

$$-kx = -\frac{dE_p}{dx}$$

$$E_p = \frac{1}{2} k x^2 + \text{constante}$$

UNIVERSITÉ
DE NANCY I

il est commode de définir $E_p(x=0) = 0$ allongement nul $\leftrightarrow E_c$ nulle.

$$E_p = \frac{1}{2} k x^2$$

énergie potentielle ~~élastique~~
UNIVERSITAIRE
DE NANCY II

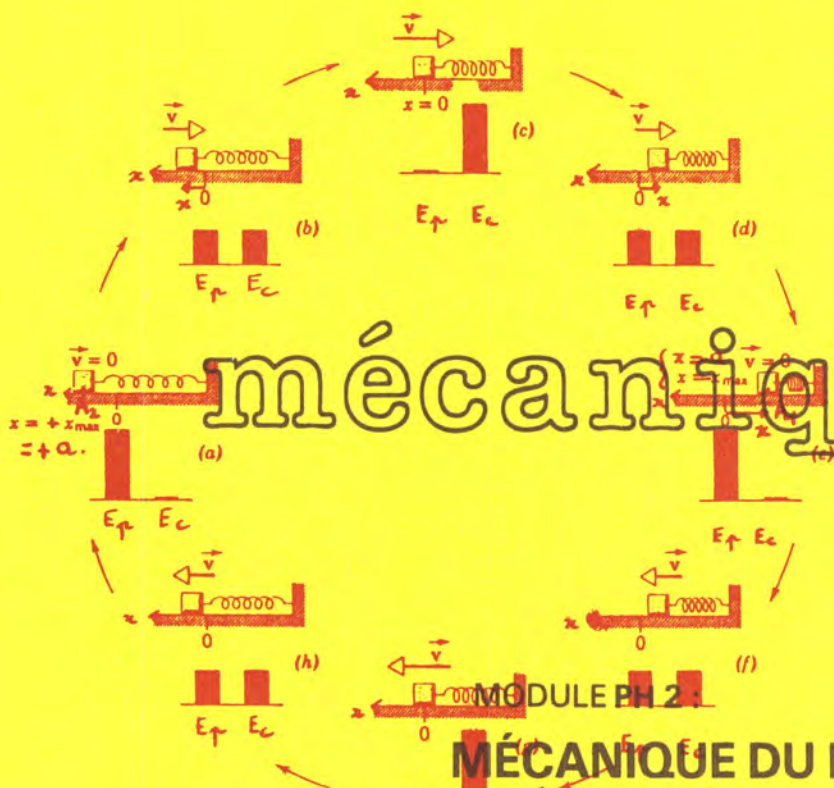
si la bille glisse sans frottement sur un plan horizontal $E = E_c + E_p = \text{constant}$

$$\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2 = E$$

l'énergie potentielle de pesant
n'intervient pas elle reste const
(plan horizontal).

Transformations $E_c \leftrightarrow$

mécanique



MODULE PH 2

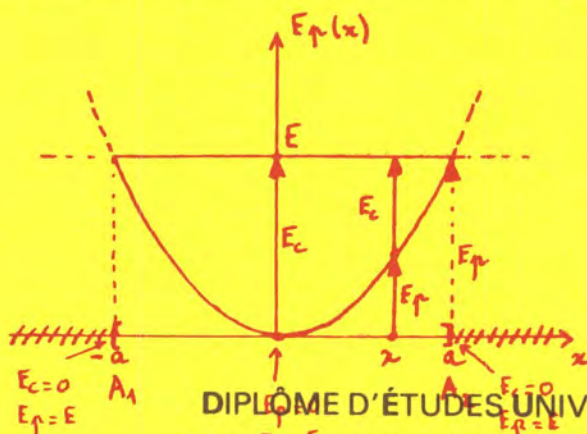
MÉCANIQUE DU POINT

(PREMIÈRE PARTIE)

COURS DE P. GUILMIN

ET J.C. ZAVATTONI

Renseignements tirés de la courbe $E_p(x) = \frac{1}{2} k x^2$.



$$E = \frac{1}{2} m v^2 + E_p = \text{constante}$$

$$\frac{1}{2} m v^2 = E - E_p \text{ nécessairement POSITIF}$$

le point matériel ne peut occuper des positions
telles que $E < E_p$; x doit appartenir à
 $[-a, +a]$.

le point matériel oscille entre A_1 et A_2 , sa
vitesse s'annule en A_1 et A_2 et change de sens (de m
à $-m$)

DIPLOME D'ÉTUDES UNIVERSITAIRES GÉNÉRALES

SCIENCES DES STRUCTURES ET DE LA MATIÈRE

MATHÉMATIQUES PHYSIQUES INFORMATIQUE

SCIENCES DE L'ÉDUCATION

[la "lecture" de la courbe $E_p(x)$ donne beaucoup d'informations sans calculs.]

© la maquette de la couverture a été réalisée par le L.E.P. Cyfflé - NANCY

Édité et imprimé par l'Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques - (Université de Nancy I - Faculté des Sciences) -
B.P. 239 - 54506 VANDOEUVRE-les-NANCY CEDEX
Dépôt légal : 4e trimestre 1986
n° de la publication : 2-85406-098-9

Le Responsable de la collection : Philippe LOMBARD

Réf. N 541₁

1) diverses branches de la mécanique

la mécanique ($\mu \eta \chi \alpha \nu \eta$: machine) a pour objet l'étude du mouvement (et aussi du repos : équilibre) des systèmes matériels

cinématique ($\kappa \iota \nu \eta \mu \alpha$: mouvement) : étude purement descriptive des mouvements.

dynamique ($\delta \nu \nu \alpha \mu \iota \varsigma$: force) : établit les relations entre les mouvements et les causes qui engendrent ceux-ci.

statique : étudie l'équilibre d'un système dans un repère donné, elle est incluse dans la dynamique. ($\sigma \tau \alpha \tau \iota \kappa \omicron \varsigma$: relatif à l'équilibre).

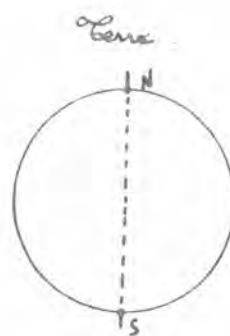
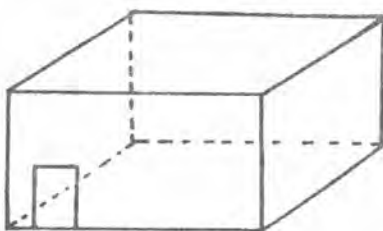
2) repérage d'un point dans l'espace et le temps :

il est possible de constater l'existence de solides (systèmes dont les distances mutuelles des éléments sont invariables). Le concept de solide est un modèle qui représente la réalité de façon approchée (déformations, dilatations...)

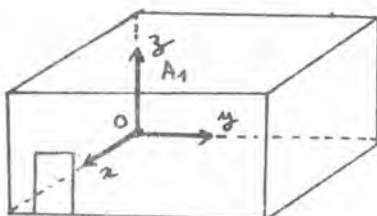
a) Comment se repérer dans l'espace ?

- on choisit un SOLIDE DE RÉFÉRENCE S

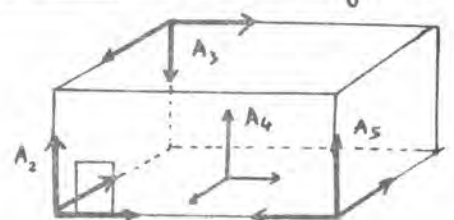
exemple : salle de classe.



- on attache un système d'axes de coordonnées au solide de référence



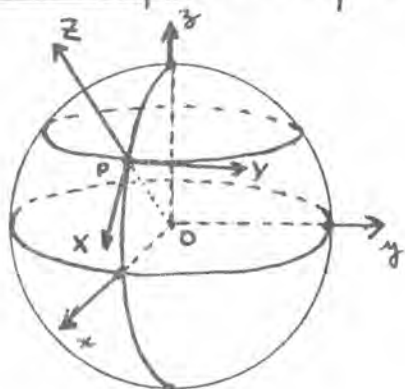
bien entendu, selon la commodité on peut en choisir d'autres.



2) l'ensemble de tous les systèmes d'axes constitue le REPÈRE lié à S.

par exemple on dira que les systèmes d'axes $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 \dots$ constituent le repère lié à la salle de classe ou plus simplement le repère de la salle de classe.

autre exemple : le repère terrestre.



$Oxyz$ et $PXYZ$ sont 2 systèmes d'axes attachés (liés) à la Terre.

ils constituent (avec tous les autres systèmes d'axes liés à la Terre) le repère lié à la Terre ou repère terrestre.

b) Repérage dans le temps : on dispose d'horloges permettant de mesurer les durées.

on choisit une horloge de référence et une date origine 0 , ce qui constitue un repère temporel ou chronologie. On peut alors repérer un événement par l'instant t auquel il se produit.

c) Référentiel : selon une définition assez répandue mais non universelle on retiendra

$$\text{repère spatial} + \text{chronologie} = \text{référentiel}.$$

dans un référentiel donné un événement ponctuel est repéré par 4 nombres (x, y, z, t) qui définissent 1 point de l'espace-temps.

[x, y, z : coordonnées spatiales. t : coordonnée temporelle].

remarque : la terminologie utilisée n'est pas universelle, on emploie souvent repère pour référentiel. D'un point de vue pratique la distinction entre repère et référentiel n'est pas importante en mécanique newtonienne (classique).

3) les unités : dans le système international SI.

a) unité de temps : seconde (s).

Depuis 1967 elle est définie à partir d'horloges atomiques.

la seconde est égale par définition à la durée de 9 192 631 770 périodes de la radiation électromagnétique correspondant ^{à la transition} entre les 2 niveaux hyperfins de l'état fondamental de l'atome de césium 133.

Anciennement la seconde était basée sur le jour solaire moyen T (intervalle de temps entre 2 passages de Soleil au méridien d'un lieu) ($T = 24 \times 60 \times 60 = 86400 \text{ s}$)

Actuellement on pose : $1 \text{ min} = 60 \text{ s}$. $1 \text{ h} = 60 \text{ min} = 3600 \text{ s}$.
 $1 \text{ jour (d)} = 24 \text{ h} = 86400 \text{ s}$.

la nouvelle définition de la seconde basée sur un étalon plus fiable a été choisie de manière que le jour (d) défini comme un multiple de la seconde reste pratiquement égal au jour solaire moyen ; avec la nouvelle définition de la seconde $T = 86400,003 \text{ s}$. $d \approx T$.

b) unité de longueur : mètre (m) μE & ρOV : mesure.

Depuis 1983 la célérité de la lumière a la valeur définitive

$$c = 2,997\,924\,58 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

le mètre est la longueur du trajet parcouru par la lumière dans le vide pendant une durée de $(1/299\,792\,458)$ seconde.

Anciennement (1790), le mètre était relié à la longueur du méridien terrestre $L = 40\,000 \text{ km}$. Avec la définition actuelle du mètre

$$L = 40\,008,08 \text{ km} .$$

4) notion de point matériel:

On appelle point matériel un élément de matière dont on peut négliger les dimensions dans un problème déterminé, sa position peut être entièrement définie à l'aide de 3 coordonnées seulement. (son orientation dans l'espace n'intervient pas dans le problème)

il faut bien considérer qu'un point matériel n'est pas simplement un "petit solide".

ex 1: un morceau très petit d'un aimant dont on étudie le mouvement dans un champ magnétique ne peut pas être considéré comme un point matériel.

ex 2: une petite bille qui roule sans glisser (il y a donc des frottements!) sur un plan incliné faisant un angle α avec l'horizontale ne peut pas être considérée comme un point matériel.

une particule (par exemple un électron) possédant un spin (propriété d'origine quantique qu'on peut se représenter de façon intuitive par une rotation propre de la particule: boule tournant sur elle-même) ne peut pas être assimilée à un point matériel si elle est dans un champ magnétique, cela n'empêche que certaines caractéristiques du mouvement peuvent être calculées en considérant l'électron comme un point matériel; on verra selon les situations.

5) domaine de validité de la mécanique classique:

la mécanique newtonienne est souvent appelée mécanique classique par opposition aux mécaniques récentes du début du 20^{ème} siècle (quantique et relativiste).

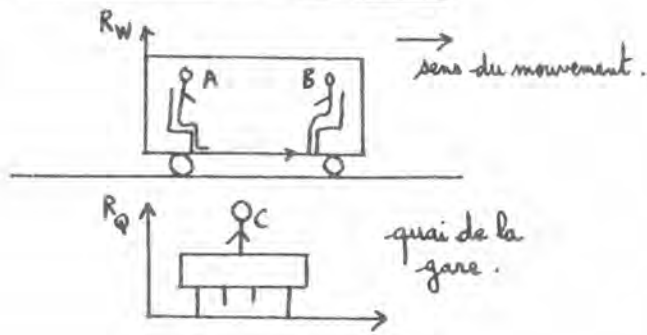
la mécanique newtonienne est une bonne approximation pour des objets dont la vitesse reste "faible" devant la célérité de la lumière dans le vide c .

(sinon il faut utiliser la théorie de la relativité restreinte: Einstein 1905).

en ce qui concerne l'utilisation de la mécanique classique comme bonne approximation de la mécanique quantique, il existe des critères particuliers qu'on ne donnera pas ici (ne pas penser en particulier qu'un système macroscopique relève toujours de la mécanique classique).

Ch 2: Pinématique du point.

1) relativité du mouvement :



B est au repos par rapport à l'observateur A

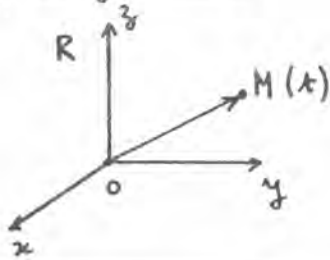
B est au repos par rapport au référentiel lié au wagon R_W .

B est en mouvement par rapport à l'observateur C.

B est en mouvement par rapport au référentiel R_Q lié au quai.

il faut préciser le référentiel par rapport auquel on étudie le mouvement

2) trajectoire :

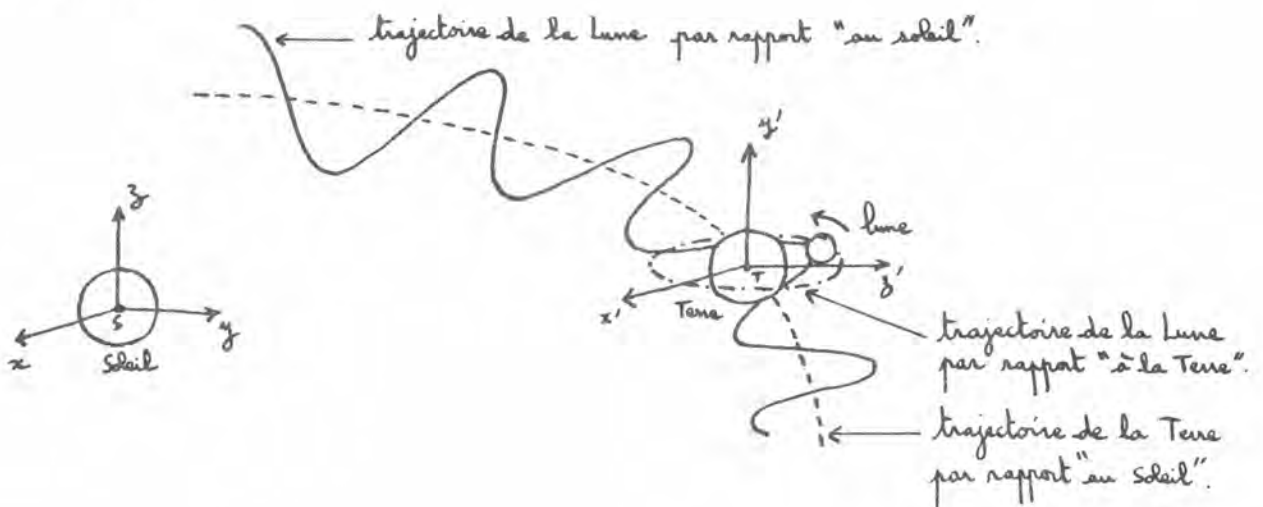


M point matériel.

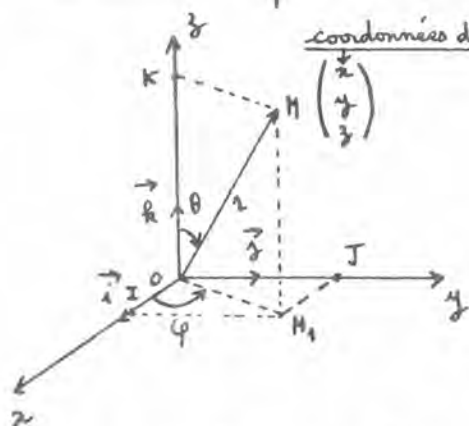
$\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ est le vecteur-position du point M à l'instant t dans le référentiel R.

on appelle trajectoire de M RELATIVEMENT au référentiel R, la courbe C ensemble des points de l'espace occupés successivement par M au cours du temps. La trajectoire d'un point matériel dépend du référentiel par rapport auquel on repère les positions.

TP: disque carton.



exercice : représentation cartésienne et sphérique du vecteur-position.



coordonnées de M.

$$\theta = (\vec{Oz}, \vec{OM}) \quad \varphi = (\vec{Ox}, \vec{OM}_1)$$

M_1 projection de M dans le plan xoy .

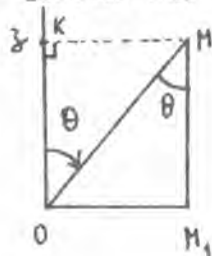
$$r = \|\vec{r}\|.$$

$$0 \leq \theta \leq \pi \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad r \geq 0.$$

(r, θ, φ) : coordonnées sphériques.

$$\vec{r} = \vec{OM} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$$

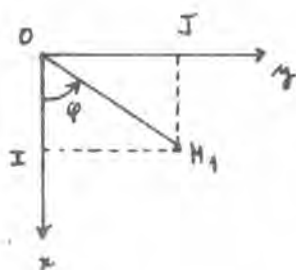
Trouver les expressions de x, y, z en fonction de r, θ, φ .



$$\sin \theta = \frac{OM_1}{OM} \quad OM_1 = OM \sin \theta = r \sin \theta.$$

$$\cos \theta = \frac{OK}{OM} \quad OK = OM \cos \theta = r \cos \theta.$$

$$z = \overline{OK} = r \cos \theta.$$



$$\cos \varphi = \frac{OI}{OM_1} \quad OI = OM_1 \cos \varphi = r \sin \theta \cos \varphi.$$

$$x = \overline{OI} = r \sin \theta \cos \varphi.$$

$$\sin \varphi = \frac{IM_1}{OM_1} = \frac{OJ}{OM_1} \quad OJ = OM_1 \sin \varphi = r \sin \theta \sin \varphi.$$

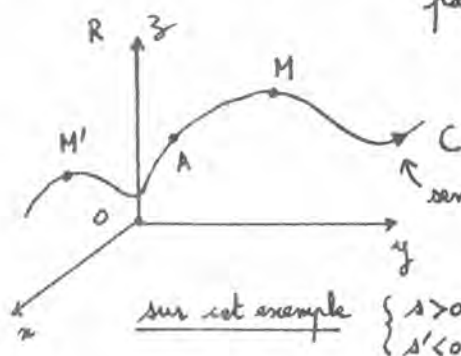
$$y = \overline{OJ} = r \sin \theta \sin \varphi.$$

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \varphi. \\ y &= r \sin \theta \sin \varphi. \\ z &= r \cos \theta. \end{aligned}$$

on pourra vérifier que $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

Abscisse curviligne :

il est possible de repérer M sur sa trajectoire C par son abscisse curviligne.



- on choisit une origine A sur C.

- on choisit un sens positif sur C.

$s = \widehat{AM}$ abscisse curviligne de M.
s est une grandeur algébrique.

sur cet exemple $\begin{cases} s > 0 \\ s' < 0 \end{cases}$

Vecteur unitaire tangent à la trajectoire :

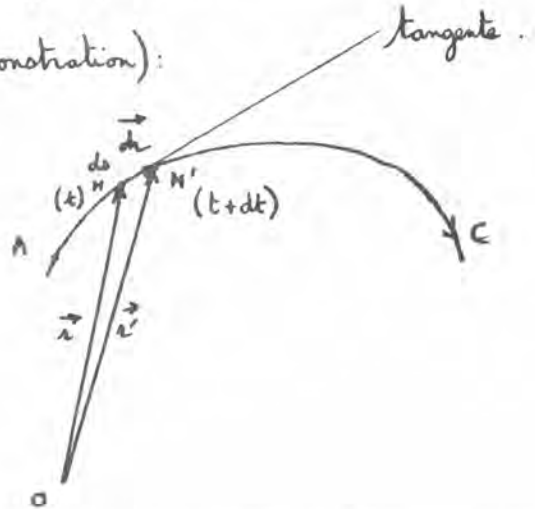
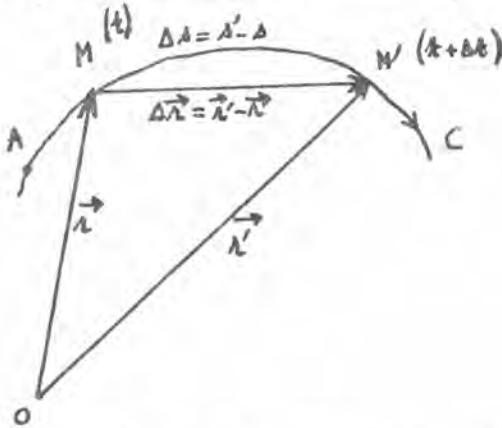
il est utile quand on étudie la vitesse :

en mathématiques on montre que (sauf dans des cas rares)

$$\boxed{\vec{T} = \frac{d\vec{r}}{ds}}$$

- vecteur unitaire porté par la tangente à la trajectoire.
- dirigé dans le sens positif de celle-ci.

essayons de le voir (ce n'est pas une démonstration) :

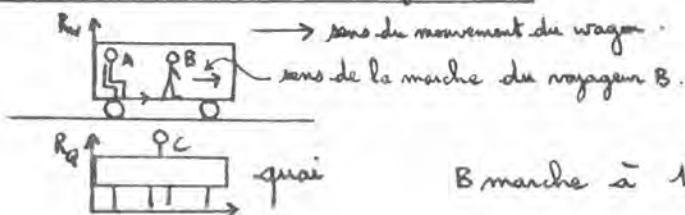


$\vec{r} + \overrightarrow{MM'} = \vec{r}'$, $\vec{r}' - \vec{r} = \overrightarrow{\Delta r} = \overrightarrow{MM'}$. si Δt "très petit" on le note dt .
 M' est très voisin de M ; $\overrightarrow{\Delta r}$ devient très petit on le note $d\vec{r}$. On "voit" que
la direction de $\overrightarrow{MM'} = d\vec{r}$ tend vers la tangente.

$\|\vec{T}\| = 1$? quand M' est très voisin de M arc $MM' \approx$ confondu avec
corde MM' d'où $\underset{\text{arc}}{|ds|} \approx \underset{\text{corde}}{\|d\vec{r}\|}$ et $\|\vec{T}\| = \frac{\|d\vec{r}\|}{|ds|} = 1$.

3) Vitesse : cette notion est utilisée dans la vie de tous les jours. Si un automobiliste a parcouru la distance Nancy $\rightarrow$ Strasbourg (150 km) en 2 heures, il dira que sa (vitesse) moyenne est 75 km/h. Il n'a pas roulé toujours à cette vitesse, le compteur indiquait tantôt 60 km/h (villes), 0 km/h (arrêt), 90 km/h etc.... L'indication du compteur est la vitesse instantanée (en module ou valeur absolue).

Nécessité de choisir un référentiel :



le wagon roule à 100 km/h par rapport à R_Q

B marche à 5 km/h par rapport à R_W .

B marche à $100 + 5 = 105$ km/h par rapport à R_Q .

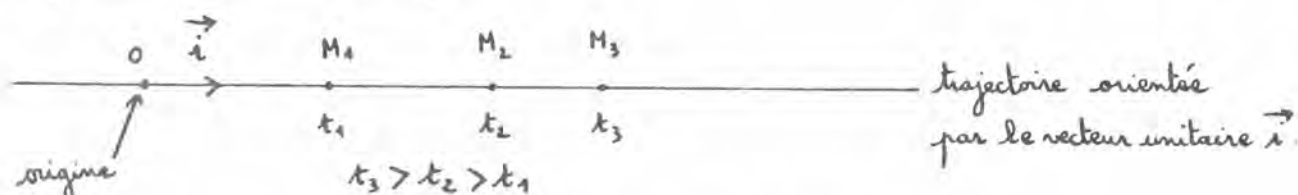
8

A) vitesse moyenne (en valeur algébrique):

définition:

le référentiel étant choisi, la vitesse moyenne par rapport au référentiel choisi est la distance parcourue (portion de trajectoire orientée parcourue) par unité de temps.

a) exemple du mouvement rectiligne:

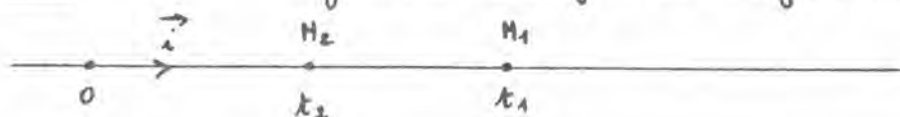


$x(t_1) = x_1 = \overline{OM_1}$ abscisse du point mobile à l'instant t_1 .

$x(t_2) = x_2 = \overline{OM_2}$ abscisse du point mobile à l'instant ultérieur t_2 .

$$v_{\text{moy}} = \frac{\overline{M_1 M_2}}{t_2 - t_1} = \frac{\overline{OM_2} - \overline{OM_1}}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad \text{unité } m.s^{-1}$$

exercice: la vitesse moyenne ainsi définie est une grandeur algébrique.



$$x_1 = 10 \text{ m.} \quad x_2 = 5 \text{ m.}$$

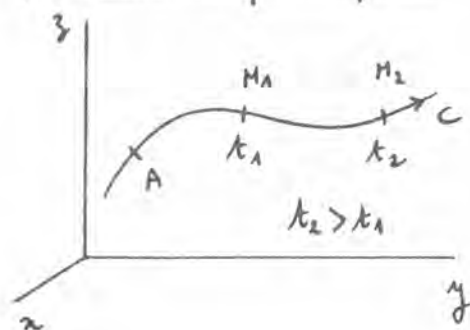
$$t_1 = 5 \text{ s.} \quad t_2 = 15 \text{ s.}$$

le mouvement a lieu dans le sens $\ominus$.

$$v_{\text{moy}} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

$$v_{\text{moy}} = \frac{5 - 10}{15 - 5} = -0,5 \text{ m.s}^{-1}$$

b) mouvement quelconque:



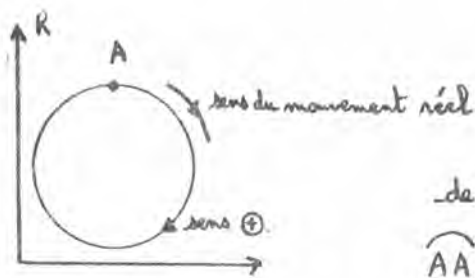
$$v_{\text{moy}} = \frac{\widehat{M_1 M_2}}{\Delta t}$$

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

$$\widehat{M_1 M_2} = \widehat{AM_2} - \widehat{AM_1} = s_2 - s_1 = \Delta s$$

$$v_{\text{moy}} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

exercice: un point mobile décrit un cercle complet de rayon $r = 1 \text{ m}$ en une durée de 10 secondes. Quelle est la vitesse moyenne du point mobile dans le référentiel d'étude?



$$v_{\text{moy}} = \frac{\widehat{AA}}{\Delta t}$$

de manière évidente $\widehat{AA}$ n'est pas nul !, $\widehat{AA} = 2\pi \times 1 \text{ m}$.

$\widehat{AA} = \widehat{A_t A_{t+\Delta t}}$ est l'arc effectivement parcouru (toute la circonférence).

$$v_{\text{moy}} = \frac{2\pi}{10} = 0,2\pi \approx 0,63 \text{ m.s}^{-1}$$

B) vitesse instantanée (en valeur algébrique) :

la vitesse moyenne donne peu d'informations, par exemple on ne sait pas sur le trajet Nancy $\rightarrow$ Strasbourg quelle était la vitesse (au compteur) au panneau d'entrée de Lurerville. La vitesse en chaque point de la trajectoire est la vitesse instantanée.

La vitesse instantanée n'est autre que la vitesse moyenne calculée sur un intervalle de temps très petit ($\Delta t \rightarrow 0 : dt$)

a) mouvement rectiligne :

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_{\text{moy}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} \quad \text{c'est la définition}$$

de la dérivée par rapport à t de $x(t)$ notée $\frac{dx}{dt}$ ou $\dot{x}$.

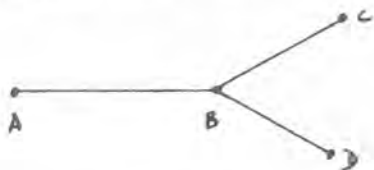
$$\boxed{v = \frac{dx}{dt} = \dot{x}}$$

b) mouvement quelconque : de même

$$\boxed{v = \frac{ds}{dt} = \dot{s}}$$

c) le vecteur - vitesse (souvent appelé la vitesse) :

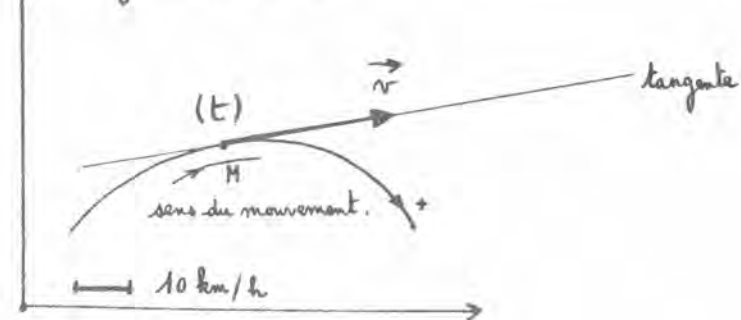
la vitesse instantanée ne renseigne pas sur l'orientation du mobile.



en B le mobile a une vitesse instantanée de 30 km/h ; va-t-il vers A, vers C ?

le vecteur - vitesse $\vec{v}(t)$ contient toutes les informations utiles.

R référentiel d'étude



$\vec{v}$ vecteur-vitesse

- il a pour support la tangente à la trajectoire au point M où se trouve le mobile.
- il a le sens du mouvement.
- le module est égal à la valeur absolue de la vitesse instantanée.

on admet l'expression du vecteur-vitesse.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad \vec{r} = \vec{OM}$$

vitesse de M par rapport au référentiel R.

$\vec{v}$ est une fonction à valeur vectorielle [variable $t \longrightarrow \vec{v}(t)$].

expression de $\vec{v}$ en utilisant le vecteur unitaire $\vec{T} = \frac{d\vec{r}}{ds}$ (par. 2)

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dt} \vec{T} \quad \frac{ds}{dt} \text{ vitesse instantanée}$$

$$\vec{v} = \frac{ds}{dt} \vec{T} = \dot{s} \vec{T}$$

D) Expression de la vitesse dans divers systèmes de coordonnées :

a) coordonnées cartésiennes :

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ base orthonormale liée à R. M (x, y, z).

$$\vec{r} = \vec{OM} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}.$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} + \frac{dz}{dt} \vec{k}.$$

les composantes de $\vec{v}$ sont $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ par rapport à R.

b) coordonnées cylindriques (ou cylindro-polaires) :

$$z = \overline{M_1 M} \quad \text{cote.}$$

Attention : la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{k})$ accompagne M dans son mouvement
 $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$ ne sont pas fixes dans R ; ils dépendent du
 temps, en particulier dans R $\frac{d\vec{u}_r}{dt} \neq \vec{0}$, $\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} \neq \vec{0}$!

composantes de $\vec{v}$:

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overline{M_1 M} = r \vec{u}_r + z \vec{k}$$

les coordonnées cylindriques de M sont (r, θ, z) .

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt} (r \vec{u}_r) + \frac{d}{dt} (z \vec{k})$$

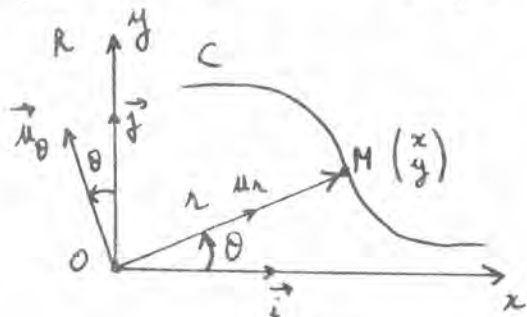
$$\vec{v} = \frac{dr}{dt} \vec{u}_r + r \underbrace{\frac{d\vec{u}_r}{dt}}_{\text{pas nul!}} + \frac{dz}{dt} \vec{k} + z \underbrace{\frac{d\vec{k}}{dt}}_{\text{nul.}}$$

$$\begin{aligned} \vec{k} & \text{ unitaire fixe dans } R \Rightarrow \frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{0}. \\ \vec{u}_r & \text{ " mobile dans } R \Rightarrow \frac{d\vec{u}_r}{dt} \neq \vec{0}. \end{aligned}$$

calcul de $\frac{d\vec{u}_r}{dt}$: $\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \frac{d\vec{u}_r}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \times \vec{u}_\theta$ (voir exercice 3) D) b))

d'où $\boxed{\vec{v} = \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta + \dot{z} \vec{k}}$

Pour le cas très important du mouvement plan, on utilise les coordonnées polaires (satellites, planètes...):



$$\boxed{\vec{r} = \overrightarrow{OM}, \quad \vec{v} = \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta.}$$

remarque importante : c'est un point délicat.

$\vec{v}$ est la vitesse de M par rapport au référentiel R (dit référentiel de définition).

si on écrit $\vec{v} = \dot{x} \vec{i} + \dot{y} \vec{j}$ on dit qu'on utilise la basse de projection $\vec{i}, \vec{j}$ liée à R ; si on écrit $\vec{v} = \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta$ on utilise la base de projection mobile $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta$ mais c'est toujours la vitesse par rapport à R ! La vitesse de M par rapport à un référentiel lié à $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta$ est évidemment NULLE !

4) Accélération : on peut définir comme pour la vitesse l'accélération moyenne ; l'accélération instantanée.

l'accélération (ou vecteur-accélération) de M par rapport à R est la dérivée par rapport au temps de la vitesse $\vec{v}$; ce vecteur mesure la modification du vecteur vitesse (en module et/ou en direction).

$$\boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}} \quad (\text{unité : } m \cdot s^{-2})$$

A) expression de l'accélération en coordonnées cartésiennes :

on obtient en dérivant $\vec{v} = \dot{x} \vec{i} + \dot{y} \vec{j} + \dot{z} \vec{k}$

$$\boxed{\vec{a} = \ddot{x} \vec{i} + \ddot{y} \vec{j} + \ddot{z} \vec{k}}$$

B) expression en coordonnées cylindriques :

$$\vec{v} = \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta + \dot{z} \vec{k}$$

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{d}{dt} (\dot{r} \vec{u}_r) + \frac{d}{dt} (r \dot{\theta} \vec{u}_\theta) + \frac{d}{dt} (\dot{z} \vec{k}) \\ &= \frac{d\dot{r}}{dt} \vec{u}_r + \dot{r} \frac{d\vec{u}_r}{dt} + \frac{dr}{dt} \dot{\theta} \vec{u}_\theta + r \frac{d\dot{\theta}}{dt} \vec{u}_\theta + r \dot{\theta} \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} + \frac{d\dot{z}}{dt} \vec{k} + \dot{z} \frac{d\vec{k}}{dt} \end{aligned}$$

mal.

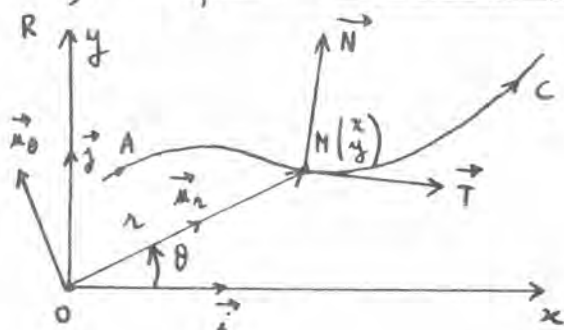
on sait que $\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \frac{d\vec{u}_r}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \vec{u}_\theta$; de même

$$\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = \frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = -\dot{\theta} \vec{u}_r.$$

on porte dans $\vec{a}$: $\vec{a} = \ddot{r} \vec{u}_r + \dot{r} \dot{\theta} \vec{u}_\theta + \dot{r} \dot{\theta} \vec{u}_\theta + r \ddot{\theta} \vec{u}_\theta - r \dot{\theta}^2 \vec{u}_r + \ddot{z} \vec{k}$

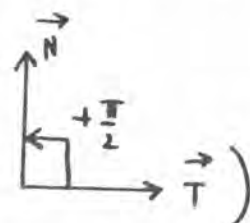
puis $\boxed{\vec{a} = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \vec{u}_r + (r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta}) \vec{u}_\theta + \ddot{z} \vec{k}}$

c) cas particulier du mouvement plan :



$$\vec{a} = \ddot{x} \vec{i} + \ddot{y} \vec{j}$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \vec{u}_r + (r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta}) \vec{u}_\theta$$



on utilise assez souvent la base mobile $(\vec{T}, \vec{N})$: pour exprimer les composantes de $\vec{a}$, on en verra un des avantages plus tard (en particulier on peut bien distinguer les rôles de $\vec{a}_T$ et $\vec{a}_N$).

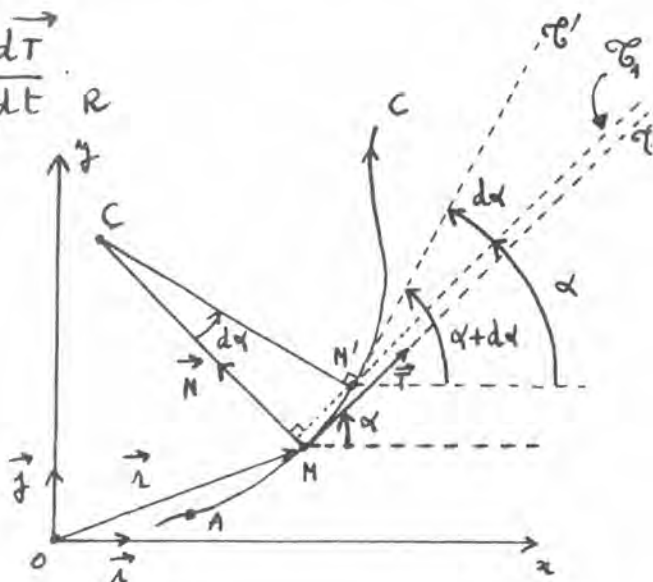
$$\text{on a } \vec{v} = \dot{s} \vec{T} = v \vec{T}$$

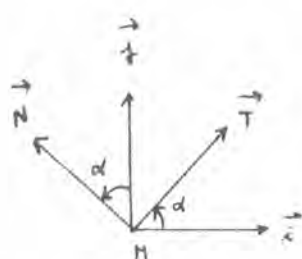
$\dot{s}$ (ou v) vitesse instantanée (valeur algébrique).

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\dot{s}}{dt} \vec{T} + \dot{s} \frac{d\vec{T}}{dt}$$

Calcul de $\frac{d\vec{T}}{dt}$: ($\vec{T}$ est unitaire mais change de direction).

exprimons $\vec{T}$ et $\vec{N}$ dans la base $\vec{i}, \vec{j}$ (fixe dans R).





voir les calculs en 3) D) b) pour $\vec{u}_n, \vec{u}_\theta$
ils sont identiques.

$$\begin{cases} \vec{T} = \cos \alpha \vec{i} + \sin \alpha \vec{j} \\ \vec{N} = -\sin \alpha \vec{i} + \cos \alpha \vec{j} \end{cases}$$

dans $R \propto$ dépend de t ; $\vec{i}$ et $\vec{j}$ ne dépendent pas de t .

$$\frac{d}{dt}(-\cos \alpha) = \frac{d}{d\alpha}(\cos \alpha) \cdot \frac{d\alpha}{dt} = -\sin \alpha \cdot \frac{d\alpha}{dt}; \text{ de même } \frac{d}{dt}(\sin \alpha) = \cos \alpha \cdot \frac{d\alpha}{dt}$$

$$\frac{d\vec{T}}{dt} = -\sin \alpha \cdot \frac{d\alpha}{dt} \vec{i} + \cos \alpha \frac{d\alpha}{dt} \vec{j} = \vec{N} \frac{d\alpha}{dt}$$

on introduit l'abscisse curviligne s :

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\alpha}{ds} \frac{ds}{dt} = \dot{s} \frac{d\alpha}{ds} \quad \widehat{MM'} = ds$$

l'angle MCM' a pour valeur $d\alpha$ (angle $\widehat{O_1 M' O_1'} = d\alpha$ et angles MCM' et $\widehat{O_1 M' O_1'}$ angles à côtés perpendiculaires).

si on appelle $R = CM$ rayon de courbure en M (autour de M la trajectoire est localement assimilable à un cercle centré en C de rayon R).

$$ds = R d\alpha \quad \frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{R} \quad \frac{d\alpha}{dt} = \frac{\dot{s}}{R}$$

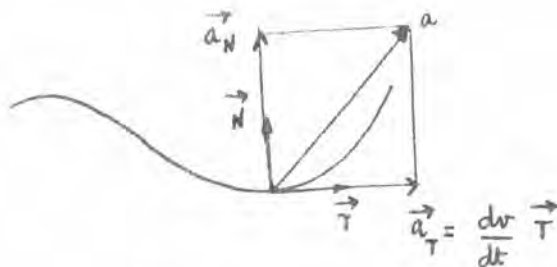
$$\frac{d\vec{T}}{dt} = \vec{N} \frac{d\alpha}{dt} = \frac{\dot{s}}{R} \vec{N}$$

$$\text{d'où } \vec{a} = \frac{d\dot{s}}{dt} \vec{T} + \frac{\dot{s}^2}{R} \vec{N} \quad (\dot{s} = v)$$

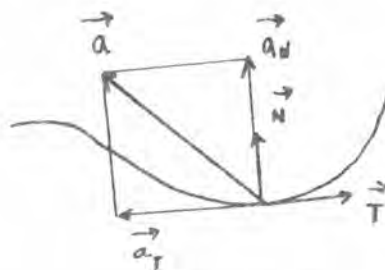
$$\boxed{\vec{a} = \ddot{s} \vec{T} + \frac{v^2}{R} \vec{N}} \quad (\ddot{s} = \frac{dv}{dt})$$

$\ddot{s} = \frac{dv}{dt}$ accélération tangentielle (signe quelconque).

$\frac{v^2}{R}$ accélération normale (toujours positive)
ou nulle.



$$\ddot{s} = \frac{dv}{dt} > 0.$$



$$\ddot{s} = \frac{dv}{dt} < 0.$$

Rôles respectifs de $\vec{a}_T$ et $\vec{a}_N$:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad d\vec{v} = \vec{a} dt.$$

$d\vec{v}$ variation de la vitesse pendant dt secondes.

$$d\vec{v} = \vec{a}_T dt + \vec{a}_N dt.$$

rôle de $\vec{a}_T$	rôle de $\vec{a}_N$
t $\vec{v}(t)$ $t+dt$ $\vec{v}$ $d\vec{v} = \vec{a}_T dt$ $\vec{v}(t+dt)$ $\vec{a}_T$ est relié au changement de la norme du vecteur vitesse	t $\vec{v}(t)$ $t+dt$ $\vec{v}(t+dt)$ $d\vec{v} = \vec{a}_N dt$ $\vec{a}_N$ est relié au changement de la direction du vecteur vitesse.

5) Quelques définitions générales :

par définition le mouvement d'un point est accéléré si $\|\vec{v}\|$ ^{augmente} (est une fonction croissante ^{de t}); retardé si $\|\vec{v}\|$ ^{diminue} (est une fonction décroissante ^{de t}); uniforme si $\|\vec{v}\|$ est une constante.

remarque : cette définition correspond bien au vocabulaire commun.

il faut étudier le signe de $\frac{d\|\vec{v}\|}{dt}$:

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} \quad \text{on pose } u = \vec{v} \cdot \vec{v}$$

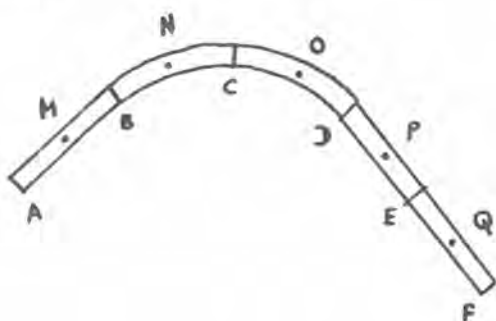
$$\frac{d\|\vec{v}\|}{dt} = \frac{d(\sqrt{u})}{dt} = \frac{\dot{u}}{2\sqrt{u}} \quad \left(\dot{u} = \frac{du}{dt} \right).$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{v} \cdot \vec{v}) = \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = 2 \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = 2 \vec{v} \cdot \vec{a}$$

$$\frac{d\|\vec{v}\|}{dt} = \frac{2 \vec{v} \cdot \vec{a}}{2 \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{\|\vec{v}\|} \quad \text{le signe de } \frac{d\|\vec{v}\|}{dt} \text{ est le même que celui de } \vec{v} \cdot \vec{a}.$$

$\vec{v} \cdot \vec{a} > 0$	angle entre $\vec{v}$ et $\vec{a}$ aigu :	mouvement accéléré
$\vec{v} \cdot \vec{a} < 0$	obtus :	retardé
$\vec{v} \cdot \vec{a} = 0$	$\vec{a} \perp \vec{v}$ ou $\vec{a} = \vec{0}$	: mouvement uniforme

exercice :



Une voiture (on peut la considérer ici comme un point matériel) aborde, après une ligne droite AB, une courbe BD. La vitesse garde même module de A jusqu'en C. La voiture accélère jusqu'en E, ensuite la vitesse reste constante.

Dessiner de manière qualitative le vecteur accélération de la voiture en M, N, O, P, Q. (référentiel d'étude = R_{sol}).

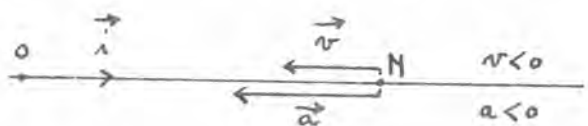
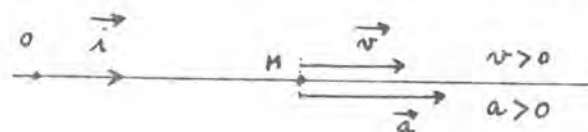
6) Etude de 2 mouvements classiques :

A) le mouvement rectiligne : la trajectoire est une droite (segment de droite).



$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x \vec{i} \quad \vec{v} = \frac{dx}{dt} \vec{i} = v \vec{i} \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt} \vec{i} = \frac{dv}{dt} \vec{i} = a \vec{i}$$

a) relation vectorielle entre $\vec{v}$ et $\vec{a}$: (cas possibles $\vec{a} \neq \vec{0}$)

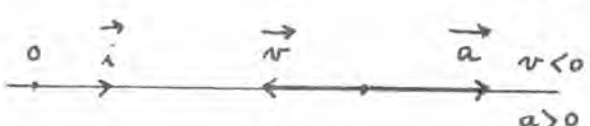
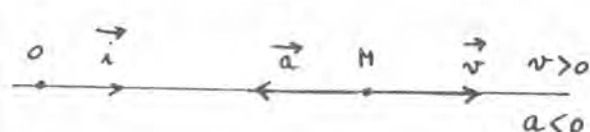


$$\vec{v} \cdot \vec{a} = va > 0$$

$\vec{v}$ et $\vec{a}$ pointent dans le même sens.
 v et a sont de même signe

$$\|\vec{v}\| = |v| \text{ augmente.}$$

Mouvement accéléré.



$$\vec{v} \cdot \vec{a} = va < 0$$

$\vec{v}$ et $\vec{a}$ pointent en sens contraires.
 v et a sont de signes contraires.

$$\|\vec{v}\| = |v| \text{ diminue.}$$

Mouvement retardé (décéléré)

remarque : on ne fera pas l'erreur fréquente $a < 0 \Rightarrow$ mouvement retardé;
 $\triangle$ il faut regarder les 2 signes de a et de v !

b) mouvement rectiligne uniforme : (MRU).

$v = \text{constante} = v_0$. le vecteur accélération est nul ($\frac{dv}{dt} = a = 0$).

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \quad dx = v_0 dt \quad x = v_0 t + \text{constante.}$$

les conditions initiales étant : à $t = 0$ $x = x_0$ alors $x_0 = v_0 \times 0 + \text{constante}$
 d'où $x = v_0 t + x_0$

MRU : $v = v_0$ $a = 0$ $x = v_0 t + x_0$

c) le mouvement rectiligne uniformément varié (MRUV):

$$a = \text{constante} = a_0.$$

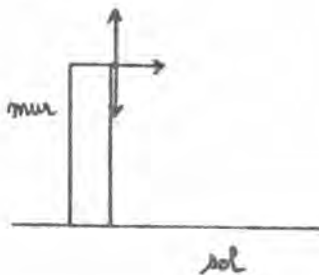
$$\frac{dv}{dt} = a_0 \quad v = a_0 t + v_0 \quad (\text{si à } t=0 \quad v=v_0.)$$

$$\frac{dx}{dt} = v \quad x = \frac{1}{2} a_0 t^2 + v_0 t + x_0 \quad (\text{si à } t=0 \quad x=x_0.)$$

MRUV	$a = a_0$	$v = a_0 t + v_0$	$x = \frac{1}{2} a_0 t^2 + v_0 t + x_0$
------	-----------	-------------------	---

si $|v|$ augmente, il est accéléré.
 si $|v|$ diminue, il est décéléré.

Exercice :

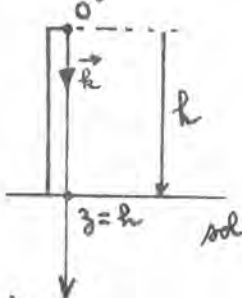


En haut d'un mur on lance 3 balles identiques avec la même vitesse initiale V_0 . (V_0 est un nombre positif)

- l'une verticalement vers le haut. ①.
- l'autre verticalement vers le bas. ②.
- la troisième à l'horizontale. ③.

- a) calculer les instants t_1, t_2, t_3 d'arrivée au sol ; les comparer ?
 b) calculer les vitesses v_1, v_2, v_3 d'arrivée au sol ; les comparer ?

le référentiel d'étude est le référentiel du sol. (R_S).



Oz axe lié à R_S . O origine des espaces.

$a = g$ (constante). (on néglige la résistance de l'air)

l'origine des temps étant choisie à l'instant où on lâche la balle (en O).

a) $\vec{z}$
 cas ①. $\vec{v} = -V_0 \vec{k}$ en $t=0$.

$$v = g t - V_0.$$

$$z = \frac{1}{2} g t^2 - V_0 t.$$

arrivée au sol : $z = h$

$$h = \frac{1}{2} g t^2 - V_0 t$$

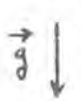
$$\frac{1}{2} g t^2 - V_0 t - h = 0.$$

une des 2 racines est négative ; elle n'a pas de signification physique.

$$\Delta = V_0^2 + 2gh.$$

$t_1 = \frac{V_0 + \sqrt{V_0^2 + 2gh}}{g}$
--

cas ② :



$$\vec{v} = V_0 \vec{k} \text{ à } t=0$$

$$v = gt + V_0 \quad z = \frac{1}{2}gt^2 + V_0 t$$

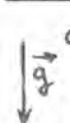
arrivée au sol $z = h \quad \frac{1}{2}gt^2 + V_0 t - h = 0$

$$\Delta = V_0^2 + 2gh$$

la seule racine positive donne

$$t_2 = \frac{-V_0 + \sqrt{V_0^2 + 2gh}}{g}$$

cas ③ :



$$\vec{v} = V_0 \vec{i} \text{ à } t=0$$

ce n'est plus un mouvement rectiligne

$$\vec{a} = g \vec{k} \text{ (constante } g > 0)$$

$$\vec{a} = \ddot{x} \vec{i} + \ddot{y} \vec{j} + \ddot{z} \vec{k}$$

$$\ddot{x} = 0 \quad \ddot{y} = 0 \quad \ddot{z} = g$$

il faut intégrer ces 3 équations :

$$\ddot{x} = 0 \Rightarrow \dot{x} = \text{constante} = V_0 \quad x = V_0 t \quad (t=0, x=0)$$

$$\ddot{y} = 0 \quad \dot{y} = \text{constante} = 0 \text{ (car en } t=0, \dot{y}=0) \quad y = \text{constante} = 0$$

$$\ddot{z} = g \quad \dot{z} = gt + \text{constante} = gt \text{ (car en } t=0, \dot{z}=0) \text{ (car en } t=0, y=0)$$

$$z = \frac{1}{2}gt^2 + \text{constante} = \frac{1}{2}gt^2 \text{ (car en } t=0, z=0)$$

$$y=0 \quad x=V_0 t \quad z=\frac{1}{2}gt^2 \text{ mouvement dans le plan } xoz$$

en passant remarquons que la trajectoire est une parabole d'équation $z = \frac{1}{2}g \frac{x^2}{V_0^2}$

arrivée au sol $z = h \quad h = \frac{1}{2}gt^2$

$$t_3 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$t_3 = \frac{\sqrt{2gh}}{g}$$

$$t_1 > t_2, \text{ en effet } t_1 - t_2 = \frac{2V_0}{g} > 0$$

$$t_1 > t_3, \text{ on compare } V_0 + \underbrace{\sqrt{V_0^2 + 2gh}}_{> \sqrt{2gh}} \text{ et } \sqrt{2gh}$$

$$t_3 > t_2 ?$$

$$(V_0 + \sqrt{2gh})^2 > V_0^2 + 2gh \quad \begin{cases} (a+b)^2 > a^2 + b^2 \\ \text{si } a > 0 \text{ et } b > 0 \end{cases}$$

comme $V_0 + \sqrt{2gh} > 0$

$$V_0 + \sqrt{2gh} > \sqrt{V_0^2 + 2gh}$$

$$\sqrt{2gh} > -V_0 + \sqrt{V_0^2 + 2gh}$$

d'où $t_3 > t_2$

$$\boxed{t_1 > t_3 > t_2}$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \rightarrow & \downarrow \end{array}$$

résultat conforme à l'intuition, au moins $t_1 > t_2$.

b) cas 1 : $v_1 = g t_1 - V_0 = \sqrt{V_0^2 + 2gh}$.

2 : $v_2 = g t_2 + V_0 = \sqrt{V_0^2 + 2gh}$.

3 : $v_3 = \|\vec{v}_3\|_{\text{sol}} = \left(\sqrt{v_x^2 + v_z^2} \right)_{\text{sol}}$

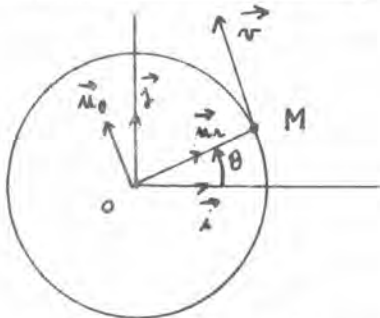
$$v_3 = \sqrt{V_0^2 + 2gh}$$

$$v_x = V_0 \quad (\forall t).$$

$$v_z = g t_3 = \sqrt{2gh}.$$

$$\boxed{v_1 = v_2 = v_3}$$

B) le mouvement circulaire :



trajectoire = cercle dans le référentiel R.

base $\vec{i}, \vec{j}$ liée à R.

base $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta$ mobile dans R.

$$\vec{OM} = R \vec{u}_r.$$

on peut reprendre les relations déjà vues en coordonnées polaires donnant $\vec{v}$ et $\vec{a}$ en y faisant $R = \text{constante } \forall t$ donc $\dot{R} = \ddot{R} = 0$.

ou directement : $\vec{v} = R \frac{d\vec{u}_r}{dt} = R \dot{\theta} \vec{u}_\theta$

$$\boxed{\vec{v} = R \dot{\theta} \vec{u}_\theta}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = R \ddot{\theta} \vec{u}_\theta + R \dot{\theta} \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = R \ddot{\theta} \vec{u}_\theta - R \dot{\theta}^2 \vec{u}_r.$$

$$\boxed{\vec{a} = -R \dot{\theta}^2 \vec{u}_r + R \ddot{\theta} \vec{u}_\theta}$$

vocabulaire :

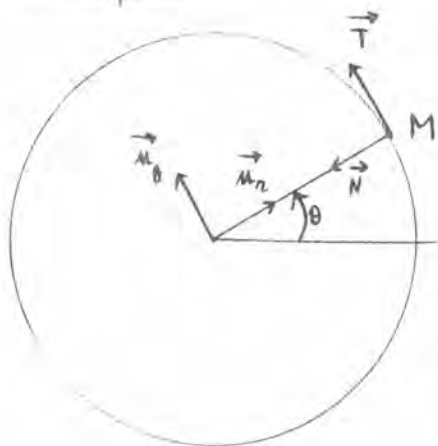
$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$ souvent notée ω : vitesse angulaire (algébrique) en radians/seconde.

$\ddot{\theta}$ accélération angulaire.

$-R \dot{\theta}^2$ accélération radiale (centripète), normale.

$R \ddot{\theta}$ accélération orthoradiale (tangentielle).

Remarque :



Dans le cas d'un mouvement quelconque

radiale PAS SYNONYME de normale.
orthoradiale PAS SYNONYME de tangentielle.

Pour le mouvement circulaire :

orthoradiale $\equiv$ tangentielle ($\vec{T} = \vec{u}_\theta$)

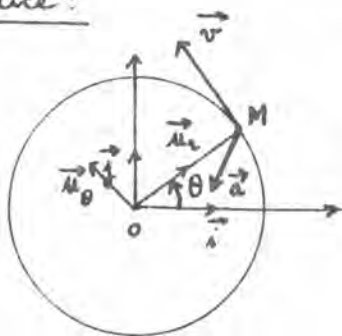
radiale $\equiv$ normale en faisant toutefois attention que $\vec{u}_r = -\vec{N}$.

Dans la base $\vec{T}, \vec{N}$ on a vu que
$$\begin{cases} \vec{v} = \dot{s} \vec{T} = v \vec{T} \\ \vec{a} = \ddot{s} \vec{T} + \frac{v^2}{R} \vec{N} \end{cases} \quad \left(\ddot{s} = \frac{dv}{dt} \right)$$

comme $\vec{u}_\theta = \vec{T}$ on a $\boxed{v = R \dot{\theta} = R \omega}$.

Résultat à retenir : dans un mouvement circulaire l'accélération normale pointe vers le centre du cercle (centripète) ; le sens de l'accélération tangentielle est variable (selon le signe de $\ddot{\theta}$).

Exercice :



a) le mouvement est-il accéléré, décéléré ?

b) quel est le signe de $\dot{\theta}$, de $\ddot{\theta}$?
pour le point M.

a) $\vec{v} \cdot \vec{a} < 0$ (angle entre $\vec{a}$ et $\vec{v}$ obtus) : mouvement décéléré.
 $\|\vec{v}\|$ diminue.

b) $v = R \dot{\theta}$ $\vec{v} = v \vec{u}_\theta$ $\vec{v}$ dans le sens de $\vec{u}_\theta$ $\underline{v > 0 \quad \dot{\theta} > 0}$

$\vec{a}_{\text{tangentielle}} = R \ddot{\theta} \vec{u}_\theta$ (vecteur projection de $\vec{a}$ sur $\vec{u}_\theta$) pointe en sens contraire de $\vec{u}_\theta$: $\underline{\ddot{\theta} < 0}$.

mouvement circulaire uniforme :

vitesse angulaire $\dot{\theta} = \omega = \text{constante}$. $v = R \dot{\theta} = \text{constante}$.

$$\vec{v} = R \dot{\theta} \vec{u}_\theta \quad \vec{a} = -R \dot{\theta}^2 \vec{u}_r = -\frac{v^2}{R} \vec{u}_r$$

la norme de $\vec{v}$ reste constante ($\vec{a}_{\text{tang}} = \vec{0}$) ; seule existe $\vec{a}_{\text{centrifète}}$ (modification de la direction de $\vec{v}$).

la durée d'une révolution (d'un tour) est la période en s, la fréquence N est le nombre de tours en 1 s

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$N = \frac{1}{T} \text{ en } s^{-1}$$

le vecteur vitesse angulaire $\vec{\omega}$:

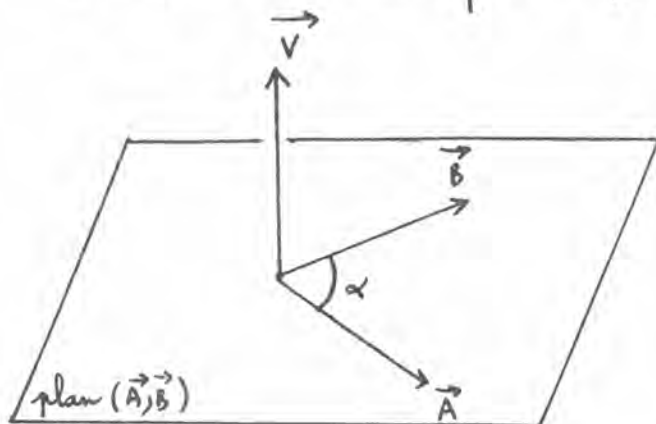
le produit vectoriel :

$\vec{V} = \vec{A} \wedge \vec{B}$ $\vec{V}$ produit vectoriel des vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$.
 $\vec{A}$ et $\vec{B}$ n'étant pas colinéaires.

- $\vec{V}$ est perpendiculaire au plan déterminé par $\vec{A}$ et $\vec{B}$.

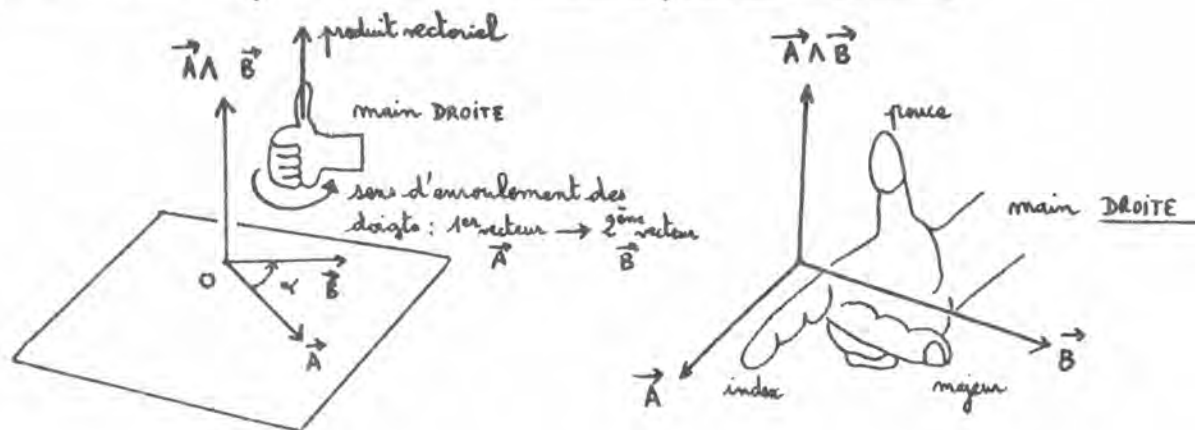
- son module est $\|\vec{V}\| = \|\vec{A}\| \cdot \|\vec{B}\| |\sin \alpha|$

- son sens est tel que $\vec{A}, \vec{B}, \vec{V}$ forment un trièdre direct.



il existe plusieurs procédés pour retrouver le sens du produit vectoriel.

2 méthodes pour retrouver le sens du produit vectoriel :



propriétés :

$$\vec{A} \wedge \vec{A} = \vec{0} \quad (\lambda \vec{A}) \wedge \vec{B} = \lambda (\vec{A} \wedge \vec{B})$$

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = -\vec{B} \wedge \vec{A} \quad \vec{A} \wedge (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \wedge \vec{B} + \vec{A} \wedge \vec{C}$$

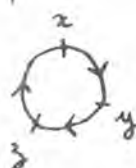
composantes de $\vec{V}$ sur une base cartésienne :

$$V_x = A_y B_z - A_z B_y \quad V_y = A_z B_x - A_x B_z \quad V_z = A_x B_y - A_y B_x$$

Moyen mnémotechnique :

$\vec{A}$	A_x	A_y	A_z
$\vec{B}$	B_x	B_y	B_z

composante $V_x = A_y B_z - B_y A_z$

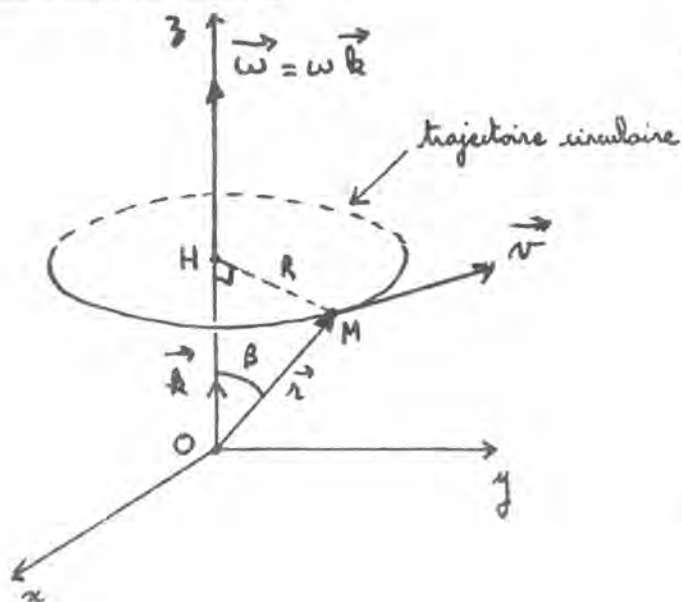


puis $x \rightarrow y \quad y \rightarrow z \quad z \rightarrow x$

exercice : Montrer que $\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) = \vec{V}_2 (\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_3) - \vec{V}_3 (\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2)$

conseil : on pourra placer Ox selon $\vec{V}_3$ et l'axe Oy de sorte que $\vec{V}_2$ soit dans le plan xOy .

le vecteur $\vec{\omega}$:



on introduit le vecteur

$$\vec{\omega} = \omega \vec{k}.$$

(ω algébrique)

$$\vec{v} = R \vec{\theta} = R \vec{\omega}.$$

$$\sin \beta = \frac{R}{OM} = \frac{R}{r} \quad R = r \sin \beta.$$

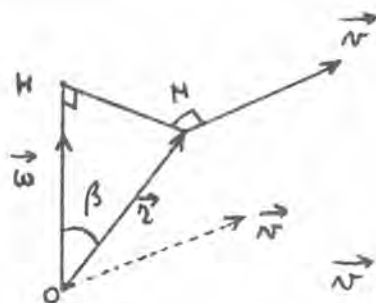
$$v = r \sin \beta \omega.$$

le vecteur vitesse (linéaire) $\vec{v}$ est donné par la relation

$$\boxed{\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}}$$

vérifions ceci :

direction :



$\vec{v}$ est perpendiculaire à HM .

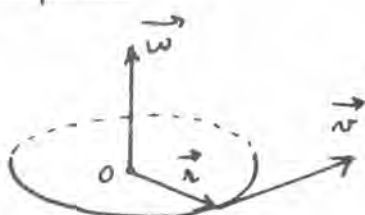
or HM est un segment du plan défini par $(\vec{\omega}, \vec{r})$.

$\vec{v}$ est bien perpendiculaire au plan $(\vec{\omega}, \vec{r})$.

module : $\|\vec{v}\| = \|\vec{\omega}\| \cdot \|\vec{r}\| \cdot |\sin \beta|$ (ce qu'il faut)

sens : figure $\omega > 0$ le mobile tourne dans le sens positif autour de $\vec{k}$, $\vec{v}$ a bien le sens convenable.

remarque :

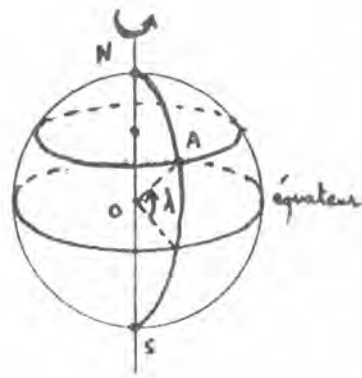
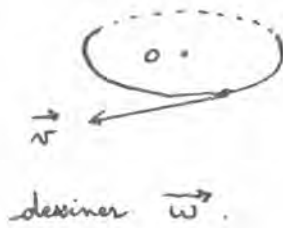


$$\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$$

l'origine O est le centre du cercle, le schéma ci-dessus était plus général.

exercice :

1)



2) la terre tourne autour de l'axe NS à la vitesse angulaire constante $\omega = 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ (par rapport au référentiel géocentrique céleste).

1) calculer v vitesse de A à la latitude λ .

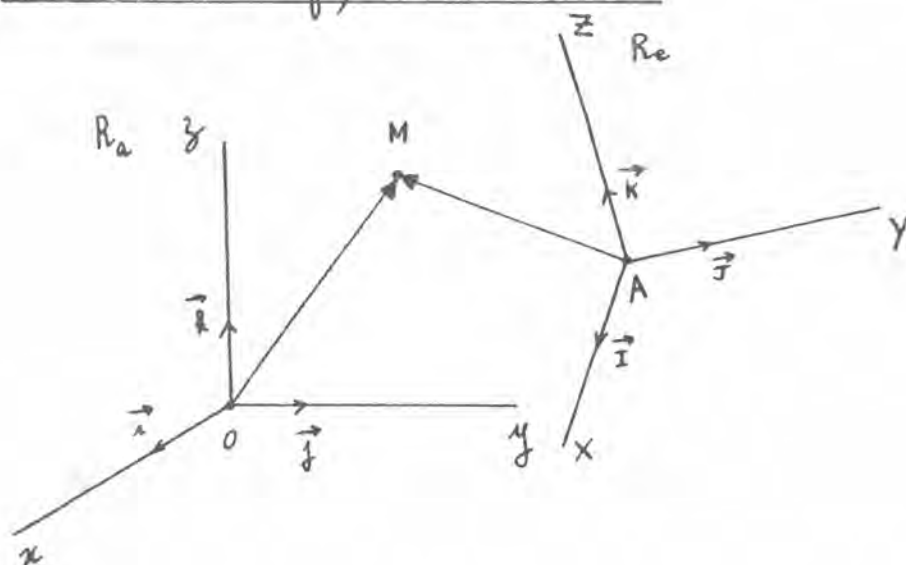
2) dessiner $\vec{v}$ et $\vec{\omega}$. AN: $\lambda = 45^\circ$

3) dessiner le vecteur accélération $\vec{a}$ de A. calculer a .

Ch 3: Cinématique : relativité du mouvement

2 observateurs différents peuvent choisir des référentiels différents, les trajectoires, les vitesses, les accélérations ne sont pas les mêmes. Il est important de savoir comment sont reliées les observations faites par les 2 observateurs.

1) Mouvement relatif, mouvement absolu :



Soient R_a un premier référentiel, $Oxyz$ un système d'axes cartésiens liés à R_a
 R_e un second référentiel, $AXYZ$ un système d'axes cartésiens liés à R_e .

soit un point $M (x, y, z / R_a \text{ et } X, Y, Z / R_e)$.

De manière ARBITRAIRE on appellera le mouvement de M par rapport à :

R_a : mouvement absolu de M .

R_e : mouvement relatif de M .

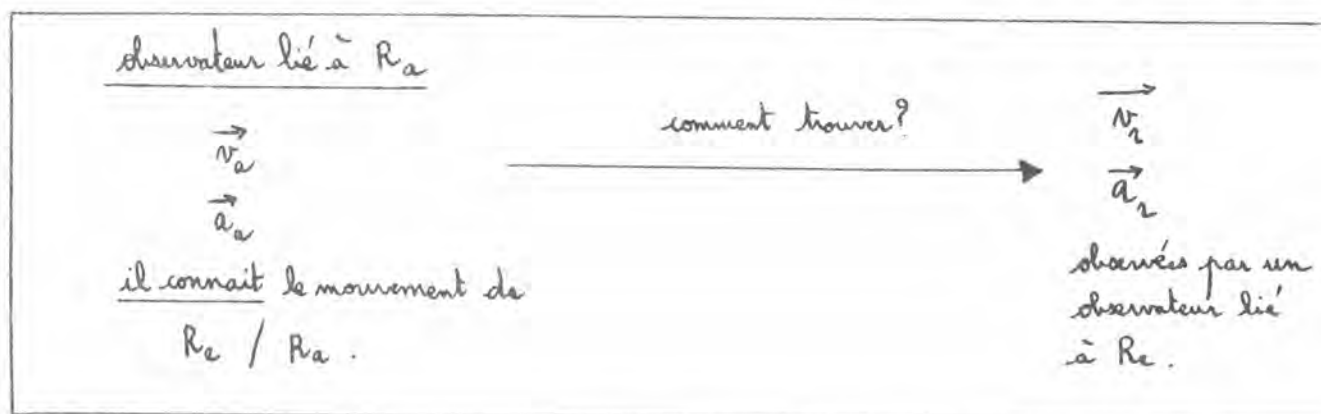
Remarque importante : un référentiel est choisi absolu (relatif) dans un problème donné, ce n'est pas une propriété intrinsèque.

Le temps est loin où les physiciens cherchaient un référentiel absolu.

il arrivera souvent qu'on utilise R_{fixe} (souvent fixe / sol) et R_{tournant} à la place de R_a et R_e .

position du problème :

un observateur lié à R_a connaît toutes les caractéristiques du mouvement (trajectoire ; $\vec{v}$ et $\vec{a}$ pour tout t) ; comment peut-il déduire les caractéristiques du mouvement telles qu'elles apparaissent à un observateur lié à R_e en mouvement par rapport à R_a .



$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sont considérés comme fixes, indépendants du temps.

$\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}$ sont fonctions du temps car R_e en mouvement quelconque par rapport à R_a (translation, rotation, mouvement général combinant les 2).

2) loi de composition des vitesses :

la vitesse "absolue" de M est la vitesse de M par rapport à R_a soit $\vec{v}_a = \left(\frac{d\vec{OM}}{dt} \right)_{R_a}$.

$\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{AM}$. Calculons $\vec{v}_a$. ($\vec{AM} = x\vec{I} + y\vec{J} + z\vec{K}$).

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\vec{OM}}{dt} \right)_{R_a} &= \left(\frac{d\vec{OA}}{dt} \right)_{R_a} + \frac{dx}{dt} \vec{I} + x \left(\frac{d\vec{I}}{dt} \right)_{R_a} + \frac{dy}{dt} \vec{J} + y \left(\frac{d\vec{J}}{dt} \right)_{R_a} + \frac{dz}{dt} \vec{K} + z \left(\frac{d\vec{K}}{dt} \right)_{R_a} \\ &= \left(\frac{d\vec{OA}}{dt} \right)_{R_a} + x \left(\frac{d\vec{I}}{dt} \right)_{R_a} + y \left(\frac{d\vec{J}}{dt} \right)_{R_a} + z \left(\frac{d\vec{K}}{dt} \right)_{R_a} + \frac{dx}{dt} \vec{I} + \frac{dy}{dt} \vec{J} + \frac{dz}{dt} \vec{K}. \end{aligned}$$

On reconnaît dans les 3 derniers termes $\left(\frac{d\vec{AM}}{dt} \right)_{R_e}$ qu'on appelle vitesse "relative" de M (vitesse de M par rapport à R_e) qu'on note $\vec{v}_e$.

Les 4 premiers termes sont l'expression de la vitesse d'entraînement de M notée $\vec{v}_a$ dont la signification n'est pas immédiate.

Remarque importante:

les 2 observateurs ne mesurent pas la même dérivée par rapport au temps d'un vecteur par exemple $\left(\frac{d\vec{I}}{dt}\right)_{R_a} \neq \vec{0} \quad \left(\frac{d\vec{I}}{dt}\right)_{R_e} = \vec{0}$;

la formule de dérivation vectorielle s'écrit: $\vec{V}$ étant un vecteur quelconque

$$\left(\frac{d\vec{V}}{dt}\right)_{R_a} = \left(\frac{d\vec{V}}{dt}\right)_{R_e} + \vec{\omega}_{R_e/R_a} \wedge \vec{V} \quad (\text{On ne l'utilisera pas dans ce module}).$$

c'est un point très délicat.

On peut écrire:

$$\boxed{\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e}$$

$\vec{v}_r$ vitesse relative de M.

$\vec{v}_e$ vitesse d'entraînement de M.

vitesse de M dans R_e

$$\vec{v}_r = \frac{dx}{dt} \vec{I} + \frac{dy}{dt} \vec{J} + \frac{dz}{dt} \vec{K} \quad (\vec{AM} = x\vec{I} + y\vec{J} + z\vec{K}).$$

$$\vec{v}_e = \left(\frac{d\vec{OA}}{dt}\right)_{R_a} + x\left(\frac{d\vec{I}}{dt}\right)_{R_a} + y\left(\frac{d\vec{J}}{dt}\right)_{R_a} + z\left(\frac{d\vec{K}}{dt}\right)_{R_a}$$

* la signification de $\vec{v}_e$ est plus délicate à comprendre:

prenons un cas simple:

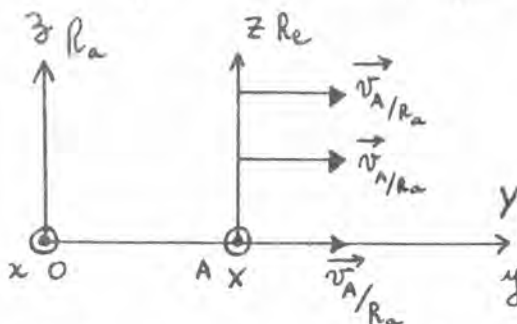


schéma dans le cas d'une translation rectiligne du référentiel R_e/R_a .

R_e en translation (pas nécessairement rectiligne) par rapport à R_a .

$\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}$ sont alors des vecteurs constants (norme = 1 et DIRECTIONS INVARIABLES au cours du temps) dans

R_a ; d'où $\left(\frac{d\vec{I}}{dt}\right)_{R_a} = \vec{0}$ (idem pour $\vec{J}, \vec{K}$).

$\vec{v}_e$ se réduit à

$$\boxed{\vec{v}_e = \left(\frac{d\vec{OA}}{dt}\right)_{R_a} \quad \text{cas de la translation } R_e/R_a}$$

dans le cas de la translation on interprète facilement $\vec{v}_e$; c'est la vitesse du point A par rapport à R_a , or comme tous les points de R_e ont même vitesse par rapport à R_a , on peut dire que $\vec{v}_e$ est la vitesse de translation de R_e par rapport à R_a .

Nous admettons : que les termes $x \left(\frac{d\vec{I}}{dt} \right)_{R_a} + y \left(\frac{d\vec{J}}{dt} \right)_{R_a} + z \left(\frac{d\vec{K}}{dt} \right)_{R_a}$ caractérisent le mouvement de rotation de R_e/R_a .

Nous admettons que :

la vitesse d'entraînement $\vec{v}_e$ caractérise le mouvement de R_e par rapport à R_a .

3) loi de composition des accélérations (mécanique newtonienne) :

on vient de voir que $\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e$ avec $\vec{v}_r = \frac{dx}{dt} \vec{I} + \frac{dy}{dt} \vec{J} + \frac{dz}{dt} \vec{K}$

$$\text{et } \vec{v}_e = \left(\frac{d\vec{OA}}{dt} \right)_{R_a} + x \left(\frac{d\vec{I}}{dt} \right)_{R_a} + y \left(\frac{d\vec{J}}{dt} \right)_{R_a} + z \left(\frac{d\vec{K}}{dt} \right)_{R_a}.$$

calculons l'accélération de M par rapport à R_a notée $\vec{a}_a$. (absolue)

$$\vec{a}_a = \left(\frac{d^2 \vec{OA}}{dt^2} \right)_{R_a} = \left(\frac{d\vec{v}_a}{dt} \right)_{R_a} = \left(\frac{d\vec{v}_r}{dt} \right)_{R_a} + \left(\frac{d\vec{v}_e}{dt} \right)_{R_a}$$

ce qui donne après regroupements :

$$\begin{aligned} \vec{a}_a = & \frac{d^2 x}{dt^2} \vec{I} + \frac{d^2 y}{dt^2} \vec{J} + \frac{d^2 z}{dt^2} \vec{K} + \left(\frac{d^2 \vec{OA}}{dt^2} \right)_{R_a} + x \left(\frac{d^2 \vec{I}}{dt^2} \right)_{R_a} + y \left(\frac{d^2 \vec{J}}{dt^2} \right)_{R_a} + z \left(\frac{d^2 \vec{K}}{dt^2} \right)_{R_a} \\ & + 2 \left[\frac{dx}{dt} \left(\frac{d\vec{I}}{dt} \right)_{R_a} + \frac{dy}{dt} \left(\frac{d\vec{J}}{dt} \right)_{R_a} + \frac{dz}{dt} \left(\frac{d\vec{K}}{dt} \right)_{R_a} \right] \end{aligned}$$

$\vec{a}_a$ est la somme de 3 termes : $\vec{a}_r$, $\vec{a}_e$, $\vec{a}_c$.

$$\vec{a}_r = \left(\frac{d^2 \vec{AM}}{dt^2} \right)_{R_e} = \frac{d^2 x}{dt^2} \vec{i} + \frac{d^2 y}{dt^2} \vec{j} + \frac{d^2 z}{dt^2} \vec{k}. \quad \left(\vec{AM} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}; \right. \\ \left. \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \text{ fixes dans } R_e \right).$$

s'appelle l'accélération relative.

$$\vec{a}_e = \left(\frac{d^2 \vec{OA}}{dt^2} \right)_{R_a} + x \left(\frac{d^2 \vec{i}}{dt^2} \right)_{R_a} + y \left(\frac{d^2 \vec{j}}{dt^2} \right)_{R_a} + z \left(\frac{d^2 \vec{k}}{dt^2} \right)_{R_a}$$

est l'accélération d'entraînement (caractérise le mouvement de R_e / R_a).

$$\vec{a}_c = 2 \left[\frac{dx}{dt} \left(\frac{d\vec{i}}{dt} \right)_{R_a} + \frac{dy}{dt} \left(\frac{d\vec{j}}{dt} \right)_{R_a} + \frac{dz}{dt} \left(\frac{d\vec{k}}{dt} \right)_{R_a} \right]$$

est l'accélération de Coriolis (interprétation plus difficile).

en définitive :

$$\vec{a}_a(M) = \vec{a}_r(M) + \vec{a}_e(M) + \vec{a}_c(M).$$

Cas particuliers :

a) point M immobile dans R_e :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = \frac{dz}{dt} = 0 \quad \vec{a}_c = \vec{0}$$

pour tout t .

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{d^2 z}{dt^2} = 0 \quad \vec{a}_r = \vec{0}$$

pour tout t .

b) R_e en translation quelconque par rapport à R_a :

$$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \text{ sont constants dans } R_a \quad \left(\frac{d\vec{i}}{dt} \right)_{R_a} = \vec{0} \quad (\text{idem } \vec{j}, \vec{k}).$$

pour tout t ; $\left(\frac{d^2 \vec{i}}{dt^2} \right)_{R_a} = \vec{0} \quad (\vec{j}, \vec{k})$

$$\vec{a}_c = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{a}_e = \left(\frac{d^2 \vec{OA}}{dt^2} \right)_{R_a}$$

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e$$

point M fixe dans R_e

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \left(\frac{d^2 \vec{OA}}{dt^2} \right)_{R_a}$$

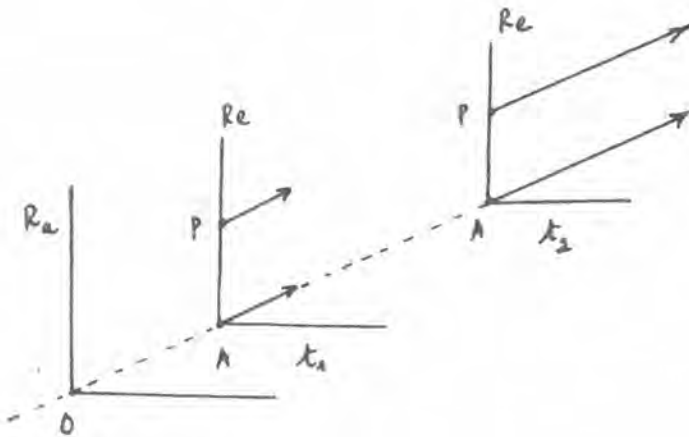
R_e en translation quelconque

c) R_e en translation rectiligne et uniforme par rapport à R_a :

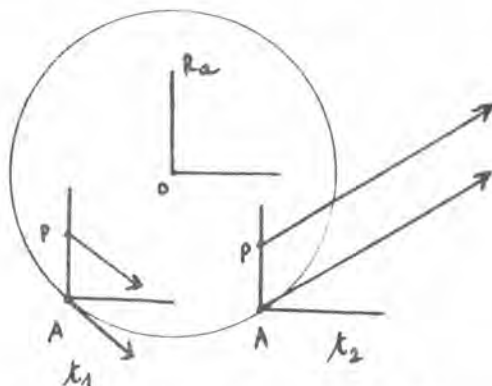
$$\vec{a}_a = \vec{a}_r$$

R_e en translation $\left\{ \begin{array}{l} \text{rectiligne} \\ \text{uniforme} \end{array} \right.$

remarque: dans un mouvement de translation de R_e par rapport à R_a
tous les points liés à R_e ont même vitesse à l'instant t



R_e en translation rectiligne non uniforme / R_a



R_e en translation circulaire non uniforme / R_a

4) Que représentent $\vec{v}_e$ et $\vec{a}_e$?

$\vec{v}_e$ et $\vec{a}_e$ caractérisent le mouvement de R_e par rapport à R_a ; pour les calculer on peut appliquer les relations vues ci-dessus ; cependant si on connaît la signification plus précise de $\vec{v}_e$ et $\vec{a}_e$ on peut dans des cas simples mais fréquents les calculer en ayant oublié les "formules".

en notation allégée
$$\vec{v}_a(M) = \underbrace{\left(\frac{d\vec{OA}}{dt} \right)_{R_a}}_{\vec{v}_e(M)} + \underbrace{\sum_{Y,Z} x \left(\frac{d\vec{I}}{dt} \right)_{R_a}}_{\vec{v}_r(M)} + \underbrace{\sum_{Y,Z} \frac{dx}{dt} \vec{I}}_{\vec{v}_r(M)}$$

soit le point P lié à R_e ayant à l'instant t les mêmes coordonnées X, Y, Z / R_e que le point mobile $M (X, Y, Z)_{/R_e}$. Pour P : X, Y, Z sont des constantes.
(Par contre pour M : X, Y, Z sont des fonctions du temps).

$$\vec{v}_a(P) = \vec{v}_e(P) \quad \text{en effet} \quad \vec{v}_r(P) = \vec{0} \quad \left(\frac{dx}{dt} = 0 \dots \right)$$

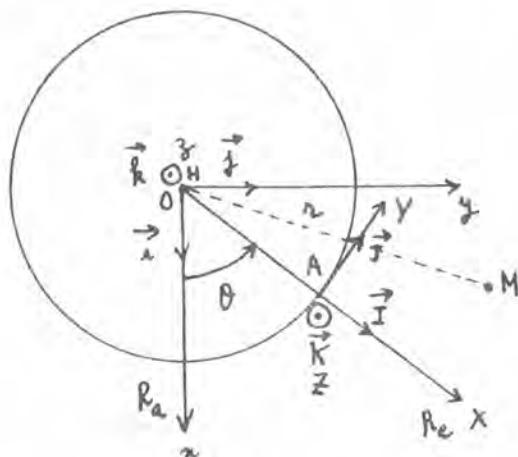
On retiendra :

la vitesse d'entraînement d'un point mobile M est la vitesse absolue (/ R_a) d'un point P lié à R_e qui à l'instant t a les mêmes coordonnées que le point mobile M (P est appelé point coïncident)
(P coïncide avec M à l'instant t)

en regardant $\vec{a}_e(M)$ on tirerait des conclusions analogues.

On retiendra :

l'accélération d'entraînement d'un point mobile M est l'accélération absolue (/ R_a) d'un point P lié à R_e qui à l'instant t a les mêmes coordonnées que le point mobile M (P coïncide avec M à l'instant t : P est appelé point coïncident)

Exercice :Calculer $\vec{v}_e(M)$ et $\vec{a}_e(M)$ dans le cas où R_e tourne / R_a 

M n'est pas nécessairement dans xOy . H projection orthogonale de M sur Oz . ($r = HM$ distance de M à Oz)

Pour calculer $\vec{v}_e(M)$ il faut calculer la vitesse $\vec{v}_a$ du point qui coïncide à t avec M et qui est lié à R_e . Il est facile de voir que tout point lié à R_e décrit un cercle dans R_a centré sur Oz .

On connaît les relations donnant $\vec{v}$ et $\vec{a}$ pour le mouvement circulaire d'un point :

$$\vec{v}_e(M) = r \dot{\theta} \vec{J} \quad \vec{a}_e(M) = r \ddot{\theta} \vec{J} - r \dot{\theta}^2 \vec{I}$$

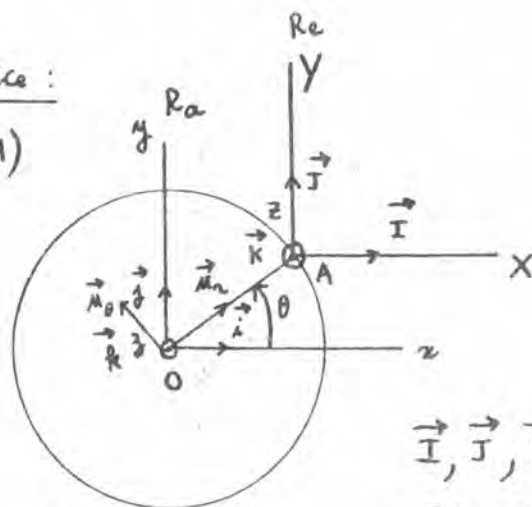
Remarques : - il faut se rendre compte que $\vec{J} = \vec{u}_\theta$ et $\vec{I} = \vec{u}_r$.

- aurait t'on des résultats différents si les axes liés à R_e (AX, AY, AZ) avaient leur origine A confondue avec O.

- on comparera cet exercice au suivant (R_e en translation circulaire par rapport à R_a , bien distinguer r et $R = OA$)

Exercice :

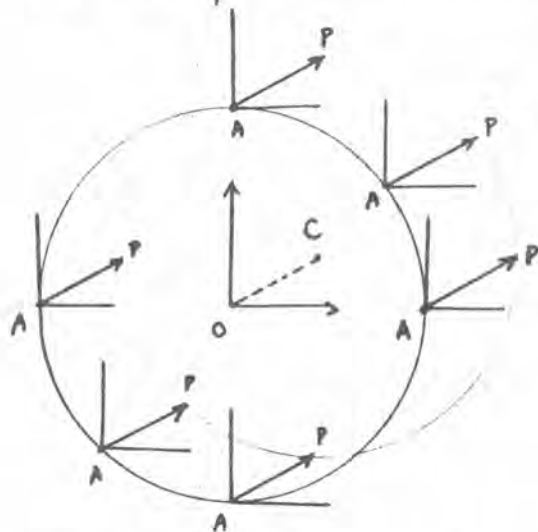
1)


 $\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}$ restent parallèles à $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

$$OA = R$$

soit P un point quelconque lié à Re ;

$\vec{AP}$ reste parallèle à lui-même.



trajectoire de $\xrightarrow{A}$ $\xrightarrow[\vec{AP}]{\text{translation}}$ trajectoire $\xrightarrow{P}$
 cercle(O, R) cercle(C, R)

$$\vec{OC} = \vec{AP}$$

schéma avec P dans xoy.

$$\vec{v}_e = \left(\frac{d\vec{OA}}{dt} \right)_{Ra}$$

en effet $\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}$ constants dans Ra :
 les autres termes tels que $x \left(\frac{d\vec{I}}{dt} \right)_{Ra} = 0$.

$$\vec{OA} = R \vec{u}_\theta \quad \vec{v}_e = R \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = R \dot{\theta} \vec{u}_\theta$$

$$\boxed{\vec{v}_e(P) = R \dot{\theta} \vec{u}_\theta}$$

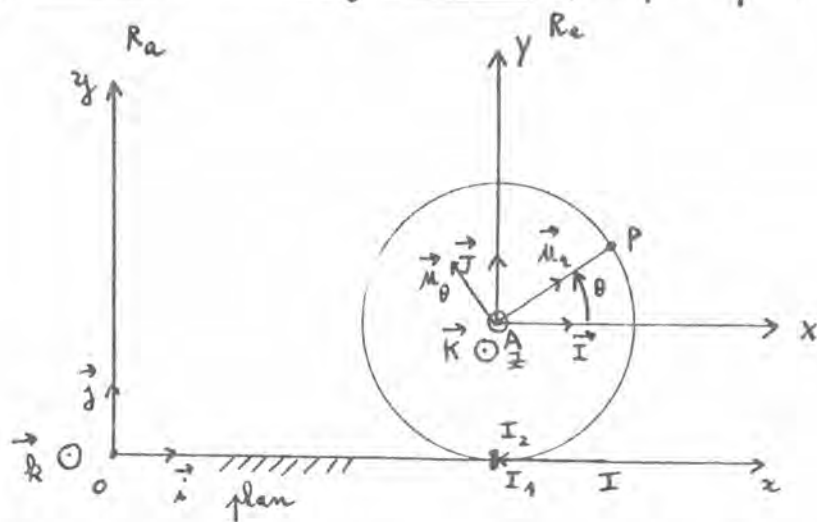
$$\vec{a}_e = \left(\frac{d^2 \vec{OA}}{dt^2} \right)_{Ra}$$

les autres termes s'annulent.

$$\boxed{\vec{a}_e(P) = R \ddot{\theta} \vec{u}_\theta - R \dot{\theta}^2 \vec{u}_r}$$

Retrouver ces relations en utilisant "la signification de $\vec{v}_e$ et $\vec{a}_e$ " : poser $\vec{OP} = \vec{OA} + \vec{AP}$

2) roulement sans glissement : (on peut passer en première lecture)



Une roue de rayon R roule sans glisser sur un plan horizontal. Démontrer qu'à chaque instant le vecteur vitesse de tout point P de la roue est perpendiculaire à la droite joignant P au point de contact I de la roue et du plan et que son module est $|\omega|P$ avec $P = \|\vec{IP}\|$ et ω vitesse angulaire de P ($\equiv$ vitesse angulaire de rotation de la roue). { vitesse / $R\omega$ }

cours : le roulement sans glissement

la roue $\mathcal{R}$ est en contact avec le plan $\mathcal{P}$ en I à l'instant t .

I point purement géométrique $\left\{ \begin{array}{l} I_1 \text{ point matériel appartenant à } \mathcal{P} \\ I_2 \text{ point matériel appartenant à } \mathcal{R} \end{array} \right.$

à l'instant t , I_1 et I_2 coïncident avec I .

on appelle vitesse de glissement en I de $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{P}$ la vitesse $\vec{u}$:

$$\vec{u} = \vec{v}_{I_2} - \vec{v}_{I_1}$$

du fait de la loi de la composition des vitesses on peut calculer $\vec{v}_{I_2}$ et $\vec{v}_{I_1}$ par rapport à un référentiel quelconque (le même pour les 2). [Montrez-lesci!]

$\vec{u}$ est indépendante du référentiel choisi.

il est commode de choisir le référentiel de $\mathcal{P}$ soit ici $\mathcal{R}_a$

il est intuitif (on peut le démontrer) que $\vec{u}$ est dans le plan tangent de contact en I entre les 2 solides.

il est également intuitif de poser comme :

condition de non glissement $\vec{v}_{I_2/R_a} = \vec{v}_{I_1/R_a}$

soit $\vec{u} = \vec{0}$

remarque : $\vec{v}_{I_1/R_a} = \vec{0}$. (I_1 lié à R_a).

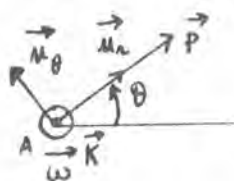
R_e en translation rectiligne par rapport à R_a (A décrit la droite $y=R$).

$$\vec{v}_e(P) = \left(\frac{d\vec{OA}}{dt} \right)_{R_a} = \vec{v}_{A/R_a} = \vec{v} = v \vec{I}.$$

le mouvement de P dans R_e est un mouvement circulaire autour de AZ .

le vecteur rotation (vitesse angulaire) est $\vec{\omega} = \omega \vec{K}$.

$$\vec{v}_{(P)/R_e} = \vec{\omega} \wedge \vec{AP} \quad (\text{voir ch. précédent}).$$



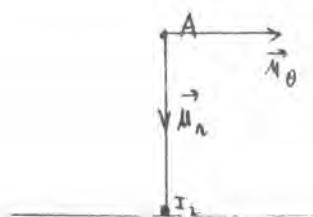
$$\vec{v}_{(P)/R_e} = \omega \vec{K} \wedge R \vec{u}_r = \omega R \underbrace{\vec{K} \wedge \vec{u}_r}_{\vec{u}_\theta} = \omega R \vec{u}_\theta.$$

$$\underbrace{\vec{v}_{(P)/R_a}}_{\vec{v}_a} = \underbrace{\vec{v}_{(P)/R_e}}_{\vec{v}_r} + \underbrace{\vec{v}_e(P)}_{\vec{v}_e}$$

$$\vec{v}_{(P)/R_a} = \omega R \vec{u}_\theta + v \vec{I}$$

si P est le point I_2 :

$$\vec{u}_\theta = \vec{I}.$$



$$\vec{v}_{(I_2)/R_a} = \omega R \vec{I} + v \vec{I} = (\omega R + v) \vec{I}.$$

condition de non glissement :

$$\vec{u} = \vec{v}_{(I_2)/R_a} - \vec{v}_{(I_1)/R_a} = \vec{0}$$

soit ici $\vec{v}_{(I_2)/R_a} = \vec{0}$ (puisque I_1 lié à R_a $\vec{v}_{(I_1)/R_a} = \vec{0}$)

$$\boxed{\omega R + v = 0} \quad \text{condition de non glissement.}$$

dans le cas du roulement sans glissement $\vec{v}(P)_{/Ra}$ peut se transformer :

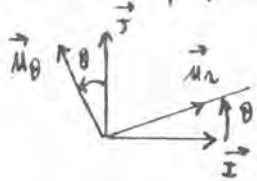
$$\vec{v}(P)_{/Ra} = \omega R \vec{u}_\theta + v \vec{I} = \omega R \vec{u}_\theta - \omega R \vec{I}$$

il faut montrer que : $\vec{v}(P)_{/Ra} \perp \vec{IP}$ et $\|\vec{v}(P)_{/Ra}\| = \rho|\omega|$

si $\vec{v}(P)_{/Ra} \cdot \vec{IP} = 0 \quad \forall t$ les 2 vecteurs sont perpendiculaires.

$$\omega R (\vec{u}_\theta - \vec{I}) \cdot (\overbrace{\vec{IP} = \vec{IA} + \vec{AP}}^{\vec{IP} = \vec{IA} + \vec{AP}}) = \omega R^2 (\vec{u}_\theta \cdot \vec{J} + \vec{u}_\theta \cdot \vec{u}_r - \vec{I} \cdot \vec{J} - \vec{I} \cdot \vec{u}_r)$$

2 vecteurs perpendiculaires ont un produit scalaire nul $\vec{u}_\theta \cdot \vec{u}_r = 0 \quad \vec{I} \cdot \vec{J} = 0$.

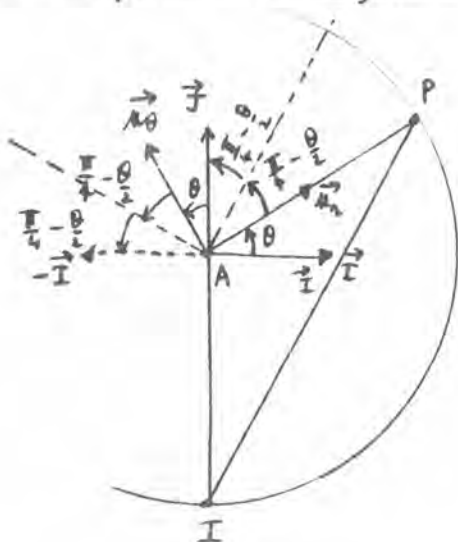


$$\vec{u}_\theta \cdot \vec{J} = \cos \theta \quad \vec{I} \cdot \vec{u}_r = \cos \theta$$

$$\text{d'où } \vec{v}(P)_{/Ra} \cdot \vec{IP} = 0.$$

$\vec{v}(P)_{/Ra}$ est perpendiculaire à $\vec{IP}$ pour tout t .

Montrons que $v(P) = \rho|\omega|$:



$$\vec{v}(P) = \omega R (\vec{u}_\theta - \vec{I})$$

direction selon la bissectrice de $\vec{u}_\theta$ et $-\vec{I}$

$$\text{d'où } \|\vec{v}(P)\| = 2|\omega|R \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)$$

$$\vec{IP} = R(\vec{J} + \vec{u}_r)$$

direction selon bissectrice de $\vec{J}$ et $\vec{u}_r$

$$\text{d'où } \|\vec{IP}\| = 2R \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)$$

$$\text{on a bien } \|\vec{v}(P)_{Ra}\| = |\omega| \cdot \rho$$

remarque : trouver une solution à l'aide du produit vectoriel, montrer que

$$\boxed{\vec{v}(P)_{/Ra} = \omega \vec{K} \wedge \vec{IP}}$$

d'où réponses immédiates aux 2 questions.

Ch 4 : Dynamique newtonienne.

1) principe fondamental de la dynamique (théorème de la quantité de mouvement):

il existe des référentiels particuliers appelés référentiels galiléens (ou d'inertie).

Relativement à un référentiel galiléen, la dérivée par rapport au temps de la quantité de mouvement d'un point matériel est égale à chaque instant à la somme des forces agissant sur ce point matériel.

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{f} \quad \text{avec} \quad \vec{p} = m\vec{v}$$

m masse (inerte); $\vec{p}$ quantité de mouvement; $\vec{f}$ somme vectorielle des forces exercées sur le point matériel.

pour décrire le mouvement il faudra préciser les lois d'interaction, pour l'instant on ne connaît pas la nature des forces responsables du mouvement (gravitationnelles, électrostatiques.....).

on exprime souvent la relation fondamentale sous la forme :

$$\boxed{m \vec{a} = \vec{f}}$$

$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ accélération du point matériel par rapport au référentiel galiléen.

elle suppose m constante.

l'unité de force est le newton (N) [kg.m.s⁻²]. dans le SI.

le newton est l'intensité de la force qui appliquée à un objet de masse 1kg lui communique une accélération de 1 m.s⁻².

2) les référentiels galiléens :

il existe des définitions abstraites des référentiels galiléens, il nous faut donner une définition opérationnelle.

on a introduit les référentiels galiléens comme la classe de référentiels dans lesquels la relation fondamentale $\vec{f} = m \vec{a}$ est vérifiée.

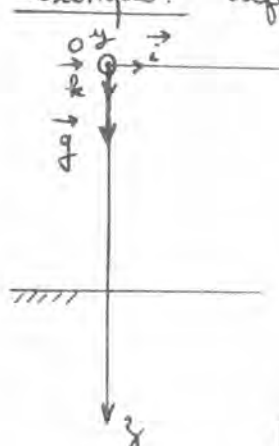
A) comment définir un référentiel galiléen :

la réponse est donnée par l'expérience.

il suffit pour tester le caractère galiléen d'un référentiel d'y réaliser de nombreuses expériences et de comparer les résultats de ces expériences aux prévisions déduites de la relation fondamentale.

régle : suivant la précision des mesures et les effets étudiés, tel référentiel peut être considéré comme galiléen ou non galiléen.

exemple : référentiel terrestre (lié à la Terre) : R_T



on lâche un point matériel en O (sans vitesse initiale) lié au référentiel terrestre).

$$m \vec{a} = \vec{f} \quad \text{la seule force est le poids } m \vec{g}$$

$$\vec{a} = \vec{g}$$

en projetant cette relation sur les 3 axes, on obtient facilement

$$\begin{cases} x=0 & y=0 & z = \frac{1}{2} g t^2 & v = g t \text{ selon la verticale } Oz. \\ \text{prévisions déduites de la relation fondamentale.} \end{cases}$$

Les expériences courantes vérifient bien ces prévisions (loi de la chute libre).

le référentiel terrestre est pour la majorité des expériences courantes une bonne approximation d'un référentiel galiléen.

Cependant Reich en 1831 a fait une série d'expériences dans un puits de mine situé à la latitude 51° .

la hauteur de chute était de 158 m ; sur 106 chutes il a mesuré des déviations vers l'est comprises entre 27,9 et 28,7 mm.

On en conclut que R_T n'est pas strictement galiléen.

il existe une hiérarchie de référentiels "plus ou moins" galiléens suivant les effets qu'on désire étudier et la précision des mesures.

B) les référentiels galiléens utilisés: "du meilleur au moins bon".

a) - le référentiel de Copernic: le solide de référence est constitué par le tétraèdre indéformable formé par le centre de masse du système solaire et 3 étoiles E_1, E_2, E_3 considérées comme ponctuelles. On lie 3 axes à ce solide de référence.

c'est le meilleur référentiel galiléen mis expérimentalement en évidence.

b) - le référentiel de Kepler: solide de référence: (S centre de masse du Soleil, 3 étoiles E_1, E_2, E_3).

c'est un excellent référentiel galiléen.

(Notez qu'il y a "peu de différence" entre centre de masse système solaire et centre de masse du Soleil.)

c) - les référentiels faisant intervenir la Terre:

- le référentiel géocentrique céleste:

solide de référence = tétraèdre (centre de masse de la Terre, 3 étoiles E_1, E_2, E_3)

la Terre n'est pas immobile dans ce référentiel, elle tourne.

c'est un "assez bon" référentiel galiléen.

- le référentiel terrestre: c'est le plus utilisé dans les expériences courantes.

solide de référence: Terre.

la Terre est fixe dans ce référentiel.

c'est une bonne approximation d'un référentiel galiléen pour beaucoup d'expériences courantes.

Quelques exceptions pour lesquelles le référentiel terrestre ne peut pas être considéré comme galiléen :

marées, déviation vers l'Est dans la chute libre, pendule de Foucault, vents, courants marins, satellites terrestres

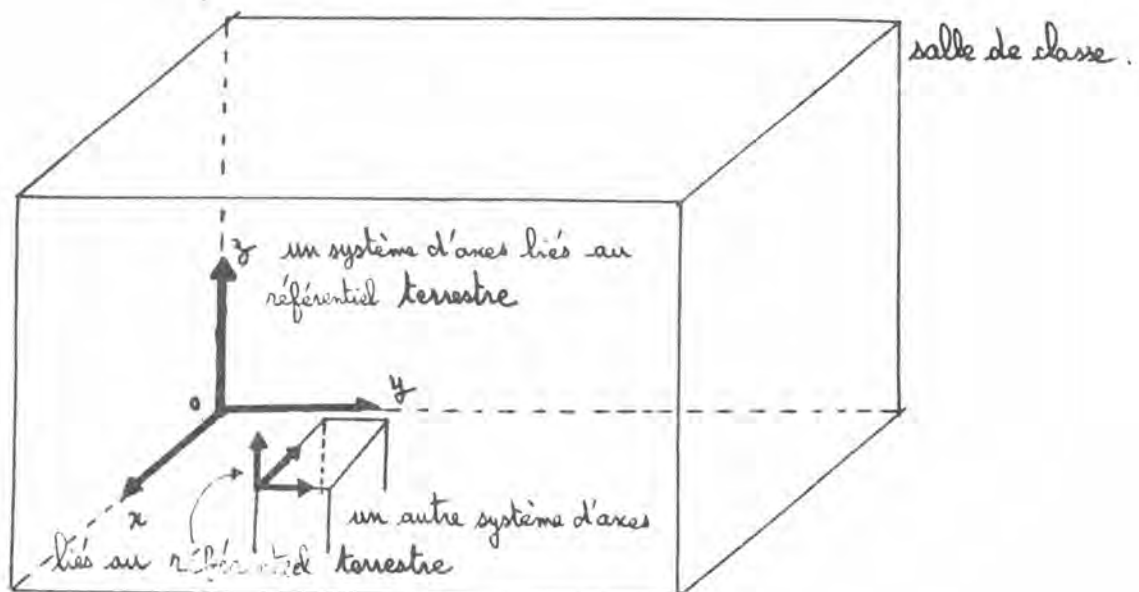
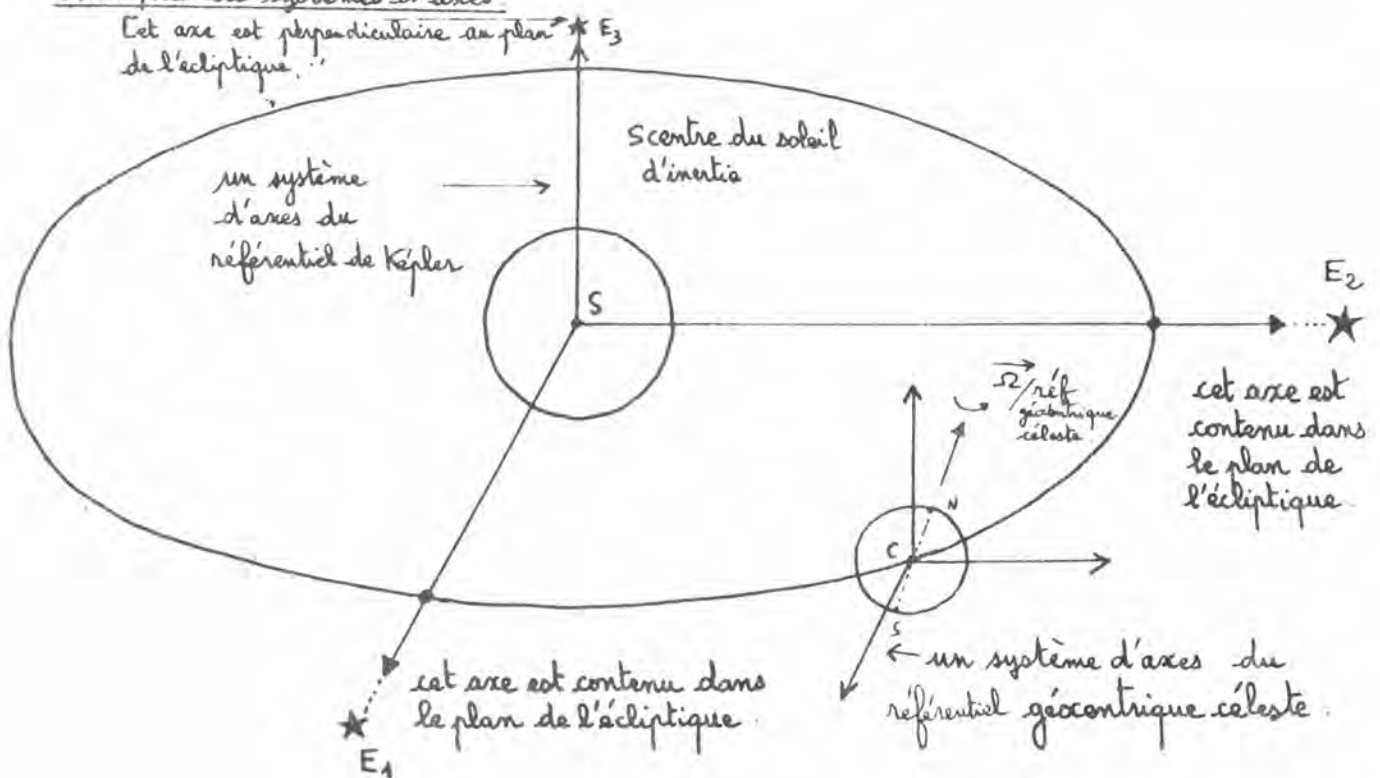
par contre dans le référentiel géocentrique céleste tous les phénomènes ci-dessus sont prévus sauf les marées (1 marée prévue par jour au lieu de 2).

remarque :
(on admet)

Tout référentiel en translation rectiligne et uniforme par rapport à un référentiel galiléen est galiléen.

Exemples de systèmes d'axes

Cet axe est perpendiculaire au plan de l'écliptique.



3) principe d'inertie :

$$\vec{a} = \frac{\vec{f}}{m}$$

pour un point matériel libre (soumis à AUCUNE interaction $\vec{f} = \vec{0}$, c'est évidemment impossible à expérimenter)

$$\vec{a} = \vec{0} \quad \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0} \quad \vec{v} = \text{constante} = \vec{v}_0.$$

Dans un référentiel galiléen un point matériel libre est animé d'un mouvement rectiligne uniforme (éventuellement $\vec{v}_0 = \vec{0}$ repos).

C'est Galilée qui a énoncé le premier ce principe. Ici il apparaît comme une conséquence de la relation fondamentale. On utilise souvent référentiel inertiel pour référentiel galiléen.

4) principe de l'action et la réaction :

A) soient M_1 et M_2 2 points matériels en interaction.

$\vec{f}_{1/2}$ force exercée par M_1 sur M_2 .

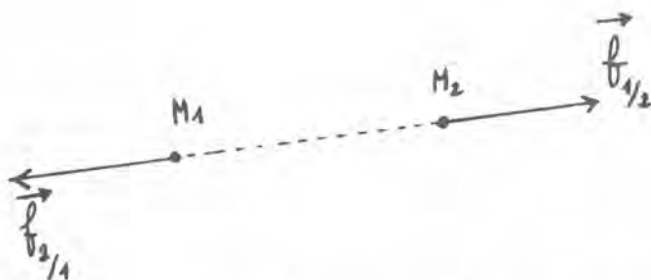
$\vec{f}_{2/1}$ force exercée par M_2 sur M_1 .

à tout instant, quel que soit le mouvement de M_1 et M_2 (repos y compris)

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{f}_{1/2} + \vec{f}_{2/1} = \vec{0} \end{array} \right.$$

de plus les 2 forces ont même droite d'action (elles sont coaxiales).

ceci est valable dans un référentiel quelconque (galiléen ou non).



remarque : en mécanique classique le principe de l'action et de la réaction est toujours valable.

B) conservation de la quantité de mouvement

on considère 2 points matériels M_1 et M_2 soumis à leur seule interaction, on dit que le système des 2 points matériels est isolé.

$$\begin{cases} \vec{p}_1 & \text{quantité de mouvement de } M_1 \text{ dans un référentiel galiléen } R \\ \vec{p}_2 & \text{quantité de mouvement de } M_2 \text{ dans un référentiel galiléen } R \end{cases}$$

on applique la RFD à M_1 : $\frac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{f}_{2/1}$ à M_2 : $\frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{f}_{1/2}$.

d'après le principe de l'action et la réaction $\vec{f}_{1/2} + \vec{f}_{2/1} = \vec{0}$

d'où $\frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = \vec{0} \longrightarrow \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{P} = \text{constante}$.

$\vec{P}$ quantité de mouvement totale du système ($M_1 + M_2$)

on admet la loi générale : (jamais encore mise en défaut par une expérience).

la quantité de mouvement totale d'un système isolé est constante.

la conservation de la quantité de mouvement totale d'un système isolé est une loi fondamentale de la physique, elle dépasse le cadre de la mécanique classique.

5) les 3 lois de Newton:

les livres anglais et américains ont l'habitude d'annoncer ce qu'on vient de voir sous la forme :

1^{ère} loi de Newton : dans un référentiel galiléen un point matériel libre (soumis à aucune force) est au repos ou en mouvement rectiligne uniforme.

2^{ème} loi de Newton : dans un référentiel galiléen un point matériel de masse m soumis à la force $\vec{f}$ subit une accélération $\vec{a} = \frac{\vec{f}}{m}$. ($\vec{f} = m\vec{a}$).

3^{ème} loi de Newton : soient 2 points matériels M_1 et M_2 en interaction :

$\vec{f}_{1/2} + \vec{f}_{2/1} = \vec{0}$ et ces 2 forces ont même droite d'action.

6) Moment cinétique:

A) définition: R étant un référentiel quelconque (galiléen ou non).
 A un point quelconque fixe ou non dans R .

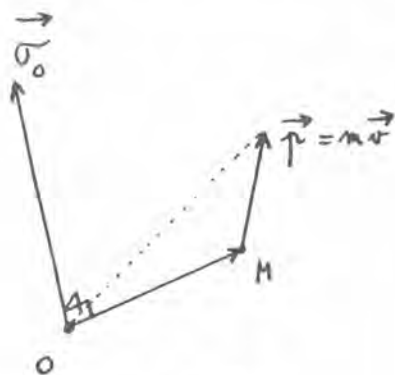
$\vec{p} = m\vec{v}$ quantité de mouvement du point matériel dans R .

$$\boxed{\vec{\sigma}_A = \vec{AM} \wedge \vec{p}}$$

est le moment cinétique de M en A relativement à R .

B) théorème du moment cinétique pour un point matériel M :

soit $\vec{\sigma}_O$ le moment cinétique en un point O fixe dans le référentiel galiléen R .



$$\begin{aligned}\vec{\sigma}_O &= \vec{OM} \wedge \vec{p} \\ &= \vec{OM} \wedge m\vec{v}.\end{aligned}$$

$$\frac{d\vec{\sigma}_O}{dt} = \frac{d\vec{OM}}{dt} \wedge \vec{p} + \vec{OM} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt}.$$

$\vec{\sigma}_O \perp \text{plan}(\vec{OM}, \vec{p})$.

O étant un point fixe dans R ; $\frac{d\vec{OM}}{dt}$ est la vitesse de M dans R .

le premier terme $\vec{v} \wedge m\vec{v} = \vec{0}$.

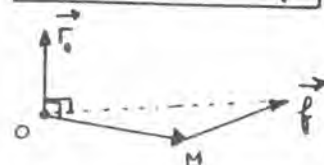
R étant galiléen $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{f}$ (RFD).

on appelle moment en O de la force $\vec{f}$:

$$\boxed{\vec{\Gamma}_O = \vec{OM} \wedge \vec{f}}$$

on a donc

$$\boxed{\frac{d\vec{\sigma}_O}{dt} = \vec{\Gamma}_O}$$



Relativement à référentiel galiléen R , la dérivée par rapport au temps du moment cinétique en O (point fixe dans R) d'un point matériel est égale à chaque instant au moment en O de la force $\vec{f}$ appliquée à ce point matériel [O point fixe dans R]

c) Mouvement à force centrale :

soit O un point fixe d'un référentiel galiléen, un point matériel M soumis à la force $\vec{f}$ dont le support passe à tout instant par O .

($\vec{f}$ est dite force centrale, O centre de force).

appliquons le théorème du moment cinétique :

$$\frac{d\vec{\sigma}_O}{dt} = \vec{\Gamma}_O = \vec{OM} \wedge \vec{f}.$$

$\vec{OM}$ et $\vec{f}$ étant colinéaires, leur produit vectoriel est nul.

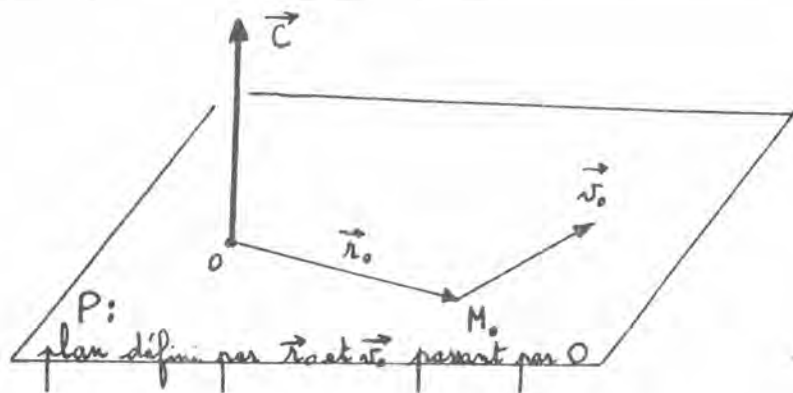
$$\frac{d\vec{\sigma}_O}{dt} = \vec{0} \longrightarrow \boxed{\vec{\sigma}_O = \text{constante} = m \vec{C}.$$

$\vec{C}$ vecteur constant déterminé par les valeurs de $\vec{r}$ et de $\vec{v}$ à l'instant initial :

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}_O &= \vec{OM} \wedge m \vec{v} \\ &= \vec{r} \wedge m \vec{v} \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{C} &= \vec{r} \wedge \vec{v} = \vec{r}_0 \wedge \vec{v}_0 \\ \vec{r}_0 \text{ et } \vec{v}_0 &: \text{valeurs à } t=0 \end{aligned}}$$

cas général $\vec{C} \neq \vec{0}$:



$\vec{C}$ est constant, il reste à tout instant perpendiculaire au plan P .
défini par $\vec{r}_0$ et $\vec{v}_0$ et passant par O .

d'après la relation

$$\vec{C} = \vec{r} \wedge \vec{v}$$

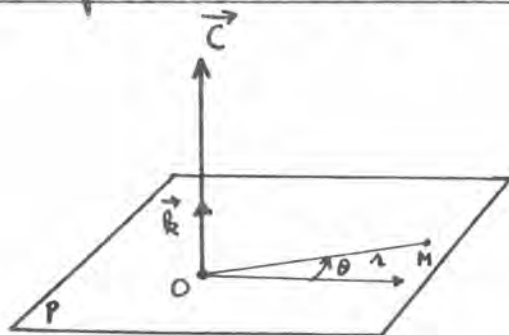
$\vec{C}$ est à tout instant perpendiculaire à $\vec{r}$
 " " " " à $\vec{v}$

donc $\vec{r}$ et $\vec{v}$ sont contenus dans le plan P . ($\vec{r} = \vec{OM}$ et $O \in P$).

un mouvement à force centrale est un mouvement plan

remarque : traiter le cas $\vec{C} = \vec{0}$.

Autre forme très utilisée de la conservation du moment cinétique:



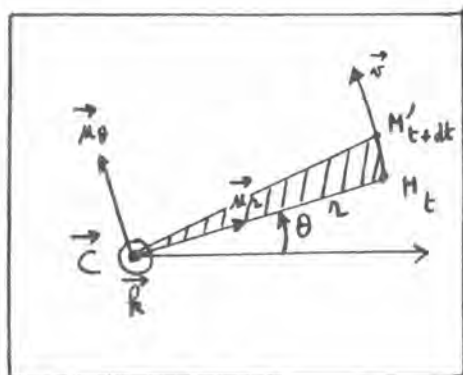
$$\vec{C} = C \vec{k}$$

C algébrique. (dans le cas du dessin $C > 0$).

utilisons une base polaire (r, θ) : $\begin{cases} \vec{r} = \overrightarrow{OM} = r \vec{u}_r \\ \vec{v} = r \dot{\theta} \vec{u}_\theta + \dot{r} \vec{u}_r \end{cases}$

$$\vec{C} = \vec{r} \wedge \vec{v} = r \vec{u}_r \wedge (\dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta) = r^2 \dot{\theta} \vec{u}_r \wedge \vec{u}_\theta.$$

$$(\vec{u}_r \wedge \vec{u}_r = \vec{0}) \quad \vec{u}_r \wedge \vec{u}_\theta = \vec{k}.$$



$$\vec{C} = C \vec{k} = r^2 \dot{\theta} \vec{k}$$

$$\boxed{C = r^2 \dot{\theta}} \quad \text{loi des aires.}$$

(voir ci-dessous)

C constante des aires.

$|dS|$
l'aire balayée entre t et $t+dt$ par le rayon vecteur $\vec{r}$ (zone hachurée)
est $|(r d\theta)| \times r \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} r^2 |d\theta|$ ($\approx$ triangle)

$$dS = \frac{1}{2} r^2 d\theta \quad \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} C$$

$\frac{dS}{dt}$ s'appelle la vélocité aéroloire, elle est constante pour un mouvement à force centrale.

la loi des aires peut s'exprimer : en des temps égaux le rayon-vecteur balaye des aires égales.

conséquence de la loi des aires:

$$C = r^2 \dot{\theta} = \text{constante} \rightarrow \dot{\theta} = \text{constante. } \dot{\theta} \text{ garde donc un signe constant}$$

le mouvement a toujours lieu dans un même sens

exercice : le module de la vitesse orthoradiale est $|r \dot{\theta}|$. Comment varie-t-il en fonction de la distance r au centre de force ?

D) conservation du moment cinétique :

considérons un système isolé comprenant 2 points matériels M_1 et M_2 .
(aucune force n'est exercée par le reste de l'univers sur les points)

○ point fixe d'un référentiel galiléen

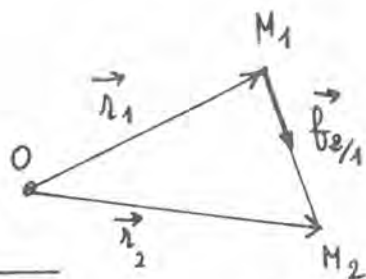
$$\vec{\sigma}_O = \vec{OM}_1 \wedge \vec{p}_1 + \vec{OM}_2 \wedge \vec{p}_2$$

$$\frac{d\vec{\sigma}_O}{dt} = \vec{OM}_1 \wedge \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \vec{OM}_2 \wedge \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{OM}_1 \wedge \vec{f}_{2/1} + \vec{OM}_2 \wedge \vec{f}_{1/2}$$

les termes $\frac{d\vec{OM}_1}{dt} \wedge \vec{p}_1$ et $\frac{d\vec{OM}_2}{dt} \wedge \vec{p}_2$ sont nuls.

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{\sigma}_O}{dt} &= \vec{OM}_1 \wedge \vec{f}_{2/1} - \vec{OM}_2 \wedge \vec{f}_{2/1} \quad \left(\text{car } \vec{f}_{1/2} = -\vec{f}_{2/1} \right) \\ &= (\vec{OM}_1 - \vec{OM}_2) \wedge \vec{f}_{2/1} = \vec{M_2 M_1} \wedge \vec{f}_{2/1} = \vec{0} \end{aligned}$$

$\vec{M_2 M_1}$ et $\vec{f}_{2/1}$ étant colinéaires.



d'où $\vec{\sigma}_O = \text{constante}$ pour un système isolé de 2 points matériels.

○ point fixe d'un référentiel galiléen

Remarque : en réalité la conservation du moment cinétique total d'un système isolé est une loi fondamentale de la nature (quels que soient le nombre et la nature des constituants du système isolé). Jamais encore une expérience n'a remis en cause cette loi.

Ch 5: Référentiels non galiléens.

1) Relation fondamentale de la dynamique dans un référentiel non galiléen:

dans un référentiel galiléen R la RFD s'écrit :

$$m \vec{a}_R = \vec{f} \quad \vec{f} \text{ somme vectorielle des forces s'appliquant sur le point matériel.}$$

$\vec{a}_R$ accélération du point mobile par rapport à R .

Est-il possible d'écrire une relation analogue dans un référentiel R' en mouvement quelconque par rapport à R ?

l'accélération du point mobile dans R' est $\vec{a}_{R'}$

de plus $\vec{a}_R = \vec{a}_{R'} + \vec{a}_e + \vec{a}_c \quad (\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c)$

$$m \vec{a}_R = \vec{f} \text{ s'écrit } m(\vec{a}_{R'} + \vec{a}_e + \vec{a}_c) = \vec{f}$$

soit
$$m \vec{a}_{R'} = \vec{f} - m \vec{a}_e - m \vec{a}_c$$

en dynamique newtonienne on postule l'invariance des forces dans un changement de référentiel quelconque. $\vec{f}$ est la force qui s'exerce sur le point matériel dans R ou dans R' .

conclusion: la RFD dans un repère non galiléen n'est pas aussi simple que dans un référentiel galiléen.

$$\begin{array}{ll} m \vec{a}_R = \vec{f} & R \text{ galiléen.} \\ m \vec{a}_{R'} = \vec{f} + \overrightarrow{\text{autres termes}} & R' \text{ non galiléen.} \end{array}$$

Remarque: si R' est en translation rectiligne et uniforme par rapport à R ; R' est alors galiléen $\vec{a}_e = \vec{a}_c = \vec{0}$ et $\vec{a}_R = \vec{a}_{R'}$.

2) forces d'inertie :

A) l'observateur lié à R' non galiléen, pour pouvoir écrire la relation fondamentale de la dynamique dans R' , doit ajouter à la force ordinaire $\vec{f}$ les termes $-m\vec{a}_e$ et $-m\vec{a}_c$ qui ont même unité que $\vec{f}$ (homogènes à des forces)

$-m\vec{a}_e$ s'appelle la pseudo-force d'inertie d'entraînement.

$-m\vec{a}_c$ la pseudo-force d'inertie de Coriolis.

remarque : souvent on les appelle forces d'inertie tout court et non pseudo-forces d'inertie. C'est R. Feynman qui a employé le premier le terme pseudoforce pour bien montrer qu'elles sont essentiellement différentes des forces ordinaires (d'interaction). On rencontre également la terme forces de référentiels.

on peut donc écrire la RFD dans R' non galiléen à la condition d'ajouter à la force ordinaire $\vec{f}$ (somme vectorielle des forces appliquées) les pseudoforces d'inertie.

$$m \vec{a}_{\underline{R' \text{ non galiléen}}} = \vec{f} + \vec{f}_{\text{inertie entraînement}} + \vec{f}_{\text{inertie Coriolis}}$$

$$\text{avec } \vec{f}_{ie} = -m\vec{a}_e \text{ et } \vec{f}_{ic} = -m\vec{a}_c$$

B) quelques exemples de la vie courante :

lorsque nous sommes assis dans un autobus et que celui-ci roule sur une route horizontale, rectiligne et à vitesse constante tout se passe comme si nous étions à l'arrêt (la situation est un peu idéalisée : bosses de la route ...).

- si l'autobus accélère on se sent projeté vers l'arrière.
- si l'autobus freine on se sent projeté vers l'avant.
- si l'autobus tourne à gauche on se sent projeté vers la droite.

prenons le 3^{ème} cas, nous avons l'habitude de dire : "c'est la force centrifuge qui nous tire vers l'extérieur du virage". Si nous nous posons cette question : "par quoi est exercée cette force ? ", nous ne trouvons RIEN, il n'y a aucun objet qui exerce cette force, ELLE NE RÉSULTE PAS D'UNE INTERACTION comme les forces ordinaires. La force centrifuge est une pseudoforce d'inertie d'entraînement que nous ressentons bien parce que nous décrivons le mouvement dans le référentiel lié à la voiture non galiléen (ici tourne / sol), en particulier pour nous elle n'est pas fictive (terme qu'il ne faut pas employer en parlant des pseudoforces d'inertie).

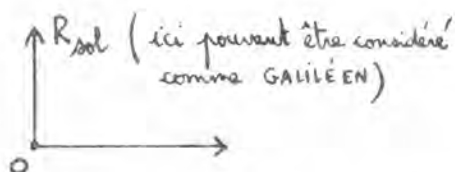
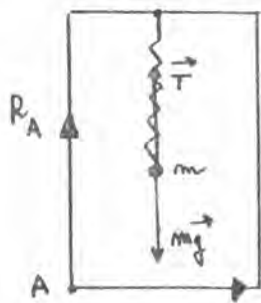
on pourrait dire pour les 2 premiers cas : une force nous projette vers l'arrière, une force nous projette vers l'avant ; ce sont aussi 2 pseudoforces d'inertie d'entraînement. (R voiture non galiléen).

c) résumé :

R est galiléen	R' n'est pas galiléen
$m \vec{a}_R = \vec{f}$ $\vec{f}$ somme vectorielle des forces (d'interaction). IL N'Y A PAS DE FORCES D'INERTIE.	$m \vec{a}_{R'} = \vec{f} + \overrightarrow{\text{pseudoforces}} \text{ (forces d'inertie)}$ $\vec{f}$ somme vectorielle des forces (d'interaction) LES FORCES D'INERTIE EXISTENT ; leurs effets sont ressentis, mesurables, elles ne sont pas fictives mais nous sommes <u>incapables d'expliquer leur origine profonde.</u> Elles ne résultent pas d'une interaction. On remarquera que comme les forces de gravitation elles sont <u>proportionnelles à la masse</u> $\underline{m}$.

3) Exemples de cas simples :

A) translation :



on considère un point matériel de masse m accroché au plafond d'un ascenseur par l'intermédiaire d'un ressort, m est immobile par rapport à l'ascenseur.

R_{sol} galiléen

R_A animé d'un mouvement d'accélération constante $\vec{a}_{R_{sol}}$, rectiligne et vertical.

Ecriture de la relation fondamentale dans R_{sol} galiléen :

l'accélération de m est égale à $\vec{a}_{R_{sol}}$ (m est immobile par rapport à l'ascenseur)

on se place quand le ressort a pris sa longueur finale (par exemple phase de démarrage exclue)

la RFD s'écrit : $m \vec{a}_{R_{sol}} = m \vec{g} + \vec{T}$. (I)

Ecriture de la relation fondamentale dans R_A non galiléen (accélééré) :

m est immobile par rapport à R_A : $\vec{a}_{R_A} = \vec{0}$

la RFD s'écrit : $\vec{0} = m \vec{g} + \vec{T} - m \vec{a}_e$. $\vec{a}_e = \vec{0}$ car R_A en translation / R_{sol} .

$\vec{a}_e = \left(\frac{d^2 \vec{OA}}{dt^2} \right)_{R_A}$ car R_e en translation / R_A .

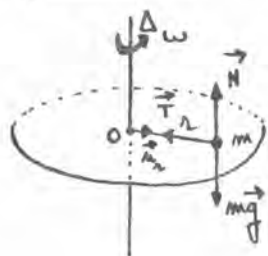
donc $\vec{a}_e = \vec{a}_{R_{sol}}$

$\vec{0} = m \vec{g} + \vec{T} - m \vec{a}_{R_{sol}}$ (II)

les 2 équations écrites sont équivalentes.

Sur un exemple simple comme celui qui précède, on ne voit pas l'intérêt de choisir un référentiel non galiléen, et c'est dans ce cas une complication inutile. Il y a des cas où le choix d'un référentiel non galiléen s'impose : par exemple quand un satellite doit réaliser un rendez-vous spatial on communique des informations au pilote, celles-ci doivent être facilement exploitables ; on choisit alors un référentiel lié au satellite (non galiléen)

B) rotation : $\omega = \text{constante}$.



la masse m repose sur un disque horizontal D qui tourne autour de Δ à la vitesse angulaire ω constante par rapport à R_{sol} . (Δ perpendiculaire à D et passe par le centre du disque O).

Il n'y a pas de frottement. La masse est attachée à l'axe par un fil et est immobile par rapport au disque.

dans R_{sol} galiléen, la RFD s'écrit : $m \vec{a}_{R_{sol}} = \vec{N} + \vec{T} + m\vec{g}$

on a de plus $\vec{N} + m\vec{g} = \vec{0}$ (immobile / R_{sol} dans la direction Δ)

$$m \vec{a}_{R_{sol}} = \vec{T}$$

Dans R_{sol} , le mouvement de m est circulaire uniforme :

$$\vec{a}_{R_{sol}} = -\omega^2 r \vec{u}_r \quad (\text{centripète}) \quad \underline{\vec{T} = -m\omega^2 r \vec{u}_r}$$

dans R_D tournant / R_{sol} donc non galiléen, la RFD s'écrit :

$$m \text{ est immobile dans } R_D : \vec{a}_{R_D} = \vec{0}$$

$$\vec{0} = \vec{N} + \vec{T} + m\vec{g} + \text{pseudoforce} \quad (\vec{N} + m\vec{g} = \vec{0})$$

ici pseudoforce de Coriolis est nulle car m immobile dans R_D

dans ce cas : on a $\vec{a}_a = \vec{a}_e$ (voir cinématique, loi de composition des accélérations)

$$\vec{a}_{R_{sol}} = \vec{a}_e \quad \text{d'où} \quad \vec{a}_e = -\omega^2 r \vec{u}_r$$

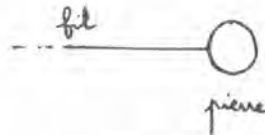
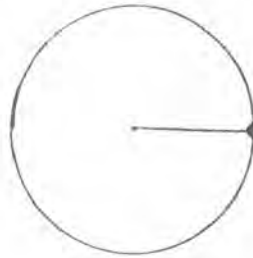
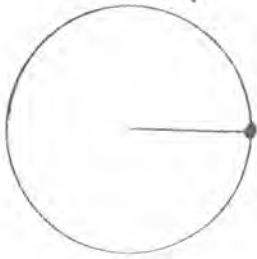
$$\vec{0} = \vec{T} - m\vec{a}_e \quad \vec{0} = \vec{T} + m\omega^2 r \vec{u}_r \quad \longrightarrow \quad \underline{\vec{T} = -m\omega^2 r \vec{u}_r}$$

les 2 équations écrites sont équivalentes.

Dans $\vec{0} = \vec{T} + m\omega^2 r \vec{u}_r$ $m\omega^2 r \vec{u}_r$ est la pseudo force centrifuge.

ici encore la résolution dans R_S non galiléen ne s'impose pas.

exercice : une pierre tourne au bout d'une ficelle avec une vitesse angulaire constante ω_{fil} dans un plan horizontal. On négligera le poids de la pierre et la force exercée par l'air sur la pierre devant les autres forces.



dessiner $\vec{f}_{fil/pierre}$

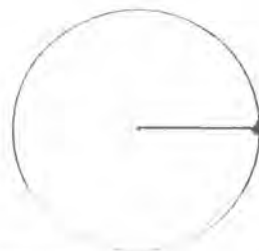
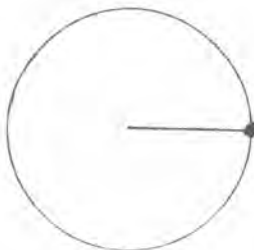
dessiner $\vec{f}_{pierre/fil}$

est-elle centripète,
centrifuge
force ordinaire
pseudo force

mêmes questions.

référentiel lié au sol galiléen

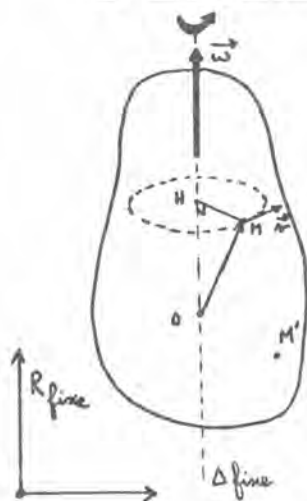
référentiel tournant lié à la pierre non galiléen



dessiner les forces et pseudo forces dans les 2 cas. (ne pas dessiner poids et force air/pierre).

4) Retour sur la cinématique :

(A) vecteur rotation ou vecteur angulaire de rotation d'un solide.



un point matériel M appartenant au solide décrit un cercle dans R_{fixe} à la vitesse angulaire ω ; un autre point matériel M' décrit aussi un cercle de rayon différent à la même vitesse angulaire ω .

le vecteur rotation $\vec{\omega}$ du solide n'est autre que le vecteur vitesse angulaire $\vec{\omega}$ d'un quelconque de ses points.

on a m que $\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$ ($\vec{r} = \vec{OM}$) $\vec{v}$ vitesse de M / R_{fixe} .

soit $\boxed{\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}} \quad (I)$

il est très important de voir qu'il n'est pas nécessaire que $\vec{r}$ soit le vecteur position d'un point du corps en rotation.

en effet si $\vec{b}$ est un vecteur lié au corps en rotation :

$$\vec{b} = \vec{M_1M_2} = \vec{OM_2} - \vec{OM_1} = \vec{r_2} - \vec{r_1} \quad \begin{cases} \vec{r_1} = \vec{OM_1} \\ \vec{r_2} = \vec{OM_2} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{vecteur position de } M_1. \\ M_2. \end{array}$$

on a d'après (I) : $\frac{d\vec{r_1}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{r_1}$ et $\frac{d\vec{r_2}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{r_2}$ puis

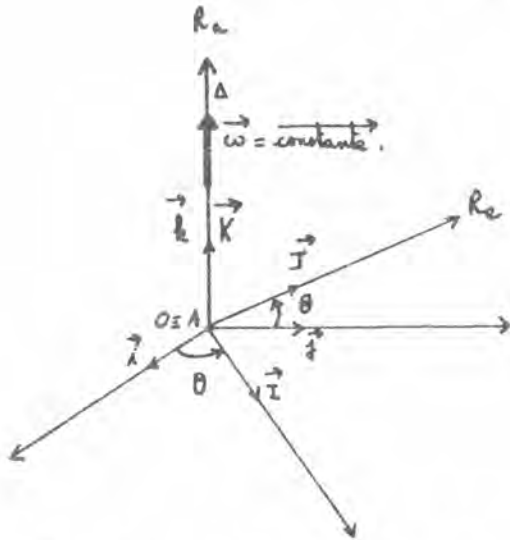
$$\frac{d\vec{r_2}}{dt} - \frac{d\vec{r_1}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{r_2} - \vec{\omega} \wedge \vec{r_1} \quad \frac{d}{dt} (\vec{r_2} - \vec{r_1}) = \vec{\omega} \wedge (\vec{r_2} - \vec{r_1})$$

d'où $\boxed{\frac{d\vec{b}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{b}} \quad \vec{b} \text{ vecteur quelconque LIÉ au corps en rotation.} \quad (II)$

(B) Le référentiel R_e est en rotation par rapport au référentiel R_a :

on suppose en plus * que R_e tourne autour d'un axe Δ FIXE dans R_a .

* que $\vec{\omega} (R_e/R_a)$ notée simplement $\vec{\omega}$ est constante
(rotation uniforme autour de Δ)



$\vec{K} \equiv \vec{k}$; $\vec{i}, \vec{I}, \vec{j}, \vec{J}$ coplanaires.

$\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}$ liés à R_e qui est un solide qui tourne à $\vec{\omega}$ par rapport à R_a .

on peut appliquer (I) pour $\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}$.

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d\vec{I}}{dt} &= \vec{\omega} \wedge \vec{I} & \frac{d\vec{J}}{dt} &= \vec{\omega} \wedge \vec{J} & \frac{d\vec{K}}{dt} &= \vec{\omega} \wedge \vec{K} \\ \text{la dérivation se faisant dans } R_a. \end{aligned}}$$

(a) vitesse d'entraînement :

la relation mise dans le ch. cinématique (relativité du mouvement)

$$\vec{v}_e = \left(\frac{d\vec{OA}}{dt} \right)_{R_a} + x \left(\frac{d\vec{I}}{dt} \right)_{R_a} + y \left(\frac{d\vec{J}}{dt} \right)_{R_a} + z \left(\frac{d\vec{K}}{dt} \right)_{R_a}$$

$$\begin{aligned} \text{s'écrit } (O \equiv A) : \quad \vec{v}_e &= x \vec{\omega} \wedge \vec{I} + y \vec{\omega} \wedge \vec{J} + z \vec{\omega} \wedge \vec{K} \\ \vec{v}_e &= \vec{\omega} \wedge (x\vec{I} + y\vec{J} + z\vec{K}) = \vec{\omega} \wedge \vec{AM} = \vec{\omega} \wedge \vec{OM}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{v}_e = \vec{\omega} \wedge \vec{OM}.}$$

cette relation pourrait être écrite directement si on a bien compris la signification de $\vec{v}_e$.

(b) accélération d'entraînement :

$$\vec{a}_e = \left(\frac{d^2\vec{OA}}{dt^2} \right)_{R_a} + x \left(\frac{d^2\vec{I}}{dt^2} \right)_{R_a} + y \left(\frac{d^2\vec{J}}{dt^2} \right)_{R_a} + z \left(\frac{d^2\vec{K}}{dt^2} \right)_{R_a}$$

$$\left(\frac{d^2\vec{I}}{dt^2} \right)_{R_a} = \frac{d}{dt} (\vec{\omega} \wedge \vec{I}) = \vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{I}}{dt} \quad \vec{\omega} \text{ constant.}$$

$$= \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{I}) \quad (\text{mêmes expressions pour } \vec{J}, \vec{K}.)$$

$$\begin{aligned}\vec{a}_e &= x \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{i}) + y \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{j}) + z \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{k}) \\ &= \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge \vec{AM}] = \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge \vec{OM}]\end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{a}_e = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{OM})}$$

$$\vec{OM} = \vec{AM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

rapport mathématique :

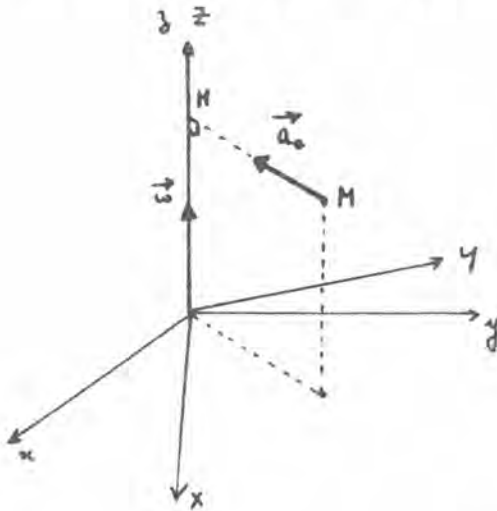
$$\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) = \vec{V}_2 (\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_3) - \vec{V}_3 (\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2).$$

$\vec{a}_e$ peut se transformer :

$$\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{OM}) = \vec{\omega} (\vec{\omega} \cdot \vec{OM}) - \vec{OM} (\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}) = -\omega^2 x \vec{i} - \omega^2 y \vec{j}.$$

$$\text{or } \vec{OM} = \vec{OH} + \vec{HM} = z\vec{k} + \underbrace{(x\vec{i} + y\vec{j})}_{\vec{HM}}.$$

$$\text{d'où } \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{OM}) = -\omega^2 \vec{HM}. \quad (\text{accélération centripète})$$



$$\boxed{\vec{a}_e = -\omega^2 \vec{HM}}.$$

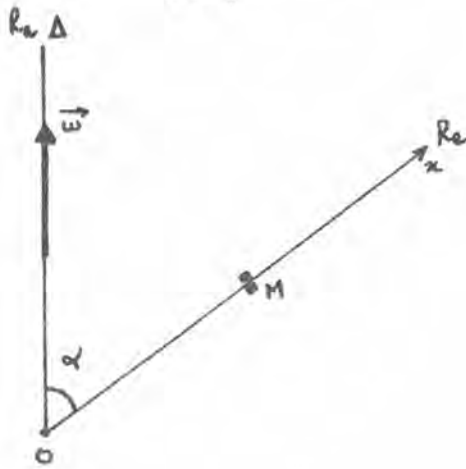
Ⓢ accélération de Coriolis.

$$\vec{a}_c = 2 \left[\frac{dx}{dt} \left(\frac{d\vec{i}}{dt} \right)_{Re} + \frac{dy}{dt} \left(\frac{d\vec{j}}{dt} \right)_{Re} + \frac{dz}{dt} \left(\frac{d\vec{k}}{dt} \right)_{Re} \right]$$

$$\vec{a}_c = 2 \left[\frac{dx}{dt} \vec{\omega} \wedge \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{\omega} \wedge \vec{j} + \frac{dz}{dt} \vec{\omega} \wedge \vec{k} \right] = 2 \vec{\omega} \wedge \underbrace{\left[\frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} + \frac{dz}{dt} \vec{k} \right]}_{\substack{\vec{v}(M) \\ \text{notée } \vec{v}_2 \\ Re}}$$

$$\boxed{\vec{a}_c = 2 \vec{\omega} \wedge \vec{v}_2}$$

exercice: un axe matériel $\vec{Ox}$ tourne autour de Δ vertical avec la vitesse de rotation uniforme ω . $(Ox, \Delta) = \alpha$ constant.
Le point matériel M de masse m coulisse sans frottement sur $\vec{Ox}$.



- 1) Calculer $x_0 = \overline{OM_0}$ position d'équilibre relatif M_0 . (on posera $\Omega = \omega \sin \alpha$).
- 2) On abandonne M sans vitesse initiale relativement à $\vec{Ox}$ à une distance a de M_0 , calculer $x(t)$. Discuter la stabilité de l'équilibre en M_0 .

solution:

- 1) le référentiel lié au sol ($R_{terrestre}$) est ici considéré comme galiléen.
 Δ est fixe dans ce référentiel.

$Oxyz$ tourne à $\vec{\omega}$ par rapport au sol, le référentiel dont un système d'axes est $oxyz$ n'est pas galiléen, notons le R_e .

dans R_e ; la RFD s'écrit: (quand M fixe dans R_e).

$$m\vec{g} + \vec{N} - m\vec{a}_e(M) = \vec{0}$$

$$m\vec{g} + \vec{N} + m\omega^2 \overline{H_0 H_0} = \vec{0} \quad (\text{équilibre de } M \text{ dans } R_e).$$

$m\vec{g}$: poids. $\vec{N}$: force exercée par l'axe $\vec{Ox}$ sur M .

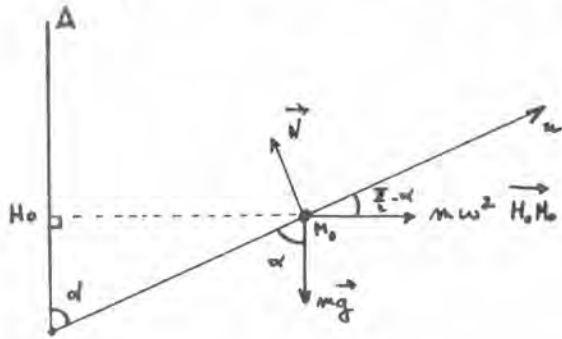
$-m\vec{a}_e$: pseudoforce d'entraînement (ici force d'inertie centrifuge).

(la pseudoforce de Coriolis $-m\vec{a}_c$ est nulle ici car $\vec{v}(M)_{R_e} = \vec{0}$).

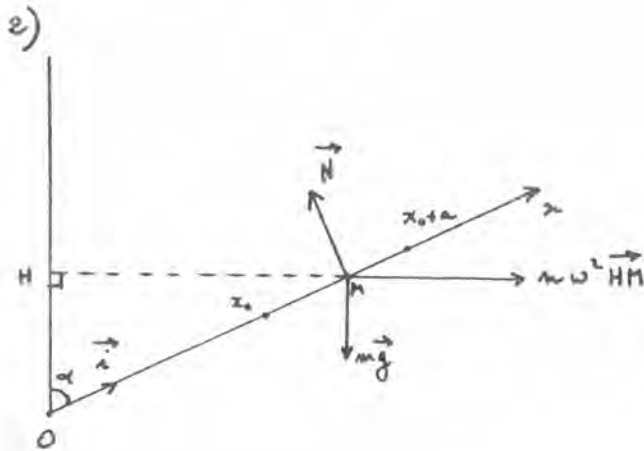
en projection sur Ox : (Voir schéma)

$$-mg \cos \alpha + m\omega^2 (x_0 \sin \alpha) \sin \alpha = 0.$$

$$-mg \cos \alpha + m \Omega^2 x_0 = 0 \quad \text{d'où} \quad \boxed{x_0 = \frac{g \cos \alpha}{\Omega^2}}$$

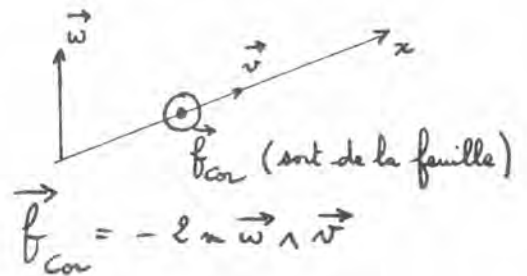


$\vec{N} \perp \vec{Ox}$ car pas de frottement.



$$\vec{v} = v \vec{i} \quad (v \text{ réel})$$

par exemple si $v > 0$, $\vec{v}$ pointe dans le sens $+\vec{i}$.



RFD dans Re :

$$\vec{N} + m\vec{g} + m\omega^2 \vec{HM} + \vec{f}_{\text{Coriolis}} = m \vec{a}_{/Re}$$

en projection sur Ox : ($\vec{f}_{\text{Cor}}$ n'intervient pas, projection nulle sur Ox)

$$-mg \cos \alpha + m \omega^2 (x \sin \alpha) \sin \alpha = m \ddot{x}$$

$$\ddot{x} - \Omega^2 x = -g \cos \alpha$$

$$\boxed{\ddot{x} - \Omega^2 x = -\Omega^2 x_0}$$

(se reporter à un cours de mathématiques pour résoudre cette équation).

solution particulière : $x = x_0$.

solution générale de $\ddot{x} - \Omega^2 x = 0$: $x = A \operatorname{ch} \Omega t + B \operatorname{sh} \Omega t$

solution générale :

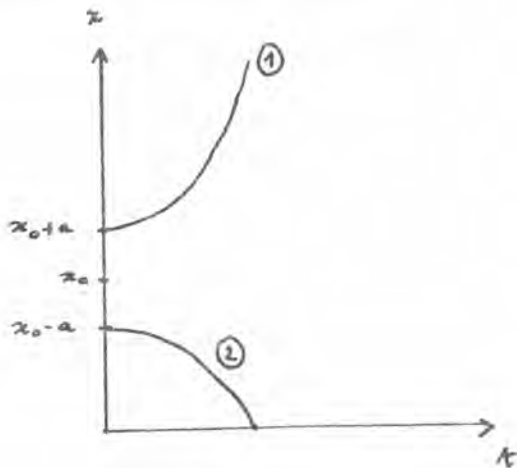
$$\boxed{x = x_0 + A \operatorname{ch} \Omega t + B \operatorname{sh} \Omega t}$$

$$\dot{x} = A \Omega \operatorname{sh} \Omega t + B \Omega \operatorname{ch} \Omega t$$

$$\text{cas 1: } t=0 \quad \left. \begin{array}{l} x = x_0 + a \\ x = x_0 + A \end{array} \right\} A = a$$

$$\ddot{x} = 0 = B\Omega \Rightarrow B = 1$$

$$x = x_0 + a \operatorname{ch} \Omega t$$



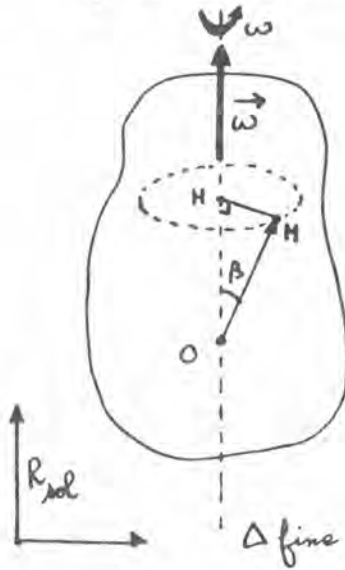
$$\text{cas 2: } t=0 \quad \left. \begin{array}{l} x = x_0 - a \\ x = x_0 + A \end{array} \right\} A = -a$$

$$\ddot{x} = 0 = B\Omega \Rightarrow B = 0$$

$$x = x_0 - a \operatorname{ch} \Omega t$$

la position d'équilibre relatif M_0 est instable, quand on écarte le point matériel de cette position il s'en éloigne sans y revenir.

A) vecteur rotation ou vecteur angulaire de rotation d'un solide :



(relire le vecteur $\vec{\omega}$ pour un mouvement circulaire)

un point matériel M appartenant au solide décrit un cercle dans référentiel lié au sol R_{sol} à la vitesse angulaire ω . un autre point M' décrit aussi un cercle de rayon différent à la même vitesse angulaire ω .

le vecteur rotation $\vec{\omega}$ du solide n'est autre que le vecteur vitesse angulaire $\vec{\omega}$ d'un quelconque de ses points .

on a vu que $\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$ ($\vec{r} = \vec{OM}$)
vitesse de M par rapport à R_{sol} .

$$\text{soit } \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{r} \quad (I)$$

un point très utile est qu'il n'est pas nécessaire que $\vec{r}$ soit le vecteur position d'un point du corps en rotation .

en effet si $\vec{b}$ est un vecteur lié au corps en rotation, on peut écrire

$$\begin{aligned} \vec{b} = \vec{M_1M_2} &= \vec{OM_2} - \vec{OM_1} & \vec{r_1} = \vec{OM_1} & \text{vecteur position de } M_1 \\ &= \vec{r_2} - \vec{r_1} & \vec{r_2} = \vec{OM_2} & M_2. \end{aligned}$$

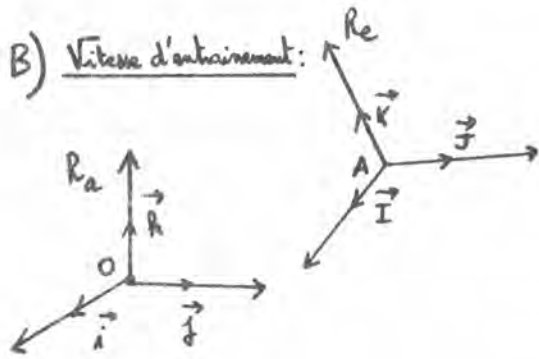
$$\text{on a donc d'après (I)} \quad \frac{d\vec{r_1}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{r_1} \quad \frac{d\vec{r_2}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{r_2}.$$

$$\frac{d\vec{r_2}}{dt} - \frac{d\vec{r_1}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{r_2} - \vec{\omega} \wedge \vec{r_1}$$

$$\frac{d}{dt} (\vec{r_2} - \vec{r_1}) = \vec{\omega} \wedge (\vec{r_2} - \vec{r_1})$$

$$\frac{d\vec{b}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{b} \quad (II)$$

$\vec{b}$ vecteur quelconque lié au corps en rotation .

B) Vitesse d'entraînement:

$\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}$ sont liés au référentiel R_e qui est un solide qui tourne avec le vecteur vitesse angulaire $\vec{\omega}$ par rapport à R_a

Dans le cas le plus général $\vec{\omega}$ n'est pas constant (sa norme et sa direction change): $\vec{\omega}$ vecteur rotation instantanée de R_e/R_a .

On peut appliquer à $\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}$ la relation (II). [on l'admet, car (II) a été montrée pour $\vec{\omega}$ ayant une direction constante]

$$\boxed{\frac{d\vec{I}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{I} \quad \frac{d\vec{J}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{J} \quad \frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{K}}$$

la dérivation se faisant dans R_a .

On a vu la relation $\vec{v}_e = \left(\frac{d\vec{OA}}{dt}\right)_{R_a} + x \left(\frac{d\vec{I}}{dt}\right)_{R_a} + y \left(\frac{d\vec{J}}{dt}\right)_{R_a} + z \left(\frac{d\vec{K}}{dt}\right)_{R_a}$

$$\begin{aligned} \vec{v}_e &= \left(\frac{d\vec{OA}}{dt}\right)_{R_a} + x \vec{\omega} \wedge \vec{I} + y \vec{\omega} \wedge \vec{J} + z \vec{\omega} \wedge \vec{K} \\ &= \left(\frac{d\vec{OA}}{dt}\right)_{R_a} + \vec{\omega} \wedge (x\vec{I} + y\vec{J} + z\vec{K}) \end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{v}_e = \left(\frac{d\vec{OA}}{dt}\right)_{R_a} + \vec{\omega} \wedge \vec{AM}}$$

c) Accélération d'entraînement:

On a vu: $\vec{a}_e = \left(\frac{d^2\vec{OA}}{dt^2}\right)_{R_a} + x \left(\frac{d^2\vec{I}}{dt^2}\right)_{R_a} + y \left(\frac{d^2\vec{J}}{dt^2}\right)_{R_a} + z \left(\frac{d^2\vec{K}}{dt^2}\right)_{R_a}$

$$\left(\frac{d^2\vec{I}}{dt^2}\right)_{R_a} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \wedge \vec{I}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{I} + \vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{I}}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{I} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{I})$$

mêmes relations pour $\vec{J}$ et $\vec{K}$

$$\begin{aligned} \vec{a}_e &= \left(\frac{d^2\vec{OA}}{dt^2}\right)_{R_a} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge x\vec{I} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge x\vec{I}) + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge y\vec{J} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge y\vec{J}) \\ &\quad + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge z\vec{K} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge z\vec{K}) \end{aligned}$$

$$\vec{a}_e = \left(\frac{d^2 \vec{OA}}{dt^2} \right)_{R_a} + \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \right)_{R_a} \wedge \vec{AM} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{AM}) \quad (\text{faire le calcul}). \quad 63$$

remarque: on montre que $\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \right)_{R_a} = \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \right)_{R_e}$, on pourra noter simplement $\frac{d\vec{\omega}}{dt}$.

$$\vec{a}_e = \left(\frac{d^2 \vec{OA}}{dt^2} \right)_{R_a} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{AM} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{AM})$$

cas particulier important où R_e tourne autour d'un axe fixe Δ dans R_a :

Tous les points liés à R_e ont un mvt circulaire dans R_a , en particulier le point qui coïncide avec H à l'instant t .

Comme le mvt d'entraînement caractérise le mvt de R_e/R_a , on doit retrouver les

accélérations du mvt circulaire

pour $\vec{a}_e$ [voir par 4 $R_e \times$ Ch: Relativité du mvt].

le support de $\vec{\omega}$ reste fixe dans R_a .

sa norme et son sens peuvent varier.

le point coïncident a une trajectoire circulaire / R_a centrée sur Δ

$$\vec{a}_e = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{AM} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{AM})$$

$$\text{Rappel: } \vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) = \vec{V}_2 (\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_3) - \vec{V}_3 (\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2)$$

$$\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{AM}) = \vec{\omega} (\vec{\omega} \cdot \vec{AM}) - \vec{AM} (\vec{\omega} \cdot \vec{\omega})$$

$$\vec{AM} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$$

il vient:

$$\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{AM}) = -x\omega^2 \vec{i} - y\omega^2 \vec{j}$$

$$\begin{aligned} \vec{AM} &= \vec{AH} + \vec{HM} \\ &= z \vec{k} + \underbrace{(x \vec{i} + y \vec{j})}_{\vec{HM}} \end{aligned}$$

$$\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{AM}) = -\omega^2 \vec{HM}$$

accélération centripète (normale)

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{AM} &= \frac{d}{dt} (\omega \vec{k}) \wedge (x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}) = \frac{d\omega}{dt} \vec{k} \wedge (x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}) \quad \left[\frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{0} \right] \\ &= \frac{d\omega}{dt} \left(x \underbrace{\vec{k} \wedge \vec{i}}_{\vec{j}} + y \underbrace{\vec{k} \wedge \vec{j}}_{-\vec{i}} \right) \quad (\vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0}) \\ &= \frac{d\omega}{dt} (-y \vec{i} + x \vec{j}) \end{aligned}$$

$$\vec{HM} \cdot (-y \vec{i} + x \vec{j}) = (x \vec{i} + y \vec{j}) \cdot (-y \vec{i} + x \vec{j}) = -xy + xy = 0.$$

donc $\frac{d\omega}{dt} (-y \vec{i} + x \vec{j})$ perpendiculaire à $\vec{HM}$: accélération tangentielle.

$$\text{module } \left| \frac{d\omega}{dt} \right| \times \sqrt{x^2 + y^2} = \left| \frac{d\omega}{dt} \right| \cdot HM$$

$$\vec{a}_e = \underbrace{\frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{AM}}_{\vec{a}_{eT}} - \underbrace{\omega^2 \vec{HM}}_{\vec{a}_{eH}}$$

R_e tourne dans R_a autour de Δ fixe.

Si de plus la rotation est uniforme $\omega = \text{constante}$ $\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{0}$

$$\vec{a}_e = -\omega^2 \vec{HM}$$

D) Accélération de Coriolis:

$$\text{On a me} \quad \vec{a}_c = 2 \left[\frac{dx}{dt} \left(\frac{d\vec{I}}{dt} \right)_{R_e} + \frac{dy}{dt} \left(\frac{d\vec{J}}{dt} \right)_{R_e} + \frac{dz}{dt} \left(\frac{d\vec{K}}{dt} \right)_{R_e} \right]$$

$$\vec{a}_c = 2 \left[\frac{dx}{dt} \vec{\omega} \wedge \vec{I} + \frac{dy}{dt} \vec{\omega} \wedge \vec{J} + \frac{dz}{dt} \vec{\omega} \wedge \vec{K} \right]$$

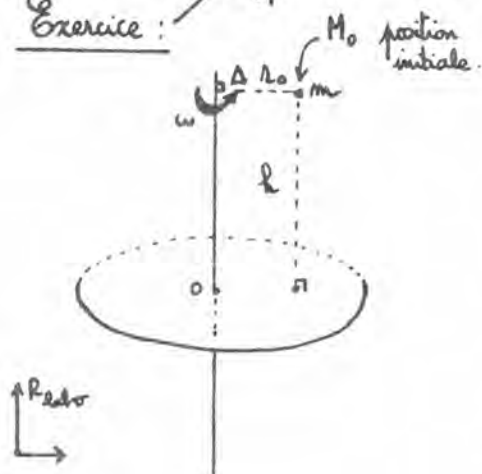
$$= 2 \vec{\omega} \wedge \left[\frac{dx}{dt} \vec{I} + \frac{dy}{dt} \vec{J} + \frac{dz}{dt} \vec{K} \right]$$

$\vec{V}(M)_{R_e} \rightarrow$ ce qu'on a noté $\vec{v}_r$.

$$\boxed{\vec{a}_c = 2 \vec{\omega} \wedge \vec{v}_r}$$

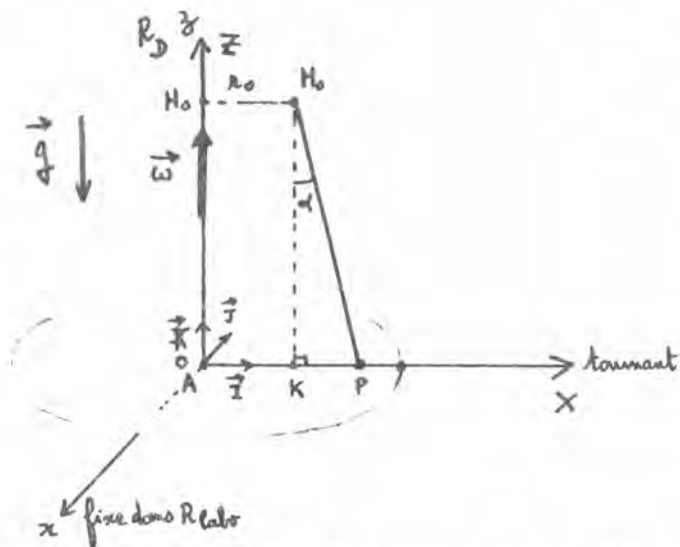
$\vec{a}_c$ est nulle { si R_e en translation quelconque par rapport à R_a $\vec{\omega} = \vec{0}$.
si le point M est immobile dans R_e ; $\vec{v}_r = \vec{0}$.

Exercice : (passer si on n'a pas vu les équations différentielles)



On considère un disque D horizontal tournant autour de l'axe Δ fixe dans le référentiel du laboratoire considéré comme galiléen, à la vitesse angulaire ω constante ($/ R_{\text{lab}}$). On lâche un point matériel M de masse m sans vitesse initiale par rapport à R_D à la hauteur h au dessus du disque et à la distance r_0 de l'axe Δ . Étudier le mouvement du point matériel en choisissant pour référentiel d'étude R_D lié au disque (R_D non galiléen)

On néglige les frottements de l'air.



le point matériel est soumis dans R_D à :

$$\begin{cases} m\vec{g} & \text{poids.} \\ \text{pseudo forces} & \text{car } R_D \text{ non galiléen.} \end{cases}$$

on ne dessine pas complètement le trièdre $Oxyz$ lié à R_0 ; il me sera pas utile.

la RFD s'écrit dans R_D : $m \vec{a}_{R_D} = m\vec{g} - m\vec{a}_e - m\vec{a}_c$

$$\vec{a}_e = -\omega^2 \vec{HM} \quad \text{car } \vec{\omega} = \text{constante}$$

$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{R_D} = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_n$$

d'où $m \vec{a}_{R_D} = m\vec{g} + \underbrace{m\omega^2 \vec{HM}}_{\text{centrifuge}} - \underbrace{2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}_n}_{\text{Coriolis}}$

On projette sur la base $\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}$ liée à R_D :

$$m \ddot{X} = m\omega^2 X + 2m\omega \dot{Y}$$

$$m \ddot{Y} = m\omega^2 Y - 2m\omega \dot{X}$$

$$m \ddot{Z} = -mg \quad (\text{avec } g > 0).$$

$$\begin{cases} \vec{HM} = X\vec{I} + Y\vec{J} \\ H \text{ projection de } M \text{ sur } \Delta \end{cases}$$

	$\vec{I}$	$\vec{J}$	$\vec{K}$
$\vec{\omega}$	0	0	ω
$\vec{v}_n$	$\dot{X}$	$\dot{Y}$	$\dot{Z}$
$\vec{\omega} \wedge \vec{v}_n$	$-\omega \dot{Y}$	$\omega \dot{X}$	0

Soit $\begin{cases} \ddot{X} = \omega^2 X + 2\omega \dot{Y} & \text{(I)} \\ \ddot{Y} = \omega^2 Y - 2\omega \dot{X} & \text{(II)} \\ \ddot{Z} = -g & \text{(III)} \end{cases}$

conditions initiales : $t=0 \quad \begin{cases} X=r_0 & Y=0 & Z=h \\ \dot{X}=\dot{Y}=\dot{Z}=0 \end{cases}$

(III) s'intègre en : $\ddot{Z} = -gt + C$ comme à $t=0 \quad \dot{Z}=0 \rightarrow C=0$
 $\dot{Z} = -gt \quad Z = -\frac{1}{2}gt^2 + C$ comme à $t=0 \quad Z=h \rightarrow C=h$

$$\boxed{Z = -\frac{1}{2} g t^2 + h}$$

intégration de I et II :

$$\left. \begin{aligned} \ddot{X} &= \omega^2 X + 2\omega \dot{Y} \\ \ddot{Y} &= \omega^2 Y - 2\omega \dot{X} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \times 1 \\ \times i \end{aligned}$$

pour résoudre ce système de 2 équations on pose $u = X + i Y$.

$$\begin{aligned} \ddot{X} + i \ddot{Y} &= \omega^2 X + \omega^2 i Y + \underbrace{2\omega \dot{Y} - 2\omega i \dot{X}}_{-2\omega i (\dot{X} - \frac{1}{i} \dot{Y})} \\ &\quad - 2\omega i (\dot{X} + i \dot{Y}) \end{aligned} \quad \begin{aligned} \dot{u} &= \dot{X} + i \dot{Y} \\ \ddot{u} &= \ddot{X} + i \ddot{Y} \end{aligned} \quad (i^2 = i i = -1)$$

$$\ddot{u} = \omega^2 u - 2\omega i \dot{u} \quad \underline{\ddot{u} + 2i\omega \dot{u} - \omega^2 u = 0.}$$

on calcule le discriminant de l'équation caractéristique $r^2 + 2i\omega r - \omega^2 = 0$
soit $\Delta = (2i\omega)^2 - 4\omega^2 = 0$, elle admet la racine double $r = -\frac{2i\omega}{2} = -i\omega$.

la solution générale est: $u = (At + B) e^{-i\omega t} = X + i Y$.

On détermine A et B à l'aide des conditions initiales:

$$\text{à } t=0 \quad r_0 + i x_0 = (A \times 0 + B) e^{-i\omega \times 0} \quad \underline{r_0 = B}$$

$$\dot{u} = A e^{-i\omega t} + (At + B) \times -i\omega \times e^{-i\omega t}$$

$$\text{à } t=0 \quad 0 + i x_0 = A e^0 + (A \times 0 + B) \times -i\omega \times e^0 \quad 0 = A - i\omega B$$

$$i\omega B = A \quad \underline{A = i\omega r_0}$$

$$X + i Y = (i\omega r_0 t + r_0) e^{-i\omega t} = r_0 (1 + i\omega t) e^{-i\omega t}$$

$$\text{or } e^{-i\omega t} = \cos(-\omega t) + i \sin(-\omega t) = \cos \omega t - i \sin \omega t$$

$$\begin{aligned} (1 + i\omega t) (\cos \omega t - i \sin \omega t) &= \cos \omega t - i \sin \omega t + i\omega t \cos \omega t + \omega t \sin \omega t \\ &= (\cos \omega t + \omega t \sin \omega t) + i (\omega t \cos \omega t - \sin \omega t) \end{aligned}$$

par identification

$$\boxed{\begin{aligned} X &= r_0 (\cos \omega t + \omega t \sin \omega t) \\ Y &= r_0 (-\sin \omega t + \omega t \cos \omega t) \end{aligned}}$$

Cas où $\omega t \ll 1$: (pendant toute la durée de la chute).

$T = \frac{2\pi}{\omega}$ est la période de rotation du disque, durée d'1 tour.

$$\omega t \ll 1 \rightarrow 2\pi \frac{t}{T} \ll 1 \quad \boxed{\frac{t}{T} \ll 1}$$

donc si $\omega t \ll 1$ pour tout t la durée de chute est très petite à la durée d'un tour.

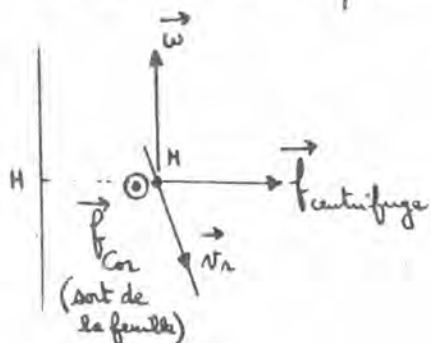
$$\cos \omega t \approx 1 - \frac{\omega^2 t^2}{2} \quad \sin \omega t \approx \omega t \quad \text{au 3^e ordre près.}$$

$$X \approx r_0 \left(1 - \frac{\omega^2 t^2}{2} + \omega^2 t^2 \right) \approx r_0 \left(1 + \frac{\omega^2 t^2}{2} \right) \quad Y \approx r_0 \left(-\omega t + \omega t - \frac{\omega^3 t^3}{2} \right) \\ \approx 0 \quad \text{au 3^{ème} ordre près.}$$

$$\boxed{\begin{aligned} X - r_0 &\approx r_0 \frac{\omega^2 t^2}{2} \\ Y &\approx 0 \\ Z &= h - \frac{1}{2} g t^2 \end{aligned}}$$

la trajectoire est à peu près une droite dans R_0 .

arrivée sur le disque



$$t_D = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad (Z=0)$$

$$X_P - r_0 = r_0 \frac{\omega^2}{2} \frac{2h}{g} = \frac{r_0 \omega^2 h}{g}$$

$$tg \alpha = \frac{K_P}{K H_0} = \frac{\frac{r_0 \omega^2 h}{g}}{h}$$

$$\boxed{tg \alpha = \frac{r_0 \omega^2}{g}}$$

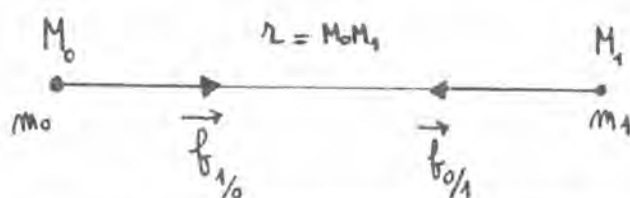
le fait que le mouvement soit dans le plan XOZ montre qu'on peut négliger

$\vec{f}_{Coriolis}$ devant $\vec{f}_{centrifuge}$.

58 5) Mouvement d'un point matériel dans le champ de pesanteur terrestre :

A) le champ gravitationnel :

a) loi de Newton : (attraction ou gravitation universelle) :



les 2 points matériels s'attirent.

en module
$$f_{1/0} = f_{0/1} = G \frac{m_0 m_1}{r^2}$$

G constante gravitationnelle

$$G = 6,673 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$$

(valeur 1983)

remarque : les masses m_0 et m_1 qui apparaissent dans cette relation sont les masses gravitationnelles. Nous admettrons qu'elles sont égales aux masses inertes (masse qui apparaît dans $\vec{f} = m \vec{a}$)

$$m_{\text{gravitationnelle}} = m_{\text{inerte}} = m$$

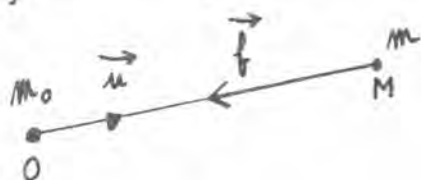
cette identité a été établie par

l'expérience avec une très grande précision $\left| \frac{m_g - m_i}{m_g \text{ ou } m_i} \right| \approx 10^{-12} \quad (1971)$.

b) le champ gravitationnel :

Toute distribution de matière exerce des forces de gravitation sur les points matériels extérieurs à la distribution et également sur les points matériels intérieurs à la distribution : on dit que la distribution de matière est la source d'un champ gravitationnel.

α) cas d'un point matériel source : masse m_0



m_0 exerce sur m la force attractive :

$$\vec{f} = -G \frac{m_0 m}{r^2} \vec{u}$$

$\vec{u}$ vecteur unitaire de $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$

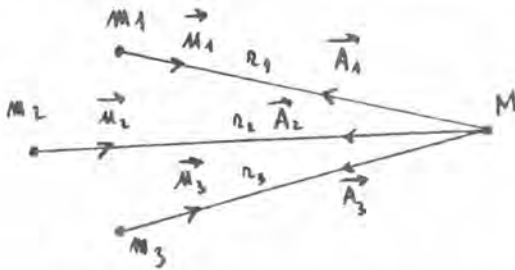
$$\vec{f} = -G \frac{m_0 m}{r^2} \vec{u} = m \left(-G \frac{m_0}{r^2} \vec{u} \right).$$

$$\boxed{\vec{A}(M) = -G \frac{m_0}{r^2} \vec{u}} \quad \text{champ gravitationnel créé en M par la masse } m_0.$$

unité: $N \cdot kg^{-1}$.



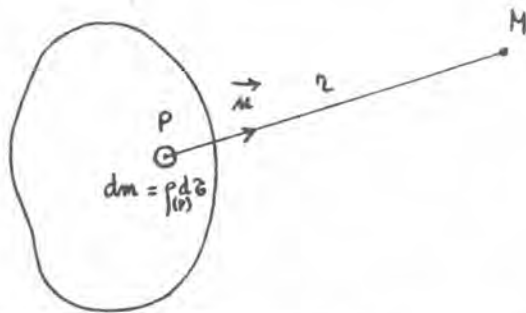
β) cas de plusieurs masses sources: n points matériels sources.



$$\vec{A}(M) = \vec{A}_1 + \vec{A}_2 + \vec{A}_3 + \dots$$

$$\boxed{\vec{A} = -G \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{r_i^2} \vec{u}_i}$$

distribution continue de matière:



$$\begin{aligned} dm \text{ crée } d\vec{A} &= -G \frac{dm}{r^2} \vec{u} \\ &= -G \frac{\rho(P) dV}{r^2} \vec{u} \end{aligned}$$

$\rho(P)$ masse volumique en P.

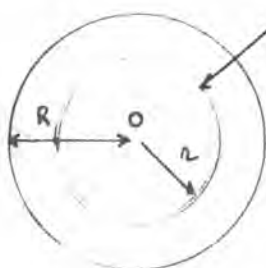
$$\boxed{\vec{A} = -G \sum_{\text{tout le volume de la distribution}} \frac{\rho(P) dV}{r^2} \vec{u} = -G \int_{\text{volume de la distribution}} \frac{\rho(P)}{r^2} \vec{u} dV}$$

cette dernière intégrale est une intégrale triple

Remarque: on rencontre aussi les notations $\vec{G}$ pour $\vec{A}$, G_f ou K pour G .

γ) le champ gravitationnel créé par une sphère pleine:

on considère une sphère pleine (O, R) de masse m ; la masse volumique ne dépend que de la distance r au centre O



entre ces 2 sphères concentriques rayons r et $r+dr$, la masse volumique est constante.

On dit que la distribution de masse a la symétrie sphérique.

ce modèle est intéressant car on l'utilise souvent pour la Terre, les astres.

70 le calcul (un bon exemple de calcul intégral) est assez long, il sera fait en exercice, on donne les résultats.

$r < R$ intérieur de la sphère $\vec{A}(M) = A(r) \vec{u}$. $\vec{u}$ radial vers l'extérieur.

$$A(r) = -G \frac{m_{\text{intérieure}}}{r^2}$$

m_{int} (masse à l'intérieur de la sphère de centre O , de rayon r).

si $\rho(r) = \text{constante} = \rho_0$ (sphère homogène) $m_{\text{int}} = \rho_0 \cdot \frac{4}{3} \pi r^3$

$$A(r) = -G \frac{m}{R^3} r$$

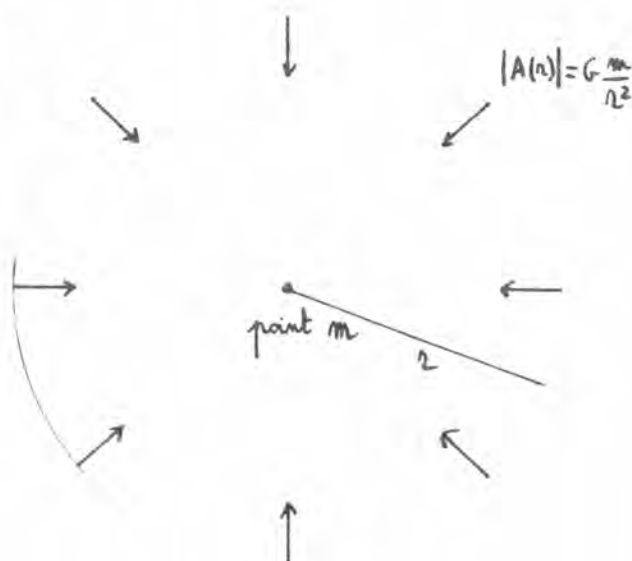
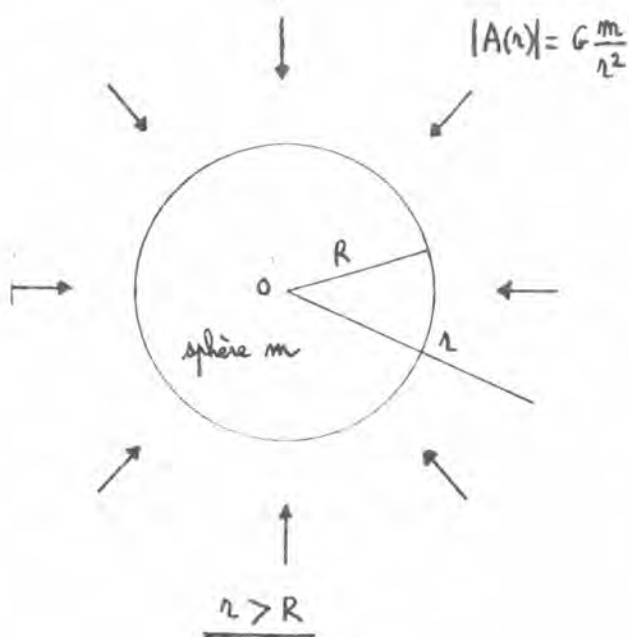
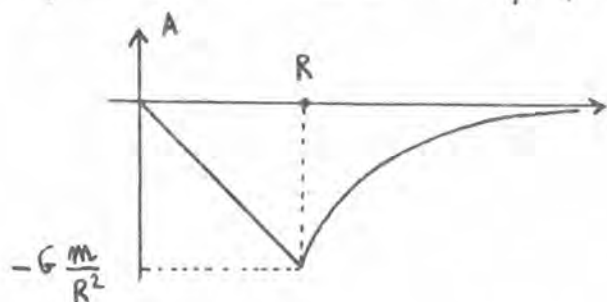
À RETENIR PAR CŒUR ↓

$r > R$ extérieur de la sphère

$$A(r) = -G \frac{m}{r^2} \quad \vec{A} = A(r) \vec{u} \text{ radial vers l'extérieur.}$$

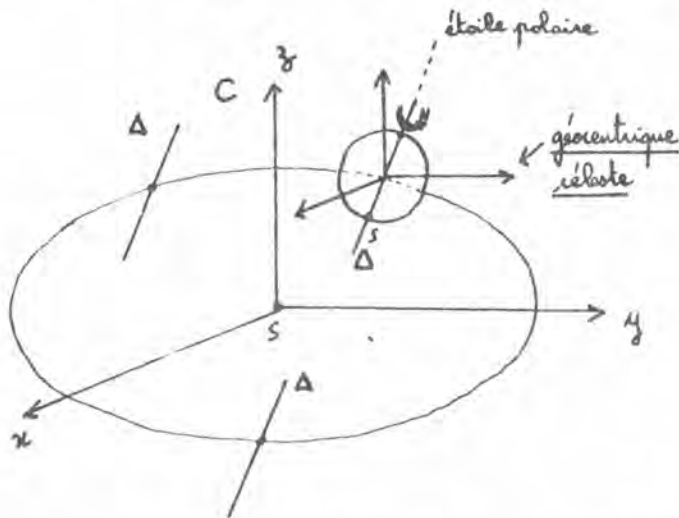
le champ créé à l'extérieur est le même que celui qui serait produit par un point matériel placé en O et qui aurait la masse m (masse de la sphère).

représentation de $A(r)$: cas $\rho = \rho_0$.



B) le référentiel terrestre :

en première approximation le vecteur rotation de la Terre par rapport au référentiel de Copernic est constant, l'axe Δ de rotation de la Terre garde une direction fixe dans le référentiel de Copernic et $\omega = \text{constante}$

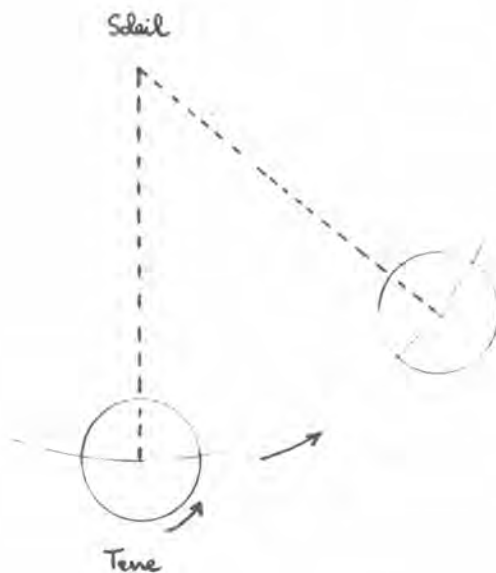


$$\omega = \frac{2\pi}{86160} = 7,29 \cdot 10^{-5} \text{ rad s}^{-1}$$

86160 s est la durée du jour sidéral inférieure de 240 s par rapport au jour solaire 86400 s.

exercice : pour comprendre qu'il faut utiliser 86160 s et non 86400 s, compléter

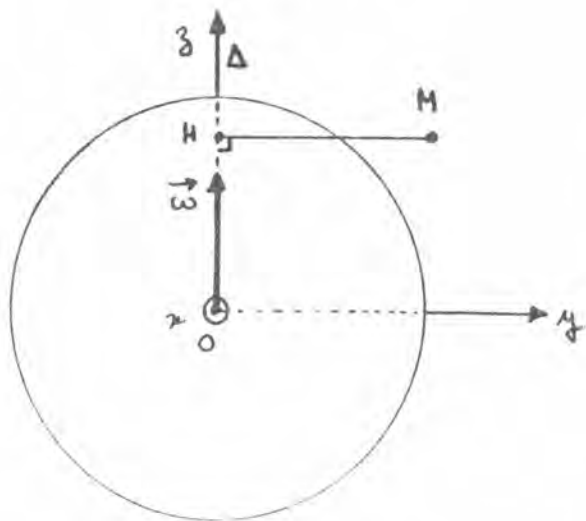
ce schéma (vous pouvez supposer que Δ est perpendiculaire au plan de l'orbite donc de la feuille, ce n'est pas vrai en réalité)



comme le référentiel géocentrique céleste est en translation (elliptique) par rapport au référentiel de Copernic $\vec{\omega}$ est aussi le vecteur rotation de la Terre donc du référentiel terrestre T par rapport au référentiel géocentrique céleste.

($\vec{\omega}_{\text{Terre/Copernic}} = \vec{\omega}_{\text{Terre/géocél}} + \vec{\omega}_{\text{géocél/Copernic}}$ pas une mais "intuitive" or $\vec{\omega}_{\text{géocél/Copernic}} = \vec{0}$ car translation).

si dans les "problèmes courants" T est supposé suffisamment galiléen ; dans ce qui suit on va tenir compte du fait que T n'est pas galiléen.



$Oxyz$ trièdre lié au référentiel géocentrique céleste

$Oxyz$ ne sont pas liés à T !

On suppose le champ de gravitation des astres autres que la Terre négligeable $\rightarrow$ on ne peut donc pas étudier les marées.

la RFD écrite dans T non galiléen :

$$m \vec{a}(M)_T = \vec{f}_a + m \vec{A}_T(M) + \text{pseudo forces}.$$

$\vec{f}_a$ somme vectorielle de toutes les forces appliquées à M exceptées les forces de gravitation.

$m \vec{A}_T(M)$ force de gravitation due à la Terre.

pseudo forces : T en rotation pure à $\vec{\omega}$ constant / $R_{\text{géo céleste}}$.

$$\vec{a}_c = -\omega^2 \overrightarrow{HM} \quad \vec{a}_c = 2 \vec{\omega} \wedge \vec{v}(M)_T$$

pseudo force centrifuge $- m \vec{a}_c = m \omega^2 \overrightarrow{HM}$.

pseudo force de Coriolis $- m \vec{a}_c = -2 m \vec{\omega} \wedge \vec{v}(M)_T$.

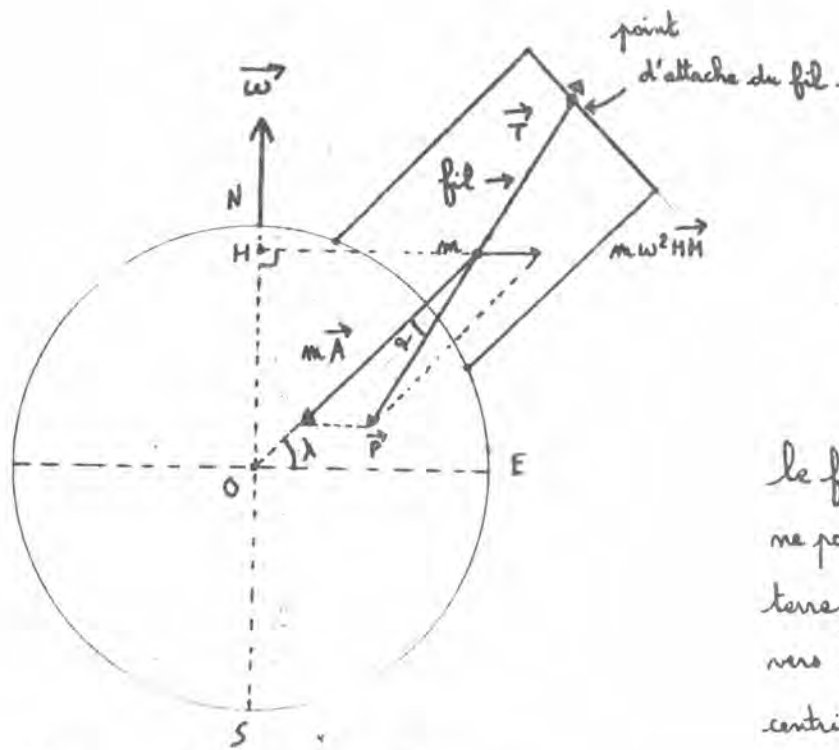
d'où
$$m \vec{a}(M)_T = \vec{f}_a + m \vec{A}_T(M) + m \omega^2 \overrightarrow{HM} - 2 m \vec{\omega} \wedge \vec{v}(M)_T$$

$$m \vec{A}_T(M) + m \omega^2 \overrightarrow{HM} = \vec{P} \quad \text{poids du point matériel}$$

on pose $\vec{P} = m \vec{g}$

$$\vec{g} = \vec{A}_T + \omega^2 \overrightarrow{HM}$$

$\vec{g}$ champ de pesanteur.

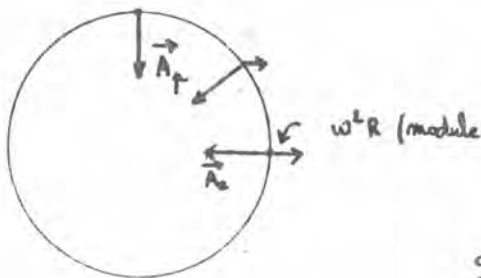


le schéma n'est pas fait à l'échelle.

le fil à plomb (support de $\vec{T}$) ne pointe pas vers le centre de la terre, il est légèrement dévié vers l'extérieur par la pseudoforce centrifuge $m \omega^2 HM$.

terre supposée sphérique et homogène.

* Ordre de grandeur :



à la surface de la terre $r = R$

$$|\vec{A}| = G \frac{M}{R^2} \quad M \text{ masse Terre.}$$

$$A \approx 9,8 \text{ m.s}^{-2}$$

$$\omega^2 HM_{\max} = \omega^2 R = 3,4 \cdot 10^{-2} \text{ m.s}^{-2}$$

$$g_p = A \quad (\text{pôle}) \quad (A_p = A_e = A)$$

$$g_e = A - \omega^2 R \quad (\text{équateur}).$$

$$g_p > g_e$$

$$g_p - g_e = \omega^2 R = 3,4 \cdot 10^{-2} \text{ m.s}^{-2}$$

la différence réellement mesurée est $g_p - g_e = 5,2 \cdot 10^{-2} \text{ m.s}^{-2}$, le désaccord provient du fait que la Terre n'est pas une sphère parfaite.

* Pourquoi assimile t-on en première approximation poids à force de gravitation ?

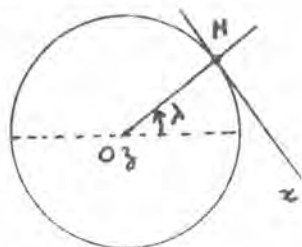
$$\omega^2 HM \ll \omega^2 R \ll A$$

$$5 \cdot 10^{-2} \ll 10$$

on a toujours : $\vec{P} \approx m \vec{A}$

$$\vec{P} = m \vec{g} \approx m \vec{A}$$

dans les classes secondaires (et même supérieures SAUF problèmes très "finis") on utilise toujours cette approximation.

Exercice :

1) calculer littéralement les composantes de $\vec{g}$ sur les axes Mx, Mz .

2) montrer que $\alpha \approx \frac{\omega^2 R}{g} \cos \lambda \cdot \sin \lambda$ ($R = OM$)

AN : calculer α à la latitude 45° .

Remarque :

la verticale est définie par le support du champ de pesanteur $\vec{g}$ (fil à plomb)

c) Déviation vers l'Est :

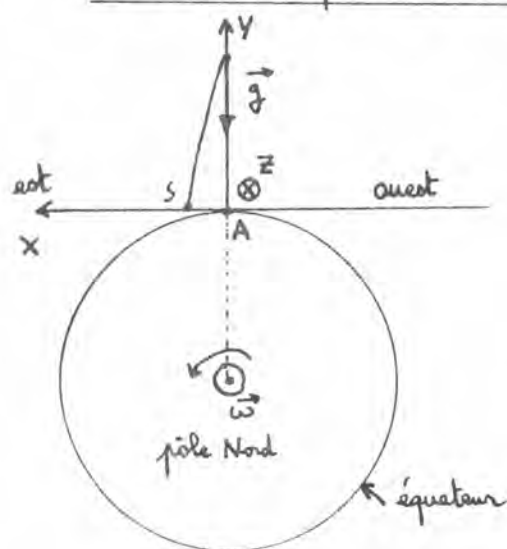
nous avons déjà vu que la chute libre d'un point matériel n'est pas rigoureusement verticale, il y a une légère déviation vers l'Est quel que soit l'hémisphère, elle est maximale à l'Equateur.

ordre de grandeur :

latitude 45° . chute 100m. déviation 1,6cm. durée $\approx 4,5s$

On ne perd rien d'essentiel en faisant les calculs à l'Equateur (ils sont un peu plus simples).

Résolution du problème dans le référentiel terrestre T non galiléen :



AXYZ axes liés à T.

dans T la RFD s'écrit :

$$m \vec{a}_T = m \vec{g} - \underbrace{2m \vec{\omega} \wedge \vec{v}_T}_{\text{Coriolis}}$$

l'expérience ayant lieu à l'Equateur $\vec{g}$ pointe vers le centre de la Terre.

projection sur AXYZ :

$$\vec{\omega} \quad 0 \quad 0 \quad \omega \quad (\omega < 0)$$

$$\vec{v} \quad \approx 0 \quad \dot{y} \quad 0$$

$$\vec{\omega} \wedge \vec{v} \quad -\omega \dot{y} \quad 0 \quad 0$$

en 1^{ère} approximation pour évaluer la force de Coriolis on suppose que $\vec{v}_T$ est la même que sans force de Coriolis sous la seule action de $m\vec{g}$. (il faut $t_{\text{chute}} < T_{\text{jour}}$)

le point matériel étant lâché sans vitesse initiale : à $y = h$.

$$\ddot{x} \approx 0 \quad \dot{y} = -gt \quad \ddot{z} = 0.$$

$$\ddot{x} \approx 2\omega \dot{y} = -2\omega gt \quad \ddot{y} = -g \quad \ddot{z} = 0$$

$$\dot{x} = -\omega gt^2 \quad \dot{y} = -gt \quad \dot{z} = 0$$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= -\frac{1}{3}\omega gt^3 & y &= h - \frac{1}{2}gt^2 & z &= 0 \\ x > 0 & \text{ car } \omega < 0 \end{aligned}}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{avec les conditions initiales :} \\ x = z = 0 \quad y = h \\ \dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0 \quad \text{à } t = 0 \end{array} \right).$$

si la chute avait lieu selon la verticale on aurait $x = 0$ pour tout t .

$x > 0$ correspond à une déviation vers l'Est. (voir axes) $\boxed{X_s = -\frac{1}{3}\omega g \left(\frac{2h}{g}\right)^{\frac{3}{2}}}$

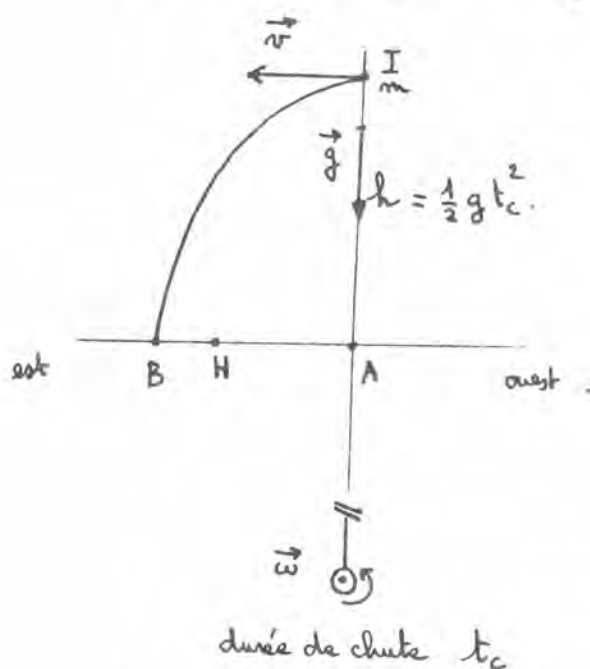
AN: $X_s = -\frac{1}{3} (-7,3 \cdot 10^{-5}) 9,8 4,5^3$ pour $h = 100 \text{ m}$ $t_0 = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 4,5 \text{ s}.$

$$\underline{X_s \approx 0,02 \text{ m} \approx 2 \text{ cm} .}$$

remarque : $\ddot{x} = -\omega g t^2 \ll -gt$ (approximation de départ $\ddot{x} \approx 0$).

Résolution qualitative dans le référentiel géocentrique céleste galiléen :
(on assimile $\vec{A} \approx \vec{g}$)

si $t_{\text{chute}} \ll T_{\text{terre}}$ on néglige la courbure du sol.



Dans $R_{\text{géocentrique}}$ le point matériel m à l'instant où on le lâche n'est plus immobile mais a une vitesse

$$v = (R + h) \omega$$

on a la chute parabolique classique.

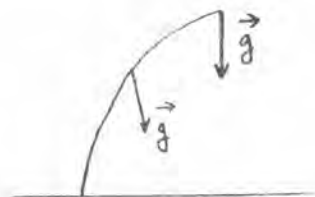
$$AB = (R + h) \omega t_c \quad (\text{mouvement uniforme selon l'horizontale})$$

pendant t_c le point A initialement à la verticale de I s'est déplacé en H tel que $AH = R \omega t_c$

B est bien à l'Est de H et la déviation vers l'Est est $HB \approx h \omega t_c$

$$HB = h \omega t_c = \frac{1}{2} \omega g t_c^3$$

la valeur exacte est $\frac{1}{3} \omega g t_c^3$ (valeur absolue). soit $\frac{2}{3} HB$, une analyse plus fine montre que pour $h \approx 100$ m AB de l'ordre de 2 km, il faut tenir compte que $\vec{g}$ n'est pas uniforme.



Cette deuxième méthode est "plus physique", elle serait plus lourde si on voulait la valeur exacte de la déviation vers l'Est.

Pour terminer citons quelques phénomènes où la pseudoforce de Coriolis intervient :

pendule de Foucault, cyclones, alizés par contre elle ne peut expliquer ^{à elle seule} le sens d'écoulement des baignoires (on le lit souvent!).

Ch 6: Energie.

1) Travail d'une force :

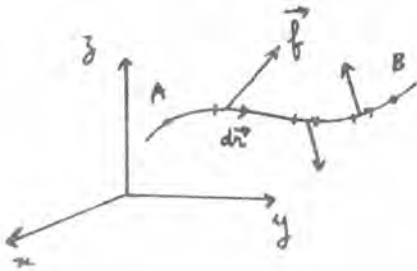
A) Définition :

$$\delta \mathcal{C} = \vec{f} \cdot d\vec{r}$$

est le travail élémentaire de la force $\vec{f}$ quand son point d'application se déplace de $d\vec{r}$.

dans une base cartésienne : $\vec{f} (f_x \ f_y \ f_z) \quad d\vec{r} (dx \ dy \ dz)$

$$d\mathcal{C} = f_x dx + f_y dy + f_z dz$$



pour le trajet AB du point d'application :
(déplacement de A vers B)

$$\mathcal{C}_{A \rightarrow B} = \sum_{\text{trajet AB}} \vec{f} \cdot d\vec{r} = \int_A^B \vec{f} \cdot d\vec{r}$$

quelques résultats élémentaires :

Unité : $N \cdot m = J$ (joule)

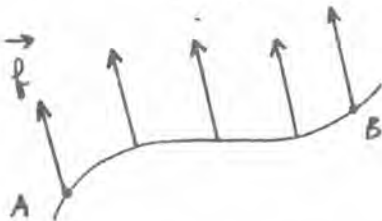
- le travail effectué par une force perpendiculaire au déplacement est nul.
- si plusieurs forces $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3, \dots$ agissent sur un point matériel

$$\delta \mathcal{C} = \vec{f}_1 \cdot d\vec{r} + \vec{f}_2 \cdot d\vec{r} + \dots = (\vec{f}_1 + \vec{f}_2 + \dots) \cdot d\vec{r} = \vec{f} \cdot d\vec{r}$$

le travail de la somme vectorielle $\vec{f}$ des forces appliquées est égal à la somme des travaux de chaque force.

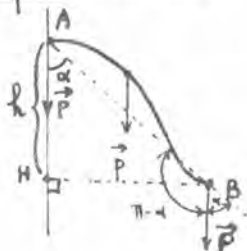
B) cas particuliers :

a) $\vec{f}$ constante (module et direction) :



$$\mathcal{C}_{A \rightarrow B} = \int_A^B \vec{f} \cdot d\vec{r} = \vec{f} \cdot \int_A^B d\vec{r} = \vec{f} \cdot \vec{AB}$$

exemple : travail du poids.



cas du déplacement de A vers B :

$$\mathcal{C}_{A \rightarrow B} = \vec{P} \cdot \vec{AB} = mg AB \cos \alpha = mgh > 0$$

le travail du poids est moteur .

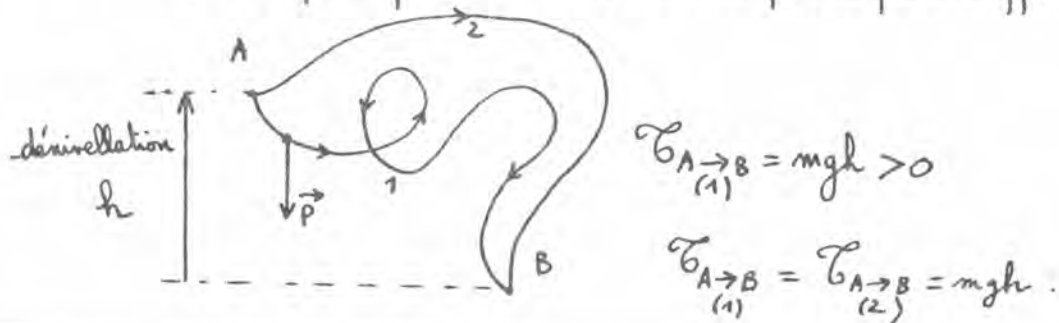
cas du déplacement de B vers A :

$$\mathcal{C}_{B \rightarrow A} = \vec{P} \cdot \vec{BA} = mg BA \cos(\pi - \alpha) = -mg BA \cos \alpha = -mgh < 0.$$

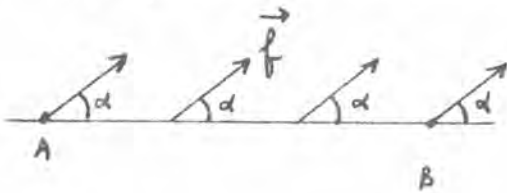
Travail résistant.

Revenons : le travail du poids pour un déplacement quelconque a pour valeur absolue $mg \times$ dénivellation des deux points. Si le point final a une altitude plus petite que le point initial le travail est positif (moteur), il est négatif (résistant) dans le cas contraire.

il ne dépend pas de la courbe décrite par le point d'application.



b) $\vec{f}$ constante et déplacement rectiligne :



$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{A \rightarrow B} &= \vec{f} \cdot \vec{AB} \\ &= \|\vec{f}\| \cdot \|\vec{AB}\| \cos \alpha \end{aligned}$$

pour le déplacement de A vers B

— si α est aigu ($\alpha < \frac{\pi}{2}$) $\mathcal{C}_{A \rightarrow B} > 0$ ($\cos \alpha > 0$)

il est intuitif de l'appeler moteur, $\vec{f}$ "tire dans le sens" du mouvement.

— si α est obtus ($\alpha > \frac{\pi}{2}$) $\mathcal{C}_{A \rightarrow B} < 0$ ($\cos \alpha < 0$)

il est résistant, $\vec{f}$ "tire en sens contraire" du mouvement.

— si $\alpha = \frac{\pi}{2}$. $\mathcal{C}_{A \rightarrow B} = 0$

2) puissance d'une force $\vec{f}$:

A) Définition : $\mathcal{P} = \vec{f} \cdot d\vec{r} = \vec{f} \cdot \vec{v} dt$

$$\mathcal{P} = \vec{f} \cdot \vec{v}$$

unité : W (Watt)

puissance de la force $\vec{f}$
dans le référentiel R
où on mesure $\vec{v}$.

B) Théorème de la puissance cinétique :

79

a) énergie cinétique :

l'énergie cinétique E_c d'un point matériel de masse m animé de la vitesse $\vec{v}$ dans le référentiel R est à chaque instant définie par :

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2$$

b) théorème de la puissance cinétique :

R étant galiléen $\vec{f} = m \vec{a}$ $\vec{f}$ somme vectorielle des forces appliquées au point matériel.

$$\vec{f} \cdot \vec{v} = m \vec{a} \cdot \vec{v} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v}$$

$$\text{or } \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \vec{v} \cdot \vec{v} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) = \frac{1}{2} m 2 \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = m \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}$$

donc $\boxed{\frac{dE_c}{dt} = \vec{f} \cdot \vec{v}}$

↑ puissance cinétique ↑ puissance de la force $\vec{f}$

exercice : montrer que si R n'est pas galiléen $\frac{dE_c}{dt} = \vec{f} \cdot \vec{v} + \vec{f}_{\text{ie}} \cdot \vec{v}$
(la ^{pseudo} force de Coriolis n'apparaît pas.)

c) Théorème de l'énergie cinétique :

$$\mathcal{G} = \vec{f} \cdot d\vec{r} = \vec{f} \cdot \vec{v} dt = P dt \quad \text{travail élémentaire de } \vec{f} \text{ entre } t \text{ et } t+dt.$$

dans R galiléen on a $\frac{dE_c}{dt} = \vec{f} \cdot \vec{v}$ d'où $dE_c = \vec{f} \cdot \vec{v} dt$

par identification $\mathcal{G} = dE_c$.

par intégration entre 2 instants quelconques t_1 (point en A), t_2 (point en B) :

$$\mathcal{G}_{A \rightarrow B} = \int_{t_1}^{t_2} dE_c = E_c(t_2) - E_c(t_1)$$



$$\mathcal{C}_{A \rightarrow B} = E_c(t_2) - E_c(t_1)$$

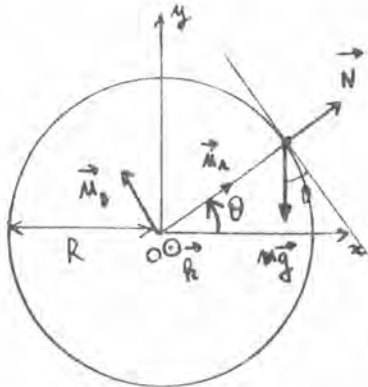
expression du théorème de l'énergie cinétique.

énoncé : entre 2 instants t_1 et t_2 , la variation d'énergie cinétique d'un point matériel est égal au travail de la somme vectorielle $\vec{f}$ des forces appliquées au point matériel pendant l'intervalle de temps considéré. [R étant galiléen]

Le théorème de l'énergie cinétique est très utile, il est souvent plus facile de résoudre un problème en l'utilisant au lieu d'utiliser la RFD.

On utilise souvent la RFD AVEC le théorème de l'E_c.

on va voir un exemple :



un point matériel de masse m , en équilibre instable au sommet d'une sphère quitte cette position avec une vitesse initiale quasi nulle et glisse sur la sphère. Montrer que le point matériel quitte la sphère pour une position que l'on demande de déterminer.

il n'y a pas de frottement.

(le point matériel reste sur la sphère tant que $N \geq 0$)
 $\vec{N} = N \vec{u}_n$

Méthode avec RFD appliquée dans le repère galiléen du sol (axes Oxyz).

forces appliquées $\left\{ \begin{array}{l} \text{poids } m\vec{g} \\ \text{force exercée par la sphère sur le pt matériel } \vec{N} \end{array} \right.$
 $(\vec{N} \perp \text{support car pas de frottement}).$

$$m \vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}$$

utilisons la base de projection polaire $\vec{u}_n, \vec{u}_\theta, \vec{k}$:

$\vec{a}$ accélération de m par rapport à R sol galiléen exprimée dans $O \vec{u}_n, \vec{u}_\theta, \vec{k}$

$$\vec{a} = R \ddot{\theta} \vec{u}_\theta - R \dot{\theta}^2 \vec{u}_n$$

$$\text{sur } \vec{u}_n : -m R \dot{\theta}^2 = -mg \sin \theta + N \quad (\text{I})$$

$$\text{sur } \vec{u}_\theta : m R \ddot{\theta} = -mg \cos \theta \quad (\text{II})$$

pour intégrer (II), il faut multiplier chaque membre par $\dot{\theta}$.

$$m R \ddot{\theta} = -m g \cos \theta \dot{\theta} \quad R \ddot{\theta} = -g \cos \theta \dot{\theta}$$

on a $\begin{cases} \frac{d}{dt}(\dot{\theta}^2) = 2 \ddot{\theta} \dot{\theta} & \text{d'où} \quad \frac{R}{2} \frac{d}{dt}(\dot{\theta}^2) = -g \cos \theta \dot{\theta} \\ \frac{d}{dt}(-g \sin \theta + C) = -g \cos \theta \dot{\theta} & \text{par intégration:} \end{cases}$

$$\frac{R}{2} \dot{\theta}^2 = -g \sin \theta + C$$

déterminons la constante C par les CI:

on a $\theta = \frac{\pi}{2}$ et $\dot{\theta} = 0$ à $t = 0$ d'où $C = g$.

$$\frac{R}{2} \dot{\theta}^2 = g(1 - \sin \theta) \rightarrow \underline{R \dot{\theta}^2 = 2g(1 - \sin \theta)}$$

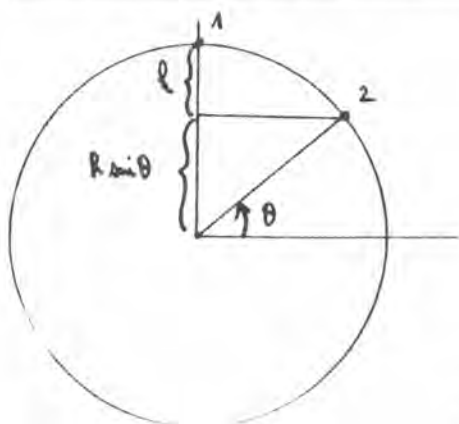
On reporte dans (I): $-m R \dot{\theta}^2 = -m g \sin \theta + N \quad -2g(1 - \sin \theta) + g \sin \theta = N$.

$$N = mg(-2 + 3 \sin \theta)$$

$$N \geq 0 \quad -2 + 3 \sin \theta \geq 0 \quad \sin \theta \geq \frac{2}{3} \quad \theta \geq 42^\circ \quad (0 \leq \theta \leq 90^\circ)$$

le point matériel quitte la sphère pour $\theta = 42^\circ$. (indépendant de m).

Méthode utilisant le Th de l'E_c pour calculer $\dot{\theta}^2$:



$$\vec{v} = R \dot{\theta} \vec{n}_\theta$$

Th de l'E_c appliqué entre les instants 1 et 2:

$$\frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = \text{travail du poids}$$

($\vec{N}$ ne travaille pas $\perp$ sphère).

$$\frac{1}{2} m R \dot{\theta}^2 - 0 = m g h = m g (R - R \sin \theta)$$

$$\underline{R \dot{\theta}^2 = 2g(1 - \sin \theta)}$$

sur cet exemple les calculs sont plus simples, il n'y a pas à intégrer $R \ddot{\theta} = -g \cos \theta$
 Bien entendu la relation (I) doit encore être utilisée.

exercice: R sol est supposé galiléen. Une masse $m = 2 \text{ kg}$ attachée à un fil "sans masse" de longueur $l = 1 \text{ m}$ est écartée de la verticale de l'angle $\theta_0 = 30^\circ$ puis abandonnée sans vitesse initiale. Trouver sa vitesse quand le fil fait un angle θ de 10° avec la verticale a) du même côté b) du côté opposé. (Tous les frottements possibles sont négligeables).

82 3) forces conservatives . énergie potentielle :

A) forces conservatives : une force $\vec{f}$ est conservative si elle obéit à une relation du type $\boxed{\vec{f} = -\vec{\text{grad}} E_p}$

E_p est la fonction énergie potentielle du point matériel (en Joules)

E_p ne dépend que de $\vec{r}$ (x, y, z).

on a besoin du symbole dérivée partielle (voir mathématiques)

en coordonnées cartésiennes :

$$\boxed{\begin{aligned} f_x &= -\frac{\partial E_p}{\partial x} & f_y &= -\frac{\partial E_p}{\partial y} & f_z &= -\frac{\partial E_p}{\partial z} \\ E_p(x, y, z) & \text{ Attention } f_x, f_y, f_z \text{ algébrique} \end{aligned}}$$

en coordonnées cylindro-polaires :

il serait préférable de noter $\overline{f}_x \dots$

$$\boxed{\begin{aligned} \overline{f}_r &= -\frac{\partial E_p}{\partial r} & \overline{f}_\theta &= -\frac{1}{r} \frac{\partial E_p}{\partial \theta} & \overline{f}_z &= -\frac{\partial E_p}{\partial z} \\ E_p(r, \theta, z) & (f_r, f_\theta, f_z \text{ réels}) & \overline{f}_r \dots & (\text{mieux}) \end{aligned}}$$

Notion de gradient :

$V(x, y, z)$ un scalaire . la différentielle de V est $dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz$

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} \text{ vecteur position} \quad \vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$$

$$d\vec{r} = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k}$$

dV apparait comme le produit scalaire des 2 vecteurs :

$$\frac{\partial V}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{k} \quad \text{et} \quad d\vec{r} = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k}$$

on appelle $\boxed{\vec{\text{grad}} V = \frac{\partial V}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{k}}$

d'où $\boxed{dV = \vec{\text{grad}} V \cdot d\vec{r}}$

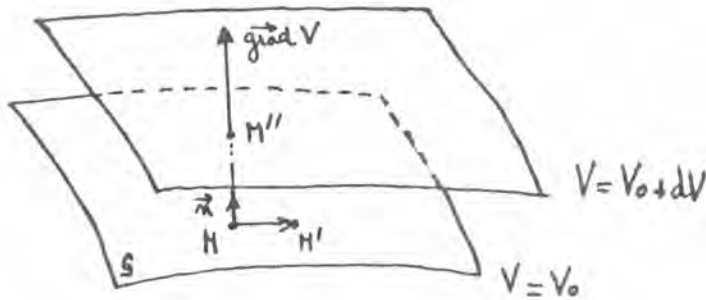
visualisation du vecteur gradient :

si $V = \text{constante}$ $\vec{\text{grad}} V = 0$ (réciproque vraie également).

intuitivement il apparait que $\vec{\text{grad}} V$ caractérise en chaque point les variations de V .

Considérons la surface S sur laquelle $V = V_0$ constante.

83



soit $\vec{\text{grad}} V$ le gradient en M de S . M' très voisin de M appartenant à S .

$$d\vec{r} = \vec{MM}'$$

$$dV = \vec{\text{grad}} V \cdot d\vec{r}$$

pour le déplacement $d\vec{r} = \vec{MM}'$ $dV = 0$ car M et M' appartiennent tous les 2 à S telle que $V = V_0$.
($d\vec{r}$ appartient au plan tangent en M à S)
 $\vec{\text{grad}} V$ est perpendiculaire à $d\vec{r}$

$\vec{\text{grad}} V$ est normal à S telle que $V = \text{constante}$	S surface équi- V
---	-----------------------

M'' point très voisin de M sur la normale à S en M : $\vec{MM''} = dn \vec{n}$ ($\vec{n}$ unitaire)

$\vec{\text{grad}} V$ colinéaire à $\vec{n}$: $\vec{\text{grad}} V = k \vec{n}$

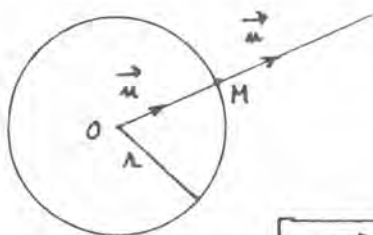
$$dV = \vec{\text{grad}} V \cdot d\vec{r} = \vec{\text{grad}} V \cdot \vec{MM''} = k \vec{n} \cdot dn \vec{n} = k dn \quad k = \frac{dV}{dn}$$

d'où $\boxed{\vec{\text{grad}} V = \frac{dV}{dn} \vec{n}}$ $\rightarrow$ dirigé dans le sens des V croissants. (le déduire de la relation)

$\uparrow$ définition intrinsèque.

Cas très important où E_p ne dépend que de $r = \|\vec{r}\|$: (gravitation.....)

pour calculer le gradient il est inutile de passer par un système de coordonnées particulier; on utilise la définition intrinsèque du gradient



pour $E_p = E_p(r)$

$E_p(r)$ est constante sur la sphère (O, r)

la sphère (O, r) est une surface équi- E_p .

$\vec{n}$ vecteur unitaire normal à la sphère en M .

$$\boxed{\vec{\text{grad}}_M E_p = \frac{dE_p}{dr} \vec{n}}$$

exercice: $\vec{f}$ exercée sur le point matériel M de masse m . $\vec{f} = -\frac{k}{r^2} \vec{n}$ ($k > 0$)
(force centrale attractive pointant vers le centre de force O ; c'est le cas de la gravitation). Calculer $E_p(r)$.

$$\vec{f} = -\vec{\text{grad}} E_p \quad -\frac{k}{r^2} \vec{u} = -\frac{dE_p}{dr} \vec{u}$$

$$\frac{dE_p}{dr} = \frac{k}{r^2}$$

$$E_p = -\frac{k}{r} + \text{constante.}$$

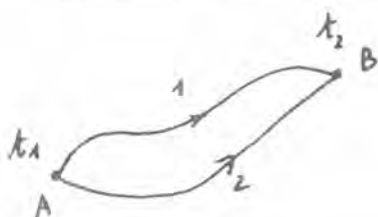
E_p est défini à une constante additive près, cela n'est pas gênant. Seules les variations de E_p ont un intérêt physique. Cependant on fixe souvent la constante, par exemple en gravitation $E_p(\infty) = 0 \rightarrow \text{constante} = 0 \rightarrow E_p = -\frac{k}{r}$.

Remarque: le terme forces conservatives va s'éclaircir dans la suite.

B) Travail d'une force conservative :

entre t et $t + dt$, le point matériel M se déplace de $\vec{dr}$ le travail élémentaire de la force conservative $\vec{f}$ est $\delta\mathcal{G} = \vec{f} \cdot \vec{dr} = -\vec{\text{grad}} E_p \cdot \vec{dr} = -dE_p$

en intégrant entre les instants t_1 (A) et t_2 (B)



$$\mathcal{G}_{A \rightarrow B} = E_p(A) - E_p(B)$$

pour une force conservative, le travail est égal à l'opposé de la variation d'énergie potentielle (rappel : variation = valeur finale - valeur initiale).

Il est indépendant du chemin effectivement suivi par le point matériel mais uniquement du point de départ A et du point d'arrivée B.

$$\mathcal{G}_{A \rightarrow B}^{(1)} = \mathcal{G}_{A \rightarrow B}^{(2)} = E_p(A) - E_p(B)$$

(on mettra à profit cette propriété pour calculer le travail sur le chemin le plus commode).

⚠ Attention ceci n'est pas vrai pour une force non conservative.

C) Energie mécanique d'un point matériel soumis à une force $\vec{f}$ conservative :

R est galiléen on a $\delta\mathcal{G} = dE_c$ (Th de l' E_c)

de plus $\vec{f}$ est conservative $d\mathcal{G} = -dE_p$

d'où $dE_c = -dE_p$ $d(E_c + E_p) = 0$ $E_c + E_p = \text{constante}$.

on pose : $E_c + E_p = E$ — énergie mécanique.

on appelle énergie mécanique d'un point matériel la somme E de son énergie cinétique et de son énergie potentielle.

l'énergie mécanique d'un point matériel soumis à une force conservative reste constante au cours du mouvement.

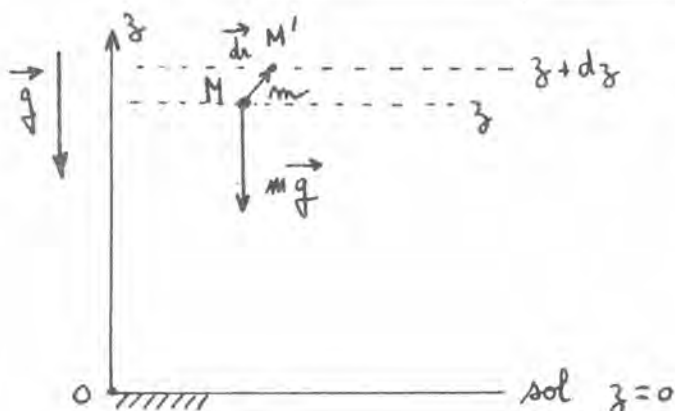
remarque : l'adjectif conservative s'éclaire ici ; dans une autre présentation on aurait pu imposer au départ $E_c + E_p = \text{constante}$; et nous aurions montré que seule une force dont l'expression est $\vec{f} = -\text{grad } E_p$ assure l'existence d'une telle loi de conservation. (relation que dans cet exposé nous avons posé comme définition d'une force conservative).

on retiendra :

point matériel uniquement soumis à des forces conservatives.	↔	énergie mécanique $E = E_c + E_p = \text{constante}$
---	---	---

4) Quelques exemples :

A) énergie potentielle de pesanteur : $\vec{g}$ uniforme.



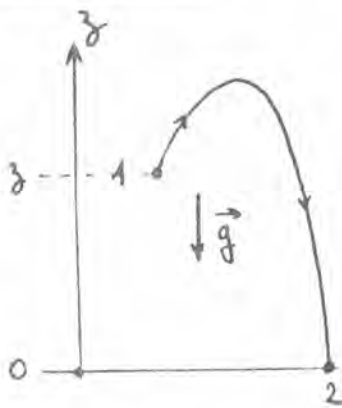
$$\delta \mathcal{E} = m \vec{g} \cdot \vec{dr} = -mg dz \text{ pour le déplacement élémentaire quelconque } \vec{dr}.$$

il existe E_p s'il est possible de trouver E_p telle que

$$\delta \mathcal{E} = -dE_p$$

$$-mg dz = -dE_p \rightarrow \boxed{E_p = mgz + \text{constante}} \quad \text{énergie potentielle de pesanteur}$$

habituellement dans les problèmes au voisinage de la terre on pose $E_p(z=0) = 0$ (référence de l'énergie potentielle) d'où $E_p = mgz$



avec la vitesse v_1 ,
on lance de la position 1 (cote z) une bille,
elle touche le sol en 2.

en utilisant l'énergie mécanique calculer
le module de la vitesse d'arrivée au sol.

il faut négliger les frottements (forces non conservatives), c'est justifié pour une
bille dense (acier); dans ce cas la seule force agissante est $m\vec{g}$ qui
est bien conservative $[m\vec{g} = -\vec{\text{grad}} [mgz + \text{constante}]]$.

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad & \left\{ \begin{aligned} E_1 &= \frac{1}{2} m v_1^2 + mgz. \end{aligned} \right. & (\text{on a pris } E_p(z=0)=0) \\ \textcircled{2} \quad & \left\{ \begin{aligned} E_2 &= \frac{1}{2} m v_2^2 + mg \times 0. \end{aligned} \right. & (g > 0) \end{aligned}$$

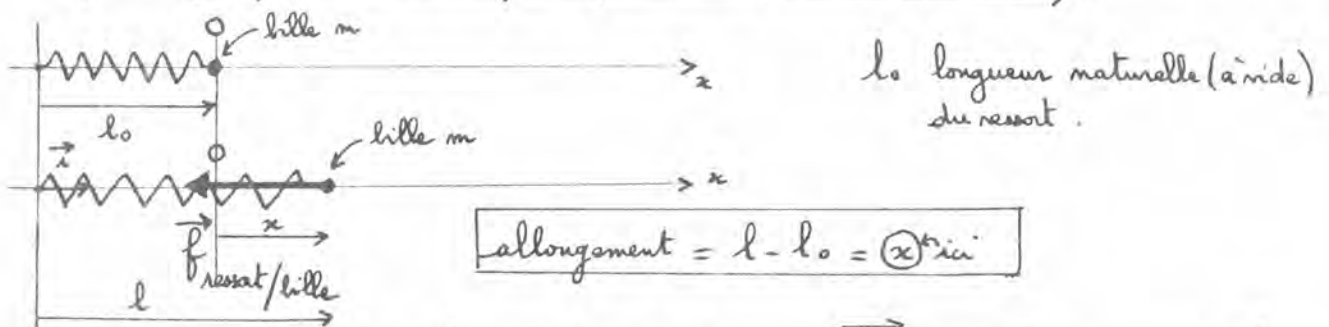
la bille étant soumise à une force conservative: $E_1 = E_2$

$$\frac{1}{2} m v_2^2 = \frac{1}{2} m v_1^2 + mgz \quad v_2^2 = v_1^2 + 2gz$$

$$\boxed{v_2 = \sqrt{v_1^2 + 2gz}}$$

remarque: il serait beaucoup plus long de trouver v_2 en utilisant la RFD, faites-le
en exercice.

B) énergie potentielle élastique (mouvement à 1 dimension).



supposons que le ressort obéisse à la loi linéaire $\vec{f}_{r/b} = -k(\text{allongement})\vec{i}$

$$\vec{f}_{r/b} = -kx\vec{i} \quad (k > 0) \quad (k \text{ raideur})$$

cherchons E_p telle que $-kx\vec{i} = -\vec{\text{grad}} E_p$

$$-kx = -\frac{dE_p}{dx}$$

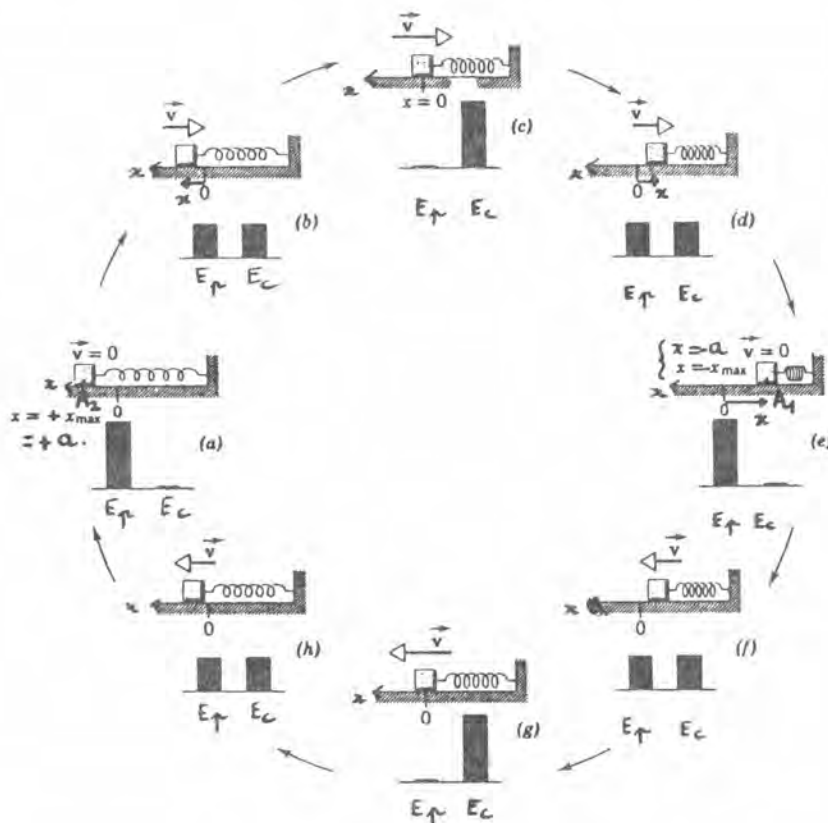
$$E_p = \frac{1}{2} k x^2 + \text{constante}$$

il est commode de définir $E_p(x=0) = 0$ allongement nul $\leftrightarrow E_c$ nulle.

$$E_p = \frac{1}{2} k x^2$$

énergie potentielle élastique

si la bille glisse sans frottement sur un plan horizontal $E = E_c + E_p = \text{constante}$

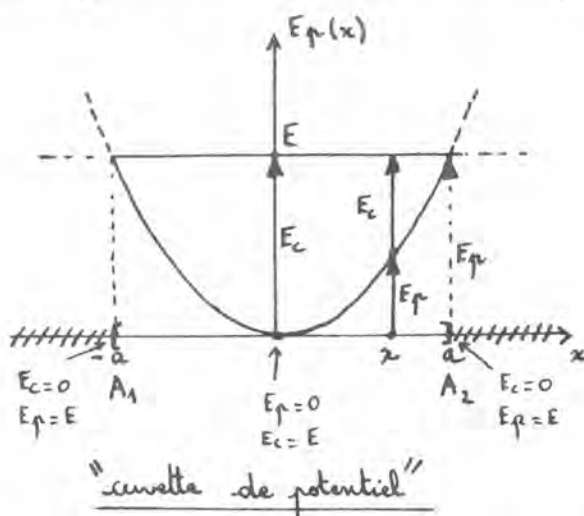


$$\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2 = E$$

l'énergie potentielle de pesanteur n'intervient pas elle reste constante (plan horizontal).

Transformations $E_c \leftrightarrow E_p$

Renseignements tirés de la courbe $E_p(x) = \frac{1}{2} k x^2$.



$$E = \frac{1}{2} m v^2 + E_p = \text{constante}$$

$$\frac{1}{2} m v^2 = E - E_p \text{ nécessairement POSITIF ou NUL}$$

le point matériel ne peut occuper ^{que} des positions telles que $E \geq E_p$; x doit appartenir à $[-a, +a]$.

le point matériel oscille entre A_1 et A_2 , sa vitesse s'annule en A_2 et change de sens (de même en A_1).

[la "lecture" de la courbe $E_p(x)$ donne beaucoup d'informations sans calculs.]

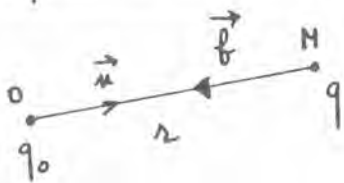
c) potentiel newtonien:

schéma dans le cas q_0 et q de signes opposés (attraction).

la force exercée par la charge q_0 sur la charge q est $\vec{f} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 q}{r^2} \vec{u}$

on cherche E_p telle que

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 q}{r^2} \vec{u} = -\vec{\text{grad}} E_p = -\frac{dE_p}{dr} \vec{u}$$

(cas où $E_p = E_p(r)$)

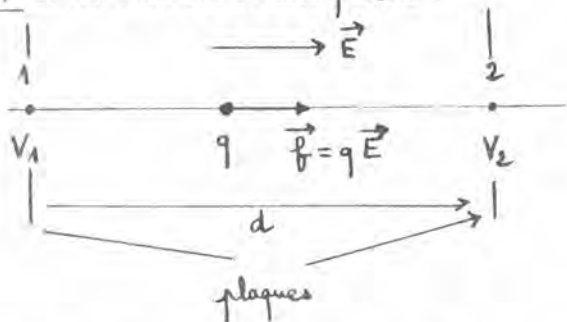
$$E_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 q}{r} = q V(r)$$

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0}{r} \text{ potentiel électrostatique créé en M par la charge } q_0.$$

on retiendra par cœur: (généralisation).

une charge placée en un point M où règne un potentiel électrostatique V a une énergie potentielle $E_p = qV$

exercice: accélération d'un proton.



$\vec{E} \approx$ uniforme entre les plaques. ($E = \frac{V_1 - V_2}{d}$)

$$V_1 > V_2$$

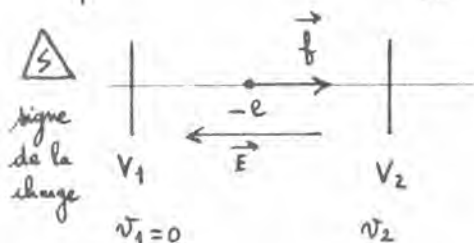
$\vec{E}$ pointe dans le sens des potentiels décroissants.
↑
champ électrostatique

$$\frac{1}{2} m v_1^2 + qV_1 = \frac{1}{2} m v_2^2 + qV_2$$

$$v_2^2 = v_1^2 + \frac{2q}{m} (V_1 - V_2)$$

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 + \frac{2q}{m} (V_1 - V_2)} > v_1 \text{ car } q > 0 \text{ et } V_1 - V_2 > 0$$

on peut à cette occasion rappeler la définition de l'électron-volt (eV).



$$V_1 < V_2 \quad e > 0 \quad (q_e = -e)$$

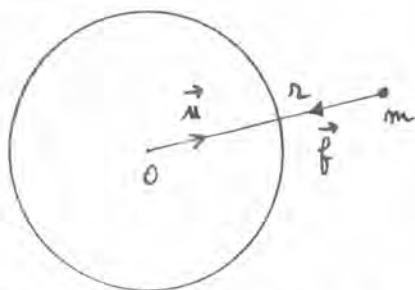
$$\frac{1}{2} m v_1^2 - eV_1 = \frac{1}{2} m v_2^2 - eV_2$$

$$\frac{1}{2} m v_2^2 = e(V_2 - V_1)$$

$\uparrow$ $1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ $\uparrow$ 1 V

[l'électronvolt (eV) est l'énergie cinétique acquise par un e^- accéléré sous une d.d.p. de 1V.

$$1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

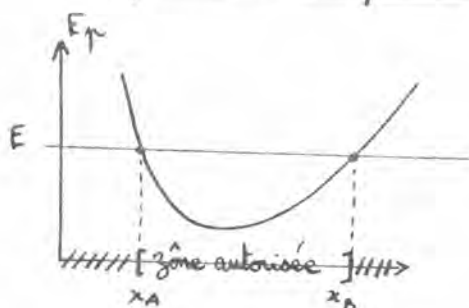
exercice :Terre = sphère $(0, R)$ homogène

$$\vec{f} = -G \frac{Mm}{r^2} \vec{u} \quad M \text{ masse de la terre.}$$

Déterminer $E_p(r)$ énergie potentielle de gravitation telle que $E_p(\infty) = 0$.

5) Courbes d'énergie potentielle :

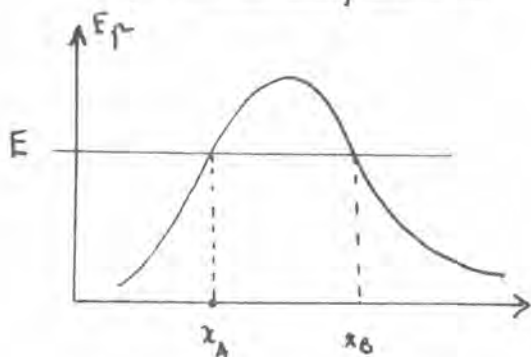
A) cuvette ou puits de potentiel :



voir paragraphe 4B, même discussion :

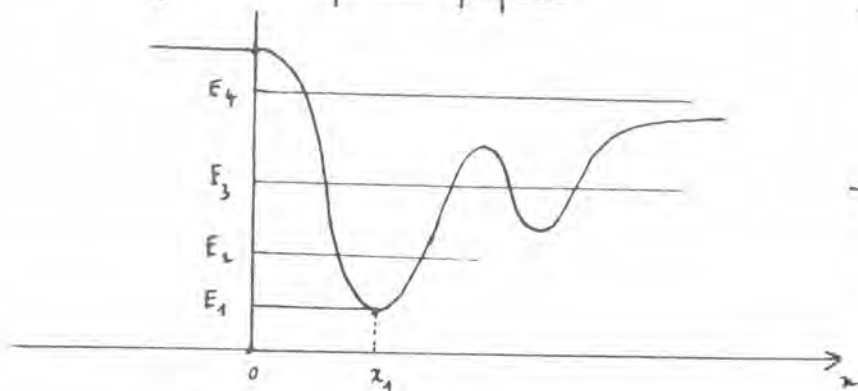
le mouvement ne peut se faire que sur $[x_A, x_B]$.

B) barrière de potentiel :



hachurer la zone interdite dans laquelle le point matériel ne peut pas aller.

C) courbes plus compliquées :

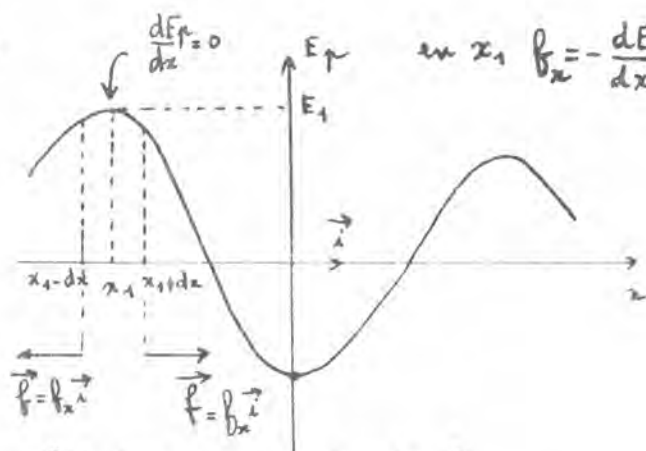


- le point matériel a l'énergie mécanique E_1 , quel est son mouvement ? (possible)

- mêmes questions pour E_2, E_3, E_4 ?

D) Stabilité de l'équilibre :

30



en x_1 $f_x = -\frac{dE_p}{dx} = 0$. Soit un point matériel ayant l'énergie mécanique E_1 . En x_1 , E_c est nulle ($v_1 = 0$), ce point d'abscisse x_1 peut être un point d'équilibre par exemple si on abandonne le pt matériel en x_1 sans vitesse initiale, il est en équilibre

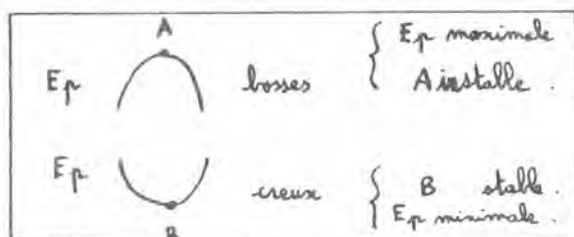
Cet équilibre est-il stable ?

au point $x_1 + dx$ $\frac{dE_p}{dx} < 0$ (pente de la tangente) $f_x = -\frac{dE_p}{dx} > 0$
 $x_1 - dx$ $\frac{dE_p}{dx} > 0$ $f_x < 0$.

à un petit déplacement à partir de x_1 correspond une force qui tend à éloigner davantage le point matériel de sa position d'équilibre ; l'équilibre est INSTABLE.

exercice : montrer que $x=0$, position d'équilibre stable.

On retiendra :



6) forces non conservatives :

on appellera $E_c + E_p = E$ énergie mécanique d'un point matériel

E_p = somme des énergies potentielles correspondant à toutes les forces conservatives

En plus peuvent s'exercer des forces non conservatives par exemple les forces de frottement.

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique entre 2 instants t_1 et t_2 :

$$E_c(2) - E_c(1) = \underbrace{\mathcal{C}_{1 \rightarrow 2}}_{\text{(forces conservatives)}} + \underbrace{\mathcal{C}_{1 \rightarrow 2}}_{\text{(forces non conservatives)}}$$

$$\text{or } \underbrace{\mathcal{C}_{1 \rightarrow 2}}_{\text{(forces conservatives)}} = E_p(1) - E_p(2)$$

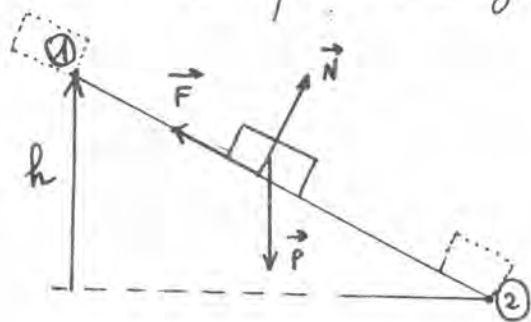
$$\text{d'où } E_c(2) - E_c(1) = E_p(1) - E_p(2) + \mathcal{C}_{1 \rightarrow 2} \text{ (forces NON CONSERVATIVES)}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_{1 \rightarrow 2}(\text{forces NON CONSERVATIVES}) &= (E_c(2) + E_p(2)) - (E_c(1) + E_p(1)) \\ &= E_2 - E_1.\end{aligned}$$

Quand un point matériel est soumis, en plus de forces CONSERVATIVES, à des forces NON CONSERVATIVES son énergie mécanique ne reste pas constante au cours du mouvement.

$$E_2 - E_1 = \mathcal{C}_{1 \rightarrow 2}(\text{forces non conservatives}).$$

exercice : un traineau de masse $m = 20 \text{ kg}$ glisse sur une pente en partant de l'altitude $h = 20 \text{ m}$. Il est immobile au départ et a une vitesse $v = 16 \text{ m.s}^{-1}$ en bas de la pente. Calculer la perte d'énergie mécanique produite par le frottement.



$$\mathcal{C}_{1 \rightarrow 2}(\vec{N}) = 0.$$

$\vec{P}$ conservative.

$\vec{F}$ force de frottement non conservative
($\mathcal{C}(\vec{F}) < 0$).

$$E_1 = 0 + mgh$$

$$E_2 = \frac{1}{2}mv^2 + 0$$

} on a pris E_p nulle en bas de la pente.

$E_1 \neq E_2$ car force non conservative.

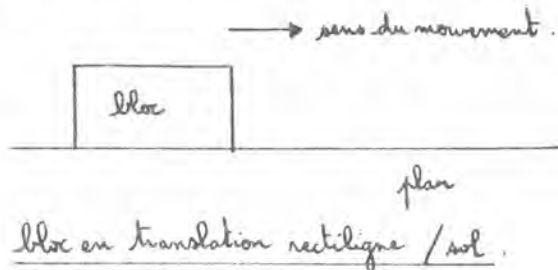
$$E_1 - E_2 = \mathcal{C}_{1 \rightarrow 2}(\vec{F}) = mgh - \frac{1}{2}mv^2$$

$$\text{AN: } E_1 - E_2$$

$$\begin{aligned}&= 20 \cdot 10 \cdot 20 - \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 256 \\ &= \underline{1440 \text{ J.}}\end{aligned}$$

Ch 7: Notions sur le frottement de glissement; sur le frottement dans les fluides.

il serait "plus normal" d'aborder ces notions en mécanique du solide. Cependant si on se limite à des cas simples on peut l'aborder dès maintenant.

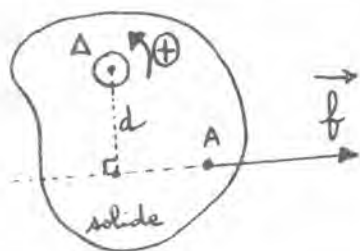


le bloc qui glisse sur le plan horizontal est bien ^{un} solide. Tous les points matériels qui le constituent ont des mouvements identiques ($\vec{v}$, $\vec{a}$, trajectoires), on est ramené à un pb de mécanique du point.

1) Rappels de théorèmes vus en secondaire (classe de 2^{ème}):

A) Moment d'une force par rapport à Δ fixe

il n'est pas gênant d'étudier le cas simple où la force a une droite d'action située dans un plan perpendiculaire à Δ



axe Δ perpendiculaire à la feuille
sens $\oplus$ choisi arbitrairement
 d = bras de levier

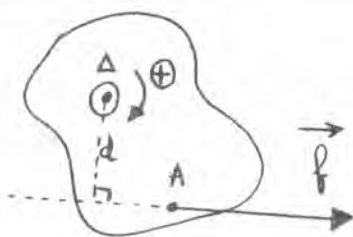
le moment de $\vec{f}$ par rapport à Δ est $\Gamma_{\Delta}(\vec{f}) = f \cdot d > 0$

f = norme de $\vec{f}$.

$\Gamma_{\Delta}(\vec{f}) > 0$ car $\vec{f}$ tend à faire tourner le solide dans le sens $\oplus$.

unité: $N \cdot m$.

exercice:



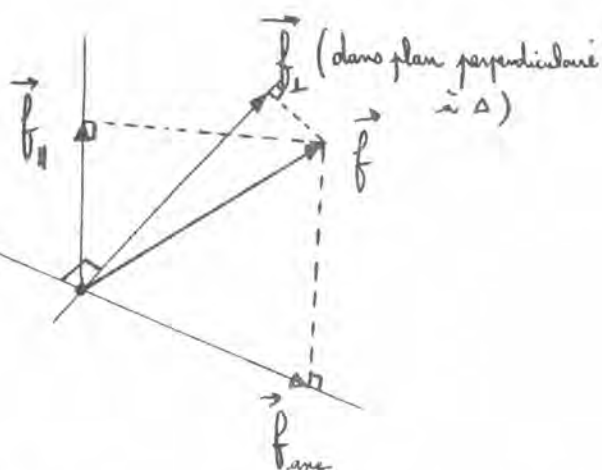
- expression littérale de $\Gamma_{\Delta}(\vec{f})$.
- quel est son signe.

$\Gamma_{\Delta} = -f \cdot d < 0$
car $\vec{f}$ tend à faire tourner le solide dans le sens $\ominus$.

Remarque:

 Δ

$$\vec{f} = \vec{f}_{\parallel} + \vec{f}_{\perp} + \vec{f}_{axe}$$



$$\Gamma_{\Delta}(\vec{f}) = \Gamma_{\Delta}(\vec{f}_{\perp})$$

$$\Gamma_{\Delta}(\vec{f}_{axe}) = 0 \text{ car } d = 0.$$

$$\Gamma_{\Delta}(\vec{f}_{\parallel}) = 0 \text{ on l'admet (aucun effet sur la rotation)}$$

B) Conditions d'équilibre d'un solide :

Relativement à un référentiel galiléen R ; soit un solide en équilibre alors les 2 conditions suivantes sont vérifiées :

$$\sum \vec{f}_{\text{s'exerçant sur le solide}} = \vec{0} \quad \underline{\text{ET}} \quad \sum \Gamma_{\Delta \text{ quelconque}} = 0$$

RÉEL ou FICTIF

Remarques : 1) nous avons fait l'hypothèse a priori que le solide est en équilibre, car les 2 conditions pourraient être vérifiées sans que le solide soit en équilibre, ce sont des conditions NECESSAIRES mais NON SUFFISANTES. (trouver des exemples)

2) les 2 conditions sont indépendantes. (ET)

3) en exercice on verra ce qu'est Δ fictif.

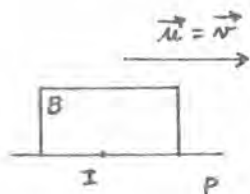
exercice : soit un solide soumis à 2 forces uniquement $\vec{f}_1$ et $\vec{f}_2$, on voit en 3^{ème} que'il est en équilibre : $\vec{f}_1 + \vec{f}_2 = \vec{0}$ et les 2 forces ont même droite d'action : Montrer que ce cache derrière l'expression "les 2 forces ont même droite d'action" $\sum \Gamma_{\Delta} = 0$.

94 2) lois du frottement de glissement (Coulomb):

l'étude expérimentale est délicate, en TP on fera quelques expériences avec du matériel simple (dynamomètre, blocs en bois...)

on se limite aux cas où :

- la surface de contact est plane, le mouvement est un mouvement de translation plan sur plan avec une vitesse de glissement $\vec{u}$

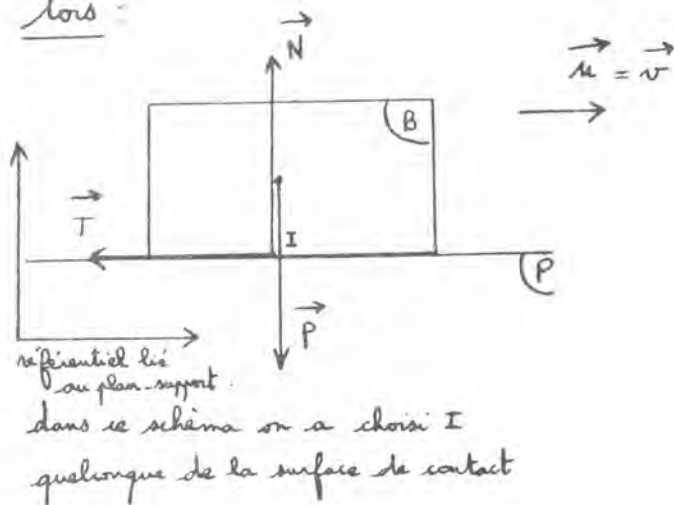


I étant un point quelconque de la surface de contact la vitesse de glissement du bloc B par rapport au plan support P est $\vec{u} = \vec{v}_{I_2/P} - \vec{v}_{I_1/P} = \vec{v}_{I_2/P} = \vec{v}$

$\left\{ \begin{array}{l} I_1 \text{ point matériel appartenant à P qui coïncide avec le point géométrique I à l'instant } t \\ I_2 \text{ " " " B " " " I " " t \end{array} \right.$

dans un mouvement de translation plan sur plan la vitesse de glissement $\vec{u}$ est simplement la vitesse $\vec{v}$ de tous les points matériels qui constituent B.

lois :



$\vec{N}$ force exercée par le plan-support sur le bloc
(dite "réaction normale")

$\vec{P}$ poids du bloc

$\vec{T}$ force exercée par le plan-support sur le bloc
dite force de frottement de glissement
(elle s'oppose au glissement)

On suppose $\vec{u}$ non nulle :

1^{ère} loi : la force de frottement $\vec{T}$ est colinéaire et opposée à $\vec{u}$
(cela peut se traduire par $\vec{T} \wedge \vec{u} = \vec{0}$ et $\vec{T} \cdot \vec{u} \leq 0$)

2^{ème} loi: le module de la force de frottement est à peu près proportionnel au module de la réaction normale

$$\|\vec{T}\| = f \|\vec{N}\|$$

f coefficient de frottement de glissement

Si $\vec{u}$ est nulle : B au repos par rapport à P.

$$\|\vec{T}\| \leq f_0 \|\vec{N}\|$$

le cas $\|\vec{T}\| = f_0 \|\vec{N}\|$ correspond à l'équilibre limite (départ imminent).

f₀ coefficient de frottement statique de glissement.

Remarques: - f et f₀ dépendent de la nature des surfaces en contact (matériaux, rugosité).

quelques valeurs :

{	chêne sur chêne	f ≈ 0,4.
	fer sur chêne	f ≈ 0,6.
	garniture de frein sur tambour d'acier f ≈ 0,40.	

- f n'est pas en réalité une constante, il dépend de u (vitesse de glissement). $f(u) < f_0$; en particulier $\lim_{u \rightarrow 0} f(u) < f_0$ (un peu inférieur)

- f et f₀ dépendent de $\|\vec{N}\|$.

cependant:

dans les exercices, on prendra f constant et f₀ constant

3^{ème} loi: dans le cas du frottement plan sur plan la force de frottement est à peu près indépendante de l'aire de la surface de contact. ($\|\vec{N}\|$ étant fixée).



il s'agit du même bloc

(on le verra avec grosse boîte d'allumettes).

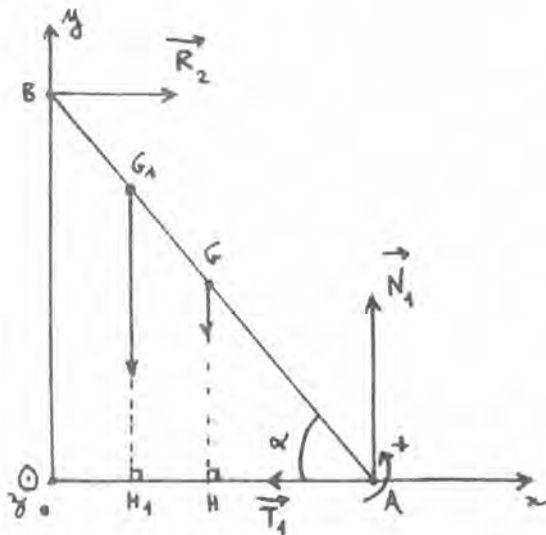
Résumé :

$$\vec{T} \text{ a un sens opposé à } \vec{u}. \quad \|\vec{T}\| = f \|\vec{N}\|$$

$$\text{repos : } \|\vec{T}\| \leq f_0 \|\vec{N}\|.$$

Exercice : sur le frottement au repos et l'équilibre d'un solide.

Une échelle AB de longueur $La = 3\text{ m}$, de masse $m = 10\text{ kg}$ s'appuie en B sur un mur vertical et en A sur le sol horizontal. Le coefficient de frottement sur le sol est $f_0 = 0,4$. Il est nul sur le mur. Une personne de masse $m_1 = 70\text{ kg}$ est immobile sur l'échelle, son centre de masse G_1 est supposé situé sur l'échelle, on pose $AG_1 = X$. Le référentiel d'étude est le sol supposé galiléen. $g = 10\text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$



- 1) déterminer les expressions littérales des forces de contact exercées par le mur et par le sol sur l'échelle.

dans le cas de l'équilibre limite, calculer numériquement les intensités de ces forces.

- 2) quelle condition doit vérifier α pour que l'équilibre soit possible ?

AN: $\alpha = 58^\circ$ la personne peut-elle monter jusqu'en haut de l'échelle ? $\alpha = 70^\circ$ même question. calculer α_c pour lequel la personne peut "juste monter" à 3m.

1) conditions d'équilibre : (la norme d'une force $\vec{F}$ sera notée F)

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_2 + \vec{P}_1 + \vec{P} + \vec{N}_1 + \vec{T}_1 = \vec{0} \end{array} \right. \quad (\text{I})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_\Delta(\vec{R}_2) + \Gamma_\Delta(\vec{P}_1) + \Gamma_\Delta(\vec{P}) = 0 \end{array} \right. \quad (\text{II}) \quad \Delta \text{ axe parallèle à } Oz \text{ passant par A.}$$

(<0) (>0) (>0) (ici c'est un axe de rotation non matérialisé)

$$(\Gamma_\Delta(\vec{T}_1) = 0 \text{ et } \Gamma_\Delta(\vec{N}_1) = 0, \text{ car les droites d'action de } \vec{T}_1 \text{ et } \vec{N}_1 \text{ passent par } \Delta)$$

projetons (I) sur Ox : $R_2 - T_1 = 0$
 sur Oy : $N_1 - P_1 - P = 0$

$$R_2 = T_1$$

$$N_1 = P_1 + P = (m_1 + m)g$$

loi du frottement : $T_1 \leq f_0 N_1$

$$T_1 \leq f_0 (m_1 + m)g \quad R_2 \leq f_0 (m_1 + m)g$$

AN: dans le cas de l'équilibre limite: ($T_1 = f_0 N_1$)

97

$$N_1 = (70+10) \cdot 10 = 800 \text{ N} \quad T_1 = 0,4 \cdot 800 = 320 \text{ N} \quad R_2 = 320 \text{ N}$$

2) équilibre possible?

utilisons (II); il vient: $-R_2 \cdot OB + m_1 g \cdot AH_1 + mg \cdot AH = 0$

$$\text{puis } -R_2 \cdot 2a \sin \alpha + m_1 g \cdot X \cos \alpha + mg \cdot a \cos \alpha = 0$$

$$\text{d'où } R_2 = \frac{X \cos \alpha m_1 g + a \cos \alpha mg}{2a \sin \alpha} = \frac{X m_1 g + a mg}{2a} \cdot \frac{1}{\tan \alpha}$$

d'après la question 1): $R_2 \leq f_0 (m_1 + m) g$

$$\frac{X m_1 g + a mg}{2a} \cdot \frac{1}{\tan \alpha} \leq f_0 (m_1 + m) g$$

soit $\tan \alpha \geq \frac{X m_1 + a m}{2a f_0 (m_1 + m)}$
équilibre possible

$$\tan \alpha \geq \frac{70X + 15}{96}$$

$$0 \leq \alpha \leq 90^\circ$$

AN: $\alpha = 58^\circ$ $\tan \alpha = 1,6$ $1,6 \geq \frac{70X + 15}{96}$ $X \leq 1,98 \text{ m}$

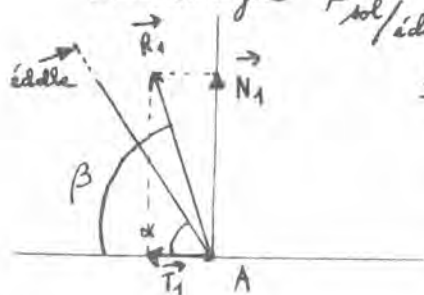
la personne ne pourra monter que jusqu'à $X = 1,98 \text{ m}$; au delà l'échelle va glisser.

$\alpha = 70^\circ$ $\tan \alpha = 2,75$ $2,75 \geq \frac{70X + 15}{96}$ $X \leq 3,55 \text{ m}$

l'échelle a une longueur de 3 m, la personne pourra monter jusqu'en haut.

calcul de α_c : $X_c = 3 \text{ m}$ $\tan \alpha_c = \frac{70 \cdot 3 + 15}{96} = 2,34$ $\alpha_c \approx 67^\circ$

Remarque: souvent on pose $\vec{R}_1 = \vec{N}_1 + \vec{T}_1$ appelée "réaction du sol" (se méfier de cette terminologie); il vaut mieux appeler $\vec{R}_1$ force exercée PAR le sol SUR l'échelle qu'on peut noter de manière un peu lourde mais non ambiguë $\vec{F}_{\text{sol/échelle}}$. Il ne faudrait pas penser que $\vec{R}_1$ est selon l'échelle, ce n'est pas vrai en général. ($\alpha \neq \beta$).



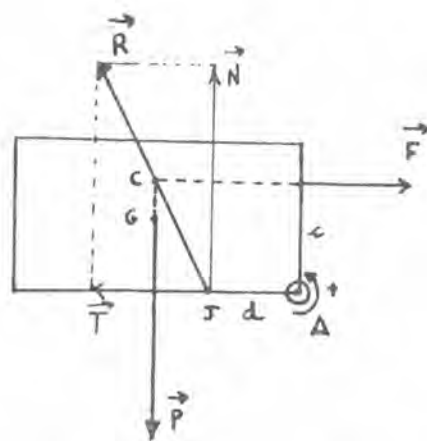
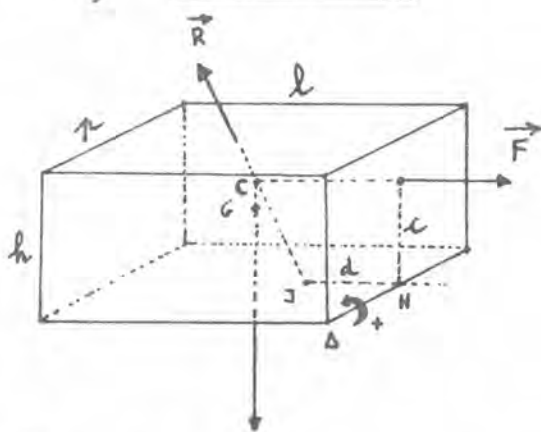
exercice: - calculer R_1 . $\rightarrow R_1 = \sqrt{N_1^2 + T_1^2}$
 - calculer β . $\rightarrow \tan \beta = \frac{N_1}{T_1}$

98 3) notions sommaires sur le basculement: (étudier uniquement A); sauter B).

A) un "théorème" bien utile:

soit un solide en équilibre par rapport au référentiel R galiléen; ce solide est soumis à 3 forces; alors les 3 droites d'action de ces forces sont coplanaires et concurrentes. On a toujours $\vec{f}_1 + \vec{f}_2 + \vec{f}_3 = \vec{0}$ et $\sum \Gamma_A = 0$ mais cette condition $\sum \Gamma_A = 0$ est avantageusement remplacée dans le cas de 3 forces par "coplanaires et concurrentes".

B) le basculement:



$\vec{F}$ exercée sur le bloc par un fil (par exemple). C point de concours des 3 forces.

conditions d'équilibre:

$$\begin{cases} \vec{F} + \vec{R} + \vec{P} = \vec{0} & \text{(I)} \\ \Gamma_A(\vec{F}) + \Gamma_A(\vec{R}) + \Gamma_A(\vec{P}) = 0 & \text{(II)} \end{cases}$$

(I) donne $N = P$ et $T = F$ la loi du frottement $T \leq f_0 N$.

(II) donne $P \frac{l}{2} - Fc - Nd = 0$ ($\Gamma_A(\vec{F}) = 0$)

soit $d = \frac{P \frac{l}{2} - Fc}{N}$.

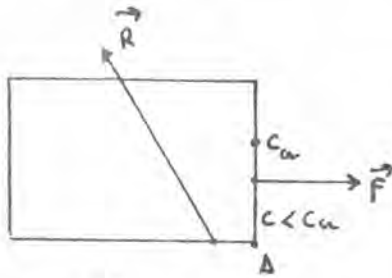
J est nécessairement un point de la surface de contact $d \geq 0$

on a $F \leq f_0 N$ (car $T = F \leq f_0 N$)

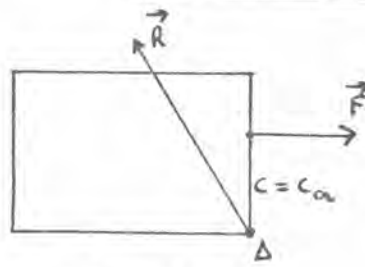
$$dN = P \frac{l}{2} - Fc \rightarrow Fc = P \frac{l}{2} - dN \rightarrow Fc \leq f_0 Nc \rightarrow$$

$$P \frac{l}{2} - dN \leq f_0 Nc \rightarrow d \geq \frac{P}{N} \frac{l}{2} - f_0 c \rightarrow \boxed{d \geq \frac{l}{2} - f_0 c}$$

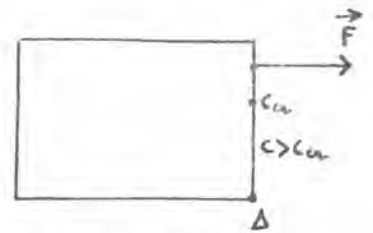
$$\left. \begin{array}{l} d \geq 0 \\ d \geq \frac{l}{2} - f_0 c \end{array} \right\} \quad \frac{l}{2} - f_0 c \geq 0 \quad \boxed{c \leq \frac{l}{2 f_0} = c_{\text{critique}}}$$



pas de basculement
glissement possible



position critique:
le glissement est
"juste possible"



basculement
glissement impossible

f_0 fixé ; plus l est grand, plus le risque de basculement est faible.
(c_{crit} augmente).

l fixé ; plus le frottement est faible, plus le risque de basculement est faible.
(c_{crit} augmente quand f_0 diminue).

on verra cela de manière qualitative en TP.

4) Forces de frottement dans les fluides :

soit un corps se déplaçant à vitesse "assez faible" à la vitesse $\vec{v}$ par rapport à un fluide (gaz ou liquide) ; il est soumis de la part du fluide à la force $\vec{f} = -K \eta \vec{v}$. (loi de Stokes). K dépend de la forme du corps ; pour une sphère $K = 6\pi R$. η coefficient de viscosité en N.s.m^{-2} .

Pour des vitesses plus élevées f est sensiblement proportionnelle à v^2 (jusqu'à 200 m.s^{-1})

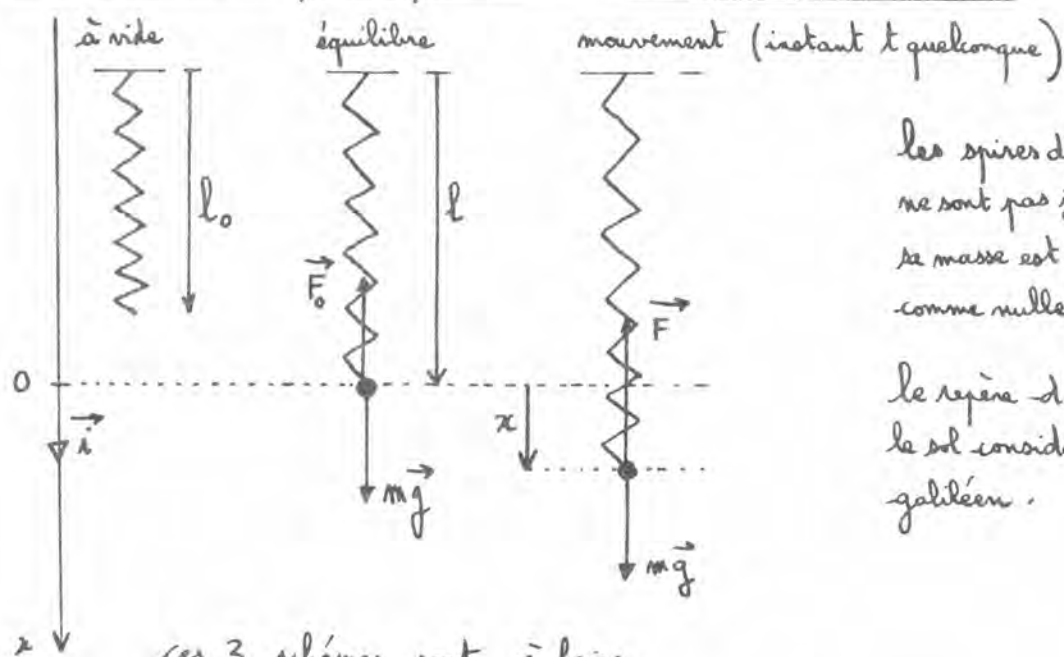
exercice : Expression littérale de la vitesse d'une goutte de pluie supposée sphérique. $r = 0,5 \text{ mm}$. $\rho_{\text{air}} = 1,3 \cdot 10^{-3} \text{ kg.m}^{-3}$
 $\rho_{\text{eau}} = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$. $\eta_{\text{air}} \approx 1,81 \cdot 10^{-5} \text{ N.s.m}^{-2}$.

AN : calculer la vitesse limite V .

Ch 8 : l'oscillateur harmonique

son étude est importante car c'est un bon modèle dans de nombreux problèmes de la physique (pas seulement en mécanique).

1) étude d'un exemple : point matériel suspendu à un ressort



les spires du ressort ne sont pas jointives, sa masse est considérée comme nulle.

le repère d'étude est le sol considéré comme galiléen.

ces 3 schémas sont à faire.

dans son domaine d'élasticité, on retiendra en français :

force exercée par le ressort sur la masse accrochée = raideur $\times$ allongement

allongement = longueur à un instant quelconque - longueur à vide

équilibre : $\vec{F}_0 + m\vec{g} = \vec{0}$ (I).

mouvement : $\vec{F} + m\vec{g} = m\vec{a}$ (II).

(I) sur Ox $mg - F_0 = 0$ et $F_0 = k(l - l_0)$

(II) sur Ox $mg - F = m\ddot{x}$ et $F = k[(l+x) - l_0]$

en retranchant (I) de (II) il vient :

$$-F + F_0 = m\ddot{x} \quad \text{soit} \quad -k[(l+x) - l_0] + k(l - l_0) = m\ddot{x}$$

$$\boxed{-kx = m\ddot{x}} \quad \text{ou} \quad \boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}}$$

l'équation différentielle $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ est l'équation d'un oscillateur harmonique.

la solution générale s'écrit au choix sous les formes :

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad \text{ou} \quad x = A_1 \cos \omega_0 t + A_2 \sin \omega_0 t.$$

A, φ ou A_1, A_2 constantes déterminées à l'aide des conditions initiales $x(t=0)$ et $\dot{x}(t=0)$.

exemple de conditions initiales :

à $t=0$ on lâche la masse en $x = +a$ ($a > 0$) sans vitesse initiale $\dot{x} = 0$.

A et φ ? $x = A \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad \dot{x} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$

$t=0 \quad a = A \cos \varphi \quad 0 = -A\omega_0 \sin \varphi \quad \varphi = 0$ convient.

$a = A \cos 0 \quad A = a \quad \boxed{x = a \cos \omega_0 t}$

remarque : si on choisit $\varphi = \pi \quad a = A \cos \pi \quad A = -a$

$x = -a \cos(\omega_0 t + \pi) = -a \cos \omega_0 t = a \cos \omega_0 t$

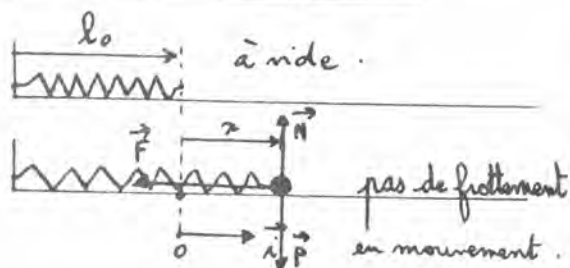
$a > 0$ s'appelle l'amplitude du mouvement.

φ la phase à l'origine.

ω_0 pulsation. $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ période $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

exercice : en prenant la 2^{ème} forme, montrer que $A_1 = a$ et $A_2 = 0$.

2) le ressort horizontal :



par rapport au sol galiléen la RFD s'écrit :

$$\vec{F} + \vec{N} + \vec{P} = m \vec{a}$$

sur Ox : $\overline{F} = m \ddot{x}$

exceptionnellement on utilise la mesure algébrique de $\vec{F}$ sur l'axe orienté par $\vec{i}$ (à l'instant t dessiné $\vec{F}$ est un nombre négatif $k > 0 \quad x > 0 \quad \overline{F} = -k \cdot x < 0$, x étant ici l'allongement).

102 ici, l'utilisation de la mesure algébrique ne s'impose pas :
 on pourrait écrire $-F = m \ddot{x}$ avec $F = \|\vec{F}\| > 0$.
 et $F = kx$ ($x > 0$)

il est bon d'adopter la règle suivante :

- si on note F "une force" alors $\|\vec{F}\| = F > 0$
- si on note $\vec{F}$ "une force" alors il s'agit d'une mesure algébrique (< 0 , nulle, > 0).
- dans la mesure du possible on n'utilisera pas la mesure algébrique pour une force.

On retrouve l'équation : $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ de l'oscillateur harmonique.

3) énergie mécanique :

le ressort horizontal se prête mieux à l'introduction de la notion d'énergie ; en effet l'énergie potentielle de pesanteur de la masse reste constante.

A) énergie cinétique : $E_c = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{1}{2} m a^2 \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi)$

la moyenne temporelle notée $\langle E_c \rangle$ est :

$$\langle E_c \rangle = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} E_c dt = \boxed{\frac{1}{4} m a^2 \omega_0^2 = \langle E_c \rangle}$$

il est bon de connaître par cœur : $\begin{cases} \langle \cos(\) \rangle = 0 & \langle \sin(\) \rangle = 0 \\ \langle \cos^2(\) \rangle = \frac{1}{2} & \langle \sin^2(\) \rangle = \frac{1}{2} \end{cases}$

B) énergie potentielle : voir chapitre énergie.

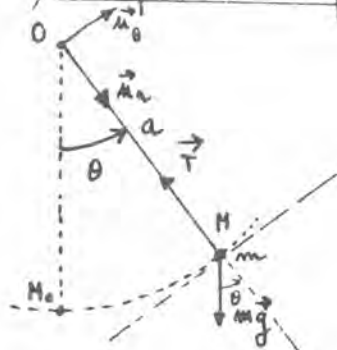
$E_p = \frac{1}{2} k x^2$ énergie potentielle élastique $k = m \omega_0^2$.
 $= \frac{1}{2} m \omega_0^2 a^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi)$ $\langle E_p \rangle = \frac{1}{4} m \omega_0^2 a^2$

C) énergie mécanique :

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2} m a^2 \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2} m a^2 \omega_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi)$$

$$E = \frac{1}{2} m a^2 \omega_0^2 = \langle E_c \rangle + \langle E_p \rangle \quad \text{avec } \langle E_c \rangle = \langle E_p \rangle = \frac{1}{4} m a^2 \omega_0^2$$

l'énergie mécanique reste constante au cours du mouvement, car nous avons supposé qu'il n'y avait pas de frottement (forces non conservatives), on remarquera que E est proportionnelle au carré de l'amplitude a^2 . (à retenir).

exercices :1) le pendule simple (petites oscillations)

le référentiel d'étude étant le référentiel terrestre supposé galiléen.

la masse m est soumise : à son poids $m\vec{g}$, à la force exercée par le fil sur la masse $\vec{T}$.

la RFD s'écrit : $m\vec{g} + \vec{T} = m\vec{a}$.

projetons la RFD en utilisant la base mobile $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$:

$$\vec{a} = a \overset{\text{accélération}}{\overset{\circ\circ}{\theta}} \vec{u}_\theta - a \overset{\text{longueur}}{\overset{\circ\circ}{\theta^2}} \vec{u}_r \quad (\text{attention à longueur du fil})$$

$$\text{sur } \vec{u}_r : -T + mg \cos \theta = -ma \overset{\circ\circ}{\theta^2}. \quad (\text{I}).$$

$$\text{sur } \vec{u}_\theta : -mg \sin \theta = ma \overset{\circ\circ}{\theta}. \quad (\text{II}).$$

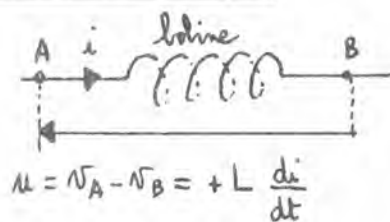
Seule (II) nous intéresse ici : $\overset{\circ\circ}{\theta} + \frac{g}{a} \sin \theta = 0$.

si θ reste petit ($\theta \leq 10^\circ$) $\sin \theta \approx \theta$ $\overset{\circ\circ}{\theta} + \frac{g}{a} \theta \approx 0$.

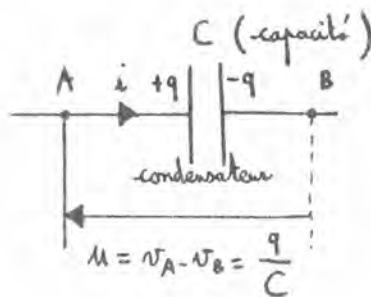
on retrouve $\overset{\circ\circ}{\theta} + \omega_0^2 \theta \approx 0$ avec $\omega_0^2 = \frac{g}{a}$ et $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{a}{g}}$
équation d'un oscillateur harmonique.

2) le circuit L - C :

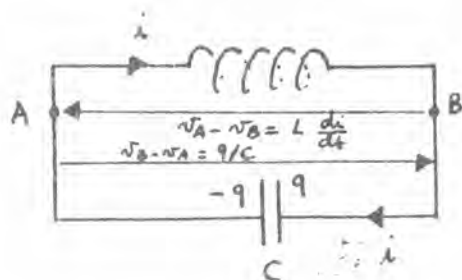
rappels:



L auto inductance.



$$i = + \frac{dq}{dt}$$



$$V_A - V_B = +L \frac{di}{dt}$$

$$V_B - V_A = \frac{q}{C}$$

$$V_A - V_B = -(V_B - V_A) \quad L \frac{di}{dt} = -\frac{q}{C}$$

$$\text{or } i = + \frac{dq}{dt} \quad \frac{di}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2} \quad L \frac{d^2q}{dt^2} = -\frac{q}{C}$$

$$\text{soit } \boxed{\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0 \quad \text{avec } \omega_0^2 = \frac{1}{LC}}$$

c'est encore l'équation d'un oscillateur harmonique.

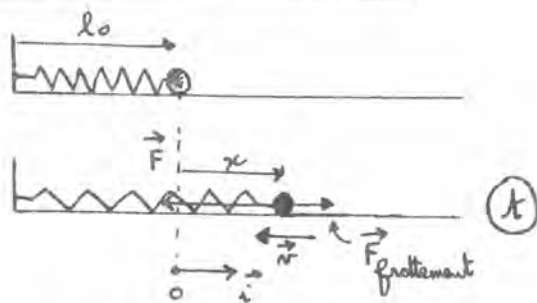
on retiendra:

on appelle oscillateur harmonique tout système physique décrit par une grandeur physique q satisfaisant à l'équation $\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0$.

les propriétés les plus importantes de l'oscillateur harmonique sont:

- la période des oscillations est indépendante de l'amplitude.
- E est constante et $\langle E_c \rangle = \langle E_p \rangle = \frac{E}{2}$.

4) l'oscillateur amorti :



on n'a pas dessiné $\vec{N}$ et $m\vec{g}$.

si on tient compte des frottements :

$$\vec{F}_{\text{frottement}} = -h \vec{v}$$

(h constante positive)

on se limite aux frottement fluide

sur O x :

$$-kx - h\dot{x} = m\ddot{x}$$

$$\boxed{m\ddot{x} + h\dot{x} + kx = 0}$$

↗ ω_0 pulsation propre.

il est usuel de poser : $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ et $\gamma = \frac{h}{m}$.

d'où

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{1}{\gamma}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$

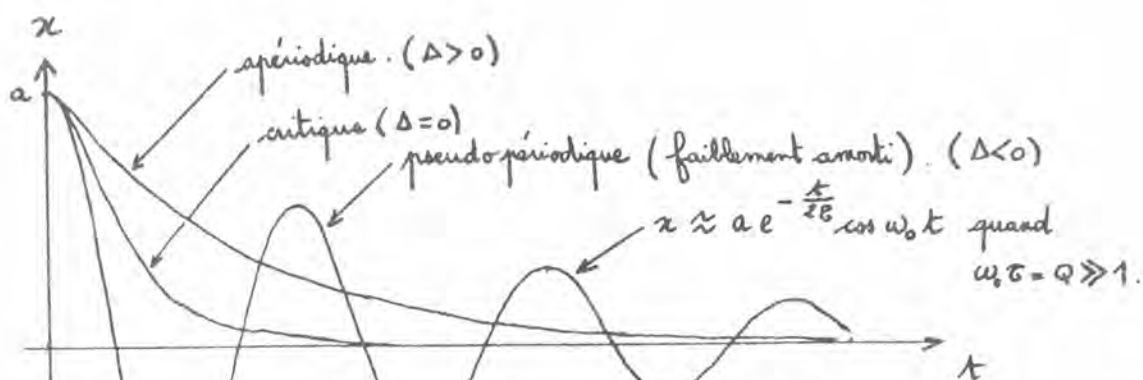
pour $\gamma \rightarrow \infty$ $h = 0$ pas de frottement on retrouve l'équation de l'oscillateur harmonique non amorti : $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$.

la résolution de cette équation est longue (sans être difficile), retenons les résultats essentiels.

on calcule le discriminant Δ de l'équation caractéristique

$$r^2 + \frac{1}{\gamma}r + \omega_0^2 = 0 \quad \text{soit} \quad \Delta = \frac{1}{\gamma^2} - 4\omega_0^2.$$

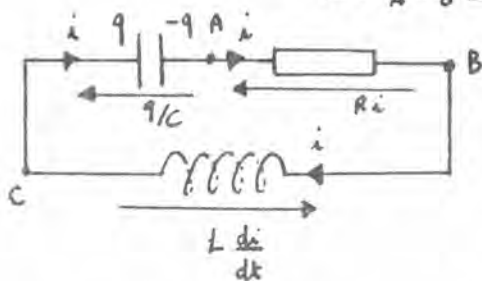
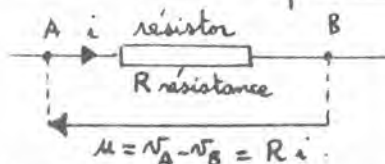
si $\Delta < 0$	<u>oscillations amorties</u> (oscillateur faiblement amorti) <u>régime pseudopériodique</u> .
$\Delta = 0$	pas d'oscillations, <u>régime critique</u> ; retour le plus rapide vers la position d'équilibre.
$\Delta > 0$	pas d'oscillations, <u>régime aperiodique</u> (oscillateur fortement amorti.)



les unités ne sont pas mentionnées ; on a lâché la masse en $x = +a$ sans vitesse initiale - avec des frottements différents.

en électricité, on retrouve une équation analogue :

rappel :



$$(V_A - V_B) + (V_B - V_C) + (V_C - V_A) = 0$$

$$R i + L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = 0$$

$$\text{avec } \frac{dq}{dt} = i$$

$$\text{soit } \ddot{q} + \frac{R}{L} \dot{q} + \frac{1}{LC} q = 0$$

$$\text{ou } \ddot{q} + \frac{1}{\beta} \dot{q} + \omega_0^2 q = 0 \quad \text{avec } \beta = \frac{L}{R} \text{ et } \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

on peut remarquer les analogies :

$$q \longleftrightarrow x \quad L \longleftrightarrow m \quad \frac{1}{C} \longleftrightarrow k \quad R \longleftrightarrow h$$

Nous avons vu jusqu'à présent le régime libre de l'oscillateur ; par exemple une fois lâchée la masse était abandonnée, aucune action extérieure autre que le frottement n'intervient ($m\vec{g} + \vec{N} = \vec{0}$). On va voir le régime forcé ou entretenu de l'oscillateur.

5) l'oscillateur harmonique entretenue :

A) Réponse à une force excitatrice :
 si en plus des frottements, la masse est soumise à la force $f(t) \vec{i}$.

la RFD s'écrit : $-kx - h\dot{x} + f(t) = m\ddot{x}$

$$\text{soit } m\ddot{x} + h\dot{x} + kx = f(t).$$

$$\ddot{x} + \frac{1}{\zeta} \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f(t)}{m}.$$

ω_0 est la pulsation propre (ou naturelle) de l'oscillateur ; si on entretient (excite) l'oscillateur avec une force $f(t)$ sinusoïdale de pulsation $\omega \neq \omega_0$ la réponse $x(t)$ à l'excitation $f(t)$ sera sinusoïdale de pulsation ω . (c'est pourquoi on appelle ce régime : régime forcé.)

remarque : le choix d'une excitation $f(t)$ sinusoïdale est très important pratiquement et théoriquement.

solution de l'équation $\ddot{x} + \frac{1}{\zeta} \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f_0}{m} \sin \omega t \quad (I)$

$$x = \underbrace{x_1(t)}_{\substack{\text{équation avec 2ème} \\ \text{membre nul}}} + \underbrace{x_2(t)}_{\substack{\text{équation} \\ \text{complète}}}.$$

$$f_0 > 0.$$

après un temps plus ou moins long $x_1(t)$ devient négligeable (voir courbe $x(t)$ en régime libre) ; $x \simeq x_2(t)$ l'oscillateur est alors en régime forcé ; on admet que la solution de l'équation complète est de la forme $x = A \sin(\omega t - \varphi)$
 ω fréquence de l'excitateur.

$$108 \quad x = A \sin(\omega t - \varphi) \quad \dot{x} = A\omega \cos(\omega t - \varphi) \quad \ddot{x} = -A\omega^2 \sin(\omega t - \varphi).$$

on porte dans $\ddot{x} + \frac{1}{2}\dot{x} + \omega_0^2 x = \alpha_0 \sin \omega t \quad \alpha_0 = f_0/m > 0.$

$$(\omega_0^2 - \omega^2) A \sin(\omega t - \varphi) + \frac{A\omega}{2} \cos(\omega t - \varphi) = \alpha_0 \sin \omega t.$$

$$\sin(\omega t - \varphi) = \sin \omega t \cos \varphi - \cos \omega t \sin \varphi.$$

$$\cos(\omega t - \varphi) = \cos \omega t \cos \varphi + \sin \omega t \sin \varphi.$$

$$(\omega_0^2 - \omega^2) A [\sin \omega t \cos \varphi - \cos \omega t \sin \varphi] + \frac{A\omega}{2} [\cos \omega t \cos \varphi + \sin \omega t \sin \varphi] = \alpha_0 \sin \omega t$$

il faut :

$$\left[(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \varphi + \frac{\omega}{2} \sin \varphi \right] A = \alpha_0. \quad (I).$$

$$\left[\frac{\omega}{2} \cos \varphi - (\omega_0^2 - \omega^2) \sin \varphi \right] A = 0 \quad (II).$$

(II) est équivalente à $\boxed{\tan \varphi = \frac{\omega/2}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad \omega \neq \omega_0.}$

pour $\omega = \omega_0$ on a $\frac{\omega_0}{2} \sin \varphi A = \alpha_0$ et $\frac{\omega_0}{2} \cos \varphi A = 0$. $\alpha_0 > 0 \Rightarrow A \neq 0 \Rightarrow \cos \varphi = 0$.
 $\varphi = \frac{\pi}{2} \quad A = \frac{\alpha_0 2}{\omega_0} > 0$

De $\tan \varphi$ on tire :

$$\sin^2 \varphi = \frac{\omega^2/4}{D^2}$$

$$\cos^2 \varphi = \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}{D^2}$$

$$\text{avec } D^2 = (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega^2}{2^2}$$

(on trouve ces expressions à partir de l'expression de $\tan \varphi$ et avec $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$).

* COMME ON CHERCHE UN SEUL φ , on peut prendre :

$$\sin \varphi = \frac{\omega/2}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega^2}{2^2}]^{1/2}}$$

$$\text{et } \cos \varphi = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega^2}{2^2}]^{1/2}}$$

(I) permet de trouver

$$\boxed{A = \frac{\alpha_0}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2/2^2]^{1/2}} > 0}$$

la solution peut s'écrire

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \frac{\alpha_0}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2/2^2]^{1/2}} \sin(\omega t - \varphi) \\ \tan \varphi &= \frac{\omega/2}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad \text{et} \quad \sin \varphi = \frac{\omega/2}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega^2}{2^2}]^{1/2}} > 0 \\ \varphi &\text{ défini à } 2\pi \text{ près.} \end{aligned}}$$

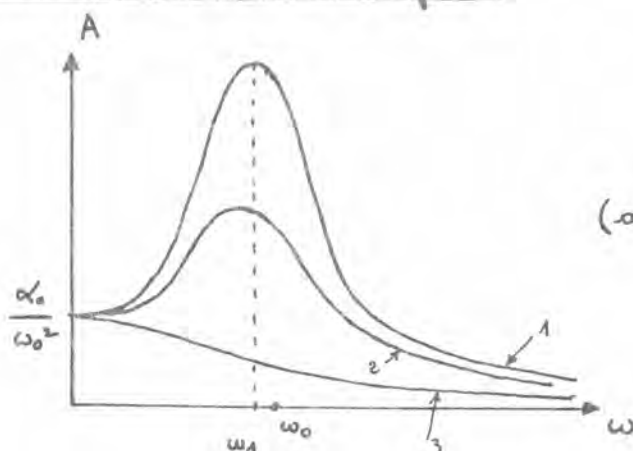
Remarque: ne pas écrire $x = \frac{\alpha_0}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2]^{\frac{1}{2}}} \sin \left[\omega t - \text{Arctg} \frac{\omega \gamma}{\omega_0^2 - \omega^2} \right]$; ceci

109

n'est pas juste car nous ignorons si $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$. (Aujourd'hui $\text{Arctg} \equiv \tan^{-1}$)
→ calculatrices.

les oscillations forcées ne sont pas amorties. Elles ont une amplitude constante A et une pulsation égale à celle de la force appliquée (excitateur).

allure de la courbe $A = f(\omega)$.



1 : γ "grand" peu de frottements (résonance aiguë)

2 : γ "moyen" résonance "floue".

3 : γ "petit" frottements importants.
(excitateur trop amorti, pas de résonance)

notons que $\omega(\text{maximum}) \neq \omega_0$.

quand la courbe présente un maximum, on parle de RÉSONANCE. (d'amplitude).

Sans examiner tous les détails, regardons quelques cas :

* $\omega \ll \omega_0$ fréquence excitatrice faible.

$$\sin \varphi \rightarrow 0 \quad \cos \varphi \rightarrow 1 \quad \varphi \rightarrow 0 \quad x = A \sin \omega t$$

la réponse en basse fréquence est en phase avec l'excitateur (force ici)

$$A \approx \frac{\alpha_0}{\omega_0^2} = \frac{f_0}{m \omega_0^2} = \frac{f_0}{k}. \quad (\omega_0^2 = k/m) \quad \text{on dit que c'est le ressort qui contrôle la réponse. } (A = f_0/k)$$

* cas $\omega = \omega_0$: $\sin \varphi \rightarrow 1 \quad \cos \varphi \rightarrow 0 \quad \varphi = \frac{\pi}{2}$.
(ω_0 pulsation propre) $A = \frac{\alpha_0 \gamma}{\omega_0} \quad x = \frac{\alpha_0 \gamma}{\omega_0} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right)$

la réponse pour $\omega = \omega_0$ est en quadrature retard par rapport à l'excitateur.

Il faut bien noter que A_{max} n'est pas $\frac{\alpha_0 \gamma}{\omega_0}$ (valeur de A pour $\omega = \omega_0$):

et que A n'a pas toujours un maximum (en dehors de l'extrémum $\omega = 0$); on va voir que $\gamma \omega_0$ doit être supérieur à $1/\sqrt{2}$.

110. $A_{\max}$ quand $\underbrace{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega^2}{2\gamma^2}]}_{B > 0}^{\frac{1}{2}}$ minimum.

$$\frac{d}{d\omega} B^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} B^{-\frac{1}{2}} \frac{dB}{d\omega} = \underbrace{\left(\frac{1}{2} B^{-\frac{1}{2}}\right)}_{>0} \left[2(\omega_0^2 - \omega^2) \cdot -2\omega + \frac{2\omega}{2\gamma^2} \right]$$

cette dérivée s'annule pour $\omega = 0$ et $\boxed{\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{1}{2\gamma^2}}$ position du maximum de A.

ω étant positif

si les frottements sont faibles (γ très grand), $\omega_{\max} \approx \omega_0$

$$\omega_{\max} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2\gamma^2 \omega_0^2}}$$

$$\omega_{\max} < \omega_0$$

* $\omega \gg \omega_0$. fréquence excitatrice très élevée.

Il faut $2\omega_0 > 1/\gamma$

$$\sin \varphi \rightarrow 0. \quad \cos \varphi \rightarrow -1. \quad \varphi = \pi$$

$$A \approx \frac{\omega_0}{\omega^2} = \frac{f_0}{m \omega^2}$$

on dit que la masse contrôle la réponse.

on notera : très basse fréquence

$$\omega = \omega_0$$

très haute fréquence

$$\varphi$$

$$0$$

$$\frac{\pi}{2}$$

$$\pi$$

$$f(t) = f_0 \sin \omega t$$

excitat.

$$\longrightarrow x = A \sin(\omega t - \varphi) \quad A > 0$$

réponse

la réponse est toujours en retard de phase par rapport à l'excitation.
(en phase à très basse fréquence).

B) Puissance absorbée par l'oscillateur:

la force $f(t) = f_0 \sin \omega t$ fournit à la masse la puissance $f(t) \cdot \dot{x}(t)$.

$$\text{soit } p = f_0 \sin \omega t \cdot A \omega \cos(\omega t - \varphi) = f_0 A \omega \sin \omega t \cdot \cos(\omega t - \varphi).$$

la puissance moyenne absorbée par la masse est $P = \langle p \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T p \, dt$

$$\cos(\omega t - \varphi) = \cos \omega t \cdot \cos \varphi + \sin \omega t \cdot \sin \varphi.$$

$$\sin \omega t \cdot \cos(\omega t - \varphi) = \sin \omega t \cos \omega t \cos \varphi + \sin^2 \omega t \sin \varphi.$$

$$\begin{aligned}\langle \sin \omega t \cdot \cos(\omega t - \varphi) \rangle &= \left\langle \frac{1}{2} \sin 2\omega t \cdot \cos \varphi + \sin^2 \omega t \sin \varphi \right\rangle \\ &= \frac{1}{2} \cos \varphi \langle \sin 2\omega t \rangle + \sin \varphi \langle \sin^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2} \sin \varphi \\ &\left(\langle \sin 2\omega t \rangle = 0 \text{ et } \langle \sin^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2} \right).\end{aligned}$$

$$P = f_0 \cdot \frac{\omega_0}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2/\beta^2]^{\frac{1}{2}}} \cdot \omega \cdot \frac{1}{2} \frac{\omega/\beta}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2/\beta^2]^{\frac{1}{2}}}$$

$$P = \frac{f_0^2}{2m} \cdot \frac{\omega^2/\beta}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2/\beta^2]}$$

puissance moyenne fournie par l'excitateur à l'oscillateur.

A quoi sert cette puissance ?

la force de frottement est $-h \dot{x} \vec{i}$ avec $h = \frac{m}{\beta}$;

la puissance de cette force est perdue sous forme de chaleur.

$$P_{\text{frottement}} = h \dot{x}^2$$

(on calcule la valeur absolue en réalité $P_f = -h \dot{x}^2 < 0$)

$$P_f = \langle P_f \rangle = h \langle \dot{x}^2 \rangle = h \langle A^2 \omega^2 \cos^2(\omega t - \varphi) \rangle$$

$$P_f = h A^2 \omega^2 \langle [\cos^2 \omega t \cos^2 \varphi + \sin^2 \omega t \sin^2 \varphi + 2 \sin \varphi \cos \varphi \sin \omega t \cos \omega t] \rangle$$

$$P_f = \frac{1}{2} h A^2 \omega^2.$$

$$P_f = \frac{1}{2} \frac{m}{\beta} \frac{f_0^2/m^2}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2/\beta^2]} \omega^2$$

$$P_f = \frac{f_0^2}{2m} \frac{\omega^2/\beta}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2/\beta^2]}$$

égale à la puissance moyenne fournie par la force excitatrice.

En régime forcé, il y a transformation complète de la puissance fournie à l'oscillateur en chaleur.

c) facteur de qualité d'un oscillateur :

l'oscillateur est caractérisé par ω_0 et $\beta (= \frac{m}{h}$ pour la masse + ressort).

$Q = \omega_0 \beta = 2\pi \frac{\beta}{T_0}$ est le facteur de qualité de l'oscillateur.

112 un Q élevé signifie que l'oscillateur est peu amorti (β grand).

Significations de Q pour un oscillateur faiblement amorti: (Q "grand")
 $\Rightarrow 1$

* $\omega_{\max} \approx \omega_0$ la résonance a lieu pour une pulsation inférieure à ω_0 mais très voisine de ω_0 .

$$A \approx \frac{\alpha_0 \beta}{\omega_0} \quad \frac{A(\omega < \omega_0)}{A(\omega = 0)} \approx \frac{A_{\text{résonance}}}{A(\omega = 0)} \approx \frac{\alpha_0 \beta / \omega_0}{\alpha_0 / \omega_0^2} = \beta \omega_0 = Q$$

$$Q \approx \frac{A_{\text{résonance}}}{A(\omega = 0)} \quad \text{pour un oscillateur faiblement amorti.}$$

Q est à peu près égal au rapport entre l'amplitude $A_{\text{résonance}} (\omega \approx \omega_0)$ et l'amplitude $A(\omega \approx 0)$ aux basses fréquences.

* acuité de la résonance: pour qu'il y ait résonance on a vu que $\beta \omega_0 > 1/\sqrt{2}$ soit $Q > 1/\sqrt{2}$ (frottements pas trop importants).

Calculons $A_{\max}$ ($\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2\beta^2 \omega_0^2}}$). $\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{1}{2\beta^2}$.

$$A = \frac{\alpha_0}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^4 / \beta^2]^{\frac{1}{2}}}$$

$$(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^4 / \beta^2 = \frac{1}{4\beta^4} + \frac{\omega_0^2}{\beta^2} - \frac{1}{2\beta^4} = \frac{\omega_0^2}{\beta^2} - \frac{1}{4\beta^4} = \frac{\omega_0^2}{\beta^2} \left(1 - \frac{1}{4\beta^2 \omega_0^2}\right)$$

$$A_{\max} = \frac{\alpha_0}{\frac{\omega_0}{\beta} \left(1 - \frac{1}{4\beta^2 \omega_0^2}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\alpha_0 \beta / \omega_0}{\left(1 - 1/4Q^2\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\frac{\alpha_0}{\omega_0^2} Q}{\left(1 - 1/4Q^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

l'acuité de la résonance est définie par $\frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1}$; ω_1 et ω_2 étant les pulsations pour lesquelles $A(\omega_1) = A(\omega_2) = \frac{A_{\max}}{\sqrt{2}}$.

ω_1 et ω_2 sont les solutions de l'équation $A = \frac{A_{\max}}{\sqrt{2}}$.

113

ou $A^2 = \frac{A_{\max}^2}{2}$; on écrit

$$(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega^2}{2\varphi^2} = 2 \frac{\omega_0^2}{2^2} \left(1 - \frac{1}{4\varphi^2\omega_0^2}\right)$$

il vient $\omega^4 + \left[\frac{1}{2^2} - 2\omega_0^2\right] \omega^2 + \underbrace{\left(\omega_0^4 - \frac{2\omega_0^2}{2^2} + \frac{1}{22^4}\right)}_C = 0$.

$$\Delta = \left[\frac{1}{2^2} - 2\omega_0^2\right]^2 - 4C.$$

$$\text{et } \omega^2 = \omega_0^2 - \frac{1}{22^2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\Delta}$$

$$\frac{\omega^2}{\omega_0^2} = 1 - \frac{1}{2\varphi^2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\Delta}{\omega_0^4}} \quad (\varphi = 2\omega_0)$$

tous calculs faits : $\frac{\omega^2}{\omega_0^2} = 1 - \frac{1}{2\varphi^2} \pm \frac{1}{\varphi} \sqrt{1 - \frac{1}{4\varphi^2}}$

pour un oscillateur très peu amorti $\varphi \gg 1$

$$\frac{\omega^2}{\omega_0^2} \approx 1 - \frac{1}{2\varphi^2} \pm \frac{1}{\varphi} \left(1 - \frac{1}{8\varphi^2}\right) \approx 1 \pm \frac{1}{\varphi}$$

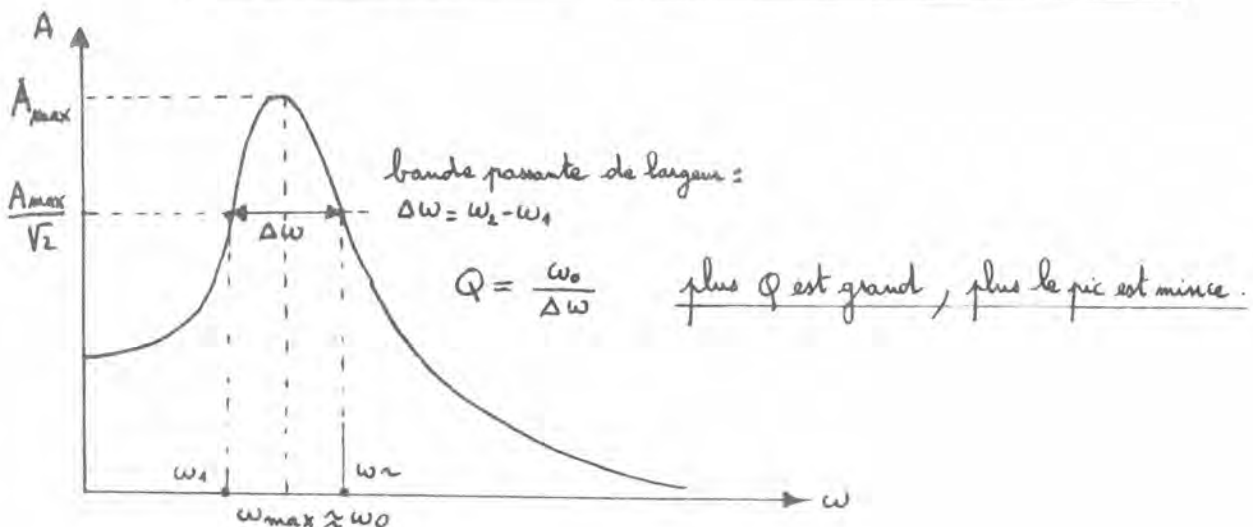
$$\frac{\omega}{\omega_0} \approx 1 \pm \frac{1}{2\varphi}$$

$$\begin{aligned} \omega_1 &\approx \omega_0 \left(1 - \frac{1}{2\varphi}\right) \\ \omega_2 &\approx \omega_0 \left(1 + \frac{1}{2\varphi}\right) \end{aligned}$$

$$\omega_2 - \omega_1 \approx \omega_0 \times \frac{1}{\varphi}$$

l'acuité pour un oscillateur très peu amorti peut s'écrire

$$\frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1} \approx Q \quad \text{oscillateur très peu amorti } (\varphi \gg 1).$$



* Q et l'énergie: (on suppose $Q \gg 1$: oscillateur faiblement amorti et $\omega \approx \omega_0$).

la puissance ^{moienne} perdue par frottement est $P_f = \frac{1}{2} h A^2 \omega_0^2$ ($h = \frac{m}{2}$);
ce qui correspond à une énergie perdue par période $e = T \cdot P_f$. ($T = \frac{2\pi}{\omega_0}$)

l'énergie mécanique de l'oscillateur est $E = \frac{1}{2} m A^2 \omega_0^2$ ($\omega_0^2 = \frac{k}{m}$)

$$\frac{E}{e} = \frac{\frac{1}{2} m A^2 \omega_0^2}{\frac{1}{2} h A^2 \omega_0^2 \cdot T} = \frac{m}{hT} = \frac{2}{T} = \frac{1}{T} \frac{Q}{\omega_0} = \frac{1}{2\pi} Q$$

$$\boxed{Q = 2\pi \frac{E}{e}} \quad \text{ou} \quad \boxed{Q = 2\pi \frac{\text{énergie mécanique moyenne}}{\text{énergie perdue par période}}}$$

Remarque: cette dernière expression est encore valable quand le régime n'est pas entretenu; la différence est que pour le régime entretenu l'énergie apportée par l'excitateur compense exactement l'énergie perdue.

exercice: soit un circuit R, L, C série. En utilisant les analogies signalées plus haut, déterminer les expressions de:

$$\left. \begin{array}{l} \tau \text{ (temps de relaxation)} \\ \omega_0 \text{ (pulsation propre)} \end{array} \right\} \text{ en fonction de } (L, R, C).$$

Q (facteur de qualité) en fonction de (L, R, C, ω_0) .

Ces quelques exemples montrent la très grande importance du facteur de qualité Q pour un oscillateur.

Ch9: Mouvement d'un point matériel soumis à une force centrale en $\frac{1}{r^2}$.

Les 2 exemples classiques sont l'interaction de gravitation et l'interaction électrostatique. (on traitera la gravitation, on peut facilement transposer).

on s'intéresse à l'interaction de 2 points matériels isolés (ex: Terre + satellite artificiel), ce qui veut dire qu'on peut négliger les actions exercées par d'autres objets (ex: tous les autres astres).

on ne traite que les cas où $m_2 \ll m_1$:

$$m_{\text{satellite}} \ll m_{\text{Terre}} ; m_{\text{planète}} \ll m_{\text{soleil}}$$

$$\text{planète} \equiv \text{Terre} \quad \frac{m_T}{m_S} = \frac{1}{333\,432}$$

$$\text{dans le cas le plus défavorable Jupiter} \quad \frac{m_J}{m_S} = \frac{1}{1047}$$

ce cas est donc très fréquent.

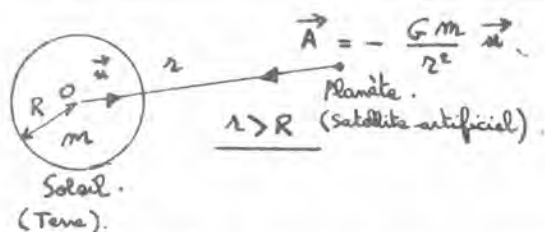
remarques: - le traitement rigoureux de ce problème est connu sous le nom du "problème à 2 corps".

- il est conseillé de relire les paragraphes sur le moment cinétique et les forces centrales.

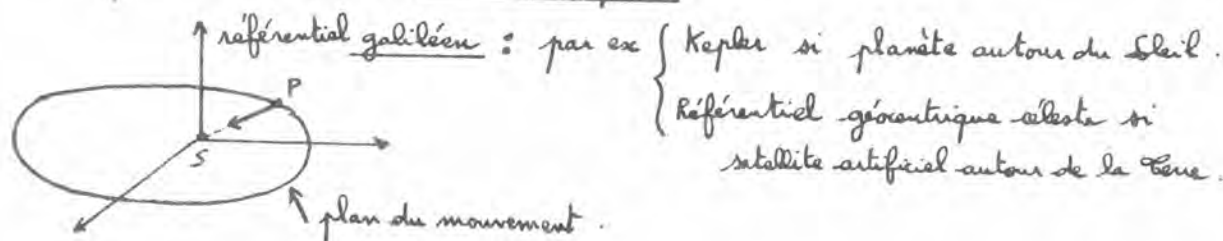
1) position du problème: (on prend l'exemple d'une planète et du soleil)

Un astre est à symétrie sphérique, le champ de gravitation $\vec{A}$ qu'il crée est le même que celui qui serait créé par un point matériel placé en son centre de même masse que celle de l'astre.

CECI N'EST VALABLE QUE POUR UN POINT EXTÉRIEUR À L'ASTRE.



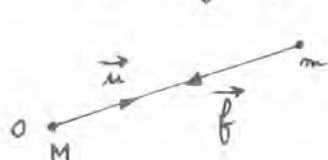
On a déjà vu que le mouvement d'un point matériel soumis à une force centrale est un mouvement plan.



116 On cherche à étudier les mouvements possibles dans un référentiel galiléen du point matériel soumis uniquement à une force centrale (gravitation).

2) ^{mécanique} Energie du point matériel :

A) énergie potentielle : (exemple gravitation).



$$\vec{f} = m \vec{A}(M) = -G \frac{Mm}{r^2} \vec{u}$$

$$E_P = E_P(r) \quad -G \frac{Mm}{r^2} \vec{u} = -\vec{\text{grad}} E_P$$

$$-G \frac{Mm}{r^2} = -\frac{dE_P}{dr} \quad E_P = -\frac{GMm}{r} + \text{constante}$$

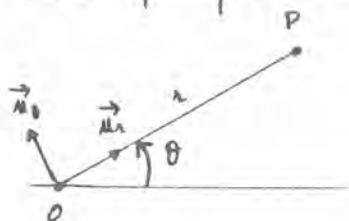
habituellement on choisit $E_P(\infty) = 0$ d'où $E_P(r) = -\frac{GMm}{r} < 0$

B) énergie mécanique :

$\vec{f}$ force centrale CONSERVATIVE :

$$E = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{GMm}{r}$$

il est pratique d'utiliser la base de projection polaire $\vec{v} = \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta$



$$E = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - G \frac{Mm}{r} = \text{constante} = E_0$$

équation de conservation de l'énergie ($\vec{f}$ conservative)

introduisons la constante des aires $C = r^2 \dot{\theta}$ (voir chapitre : dynamique newtonienne)
force centrale

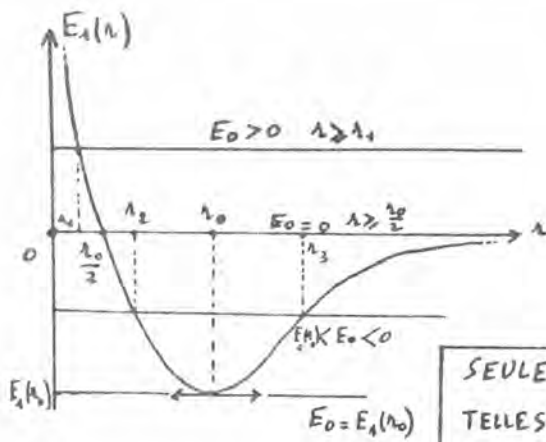
$$E_0 = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m \frac{C^2}{r^2} - \frac{GMm}{r}$$

posons $E_1(r) = \frac{1}{2} m \frac{C^2}{r^2} - \frac{GMm}{r}$ $\frac{1}{2} m \dot{r}^2 + E_1(r) = E_0$

C) étude qualitative des trajectoires en fonction de l'énergie E_0 .

calculons $\frac{dE_1}{dr} = -\frac{mC^2}{r^3} + \frac{GMm}{r^2}$; $\frac{dE_1}{dr}$ s'annule pour $r = r_0 = \frac{C^2}{GM}$

$$E_1(r_0) = -\frac{1}{2} \frac{GMm}{r_0} = -\frac{1}{2} \frac{GMm}{r_0}$$



$$E_1(r) \text{ s'annule pour } r = \frac{C^2}{2GM} = \frac{r_0}{2}.$$

$$E_0 = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + E_1(r)$$

$\frac{1}{2} m \dot{r}^2$ est toujours positif ou nul.

SEULES SONT POSSIBLES LES VALEURS DE r TELLES QUE $E_0 - E_1 \geq 0$ soit $E_0 \geq E_1(r)$

discussion :

$E_0 > 0$ on a $E_0 \geq E_1(r)$ pour $r \geq r_1$.

le point matériel peut venir de l'infini, passer à la distance r_1 du centre de force, puis s'éloigner à l'infini.

on montrera que la trajectoire est une branche d'hyperbole.

$E_0 = 0$ on a $E_0 \geq E_1(r)$ pour $r \geq \frac{r_0}{2}$.

même conclusion que pour $E_0 > 0$ en remplaçant r_1 par $\frac{r_0}{2}$.

on montrera que la trajectoire est une parabole.

$E_1(r_0) < E_0 < 0$ on a $E_0 \geq E_1(r)$ pour $r_2 \leq r \leq r_3$

le point matériel tourne autour du centre de force toujours dans le même sens (on a un signe de $\dot{\theta}$ constant).

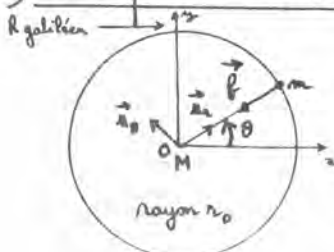
on montrera que la trajectoire est une ellipse.

$E_0 = E_1(r_0) < 0$ la seule possibilité est $r = r_0$.

le point matériel a une trajectoire circulaire (autour du centre de force) de rayon r_0 .

la trajectoire est un cercle.

3) Cas particulier d'une trajectoire circulaire : (important)



$\vec{a}$ accélération du point matériel (m) par rapport au référentiel galiléen R exprimée dans la base de projection mobile $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta$ $\vec{a} = r \ddot{\theta} \vec{u}_\theta - r \dot{\theta}^2 \vec{u}_r$.

la RFD s'écrit dans R galiléen $\vec{f} = m \vec{a}$ soit $-\frac{GMm}{r_0^2} \vec{u}_r = -r_0 \dot{\theta}^2 \vec{u}_r$

$$118) -\frac{GMm}{r_0^3} = -r_0 \dot{\theta}^2 \quad r_0 \dot{\theta}^2 = \frac{GM}{r_0^2} \quad \text{soit} \quad \boxed{\dot{\theta} = \sqrt{\frac{GM}{r_0^3}} = \text{constante}}$$

→ le mouvement circulaire est uniforme.

la vitesse linéaire est $v = r_0 \dot{\theta} = \sqrt{\frac{GM}{r_0}}$ constante, ce qui donne une période de révolution T telle que $vT = 2\pi r_0$ soit $T = \frac{2\pi r_0^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{GM}}$

ou encore exprimées autrement: $\frac{T^2}{r_0^3} = \frac{4\pi^2}{GM} = \text{constante}$ (cas particulier de la 3^{ème} loi de Kepler): le carré de la période "croît comme" le cube du rayon.

exercice: calculer r_0 pour un satellite géostationnaire (son mouvement a lieu dans le plan Equatorial de la Terre et il reste toujours à la verticale du même lieu).

T_0 (période de rotation terrestre dans le référentiel géocentrique céleste) = 23h 56mn.
 M (masse de la Terre) = $5,98 \cdot 10^{24}$ kg. $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$.

réponse: $r_0 \approx 42\,000 \text{ km}$.

exercice: calculer en J l'énergie mécanique d'un satellite géostationnaire.

4) Trajectoires: ON POURRA SE CONTENTER DE MÉMORISER L'ÉQUATION DE LA TRAJECTOIRE

éliminons le temps entre les 2 équations de conservations

$$\frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m \frac{C^2}{r^2} - \frac{GMm}{r} = E_0. \quad (\text{conservation de l'énergie})$$

$$m r^2 \dot{\theta} = m C = \sigma_0 \quad (\text{conservation du moment cinétique}).$$

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} \quad \text{or } C = r^2 \frac{d\theta}{dt} \quad \text{d'où } \dot{r} = \frac{dr}{d\theta} \frac{C}{r^2}.$$

$$\frac{1}{2} m \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 \frac{C^2}{r^4} + \frac{1}{2} m \frac{C^2}{r^2} - \frac{GMm}{r} = E_0.$$

$$\frac{1}{2} m \frac{C^2}{r^2} \left[\frac{1}{r^2} \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 + 1 \right] - \frac{GMm}{r} = E_0.$$

$$\text{on pose: } u = \frac{1}{r} \quad r = \frac{1}{u} \quad \frac{dr}{du} = -\frac{1}{u^2} \quad \frac{dr}{d\theta} = \frac{dr}{du} \frac{du}{d\theta} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\theta}.$$

$$\frac{1}{2} m c^2 u^2 \left[u^2 \frac{1}{u^4} \left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + 1 \right] - GMm u = E_0.$$

$$\frac{1}{2} m c^2 \left[\left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + u^2 \right] - GMm u = E_0.$$

dérivons par rapport à θ :

$$\frac{1}{2} m c^2 \left[\frac{d}{d\theta} \left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + \frac{d}{d\theta} u^2 \right] - GMm \frac{du}{d\theta} = 0.$$

$$\frac{1}{2} m c^2 \left[2 \frac{du}{d\theta} \frac{d^2u}{d\theta^2} + 2u \frac{du}{d\theta} \right] - GMm \frac{du}{d\theta} = 0.$$

$$\frac{du}{d\theta} \left[m c^2 \frac{d^2u}{d\theta^2} + m c^2 u \right] - GMm \frac{du}{d\theta} = 0 \quad \frac{du}{d\theta} \left[-GMm + m c^2 \left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u \right) \right] = 0$$

solutions :

$$\boxed{\frac{du}{d\theta} = 0} \quad u \text{ indépendant de } \theta. \quad r \text{ indépendant de } \theta.$$

Trajectoires circulaires.

$$\boxed{\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{GM}{c^2}} \quad \text{équation différentielle linéaire à coefficients constants.}$$

solution particulière : $u_{\text{par}} = \frac{GM}{c^2}$

solution générale de $\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = 0$: $u = A \cos(\theta - \varphi)$

solution de l'équation complète : $u = \frac{GM}{c^2} + A \cos(\theta - \varphi)$

$$\boxed{\frac{1}{r} = \frac{GM}{c^2} + A \cos(\theta - \varphi)}$$

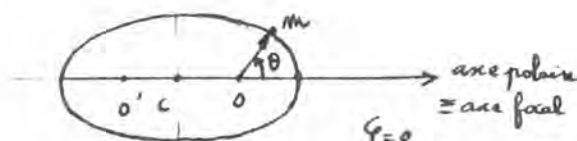
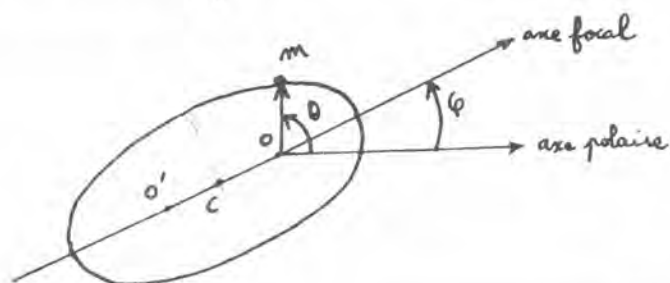
A, φ constantes déterminées par les conditions initiales.

on peut mettre cette expression sous la forme :

$$\boxed{r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \varphi)} \quad \text{avec } p = \frac{c^2}{GM} > 0 \text{ et } e = A p}$$

la trajectoire est une conique dont O (centre de force) est l'un des foyers et l'axe focal est la droite $\theta = \varphi$, p paramètre, e excentricité.

120 on fait en sorte que $\varphi = 0$ en choisissant l'axe polaire confondu avec l'axe des foyers.

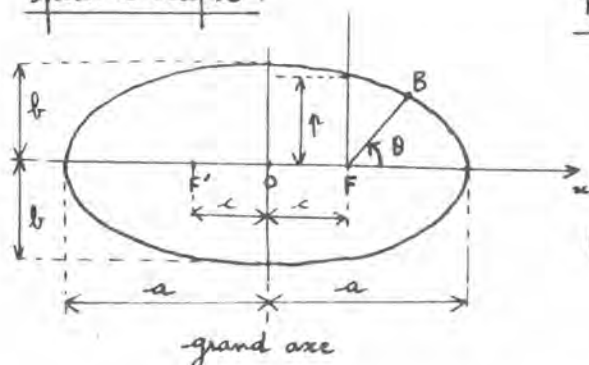


l'équation devient $r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$ équation de la trajectoire.

Rappels de quelques propriétés des cônes: cercle, ellipse, parabole, hyperbole.

$e = 0$ (cercle) $e < 1$ (ellipse) $e = 1$ (parabole) $e > 1$ (hyperbole)

pour l'ellipse:



F, F' foyers.

$$a^2 = c^2 + b^2$$

$$e = \frac{c}{a} < 1$$

$$p = \frac{b^2}{a} = a(1 - e^2)$$

(ellipse = ensemble des points B tels que $BF + BF' = 2a$).

remarque: l'équation de la cône est $r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$; on a vu que $p > 0$ et $e = A p$. Il se peut que A soit négatif donc e aussi. Comme on appelle e l'excentricité et que l'on veut que l'excentricité soit un nombre positif, il suffirait de changer l'axe polaire orienté par $\vec{i}$ par un axe polaire orienté par $\vec{j} = -\vec{i}$. (l'angle polaire α serait $\theta \pm \pi$)

il sera toujours possible par un bon choix de l'axe polaire.

- en direction.
- en orientation.

d'avoir pour équation de la cône $r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$ $p > 0$ $e > 0$

on a vu que $\frac{1}{2} m c^2 \left[\left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + u^2 \right] - GMm u = E_0 \quad u = \frac{1}{r}$

en utilisant $u = \frac{GM}{c^2} + A \cos \theta$ et $\frac{du}{d\theta} = -A \sin \theta$

il vient $\frac{1}{2} m c^2 \left[A^2 \sin^2 \theta + \frac{G^2 M^2}{c^4} + A^2 \cos^2 \theta + 2 \frac{GM}{c^2} A \cos \theta \right] - \frac{G^2 M^2 m}{c^2} - GMm A \cos \theta = E_0$

$$E_0 = \frac{1}{2} m c^2 A^2 - \frac{1}{2} \frac{G^2 M^2 m}{c^2} = \frac{1}{2} m c^2 \left(A^2 - \frac{G^2 M^2}{c^4} \right)$$

$E_0 = \frac{1}{2} (GMm) \frac{e^2 - 1}{p}$

 $p > 0.$

$e < 1$ ellipse $E_0 < 0$.

$e = 1$ parabole. $E_0 = 0$.

$e > 1$ hyperbole $E_0 > 0$.

$e = 0$ cercle $E_0 < 0$

CECI EST TRÈS IMPORTANT.

on peut retenir les expressions de E_0 dans le cas de l'ellipse et du cercle :

ellipse : $e = \frac{c}{a}$ $p = \frac{b^2}{a}$ $a^2 = c^2 + b^2$ d'où $p = a(1 - e^2)$

ellipse $E_0 = - \frac{GMm}{2a}$
 $a = \frac{1}{2}$ grand axe

relation importante.

l'énergie totale ne dépend que du grand axe de l'ellipse ($a = \frac{1}{2}$ grand axe), elle ne dépend pas de e .

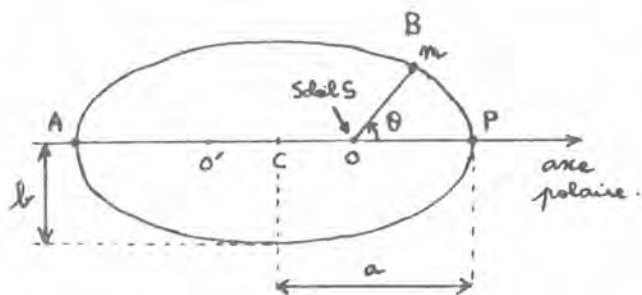
cercle : $e = 0$ $p = a$ (rayon du cercle).

cercle $E_0 = - \frac{GMm}{2a}$
 $a = \text{rayon}$

facile à retrouver par d'autres voies. (essayer, ceci est intéressant car c'est la même expression que pour une ellipse avec $a = \frac{1}{2}$ grand axe).

5) Mouvement elliptique :

il est important, il correspond au mouvement d'une planète autour du Soleil ; d'un satellite autour d'une planète.



l'aire de l'ellipse est $S = \pi a b$.

on a vu (moment cinétique, force centrale) que

$$\frac{dS}{dt} = \frac{C}{2} \text{ constante}$$

$\frac{dS}{dt}$ vitesse aéroilaire. dS aire balayée par le rayon vecteur $\overrightarrow{OB}$ en dt seconde.

$$dS = \frac{C}{2} dt \quad S = \frac{C}{2} \int_{t_0}^{t_0+T} dt = \frac{C}{2} T \quad (t_0 \text{ instant quelconque, } T \text{ période orbitale}).$$

$$\frac{S}{T} = \frac{\pi a b}{T} = \frac{C}{2} \quad \text{or} \quad p = \frac{b^2}{a} = \frac{C^2}{GM} \quad C = \sqrt{\frac{GM}{a}} b.$$

$$T = \frac{2\pi a b}{C} = \frac{2\pi a b}{\sqrt{\frac{GM}{a}} b} = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{GM}} \quad \boxed{T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{GM}}}$$

lois de Kepler: (référentiel d'étude $\equiv$ référentiel de Kepler).

I) Toutes les planètes décrivent une trajectoire elliptique dont le Soleil occupe un foyer.

II) Le rayon vecteur SB (Soleil-Planète) balaye des aires égales en des temps égaux. [loi des aires].

III) Les carrés des périodes ^{de révolution} sont proportionnels aux cubes des $\frac{1}{2}$ grands axes.

$$\frac{T_{\text{Terre}}^2}{a_{\text{Terre}}^3} = \frac{T_{\text{Mars}}^2}{a_{\text{Mars}}^3} = \frac{T_{\text{Jupiter}}^2}{a_{\text{Jupiter}}^3} = \dots = \frac{4\pi^2}{GM}$$

(cette 3^{ème} loi est déduite de l'expression $T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{GM}} \quad \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$)

	demi grand axe UA	période λ	excentricité	inclinaison	masse kg
Mercure	0,387	$7,60 \times 10^6$	0,205	$7^\circ 00'$	$3,28 \times 10^{23}$
Vénus	0,723	$1,94 \times 10^7$	0,006	$3^\circ 23'$	$4,83 \times 10^{24}$
Terre	1,000	$3,16 \times 10^7$	0,016	0°	$5,98 \times 10^{24}$
Mars	1,523	$5,94 \times 10^7$	0,093	$1^\circ 51'$	$6,37 \times 10^{23}$
Jupiter	5,202	$3,74 \times 10^8$	0,048	$1^\circ 18'$	$1,90 \times 10^{27}$
Saturne	9,554	$9,30 \times 10^8$	0,055	$2^\circ 29'$	$5,67 \times 10^{26}$
Uranus	19,218	$2,66 \times 10^9$	0,046	$0^\circ 46'$	$8,80 \times 10^{25}$
Neptune	30,109	$5,20 \times 10^9$	0,008	$1^\circ 46'$	$1,03 \times 10^{26}$
Pluton	39,60	$7,82 \times 10^9$	0,246	$17^\circ 7'$	$5,4 \times 10^{24}$

1 UA (unité astronomique) = $1,495 \times 10^{11} \text{ m}$.

le point P tel que $r = r_p = r_{\min} = \frac{r}{1-e}$ est le périhélie (périgée).

A tel que $r = r_A = r_{\max} = \frac{r}{1+e}$ est l'aphélie (apogée).

exercice: on appelle v_p le module de la vitesse au périhélie / Référentiel galiléen
 v_A ————— aphélie : d'étude

calculer $\frac{v_p}{v_A}$ en fonction de r_A et r_p . En quel point (A ou P) la vitesse est-elle la plus grande.



on utilise la conservation du moment cinétique :

$$\vec{r}_p \wedge m \vec{v}_p = \vec{r}_A \wedge m \vec{v}_A$$

Or A et P sont les 2 seuls points où $\vec{v} \perp \vec{r}$.

d'où $r_p m v_p = r_A m v_A$

$$\boxed{\frac{v_p}{v_A} = \frac{r_A}{r_p} > 1}$$

la vitesse au périhélie P est plus grande que la vitesse à l'aphélie A.

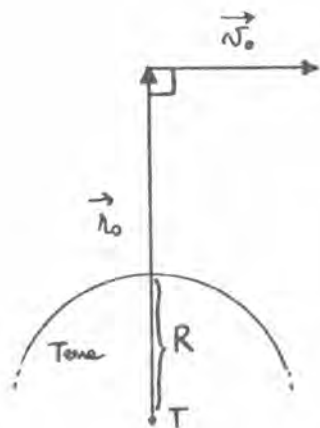
retrouver $r_A v_A = r_p v_p$ en utilisant la 2^{ème} loi de Kepler sur une même durée dt autour de A et P.

6) Lancement d'un satellite : (étude sommaire).

le référentiel d'étude est le référentiel géocentrique céleste supposé galiléen.

Après une phase de propulsion, la satellite est uniquement soumis à la force de gravitation due à la Terre (les actions des autres astres sont supposées négligeables).

Pour simplifier on suppose que la vitesse initiale $\vec{v}_0$ (juste quand la propulsion est terminée) est perpendiculaire au rayon vecteur $\vec{r}_0$.



$$E_0 = \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{GMm}{r_0}.$$

l'énergie mécanique restera constante et égale à E_0 .

le satellite ne doit pas s'éloigner indéfiniment ; sa trajectoire ne doit pas être une parabole ou une hyperbole (branche).

E_0 doit être négative. (ellipse ou cercle).

$$\frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{GMm}{r_0} < 0$$

$$v_0 < \sqrt{\frac{2GM}{r_0}}$$

$$v_L = \sqrt{\frac{2GM}{r_0}} \text{ s'appelle la vitesse de libération.}$$

exercice : calculer v_L si $r_0 \approx 6400 \text{ km}$ (voisinage du sol).

si $v_0 = v_L$ la satellite a une trajectoire parabolique.

$v_0 > v_L$ hyperbolique.

De plus il faut que $r_{\min} > R$ (rayon de la Terre)

sinon le satellite rencontrerait la Terre ; en réalité $r_{\min} = r_{\text{péigée}}$ doit être supérieur à $R + h$. ($h > 0$) afin que le satellite soit dans une zone où l'atmosphère est "très diluée" sinon il y aurait des frottements et le satellite retomberait très vite.

exercice : calculer v_0 en fonction de G, M, r_0 pour que la trajectoire du satellite soit un cercle de rayon r_0 .

réponse : $v_0 = \sqrt{\frac{GM}{r_0}}$

* lois de conservation:

énergie: $\frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - G \frac{Mm}{r} = E_0$

moment cinétique: $m r^2 \dot{\theta} = m C$ ou $r^2 \dot{\theta} = C$ (constante des aires)

* le mouvement est plan ($\vec{OM}_0, \vec{v}_0$) et garde toujours le même sens.

* équation de la trajectoire: $r = \frac{r}{1 + e \cos \theta}$

$0 < e < 1$ ellipse E_0 négative $E_0 = -\frac{GMm}{2a}$ a : $\frac{1}{2}$ grand axe

$e = 1$ parabole $E_0 = 0$

$e > 1$ hyperbole E_0 positive

$e = 0$ cercle E_0 négative $E_0 = -\frac{GMm}{2a}$ a : rayon du cercle

* on peut aussi retenir les 3 lois de Kepler.

Il faut savoir transposer à l'interaction électrostatique.

$\vec{f} = -G \frac{Mm}{r^2} \vec{u}$
 $\vec{f} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}$ q_1, q_2 algébriques
 $-GMm \longleftrightarrow \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0}$

2 exemples:
 1. $q_1 < 0, q_2 > 0$ (attraction)
 2. $q_1 > 0, q_2 > 0$ (répulsion)

$-G$	$\longleftrightarrow$	$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$
m	$\longleftrightarrow$	q

$E_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r}$

l'hypothèse de départ $\text{masse de l'une des charges} \ll \text{masse de l'autre charge}$ doit encore être vérifiée.

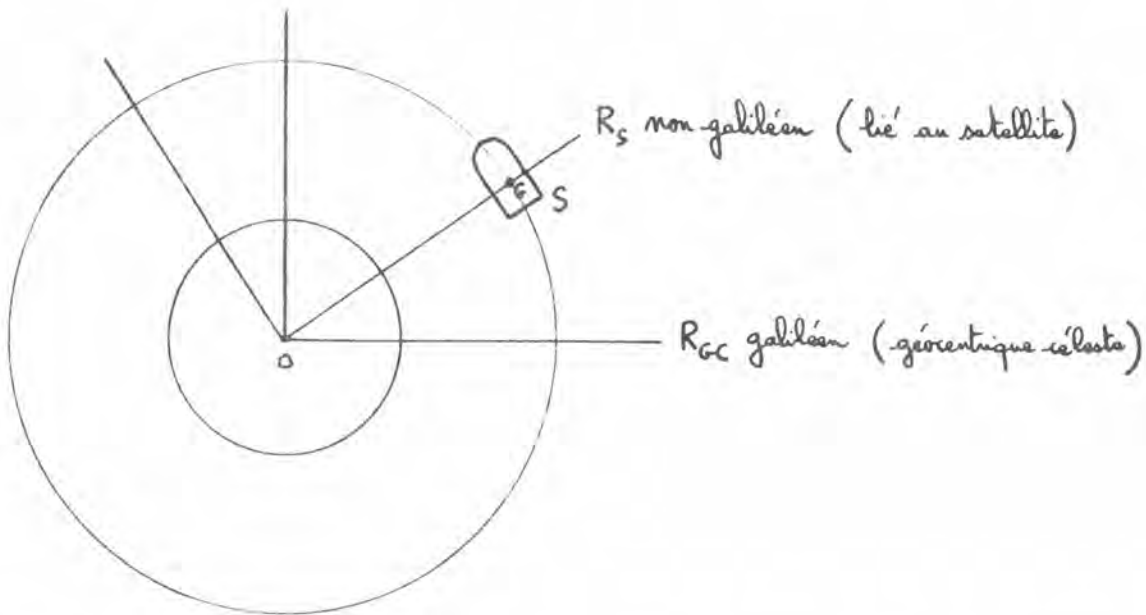
126 8) Impresanteur (apésanteur): voir bulletin de l'union des physiciens (BUP n° 593 Avril 1977 JP Sarmant).

rappel: théorème du centre d'inertie pour un solide. (terminale)

R galiléen $m \vec{a}_G = \vec{F}$

G centre d'inertie :

$\vec{F}$ somme vectorielle des forces exercées sur le solide (extérieures).



Satellite de masse totale M , de centre de masse G (centre de masse du satellite + chargement).

on a m

Soit un petit solide de masse m placé en G , accroché à un ressort, immobile par rapport à R_S non galiléen.

la condition d'équilibre de m par rapport à R_S non galiléen s'écrit

RFD dans R_S : $\vec{T} + m \vec{A}_G + \vec{f}_e + \vec{f}_c = m \vec{a}_{G/R_S}$ (mouvement)

qui se réduit pour l'équilibre à :

$$\boxed{\vec{T} + m \vec{A}_G + \vec{f}_e = \vec{0}} \quad (\vec{f}_c = \vec{0} \text{ et } \vec{a}_{G/R_S} = \vec{0})$$

$\vec{T}$: force exercée par le ressort sur le petit solide. $m \vec{A}_G$: force de gravitation
 $\vec{f}_e$ pseudo force d'inertie d'entraînement.

$\vec{A}_G$ champ de gravitation ^{en G} dû à tous les astres, mais principalement dû à la Terre. 127

$$\vec{f}_e = -m \vec{a}_e(G) = m \omega^2 \vec{OG} \quad (\text{pseudoforce centrifuge})$$

on dira qu'il y a impesanteur en G si le ressort n'est pas allongé, s'il garde sa longueur à vide l_0 . on encore $\|\vec{T}\| = k \|l - l_0\| = 0$, on peut dire alors que le ressort ne sert à rien, on pourrait le supprimer, m "flotte" en G.

la condition d'impesanteur en G s'écrit $\vec{0} + m \vec{A}_G + \vec{f}_e = \vec{0}$,
 $m \vec{A}_G - m \vec{a}_e(G) = 0$ soit $\boxed{\vec{A}_G = \vec{a}_e(G)}$

Si on applique le théorème du centre de masse au satellite et à son chargement:

dans R_{Gc} galiléen: $M \vec{a}_G = M \vec{A}_G + \vec{F}$.
 $\vec{a}_G$ accélération de G / R_{Gc} galiléen.

- on fait l'hypothèse que $\vec{A}$ (pour tous les points matériels du satellite) $\approx \vec{A}_G$.
- $\vec{F}$ somme vectorielle de toutes les forces autres que celles de gravitation.

Or: $\vec{a}_e(G) = \vec{a}_G$ (voir la définition de l'accélération d'entraînement)

$$\left. \begin{array}{l} \vec{A}_G = \vec{a}_e(G) \\ \vec{a}_e(G) = \vec{a}_G \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{A}_G = \vec{a}_G \quad M \vec{A}_G = M \vec{a}_G + \vec{F} \text{ d'où } \boxed{\vec{F} = \vec{0}}$$

Résultat: Il y a impesanteur au centre de masse d'un véhicule (+ chargement) soumis exclusivement aux forces de gravitation

Nous admettons les résultats suivants : (justification BUP N° 593)

En dehors de G , il y a impesanteur approchée dans tout le volume du satellite. Si la durée d'une expérience est petite devant la période de révolution du satellite, les "écarts à l'impesanteur" sont négligeables.

L'impesanteur dépend uniquement de la nature du mouvement du véhicule et pas de la plus ou moins grande proximité des astres.

Par exemple il n'y a pas impesanteur en un point d'équigravité ($\vec{A} = \vec{0}$) si les moteurs fonctionnent ($\vec{F} \neq \vec{0}$).

Il y a impesanteur au voisinage d'un astre si le véhicule est en chute libre $\vec{F} = \vec{0}$.

Remarque : ces résultats peuvent être en contradiction avec ce qu'on peut lire parfois : vulgarisation, bandes dessinées etc...

① Dans le livre "Dialogues sur deux sciences nouvelles" Galilée écrit cette proposition : quand on lance un projectile avec un certain angle α par rapport au plan horizontal, on obtient des portées égales lorsqu'on s'écarte en plus ou en moins d'une quantité égale à partir de l'angle $\alpha = 45^\circ$. Démontrer cette proposition.

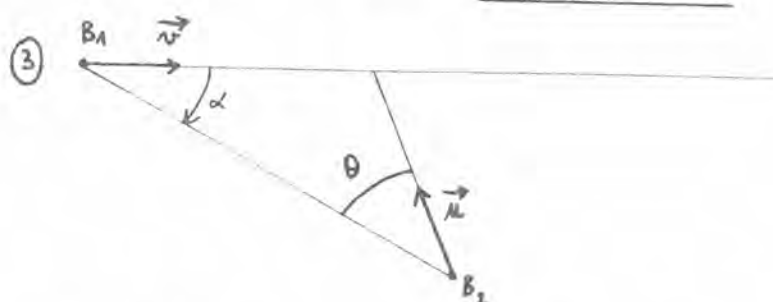
② Répondre par vrai ou faux, donner des exemples.

A) un point matériel peut avoir un mouvement curviligne plan même si son accélération garde toujours la même direction.

B) un point matériel peut avoir une accélération non nulle en un instant où sa vitesse est nulle.

C) un point matériel peut avoir une vitesse dont la direction change quand son accélération est constante.

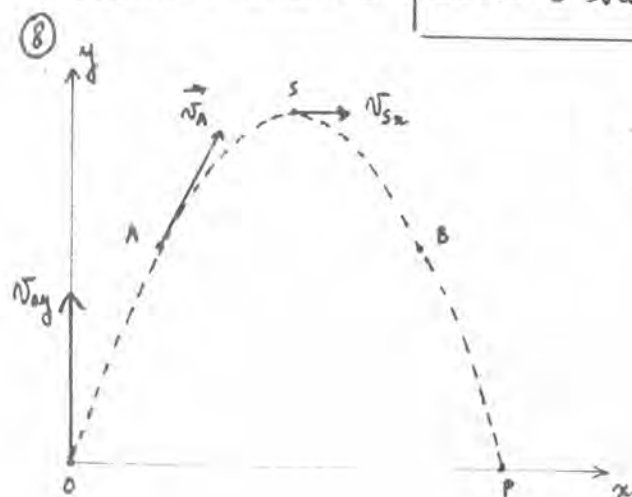
D) un point matériel peut voir varier la direction de son accélération quand la direction de sa vitesse reste constante.



2 billes B_1 et B_2 se déplacent sur un plan horizontal.

la bille B_1 a un mouvement rectiligne uniforme ($\vec{v}$) par rapport au plan. On lance la bille B_2 depuis un point de la droite $B_1 B_2$ tel que $(\vec{v}, \vec{B_1 B_2}) = \alpha$. B_2 est animée d'un mouvement rectiligne uniforme ($\vec{u}$) par rapport au plan. Calculer θ en fonction de u, v, α pour que B_2 rencontre B_1 .

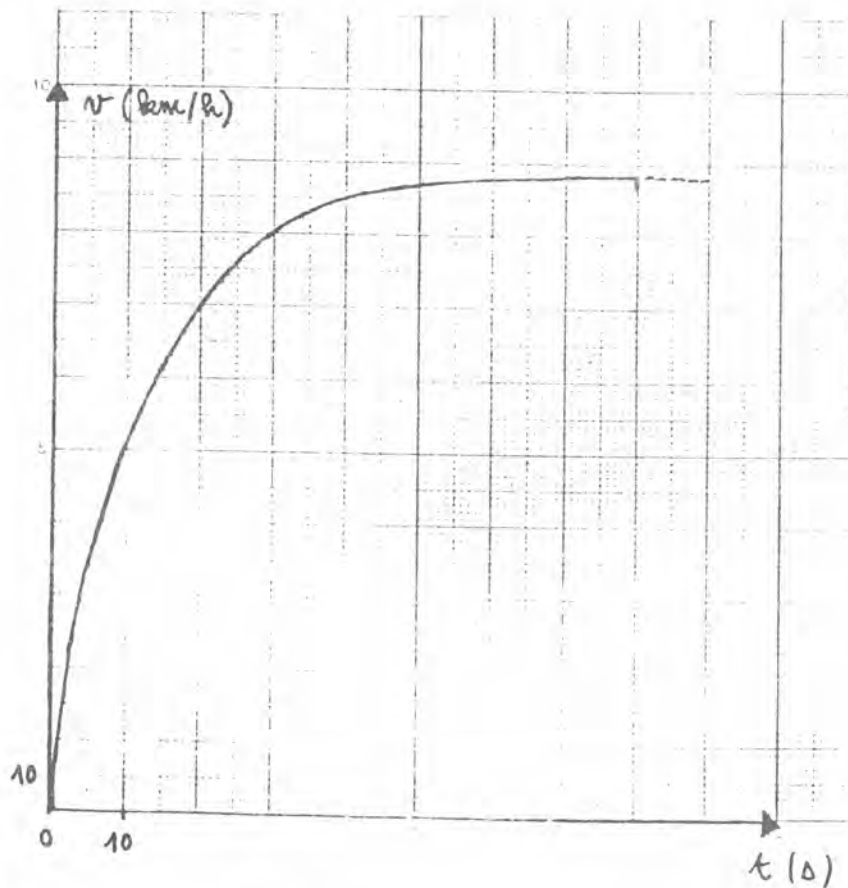
- ④ Les gouttes de pluie tombent selon la verticale avec une vitesse de 8 m.s^{-1} (par rapport au sol). Avec quelle vitesse V par rapport à la voiture frappent elles le pare brise d'une voiture roulant à 50 km/h (par rapport au sol) sur une route rectiligne horizontale :
-
- ⑤ Un train voyage à une vitesse de 25 m.s^{-1} vers le Sud. La pluie poussée par un vent orienté vers le Sud fait un angle de $21,6^\circ$ avec la verticale mesuré par un observateur lié au sol. Pour un passager du train, la pluie semble tomber verticalement. Quelle est la vitesse de la pluie par rapport au sol.
-
- ⑥ Un jeune garçon s'amuse à faire tourner une pierre au bout d'une corde de $1,2 \text{ m}$ dans un plan horizontal à une hauteur de $1,8 \text{ m}$ au dessus du sol. La vitesse devenant trop grande, la corde se brise et la pierre part horizontalement pour tomber $9,1 \text{ m}$ plus loin. Quelle était l'accélération centripète au moment de la rupture.
-
- ⑦ 2 bateaux traversent une rivière de largeur a , leur vitesse par rapport à l'eau a pour module v (constant). La vitesse du courant est $\vec{V}$. Le premier emprunte le chemin le plus court, le second met le temps le plus court possible. Comparer les durées mises à traverser la rivière par les 2 bateaux.
-



trajectoire d'une balle en chute libre avec vitesse initiale $\vec{v}_0$.

Dessiner $\vec{v}_0, \vec{v}_A, \vec{v}_P, \vec{v}_S$

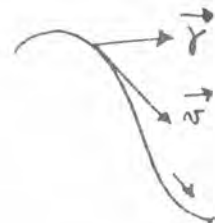
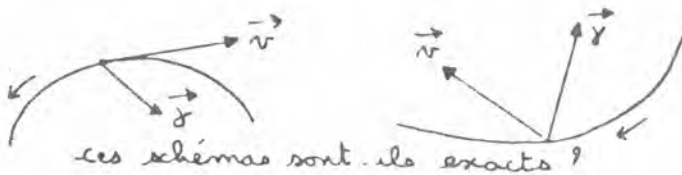
(9)



le graphique est le diagramme de la vitesse obtenue lors des essais d'un véhicule de masse 1300 kg.

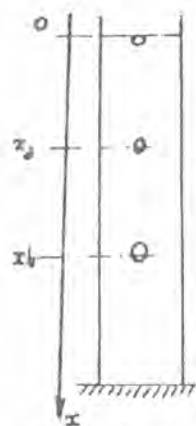
- 1) Déterminer la distance nécessaire pour atteindre la vitesse maximale.
- 2) Evaluer la somme des forces extérieures agissant sur le véhicule à $t = 5\text{ s}$; $t = 20\text{ s}$; $t = 80\text{ s}$

(10)



Un enfant attache 2 cailloux de même masse au milieu et à l'extrémité d'une ficelle. Il les fait tourner dans un plan horizontal au dessus de sa tête en tenant la ficelle par son autre extrémité.

Si la ficelle est trop fragile cassera-t-elle d'abord entre la main de l'enfant et le premier caillou, ou entre les 2 cailloux ?

VISCOSIMETRIE A CHUTE :

Une bille en acier [rayon r , volume $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, masse volumique ρ] est lâchée sans vitesse initiale dans un tube en verre cylindrique contenant de la glycérine [masse volumique ρ_0]. En plus de son poids, la bille est soumise à 2 autres forces : la force de viscosité de module $6\pi\eta r v$ [η coefficient de viscosité de la glycérine, v vitesse de la bille à l'instant t], la poussée d'Archimède.

- 1) Dessiner ces 3 forces
- 2) Montrer que la vitesse de la bille est de la forme $v(t) = C(1 - e^{-kt})$ [préciser l'instant initial]

Dessiner l'allure de la courbe représentative de $v(t)$. Expression littérale de la vitesse limite V_ℓ atteinte par la bille ?

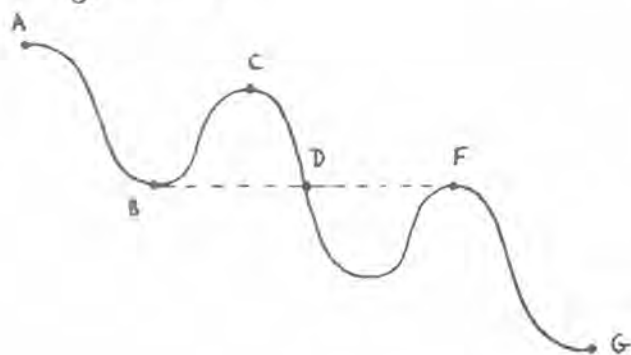
- 3) La vitesse limite n'est théoriquement atteinte qu'au bout d'un temps infini, en pratique on peut considérer que v atteint la valeur V_ℓ au bout d'un temps fini (on justifiera dans la question suivante)

La vitesse limite étant supposée atteinte, on mesure avec un chronomètre la durée de chute Δt entre 2 points d'abscisses x_a et x_b ($\Delta x = x_b - x_a$)

Expression littérale de η ? AN : $\rho = 7,8 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ $\rho_0 = 1,26 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$
 $\Delta x = 12 \text{ cm}$ $\Delta t = 9 \text{ s}$ $r = 1 \text{ mm}$ Calculer η .

- 4) Au bout de combien de temps la vitesse de la bille v est égale à $0,99 V_\ell$

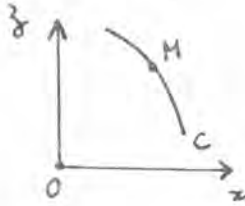
(12) Montagnes russes :



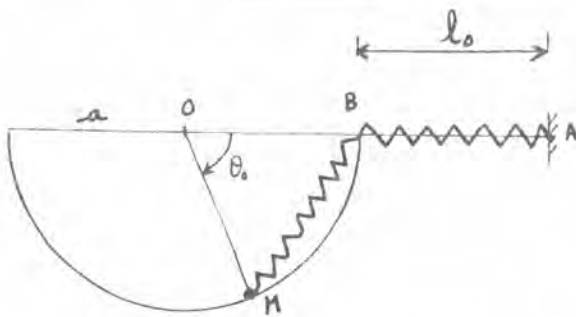
Un chariot est abandonné sans vitesse initiale en A, il n'y a pas de frottement.

- 1) en le(s) quel(s) des points B, C, D, F la vitesse est-elle la plus grande ? la plus petite ?
- 2) en B un passager subit en plus de son poids une force pointant vers le haut, le bas, nulle.
- 3) en quel point le passager court-il le plus grand risque d'être éjecté ?

- (13) Un anneau, assimilable à un point matériel de masse m peut se déplacer sans frottement sur un fil d'acier C contenu dans un plan vertical. Il est soumis en plus des autres forces à la force $\vec{f} = -\lambda \vec{OM}$ ($\lambda > 0$). Déterminer C pour que l'équilibre soit réalisé partout.



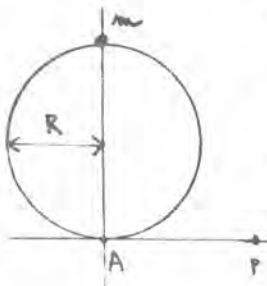
(14)



Un point matériel de masse m est solidaire d'une rigole circulaire sur laquelle il peut glisser sans frottement. MBA élastique de raideur k et de longueur à vide l_0 .

Déterminer la position d'équilibre θ_0 et étudier les petites oscillations autour de cette position d'équilibre.

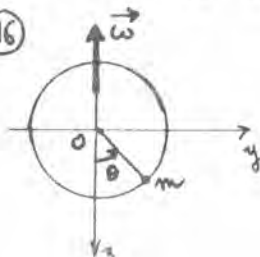
(15)



Un point matériel de masse m , en équilibre instable au sommet d'une sphère quitte cette position sans vitesse initiale appréciable et glisse sur la sphère. Montrer que en l'absence de frottement elle quitte la sphère en une position que l'on demande de déterminer.

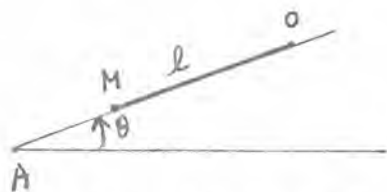
Déterminer la distance $AP \approx P$ point d'impact au sol.

(16)

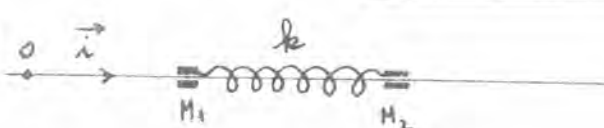


Un cercle (O, R) tourne à ω constante autour d'un diamètre vertical. Un anneau de masse m peut coulisser sans frottement sur ce cercle. Déterminer ses positions d'équilibre (/cercle) et discuter leur stabilité.

- (17) Un pendule simple de longueur l a son extrémité O fixée sur un plan incliné d'angle θ . A l'autre extrémité M on a disposé une masse ponctuelle m . Le contact avec le plan incliné est sans frottement. Le pendule a un mouvement oscillatoire d'amplitude faible α_0 .



- 1) Calculer ω pulsation des petites oscillations.
- 2) Calculer l'énergie mécanique E du point matériel en fonction de θ , m , g , l , $D = AO$ et α_0 .

- (18)  2 points matériels M_1 et M_2 de

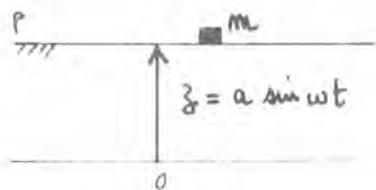
masse m_1 et m_2 sont reliés par un ressort de raideur k et de longueur naturelle a . L'ensemble peut glisser sans frottement sur une tige horizontale fixe dans un référentiel galiléen.

Établir une équation différentielle $a \ddot{u} + b u = -c$

$u = \overline{M_1 M_2}$; a, b, c constantes à déterminer.

Décrire le mouvement du système les conditions initiales étant quelconques. (rappel : pour un système matériel $M \vec{a}_G = \sum \vec{f}_{\text{extérieures}}$ G centre de masse de système).

(19)

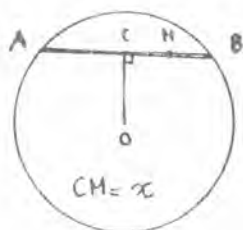


masse m est posée sur P .
ne quitte jamais P .

le plateau P horizontal est animé d'un mouvement sinusoïdal vertical d'amplitude a , de fréquence f . Un point matériel de

Exprimer une condition sur f pour que m

- ②0 La terre est une sphère homogène (O, R) . g_0 accélération de la pesanteur au sol. $R = 6400 \text{ km}$. $g_0 = 9,8 \text{ m s}^{-2}$. On ne tient pas compte de la rotation de la terre.

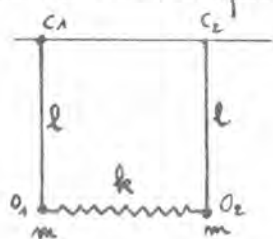


on donne $g(M) = g_0 \frac{r}{R}$ ($r = OM$.)

On relie 2 villes A et B par un tunnel rectiligne AB. C milieu de AB. Un train assimilable à un point matériel M se déplace sans frottement dans le tunnel.

- 1) étudier le mouvement de M abandonné sans vitesse initiale en A. Comparer la période T de ce mouvement avec celle T_0 d'un satellite d'orbite circulaire d'altitude négligeable. AN: durée du trajet AB, T_{AB} ?
- 2) $AB = d = 400 \text{ km}$. Calculer la vitesse maximale du train.

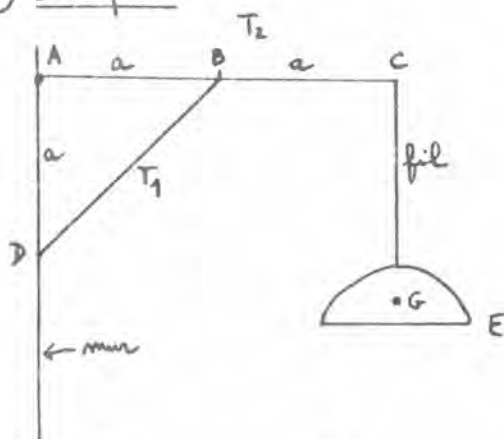
②1 oscillations couplées



2 pendules simples de masse m et de longueur l sont liés comme l'indique la figure par un ressort de raideur k . La longueur du ressort à vide est égale à O_1O_2 .

- 1) équations du mouvement de ①, de ②.
- 2) étudier les oscillations de faible amplitude.

②2 statique:



une enseigne E de poids 600 N est fixée à un mur vertical à l'aide du dispositif schématisé ci contre.

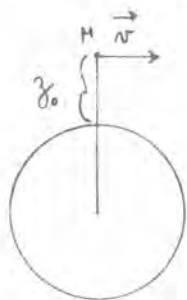
T_2 est une barre horizontale articulée en A. La barre T_1 est articulée en D et B. L'enseigne de centre de masse G est suspendue à un fil parfait. Fil et barres ont un poids négligeable devant celui de l'enseigne.

- 1) Déterminer $\vec{F}_{\text{mur}/T_2}$, $\vec{F}_{\text{mur}/T_1}$, $\vec{F}_{\text{fil}/T_2}$. On n'utilisera pas le théorème des moments.
- 2) Même question en utilisant le théorème des moments.

②③ comète: la Terre décrit autour du Soleil une orbite circulaire (/ R_{Kepler}) de rayon a avec une vitesse $u = 30 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$. La comète de 1843 est passée au périhélie $r_p = SP = 5,53 \cdot 10^{-3} a$.

- 1) On considère que l'orbite de la comète est une parabole, calculer la vitesse v_p de la comète en P.
- 2) En réalité l'orbite est une ellipse très aplatie d'excentricité $e = 1 - x$ avec $x = 8,5 \cdot 10^{-5}$. Exprimer en fonction de a la distance aphélie $r_A = SA$ de la comète. Calculer v_A . En quelle année la comète repassera-t-elle près du soleil?

②④ erreur de satellisation: la Terre est un axe à symétrie sphérique de centre O, de rayon $R = 6400 \text{ km}$. On veut mettre sur orbite un satellite sur un cercle de rayon $r_0 = R + z_0$ ($z_0 = 300 \text{ km}$) en donnant à un satellite amené au point M d'altitude z_0 la vitesse horizontale $\vec{v}$. (/ référentiel géocentrique céleste galiléen).



- 1) Quelle doit être la valeur v_0 à donner à v .
Quelle est la période T_0 du satellite.

- 2) On commet une erreur relative $\Delta v/v_0 = 10^{-4}$ sur la norme de v .

a) M est-il le périhélie, l'apogée? b) calculer $z_A - z_P$. c) calculer $\Delta T = T - T_0$.
On donne $g_0 = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

A partir de la période T et du rayon r de l'orbite de la lune autour de la terre, déterminer la masse de la terre. $T = 27,3 \text{ d}$

$$r = 3,85 \cdot 10^5 \text{ km} \quad G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$$