

**I
R
E
m

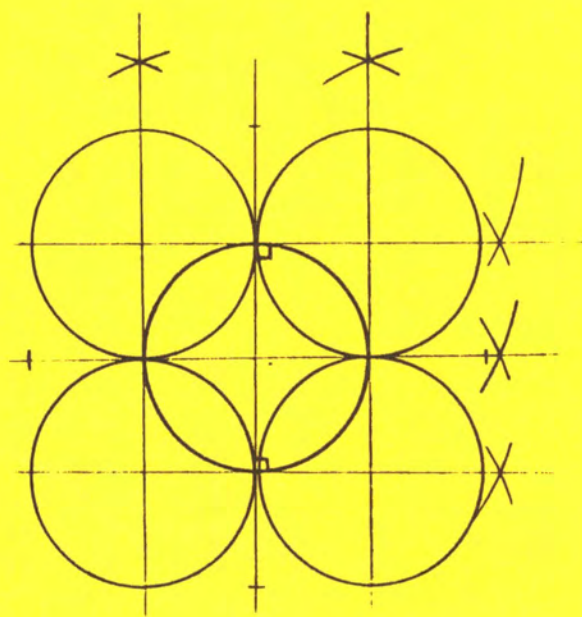
de

L
O
R
R
A
I
N
E**

CONSTRUCTIONS GEOMETRIQUES

**(A la règle, au compas
et à l'équerre)**

C.M₂.



Groupe E.L.E.R.E

Édité et imprimé par l'Institut de Recherche sur l'Enseignement des
Mathématiques (Université de Nancy I) - C.O. 140 - 54037 NANCY cedex.

Dépôt légal : 1er trimestre 1979

N° de la publication : 2 - 85 406 - 057 - 1

Le Directeur : C. MORLET

Les activités qui sont relatées ici ont été proposées dans quatre classes de CM₂ de Moselle.

Les objectifs visés étaient :

- une bonne maîtrise des instruments
- = une utilisation répétée des instruments dans des situations variées tout au long de l'année.
- une meilleure connaissance des figures (parallélogramme, losange, carré, ...)

Le groupe qui a réalisé ce travail était constitué de :

MM. JUNG, ORMOND, RAVENEL

et Mmes KLEIN et RAVENEL

- : - : - : - : -

1^{ère} partie

- a) Introduction ou exercices de révision.
- b) Exercices d'acquisition (usage des instruments)

2^{ème} partie

Situations problèmes
(réinvestissements)

1^{ère} partie :

a) Introduction ou exercices de révision :

Révision de toutes les figures planes connues, étudiées au CM₁.

Exercices de tracés :

- à l'aide du double-décimètre et de l'équerre :

perpendiculaire

médiatrice

- A l'aide du compas :

cercle

b) Exercices d'acquisition (usage des instruments) :

- à partir d'un énoncé (3 cas)

- à partir d'un modèle photocopié (3 cas)

Méthode de travail :

Les élèves sont répartis en équipes et discutent à l'intérieur de chaque équipe.

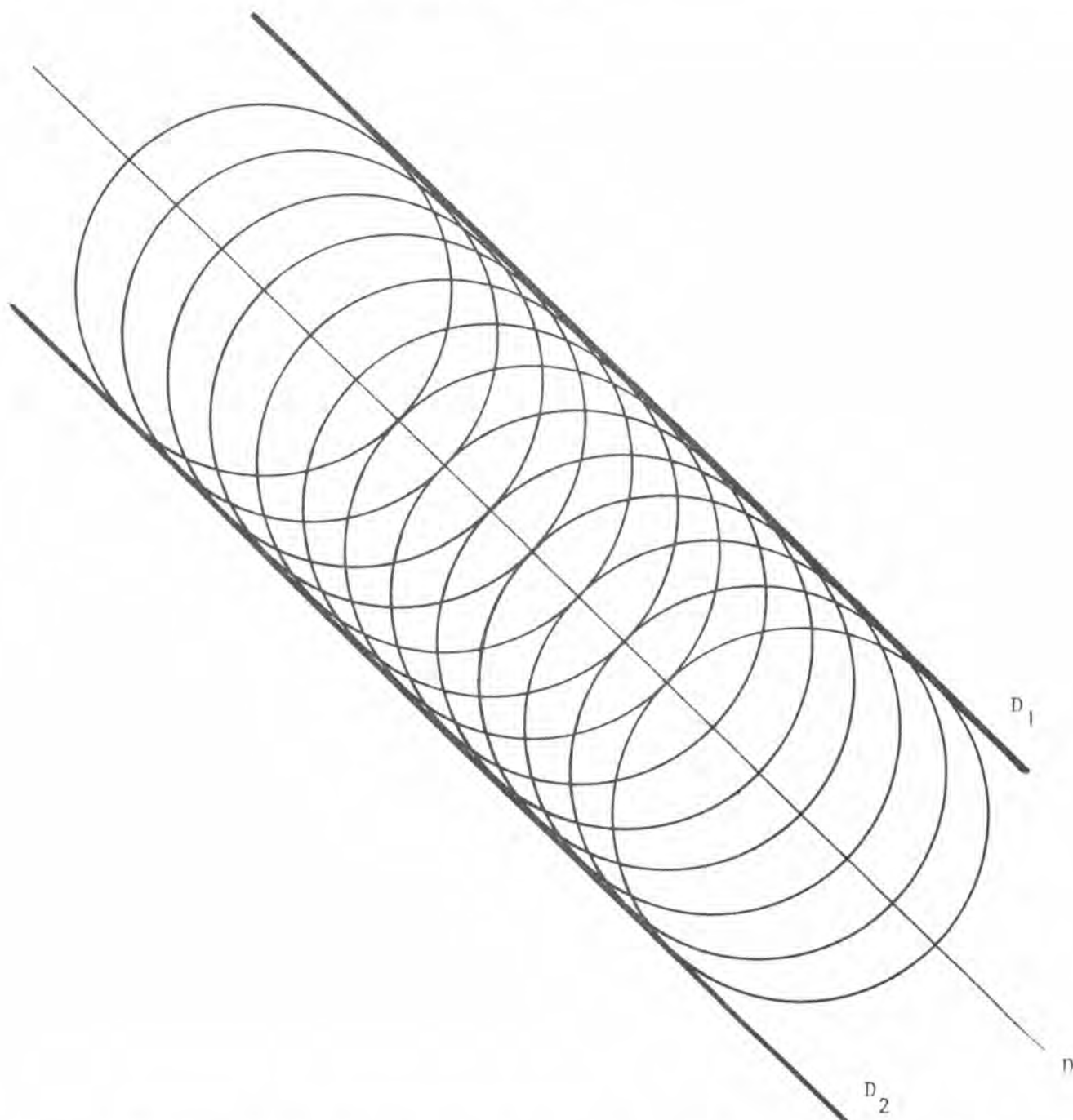
Chaque élève effectue personnellement son tracé.

Affichage des travaux de chaque équipe, qui doit venir exposer son analyse, expliquer son tracé et formuler d'éventuelles remarques.

Le maître circule et aide certaines équipes en difficulté.

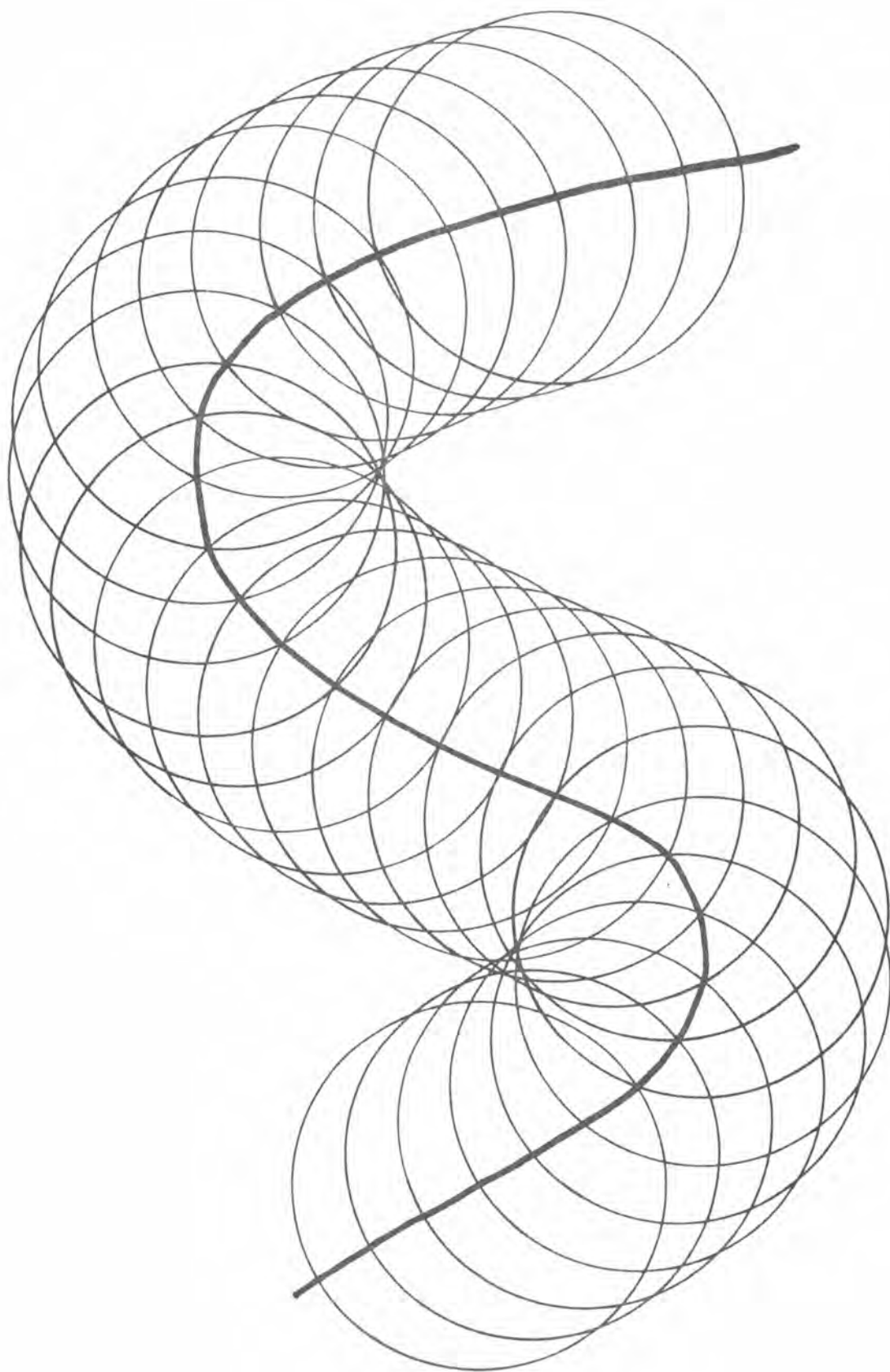
Énoncé 1 : On donne une droite D sur une feuille de papier blanc. On trace le plus de cercles possibles centrés sur D de rayon 4 cm.

On observe la figure obtenue. On trace éventuellement les deux droites enveloppantes.

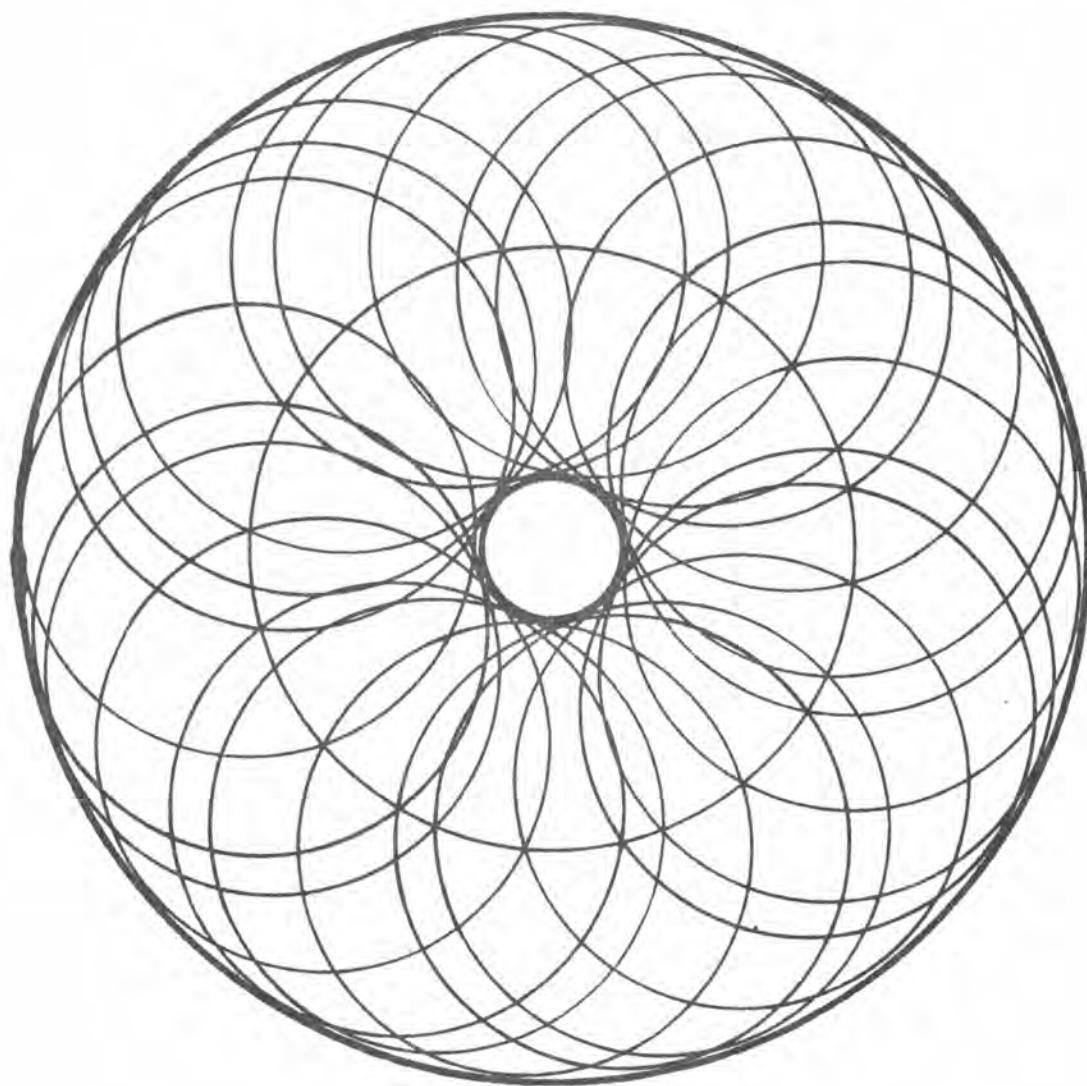


Remarque : On obtient deux droites D_1 et D_2 parallèles et distantes de 8 cm.

Enoncé 2 : Même activité en remplaçant D par une ligne courbe quelconque.



Enoncé 3 : On trace un cercle C de rayon 4 cm. On trace le plus de cercles possible, centrés sur C , de rayon 3 cm. On observe la figure obtenue. On trace éventuellement les deux cercles enveloppants.



Les enfants ont examiné tous les cas possibles en faisant varier la mesure de r_1 et de r_2 .

Soit : r_1 la mesure en cm du rayon du cercle initial
 r_2 la mesure en cm du rayon des cercles centrés sur le cercle initial,
 r_3 la mesure en cm du rayon du cercle "extérieur" enveloppant,
 r_4 la mesure en cm du rayon du cercle "intérieur" enveloppant.

Les différents tracés et calculs correspondants ont été effectués.
(ci-dessous quelques exemples)

a) $r_2 < r_1$ (cas de la figure)

mes. de r_3 en cm : $4 + 3 = 7$

mes. de r_4 en cm : $4 - 3 = 1$

b) $r_2 = r_1$

mes. de r_3 en cm : $4 + 4 = 8$

mes. de r_4 en cm : $4 - 4 = 0$

c) $r_2 > r_1$

mes. de r_3 en cm : $5 + 4 = 9$

mes. de r_4 en cm : $5 - 4 = 1$

d) $r_2 > 2r_1$

mes. de r_3 en cm : $2 + 5 = 7$

mes. de r_4 en cm : $5 - 2 = 3$

e) $r_2 = 2r_1$ (voir ci-dessous)

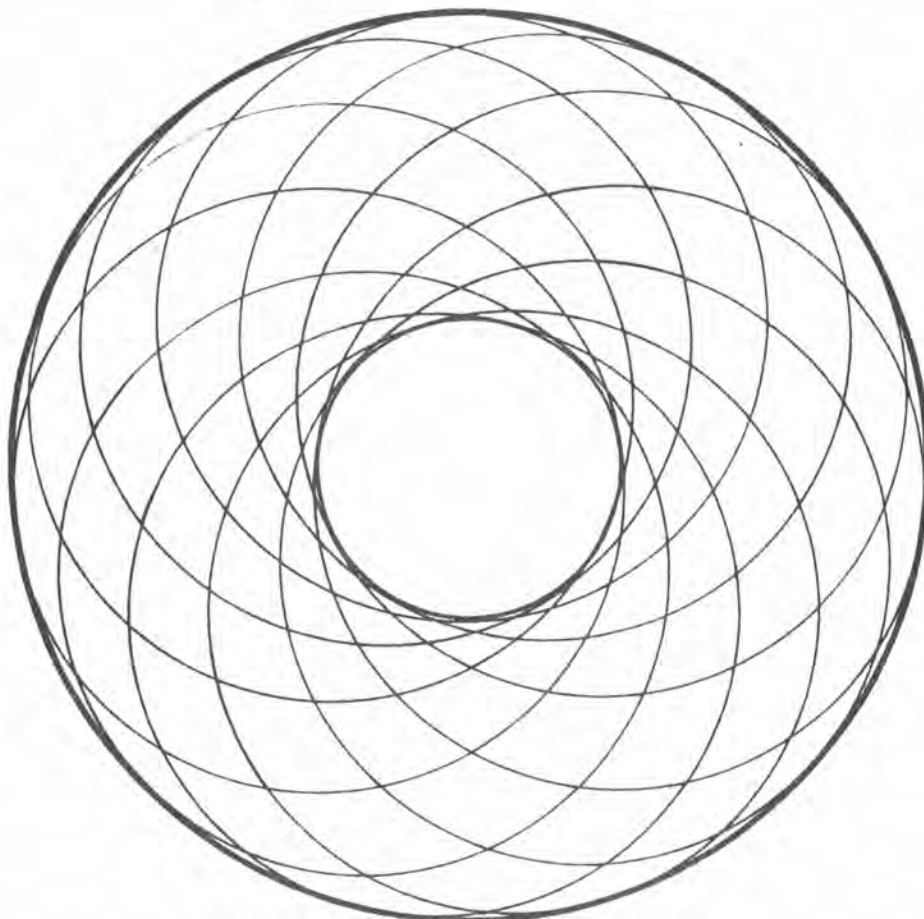
mes. de r_3 en cm : $2 + 4 = 6$

mes. de r_4 en cm : $4 - 2 = 2$

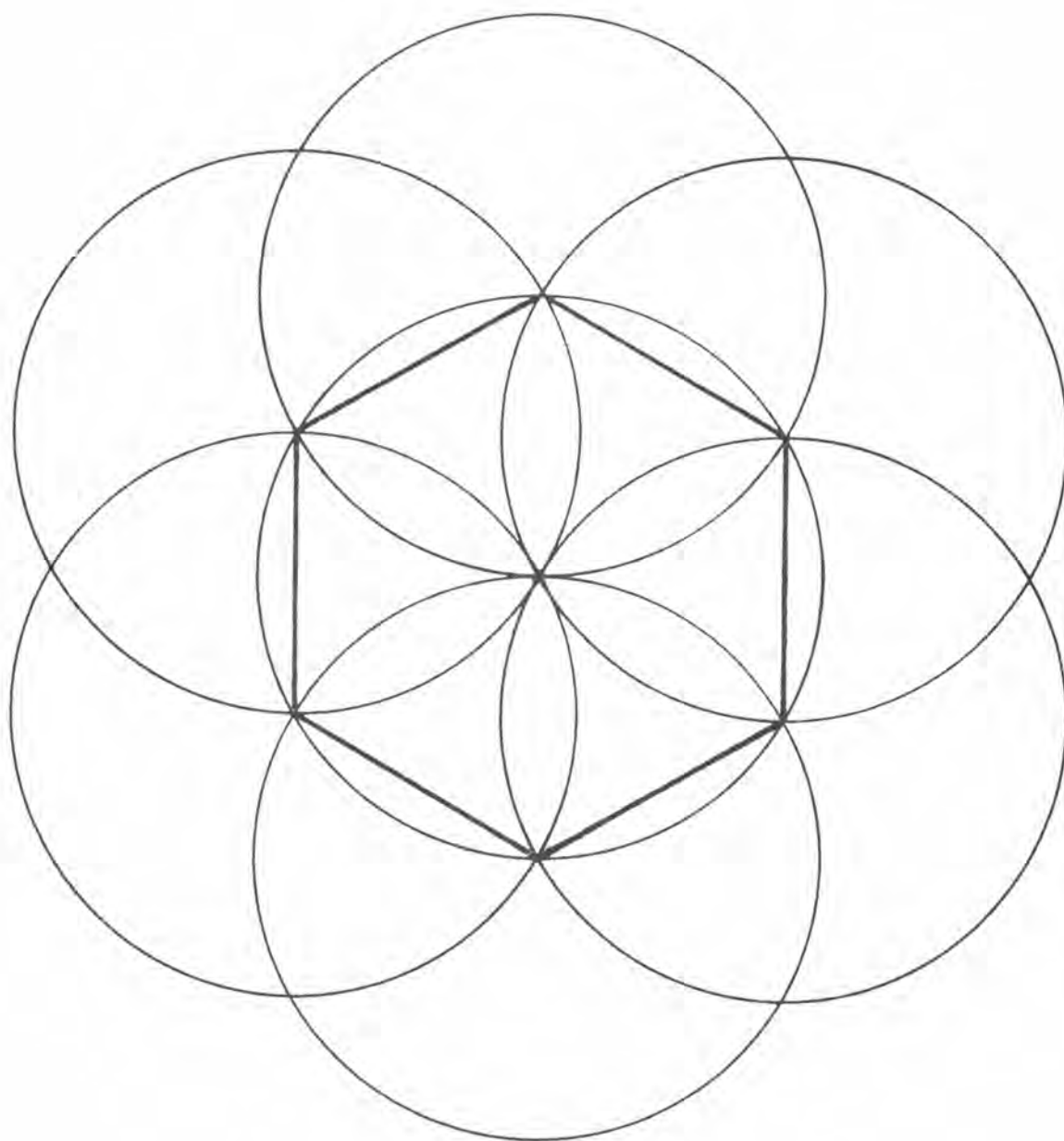
f) $r_2 < 2r_1$

mes. de r_3 en cm : $5 + 4 = 9$

mes. de r_4 en cm : $5 - 4 = 1$

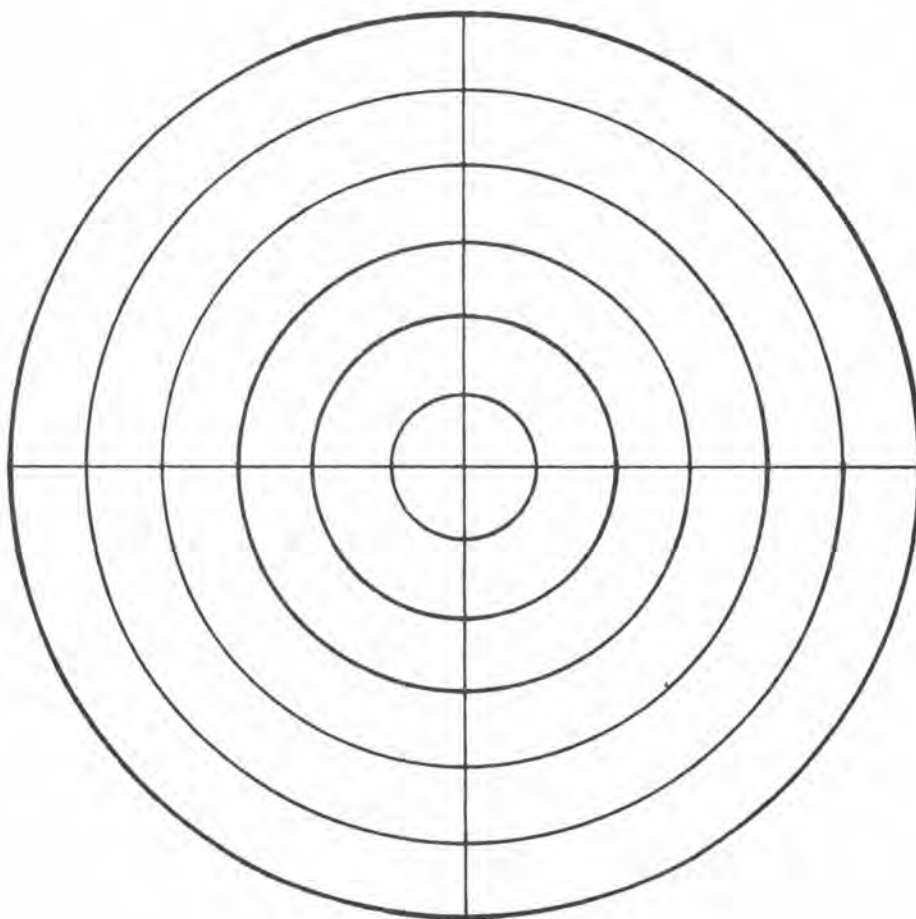


Modèle à reproduire (1)



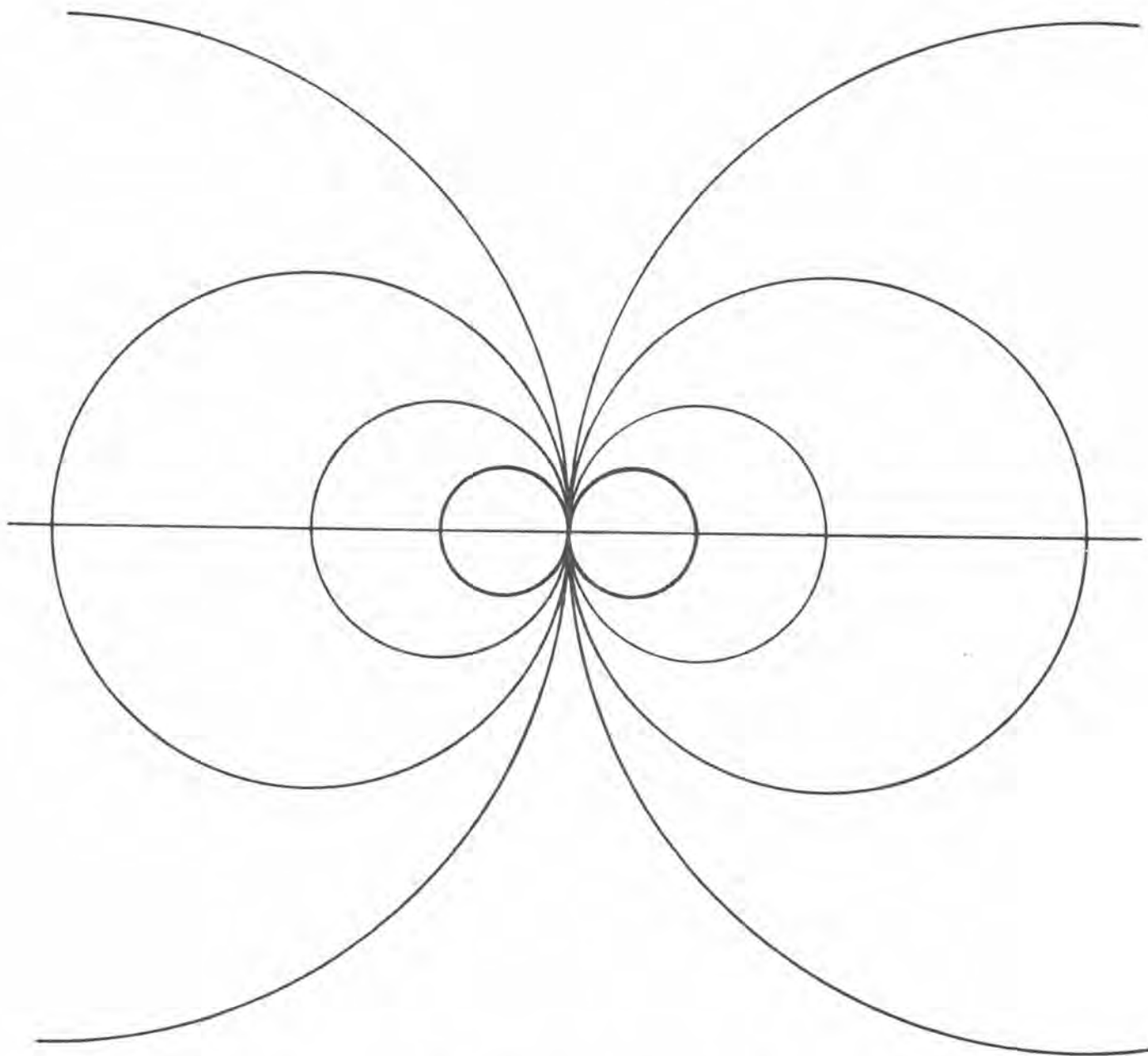
Analyse : les sommets de l'hexagone inscrit sont les centres des cercles centrés sur le cercle initial.

Modèle à reproduire (2) :



Analyse : Cercles concentriques centrés sur l'intersection de deux droites perpendiculaires.

Modèle à reproduire (3) :



Analyse : Cercles tangents intérieurement.

Mesure en cm des rayons successifs : 1 - 2 - 4 - 8

Remarque : Possibilité de tracer la tangente commune aux différents cercles (perpendiculaire aux différents rayons)

2^e partie :

Situations problèmes

Il s'agissait de savoir si les enfants réinvestissent les découvertes et acquisitions faites antérieurement.

Notre but était d'obtenir :

- des tracés corrects amenant à une certaine réflexion (puisque'il fallait les justifier)
- des travaux soignés et beaux.

Nous avons essayé d'adopter une certaine progression dans la difficulté.

Il ne nous a pas été possible :

- de donner tous les pourcentages de réussite
- de transcrire tous les tracés
- de relater toutes les justifications.

Méthode de travail :

Il s'agissait comme dans la première partie d'établir dans la classe un réseau de communication étoffé, d'obtenir de chaque élève une solution personnelle (ou de chaque équipe) qu'il vienne exposer et défendre.

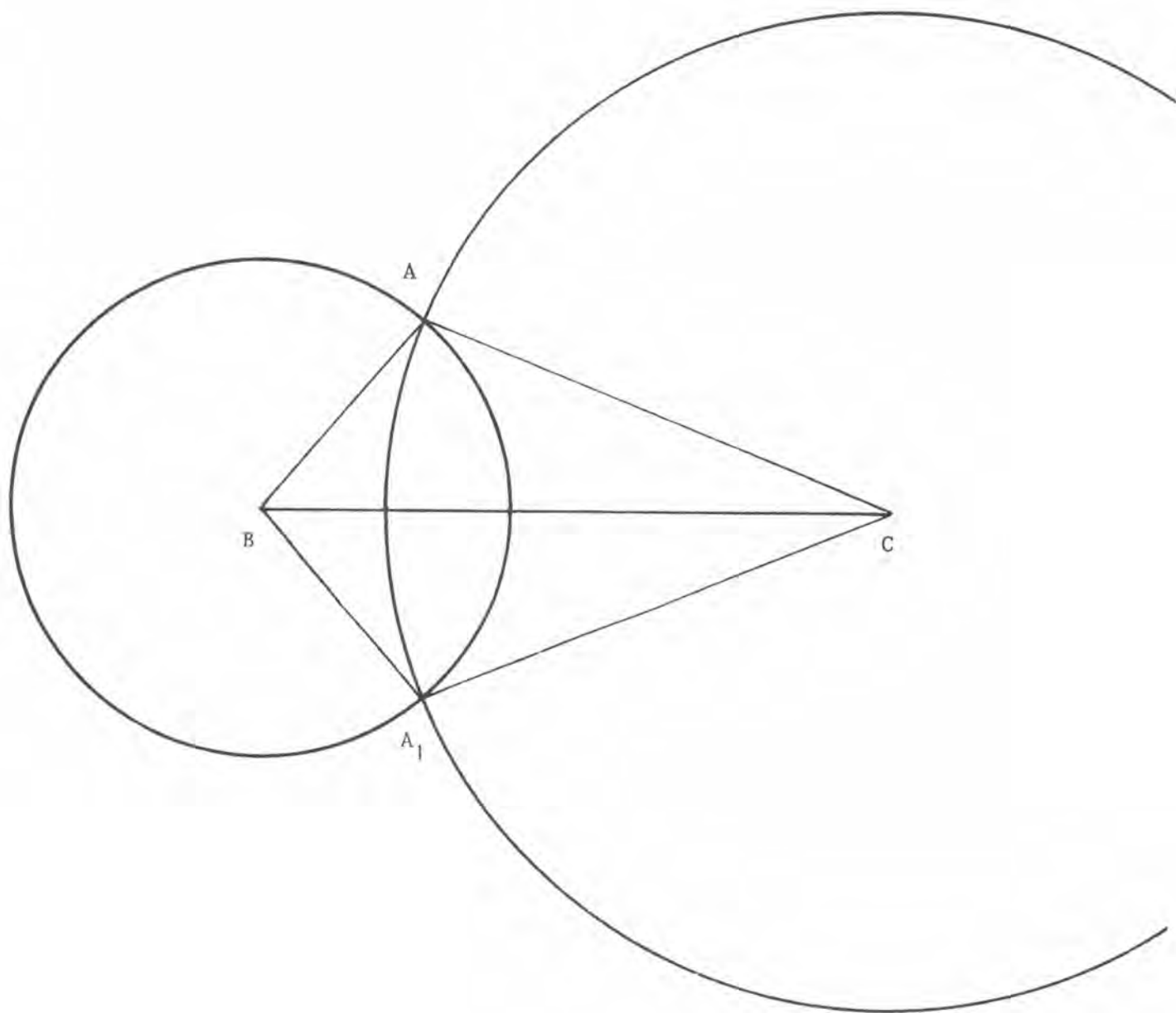
Le rôle du maître : diriger, guider, soutenir, rectifier

- 1 Tracer des triangles dont la mesure des côtés en cm est donnée dans le tableau ci-dessous (à l'aide du compas).

$[A,B]$	$[A,C]$	$[B,C]$	% de réussite construction	% de réussite explication valable
4	8	10	60	40
4	6	10	50	60
4	5	10	90	80
4	4	7	90	90
5	5	5	100	100

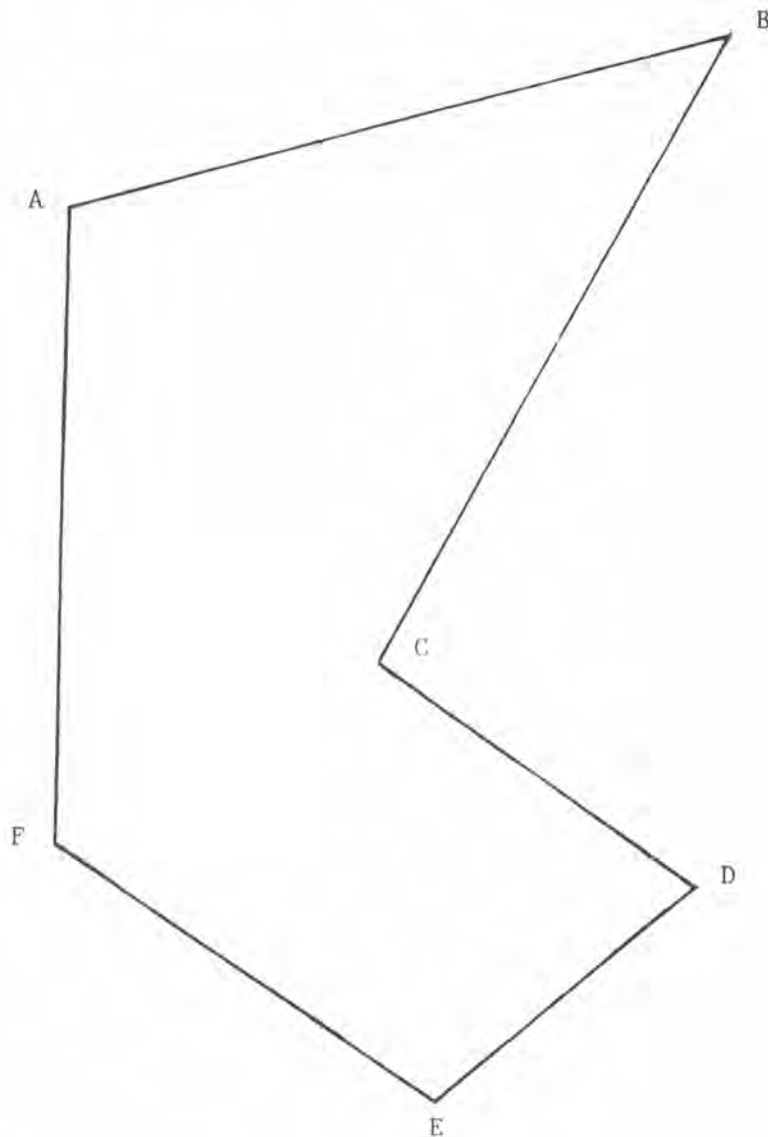
Remarques :

- Les élèves ont signalé que le triangle isocèle possédait un axe de symétrie.
- 40 % ont signalé un axe de symétrie dans le cas du triangle équilatéral.
- 60 % ont signalé trois axes de symétrie.



- ② Reproduire ce polygone en utilisant le compas et la règle non graduée.

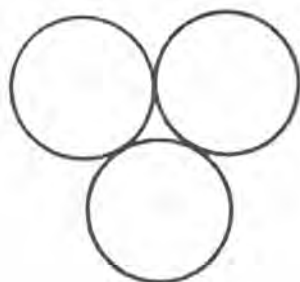
(Chaque équipe part d'un côté différent).



Résultats :

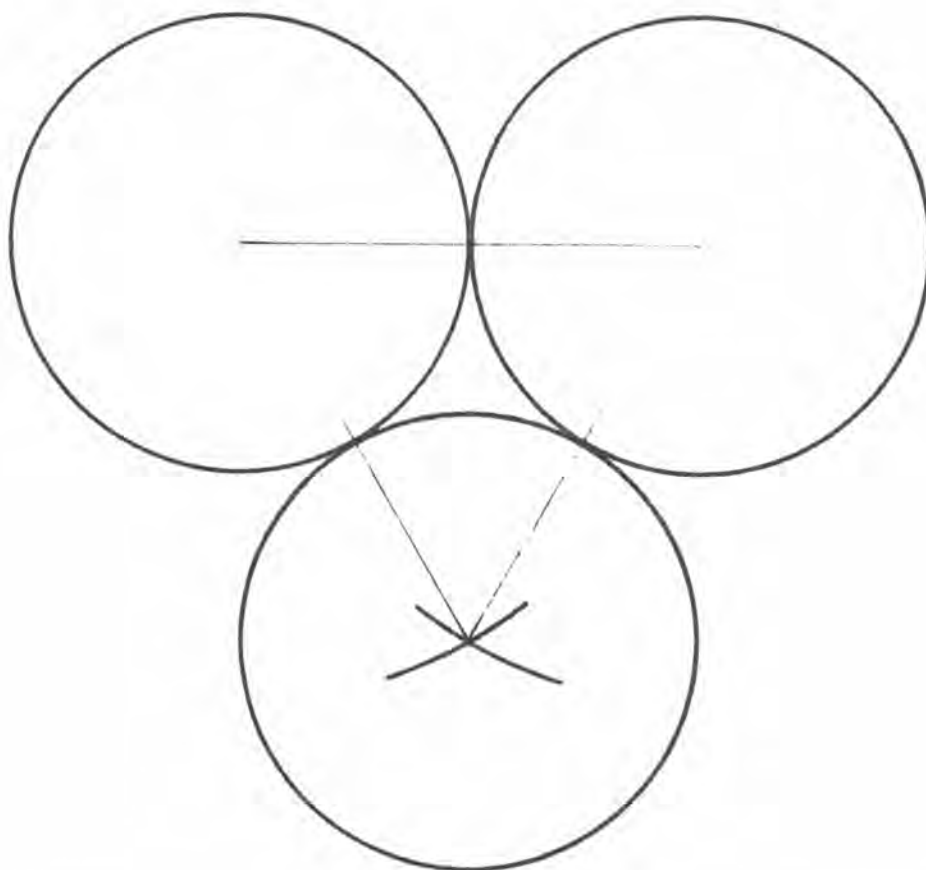
- Construction : 45 % et 10 % de translations mal réalisées.
- Explication : 55 %

- ③ Réaliser la configuration ci-contre à l'aide de pièces de 1 F.



- La dessiner à l'aide des instruments.
- Justifier sa construction.

Après une discussion avec la classe il a été convenu de prendre 3 cm comme rayon des cercles.



La construction d'un triangle équilatéral dont on connaît la mesure du côté apparaît comme une étape nécessaire à cette construction.

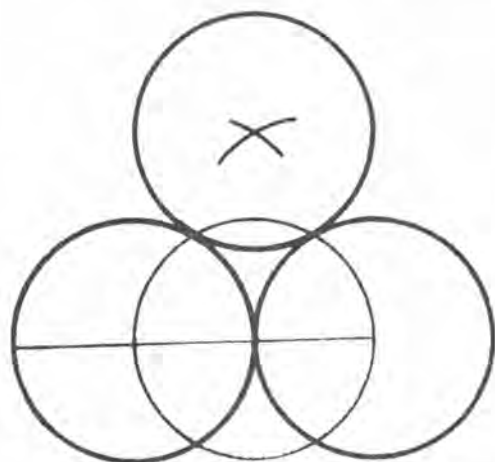
Dans l'ensemble :

- 70 % de réussite dans la construction
- 65 % de justifications correctes

Dans l'ensemble les élèves "faibles" ont procédé par approximations.

Il n'y a que les élèves "forts" qui ont utilisé un triangle équilatéral comme base du tracé.

Ci dessous quelques autres procédés utilisés par les élèves.

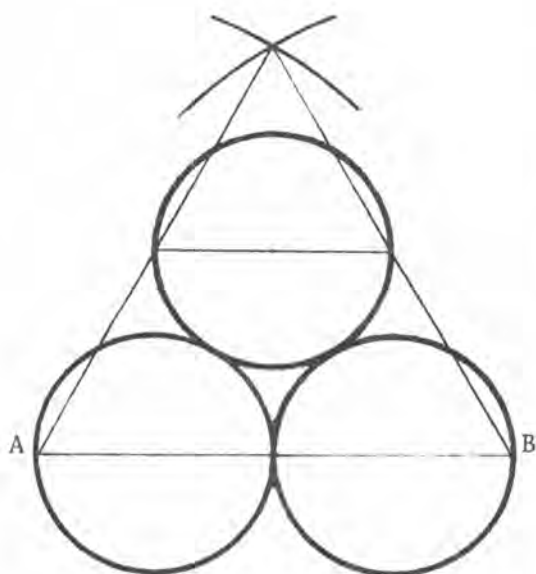


Tracé d'un cercle. En plaçant la pointe du compas en un point du cercle, tracé d'un deuxième cercle sécant au premier.

Le deuxième cercle tangent au cercle initial a été construit en prenant comme centre l'intersection de la droite joignant les deux centres avec le deuxième cercle sécant au premier.

Des intersections des cercles tangents avec le cercle sécant on a tracé deux arcs de cercle de 3 cm de rayon.

Leur intersection donne le centre du troisième cercle tangent.



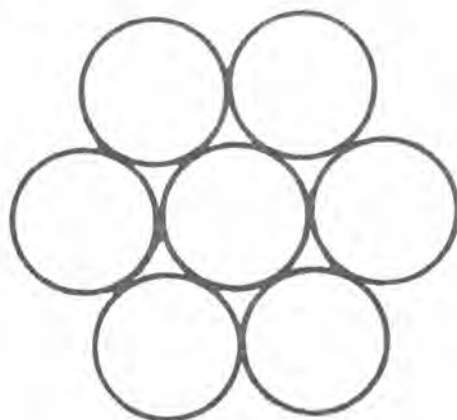
Tracé de deux cercles tangents

Tracé d'un triangle équilatéral dont la mesure du côté est égale à la mesure de (A,B).

Tracé d'un segment parallèle à la base à partir des milieux des deux autres côtés.

Le milieu du segment ainsi tracé est le centre du troisième cercle tangent aux deux autres.

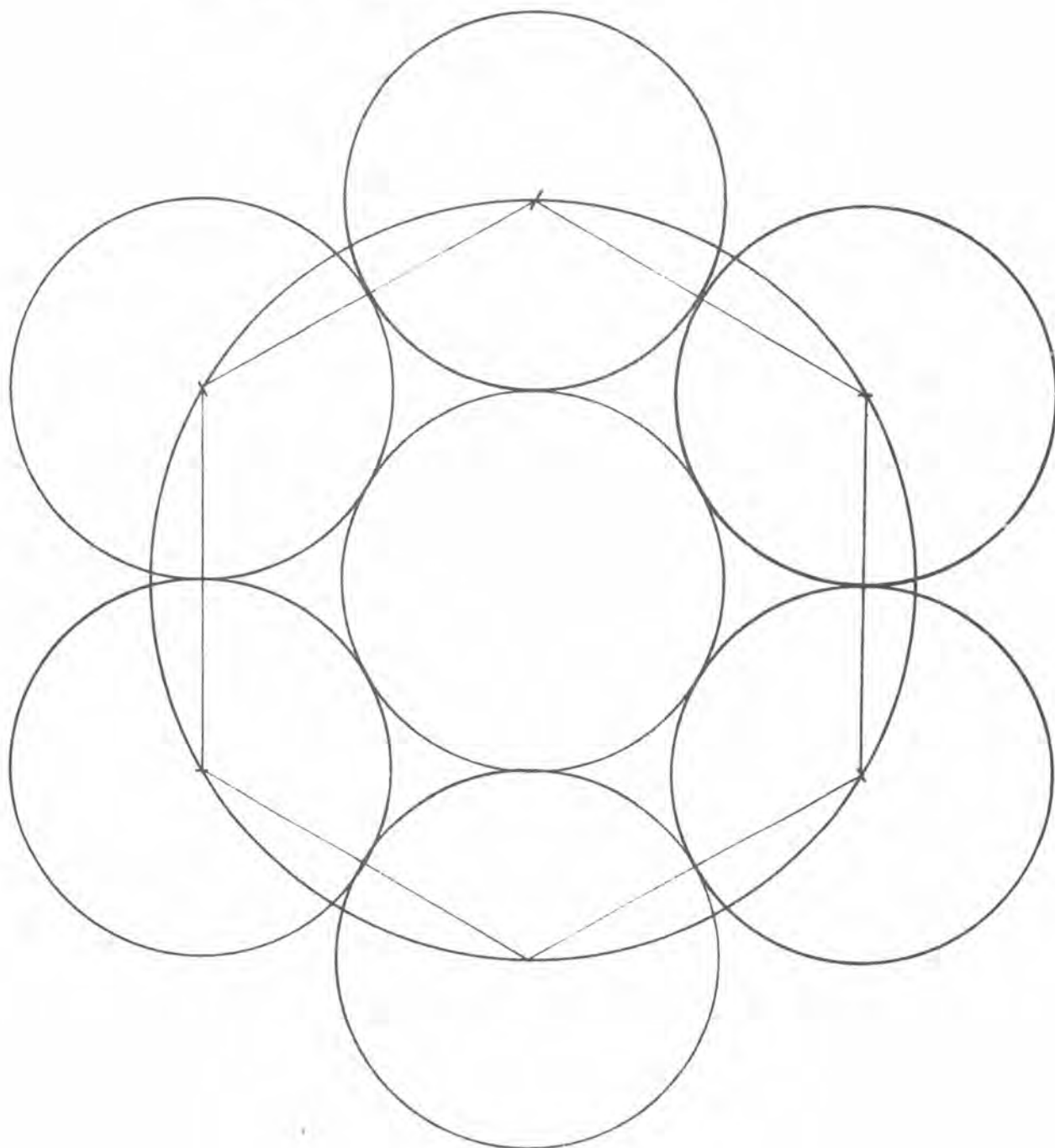
- 4 Réaliser la configuration ci contre à l'aide de pièces de 1 F.



- La dessiner à l'aide des instruments.

- Justifier sa construction

(Adopter comme dans l'exercice précédent 3 cm comme mesure du rayon des cercles).



La construction d'un heptagone apparaît comme une étape nécessaire à cette construction.

Dans l'ensemble :

- 60 % de réussite dans la construction
- 60 % de justifications correctes

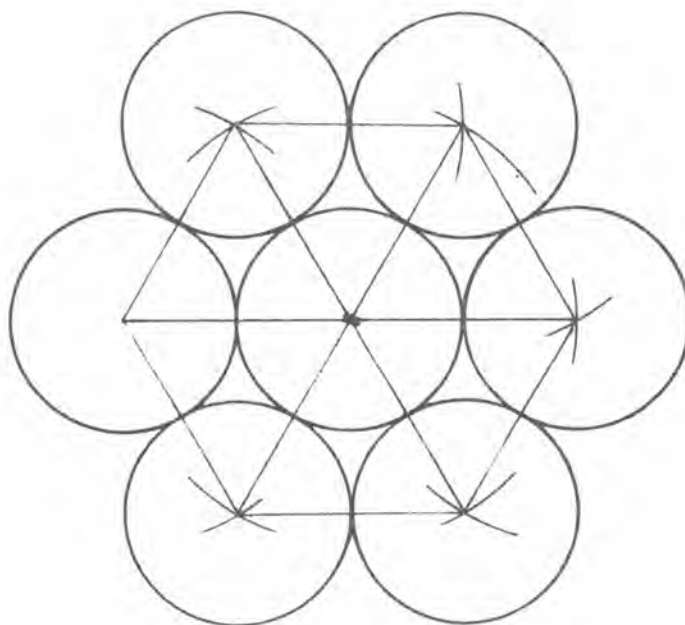
Dans l'ensemble les élèves "faibles" ont procédé par approximations.

Les autres ont utilisé comme base du tracé l'hexagone régulier ou des triangles équilatéraux.

Ci-dessous quelques autres procédés utilisés par les élèves :

Tracé de trois cercles tangents en prenant comme base du tracé un triangle équilatéral (réinvestissement des découvertes faites à propos de l'exercice précédent).

On continue en traçant un réseau de triangles équilatéraux dont certains sommets sont les centres des cercles tangents.

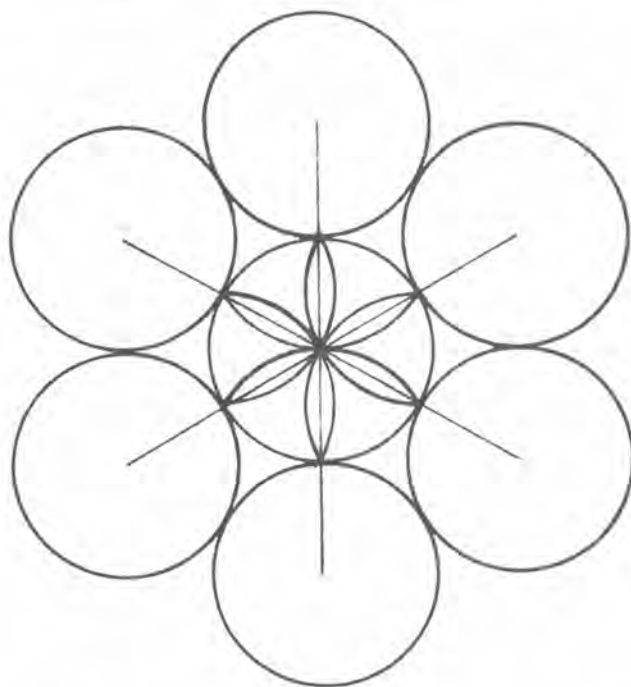


Tracé du cercle central.

Division du cercle en six arcs de cercle de même mesure (avec tracé d'une rosace).

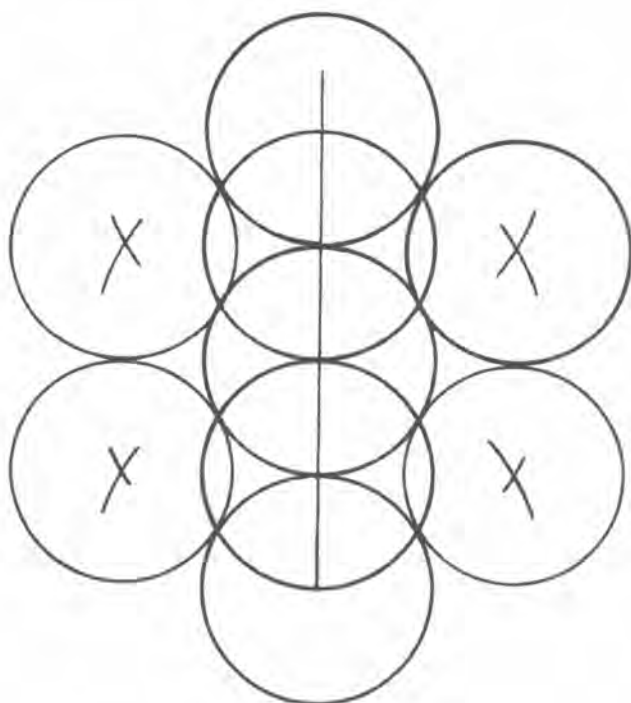
Du centre du cercle, tracé de six segments (de mesure $2r$) passant par les points déterminés sur le cercle.

Les extrémités des segments constituent les centres des cercles.



Alignement de 5 cercles de rayons ayant même mesure.

Le premier, le 3^e et le 5^e sont tangents, les deux autres ne servent qu'à la construction.



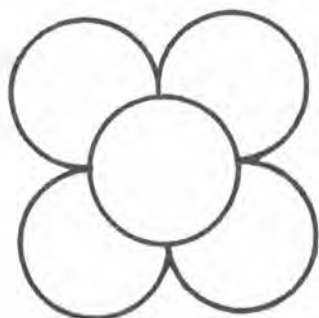
De certaines intersections de ces cercles, tracé d'arcs de cercles en prenant 3 cm dans son compas.

Les intersections de ces arcs déterminent 4 points qui sont les centres des 4 cercles manquants.

Remarque : on fait observer que lorsqu'on joint les centres des 6 cercles "extérieurs" on obtient un hexagone régulier.

5

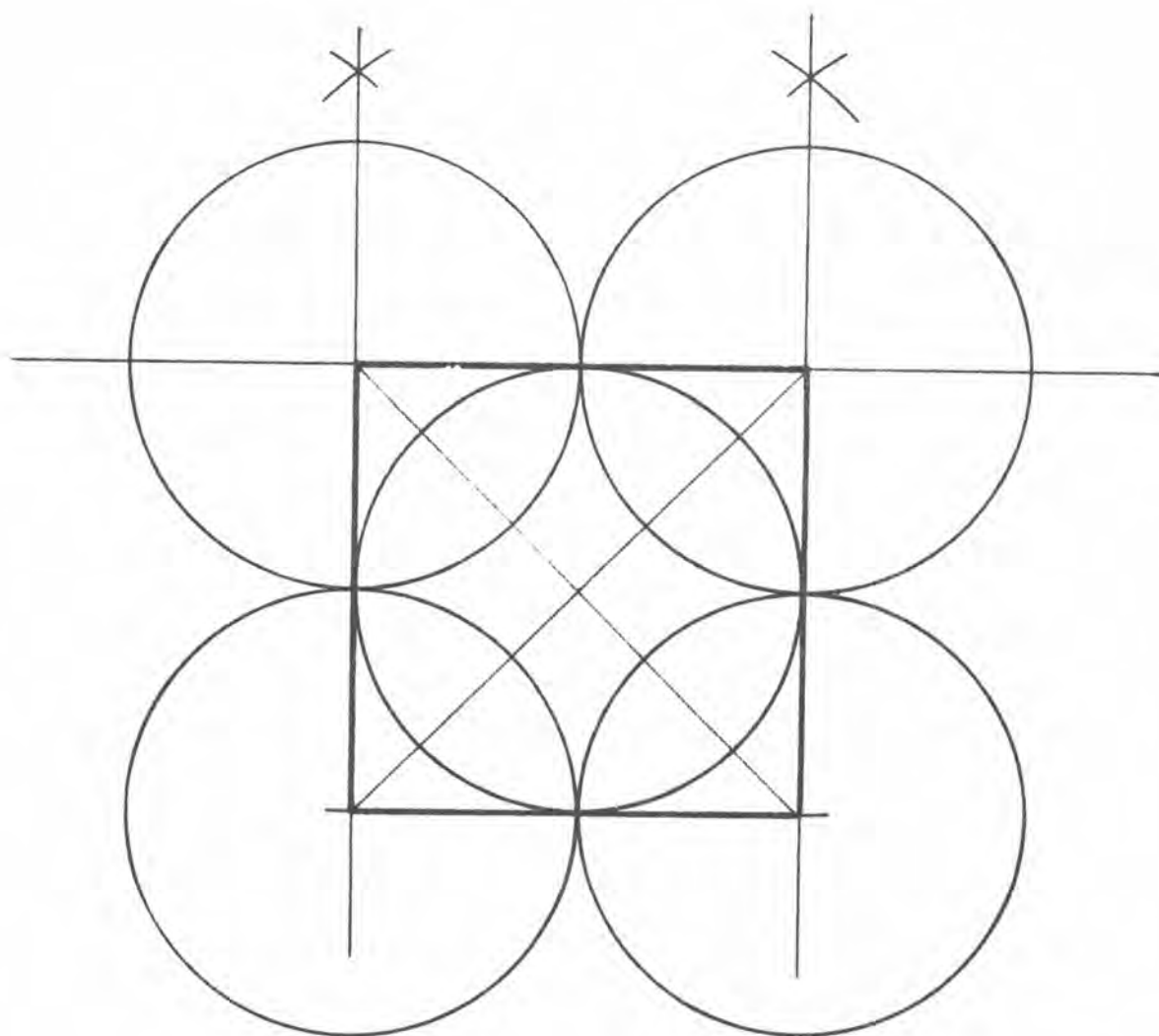
Réaliser la configuration ci-contre à l'aide de pièces de 1 F.



- La dessiner à l'aide des instruments.

- Justifier sa construction.

Prendre 3 cm de rayon pour les cercles.



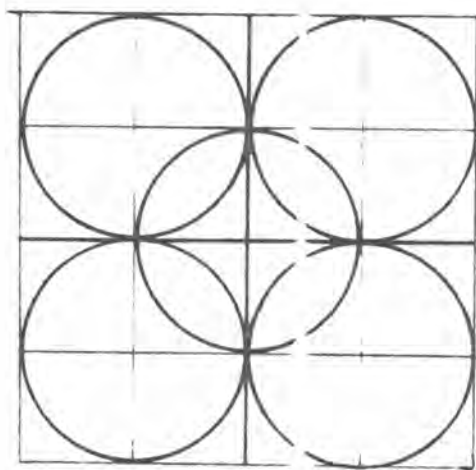
La construction d'un carré dont on connaît la mesure du côté apparaît comme une étape nécessaire à cette construction.

Dans l'ensemble :

- 60 % de réussite dans la construction.
- 50 % de justifications correctes.

Un grand nombre d'élèves faibles sont incapables de tracer le cinquième cercle.

Ci-dessous quelques autres procédés utilisés par les élèves :



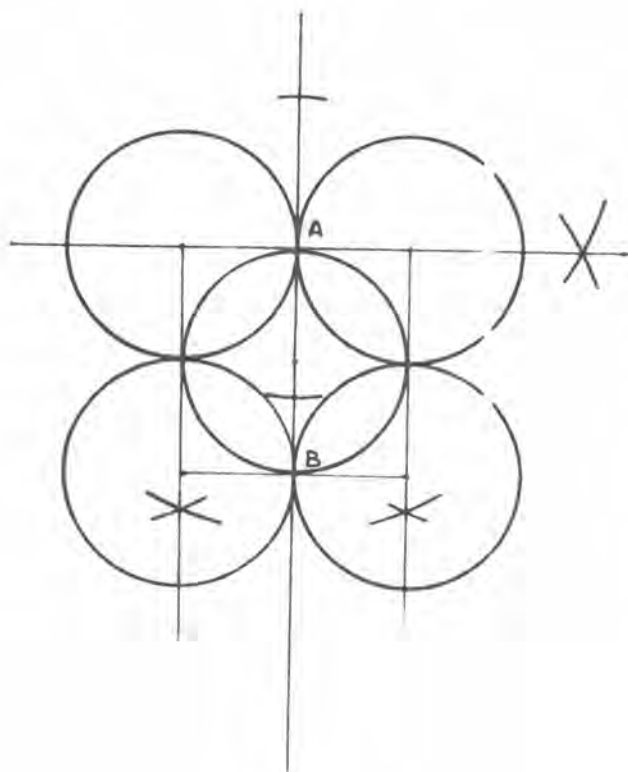
Tracé d'un carré de 12 cm de côté.

Tracé des médianes partageant ce carré en 4 carrés de 6cm de côté.

Nouveau tracé des médianes.

Tracé des cercles inscrits.

Du centre du carré de 12 cm de côté, tracé du cercle central.



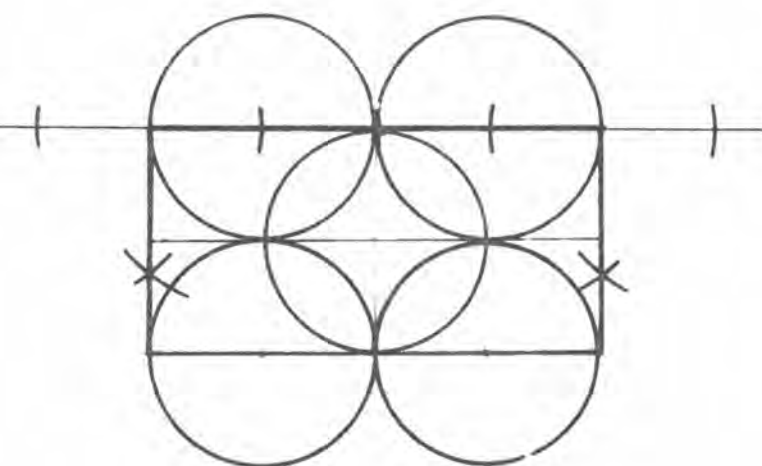
Tracé d'une ligne droite.

Tracé de part et d'autre de cette droite de 2 cercles tangents.

Tracé des autres cercles tangents aux deux premiers et à la droite.

Tracé du carré et mesure du segment [A,B].

Son milieu est le centre du cercle central.

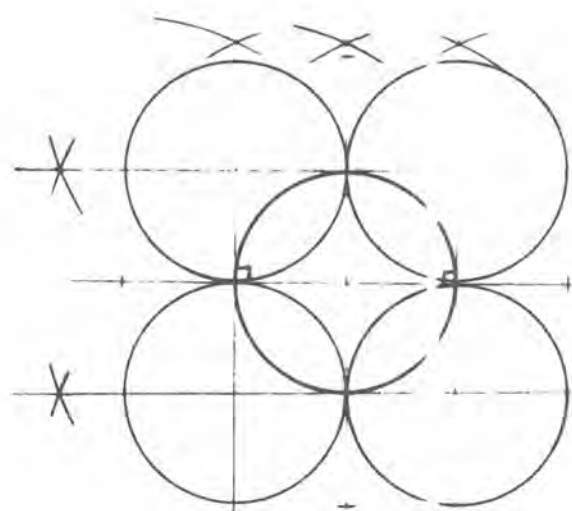


Tracé d'un rectangle de dimension 12×6 (en cm).

Les centres des 4 cercles "extérieurs" sont à 3 cm de chaque sommet sur la longueur du rectangle.

Tracé des 4 cercles.

Tracé des médianes du rectangle. Leur intersection est le centre du cercle central.



Tracé du cercle central.

Encadrement de ce cercle par 4 droites perpendiculaires entre elles et tangentes au cercle.

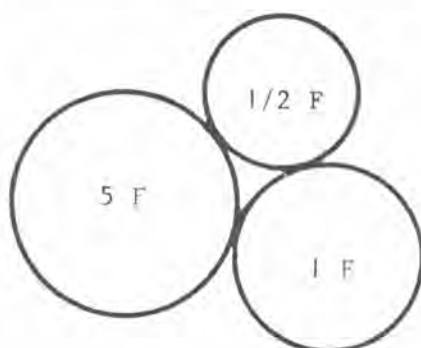
Les intersections de ces droites déterminent les centres des 4 autres cercles.

Tracé d'un carré de 6 cm de côté.

Tracé de 4 cercles de 3 cm de rayon dont les centres sont les 4 sommets du carré.

Pour la détermination du centre du cercle central, tracé des diagonales ou des médianes.

- 6 Réaliser la configuration ci-contre à l'aide des pièces indiquées.



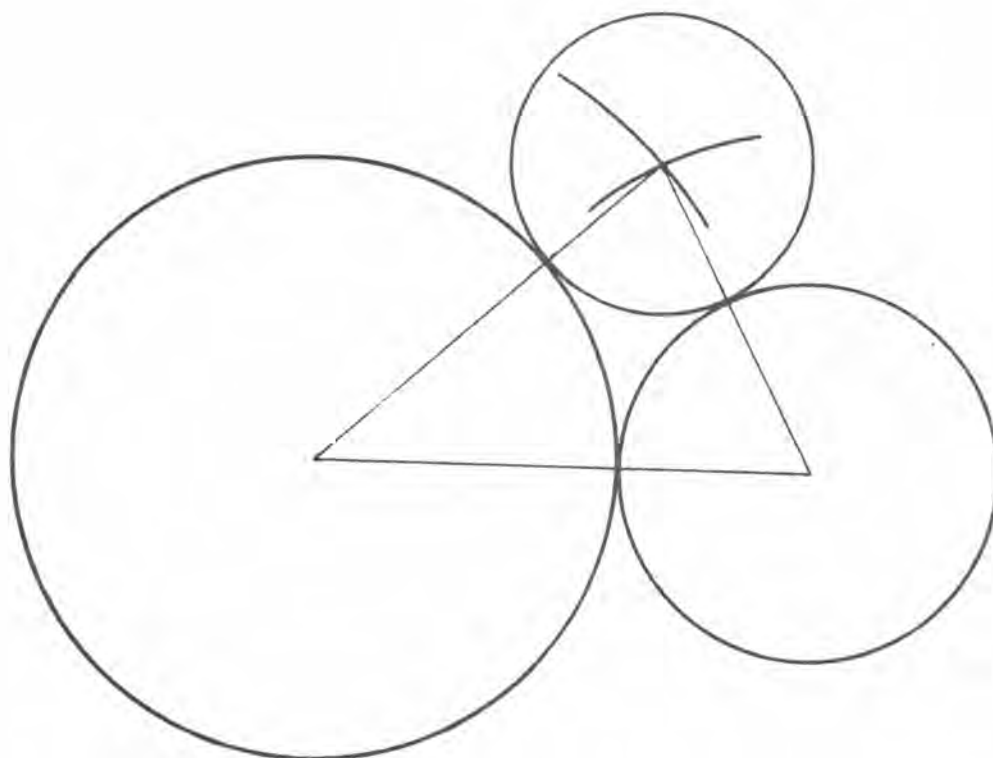
- la dessiner à l'aide des instruments.
- Justifier sa construction

Prendre pour les rayons des cercles :

pièce de 5 F : 4 cm

pièce de 1 F : 2,5 cm

pièce de 1/2 F: 2 cm



La construction d'un triangle quelconque dont les dimensions sont données apparaît comme une étape nécessaire à cette construction.

Dans l'ensemble :

- 65 % de réussite dans la construction.
- 65 % de justifications correctes.

Les élèves "faibles" procèdent à un tracé approximatif par tâtonnements.

7

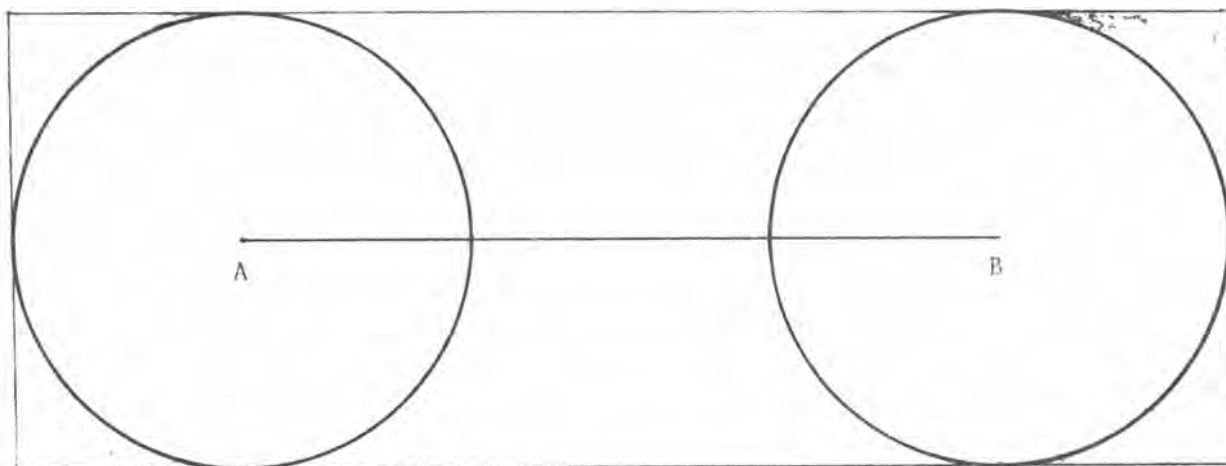
Un chien est attaché par une chaîne à un anneau pouvant coulisser sur une barre.

Dans quel espace peut-il se déplacer ?

(Ramener le chien à un point).

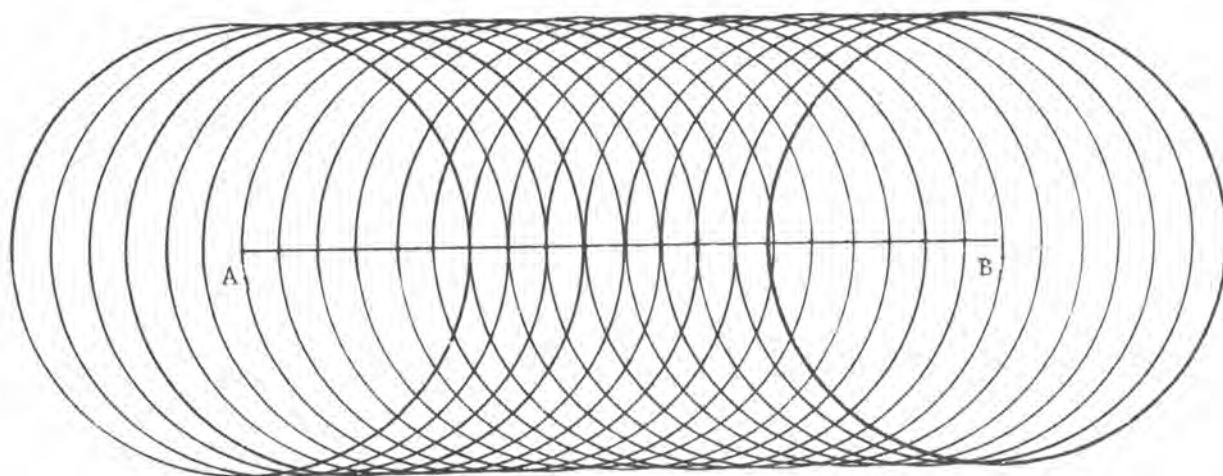
Remarque : les dimensions importent peu. Ce qui compte c'est la configuration de l'espace dans lequel il se déplace.

a) Premier type de solution :



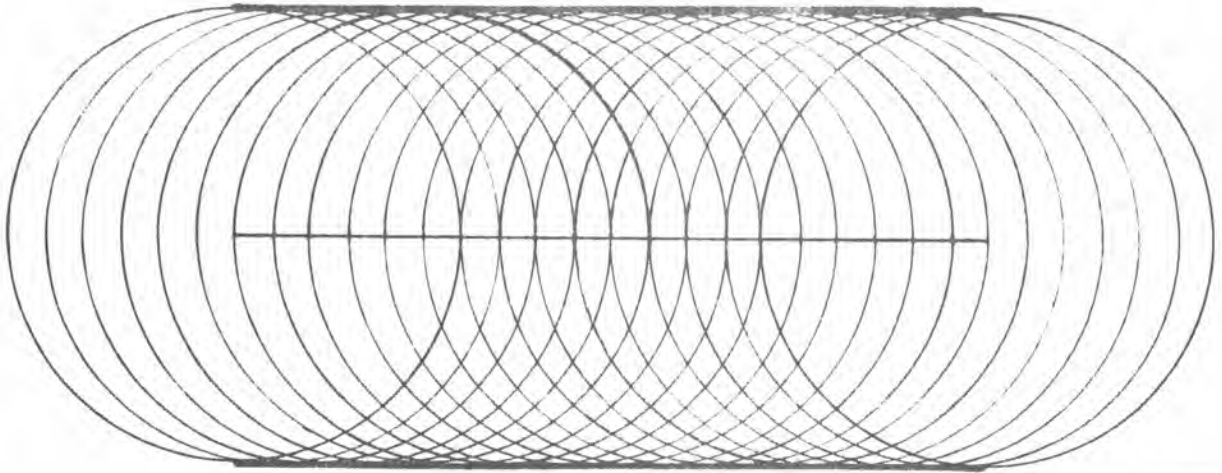
Les parties grisées ont été comptées en trop.

b) Deuxième type de solution :



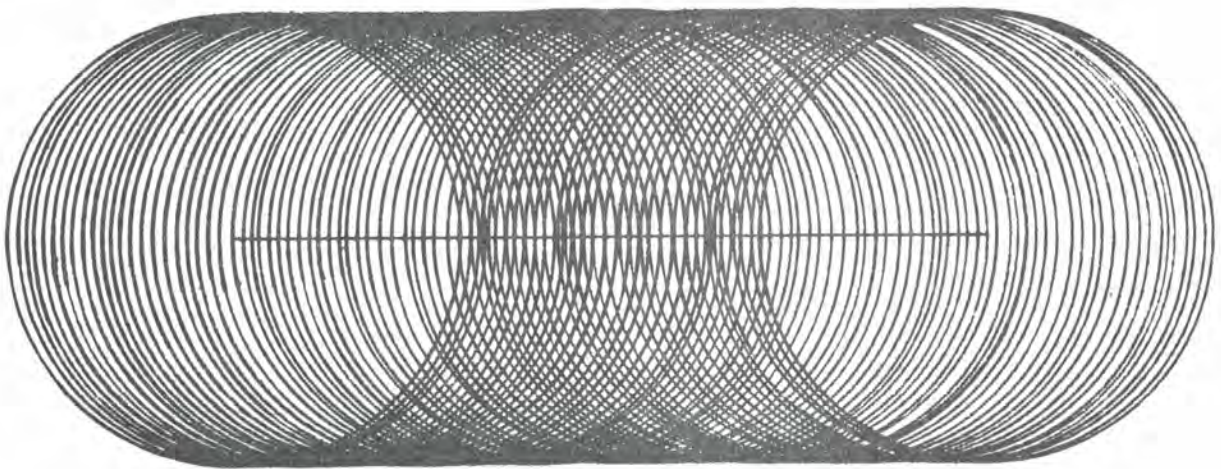
Les élèves n'ont pas vu qu'il s'agissait d'un rectangle dans la partie "centrale".

c) Troisième type de solution :



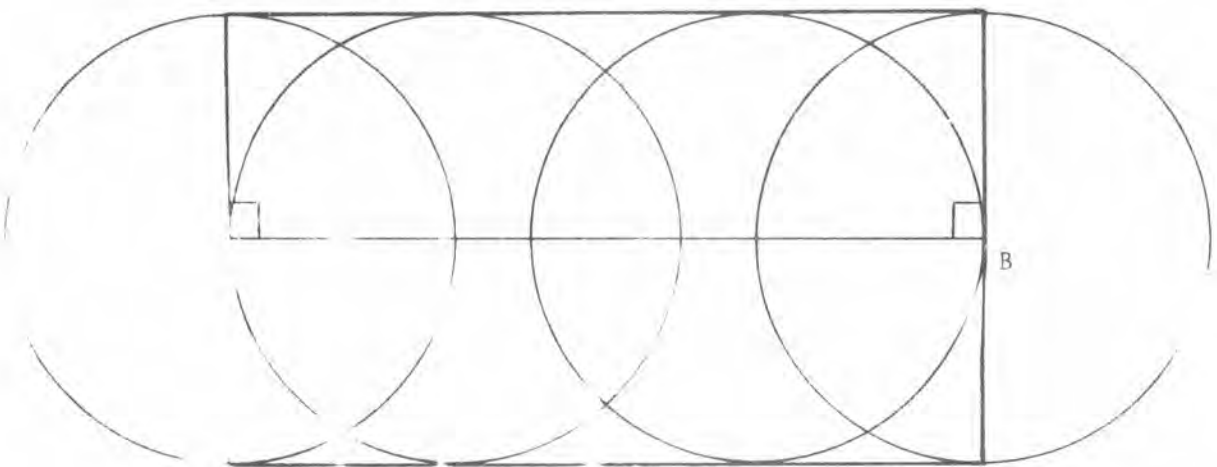
Une limite a été tracée de part et d'autre de la barre

d) Quatrième type de solution :



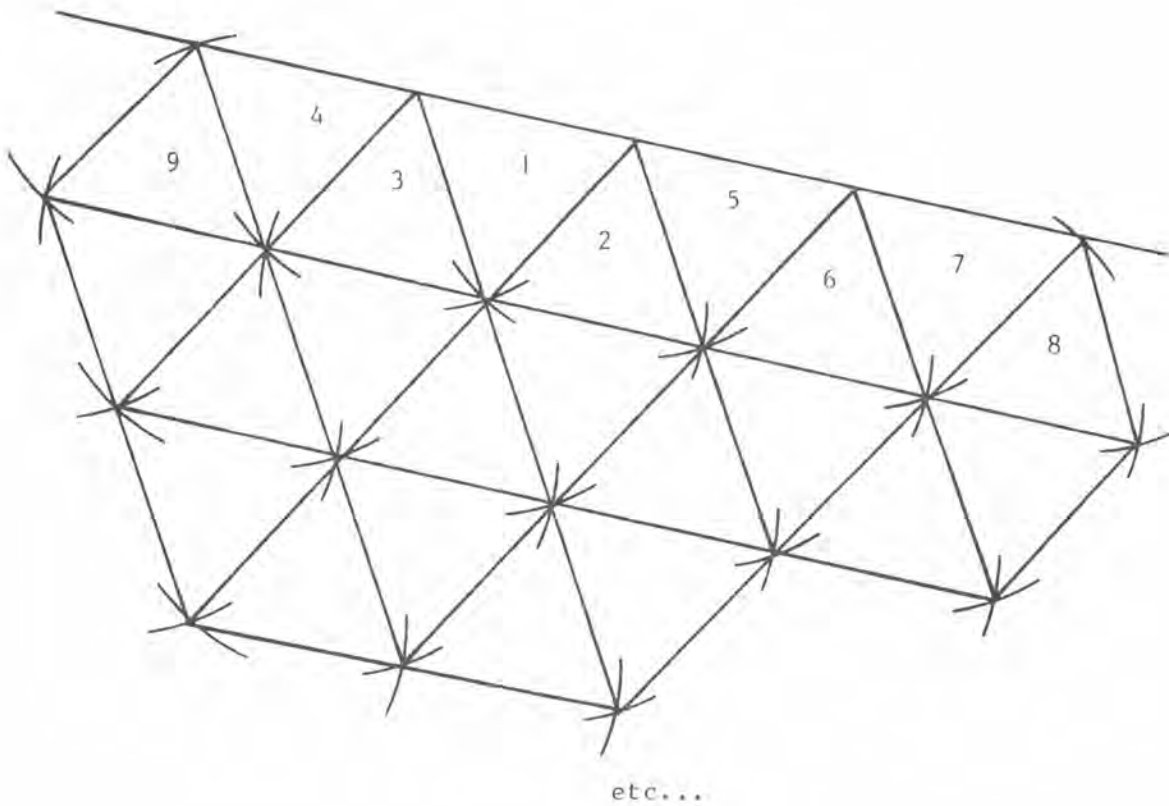
Le rectangle apparaît dans le tracé.

e) Cinquième type de solution :



Rectangle et de i-cercles accolés tracés correstement.

8 Tracé d'un réseau à base de triangles équilatéraux.



- 80 % d'explications correctes
- 40 % seulement de constructions réussies.

Constructions de triangles équilatéraux que l'on juxtapose par un côté (sauf 1 élève).

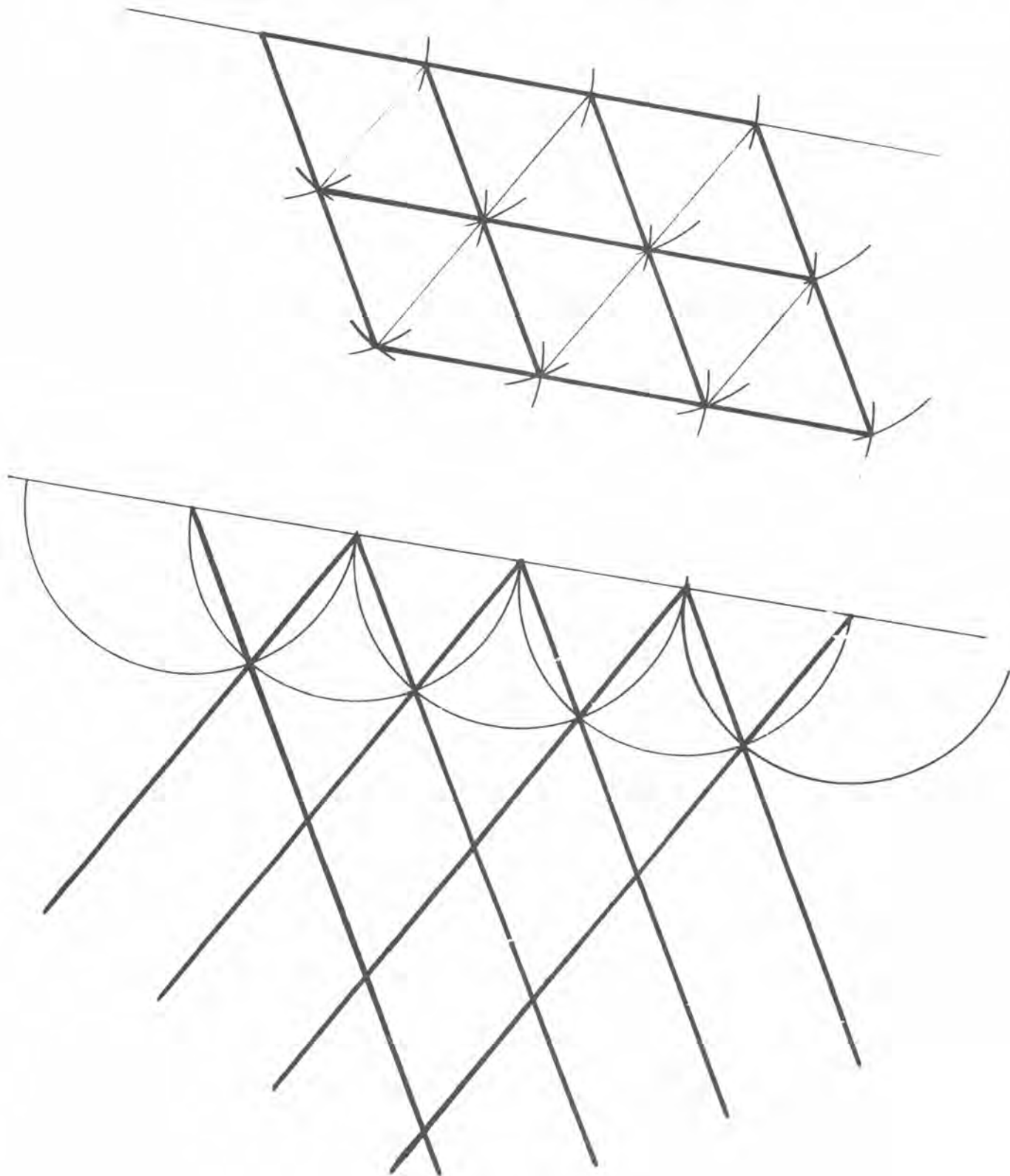
Une équipe tente d'utiliser le parallélisme des côtés homologues, mais la réussite du tracé en souffre.

9

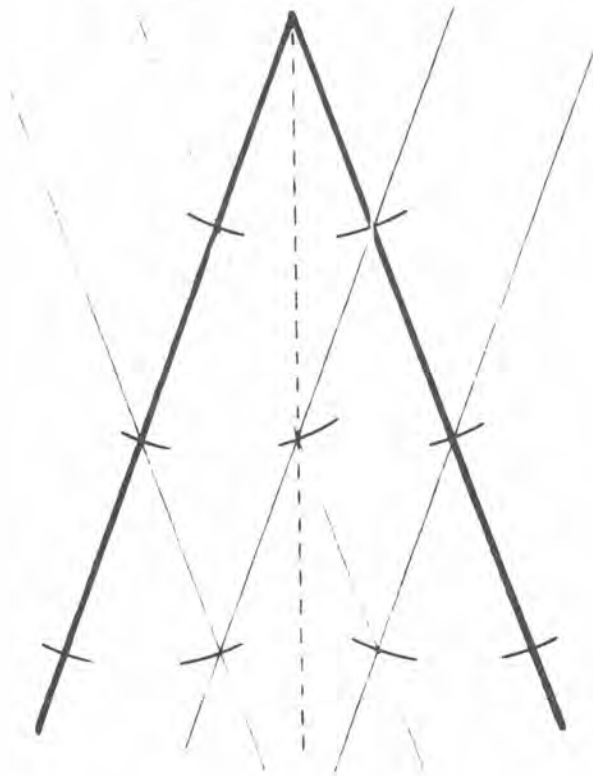
Tracé d'un réseau à base de losanges.

- 80 % de constructions réussies.
- 80 % de justifications correctes.

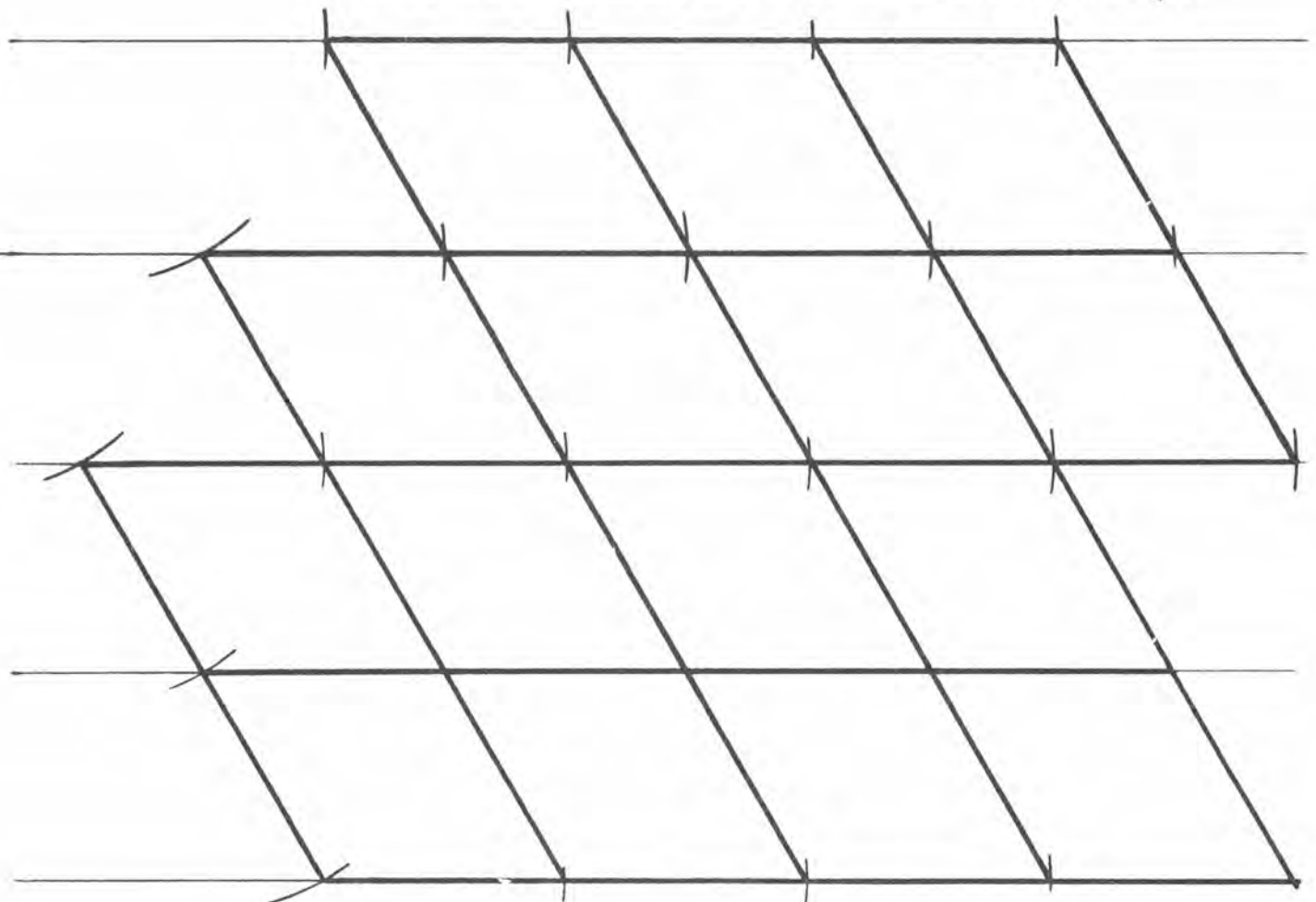
a) Reprise avec aménagement de la construction des triangles équilatéraux ou de l'hexagone régulier.



- b) Tracé de deux droites concourantes et de leur axe de symétrie (par pliage) puis report de distances égales (côtés des losanges).

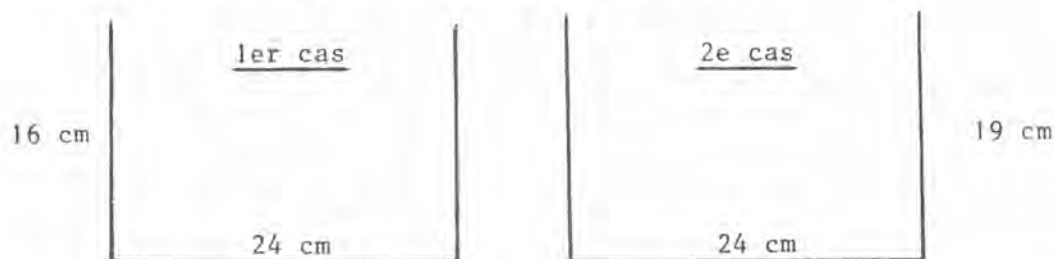


- c) Tracé de parallèles équidistantes (mes. de d en cm : 3) puis, grâce au compas, des 3e et 4e sommets des losanges.



10

Problème de stockage de tuyaux (diamètre : 4 cm).



Il s'agit de ne pas dépasser les pieux. Nombre de tuyaux qu'on peut stocker dans chaque cas ?

a) Premier cas :

- Première disposition

75 % de constructions réussies

95 % de justifications correctes

- Deuxième disposition

60 % de constructions réussies

80 % de justifications correctes

Tous les élèves ont d'abord été tentés par le pavage de la surface en carrés de 4 cm de côté. Souvent c'était pour y inscrire les cercles dont les centres se situaient à l'intersection des diagonales.

Dans un deuxième temps, ils proposent une autre méthode, basée sur la distance séparant les centres de cercles voisins.

Peu d'explications font allusion aux situations déjà vues (pièces de monnaie - réseaux ...). Il y a pourtant une imprégnation qui s'est faite.

Beaucoup de tracés laissent à désirer ; les distances sont mal mesurées.

b) Deuxième cas :

- Première disposition

60 % de constructions réussies

80 % de justifications correctes

- Deuxième disposition

30 % de constructions réussies

40 % de justifications correctes

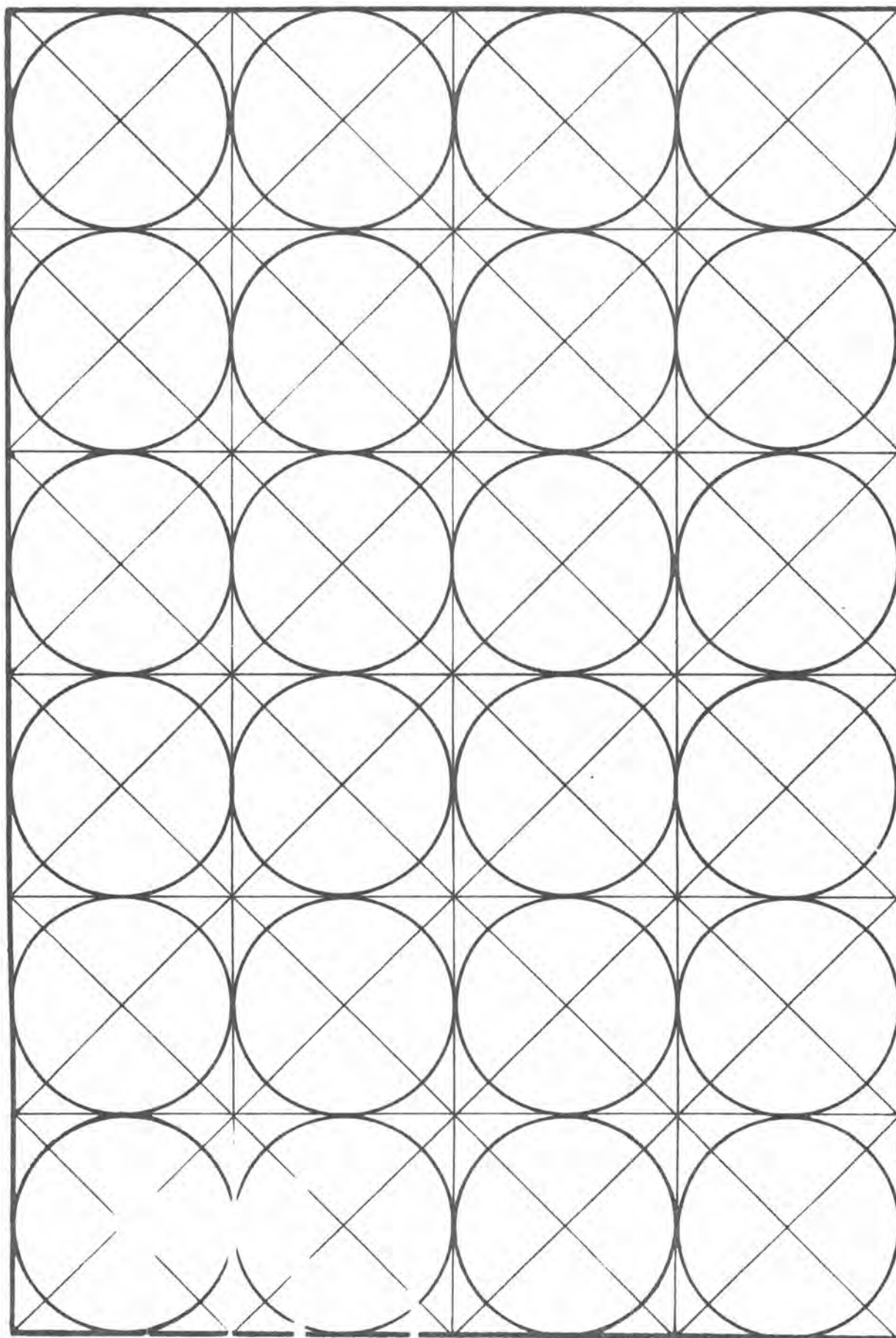
Une discussion avec toute la classe ayant fait apparaître les réseaux portant les centres, ce deuxième tracé devait être mieux réalisé.

En fait beaucoup d'erreurs, de mauvaises mesures surtout pour la deuxième disposition.

La question posée (nombre de tuyaux) est cependant bien traitée.

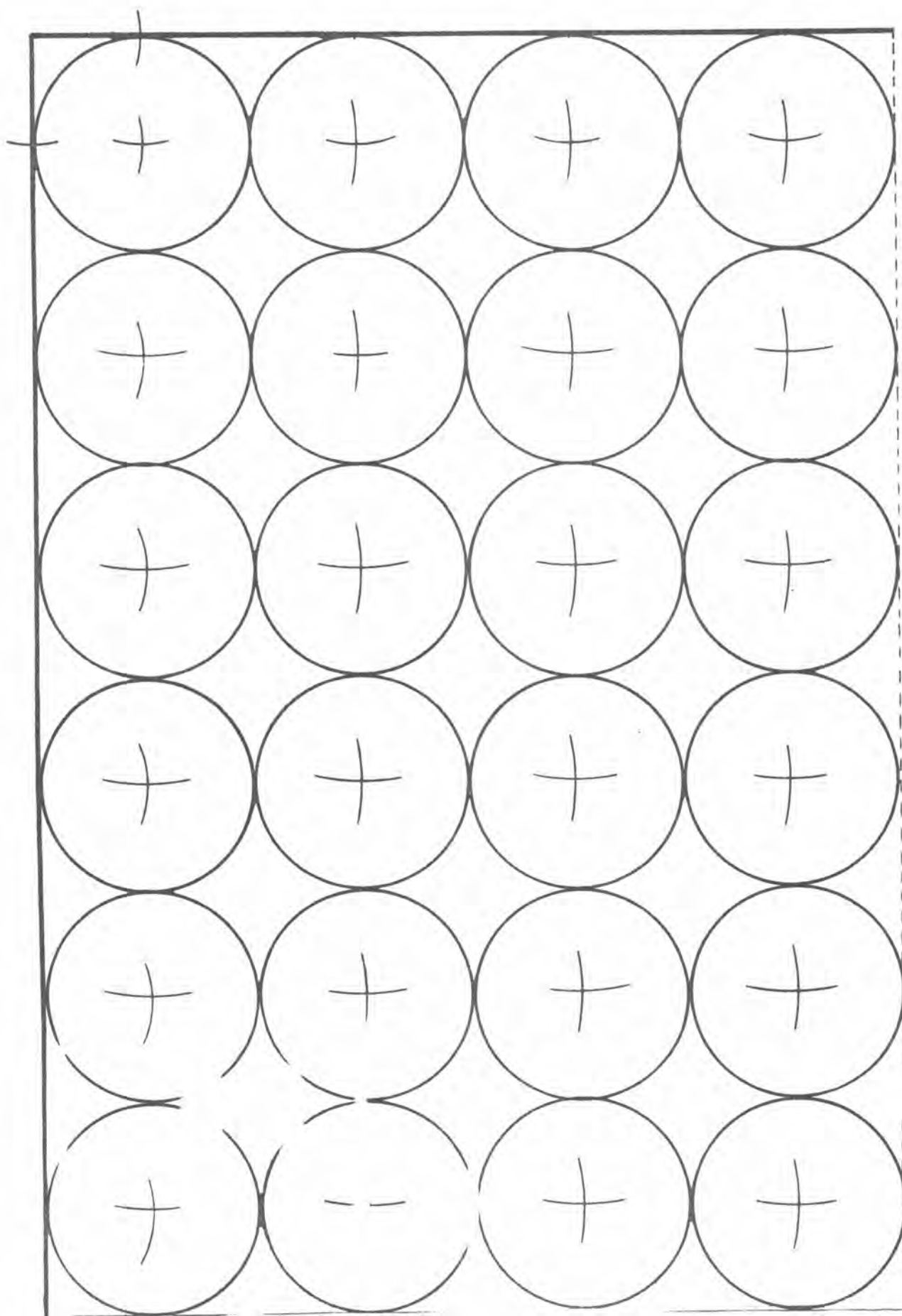
Premier cas : première disposition

24 tuyaux



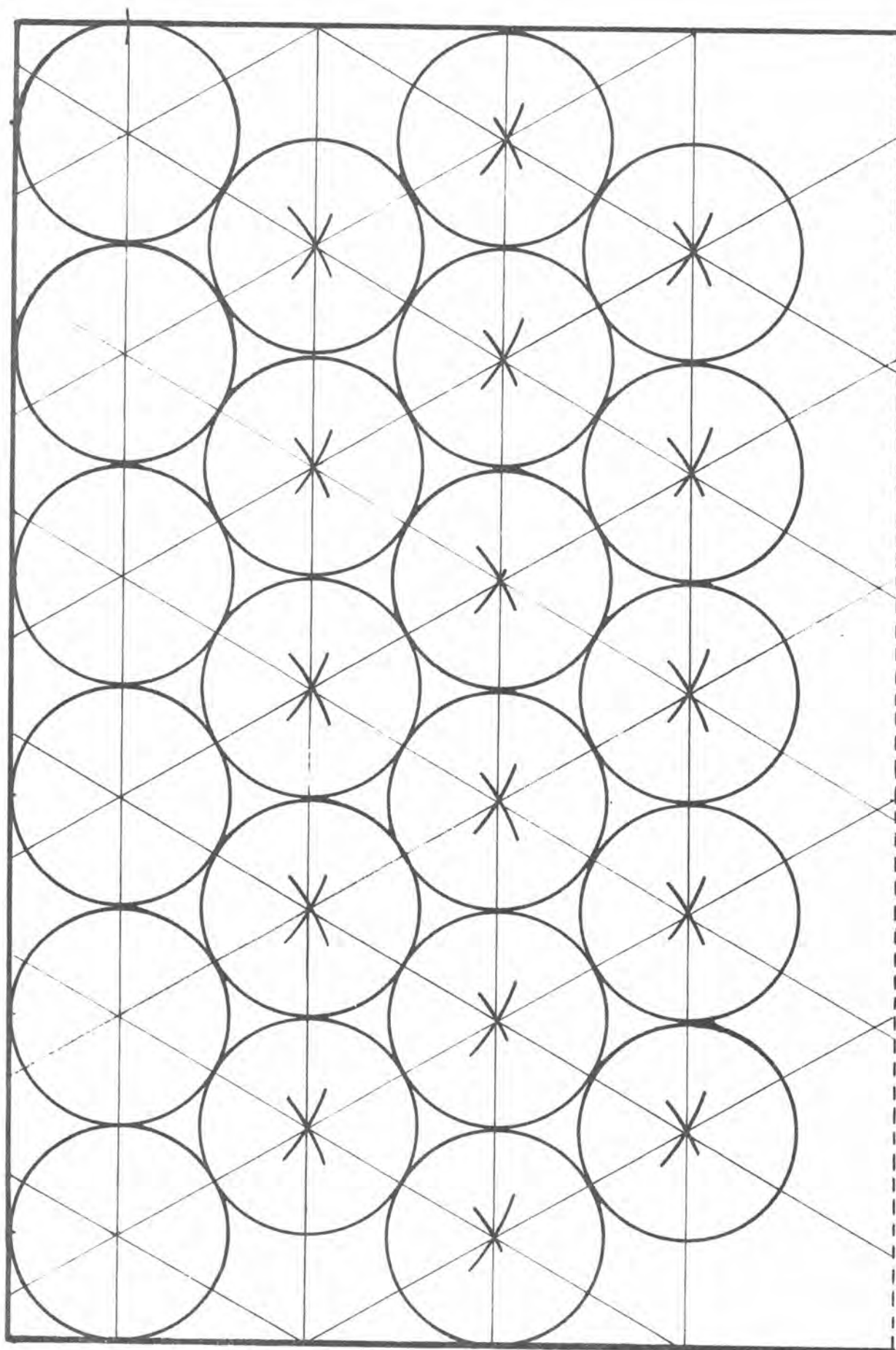
Premier cas : première disposition

24 tuyaux



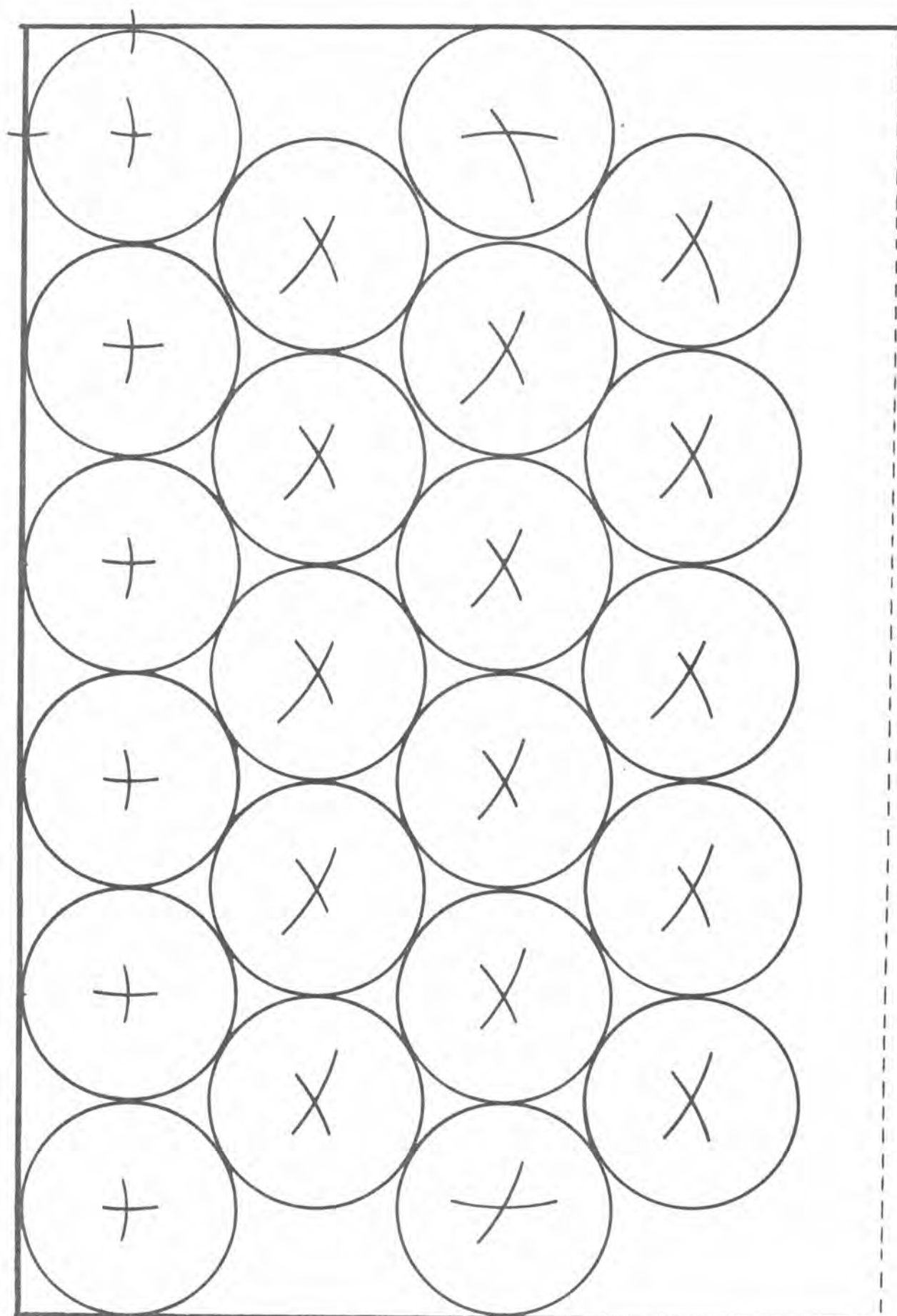
Premier cas : deuxième disposition

22 tuyaux

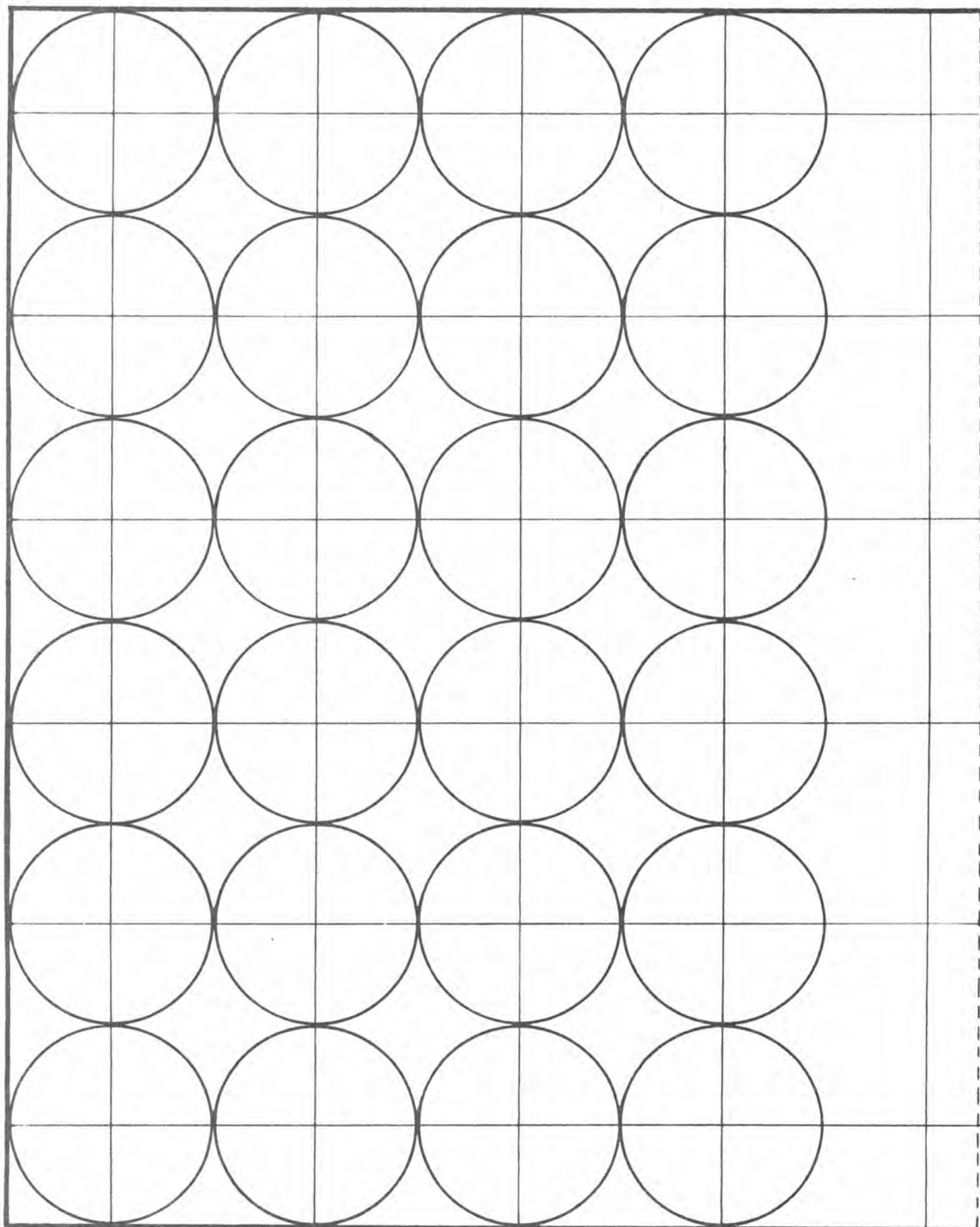


Premier cas : deuxième disposition

22 tuvaux

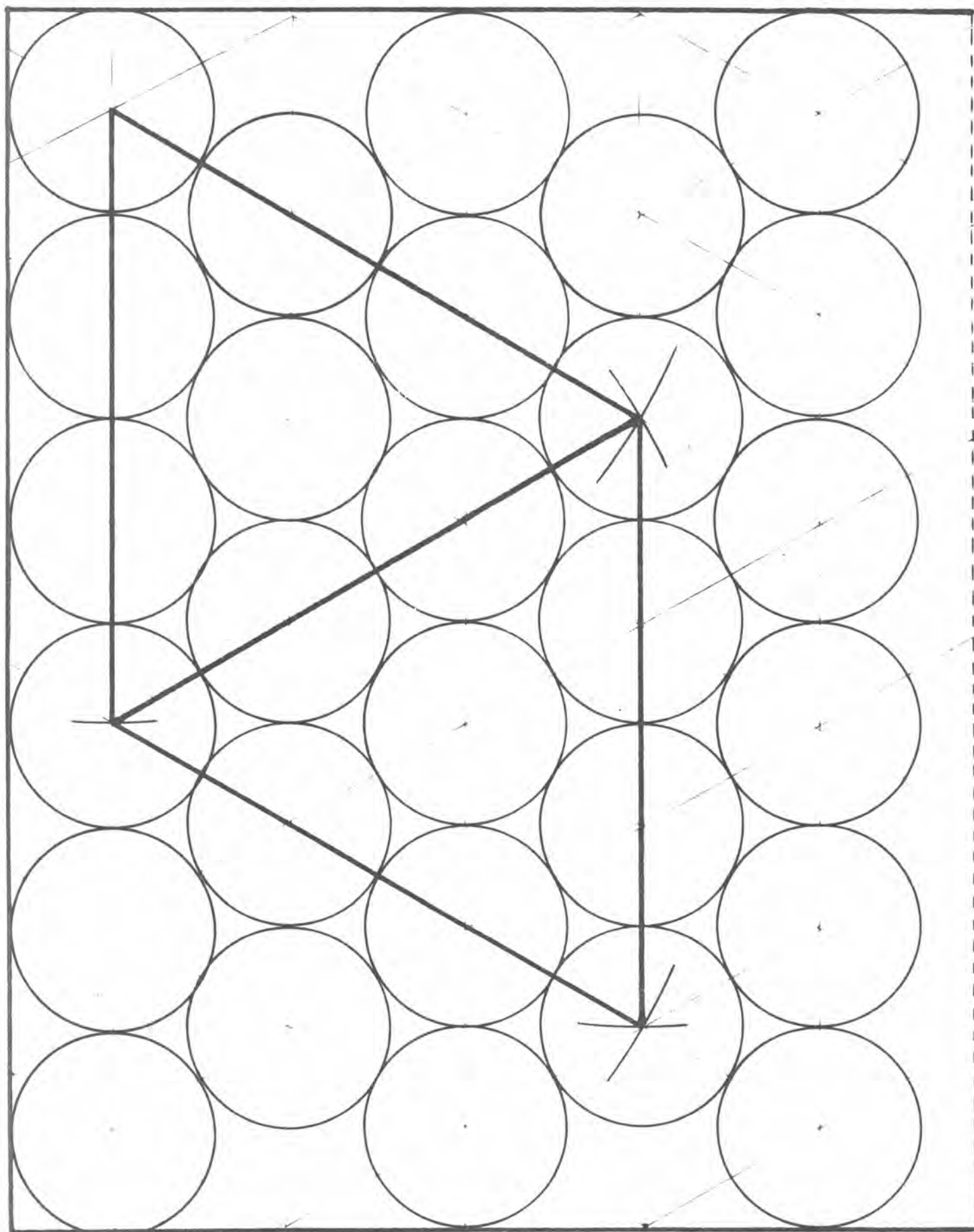


24 tuyaux



Deuxième cas : deuxième disposition

28 tuyaux

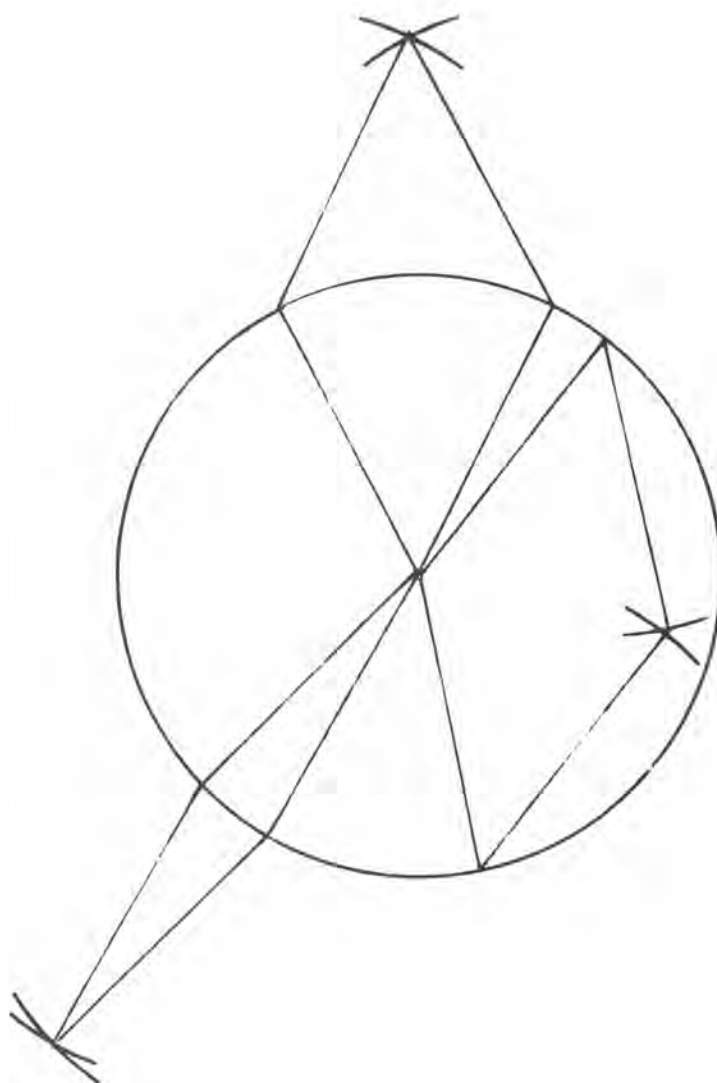


11

Les losanges

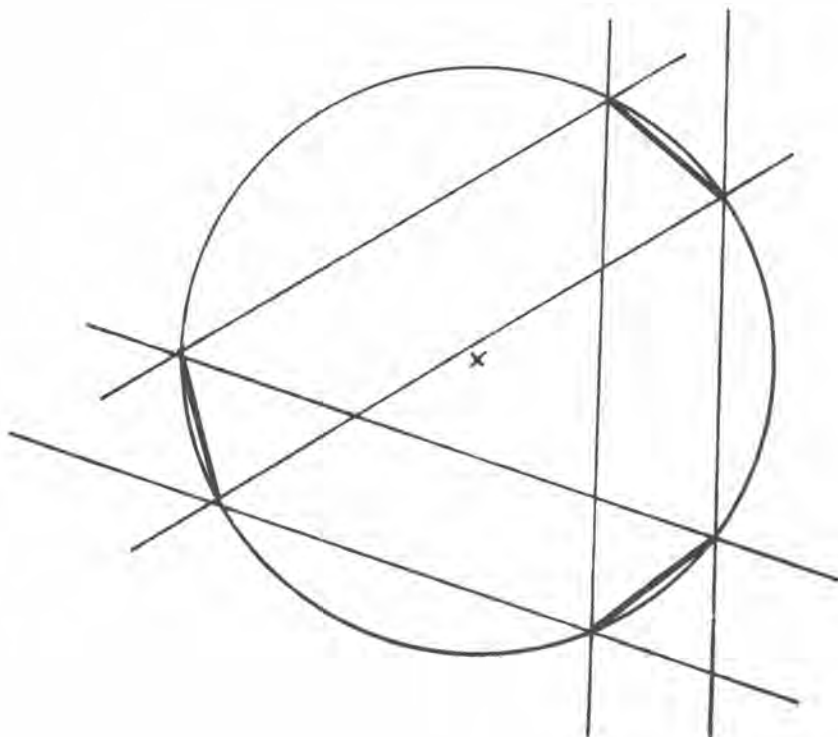
- a) Construire des losanges (mesure du côté en cm : 4) ayant un sommet en commun.

Etudier : - le déplacement des trois autres sommets
- la mesure des diagonales

Découverte des élèves : (les plus intéressantes)

- 1^{er} sommet de tous les losanges : en commun
- 2^e et 3^e sommet de tous les losanges : sur un même cercle de 4 cm de rayon ayant pour centre le sommet commun.
- 4^e sommet : de 0 à 8 cm du centre du cercle (ce qui correspond à la variation de la mesure des diagonales).

- b) Tracer un cercle et des cordes ayant même dimension.
 Joindre les extrémités de façon convenable (voir exemple).
 Etudier la direction des droites ainsi obtenues.



Remarques des élèves :

Ils ont trouvé que les droites étaient parallèles deux à deux, en découvrant d'abord qu'on obtenait des bandes.

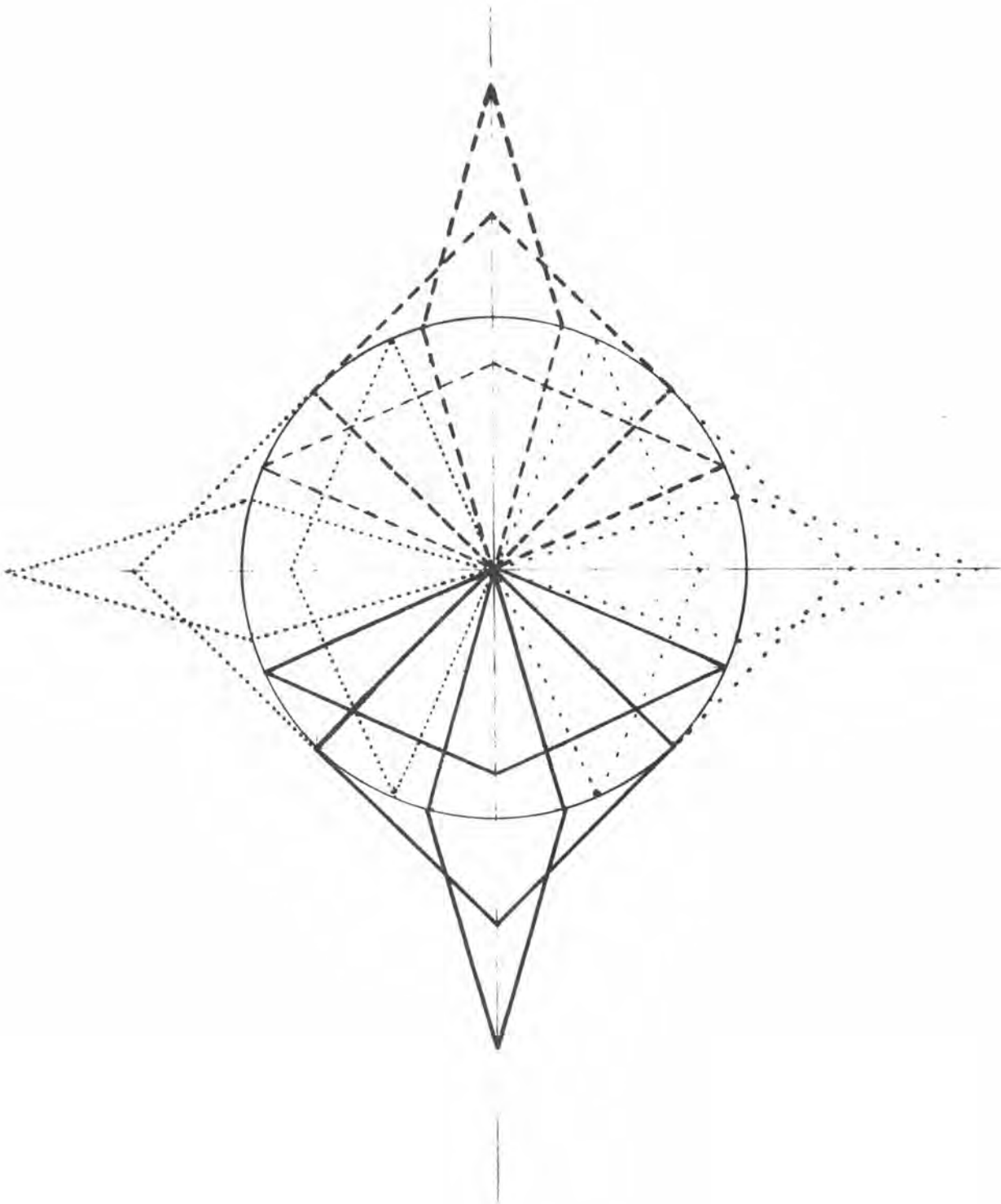
Ils ont alors tracé des perpendiculaires, puis les ont mesurées.

Ils ont alors constaté qu'elles avaient même mesure.

c) Construire des losanges ayant :

- un sommet commun
- deux sommets voisins de ce point, situés sur une parallèle à une droite donnée passant par le sommet commun.

Etudier le déplacement du quatrième sommet.

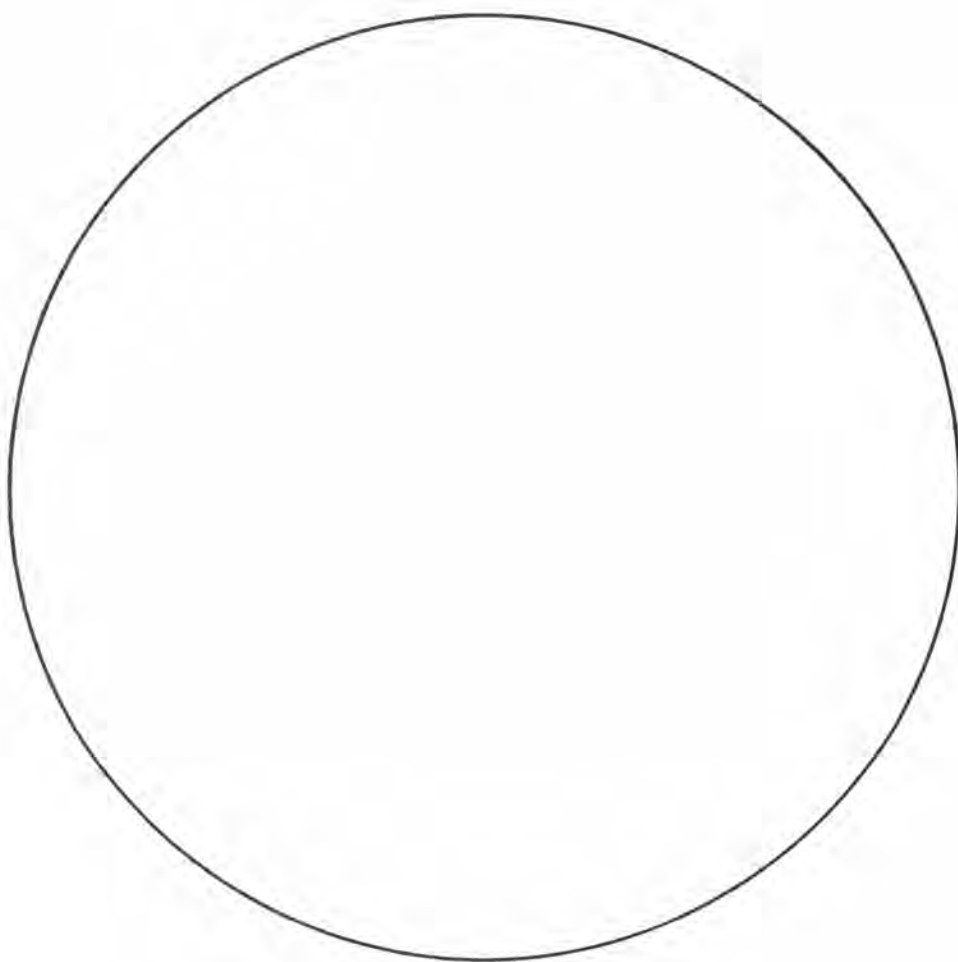


Découvertes des élèves :

- Les quatrièmes sommets sont sur une perpendiculaire à la droite donnée.
- On obtient un losange plat à la limite.
- Dans chaque classe de losanges, le losange à travers ses déformations successives, devient un carré à un moment donné.

-:-:-:-

- 12 Déterminer le centre d'un cercle (à l'aide d'un compas et d'une règle non graduée).



FICHE DE PRÉSENTATION D'UN DOCUMENT

Titre : Constructions géométriques (à la règle, au compas et à l'équerre) CM₂

Date de parution : Octobre 1979

Forme du document - Format : 21 × 29,7

Nombre de pages : 38

Auteur(s) : groupe : ELERE

animateur(s) : M. RAVENEL

Public visé : Normaliens, Instituteurs, Professeurs de Collège, Professeurs
d'Ecole Normale.

Pré-requis du lecteur visé : aucun

Motivation des auteurs :

- insister sur l'emploi des instruments de dessin pour :
- une meilleure maîtrise de ces outils
- favoriser le raisonnement en géométrie

Apport spécifique de ce document par rapport aux autres travaux de même nature :

le document expose des propositions de constructions réalisées
par des élèves de CM₂ comme solution de problèmes géométriques.

Contenu du document :

cf ci-dessus.