

IREM DE LORRAINE

deux activités mathématiques
au CM

preuve par 9 et fractions

1976-77

INTRODUCTION

Dans les pages qui suivent, on trouvera essentiellement deux chapitres :

- *le premier traite d'un travail fait autour de la preuve par 9 sur le thème : peut-on faire comprendre à des enfants du cours moyen que la preuve par 9 est autre chose qu'une opération à caractère magique ? Il s'est agi surtout de travailler sur des restes de division (bien entendu) et sur une description géométrique de ces restes - et de certaines de leurs propriétés.*
- *le second chapitre traite d'une introduction à la notion de fractions fondée sur une modernisation de la vieille méthode des « parts de gâteau ». La modernisation n'étant pas due au fait que les gâteaux sont rectangulaires, mais plutôt à ce que la part de la manipulation est prépondérante.*
- *En guise d'intermède, et sans que cela ait eu des prolongements systématiques en classe, on a indiqué quelques problèmes de dénombrement (ou : une méthode pour donner aux enfants l'envie de calculer des additions).*

Pour ce qui concerne la preuve par 9 et les fractions, ce qu'on lira est une relation schématique mais fidèle de ce qui s'est passé dans la classe.

Il me reste à remercier Monsieur MULLER, Inspecteur Départemental de l'Éducation Nationale, qui m'a aimablement donné l'autorisation d'intervenir dans une école de sa circonscription. Je remercie Madame SCHREINER, Directrice du Groupe Moselly B (Haut-du-Lièvre à Nancy) et Mesdames et Mesdemoiselles BOURGON, CUGNIN, LAVAL, STEWART, Institutrices dans ce Groupe, pour leur active participation à ce travail. Madame SCHREINER et ses élèves m'ont gentiment accueilli dans leur classe : je les en remercie.

Gérard MATHIEU

Cette activité avait comme but (ou comme prétexte) de faire comprendre aux enfants d'un C.M. le fonctionnement de la preuve par 9. Plus précisément, il s'agissait d'étudier certaines propriétés des restes de division et d'en donner des images géométriques. Ce travail a pris le premier trimestre de l'année scolaire, mais il fut entrecoupé d'autres activités.

1. On rend des bonbons.

Nous indiquons ici quelques manipulations mettant en évidence les restes de division, et les nombres qui ont même reste lorsqu'on les divise par un nombre donné.

- Par exemple, les enfants de la classe portent chacun un numéro (disons de 1 à 24) et la maîtresse leur distribue des bonbons ; 1 au premier, 2 au deuxième, et ainsi de suite avec la règle suivante (cruelle pour l'enfant mais économique pour la coopérative) : chaque fois qu'un enfant peut rendre 5 bonbons, il le fait (et ainsi il en rend 10 s'il en a 12, 15 s'il en a 18) .

On voit ainsi apparaître, en comparant le nombre des bonbons qui restent à chaque enfant, au numéro de ce dernier, le tableau suivant :

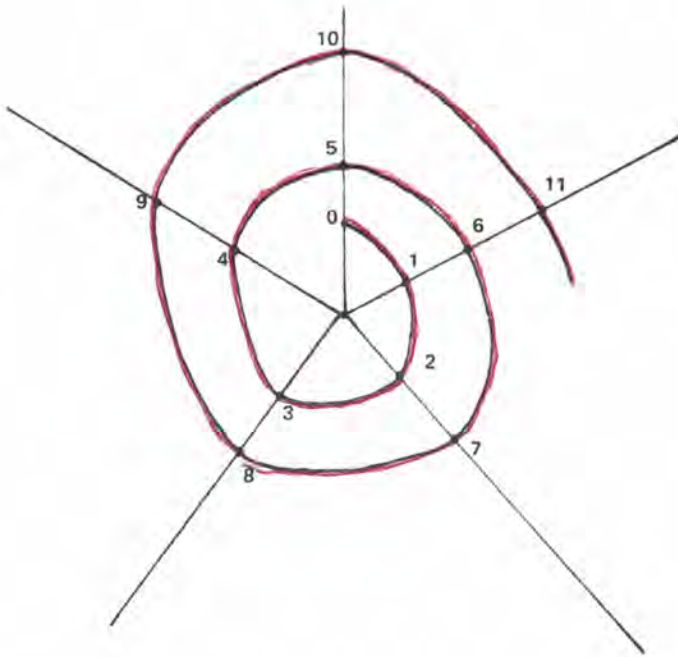
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	...
1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	...

Il peut être plus commode de disposer ainsi les nombres :

	0	1	2	3	4
I	5	6	7	8	9
	10	11	12	13	14
					

On fait ainsi apparaître des colonnes (0,5,10,15...) (1,6,11,16,...) formées par les numéros des enfants ayant 0, 1, 2,... bonbons.

- Le dessin suivant permet de mettre en évidence ces classes de nombres :



Sur chaque branche de l'étoile on trouve successivement (0,5,10,...) puis (1,6,11,...) , c'est-à-dire les classes trouvées plus haut.

- On peut bien sûr remplacer 5 par n'importe quel entier, assez petit pour que la manipulation soit possible. On obtiendra les tableaux suivants :

<u>avec 4 :</u>	0	1	2	3
II	4	5	6	7
	8	9	10	11
	12	13		

<u>avec 3 :</u>	0	1	2
III	3	4	5
	6	7	8
	9	10	11
	12		

- Rappelons aussi les jeux qui s'inspirent de "la course à 20" (ou "qui dira 20"). Deux enfants (ou deux équipes) jouent l'un contre l'autre. Le premier choisit un nombre parmi 1 et 2 , le second ajoute 1 ou 2 à ce nombre, le premier ajoute 1 ou 2 au nombre donné par le deuxième... . Le gagnant est le premier qui dit 20 .

Par exemple Rouge contre Noir , Rouge commence.

(1) , 3 , (5) , 6 , (7) , 8 , (10) , 11 , (13) , 14 , (15) , 17 , (19) , 20

et Noir gagne.

(Ou bien on va jusqu'à 43 et on choisit les nombres parmi 1, 2, 3 ou 4) .

La recherche d'une stratégie gagnante fait découvrir aux enfants que le gagnant est celui qui dira 17 , puis 14 , puis 11 ... c'est-à-dire celui qui commence gagne s'il dit : 2 (et s'il sait jouer !).

En remplaçant 20 par 21 ou 22 , on fait apparaître les différentes classes associées à 3 .

Dans l'autre exemple signalé, ce sont des classes de 5 qui interviennent.

- En admettant que ces manipulations se sont faites parallèlement à des travaux sur la division avec reste, il apparaît assez vite qu'une classe est formée par les nombres qui ont le même reste lorsqu'on les divise par un nombre donné (5 dans le jeu des bonbons).

Il peut être utile de numéroté les lignes et les colonnes des tableaux trouvés (en commençant par le numéro 0), ce qui donne, pour le tableau associé à 4 :

	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	4	5	6	7
2	8	9	10	11
3	12	13	14	15
4	16	17	18	19
...	...	...	...	...

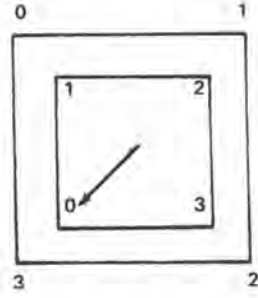
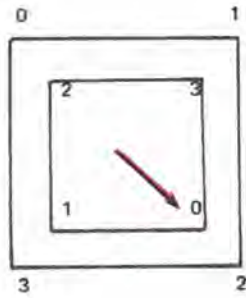
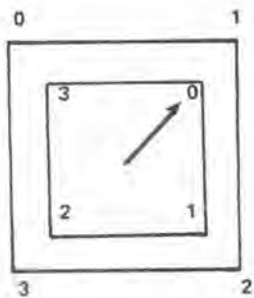
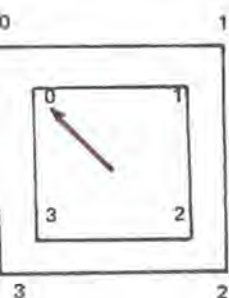
Dans le tableau, les nombres sont écrits ligne après ligne dans leur ordre naturel.

Le numéro de la ligne est le quotient, le numéro de la colonne est le reste dans la division par 4.

Ainsi $17 = 4 \times 4 + 1$.

2. On fait tourner des carrés.

Jusqu'ici on s'est contenté, par des méthodes variées, de faire apparaître des restes de division. On va maintenant essayer de les ajouter. Pour des raisons de commodité, on s'intéresse d'abord au 4. Les enfants disposent de deux carrés, l'un plus petit que l'autre, dont les sommets sont numérotés 0, 1, 2 et 3, ayant même centre et fixés l'un à l'autre par une agrafe parisienne. On découvre assez vite qu'il y a quatre positions possibles du petit carré par rapport au grand (les sommets correspondant aux sommets).



A partir de la position initiale, le petit carré a tourné successivement d' $1/4$ de tour, de $2/4$ de tour, de $3/4$ de tour, $4/4$ de tour, ce qui revient à ne pas tourner.

(Il ne s'est pas posé de problème sur la signification de $3/4$ de tour, ce qui paraît bien normal).

On remarque donc que, du point de vue de la position finale, $1/4$ de tour = $5/4$ de tour ou que $3/4$ de tour = $11/4$ de tour. On retrouve donc les colonnes du tableau II.

On peut maintenant "ajouter les restes", c'est-à-dire faire deux rotations successives du petit carré :

$$2/4 \text{ de tour} + 3/4 \text{ de tour} = 1/4 \text{ de tour}$$

et présenter les résultats obtenus dans le tableau suivant :

IV

	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Un tel tableau peut éventuellement troubler les enfants ($2 + 3 = 1$?). Ou bien 2 représente $2/4$ de tour et le problème est esquivé, ou bien on peut convenir d'écrire $\bar{2}$ au lieu de 2 (ou toute autre notation assez brève); de même on peut écrire $\bar{2} \oplus \bar{3}$ au lieu de $2 + 3$. Précisons que dans la classe où ce travail a été fait il n'y a pas eu de questions en ce sens.

On est pourvu maintenant :

- d'une addition sur les $1/4$ de tour,
- des colonnes du tableau II, chacune "représentant" une position du petit carré,
- d'une addition sur les nombres entiers.

Ces différents objets se comportent bien entre eux, en ce sens que :

$$\overline{48} = \overline{17 + 31} = \overline{17 + 31}.$$

Traduction : Faire $48/4$ de tour, c'est faire $17/4$ de tour suivis de $31/4$ de tour.

Deuxième traduction : Quand on divise 17 par 4, il reste 1, quand on divise 31 par 4 il reste 3, quand on divise 48 par 4 il reste 0. Par ailleurs, $1 + 3 = 4$ qui a pour reste 0 quand on le divise par 4. C'est-à-dire que,

dans un certain sens "les restes s'ajoutent", à condition de remplacer toute somme par son reste ($3 + 2$ est remplacé par 1) .

La lecture des tableaux tels que II rend assez évidente cette assertion.

Deux questions se posent alors :

- Que se passe-t-il si on remplace le carré par un autre polygone régulier ?
- On a ajouté les restes. Peut-on les multiplier ?

3. On généralise.

- La réponse à la première question est facile à trouver. Il suffit de construire des pentagones, des hexagones... (mais quels problèmes dans un CM . Ainsi, la construction de l'hexagone fut trouvée lorsqu'un enfant remarqua qu'un hexagone était formé de six triangles équilatéraux. Quant au pentagone, il fut construit plus ou moins à vue de nez, plus ou moins avec un rapporteur).

Quelques tables d'addition construites avec le support des polygones suffisent. Les enfants ne tardent pas à savoir les construire "in abstracto". Très précisément, dès qu'ils remarquent leur régularité : on passe d'une ligne à la suivante en décalant d'un rang. Outre qu'on peut toujours vérifier en faisant des divisions.

Exemples : Table d'addition du 5 et du 6 :

	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

- La réponse à la seconde question (comment multiplier) va être plus formelle. Il est difficile de multiplier des $1/4$ de tour ! Il est plus simple de remarquer qu'on avait une addition qui vérifiait des relations du type : $\overline{3} + \overline{2} = \overline{3+2}$.

On convient bêtement de définir une multiplication par :

$$\overline{3} \times \overline{2} = \overline{3 \times 2} .$$

C'est-à-dire, en prenant les classes de 5 (tableau I) :

$$\bar{3} \times \bar{2} = \bar{1}$$

$$\text{ou} \quad \overline{13} \times \overline{14} = \bar{3} \times \bar{4} = \overline{3 \times 4} = \overline{12} = \bar{2} \quad .$$

On construit ainsi les tables de multiplication de 5 et de 6 , par exemple :

	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	0	2	4
3	0	3	0	3	0	3
4	0	4	2	0	4	2
5	0	5	4	3	2	1

Ce travail n'est pas à vrai dire entièrement formel car on revient à la division, en partant du principe sympathique que les restes se multiplient.

Les enfants ont semblé assez enchantés par ces tableaux et y remarquaient des propriétés de régularité, de symétrie (par exemple : lien entre la ligne du 2 et celle du 4 dans la table des produits associée à 6 , de même dans la table du 9 , lien entre les lignes du 6 et du 3) .

4. On arrive au but.

La preuve d'une opération va consister en ceci : si $26 \times 65 = 1410$, a fortiori le reste de 26 multiplié par le reste de 65 doit être égal au reste de 1410 . Ici, reste s'entend : dans la division par un nombre donné. Ce nombre donné sera 9 en général. Mais on peut prendre d'autres entiers.

Ainsi, une preuve par 2 consisterait à remarquer que le produit de deux nombre pairs est pair sauf si l'un des deux est impair. Ceci parce que le reste dans la division par 2 d'un nombre pair est 0 , celui d'un nombre impair est 1 , et que $0 \times 0 = 0$ et $0 \times 1 = 1$.

Une preuve par 10 consiste en ceci : le reste d'un nombre dans la division par 10 est le chiffre des unités. Si on multiplie entre eux deux nombres, les chiffres des unités doivent être multipliés pour donner le chiffre des unités du résultat (ce qui est bien clair sur l'algorithme de la multiplication).

Bien entendu, ces preuves n'en sont pas au sens strict : car $26 \times 65 = 1002$ est correct du point de vue de la preuve par 2, mais pas par 10. Par contre, $26 \times 65 = 1410$ est correct pour les preuves par 2 et 10 ($6 \times 5 = 0$).

Dans la preuve par 9, le processus est le même. Son intérêt est qu'on a un procédé simple pour calculer le reste d'un nombre dans la division par 9 : c'est de faire la somme de ses chiffres.

On le voit clairement sur quelques exemples. On peut aussi le montrer (les barres veulent dire : reste dans la division par 9) :

$$\overline{10} = \overline{1}.$$

Donc
$$\overline{10 \times 10} = \overline{100} = \overline{10} \times \overline{10} = \overline{1}$$

et
$$\overline{1000} = \overline{100} \times \overline{10} = \overline{1} \quad \text{et ainsi de suite. Donc :}$$

$$\begin{aligned} \overline{3624} &= \overline{3 \times 1000} + \overline{6 \times 100} + \overline{2 \times 10} + \overline{4} \\ &= \overline{3} \times \overline{1} + \overline{6} \times \overline{1} + \overline{2} \times \overline{1} + \overline{4} \\ &= \overline{3 + 6 + 2 + 4} = \overline{15} = \overline{10 + 5} = \overline{6}. \end{aligned}$$

On voit au passage la raison pour laquelle on peut remplacer 3624 par 24 : retrancher un multiple de 9 ne change pas le reste.

Donc $26 \times 65 = 1410$ s'écrit $\overline{8} \times \overline{2} = \overline{6}$ et l'opération est fautive.

Mais $26 \times 65 = 1960$ a une preuve correcte par 2, par 10, par 9 et cependant c'est faux.

Remarque : Ce que l'on voit au passage, ce sont les caractères de divisibilité : un nombre est divisible par 9 si son reste est 0 quand on le divise par 9, donc si la somme de ses chiffres est multiple de 9.

De même, on trouve le caractère de divisibilité par 3 (de manière analogue), par 4 en utilisant le fait que $\overline{100} = \overline{0}$ (dans la division par 4). Donc 6546 n'est pas divisible par 4 puisque 46 ne l'est pas.

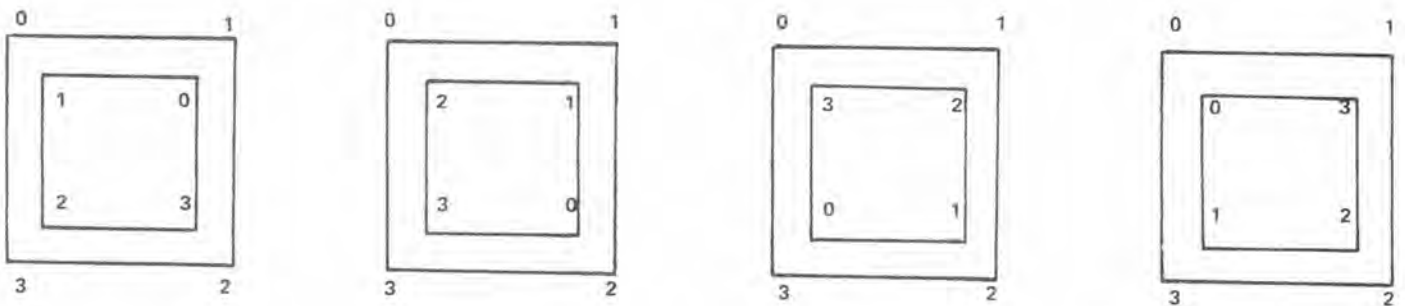
Un problème moins simple est le suivant : tel nombre est divisible par 2 et 3 ; l'est-il par 6 ? Un nombre est divisible par 15 et 9 ; l'est-il par 9×15 ? Ou bien : peut-on inventer une preuve par 90, facile à mettre en oeuvre ? Est-il possible de faire une preuve par 11 ? (oui) ; et par 7 ? (non, à moins de calculer effectivement les restes, ce qui est sans doute plus long que de refaire la multiplication).

On pense avoir ainsi supprimé le caractère un peu magique de la preuve par 9. Toutefois, l'intérêt essentiel de ce travail est sans doute ailleurs. Car des élèves ont été conduits au passage à réviser les tables de multiplication, à reconnaître les caractères de divisibilité, à observer et à construire des polygones : et on a été conduit à leur parler d'angles. Il y a eu aussi l'observation des tableaux, les remarques et les questions qu'elle a soulevées.

5. Quelques idées pour poursuivre.

Les activités mentionnées plus haut peuvent ne pas s'arrêter là. Citons deux idées pour aller plus loin.

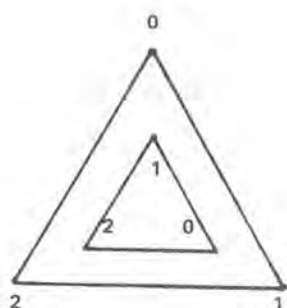
- A) • On a cherché toutes les manières possibles de recouvrir un carré fixe par un carré mobile en faisant tourner ce dernier autour de leur centre commun : d'où quatre positions d'un carré par rapport à l'autre. En ne faisant aucune restriction, y-a-t-il d'autres positions ? Oui, à condition de retourner le carré mobile ; on fait apparaître quatre nouvelles positions :



Question : Comment passer, avec le moins de manipulations possible, d'une position à une autre ?

- Même problème, le carré est remplacé par un rectangle.
- Même problème avec un triangle équilatéral.

On peut dans le dernier cas remarquer qu'une position du triangle mobile par rapport à l'autre étant repérée par un tableau du type :



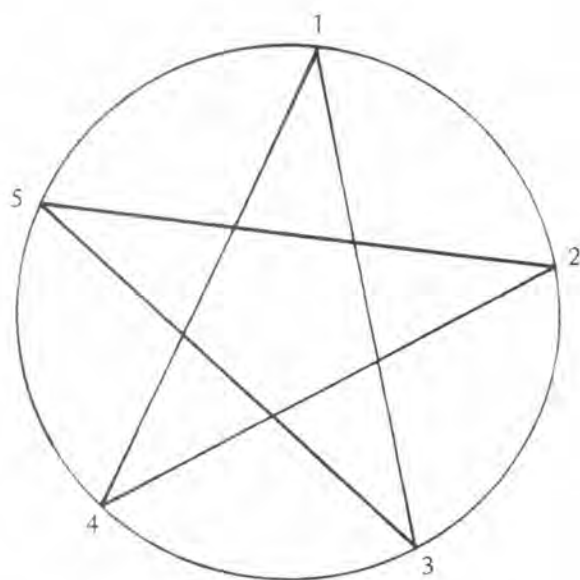
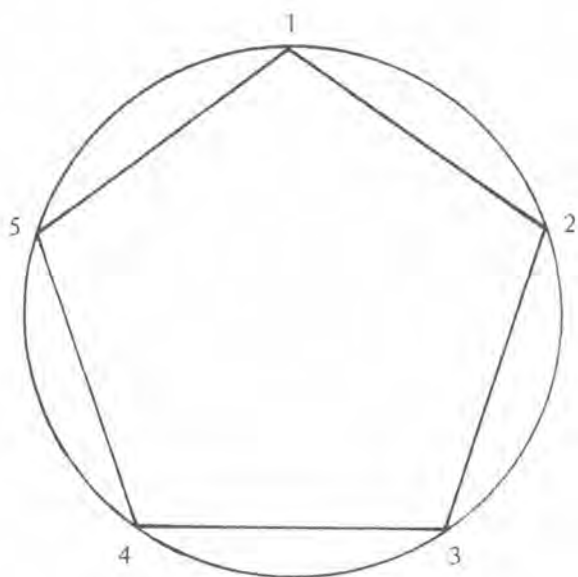
0	1	2
1	0	2

les six tableaux possibles que l'on peut construire correspondent tous à une position d'un triangle par rapport à l'autre.

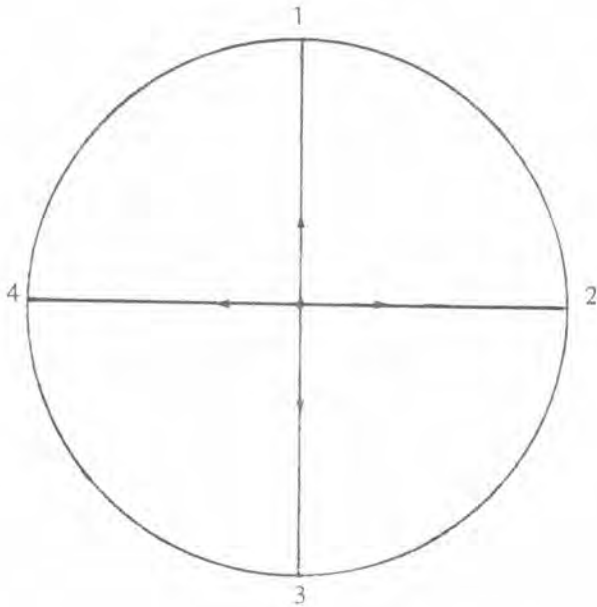
- Quels sont les tableaux qui correspondent aux rotations de $1/3$ ou $2/3$ de tour par rapport à la position initiale ?
- Combien y-a-t-il de tableaux de ce genre avec quatre nombres. Lesquels correspondent à une position du carré mobile ?

B) On construit des étoiles.

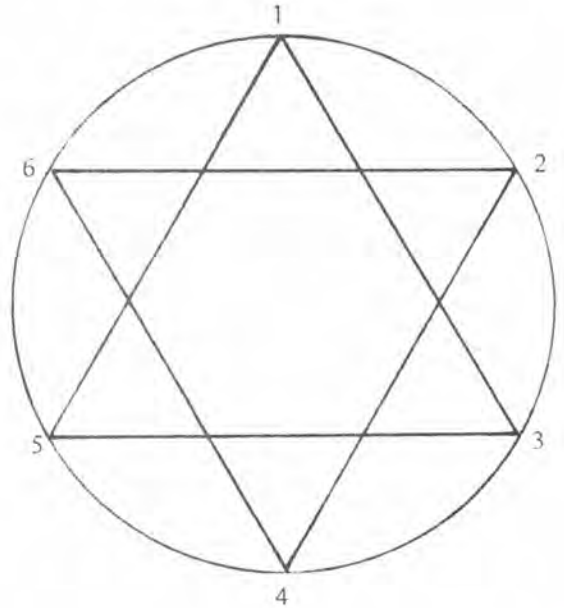
Au cours d'une des manipulations précédentes, on a construit - tant bien que mal - un pentagone. C'est-à-dire que 5 points étant placés sur un cercle, on a joint le premier au second, celui-ci au troisième... . Que se passe-t-il si on joint les sommets deux par deux : c'est-à-dire le premier au troisième, le troisième au cinquième, celui-ci au deuxième ? On obtient une étoile. Et si on joint de trois en trois, on obtient la même étoile, parcourue dans l'autre sens.



- Que se passe-t-il si on remplace le pentagone par un carré, par un hexagone ?

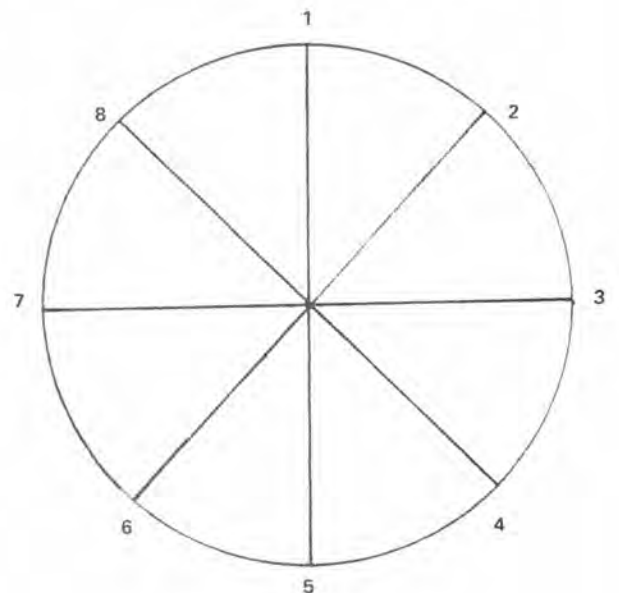
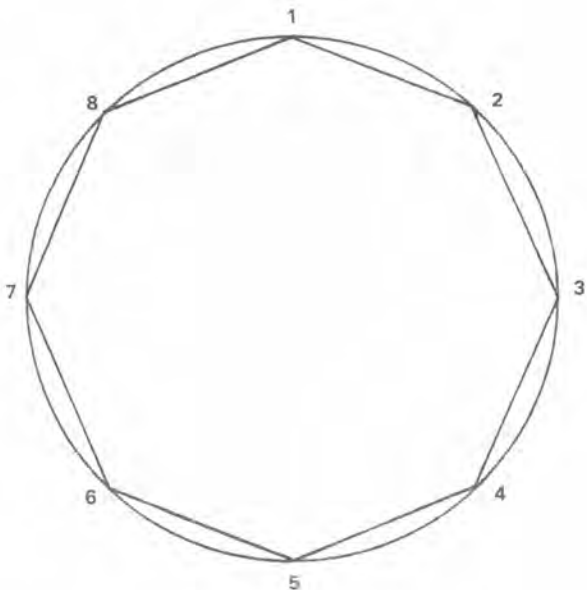


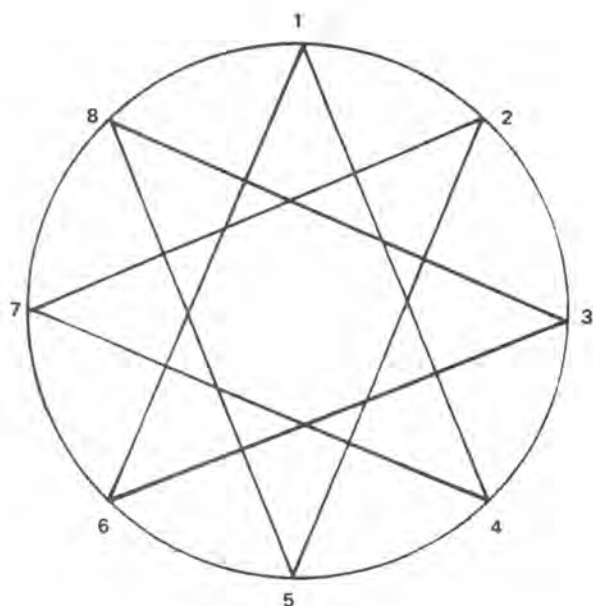
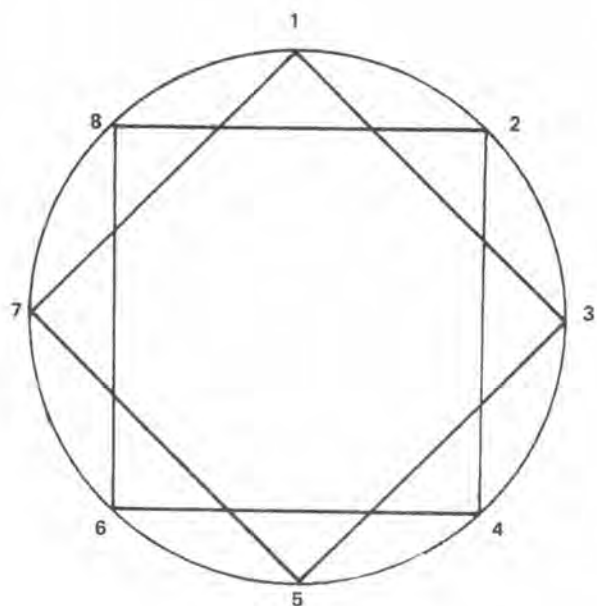
une vilaine "étoile"



une étoile en "2 morceaux"

- Avec l'octogone, on retrouve les trois types de figures ci-dessus :
une vilaine étoile, une étoile en deux morceaux (deux carrés), une "vraie" étoile.





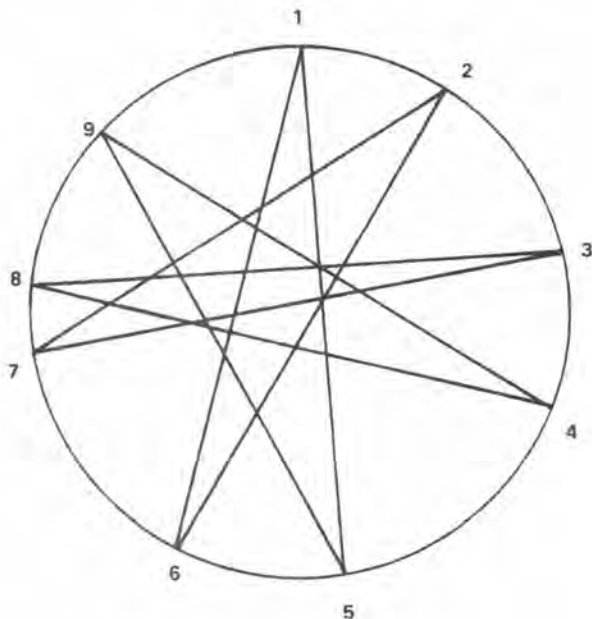
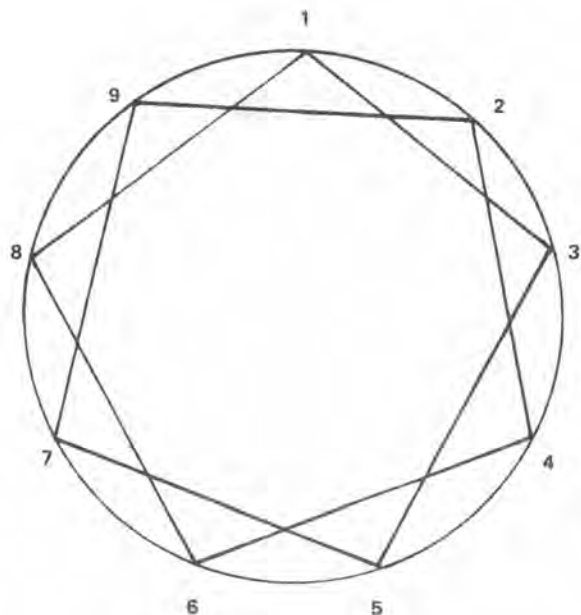
Question : Quel est le lien entre ces étoiles et ce qui précède ?

Réponse : Regardez les tables de multiplication du 5 , du 4 , du 8 ...

Question : Mais encore ?

Réponse : Soit la table de 8 . Dans la ligne du 3 , du 5 , du 1 , du 7 , il n'y a pas de zéro (sauf dans la colonne du zéro) . Dans la ligne du 2 , du 4 , du 6 , il y a plusieurs zéros...

Dans la table de multiplication des restes de 9 , il n'y a qu'un zéro dans la ligne du 2 et du 4 : donc 2 vraies étoiles à 9 branches. Et il n'y en a pas d'autres.



On peut multiplier ces constructions en remarquant qu'il n'est pas nécessaire que les polygones soient réguliers : il suffit de placer les sommets sur un cercle pour dessiner des étoiles (et le cercle est même de trop si on veut). Peut-être pourra-t-on arriver à répondre à des questions du genre : y-a-t-il une étoile à 18 branches obtenue en sautant les sommets de 7 en 7 ?

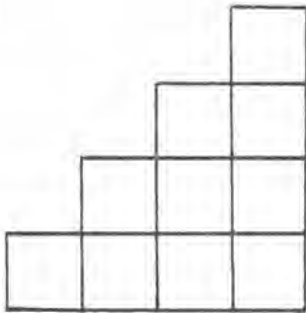


QUELQUES ACTIVITES DE DENOMBREMENT

Les sommes $1 + 2 + 3 + \dots + n$.

On s'intéresse tout d'abord aux sommes du type $1 + 2 + 3 + 4 + 5$.
Dans quelles situations se présentent-elles ? Comment les calculer ?

- On construit un escalier de 4 marches en empilant des cubes.

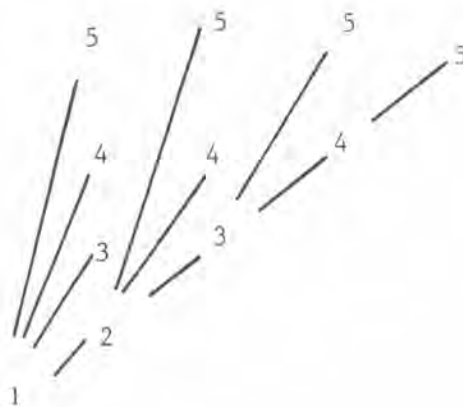


Combien a-t-il fallu de cubes ?

- Dans une école, il y a 5 maîtresses. Tous les matins, chaque maîtresse serre la main de toutes les autres. Combien de poignées de mains en tout ?
- Combien y-a-t-il de matchs dans le tournoi des Cinq Nations ?

Ces situations peuvent être représentées de différentes manières :

Par un arbre :

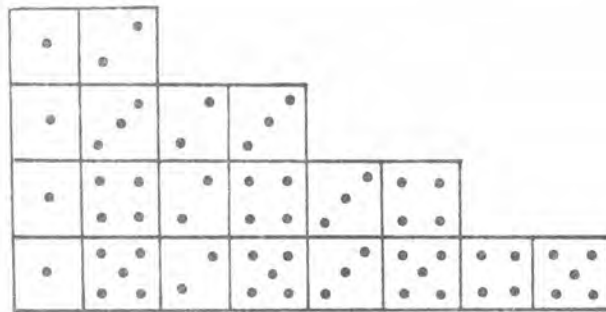


Par un tableau :

	1	2	3	4	5
1					
2	x				
3	x	x			
4	x	x	x		
5	x	x	x	x	

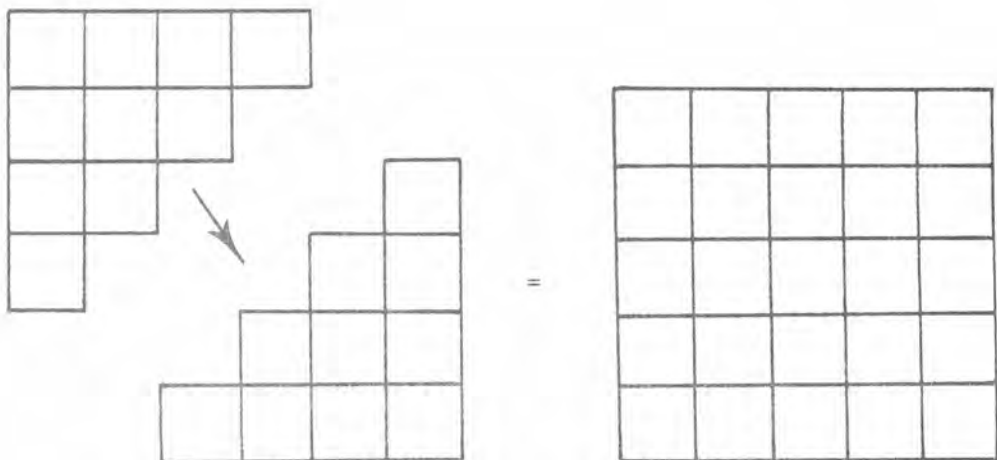
On retrouve le problème de l'escalier, posé au début.

Une autre façon de présenter ce tableau consiste à prendre tous les dominos ne contenant ni 0 ni 6 ni les doubles et à les ranger rationnellement. On arrive par exemple à :



Calcul de ces sommes :

- On peut le faire en prenant deux escaliers à quatre marches et en les juxtaposant comme suit :



$$(1 + 2 + 3 + 4) \times 2 = 5 \times 4$$

et par exemple :

$$1 + 2 + 3 + \dots + 9 = \frac{9 \times 10}{2} = 45 \quad .$$

- Une autre méthode a été exposée dans une émission de la RTS (jeux de ballons). Pour calculer $1 + 2 + 3 + 4 + 5$, on dispose de marques alignées dans la cour à une distance de 1 m les unes des autres :



Deux équipes de 5 joueurs (A et B) se font face. En A, il y a 5 ballons. Un joueur A prend le premier ballon, va le déposer en 1. Un joueur B vient le chercher pour le mettre dans le panier de son équipe. Puis le deuxième joueur A prend un deuxième ballon, va le déposer en 2. Vient le chercher un joueur de B. Ceci, jusqu'à épuisement des 5 ballons.

Question : Combien de mètres les joueurs de A ont parcouru en portant un ballon ?

A	
1er joueur	1 m
2e joueur	2 m
⋮	
5e joueur	5 m

B	
1er joueur	5 m
2e joueur	4 m
⋮	
5e joueur	1 m

On a donc $1 + 2 + 3 + 4 + 5$.

Mais si on met en face les distances parcourues par les joueurs de B portant un ballon, on voit apparaître le tableau A écrit de bas en haut. Il y a eu 2×5 joueurs. Les joueurs n° 1 ont parcouru 6 m en tout, de même les joueurs n° 2 ...

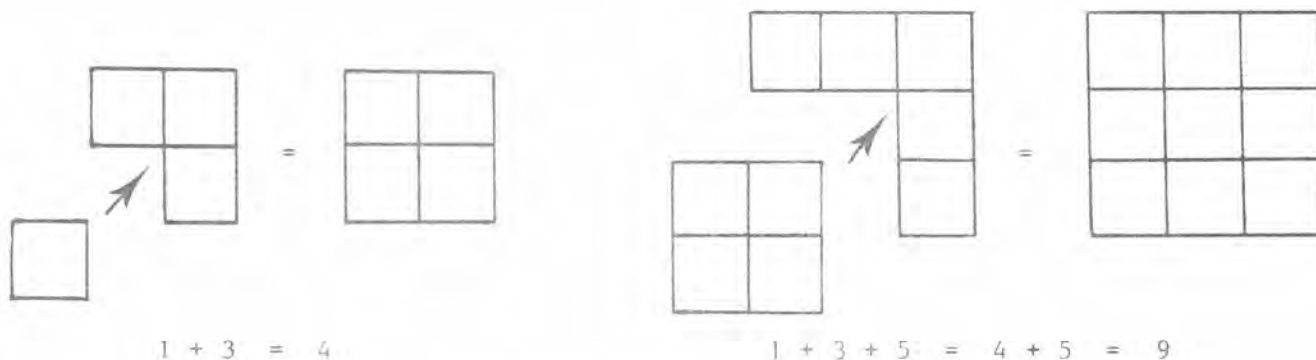
Donc $(1 + 2 + 3 + 4 + 5) \times 2 = 6 \times 5$.

Variante :

Comment compter $1 + 3 + 5 + 7 + 9$?

On peut reprendre le jeu de ballons en espaçant les repères de 2 m.

On peut aussi remarquer que :



et de même $\underbrace{1 + 3 + 5 + 7}_{4 \text{ premiers nombres impairs}} = 4^2 = 16$.

Nombres triangulaires et nombres pyramidaux :

On range des billes de la manière suivante :



et on retrouve les nombres $1, 1 + 2, 1 + 2 + 3, \dots$; ce sont les nombres triangulaires (on voit bien pourquoi).

On range maintenant les billes pour faire des pyramides à base triangulaire :



Si la pyramide est formée de 4 "tranches", on a un nombre de billes égal à $1 + 3 + 6 + 10$, c'est-à-dire à la somme des 4 premiers nombres triangulaires.

(La formule générale est : si la pyramide a n tranches, elle contient $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ billes). On peut procéder de même avec des pyramides à base carrée, on obtient successivement $1, 1 + 4, 1 + 4 + 9$, c'est-à-dire la somme des premiers carrés.

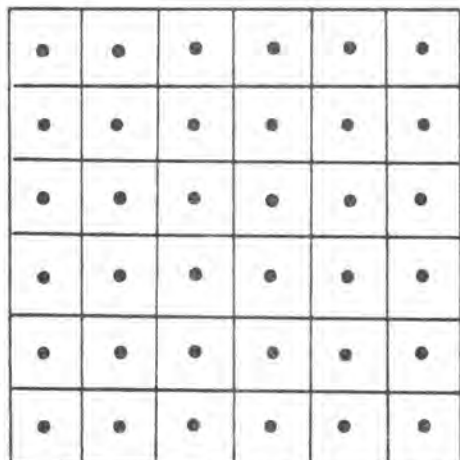
PLANCHE A CLOUS ET FRACTIONS

Cette séquence a constitué une bonne part du travail du troisième trimestre. Son but est d'introduire la notion de fraction à partir de la mesure des surfaces. La planche à clous décrite plus bas a été à la base de toutes les manipulations. Précisons que les enfants n'avaient alors jamais vu un tel matériel. Par ailleurs, les enfants avaient été conduits à rencontrer des opérateurs à propos d'un problème assez succulent consistant à fabriquer des crêpes pour deux classes à partir de recettes familiales. D'où des règles de trois à foison. Il en était resté pour le moins assez d'agilité dans la manipulation des suites d'opérateurs multiplicatifs sans qu'un travail approfondi de nature conceptuelle ait été effectué à ce sujet. Comme on le verra, les fractions ont été introduites de manière tout à fait indépendante. Le lien avec les opérateurs n'a été reconnu qu'au moment de la multiplication des fractions.

La planche à clous :

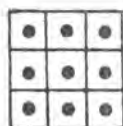
Cet objet, connu aussi sous le nom de géoplan, est suffisamment en vogue depuis peu pour qu'on en trouve des descriptions un peu partout. Citons seulement la référence de base : WHEELER - "Mathématiques dans l'enseignement élémentaire" - OEDL (et précisons que si un maître avait envie d'acheter un seul livre de mathématiques, ce devrait être celui là).

On l'aura deviné, une planche à clous c'est une planche plantée de clous. Plus précisément, une feuille de contreplaqué de 8 ou 10 mm d'épaisseur, de format en général carré, est plantée de pointes (tête homme, de 30 mm) qui dessinent les sommets d'un quadrillage dont les mailles ont 3 ou 4 cm de largeur. Le nombre de pointes, donc la dimension du carré, est variable. On peut avoir des activités intéressantes dans les petites classes avec des planches à 9 clous (donc de 9 cm de large). Le modèle utilisé par nos élèves était planté de 36 pointes. La disposition des pointes latérales (à 1,5 cm du bord) permet d'ailleurs la juxtaposition de plusieurs planches si besoin est.

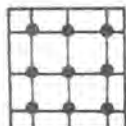


Ci-joint est dessiné un modèle de planche tel qu'il est indiqué par WHEELER. On a remarqué que le quadrillage ainsi marqué pouvait, dans un premier temps, introduire des confusions avec le quadrillage dont les sommets sont les pointes. C'est pourquoi on suggère de disposer de caches de papier pouvant se poser sur la

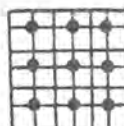
planche et pourvus (ou non) de lignes, de façon à disposer de 4 modèles différents :



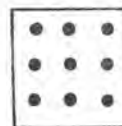
I



II



III



IV

Dans les manipulations décrites plus bas, c'est surtout des modèles II et IV que l'on s'est servi.

La première activité que permet la planche à clous, est sa fabrication par les élèves d'un CM (comment, sans trop se servir d'un double décimètre, construire 10 planches ?).

Utilisation de la planche :

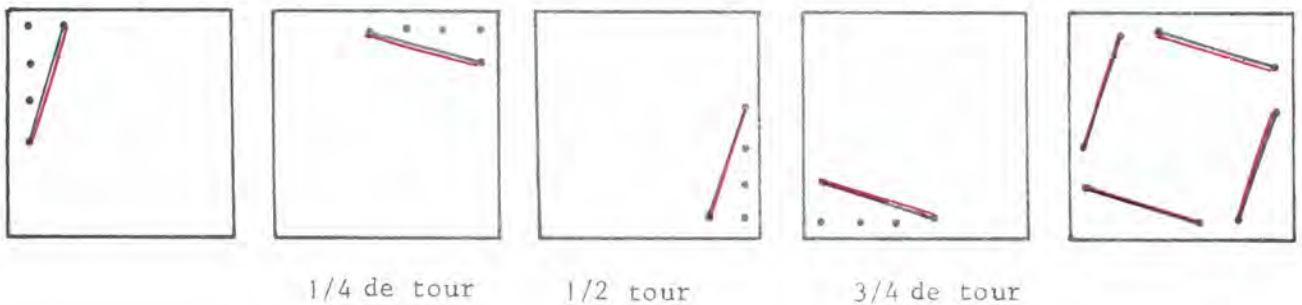
La planche est prête à l'emploi dès qu'on lui adjoint des élastiques de longueurs et couleurs variées. Tout cela étant distribué aux enfants, on ne tarde pas, comme le remarque WHEELER, à entendre le ronflement caractéristique des élastiques qui vibrent. Avant de décrire quelques activités directement liées à la notion de mesure d'une surface et de fractions, citons, brièvement, quelques manipulations (dont la plupart ont de riches prolongements) qui permettront aux enfants de se familiariser avec le matériel :

● Faire des figures quelconques : ce sont toujours des polygones. Comment distinguer les polygones concaves des polygones convexes ?

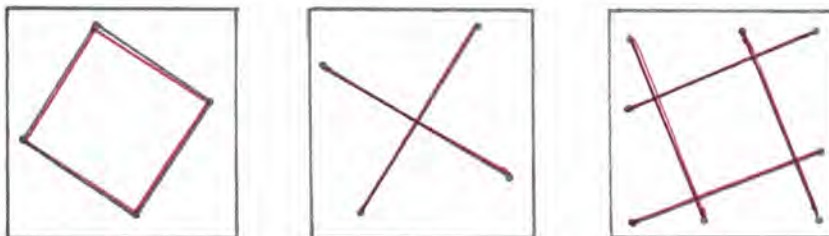
● Pour chaque figure obtenue, compter les côtés, les sommets, observer les angles.

● Un élastique étant tendu entre deux clous, comment va-t-il se placer lorsqu'on fait faire à la planche $1/4$ de tour ou $1/2$ tour ? Essayer de construire où va aller l'élastique, sans tourner la planche. Si on fait quatre fois $1/4$ de tour, quelles vont être les positions successives de l'élastique ? Si on les marque toutes sur la même planche, quelles sont les différentes figures que l'on peut obtenir ?

Exemple :



On peut aussi obtenir des figures semblables aux suivantes :

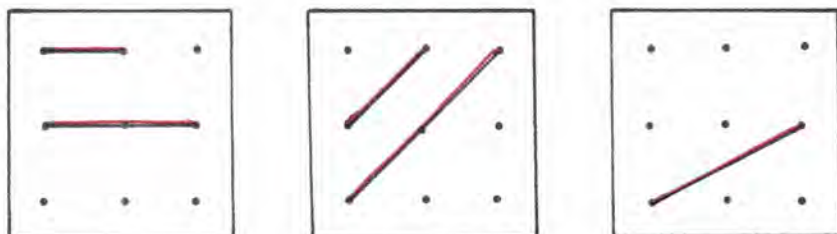


Comment savoir a priori (c'est-à-dire en observant la position initiale de l'élastique) si l'on va obtenir une ligne fermée ? Y aura-t-il toujours 4 lignes ? Peut-il y en avoir 3 ?

● Sur une planche à 9 clous, construire tous les carrés, tous les triangles, tous les rectangles... Compter-les (en distinguant ou non ceux qui sont déduits l'un de l'autre par une rotation).

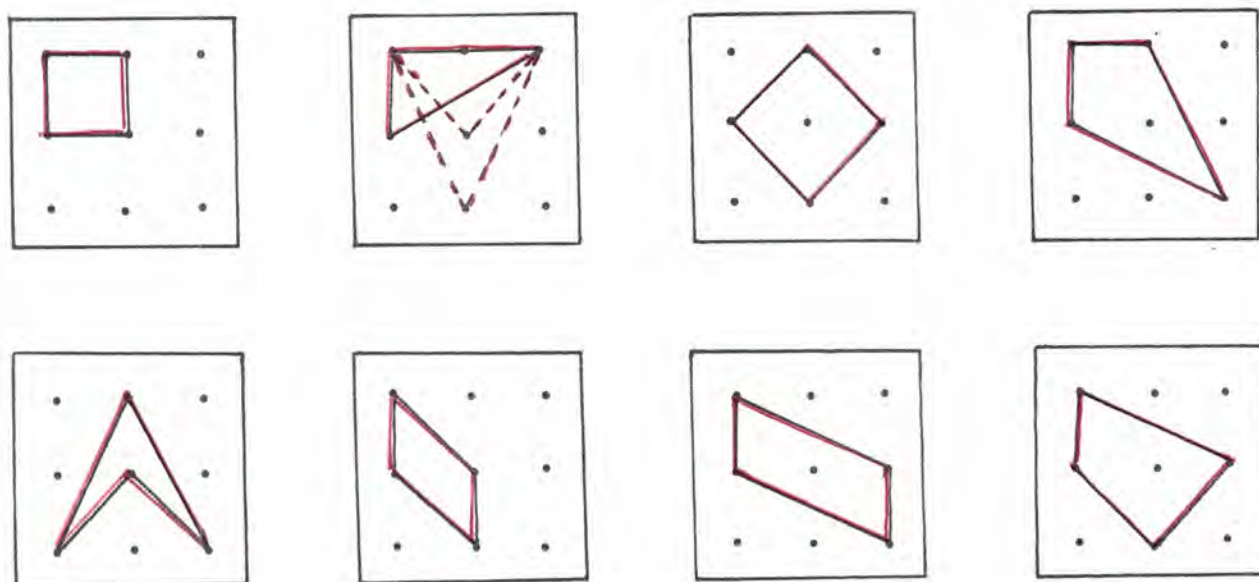
● Sur une planche à 9 clous, combien y-a-t-il de longueurs distinctes pour un élastique tendu entre deux pointes ?

(Réponse : 5)



Même question avec une planche à 4 clous.

● Construire les polygones en contact avec seulement 4 clous (sur une planche à 9 clous).



● Un élastique étant tendu, construire des triangles rectangles, des carrés, des parallélogrammes, des trapèzes... dont cet élastique est un des côtés.

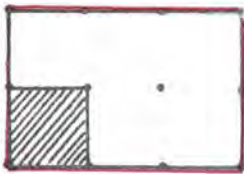
● S'entraîner à reproduire les résultats obtenus sur papier quadrillé...

Etant donné que toute personne pourvue d'une planche à clous et d'une boîte d'élastiques peut imaginer cent autres activités, nous cesserons ici cette liste et nous nous limiterons dans la suite à ce qui nous intéresse directement : mesure et fractions.

Mesure des surfaces :

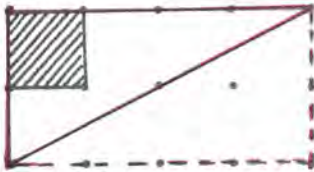
On commence par mesurer des surfaces avec l'unité qui s'impose, c'est-à-dire l'aire du carré de base du quadrillage.

Les premiers objets auxquels on va s'intéresser seront des rectangles et des carrés "bien situés" (c'est-à-dire avec des côtés parallèles aux lignes et aux colonnes).



$$\text{aire du rectangle} = 2 \times 3 = 6$$

● On peut s'intéresser ensuite à des triangles rectangles "bien situés" eux aussi, qui sont donc des moitiés de rectangles.



$$\text{aire du triangle} = \frac{2 \times 3}{2}$$

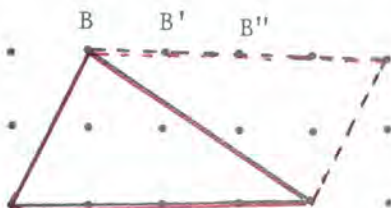
● Aire d'un parallélogramme dont deux côtés sont parallèles à un bord du carré : très classiquement, on fait intervenir un rectangle et deux triangles rectangles. D'où :



$$\text{aire} = \text{Base} \times \text{Hauteur}$$

● Aire d'un triangle dont un côté est parallèle à un bord du carré (on le considère comme un demi-parallélogramme). On peut remarquer que si on déplace

le sommet B en B' , B'' (sur une ligne parallèle à la base opposée) l'aire ne change pas.

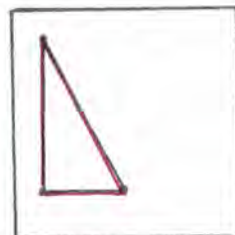
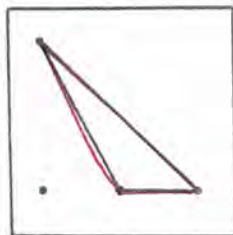
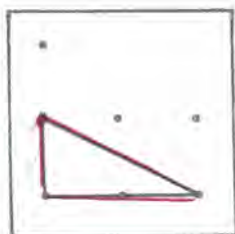


Les enfants pourront avoir d'autres idées, par exemple considérer le triangle ci-dessus comme réunion de deux triangles rectangles :



ou bien ce triangle est "la moitié" d'un rectangle...

• Sur une planche à 9 ou 16 clous, construire tous les triangles d'aire 1 (avec un côté parallèle à un bord du carré) : par exemple :

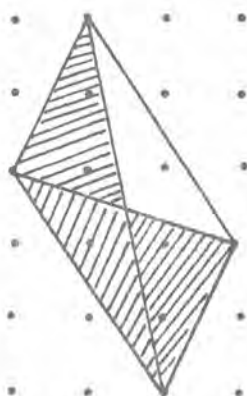


Essayer de découvrir lesquels, parmi ces triangles, sont superposables (s'introduisent les problèmes de superposition après symétrie).

• Quelle est la plus petite aire possible pour un triangle ?

• On peut aussi s'intéresser à calculer l'aire d'un triangle situé de manière quelconque sur la planche. Les hauteurs seront moins apparentes, bases et hauteurs auront des longueurs accessibles seulement avec le double décimètre, bien que les aires soient toujours des nombres entiers ou des demi-entiers.

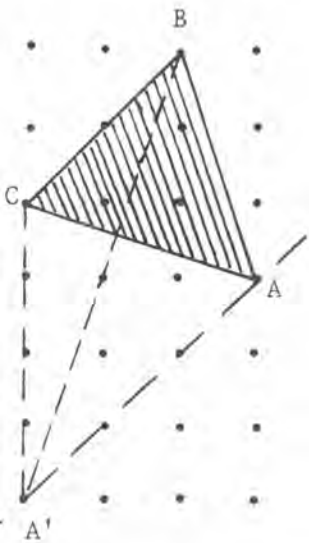
On pourra décomposer le triangle en réunion de triangles rectangles. On pourra aussi remarquer (comme on l'a fait ci-dessus pour les triangles bien placés) que l'aire ne change pas quand on déplace un sommet parallèlement au



côté opposé. Ce point résulte de l'observation du parallélogramme qui est partagé en deux triangles égaux par chacune des deux diagonales.

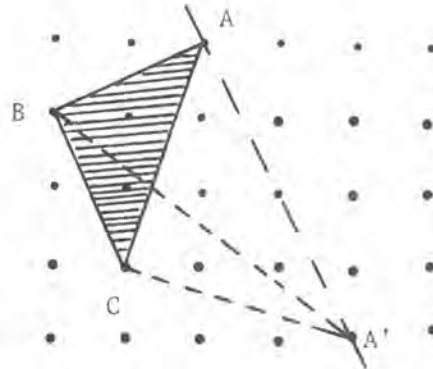
Pour des manipulations de ce type, on essaiera de se ramener au cas d'un triangle bien placé.

Exemple :



On transporte A en A' (avec AA' parallèle à BC)
 $\text{Aire} = \frac{2 \times 4}{2}$

ou bien

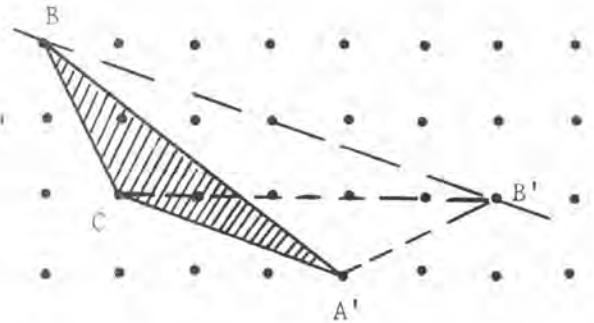


On transporte A en A' (AA' parallèle à BC)

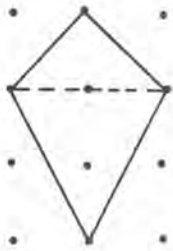
$$\begin{aligned} \text{Aire } ABC &= \\ &= \text{Aire } BCA' \end{aligned}$$

Puis on transporte B en B' (avec BB' parallèle à CA')

$$\begin{aligned} \text{Aire } BCA' &= \\ &= \text{Aire } BC'A' = \frac{5}{2} \end{aligned}$$



• Reprendre les figures en contact avec 4 clous. Calculer leurs aires (si possible). Quelles remarques peut-on faire ? (en regardant le nombre de clous à l'intérieur de la figure).



$$\text{Aire} = 1 + 2 = 3$$



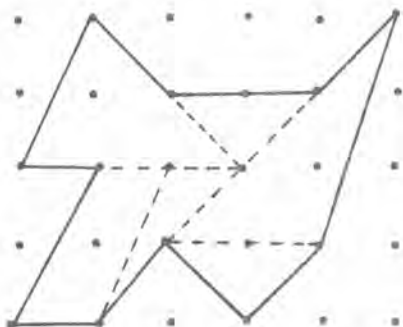
$$\text{Aire} = 4$$



$$\text{Aire} = 3 - 1 = 2$$

• Construire des figures formées de 6 carrés unités, ou dont l'aire est six fois celle d'un carré unité.

• Calculer l'aire de figures plus ou moins compliquées :



On peut remarquer que l'aire est égale à :

$$\frac{p}{2} + q - 1$$

où p désigne le nombre de clous en contact avec l'élastique - et pas seulement les sommets - et q est le nombre de clous à l'intérieur du polygone dessiné.

Dans l'exemple, l'aire est donc 11, résultat que l'on peut trouver en décomposant la figure en triangles ou parallélogrammes bien situés.

On remarquera que, pour l'étude des fractions, les rectangles et les triangles sont bien suffisants, de sorte que l'on peut négliger certains problèmes d'aires si on les juge trop compliqués.

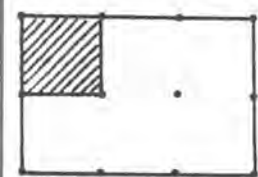
Les fractions :

Les fractions vont être liées à des problèmes de changement d'unités. Par exemple, il y a - cf. la description de la planche à clous - deux unités naturelles, l'une étant le quart de l'autre. On prendra aussi n'importe quel rectangle comme unité. Pour ne pas compliquer inutilement les situations, on se limitera à des unités rectangulaires.

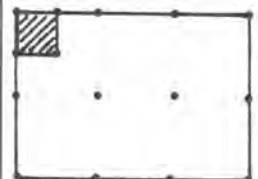
On retrouve ainsi le vieux problème des "parts de gâteau" avec de sérieux avantages : il est plus facile de prendre une fraction de rectangle (en le choisissant bien) qu'une fraction de cercle, les fractions supérieures à 1 auront une existence évidente. Et, évidemment, les manipulations seront effectives, ce qui était sans doute rarement le cas lorsqu'il s'agissait de gâteau !

Les premières manipulations :

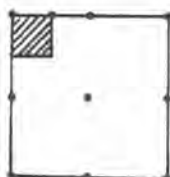
On mesure l'aire d'un rectangle avec l'une ou l'autre des deux unités carrées "naturelles". Dans un premier temps, il est sans doute préférable d'avoir des mesures qui soient des entiers.



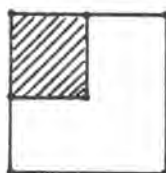
Aire = 6



Aire = 24
= 6×4



Aire = 16

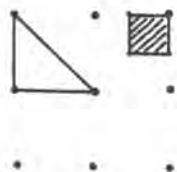


Aire = 4 = $16 : 4$
= $\frac{16}{4}$

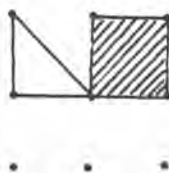
Sur tous les dessins qui suivent, on a hachuré 1'unité.

On peut remarquer (si les décimaux sont connus) le lien entre $1/4$ - notion que les enfants connaissent à peu près - et 0,25, quotient de 1 par 4 dans les décimaux.

Il est naturel de passer à des aires correspondant à des divisions non exactes avec la règle suivante : si l'unité est remplacée par une unité quatre fois plus grande, l'aire est "divisée" par 4 :



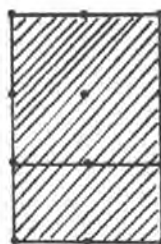
Aire = 1

Aire = $\frac{2}{4}$

De manière analogue :



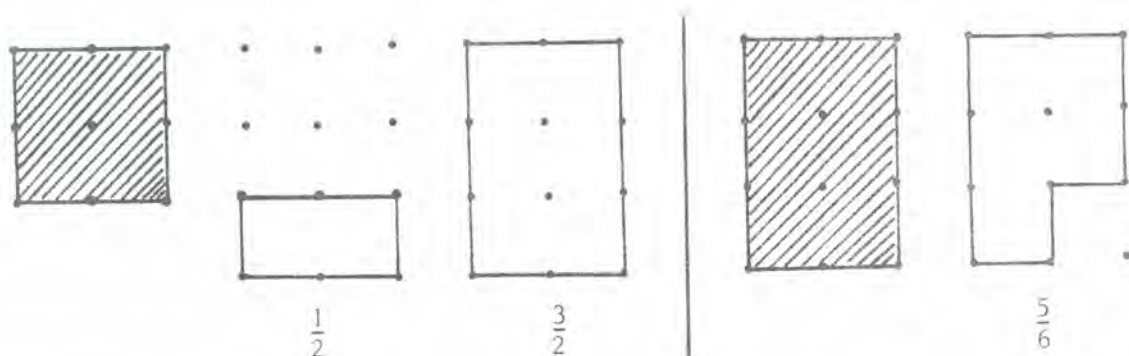
Aire = 3

Aire = $\frac{1}{3}$

Le rédacteur a systématiquement pratiqué des abus de langage. Chaque dessin devrait se lire : "si on prend comme unité le rectangle hachuré, le polygone dessiné en rouge a une aire égale à" .

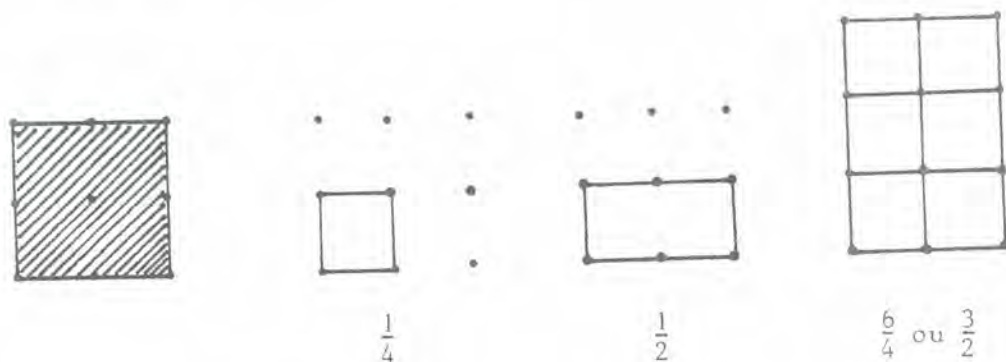
• On peut ensuite inverser le problème : construire un rectangle dont l'aire soit $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$ de celle d'un rectangle unité que l'on peut construire librement.

• Simultanément, ou peu de temps après celà, on fait aussi intervenir des fractions plus grandes que 1 (il n'est pas question encore de comparer deux fractions entre elles mais il va de soi que "plus grand" ou "plus petit" que l'unité sont des notions évidentes.



Simplification des fractions :

On aura pu remarquer qu'une unité étant choisie, une aire peut se mesurer avec des fractions différentes :

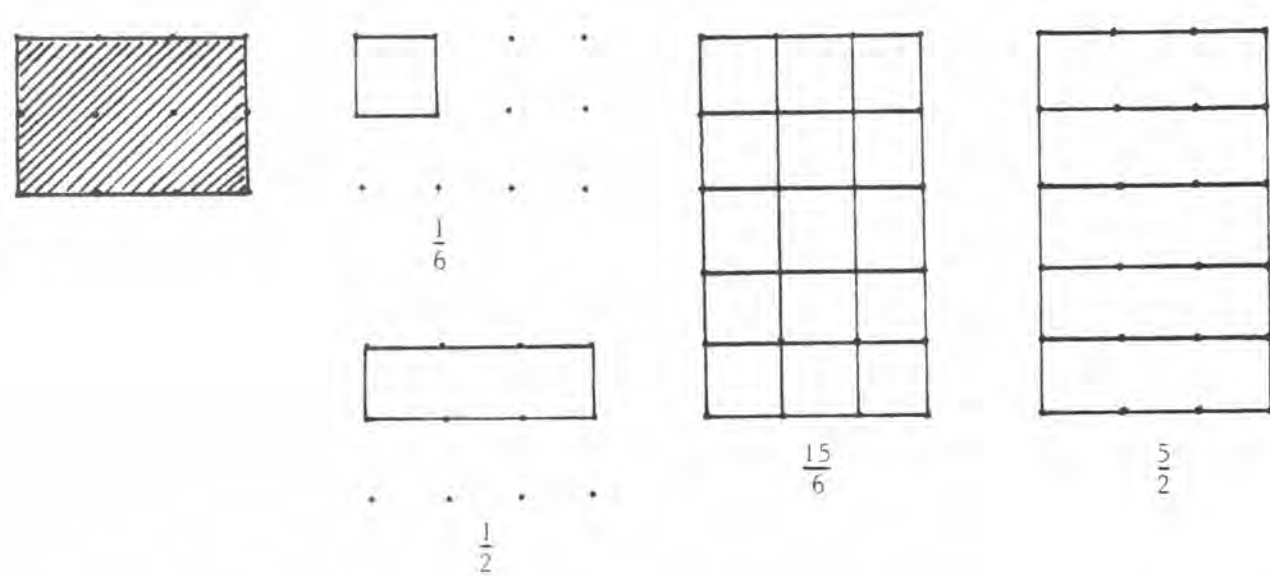


On doit donc décréter que $6/4 = 3/2$, c'est-à-dire que $6/4$ et $3/2$ apparaissent comme deux écritures différentes du même objet. [Si on le désire, on pourra écrire que $6/4$ est équivalent à $3/2$].

Le problème qui se pose à nous est le suivant :

Soit une fraction : peut-on la rendre "plus simple" , c'est-à-dire lui donner un numérateur et un dénominateur plus petits ? (Les mots numérateur et dénominateur peuvent être ou non introduits, et, s'ils le sont, à un moment ou à un autre : c'est affaire d'appréciation du maître).

Le problème est de construire un polygone d'aire $\frac{15}{6}$, par exemple, et de le couper avec le moins de morceaux possibles :

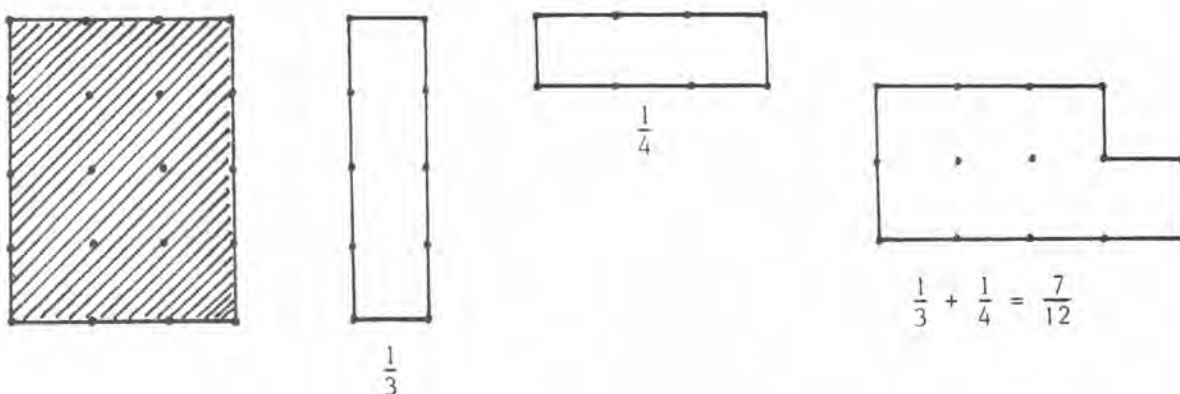


La règle qui permet de simplifier deux fractions, par division du numérateur et du dénominateur par un même nombre, doit pouvoir être trouvée avec quelques manipulations de ce genre.

Opérations sur les fractions -

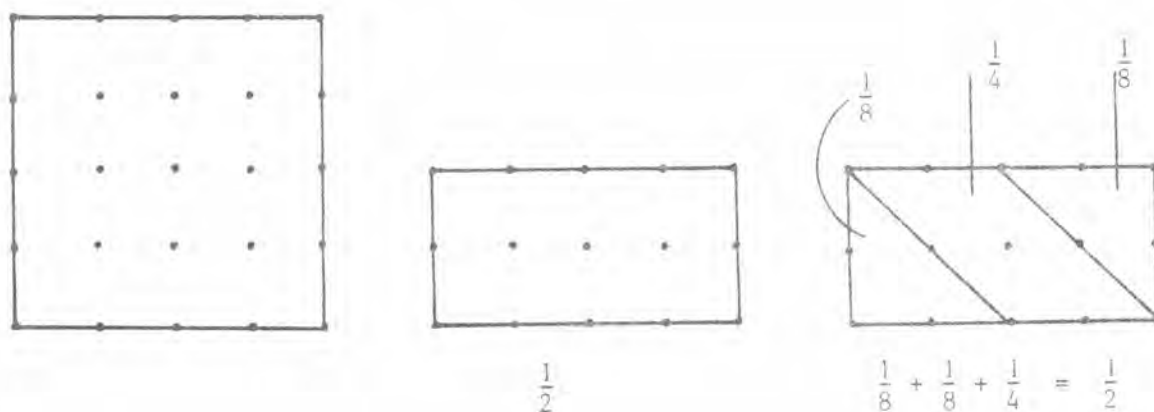
Somme de deux fractions :

Sans entrer dans des détails superflus, indiquons une manipulation-type qui donne un sens à la somme de deux fractions :



Le problème est bien entendu de trouver une unité convenable par rapport à laquelle il soit simple de "représenter" les deux fractions. C'est le problème de la "réduction au même dénominateur". On peut remarquer qu'une fraction telle que $7/4$ est représentable sur la planche à clous dès que l'unité contient 4 carrés de base (ou 1 carré de base si on choisit de travailler avec le quadrillage le plus fin), et qu'on peut prendre comme unité un multiple de 4 carrés de base. Ainsi, $7/4$ et $8/5$ sont représentables si l'unité contient 4×5 carrés (un multiple de 4 et de 5). Il ne semble pas indispensable d'aller plus loin (c'est-à-dire de choisir la plus petite unité possible) sauf peut être sur quelques exemples. On peut ainsi constater que $3/8 + 1/2 = 7/8$, sans passer par l'intermédiaire $14/16$.

Pensons aussi à des manipulations telles que :

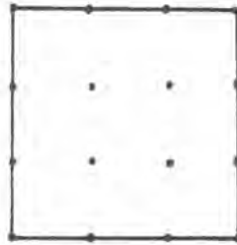
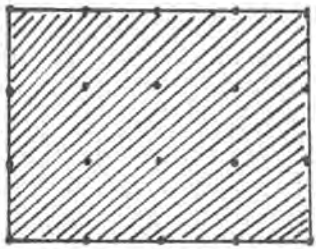


Au sujet de la recherche du dénominateur commun à deux fractions, remarquons qu'à l'école on s'intéresse beaucoup à des relations du type $8 = 6 + 2 = 3 + 5 = 4 + 4 \dots$ mais fort peu à $12 = 6 \times 2 = 3 \times 4$.

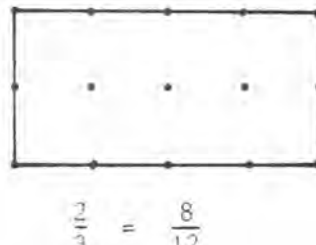
Comparaison des fractions :

$3/4$ est-il plus grand que $2/3$,

A nouveau, le problème essentiel est celui de choisir convenablement l'unité :



$$\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$$



$$\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$$

Le sens qui a été donné au mot fraction permet de voir, sans dessin, que $9/12$ est plus grand que $8/12$.

Dans un premier temps, c'est tout ce qu'il est possible de faire. On ne sait donc pas multiplier entre elles deux fractions, diviser une fraction par une autre ni faire de "règle de trois". Ces nouveaux objets peuvent être introduits par plusieurs méthodes.

Multiplication des fractions.

A) Multiplication, règle de trois et opérateurs.

Le processus décrit plus haut n'utilise pas la notion d'opérateurs. Si ceux-ci ont été étudiés, comme ce fut le cas dans la classe où on a mis au point ce travail, ils peuvent être réinvestis à cet endroit et, de manière très classique maintenant, vont permettre de définir ce que l'on cherche. Cela doit couler assez bien pour que l'on n'insiste pas trop ici.

● On choisit une unité, une unité double, triple... de la précédente, et on construit avec chacune de ces unités la fraction $2/3$ (si c'est possible).



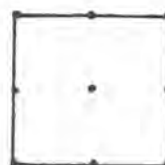
?



?



$$\frac{2}{3}$$



$$\frac{2}{3}$$

On voit apparaître évidemment le tableau de l'opérateur $\boxed{\times \frac{2}{3}}$ en comparant les unités et les différents rectangles d'aire $\frac{2}{3}$ par rapport à ces unités :



• Une identification de la fraction $\frac{2}{3}$ à l'opérateur $\boxed{\times \frac{2}{3}}$ permet alors de multiplier les fractions entre elles, de même qu'on compose les opérateurs.

• La règle de trois vient alors comme il le faut.

La méthode précédente n'est pas satisfaisante : elle utilise ces objets à peu près dépourvus de sens que sont les opérateurs multiplicatifs dans les entiers qui, au mieux, ne peuvent être qu'une mécanique bien huilée pour moudre du vent (et éventuellement justifier les activités savantes et lucratives des auteurs de manuels).

Indiquons sommairement, faute d'expérience en classe, deux méthodes qui s'inscrivent dans la ligne de ce qui précède et qui donnent un sens correct à la multiplication des fractions.

B) Mesures de surfaces et mesures de longueurs :

Il s'agirait d'utiliser la formule donnant l'aire d'un rectangle après avoir utilisé des fractions pour mesurer des longueurs.

Le schéma type pourrait être le suivant :

- On fait le choix d'une longueur unité (soit 15 cm) .
- La surface unité est un carré de 15 cm de côté.

Une longueur de 10 cm représente donc $\frac{2}{3}$ et une longueur de 12 cm représente $\frac{4}{5}$.

Un rectangle de 10×12 a une surface qui doit être : $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$ (extension de la formule connue) et qui, mesurée en cm^2 , est 120, c'est-à-dire $\frac{120}{225}$ de l'aire choisie comme unité. D'où : $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{120}{225} = \frac{8}{15}$ après simplification.

Nous n'allons pas plus loin, mais on voit déjà apparaître des difficultés, en particulier le dénominateur qui apparaît n'est pas celui qu'on attend.

C) Opérateurs linéaires dans l'ensemble des fractions.

On pourrait songer à remplacer les mauvais opérateurs multiplicatifs des manuels à la mode par les vrais opérateurs linéaires agissant sur les fractions. Cette fois, le problème essentiel ne sera pas de faire tourner la machine, mais de la justifier.

- On peut penser à utiliser des pantographes. On transforme un dessin par un pantographe qui multiplie les longueurs (dans la pratique, les longueurs sont des nombres décimaux, donc des fractions particulières) par $2/3$, puis le dessin obtenu est transformé par un pantographe réglé sur $4/5$. Est-il possible de passer du dessin original au troisième avec une seule manipulation ?

- On peut oublier les pantographes et se proposer d'agrandir les dessins à l'aide de quadrillages différents, l'idée de fond étant analogue.

- BROUSSEAU et l'IREM de Bordeaux proposent de partir du problème suivant : soit un puzzle formé de pièces polygonales, dessinant un rectangle. On se propose de l'agrandir de telle sorte qu'une longueur de 2 cm devienne 3 cm. Comment construire le nouveau puzzle ? Il reste à souhaiter que l'IREM de Bordeaux, fort de son expérience, en diffuse un jour méthodes et résultats.

- On peut aussi interpréter cela comme un problème de changement d'unités. On dispose de deux unités U_1 et U_2 . On suppose que, l'unité étant U_1 , la mesure de U_2 est $2/3$. Soit un rectangle de mesure $9/8$ par rapport à U_2 . Quelle est sa mesure par rapport à U_1 ?

Il nous reste donc à poursuivre le travail résumé ci-dessus par une expérience s'inspirant de l'une ou l'autre de ces idées.

A suivre.