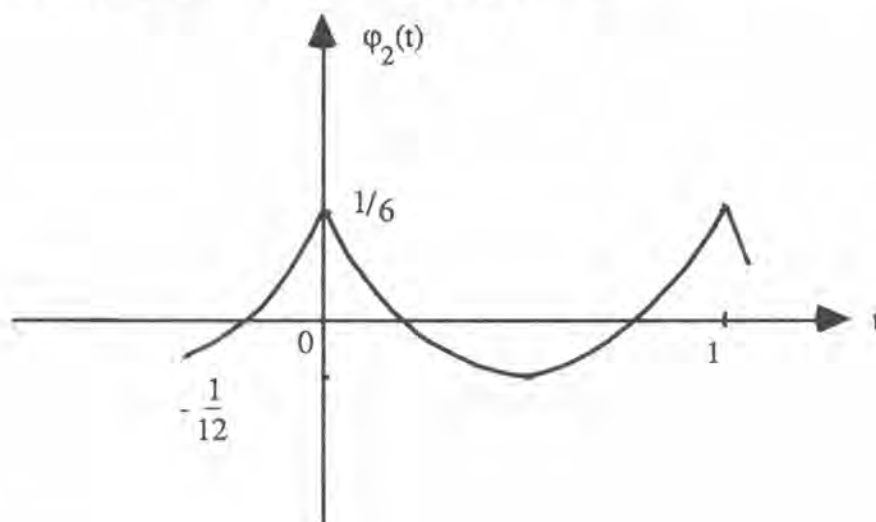
$$E = -\frac{1}{2} B_1 (f'(1) - f'(0)) - \frac{1}{3!} \int_0^1 f''' \phi_3 dt$$

Plus généralement, on aura

$$E = \sum_{k=1}^K (-1)^k \frac{B_k}{(2k)!} (f^{(2k-1)}(1) - f^{(2k-1)}(0)) - \frac{1}{(2K+1)!} \int_0^1 f^{(2K+1)} \phi_{2K+1} dt$$



6) Maintenant, pour arriver à une formule sommatoire, on considère la fonction  $\varphi_n$ , 1-périodisée de la restriction de  $\Phi_n$  à  $]0,1[$ . Ainsi



$$\left( \Phi_2(t) = t^2 - t + \frac{1}{6} \right).$$

Pour  $n \geq 2$ , il s'agit d'une fonction  $\mathcal{C}^0$  et  $\mathcal{C}^1 \mathbb{M}$  qui, d'après le **théorème de DIRICHLET**, coïncide avec son développement en série de Fourier :

$$\varphi_n(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_k(\varphi_n) e^{2ik\pi t}, \quad t \in \mathbb{R}$$

où 
$$c_k(\varphi_n) = \int_0^1 e^{-2ik\pi t} \varphi_n(t) dt, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

On sait que  $c_k(\dot{\varphi}_n) = 2ik\pi \cdot c_k(\varphi_n)$ , d'où avec (5), la relation de récurrence

$$c_k(\varphi_n) = \frac{n}{2ik\pi} c_k(\varphi_{n-1}), \quad \forall n \geq 2, \forall k \in \mathbb{Z}$$

tandis que le calcul de  $c_k(\varphi_1)$  est connu (voir la fonction en dents de scie de la Leçon 28) :

$$c_k(\varphi_1) = -\frac{1}{2ik\pi}, \quad k \neq 0 \quad c_0(\varphi_1) = \bar{\varphi}_1 = 0$$

Ce qui donne :

$$\begin{cases} c_k(\varphi_n) = -\frac{n!}{(2ik\pi)^n}, & k \neq 0, n \geq 1 \\ c_0(\varphi_n) = \bar{\varphi}_n = 0, & n \geq 1 \end{cases}$$

Par conséquent, pour tout  $n \geq 1$

$$(6) \quad \varphi_n(t) = -n! \sum_{\substack{k \neq 0 \\ k \in \mathbb{Z}}} \frac{e^{2ik\pi t}}{(2ik\pi)^n}, \quad t \in \mathbb{R}$$

(en convenant que, pour  $n = 1$ ,  $\varphi_n(0) = 0$ ).

En particulier, pour  $n \geq 1$ , on a

$$\begin{aligned} B_n &= (-1)^n (2n)! \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} \frac{1}{(2ik\pi)^{2n}} \\ &= (2n)! \frac{2}{(2\pi)^{2n}} \sum_1^\infty \frac{1}{k^{2n}}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$(7) \quad B_n = \frac{2 \cdot (2n)!}{(2\pi)^{2n}} \xi(2n)$$

$$\text{où} \quad 0 < \xi(2n) - 1 = \sum_2^\infty \frac{1}{k^{2n}} \leq \int_1^\infty \frac{dt}{t^{2n}} = \frac{1}{2n-1}$$

montre que

$$\begin{aligned} B_n &\underset{(n \rightarrow \infty)}{\sim} \frac{2(2n)!}{(2\pi)^{2n}} \\ &\underset{(n \rightarrow \infty)}{\sim} 4\sqrt{\pi} \frac{n^{2n+1/2}}{(\pi e)^{2n}} \end{aligned}$$

avec Stirling.

7) Par le procédé utilisé en 3), on obtient, à partir du développement de 5), la **formule sommatoire d'EULER-MAC LAURIN** suivante

$$\sum_{n=M}^{n=N} f(n) = \int_M^N f(t) dt + \frac{1}{2} (f(M) + f(N)) \\ + \sum_{k=1}^{k=K} (-1)^{k-1} \frac{B_k}{(2k)!} (f^{(2k-1)}(N) - f^{(2k-1)}(M)) + R_K^{M,N}$$

où 
$$R_K^{M,N} = \frac{1}{(2K+1)!} \int_M^N f^{(2K+1)}(t) \varphi_{2K+1}(t) dt$$

peut être estimé de la manière suivante :

$$|\varphi_n(t)| \leq |\varphi_n(0)| \text{ d'après (6)}$$

donne 
$$|\varphi_{2n}(t)| \leq B_n \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

puis 
$$|\varphi_{2K+1}(t) - \varphi_{2K+1}(\frac{1}{2})| = \left| \int_{1/2}^t (2K+1) \varphi_{2K}(\theta) d\theta \right| \\ \leq \frac{1}{2} (2K+1) B_K$$

pour  $t \in [0;1]$ , donc pour  $t \in \mathbb{R}$ .

Par conséquent

$$|R_K^{M,N}| \leq \frac{1}{2} (2K+1) \frac{B_K}{(2K+1)!} \int_M^N |f^{(2K+1)}(t)| dt \\ \leq \frac{1}{2} \frac{B_K}{(2K)!} \int_M^N |f^{(2K+1)}(t)| dt$$

**Références :** Dieudonné Calcul infinitésimal.