

$\alpha = 0$, c'est à dire $L\omega = 1/C\omega$. On constate que la résonance se produit pour la valeur de ω correspondant à la fréquence caractéristique ω_0 du circuit (cf § VI.4).

UNIVERSITÉ
DE NANCY I
CENTRE
DE TÉLÉ-ENSEIGNEMENT
UNIVERSITAIRE
DE NANCY II

A la résonance le courant et la f.e.m $\mathcal{E}$ sont en phase, et l'intensité du courant a sa valeur maximale.

VI.6 Induction mutuelle

Sont deux circuits (1) et (2) représentés à la fig. 6.10. Si un courant I_1 circule dans le circuit (1), il crée un champ magnétique $\vec{B}_1$, proportionnel (en module) à I_1 dans l'espace qui l'entoure et on peut calculer le flux de $\vec{B}_1$ à travers le circuit (2) :

$$\Phi_{1/2} = M I_1$$

où M est un coefficient de proportionnalité, qui ne dépend que des caractéristiques géométriques des circuits (1) et (2) et de leur position relative.

physique

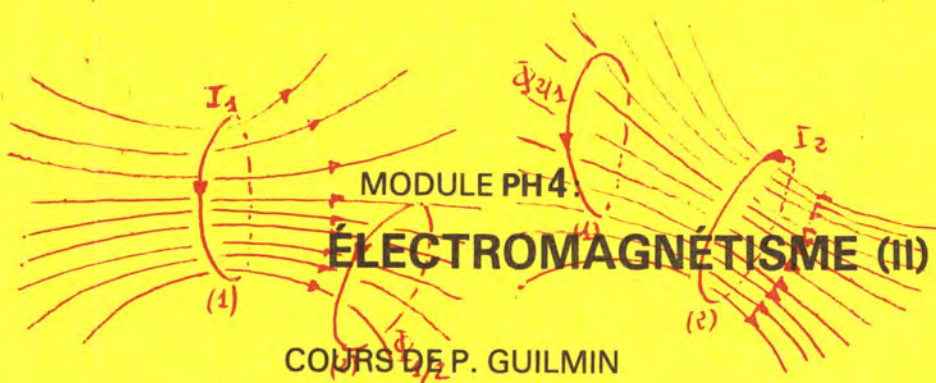


Fig 6.10

Inversement, si un courant I_2 parcourt le circuit (2), il crée dans tout l'espace le champ $\vec{B}_2$, proportionnel (en module) à I_2 , et le flux de ce champ à travers le circuit (1) sera égal à :

$$\Phi_{2/1} = M I_2$$

On remarque qu'on utilise le même coefficient M dans les expressions de $\Phi_{1/2}$ et $\Phi_{2/1}$. Ce coefficient est l'inductance mutuelle des deux circuits et s'exprime (comme l'auto-inductance) en henry.

DIPLÔME D'ÉTUDES UNIVERSITAIRES GÉNÉRALES
SCIENCES DES STRUCTURES ET DE LA MATIÈRE
MATHÉMATIQUES PHYSIQUE INFORMATIQUE
SCIENCES DE L'ÉDUCATION

Si le courant I_1 varie au cours du temps le flux $\Phi_{1/2}$ change et une f.e.m induite apparaît dans le circuit (2).

Introduction

Le module PH 4 - Electromagnetisme (2^{em} partie) est la suite du module PH 3. Il ne peut donc être abordé qu'après l'étude du module PH 3. Le lecteur constatera d'ailleurs ~~par~~ des renvois très fréquents au contenu du polycopié PH 3. Pour cette raison et afin d'éviter toute confusion, la numérotation des chapitres fait suite à celle du module PH 3.

Dans le chapitre V nous étendrons l'étude du champ électrique et du champ magnétique au cas des phénomènes dépendant du temps. Nous définirons ainsi le champ électromagnétique et nous montrerons que les propriétés de ce champ sont résumées dans les relations ou équations de Maxwell (sous forme intégrale ou sous forme locale).

La suite du module sera consacrée à l'application des résultats obtenus précédemment à quelques situations physiques importantes.

- l'étude des circuits électriques en régime variable (Chapitre VI) qui prolonge l'électrocinétique étudiée auparavant
- l'étude du champ électromagnétique dans la matière (Chapitre VII) limitée à une approche qualitative des différents comportements de la matière
- l'étude de la propagation des ondes dans le vide (Chapitre VIII), qui est à la base de l'optique, mais aussi qui permet de comprendre des phénomènes tels que les ondes radio, les rayons X,

Volontairement, le polycopié est limité à l'essentiel. Quelques exercices d'application sont proposés à la fin de chacun des chapitres et le lecteur intéressé pourra se reporter à d'autres ouvrages, notamment

- Physique MP-PC 2^{ème} année Electromagnétisme (fascicule 1 et 2) Collection "Des Cours aux Applications" par M. HULIN (Edition A Colin)

- Physique Générale, Tome II (Champs et Ondes) de A. ALONSO et E. J. FINN (Editions Intirection)

Le fascicule se termine par deux annexes qui ouvrent des perspectives d'étude plus approfondies de l'électromagnétisme. Le lecteur aura-t-il encore le courage de les apprécier ?

Enfin, l'utilisation des outils mathématiques a été limitée aux notions indispensables (gradient, divergence, rotationnel, Laplacien). Le lecteur est invité à se rapporter à l'annexe du polycopié PH3 pour une présentation de ces notions.

Chapitre V. le champ électromagnétique

Dans le module PH 3, nous avons étudié les champs électrique et magnétique indépendants du temps, c'est à dire statiques. Ce chapitre sera consacré à l'étude de ces champs dépendant du temps.

Nous venons dans ce chapitre que la présence d'un champ magnétique variable impose la présence d'un champ électrique, et que réciproquement la présence d'un champ électrique variable impose la présence d'un champ magnétique. Les lois qui décrivent ces deux situations sont appelées les lois de Faraday - Henry d'une part, loi de Maxwell - Ampère d'autre part.

V.1 loi de Faraday - Henry.

L'un des phénomènes de l'électromagnétisme couramment observé est celui de l'induction électromagnétique, découvert presque simultanément et de manière indépendante (vers 1830) par M. Faraday et par J. Henry. C'est le phénomène qui est à la base du fonctionnement des générateurs électriques, des transformateurs, ...

Supposons qu'un conducteur électrique formant un circuit fermé soit placé dans une région de l'espace où règne un champ magnétique $\vec{B}$. Si le flux magnétique Φ_m de $\vec{B}$ à travers le circuit fermé varie avec le temps, on observe le passage d'un courant dans le conducteur pendant l'intervalle de temps où Φ_m varie. La présence de ce courant indique l'existence d'une force électromotrice agissant sur le courant; on dit alors qu'il s'agit d'une f.e.m. induite par la variation de Φ_m (d'où le nom du phénomène d'induction).

La mesure de cette f.e.m. induite montre qu'elle est proportionnelle

à la vitesse de variation du flux magnétique $d\Phi_m/dt$. De plus la direction dans laquelle agit la f.e.m. varie suivant que le champ magnétique est croissant ou décroissant. Ces résultats sont illustrés par la figure 5.1

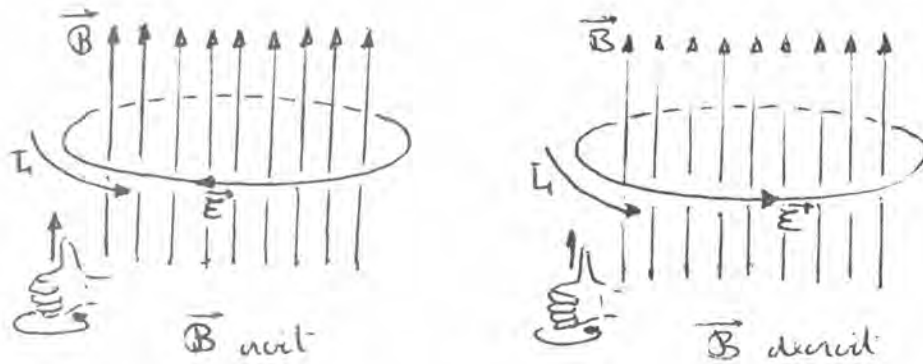


Fig. 5.1

Ici le contour L a été orienté dans le même sens que les doigts de la main droite, le pouce pointant dans la direction du champ magnétique $\vec{B}$. Si le flux magnétique de $\vec{B}$ à travers L augmente, c'est à dire si $d\Phi_m/dt$ est positif, la f.e.m. induite V agit dans le sens négatif (direction de $\vec{E}$ opposée au sens positif choisi pour orienter le contour L). Inversement si $\vec{B}$ décroît, c'est à dire si le flux de $\vec{B}$ à travers L diminue ($d\Phi_m/dt$ négatif) la f.e.m. induite agit dans le sens positif. Nous pouvons donc écrire

$$V = - \frac{d\Phi_m}{dt} \quad [5.1]$$

où V est la f.e.m. induite exprimée en Volts, Φ_m le flux magnétique exprimé en WÉBER

Rappel $1 \text{ Weber} = 1 \text{ Tesla} \times 1 \text{ m}^2$

La relation [5.1] exprime la loi de Faraday - Henry.

Dans un champ magnétique variable, une f.e.m. est induite dans tout circuit fermé; elle est égale à la dérivée par rapport au temps, changée de signe, du flux magnétique à travers le circuit

Remarque le signe - apparaissant dans [5.1] peut s'expliquer à l'aide

de la conservation de l'énergie. En effet si le signe de la f.e.m. induite est le même que celui de $d\Phi_m/dt$, le champ magnétique produit par le courant généré par V tendrait à faire varier Φ_m dans le même sens, contribuant ainsi à l'augmentation de V et ainsi de suite... Une faible variation de Φ_m amorçant ainsi une "réaction en chaîne", et la faible quantité d'énergie nécessaire à cette faible variation initiale de Φ_m engendrerait une forte variation de l'énergie magnétique du système, ce qui est contraire au principe de conservation de l'énergie.

On dira souvent que la f.e.m. induite crée un courant qui sera tel que le flux du champ magnétique associé à ce courant à travers le circuit s'opposera à la variation de flux qui lui a donné naissance.

Forme intégrale de la loi de Faraday - Henry

Si on divise la surface limitée par le contour L en éléments de surface infinitésimaux, dS , orientés chacun suivant la règle de la main droite (fig 5.2)

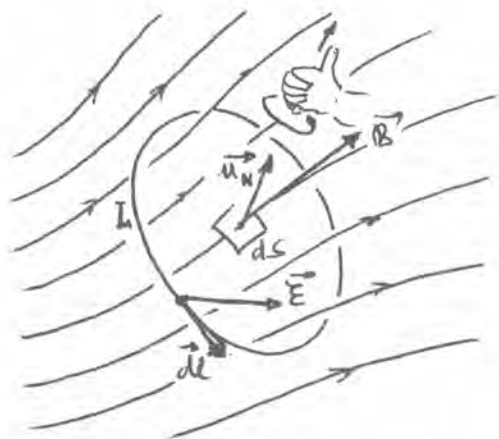


Fig. 5.2

le flux magnétique à travers le contour L , s'écrit (cf § IV 11)

$$\Phi_m = \iint_S (\vec{B} \cdot \vec{u}_n) dS$$

En même temps la f.e.m. induite V implique l'existence d'un champ électrique $\vec{E}$ tel que (cf § I 6)

$$V = \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

La relation [5.1] peut donc s'écrire

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \iint_S (\vec{B} \cdot \vec{u}_n) dS \quad [5.2]$$

la relation [5.2] qui associe le champ $\vec{E}$ à la variation de $\vec{B}$ donne

une vision plus approfondie du phénomène d'induction électromagnétique, à savoir le fait qu'il doit exister un champ électrique chaque fois qu'un champ magnétique varie avec le temps. Le champ électrique peut être déterminé en mesurant son action sur une charge au repos dans la région où varie le champ magnétique.

Exemple Soit une région de l'espace où existe un champ magnétique parallèle à la direction Oz dont le module varie avec le temps (on suppose que ce module est le même en tout point de l'espace). Quel est le champ $\vec{E}$ induit ?

La symétrie du problème suggère de prendre pour contour L_1 un cercle situé dans un plan perpendiculaire à Oz dont le centre est situé sur Oz (fig 53).

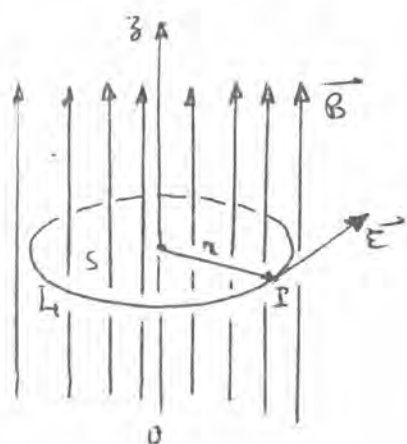


Fig. 53

Comme Oz est axe de symétrie, on cherche pour $\vec{E}$ au point P un vecteur normal à r et à $\vec{B}$.

La f.e.m. induite V est alors égal à

$$V = \oint_{L_1} \vec{E} \cdot d\vec{l} = E(r) 2\pi r$$

Le flux de $\vec{B}$ à travers le disque limité par L_1 est égal à

$$\Phi_m = \iint_S (\vec{B} \cdot \vec{u}_n) dS = \|\vec{B}\| \pi r^2$$

La relation [5.2] permet de connaître $E(r)$, module de $\vec{E}$ à une distance r de Oz :

$$E(r) = - \frac{1}{2} r \frac{d\|\vec{B}\|}{dt}$$

V.2 Induction électromagnétique due au mouvement relatif d'un conducteur et d'un champ magnétique

Supposons maintenant que le champ $\vec{B}$ ne varie pas au cours du temps, mais que le contour L_1 se déplace ou se déforme.

Etudions le cas simple (fig 5.4) d'un circuit conducteur PQRS dont la portion PQ peut se déplacer parallèlement à elle-même à la vitesse $\vec{v}$. Le champ $\vec{B}$ est supposé uniforme dans l'espace et ne variant pas au cours du temps.

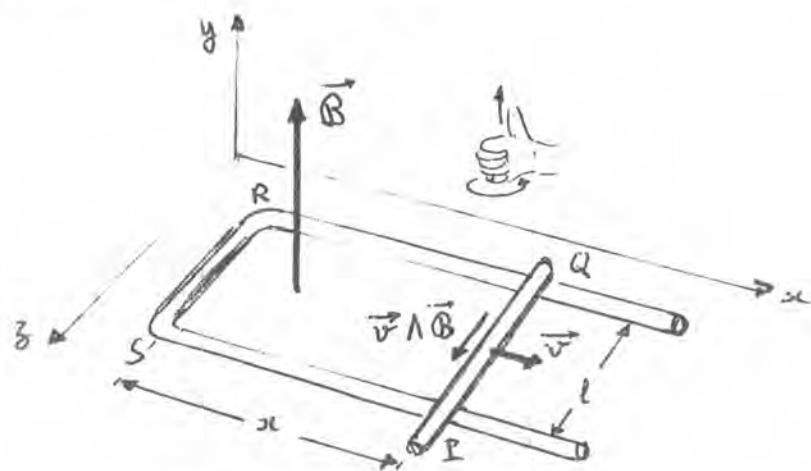


Fig. 5.4.

Une charge q située dans la portion PQ du circuit subit la force $q \vec{v} \wedge \vec{B}$ (cf § IV.2)

On peut considérer que cette même force est due à l'existence d'un champ électromoteur $\vec{E}_{eq}$ et on a

$$q \vec{E}_{eq} = q \vec{v} \wedge \vec{B}$$

Comme $\vec{v}$ et $\vec{B}$ sont perpendiculaires, la relation précédente devient

$$E_{eq} = v B$$

où E_{eq} , v , B sont les modules des vecteurs considérés

Si on calcule le flux de $\vec{B}$ à travers le circuit PQRS on voit aisément

que
$$\Phi_m = \iint_S (\vec{B} \cdot \vec{u}_n) dS = B l x$$

La variation de ce flux au cours du temps sera donc égale à

$$\frac{d\Phi_m}{dt} = B l \frac{dx}{dt} = B l v$$

Donc $\frac{d\Phi_m}{dt} = E_{eq} l$ que représente la circulation de $\vec{E}$ le long de QP (et non de PQ voir le sens de $\vec{E}_{eq}$)

Comme les portions QR, RS et SP du circuit sont fixes, la seule différence de potentiel qui apparait est celle entre P et Q et la circulation de $\vec{E}$ le long de QP peut représenter la circulation de $\vec{E}$ le long du circuit fermé. On retrouve ainsi la loi de Faraday-Henry.

On notera que lorsque la barre PQ se déplace vers les x croissants, le flux de $\vec{B}$ à travers le circuit augmente, que le contour L a été orienté positivement dans le sens PQRS, mais que le champ $\vec{E}_{eq}$ est dirigé en sens inverse. On retrouve le signe - de la relation [5.1]

Preons un second exemple: soit un circuit rectangulaire tournant dans un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme avec la vitesse angulaire ω (fig 5.5). Quand la normale $\vec{u}_N$ fait avec le champ $\vec{B}$ un angle $\theta = \omega t$, les points de

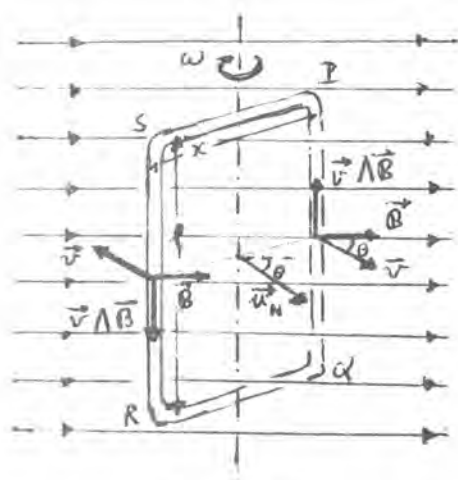


Fig. 5.5

PQ se déplacent tous avec la vitesse $\vec{v}$, telle que le champ électromoteur équivale à

$$\vec{E}_{eq} = \vec{v} \wedge \vec{B}$$

soit dirigé de Q vers P (cf exemple précédent) et ait pour module

$$E_{eq} = v B \sin \theta$$

(car $\vec{v}$ et $\vec{B}$ n'ont pas perpendiculaire)

De même pour les points du segment RS, la direction de $\vec{v} \wedge \vec{B}$ est de S à R mais le module est encore égal à $v B \sin \theta$.

Pour les segments RQ et PS on voit que $\vec{v} \wedge \vec{B}$ leur est perpendiculaire et aucune différence de potentiel n'existe, ni entre R et Q, ni entre P et S. La circulation du champ électromoteur équivale $\vec{E}_{eq}$ le long du circuit fermé PQRS sera donc égale à

$$V = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = E_{eq} (PQ + RS) = 2l v B \sin \theta$$

La distance de tous les points de PQ, comme de RS, à l'axe de rotation étant égale à $x/2$, on a $v = (x/2) \omega$ et donc

$$V = l x \omega B \sin \theta = l x \omega B \sin(\omega t)$$

est la f.e.m. induite dans le circuit par sa rotation dans le champ $\vec{B}$.

Si on calcule le flux de $\vec{B}$ à travers le circuit PQRS

$$\Phi_m = (\vec{B} \cdot \vec{u}_N) S = B S \cos \theta = B S \cos(\omega t)$$

La variation au cours du temps est égale à

$$\frac{d\Phi_m}{dt} = - B S \omega \sin(\omega t) = - V$$

Une nouvelle fois, nous retrouvons la relation [5.1].

Bien que vérifié sur des exemples particuliers, nous admettrons que ce résultat a une valeur générale

La loi de l'induction électromagnétique $V = - d\Phi_m/dt$ est vraie quand la variation du flux magnétique résulte d'une variation du champ $\vec{B}$, du déplacement ou de la déformation du circuit le long duquel est calculée la force électromotrice induite, ou des deux simultanément

V.3 Potentiel électrique et induction électromagnétique

Nous avons vu (cf Chap I) qu'à un champ électrique statique $\vec{E}$ était associé un potentiel électrique V tel que $\vec{E} = - \text{grad } V$ une conséquence en étant que la circulation d'un champ électrique statique le long d'un contour fermé est nulle (cf § I C)

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

Lorsque le champ électromagnétique dépend du temps, l'équation ci-dessus n'est plus valable. Elle est remplacée par l'équation [5.2]

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \iint_S (\vec{B} \cdot \vec{u}_N) dS$$

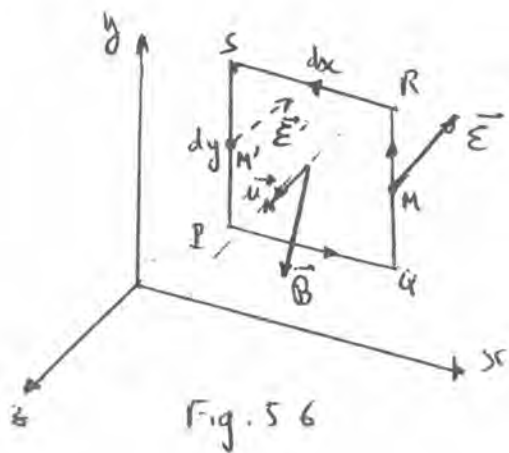
Le champ $\vec{E}$ ne peut plus être exprimé comme le gradient (changement de signe) d'un potentiel électrique scalaire V .

Cela ne signifie pas que le concept de potentiel est inapplicable dans le cas d'un champ dépendant du temps, mais il doit être utilisé de manière différente; en fait deux potentiels doivent être utilisés.

le premier est le potentiel scalaire, semblable à celui utilisé en statique, le second est un potentiel vecteur $\vec{A}$ défini par $\vec{B} = \text{rot}(\vec{A})$. Nous éviterons dans la suite de ce module d'utiliser ce potentiel vecteur.

V.4 Forme différentielle de la loi de Faraday - Henry

la loi de l'induction exprimée sous sa forme [5.2] peut être appliquée à un circuit rectangulaire infiniment petit de côté dx et dy placé dans le plan xOy (fig. 5.6)



Évaluons la circulation de $\vec{E}$ le long du contour PQRS.

$$\oint_{PQRS} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{PQ} + \int_{QR} + \int_{RS} + \int_{SP} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Si $\vec{E}$ a pour composante E_y au point M , et comme QR est infiniment petit, de longueur dy

$$\int_{QR} \vec{E} \cdot d\vec{l} = E_y(M) dy$$

De même si $\vec{E}$ a pour composante E'_y au point M'

$$\int_{SP} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -E'_y(M') dy$$

On a donc :

$$\int_{QR} + \int_{SP} \vec{E} \cdot d\vec{l} = [E_y(M) - E'_y(M')] dy$$

Or M et M' sont deux points voisins distants de dx , ayant même y et z .

donc

$$[E_y(M) - E'_y(M')] = \frac{\partial E_y}{\partial x} dx$$

Remarque - Le raisonnement est celui utilisé dans la démonstration du théorème de Stokes (cf annexes mathématiques § XIII (suite))

d'où

$$\int_{QR} + \int_{SP} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{\partial E_y}{\partial x} dx dy$$

Un raisonnement similaire conduirait à

$$\int_{PQ} + \int_{RS} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial E_x}{\partial y} dx dy$$

En ajoutant ces résultats on a

$$\oint_{PQRS} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \left(\frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial y} \right) dx dy$$

Or le flux de $\vec{B}$ à travers le circuit PQRS est égal à

$$\iint_{PQRS} (\vec{B} \cdot \vec{u}_N) dS = B_z dx dy$$

La relation [5.2] conduit donc à $\frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial y} = - \frac{\partial B_z}{\partial t}$

En prenant des rectangles dans les plans yOz et xOz on trouve respectivement :

$$\frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial z} = - \frac{\partial B_x}{\partial t} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial x} = - \frac{\partial B_y}{\partial t}$$

L'ensemble de ces trois relations peut s'écrire sous forme vectorielle en utilisant l'opérateur rotationnel (cf annexe mathématique)

$$\boxed{\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}} \quad [5.3]$$

La formule [5.3] est la forme locale de la loi de Faraday-Henry.

V.5 Principe de conservation de la charge électrique

Nous avons vu (§ I.2) que la charge électrique se conserve.

Si on considère une surface fermée (S) contenant à un instant donné la charge q (fig 5.7), elle ne peut varier

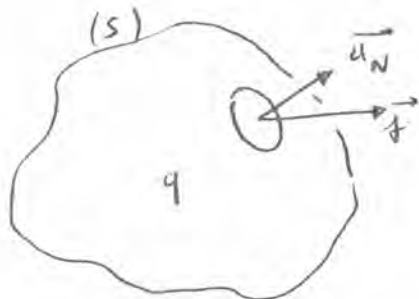


Fig 5.7

dans le mesure où des charges se déplacent et traversent la surface (S). Le principe de conservation de la charge exige que la perte de charge est égale à la différence entre le flux de charge sortant et le flux de charge entrant.

Cette différence est appelée flux global de charge sortant.

Ce flux peut être représenté par le vecteur densité de courant $\vec{J}$ (cf § III.2 et III.3) et l'intensité du courant I est le flux global de charge

sortant sera égal à

$$I = \oint_{(S)} (\vec{j} \cdot \vec{u}_N) dS$$

I donne le charge globale passant vers l'intérieur de (S) par unité de temps.

Cette perte de charge par unité de temps étant égal à $-dq/dt$, on a donc

$$-\frac{dq}{dt} = \oint_{(S)} (\vec{j} \cdot \vec{u}_N) dS \quad [5.4]$$

Or d'après le théorème de Gauss (cf § II.2) :

$$q = \epsilon_0 \oint_{(S)} (\vec{E} \cdot \vec{u}_N) dS$$

de telle sorte que, q représentant la charge intérieure à la surface (S) ,

$$\frac{dq}{dt} = \epsilon_0 \frac{d}{dt} \oint_{(S)} (\vec{E} \cdot \vec{u}_N) dS \quad [5.5]$$

En reportant ce résultat dans l'expression [5.4], on aboutit à

$$\oint_{(S)} (\vec{j} \cdot \vec{u}_N) dS + \epsilon_0 \frac{d}{dt} \oint_{(S)} (\vec{E} \cdot \vec{u}_N) dS = 0 \quad [5.6]$$

égalité exprimant le principe de la conservation de la charge (On a supposé qu'il n'y aient à l'intérieur de (S) ni création, ni annihilation de charge)

Remarque : en électrostatique, l'intégrale $\oint_{(S)} (\vec{E} \cdot \vec{u}_N) dS$ ne dépend pas du temps et on a simplement

$$\oint_{(S)} (\vec{j} \cdot \vec{u}_N) dS = 0$$

cela signifie qu'en régime statique, il n'y a ni accumulation, ni perte de charge dans toute région de l'espace, et donc que le courant global à travers une surface fermée est nul.

V.6 Loi d'Ampère - Maxwell

La loi de Faraday - Henry, notamment sous sa forme [5.2]

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \oint_S (\vec{B} \cdot d\vec{s})$$

relie la circulation du champ électrique à la vitesse de variation du ^{flux du} champ magnétique. On peut s'attendre à ce qu'une relation similaire relie la circulation du champ magnétique à la vitesse de variation du flux du champ électrique.

En magnétostatique (cf § IV.9) nous avons vu que la circulation du champ magnétique le long d'un contour fermé s'exprime à l'aide du théorème d'Ampère

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I = \mu_0 \iint_S (\vec{j} \cdot \vec{u}_N) dS$$

la surface S est une surface arbitraire s'appuyant sur le contour L . Si ce contour L se rétrécit (fig 5.8), la valeur de $\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l}$ décroît et

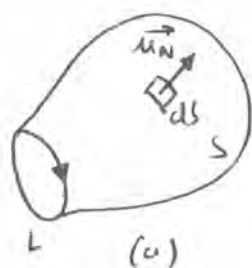


Fig 5.8

devient nulle lorsque L se réduit à un point (fig 5.8 c). Le théorème d'Ampère s'écrit alors

$$\iint_S (\vec{j} \cdot \vec{u}_N) dS = 0$$

égalité qui dicte le principe de conservation de la charge dans le cas statique.

On admettra (ce n'est pas une démonstration!) que dans le cas de champ dépendant du temps il y a lieu de tenir compte dans le théorème d'Ampère du terme lié à la variation de $\vec{E}$ au cours du temps tel qu'il apparaît dans l'expression [5.6]; ceci aboutit, lorsque on rétrécit le circuit L pour le réduire à un point, à retrouver l'égalité [5.6]. On admettra donc que

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint_S (\vec{j} \cdot \vec{u}_N) dS + \epsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \iint_S (\vec{E} \cdot \vec{u}_N) dS \quad [5.7]$$

L'équation [5.7] est appelée loi d'Ampère-Maxwell (généralisation du théorème d'Ampère énoncé par Maxwell). Cette loi indique qu'un champ électrique variant dans le temps contribue au champ magnétique.

Remarque: En l'absence de courant ($\vec{j} = \vec{0}$), l'équation [5.7] se simplifie en

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \iint_S (\vec{E} \cdot \vec{u}_N) dS$$

qui montre clairement la relation entre un champ électrique dépendant du temps et le champ magnétique qui lui est associé.

• Les lois d'Ampère-Maxwell et de Faraday-Henry présentent de grandes similitudes. Cependant on constate l'existence dans la première ([5.7]) d'un terme correspondant à un courant électrique; il n'y a par contre dans la seconde ([5.2]) aucun terme correspondant à un "courant magnétique". Ceci est simplement dû au fait qu'il n'y a (apparemment) pas de pôles magnétiques libres dans la nature.

De plus la vitesse de variation du flux de $\vec{E}$ ([5.7]) apparaît avec un signe +, alors que celle du flux de $\vec{B}$ ([5.2]) apparaît avec un signe -.

• Il existe des démonstrations de la relation [5.7]; elles se font appel au principe de relativité. Nous ne développerons pas une telle approche dans le cadre de ce module.

V-7 Forme différentielle de la loi d'Ampère-Maxwell

Nous pouvons utiliser un raisonnement semblable à celui utilisé au § V-5. La fig. 5.9 montre à nouveau le circuit PQRS sur lequel on évalue d'une part la circulation de $\vec{B}$, d'autre part à travers lequel on évalue le flux des vecteurs $\vec{j}$ et $\vec{E}$.

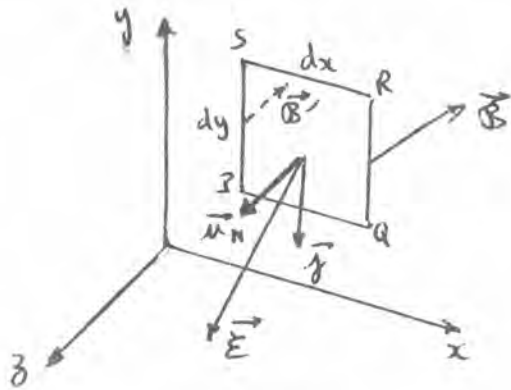


Fig 5.9

On démontre successivement que

$$\oint_{PQRS} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) dx dy$$

$$\iint_S (\vec{j} \cdot \vec{u}_N) dS = j_z dx dy$$

$$\iint_S (\vec{E} \cdot \vec{u}_N) dS = E_z dx dy$$

L'équation de Ampère-Maxwell s'écrit donc :

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = \mu_0 j_z + \epsilon_0 \mu_0 \frac{dE_z}{dt}$$

En prenant des circuits situés dans les plans yOz et xOz , on obtiendrait successivement

$$\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = \mu_0 j_x + \epsilon_0 \mu_0 \frac{dE_x}{dt}$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} = \mu_0 j_y + \epsilon_0 \mu_0 \frac{dE_y}{dt}$$

Ces trois dernières égalités peuvent être regroupées en une seule égalité vectorielle

$$\boxed{\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}} \quad [5.8]$$

qui est la forme différentielle de l'équation d'Ampère-Maxwell.

Dans le vide, où il n'y a pas de courants ($\vec{j} = \vec{0}$), l'expression [5.8] devient :

$$\text{rot } \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

qui exprime en tout point la relation entre la variation du champ électrique et le champ magnétique qui est associé à cette variation.

V.8 Equations de Maxwell

Les interactions qui existent entre les particules composant la matière sont principalement des interactions électromagnétiques. Elles sont associées à une propriété caractéristique de chaque particule, appelée

charge électrique - Pour décrire l'interaction électromagnétique, on introduit la notion de champ électromagnétique, caractérisé par deux vecteurs le champ électrique $\vec{E}$ et le champ magnétique $\vec{B}$, tels que la force agissant sur une charge q ayant la vitesse $\vec{v}$ soit égale à

$$\vec{F} = q (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \quad [5.9]$$

les champs électrique et magnétique sont à leur tour déterminés par les positions des charges et par leurs mouvements (ou courants). les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont de plus liés l'un à l'autre par ~~par~~ les lois de Faraday-Henry et de l'Ampère-Maxwell. Toutes ces relations s'expriment à travers quatre lois que nous avons regroupé dans le tableau suivant

Loi	Forme intégrale	Forme différentielle
Théorème de Gauss pour le champ électrique	$\oiint_S (\vec{E} \cdot \vec{u}_N) dS = \frac{q}{\epsilon_0}$	$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$
Théorème de Gauss pour le champ magnétique	$\oiint_S (\vec{B} \cdot \vec{u}_N) dS = 0$	$\text{div } \vec{B} = 0$
Circulation du champ électrique	$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \iint_S (\vec{B} \cdot \vec{u}_N) dS$	$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
Circulation du champ magnétique	$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint_S (\vec{j} \cdot \vec{u}_N) dS + \dots$ $\dots \epsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \iint_S (\vec{E} \cdot \vec{u}_N) dS$	$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

Ces lois appelées équations de Maxwell résument la théorie du champ électromagnétique. Avec l'égalité [5.9] elles sont la base de la théorie des interactions électromagnétiques.

On constate bien que pour des phénomènes invariants dans le temps, on retrouve bien le tableau donné dans la conclusion du module PH3.

On pourrait s'interroger sur la validité du théorème de Gauss pour des champs variables dans le temps. Effectivement ceux-ci ont été démontrés dans le cas statique, mais toutes les expériences faites (jusqu'à présent!) ont montré ~~par~~ la validité du résultat, même dans le cas de champs variables.

Un cas particulier est celui du vide où n'existent ni charges, ni courants. Dans ce cas les équations de Maxwell se simplifient et deviennent (sous leur forme différentielle) :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= 0 & \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \operatorname{rot} \vec{B} &= \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

La synthèse des interactions électromagnétiques qui expriment les équations de Maxwell a permis d'étudier le rayonnement électromagnétique, la structure de la matière, ... C'est l'électrodynamique classique.

Cependant dans le cas des interactions électromagnétiques entre particules fondamentales, spécialement aux hautes énergies, les résultats doivent tenir compte du caractère quantique de ces interactions ; c'est l'électrodynamique quantique.

Note On remarque que la quantité $\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ a les dimensions d'une densité de courant (comme $\vec{j}$). Dans plusieurs ouvrages on appelle cette quantité densité de courant de déplacement (ou courant de déplacement)

Exercices du chapitre V

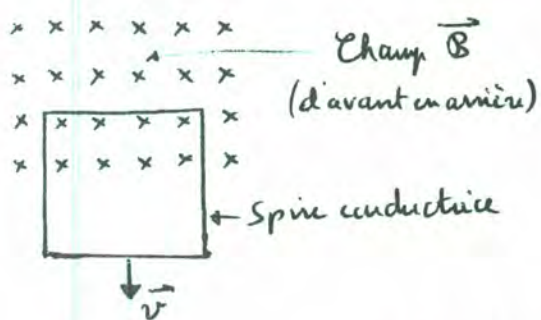
1. Une bobine formée de N spires de rayon R est placée perpendiculairement à un champ magnétique uniforme $\vec{B}$. Déterminer la f.e.m. induite dans la bobine lorsque, pendant l'intervalle de temps Δt .

- a) le module de $\vec{B}$ est doublé
- b) le champ $\vec{B}$ est ramené à zéro
- c) le champ $\vec{B}$ est renversé de sens.
- d) la bobine est tournée de 90°
- e) la bobine est tournée de 180°

Dans chaque cas préciser le sens de la f.e.m. induite

A.N. $N = 200$, $R = 0,1 \text{ m}$, $\|\vec{B}\| = 0,2 \text{ Tesla}$, $\Delta t = 0,1 \text{ s}$

2. On laisse tomber une spire carrée de côté ℓ , alors que la partie supérieure de la spire est plongée dans un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme, normal au plan de la spire et dirigé d'avant en arrière (cf figure). La spire a une résistance



R et un poids $m\vec{g}$

- a) Trouver l'intensité du courant circulant dans la spire, lorsque la vitesse est égale à $\vec{v}$. Quel est le sens de ce courant ?
- b) Quelle est la force magnétique totale agissant sur la spire ?
- c) A quelle vitesse $\vec{v}$, la force résultante agissant sur la spire est-elle nulle ?

Chapitre VI : Circuits électriques en régime variable

Dans le chapitre III (module PH3) nous avons abordé l'étude de circuits où ni la f.e.m. appliquée, ni le courant ne variaient avec le temps, c'est à dire le cas d'un régime continu. Le seul paramètre à considérer dans ce cas était la résistance des éléments composant le circuit.

Lorsque f.e.m. appliquée et courant varient dans le temps, d'autres effets doivent être pris en compte, effets liés au phénomène d'induction électromagnétique. Dans ce cas la loi d'Ohm $V = R I$ doit être modifiée.

VI 1 Auto-induction

Soit un circuit parcouru par le courant d'intensité I . (fig 6.1)

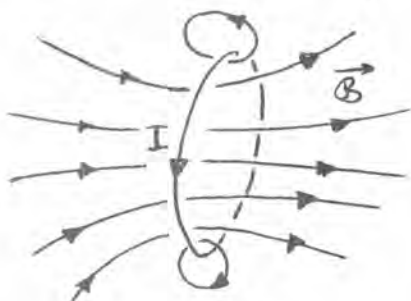


Fig 6.1

D'après le théorème d'Ampère le courant produit un champ magnétique $\vec{B}$ qui, en chaque point est proportionnel à I . On peut donc calculer le flux de $\vec{B}$ à travers le circuit lui-même.

Ce flux (ou auto-flux) Φ_m , proportionnel à I s'écrit :

$$\Phi_m = L I$$

où L , appelée auto-inductance du circuit, ne dépend que de la forme géométrique du circuit. Le coefficient L s'exprime en Weber / Ampère ou Henry (Symbole H).

Si le courant dans le circuit n'est pas constant (soit parce que la f.e.m. appliquée au circuit varie, soit parce que la résistance du circuit varie, soit pour ces deux raisons simultanément), le flux Φ_m va varier et, en accord avec la loi de Faraday-Henry, une f.e.m. est induite dans le circuit.

Ce cas particulier de l'induction électromagnétique est appelé auto-induction.

Soit V_L cette f.e.m. induite; on a

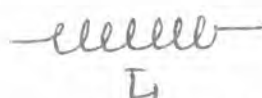
$$V_L = - \frac{d\Phi_m}{dt} = - L_1 \frac{dI}{dt} \quad [6.1]$$

Le signe - indique que V_L s'oppose ~~au passage~~ ^{à la variation} du courant. Ainsi, si le courant augmente, dI/dt est positif et V_L , négatif, est opposé au courant.

L'expression [6.1] n'est valable que si l'auto-inductance L_1 est constante, c'est à dire lorsque le circuit ne se déforme pas. Dans un cas plus général où le circuit se déforme, V_L sera donné par

$$V_L = - \frac{d}{dt} (L_1 I)$$

Dans un circuit, un conducteur dont l'inductance est appréciable sera symbolisé par :



Il faut cependant remarquer que l'auto-inductance d'un circuit n'est pas concentrée en un point particulier du circuit, mais qu'elle représente une propriété de l'ensemble du circuit.

VI-2 Etablissement d'un courant dans un circuit

Soit le circuit représenté à la figure 6.2. Lorsqu'on ferme l'interrupteur, le courant n'atteint pas immédiatement la valeur V/R correspondant à la loi d'Ohm.

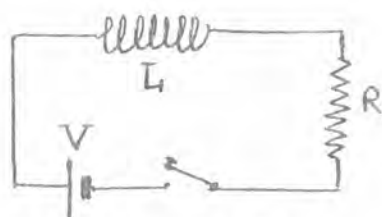


Fig. 6.2

En effet la f.e.m. d'auto-induction, V_L , s'oppose à la variation de courant; elle existe tant que le courant augmente.

La f.e.m. totale appliquée au circuit est égale à

$$V + V_L = V - L_1 (dI/dt)$$

cette f.e.m. totale est égale à $R I$.

On a donc : $L \left(\frac{dI}{dt} \right) = V - RI$ [6.2]

Au fur et à mesure que le courant augmente de la valeur $I=0$ à la valeur $I = V/R$, la dérivée du courant décroît jusqu'à s'annuler.

On peut résoudre exactement l'équation [6.2], c'est une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants.

Une manière (parmi d'autres) de résoudre cette équation est de chercher la solution de l'équation $L \frac{dI}{dt} + RI = 0$

(cette équation sans second membre) :

$$\begin{aligned} \frac{dI}{I} &= - \frac{R}{L} dt \\ \log I &= \log(C^k) - \frac{Rt}{L} \\ I &= C^k \exp\left(-\frac{Rt}{L}\right) \end{aligned}$$

A la solution générale de l'équation sans second membre, on ajoute une solution particulière de l'équation avec second membre $I = V/R$ pour avoir la solution générale

$$I = \frac{V}{R} + C^k \exp\left(-\frac{Rt}{L}\right)$$

La valeur de la constante est obtenue dans le cas où $t=0$: $I(t=0) = 0$
la constante est donc égale à $-V/R$ et la solution sera

$$I(t) = \frac{V}{R} \left[1 - \exp\left(-\frac{Rt}{L}\right) \right]$$

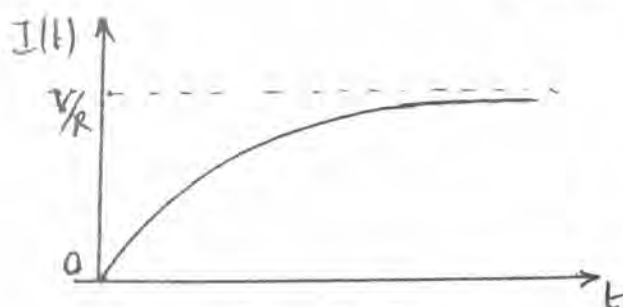


Fig. 6.3

On voit sur la fig. 6.3 que l'intensité du courant approche asymptotiquement de la valeur V/R donnée par la loi d'Ohm

VI.3 Energie du champ magnétique

Pour maintenir un courant dans un circuit il est nécessaire de fournir de l'énergie. L'énergie nécessaire par unité de temps (ou

puissance nécessaire) est égale à $V I$.

En reprenant l'exemple vu précédemment (§ VI.2), remplaçons V par son expression donnée par [6.2]

$$V I = \left[L \frac{dI}{dt} + R I \right] I = R I^2 + L I \frac{dI}{dt}$$

Le premier terme, $R I^2$, est l'énergie dépensée pour déplacer les électrons à travers le conducteur (cf § III.3)

Le second terme peut s'interpréter comme l'énergie nécessaire par unité de temps pour établir le courant, ou pour créer le champ magnétique qui lui est associé. Le taux d'augmentation d'énergie magnétique s'écrit

$$\frac{dE_{\text{mag}}}{dt} = L I \frac{dI}{dt}$$

L'énergie magnétique nécessaire pour porter un courant de la valeur 0 à la valeur I est donc égale à

$$E_{\text{mag}} = \int_0^I L I \frac{dI}{dt} = \frac{1}{2} L I^2$$

Cette énergie magnétique peut également se calculer à partir du champ $\vec{B}$ en associant à chaque point de l'espace une densité d'énergie magnétique égale à $\|\vec{B}\|^2 / 2\mu_0$ et en intégrant dans tout l'espace

$$E_{\text{mag}} = \iiint_{\text{espace}} \frac{\|\vec{B}\|^2}{2\mu_0} d\tau$$

Ce résultat n'est pas facilement démontrable dans un cas général. Le lecteur pourra démontrer sa validité dans le cas d'un circuit constitué de deux conducteurs cylindriques coaxiaux (exercices 1 et 3 en fin de chapitre)

Quand les champs électrique et magnétique sont simultanément présents on doit considérer l'énergie électromagnétique totale, dont la densité est donnée par

$$\frac{1}{2} \epsilon_0 \|\vec{E}\|^2 + \frac{1}{2\mu_0} \|\vec{B}\|^2 \quad [6.3]$$

VI. 4. Oscillations électriques ^{Libres} dans un circuit

L'écoulement de l'électricité à travers un circuit dépendra de trois paramètres: la capacité C , la résistance R et l'auto-inductance L .

Soit le circuit de la figure 6.4.

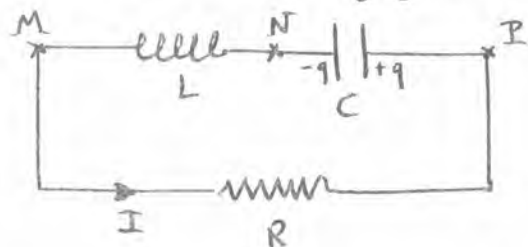


Fig. 6.4.

Si on suppose que l'intensité du courant I dans le circuit est dirigée de M vers P (à travers R), des charges $+q$ et $-q$ apparaîtront sur les armatures du condensateur, telles que

$$I = \frac{dq}{dt}$$

Aux bornes du condensateur apparaît une différence de potentiel V_C

$$V_C = V(P) - V(N) = q/C$$

Dans l'auto-inductance L , apparaît une f.e.m. qui tendra également à s'opposer au passage du courant.

$$V_L = V(N) - V(M) = L(dI/dt)$$

(le signe - n'apparaît pas explicitement, compte tenu du choix $V(N) - V(M)$)

Aux bornes de la résistance, on a: $V_R = V(M) - V(P) = RI$

On voit que la somme de ces trois différences de potentiel est nulle

$$RI + L\left(\frac{dI}{dt}\right) + \frac{q}{C} = 0 \quad [6.4]$$

En dérivant cette égalité par rapport au temps, on écrit l'équation différentielle satisfaite par $I(t)$:

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I = 0 \quad [6.5]$$

C'est une équation différentielle du second ordre à coefficients constants. La solution générale d'une telle équation est du type

$$I(t) = A \exp(r_1 t) + B \exp(r_2 t)$$

où A et B sont des constantes, déterminées à partir des conditions initiales (ou plus généralement à partir de conditions particulières), et où r_1 et r_2

sont les solutions de l'équation caractéristique

$$Lr^2 + Rr + \frac{1}{C} = 0$$

- lorsque $R^2 < 4L/C$, le déterminant de cette équation du second degré est négatif et les racines r_1 et r_2 sont des nombres complexes conjugués.

On peut facilement montrer que dans ce cas l'intensité $I(t)$ dans le circuit variera comme :

$$I(t) = I_0 \exp(-\gamma t) \sin(\omega t + \alpha)$$

en posant $\gamma = \frac{R}{2L}$ et $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$

(Dans ce cas $r_1 = -\gamma + i\omega$ et $r_2 = -\gamma - i\omega$)

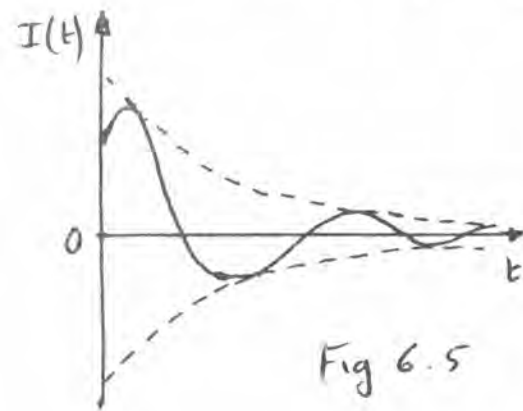


Fig 6.5

I_0 et α sont déterminés d'après les conditions particulières. La figure 6.5 montre l'évolution de $I(t)$. Un courant oscillant (ou alternatif) dont l'amplitude décroît avec le temps s'établit.

Dans le cas où R est très petit devant L , on peut négliger γ et avoir $\omega \approx \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$

Dans ce cas les oscillations de $I(t)$ ne sont pas amorties et ont pour fréquence ω_0 , appelée fréquence caractéristique du circuit LC.

On peut noter que l'amortissement des oscillations provient de la dissipation d'énergie dans la résistance R .

- lorsque R devient grand, et donc que $R^2 > 4L/C$ les racines r_1 et r_2 sont réelles et négatives. le courant $I(t)$ décroît régulièrement sans osciller, comme le montre la figure 6.6.

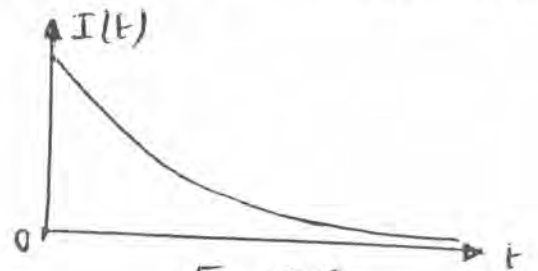
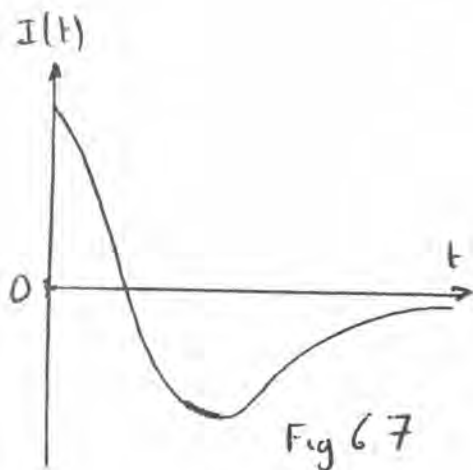


Fig 6.6

- Dans le cas particulier où $R^2 = 4L/C$ l'intensité $I(t)$ varie comme l'indique



la figure 6.7

On est dans le cas de l'amortissement critique :

Remarque : le comportement de $I(t)$ est semblable à celui d'une masse m suspendue à un ressort de raideur k , et affecté d'un frottement de coefficient λ .

En effet si la masse m se déplace selon Ox , son mouvement est régi par l'équation différentielle

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \lambda \frac{dx}{dt} + kx = 0$$

En établissant la correspondance $m \leftrightarrow L$, $\lambda \leftrightarrow R$ et $k \leftrightarrow \frac{1}{C}$, on peut effectuer une analogie électro-mécanique, fort utile pour simuler des comportements mécaniques à partir de l'étude de circuits électriques.

VI. 5 Oscillations électriques forcées dans un circuit

Dans le circuit représenté à la fig 6.4. ajoutons en série une f.e.m. alternative de la forme

$$V(t) = V_0 \sin \omega t$$

L'équation [6.4] portant sur les différences de potentiel aux bornes des différents éléments du circuit s'écrit alors :

$$RI + L \frac{dI}{dt} + \frac{q}{C} = V_0 \sin \omega t \quad [6.6]$$

ou en dérivant par rapport au temps :

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = \omega V_0 \cos \omega t$$

On peut montrer que la solution de cette équation différentielle est de la forme

$$I(t) = I_0 \sin(\omega t - \alpha)$$

où α est la différence de phase entre le courant et la f.e.m. appliquée, et où I_0 , valeur maximale de l'intensité $I(t)$ est donnée par

$$I_0 = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}}$$

la différence de phase α s'obtient facilement :

$$\tan \alpha = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}$$

et la quantité $\sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}$ égale au rapport (V_0/I_0) sera l'impédance du circuit.

Les résultats qui précèdent peuvent s'obtenir à l'aide de la méthode des vecteurs tournants (ou méthode des diagrammes de Fresnel)

Dans le plan complexe, la tension V_0 est représentée par un vecteur de module V_0 , tournant autour de O à la vitesse angulaire ω (la tension instantanée est représentée par la projection sur un axe de ce vecteur)

De même l'intensité I_0 sera représentée par un vecteur de module I_0 tournant autour de O avec la même vitesse angulaire ω , et déphasé d'un angle α par rapport à V_0 .

La tension aux bornes de R , $V_R = RI$ sera représentée par un vecteur colinéaire à I . La d.d.p. aux bornes de L égal à :

$$V_L = L \frac{dI}{dt} = L \omega I_0 \cos(\omega t - \alpha) = \omega L I_0 \sin(\omega t - \alpha + \frac{\pi}{2})$$

sera représentée par un vecteur de module $\omega L I_0$ et en avance de $\pi/2$ par rapport à I . Enfin la d.d.p. aux bornes de C égal à :

$$V_C = \frac{q}{C} = -\left(\frac{1}{\omega C}\right) I_0 \cos(\omega t - \alpha) = \left(\frac{I_0}{\omega C}\right) \sin(\omega t - \alpha - \frac{\pi}{2})$$

sera représentée par un vecteur de module $\left(\frac{I_0}{\omega C}\right)$, en retard de $\pi/2$ par rapport à I .

La somme des trois vecteurs représentant V_R , V_C et V_L doit être égale au vecteur représentant V . C'est ce qui est vérifié sur la figure 6.8 où on retrouve :

$$V_0 = \sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2} I_0$$

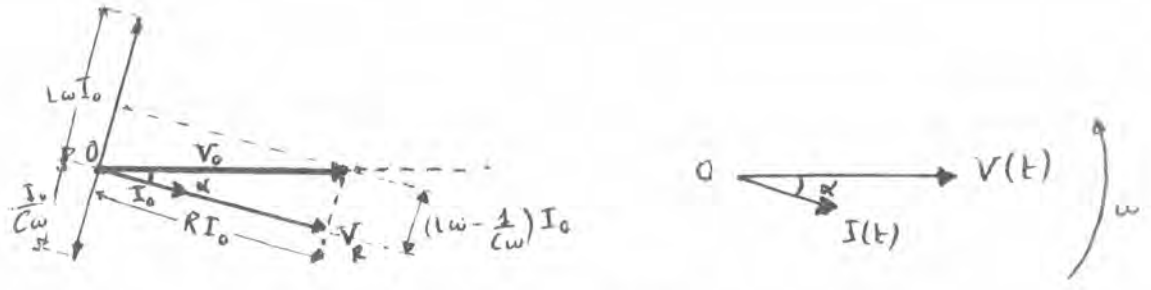


Fig. 6.8

De même $\tan \alpha = \frac{(L\omega - 1/C\omega)}{R}$

Il ne faut pas oublier qu'au cours du temps l'ensemble de la figure tourne autour de O, sans se modifier, avec la vitesse angulaire ω .

La variation de $I(t)$ est donnée à la fig. 6.9 (en même temps que celle de $V(t)$)

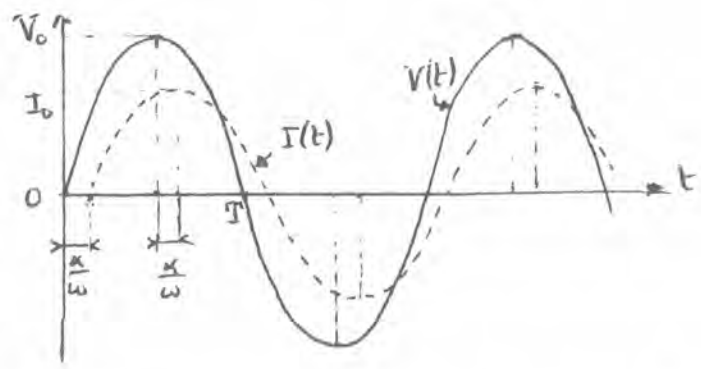


Fig. 6.9

car $\alpha > 0$
c'est à dire
 $L\omega > 1/C\omega$

On peut calculer la puissance nécessaire pour maintenir le courant

$$P = V I = V_0 I_0 (\sin^2 \omega t \cos \alpha - \sin \omega t \cos \omega t \sin \alpha)$$

Pour obtenir la puissance moyenne nécessaire, il suffit de calculer la valeur moyenne de cette quantité sur un intervalle de temps d'une période, T

$$P_{\text{moy}} = \frac{1}{T} \int_0^T P dt$$

Comme $\int_0^T \sin \omega t \cos \omega t dt = 0$ et $\int_0^T \sin^2 \omega t dt = T/2$, on trouve

$$P_{\text{moy}} = \frac{1}{2} V_0 I_0 \cos \alpha = \frac{1}{2} R I_0^2$$

La résonance se produit lorsque P_{moy} est maximale, cela se produit lorsque

$\alpha = 0$, c'est à dire $L\omega = 1/C\omega$. On constate que la résonance se produit pour la valeur de ω correspondant à la fréquence caractéristique ω_0 du circuit (cf § VI.4).

A la résonance le courant et la f.e.m. $\bar{V}$ sont en phase, et l'intensité du courant a sa valeur maximale.

VI.6 Induction mutuelle

Sont deux circuits (1) et (2) représentés à la fig. 6.10. Si un courant I_1 circule dans le circuit (1), il crée un champ magnétique $\vec{B}_1$, proportionnel (en module) à I_1 dans l'espace qui l'entoure et on peut calculer le flux de $\vec{B}_1$ à travers le circuit (2):

$$\Phi_{1/2} = M I_1$$

où M est un coefficient de proportionnalité, qui ne dépend que des caractéristiques géométriques des circuits (1) et (2) et de leur position relative.

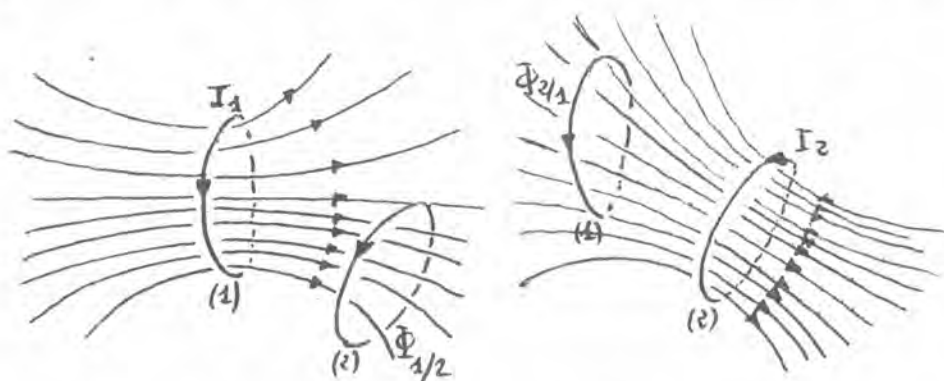


Fig. 6.10

Inversement, si un courant I_2 parcourt le circuit (2), il crée dans tout l'espace le champ $\vec{B}_2$, proportionnel (en module) à I_2 , et le flux de ce champ à travers le circuit (1) sera égal à:

$$\Phi_{2/1} = M I_2$$

On remarque qu'on utilise le même coefficient M dans les expressions de $\Phi_{1/2}$ et $\Phi_{2/1}$. Ce coefficient est l'inductance mutuelle des deux circuits et s'exprime (comme l'auto-inductance) en henry.

Si le courant I_1 varie au cours du temps le flux $\Phi_{1/2}$ change et une f.e.m. induite apparaît dans le circuit (2).

cette f.e.m. est donnée par

$$V_{M2} = - M \frac{dI_1}{dt}$$

De plus, si les circuits (1) et (2) sont déplacés l'un par rapport à l'autre, cela a pour effet une variation de M , et des f.e.m. seront induites tant dans (1) que dans (2); dans le circuit (1) la f.e.m. induite sera égale à $-\frac{d}{dt}(MI_2)$, alors que dans le circuit (2) la f.e.m. induite sera égale à $-\frac{d}{dt}(MI_1)$.

deux
Lorsque ~~des~~ circuits, tels ceux représentés à la fig. 6.4., sont soumis à l'induction mutuelle, les équations permettant de calculer les intensités du courant parcourant ces circuits sont :

- pour le circuit (1) :

$$L_1 \frac{d^2 I_1}{dt^2} + R_1 \frac{dI_1}{dt} + \frac{I_1}{C_1} = - M \frac{d^2 I_2}{dt^2}$$

- pour le circuit (2) :

$$L_2 \frac{d^2 I_2}{dt^2} + R_2 \frac{dI_2}{dt} + \frac{I_2}{C_2} = - M \frac{d^2 I_1}{dt^2}$$

Ces deux équations différentielles couplées (I_1 et I_2 interviennent dans chacune des équations) sont semblables à celles régissant le mouvement de deux oscillateurs couplés.

La résolution d'un tel système d'équations n'est pas simple. On notera seulement qu'une des conséquences de ce couplage est l'existence d'un échange d'énergie entre les deux circuits. Les transformateurs et les générateurs à induction sont des applications très répandues de ce processus.

De même si un signal variable est produit dans le circuit (1), et si un circuit (2) est couplé au circuit (1), un signal variable apparaîtra dans le circuit (2). Le principe est à la base de la transmission des ondes (radio, télévision, ...) le circuit (1) étant l'émetteur, le circuit (2) étant le récepteur.

VI.7 Conclusion

L'aspect le plus fondamental de l'induction mutuelle est que l'énergie

peut être échangée entre deux circuits par l'intermédiaire du champ électromagnétique. Le champ électromagnétique, produit par les courants dans les circuits, agit comme un porteur d'énergie transportant l'énergie d'un circuit à l'autre à travers l'espace.

Si l'inductance mutuelle apparaît comme un phénomène macroscopique (interaction de deux circuits), elle résulte en fait d'interactions élémentaires entre les charges en mouvement qui constituent les courants dans ces circuits. L'interaction électromagnétique entre deux particules chargées peut être décrite ~~par~~ comme un échange d'énergie par l'intermédiaire de leur champ électromagnétique mutuel.

Si donc deux particules chargées sont sujettes à une interaction électromagnétique, le principe de conservation de l'énergie impose que l'énergie totale du système de ces deux particules soit écrite sous la forme

$$E = E_1 + E_2 + E_{\text{champ}}$$

où E_1 et E_2 sont les énergies propres de chaque particule (c'est-à-dire la somme des l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle résultant de toute force agissant sur elles) et où E_{champ} est l'énergie associée à leur champ électromagnétique.

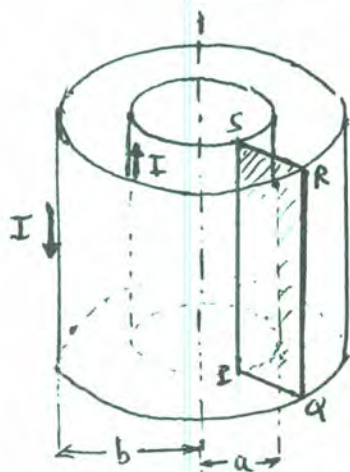
On peut montrer que dans des conditions statiques (ou quasi-statiques, c'est-à-dire des conditions de variations très lentes en fonction du temps) E_{champ} correspond exactement à l'énergie potentielle due à l'interaction coulombienne de deux charges

$$U = q_1 q_2 / 4\pi\epsilon_0 r_{12} \quad (\text{cf } \S \text{ I } 7).$$

Exercices sur le chapitre VI

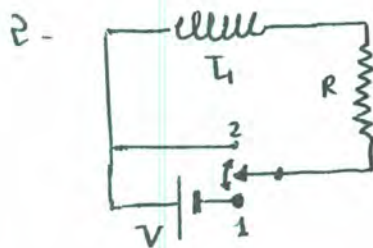
par unité de longueur,

1. Calculer l'auto-inductance d'un circuit composé de deux feuilles métalliques cylindriques coaxiales de rayons a et b (voir figure) transportant chacune un courant d'intensité I mais dans des directions opposées.



On calculera à l'aide du théorème d'Ampère le champ $\vec{B}$ existant dans l'espace situé entre les feuilles, puis on calculera le flux de $\vec{B}$ à travers la section PQRS du circuit.

Résultat: $L_{\text{par unité de longueur}} = \frac{\mu_0}{2\pi} \log\left(\frac{b}{a}\right)$



L'interrupteur étant d'abord placé dans la position (1), un courant I s'établit progressivement dans le circuit ci-contre.

Comment décroît l'intensité de ce courant lorsqu'on bascule l'interrupteur de la position (1) à la position (2) (On supposera que l'intensité I avait atteint sa valeur limite avant le basculement)

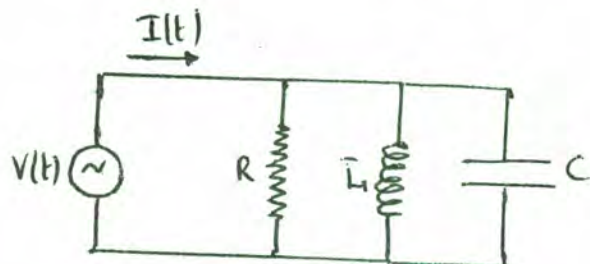
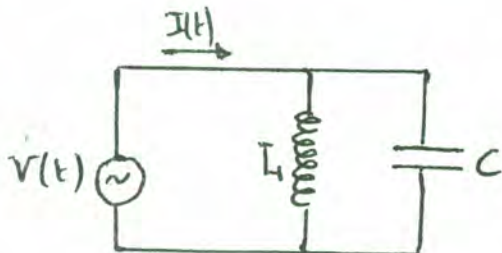
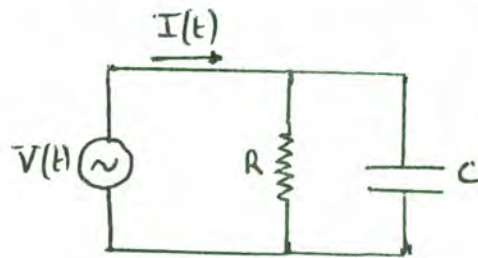
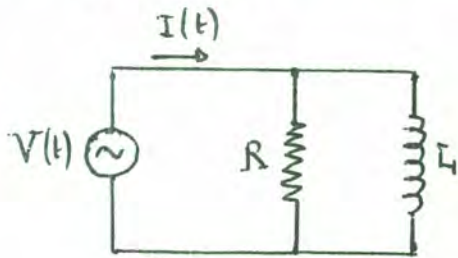
Réponse: $I = (V/R) \exp(-Rt/L_1)$

3. En reprenant le résultat obtenu dans l'exercice n°1, montrer que l'énergie magnétique par unité de longueur est bien égale soit à $\frac{1}{2} L_1 I^2$, soit à l'intégrale de la densité d'énergie magnétique étendue au volume dans lequel existe un champ $\vec{B}$.

Reponse $E_m = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \log\left(\frac{b}{a}\right)$

4. Pour les circuits représentés ci-dessous, déterminer l'impédance du circuit et le déphasage entre la tension $V(t)$ et l'intensité $I(t)$, la tension $V(t)$ étant du type
- $$V(t) = V_0 \sin \omega t$$

[Il est judicieux d'utiliser la méthode des vecteurs tournants]



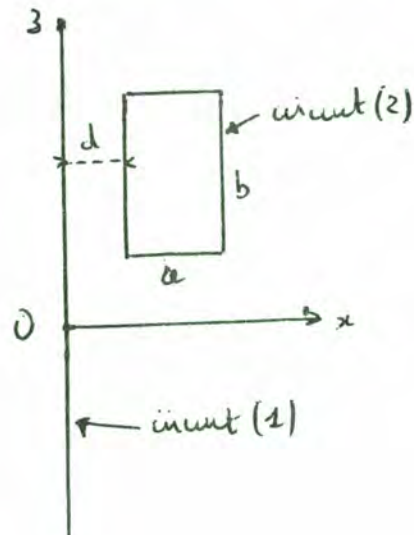
5. Déterminer l'inductance mutuelle entre les deux circuits suivants

- circuit (1) : fil rectiligne selon Oz de longueur infinie (on suppose que le fil se referme sur lui-même à l'infini)
- circuit (2) : spire circulaire de rayon R centrée en O et située dans le plan xOy .

Réponse : $M = 0$

6. Déterminer l'inductance mutuelle entre les deux circuits suivants

- circuit (1) : identique à celui de l'exercice précédent
- circuit (2) : circuit rectangulaire de côtés a et b placé dans le plan xOz (cf figure)



Chapitre VII le champ électrostatique dans la matière

VII. 1. Polarisation de la matière

En raison de sa symétrie sphérique, un atome isolé ne possède pas de moment dipolaire permanent, les "centres de gravité" des charges $+$ et $-$ sont confondus. Lorsque ils sont placés dans un champ électrique, les atomes se polarisent et acquièrent un moment dipolaire induit dans la direction du champ.

De nombreuses molécules possèdent par contre un moment dipolaire électrique permanent. Placées dans un champ, de telles molécules tendent à s'orienter parallèlement au champ (cf § J-10).

Par suite de chacun de ces effets un morceau de matière, placé dans un champ électrique $\vec{E}$, devient électriquement polarisé. Un milieu qui peut être polarisé par un champ électrique est appelé diélectrique. La polarisation donne naissance à

une charge résultante positive sur un côté du morceau de matière (fig 7-1), une charge résultante négative sur l'autre côté de la matière.

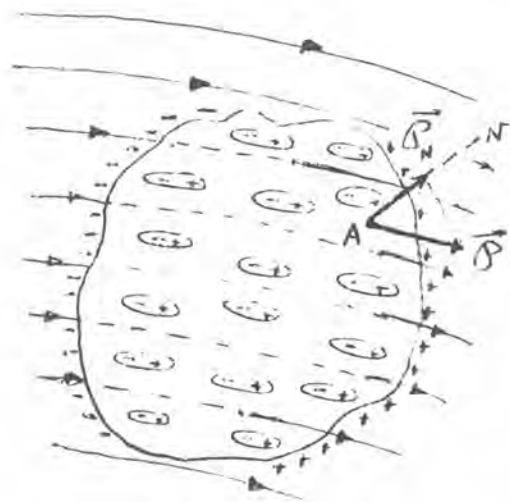


Fig 7-1

le morceau de matière devient alors un dipôle électrique macroscopique qui tend à se déplacer dans la direction dans laquelle le champ croît. Cela s'explique puisque un bâton de verre électrisé attire des bords de liège ou des petits morceaux de papier (cf § J-1).

On définit la polarisation $\vec{P}$ d'une substance comme le moment dipolaire électrique du milieu par unité de volume. Ainsi, si $\vec{p}$ est le moment dipolaire

incluant dans chaque atome ou chaque molécule, n le nombre d'atomes ou de molécules par unité de volume, on a $\vec{P} = n \vec{p}$. En général $\vec{P}$ est proportionnel au champ $\vec{E}$ appliqué et on écrit

$$\vec{P} = \chi_e \epsilon_0 \vec{E}$$

(l'introduction de ϵ_0 est due au fait que $\vec{P}$ s'exprime en (coulomb x mètre) par mètre cube et $\epsilon_0 \vec{E}$ s'exprime également en charge par unité de surface, et que $\epsilon_0 \vec{E}$ s'exprime également en charge par unité de surface (cf théorème de Gauss par exemple))

La quantité χ_e est la susceptibilité électrique de la substance. C'est un nombre sans dimension, qui caractérise la réponse du matériau à un champ électrique appliqué, en général χ_e est positive.

Si on considère une tranche de matériau d'épaisseur l et de section S (fig 7.2)

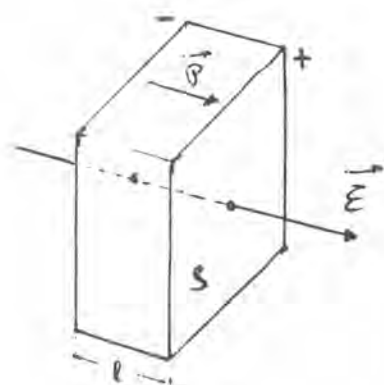


Fig 7.2

placée dans le champ $\vec{E}$ uniforme, le moment dipolaire total est égal à $\vec{P}(S l) = (\vec{P} S) l$

Par définition le moment dipolaire est le produit de la charge par la distance (cf § I-10). La charge apparaissant sur chacune des faces a donc pour valeur absolue $\|\vec{P}\| S$

La densité de charge de chacune des faces est donc égale à

$$\sigma_s = \|\vec{P}\|$$

D'une manière plus générale, la charge par unité de surface d'un morceau de matière polarisée est égale à la composante de la polarisation $\vec{P}$ dans la direction de la normale à la surface du diélectrique.

Ainsi dans le cas de la fig 7.1., la charge par unité de surface au point A est égale à P_N la valeur de la projection de $\vec{P}$ sur la normale en A à la surface.

Cas des conducteurs

On a vu (§ III.1) que dans un conducteur, les charges peuvent se déplacer relativement librement. Placé dans un champ électrique, un conducteur se polarisera mais de manière différente de cas des diélectriques. En effet les charges mobiles vont s'accumuler sur la surface du conducteur, de manière à créer dans le conducteur un champ qui sera égal et opposé au champ extérieur appliqué.

A l'intérieur du conducteur en équilibre, le champ électrique sera nul. De plus à la surface le champ électrique est normal à la surface, car s'il y avait une composante tangentielle de champ, les charges se déplaceraient à la surface du conducteur. En confirme les résultats énoncés au § II.5

VIII 2 Déplacement électrique

Un diélectrique "isolant" possède des charges sur sa surface et dans son volume. Les charges de polarisation sont "figées", au sens que elles sont liées à des atomes ou des molécules déterminées, et qu'elles ne peuvent se déplacer librement à travers le diélectrique.

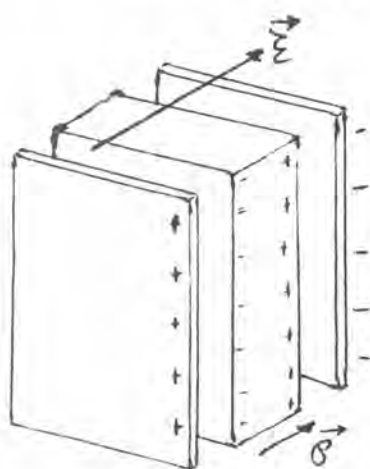


Fig. 7.3

En effet (fig 7.3) une tranche de matériau diélectrique placée entre deux plaques conductrices parallèles portant des charges libres égales et opposées, de densité $+\sigma_{li}$ et $-\sigma_{li}$ respectivement.

Les charges libres produisent un champ électrique qui polarise la tranche de diélectrique, faisant ainsi apparaître des charges de polarisation sur les surfaces de la tranche. Les charges de polarisation ont des signes opposés à ceux de la plaque en regard.

D'après ce qui précède (§ III.1) la densité de charge de polarisation est égale à $+P$ et $-P$ respectivement.

La densité de charge effective (ou globale) à gauche vaut donc

$$\sigma = \sigma_{\text{lib}} - \rho$$

A droite, cette densité superficielle effective de charge vaut $-\sigma = -\sigma_{\text{lib}} + \rho$.

Globalement le champ créé par ces densités de charge effectives ~~vaut~~ $\vec{E}$ a pour module

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} (\sigma_{\text{lib}} - \rho)$$

c'est à dire

$$\sigma_{\text{lib}} = \epsilon_0 E + \rho$$

Cette expression donne la charge libre à la surface du conducteur en présence du diélectrique, en fonction du champ électrique dans le diélectrique et de la polarisation du diélectrique.

Le résultat suggère l'introduction d'un nouveau champ de vecteurs, le déplacement électrique, défini par

$$\boxed{\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}} \quad [1]$$

Dans le cas particulier étudié ci-dessus on trouve

$$\sigma_{\text{lib}} = D$$

c'est à dire que les charges libres par unité de surface du conducteur sont égales au déplacement électrique à l'intérieur du conducteur.

Le résultat est général ; la composante de $\vec{D}$ le long de la normale à la surface d'un conducteur entouré dans un diélectrique, donne la densité superficielle de charge sur le conducteur.

$$\sigma_{\text{lib}} = \vec{D} \cdot \vec{u}_N$$

La composante normale de $\epsilon_0 \vec{E}$ donne la charge effective (ou nette) tenant compte de la compensation due aux charges apparues à la surface du diélectrique.

Permittivité d'un milieu

Dans le cas où la polarisation $\vec{P}$ est proportionnelle à $\vec{E}$ on a

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \chi_e \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E}$$

La quantité $\epsilon = \epsilon_0 (1 + \chi_e)$ est appelée permittivité du milieu.

Le rapport $\frac{\epsilon}{\epsilon_0} = 1 + \chi_e = \epsilon_r$ s'appelle permittivité relative ou constante diélectrique du milieu. Pour la plupart des substances elle est supérieure à 1.

La charge libre sur un conducteur sera donnée par

$$q_{lib} = \oint_{(S)} \sigma_{el} dS = \oint_{(S)} \vec{D} \cdot \vec{u}_n dS = \Phi_D$$

elle sera égale au flux de $\vec{D}$ à travers la surface du conducteur. Plus généralement le flux de $\vec{D}$ à travers une surface fermée est égal à la charge libre intérieure à cette surface, à l'exclusion de toute charge due à la polarisation du milieu.

Lorsque la relation $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ est valable, ce résultat devient

$$\Phi_E = \oint_{(S)} \vec{E} \cdot \vec{u}_n dS = \oint_{(S)} \frac{\vec{D}}{\epsilon} \cdot \vec{u}_n dS = \frac{q_{lib}}{\epsilon_0}$$

En comparant ce résultat au théorème de Gauss (cf § II.2), on voit que l'effet du diélectrique sur le champ $\vec{E}$ est de remplacer ϵ_0 par ϵ , seules les charges libres sont prises en considération.

Ainsi le champ électrique et le potentiel produits par une charge ponctuelle placée dans un diélectrique seront égaux à

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon r^2} \vec{u}_r \quad \text{et} \quad V = \frac{q}{4\pi\epsilon r}$$

la force d'interaction entre deux charges ponctuelles noyées dans un diélectrique étant égale à $\vec{F}$, telle que

$$\|\vec{F}\| = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon r^2}$$

Puisque ϵ est supérieur à 1, on constate que la présence du diélectrique réduit l'importance de cette interaction, ceci étant dû à l'effet d'écran dû à la polarisation des molécules du diélectrique.

VII 3 Annihilation de la matière

Nous avons vu (cf § IV.7) qu'une boucle de courant, qu'on appelle

dipôle magnétique, circule un champ $\vec{B}$. Le mouvement des électrons dans un atome peut générer un tel courant. Cependant les atomes peuvent ou non présenter un moment dipolaire magnétique global, suivant leur symétrie et l'orientation relative de leurs orbites électroniques.

Comme les molécules n'ont pas le pluspart du temps la symétrie sphérique, elles peuvent posséder un tel moment dipolaire magnétique. Néanmoins un fragment macroscopique de matière sera constitué de molécules orientées au hasard et ne présentera pas de moment dipolaire magnétique (analogue avec la polarisation électrique de la matière). Les matériaux qui présentent un moment dipolaire magnétique (en l'absence de champ appliqué) sont appelés ferromagnétiques.

Lorsqu'on applique un champ magnétique extérieur, le mouvement des électrons est perturbé et il y a apparition d'une polarisation magnétique globale ou aimantation de la substance. Le champ magnétique extérieur produit sur les électrons un mouvement de rotation (ou précession) autour du champ magnétique local (cf § IV.5) et chaque électron apporte une contribution au moment dipolaire magnétique total.

Considérons une substance ayant la forme cylindrique (fig 7.3) uniformément aimantée selon l'axe du cylindre. Cela signifie que les dipôles magnétiques moléculaires sont orientés parallèlement à l'axe du cylindre, donc que les courants électroniques circulaires qui les ont créés sont situés dans des plans perpendiculaires à l'axe du cylindre.

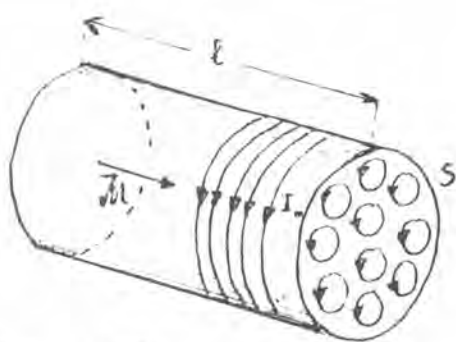


Fig 7.3

On voit sur la fig 7.3 (en regardant la tranche du cylindre) que les courants internes tendent à se compenser mutuellement en tout point, et qu'il n'y aura donc pas de courant "global" à l'intérieur du cylindre. Par contre

l'aimantation donne naissance à un courant, I_m , à la surface du matériau qui se conduit donc comme un solénoïde.

Le vecteur aimantation $\vec{M}$ est défini comme le moment magnétique des molécules par unité de volume. Si $\vec{m}$ est le moment dipolaire magnétique correspondant à la contribution de chaque molécule (ou de chaque atome) et si n est le nombre de molécules (ou d'atomes) par unité de volume, on a $\vec{M} = n \vec{m}$.

Le moment $\vec{m}$ s'exprime en Ampère $\times$ mètre carré, $\vec{M}$ sera équivalent à un courant par unité de longueur.

Il existe une relation entre $\vec{M}$ et I_m . En effet on peut considérer le cylindre comme un grand dipôle magnétique, de moment dipolaire magnétique

$$M(lS) = (MI)S$$

S représente la surface des circuits formés par le courant superficiel, or le moment dipolaire magnétique étant le produit de l'intensité du courant parcourant la boucle par la surface de la boucle, on a $I_m = \|\vec{M}\|/l$.

M est égal au courant par unité de longueur apparaissant à la surface des cylindres aimantés.

Le résultat est généralisable à d'autres situations géométriques et le courant par unité de longueur à la surface d'un morceau de matière aimantée est égal à la composante du vecteur aimantation $\vec{M}$ parallèle à un plan tangent à la surface du corps et il a une direction perpendiculaire à $\vec{M}$.

VII 4 Champ magnétisant

Les courants d'aimantation apparaissant à la surface d'un matériau placé dans un champ $\vec{B}$ sont des courants "figés" dans le sens où ils sont dus à des électrons liés à des atomes ou à des molécules et qu'ils ne sont donc pas libres de se déplacer à travers le matériau.

Dans d'autres substances, comme les métaux, existent des charges capables

de se déplacer librement, les courants dus aux déplacements de ces charges libres seront appelés courants libres. Comme pour les phénomènes de polarisation par un champ électrique (§ VII.2) nous distinguerons courants libres et courants d'aimantation.

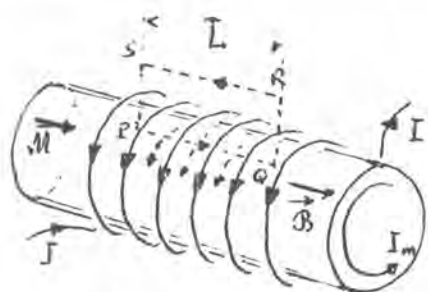


Fig 7.4.

Considérons le cylindre de la fig 7.3 placé à l'intérieur d'un solénoïde parcouru par le courant I (fig 7.4) & courant I produit un champ magnétique qui aimante le cylindre et donne naissance à un courant d'aimantation I_m , de même sens que I .

Le courant surfaciel par unité de longueur vaut M . Si le solénoïde a n spires par unité de longueur, le système constitué par le solénoïde et le cylindre aimanté qu'il entoure, équivaut à un seul solénoïde parcouru par un courant, par unité de longueur, égal à $nI + M$.

Le courant solénoïdal effectif donne naissance à un champ magnétique $\vec{B}$ parallèle à l'axe du cylindre dont le module est donné par (cf théorème d'Ampère § IV.9 et exercice Chap IV. n° 3)

$$\|\vec{B}\| = B = \mu_0 (nI + M)$$

ou encore

$$\frac{1}{\mu_0} B - M = nI$$

Cette expression donne les courants de conduction, ou courants libres, par unité de longueur, c'est la surface du cylindre, en fonction du champ magnétique $\vec{B}$ dans le milieu et de l'aimantation $\vec{M}$ du milieu.

Il résulte nécessaire d'introduire un nouveau champ de vecteurs, appelé champ magnétisant

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}$$

[7.2]

le champ magnétique s'exprime en ampère par mètre :

Si on calcule la circulation de ce champ le long du contour fermé PQRS (fig 7.4), on trouve

$$\oint_{PQRS} \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{libre}.$$

En effet la circulation le long de RS est nulle ($\vec{B}$ et $\vec{M}$, donc $\vec{H}$, y sont nuls), la circulation le long de QR et SP est nulle puisque $\vec{B}$ et $\vec{M}$, donc $\vec{H}$ sont perpendiculaires au contour ; enfin le long de PQ, $\vec{B}$ et $\vec{M}$ sont parallèles au contour et $\|\vec{H}\| = nI$. La longueur du segment PQ étant égale à L_1 on a

$$\oint_{PQRS} \vec{H} \cdot d\vec{l} = n I L_1 = I_{libre}$$

I_{libre} représentant le courant libre du solénoïde.

D'une manière générale, on peut vérifier que la circulation du champ magnétique le long d'un contour fermé est égale au courant libre total embrassé par le contour.

Ainsi, si le contour (L) embrasse les circuits I_1 et I_2 et un corps d'aimantation $\vec{M}$ (cf fig 7.5), la circulation de $\vec{H}$ le long de (L) n'embrasse que les courants I_1 et I_2 , alors que la circulation de $\vec{B}$ le long de (L) devra embrasser tous les courants, à savoir I_1 , I_2 et les courants dus à l'aimantation $\vec{M}$ du corps et qui résultent du mouvement d'électrons liés.

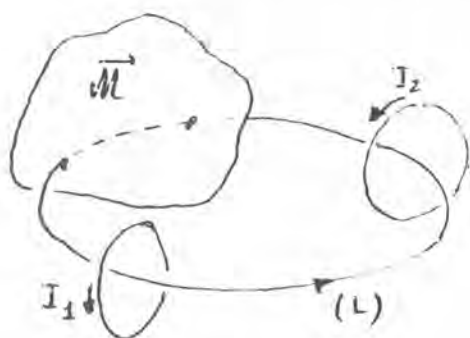


Fig. 7.5

L'équation [7.2] s'écrit

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$$

Comme l'aimantation $\vec{M}$ est liée physiquement au champ magnétique $\vec{B}$ résultant, on pourrait introduire une relation semblable à celle reliant $\vec{B}$ et $\vec{E}$.

Pour des raisons historiques, on écrira plutôt la relation reliant $\vec{M}$ et $\vec{H}$

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

qui il ne convient d'utiliser que dans les cas simples (matériaux diamagnétiques isolés, ou paramagnétiques ordinaires)

La quantité χ_m est appelée susceptibilité magnétique de la substance

la relation [72] s'écrit alors

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \chi_m \vec{H}) = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} = \mu \vec{H}$$

où $\mu = \mu_0 (1 + \chi_m)$ est la perméabilité du milieu

le rapport $\frac{\mu}{\mu_0} = 1 + \chi_m$ est la perméabilité relative du milieu

Lorsque la relation $\vec{B} = \mu \vec{H}$ est vérifiée, on a

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{\mu} \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = I_{libre}$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu I_{libre}$$

Le résultat est similaire au théorème d'Ampère, mais μ_0 est remplacé par μ perméabilité du milieu, et le courant total est remplacé par le courant libre. Ainsi le champ magnétique $\vec{B}$ créé par un courant rectiligne infini dans un milieu aimanté de perméabilité μ aura pour module

$$\|\vec{B}\| = B = \frac{\mu I}{2\pi r}$$

en un point distant de r du courant.

VII 5 Comportements macroscopiques de la matière

L'étude de tels comportements nécessite de commencer avec précision les mouvements des électrons dans un atome et fait donc appel à des notions dépassant les limites de ce cours (mécanique quantique notamment). Nous nous limiterons à donner qualitativement quelques résultats.

• Vis-à-vis du comportement dans un champ électrique on distingue les substances constituées de molécules ne possédant pas de moment dipolaire, c'est

à dire de molécules non planes, et celles ayant un tel moment

Pour les premières, l'effet d'un champ électrique statique se traduit par une polarisation de chaque atome, caractérisée par la polarisabilité α statique. Cette polarisabilité est reliée aux fréquences de rayonnement que peut absorber ou émettre cet atome (ou cette molécule). Lorsqu'on applique un champ $\vec{E}$ variable il peut y avoir résonance lorsque la fréquence de champ appliqué est égale à l'une des fréquences de rayonnement propres à l'atome (ou à la molécule). Cela se traduit par de fortes valeurs de la constante diélectrique ϵ_2 pour ces valeurs de fréquence.

Pour les substances constituées d'atomes (ou de molécules) possédant un moment dipolaire "permanent", mais dont la valeur moyenne est nulle compte tenu de l'orientation au hasard des divers atomes (ou molécules), le champ appliqué a pour effet d'aligner les différents moments dipolaires. L'alignement n'est cependant pas parfait à cause de l'agitation thermique et d'une part, des interactions entre atomes ou molécules d'une part.

Il existe quelques substances où les moments dipolaires permanents s'alignent d'eux-mêmes, ce étant dû à des interactions relativement fortes entre ces moments dipolaires. De telles substances sont appelées ferroélectriques.

- Dans un champ magnétique il y a apparition sur chaque atome d'un courant induit, tel que le moment dipolaire magnétique associé soit dans le sens opposé du champ extérieur appliqué. La substance acquiert automatiquement une aimantation $\vec{M}$ opposée au champ magnétique (résultat inverse de celui trouvé pour le champ électrique où la polarisation $\vec{P}$ était de même sens que $\vec{E}$). Le phénomène appelé dia-magnétisme existe dans toutes les substances, mais il est souvent masqué par les autres comportements décrits ci-dessus.

Si la substance est constituée de molécules possédant un moment dipolaire magnétique permanent, l'effet du champ appliqué est d'aligner ces moments

à long des champs. Ceci produit une aimantation appelée paramagnétisme.

Dans de telles substances les effets diamagnétiques (qui existent) sont totalement masqués par les effets paramagnétiques.

Il existe des substances possédant une aimantation, en l'absence de champ, due à l'alignement des moments dipolaires magnétiques (atomiques ou moléculaires) sous l'effet d'interactions mutuelles. (les aimants naturels sont constitués par de telles substances). On distingue différents comportements :

* ferromagnétisme : tous les moments dipolaires sont orientés dans le même sens (le fer par exemple)

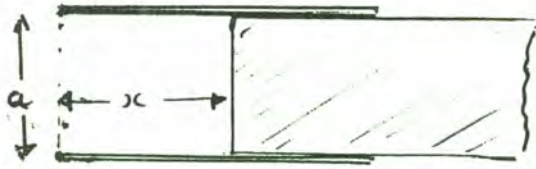
* anti-ferromagnétisme : les moments dipolaires atomiques sont dans des directions opposées d'un atome au suivant. L'aimantation globale est nulle.

* ferromagnétisme : les moments dipolaires sont également alternés, mais leur valeur n'est pas identique dans chacune des directions d'aimantation, l'aimantation globale n'est pas nulle (c'est le cas des ferrites)

L'étude des comportements magnétiques est compliquée par le fait que macroscopiquement le matériau est divisé en domaines d'aimant, que l'agitation thermique masque en partie la "régularité" des alignements de moments d'aimant.

Exercices sur le chapitre VII

1. Une plaque diélectrique est partiellement introduite entre les deux armatures d'un condensateur plan. En considérant le système comme



deux condensateurs en parallèle, calculer en fonction de x la capacité du système. (les armatures du condensateur plan sont des carrés de côté L)

Calculer l'énergie du système en fonction de x . En déduire la force F agissant sur la plaque diélectrique (en égalant le travail de la force F se déplaçant de dx à la variation d'énergie correspondante).

Chapitre VIII : Ondes planes dans le vide

Dans la nature, nous observons souvent des phénomènes qui se propagent dans l'espace : le son, la lumière. Bien que le mécanisme physique puisse être différent pour chacun des processus, ils ont des caractéristiques semblables, ce sont des mouvements ondulatoires caractérisés par la propagation d'une perturbation à travers l'espace. Cette perturbation peut être la déformation d'un ressort, la pression d'un gaz, le déplacement transversal d'une corde, dans tous ces cas il s'agit de vibrations "mécaniques". Lorsque la perturbation est due à un champ électromagnétique on parlera d'ondes électromagnétiques, elles jouent un rôle particulièrement important en physique puisqu'elles décrivent aussi bien les ondes radio, la lumière, les rayons X ou les rayons γ !

Après avoir rappelé (§ VIII.1) les caractéristiques principales d'un mouvement ondulatoire, nous nous attacherons à l'étude plus détaillée des ondes électromagnétiques.

VIII.1 Caractéristiques d'un mouvement ondulatoire

Soit une grandeur, représentée par la fonction $\xi(x, t)$ (on suppose le déplacement limité à la direction Ox , mais le raisonnement peut se généraliser à l'espace à plusieurs dimensions). Cette grandeur se déplace à la vitesse v , dans le sens des x croissants, sans se déformer. Cela signifie qu'à l'instant $t + \Delta t$, la grandeur ξ aura au point d'abscisse $x + \Delta x$, la même valeur qu'au point x à l'instant t , à condition d'avoir la relation

$$\Delta x = v \Delta t$$

v est appelée vitesse de phase. Le fig 8.1 illustre cette situation.

Les dépendances en x et en t de la grandeur ξ , ne sont donc pas

arbitraires mais telles que

$$\xi(x, t) = f(x - vt)$$

En effet: $x - vt = (x + \Delta x) - v(t + \Delta t)$

$$\text{soit } \Delta x = v \Delta t$$

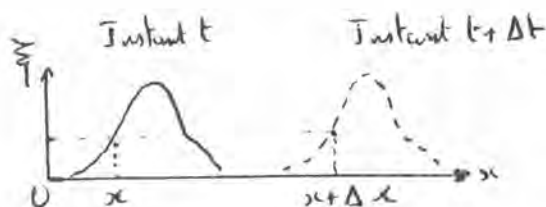


Fig 8 1

→ On peut maintenant d'une manière semblable qu'un mouvement ondulatoire se propageant dans le sens des x décroissants serait du type

$$\xi(x, t) = f(x + vt)$$

Un cas particulier est celui où la fonction $\xi(x, t)$ est une fonction sinusoïdale (ou harmonique), telle que

$$\xi(x, t) = \xi_0 \sin k(x - vt)$$

Dans cette expression, k a une signification particulière; en effet si on remplace x par $x + \frac{2\pi}{k}$, on obtient la même valeur de ξ .

$$\xi\left(x + \frac{2\pi}{k}, t\right) = \xi(x, t)$$

A un instant donné t , la grandeur ξ a même valeur en des points distants entre eux de $2\pi/k$. La quantité

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$

caractérise la périodicité dans l'espace, c'est la longueur d'onde

La quantité $k = 2\pi/\lambda$ représente le nombre de longueurs d'onde dans la distance 2π ; on l'appelle nombre d'onde (ou vecteur d'onde quand on travaille à plusieurs dimensions)

En un point donné, on constate que ξ prend la même valeur en des instants successifs séparés par l'intervalle de temps

$$\Delta t = \frac{2\pi}{kv} = \frac{\lambda}{v}$$

Cette quantité $T = \frac{\lambda}{v}$ est la période (temporelle) du phénomène.

Elle permet d'écrire $\xi_1(x, t)$ sous la forme

$$\xi_1(x, t) = \xi_0 \sin 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right)$$

Enfin, on introduit souvent la grandeur

$$\omega = kv = \frac{2\pi v}{\lambda} = \frac{2\pi}{T}$$

appelée pulsation (ou fréquence angulaire) de l'onde; dans ce cas on peut écrire

$\xi_1(x, t)$ sous la forme $\xi_1(x, t) = \xi_0 \sin(kx - \omega t)$

Dans toutes ces expressions ξ_0 représente l'amplitude de l'onde (valeur maximale de ξ_1).

VIII.2. Equation différentielle d'un mouvement ondulatoire

Soit une grandeur $\xi_1(x, t)$ de la forme

$$\xi_1(x, t) = f_1(x - vt) + f_2(x + vt) \quad [8.1]$$

superposition de deux mouvements ondulatoires, l'un se dirigeant selon les x croissants à la vitesse v , f_1 , l'autre se dirigeant avec la même vitesse et en sens opposé, f_2 .

La grandeur $\xi_1(x, t)$ satisfait à l'équation

$$\boxed{\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x^2}} \quad [8.2]$$

En effet, pour f_1 posons $u = x - vt$, en utilisant les propriétés de dérivation des fonctions composées, on peut écrire

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{df_1}{du} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{df_1}{du} \cdot 1 = \frac{df_1}{du}$$

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} = \frac{d}{du} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} \right) \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{d}{du} \left(\frac{df_1}{du} \right) \cdot 1 = \frac{d^2 f_1}{du^2}$$

De même
$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = \frac{df_1}{du} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{df_1}{du} (-v) = -v \frac{df_1}{du}$$

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial t^2} = \frac{d}{du} \left(\frac{\partial f_1}{\partial t} \right) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{d}{du} \left(-v \frac{df_1}{du} \right) (-v) = v^2 \frac{d^2 f_1}{du^2}$$

L'égalité $\frac{\partial^2 f_1}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}$ est bien vérifiée

Pour f_2 il suffit d'effectuer le même raisonnement en posant $u = x + vt$

Il faut noter que la forme de [8.1] est générale. Pour l'étude d'une onde se propageant dans une direction donnée (les x croissantes par exemple) seul le terme f_1 est à prendre en considération.

De plus, toute fonction dépendant de x et de t par l'intermédiaire de $(x - vt)$ satisfait l'équation [8.2], cela signifie que des signaux de formes diverses peuvent se propager. Très souvent on se limitera en physique à l'étude de la propagation de signaux (ou grandeurs) de forme simple. Par exemple le grandeur ξ sera de la forme $\xi(x, t) = \xi_0 \sin k(x - vt)$.

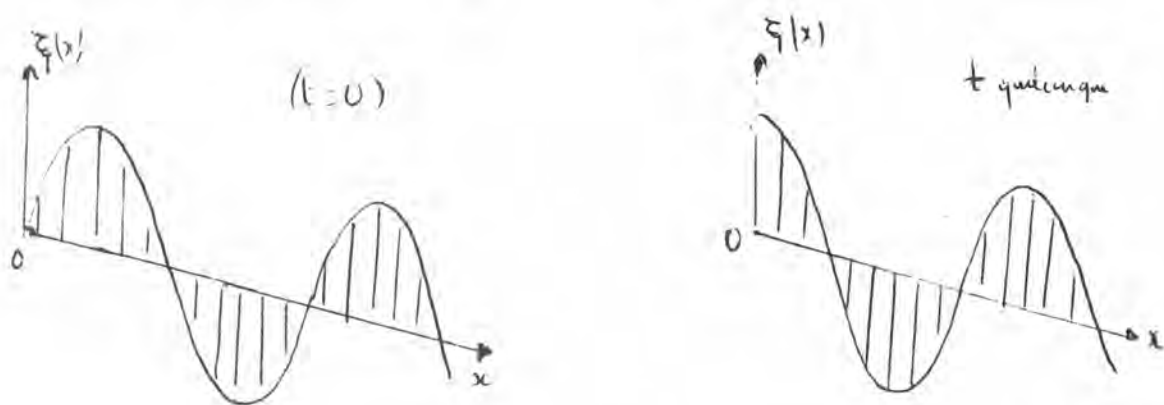


Fig 8.2

La fig 8.2 montre le signal à deux instants différents

VIII.3 Equation de propagation du champ électromagnétique

Dans le vide les équations de Maxwell (en l'absence de charges et de courants)

s'écrivent :

$$\text{div } \vec{E} = 0 \quad (1)$$

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad (2)$$

$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (3)$$

$$\text{rot } \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (4)$$

Prendons le rotationnel de l'expression (3) et, l'opérateur rotationnel agissant sur les coordonnées d'espace, la permutation de l'opérateur $\frac{\partial}{\partial t}$ et de l'opérateur $\vec{\text{rot}}$ étant possible, il vient

$$\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{E}) = \vec{\text{rot}}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\text{rot}} \vec{B}) = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

en utilisant la relation (4).

On peut montrer (annexe Maths § 20) que le laplacien d'un champ de vecteurs est défini par

$$\Delta \vec{A} = \vec{\text{grad}}(\text{div} \vec{A}) - \vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{A})$$

On a donc $\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{E}) = \vec{\text{grad}}(\text{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E} = -\Delta \vec{E}$ puisque $\text{div} \vec{E} = 0$ d'après (1).

Dans le vide, le champ $\vec{E}$ satisfait donc à l'équation

$$\boxed{\Delta \vec{E} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}} \quad [8.3]$$

Dans un cas général, la résolution de cette équation n'est pas simple. Nous nous limiterons à l'étude de cas simples.

On peut remarquer que le champ $\vec{B}$ satisfait une équation identique (il suffit de prendre le rotationnel de la relation (4))

$$\Delta \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \quad [8.3']$$

VIII 4 Onde électromagnétique plane

Nous avons vu (§ IV 6) que les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ créés en tout point de l'espace par une charge en mouvement étaient normaux l'un à l'autre (fig 4.7 par exemple).

Nous allons montrer que une solution possible des équations [8.3] et [8.3'] pour des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ se propageant suivant la direction Ox est donnée par un champ

$\vec{E}$ dirigé selon Oy et un champ $\vec{B}$ dirigé selon Oz

La composante E_y du champ $\vec{E}(x,t)$ dépendra uniquement de la quantité $(x - ct)$ où $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ est la vitesse de la lumière.

De même la composante B_z du champ $\vec{B}(x,t)$ dépend de la quantité $(x - ct)$.

→ Un cas particulièrement simple est donné par

$$E_y(x,t) = E_0 \sin k(x - ct) = E_0 \sin(kx - \omega t)$$

où nous avons introduit la relation liant ω la pulsation, k le nombre d'onde et c la vitesse de propagation d'un phénomène périodique.

Dans ce cas tout $\vec{E}$ n'a qu'une composante dirigée selon Oy et est égal à :

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = k E_0 \cos(kx - \omega t)$$

D'après l'équation (3), cette quantité doit être égale à $-\frac{\partial B_z}{\partial t}$

Cela implique que dans l'expression donnant B_z , de la forme

$$B_z(x,t) = B_0 \sin(kx - \omega t + \varphi)$$

on a donc $-\frac{\partial B_z}{\partial t} = +\omega B_0 \cos(kx - \omega t + \varphi) = k E_0 \cos(kx - \omega t)$

Il existe une relation entre les amplitudes et les phases de $\vec{E}$ et de $\vec{B}$

$$E_0 = c B_0 \quad \varphi = 0$$

La fig. 8.3 illustre la propagation de ces champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$

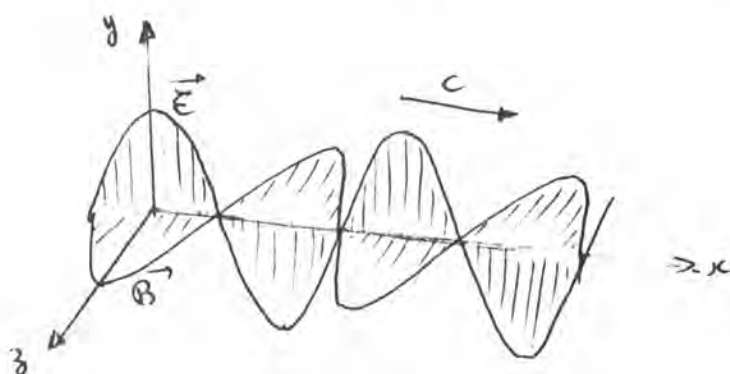


Fig. 8.3

le champ $\vec{E}$ oscille dans le plan xOy , le champ $\vec{B}$ oscille en phase dans le plan xOz

le cas que nous venons de décrire correspond à celui de l'onde plane polarisée linéairement

On constate ainsi que l'onde électromagnétique (c'est à dire le champ électromagnétique qui se propage) consiste en deux ondes couplées, l'onde électrique et l'onde magnétique.

→ Il existe, bien entendu, d'autres solutions qui satisfont les équations de Maxwell et les équations de propagation (8.3) et (8.3')

On aurait ainsi pu choisir le champ $\vec{E}$ dirigé selon Oz et le champ $\vec{B}$ dirigé selon Oy .

En combinant des solutions de type onde plane polarisée linéairement, on peut trouver des ondes polarisées circulairement

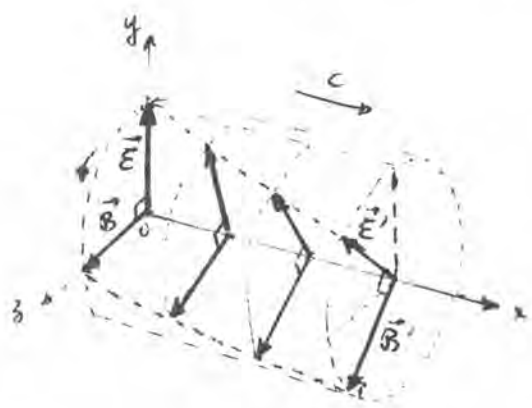


Fig. 8.4

les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ gardent une amplitude constante mais tournent autour de l'axe Ox , en restant à tout instant et en tout lieu normaux l'un à l'autre (cf fig 8.4)

→ D'une manière générale les ondes électromagnétiques planes sont transversales, les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ étant perpendiculaires entre eux et à la direction de propagation des ondes.

Cette prédiction théorique, déduite des équations de Maxwell, a été largement confirmée par l'expérience. Il faut noter que les équations de Maxwell admettent également des solutions correspondant à des ondes cylindriques ou sphériques. Dans tous les cas $\vec{E}$ et $\vec{B}$ restent normaux l'un à l'autre et normaux à la direction de propagation.

VIII. 5 Energie et quantité de mouvement d'une onde électromagnétique

La densité d'énergie associée au champ électrique $\vec{E}$ d'une onde

électromagnétique est donnée par (cf § VII.8)

$$E_d = \frac{1}{2} \epsilon_0 \|\vec{E}\|^2$$

A même la densité d'énergie magnétique associée à $\vec{B}$ (cf § VII.3)

$$E_{mag} = \frac{1}{2\mu_0} \|\vec{B}\|^2$$

Dans le cas de l'onde électromagnétique plane étudiée au paragraphe précédent

$$\|\vec{B}\| = \frac{\|\vec{E}\|}{c} \quad \text{et} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

$$\text{d'où} \quad E_{mag} = \frac{1}{2\mu_0} \frac{\|\vec{E}\|^2}{c^2} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \|\vec{E}\|^2 = E_d$$

La densité totale d'énergie associée à l'onde vaut donc

$$E = E_d + E_{mag} = \epsilon_0 \|\vec{E}\|^2$$

L'intensité de l'onde électromagnétique, c'est-à-dire l'énergie passant par unité de temps à travers une surface unité, est donc égale à

$$I = E \cdot c$$

(énergie contenue dans le volume cylindrique de longueur c et de section unité)

E dépendant de $\|\vec{E}\|$ varie au cours du temps. L'intensité moyenne de l'onde sera donnée par

$$I_{moy} = c \epsilon_0 \left[\|\vec{E}\|^2 \right]_{moy}$$

Dans le cas de l'onde électromagnétique sinusoidale,

$$\left[\|\vec{E}\|^2 \right]_{moy} = E_0^2 \left[\sin^2 k(x-ct) \right]_{moy} = \frac{E_0^2}{2}$$

(valeur moyenne de la fonction $\sin^2 u = 1/2$) d'où :

$$I_{moy} = \frac{1}{2} c \epsilon_0 E_0^2$$

Or si on calcule le flux du vecteur $\vec{E} \wedge \vec{B}$ à travers la même surface unité :

ce vecteur est dirigé selon la direction de propagation (fig 8.5), son module est égal à

$$\|\vec{E}\| \|\vec{B}\| = \frac{\|\vec{E}\|^2}{c} \quad \text{et la valeur moyenne}$$

du flux à travers S est égal à

$$\frac{1}{c} \|\vec{E}\|^2$$

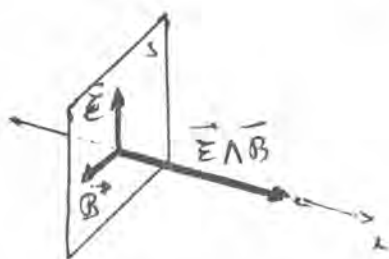


Fig 8.5

L'énergie qui traverse la surface S par unité de temps est donc donnée à un facteur près par le flux du vecteur $\vec{E} \wedge \vec{B}$.

On appelle vecteur de Poynting le vecteur $\epsilon_0 c^2 (\vec{E} \wedge \vec{B})$, son module est alors égal à I , l'intensité de l'onde électromagnétique et d'une manière générale

$$\iint_S \epsilon_0 c^2 (\vec{E} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{u}_n dS = \frac{dE}{dt}$$

Ce résultat est valable pour d'autres cas que l'onde électromagnétique plane.

Quantité de mouvement

En mécanique on relie la quantité de mouvement $\vec{p} = m\vec{v}$ d'un mobile de masse m à sa vitesse $\vec{v}$ à son énergie cinétique $E_c = \frac{1}{2} m v^2$ par

$$\|\vec{p}\| = \frac{2 E_c}{\|\vec{v}\|}$$

Dans le cas où la vitesse $\vec{v}$ se rapproche de celle de la lumière, la théorie de la relativité montre que cette relation n'est plus correcte, et que l'on a

$$p = \frac{E}{c}$$

Cette relation peut s'écrire, dans le cas de l'onde électromagnétique, sous la forme

$$\vec{p} = \epsilon_0 (\vec{E} \wedge \vec{B})$$

Une onde électromagnétique transporte de la quantité de mouvement aussi bien que de l'énergie.

Exercices du Chapitre VIII

1. Une onde harmonique est décrite par

$$\xi_1 = A \sin 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right)$$

et se propage sur un axe Ox .

- Que représentent les grandeurs A , λ et T ?
- Tracer sur un même graphique la perturbation en supposant qu'elle ait atteint le point $x=0$ aux temps $0, T/4, T/2, 3T/4, T$. (On prendra ξ_1 en ordonnée et x en abscisse)
- Tracer sur un même graphique la perturbation en supposant qu'elle ait atteint au temps $t=0$ les points $x=0, \lambda/6, \lambda/3, \lambda/2, 2\lambda/3, 5\lambda/6, \lambda$.
- Calculer la quantité $\partial \xi_1 / \partial t$ et tracer sur un même graphique cette quantité en supposant qu'en $x = \lambda/4$, $t = 0, T/4, T/2, 3T/4, T$.

2. Deux ondes de même fréquence et de même amplitude se propagent à la même vitesse dans des sens opposés.

- Déterminer l'onde résultante.
- Tracer cette onde résultante à différents instants. Conclusion ?

3. Deux ondes de même amplitude, de même fréquence, même vitesse mais déphasées de $\pi/4$ se propagent dans le même sens selon Ox .

- Déterminer l'onde résultante.
- Montrer qu'il s'agit d'une onde progressive de même vitesse et de même fréquence.

Annexe 1: Potentiel vecteur et gauge

L'une des relations de Maxwell s'écrit

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

Une des conséquences de cette relation est que $\vec{B}$ peut être considéré comme le rotationnel d'un champ de vecteurs $\vec{A}$; on dira que $\vec{B}$ dérive du potentiel-vecteur $\vec{A}$

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$$

Mais la connaissance de $\vec{B}$ ne suffit pas pour déterminer $\vec{A}$, en effet il existe une infinité de potentiels vecteurs qui ont le même rotationnel (ils diffèrent les uns des autres par le gradient d'un potentiel scalaire puisque $\text{rot}(\text{grad } V) = \vec{0}$)

Le choix du potentiel vecteur $\vec{A}$ nécessite donc une condition supplémentaire c'est le choix d'une gauge.

En électromagnétisme, lorsque on est en régime stationnaire, on utilise la gauge de Coulomb

$$\text{div } \vec{A} = 0 \quad [A1-1]$$

Dans le cas des régimes variables avec le temps, on utilise la gauge de Lorentz

$$\text{div } \vec{A} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \quad [A1-2]$$

Dans ce dernier cas on a vu que le champ $\vec{E}$ ne dérive plus d'un potentiel scalaire (cf § V.3). En effet $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} \neq 0$

Pour contre, la relation de Maxwell $\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ s'écrit

$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial}{\partial t} (\text{rot } \vec{A}) = - \text{rot} \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)$$

(on a permuté les dérivations spatiales et temporelle), d'où

$$\text{rot} \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \vec{0}$$

Cela signifie que en régime variable, c'est le vecteur $\left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)$ qui dérive d'un

potentiel scalaire V

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\text{grad } V$$

ou

$$\vec{E} = -\text{grad } V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad [A1-3]$$

A un champ de "style" électrostatique (dérivant d'un potentiel scalaire) s'ajoute un champ qui traduit l'intervention du phénomène d'induction.

Invariance de jauge

Soient $\vec{A}$ et V les potentiels vecteurs et scalaire dont dérivent deux champs $\vec{B}$ et $\vec{E}$. On remarque que $\vec{A}$ est défini au gradient d'une fonction scalaire près.

le potentiel-vecteur $\vec{A}'$ tel que $\vec{A}' = \vec{A} + \text{grad } \lambda$

satisfait donc lui aussi la condition $\text{rot } \vec{A}' = \vec{B}$. Mais un potentiel-vecteur $\vec{A}'$ on doit associer un potentiel scalaire V' tel que

$$\vec{E} = -\text{grad } V' - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} \text{ soit aussi égal à } -\text{grad } V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Cela signifie que $-\text{grad } V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\text{grad } V' - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} (\text{grad } \lambda)$

$$\text{grad } V' = \text{grad } (V - \frac{\partial \lambda}{\partial t})$$

$$V' = V - \frac{\partial \lambda}{\partial t}$$

les phénomènes observables (actions électromagnétiques sur des particules chargées par exemple) ne doivent pas dépendre du choix du couple des deux potentiels $(\vec{A}, V)$ ou $(\vec{A}', V')$. On dit qu'il doit y avoir invariance de jauge, la jauge étant donnée par un couple de potentiels et une condition particulière du type [A1-2]

Equations aux potentiels

De la relation de Maxwell $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ on déduit, en tenant compte de [A1-3]

$$\text{rot} (\text{rot } \vec{A}) = \text{grad} (\text{div } \vec{A}) - \Delta \vec{A} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(-\text{grad } V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)$$

$$\Delta \vec{A} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j} + \text{grad} \left(\text{div} \vec{A} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial V}{\partial t} \right)$$

et en tenant compte de la condition de jauge de Lorentz [A1-2]

$$\Delta \vec{A} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j} \quad \text{[A1-4]}$$

De même la première relation de Maxwell $\text{div} \vec{E} = \rho/\epsilon_0$ devient :

$$\text{div} \left[-\text{grad} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right] = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\text{ou} \quad + \Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} - \frac{\partial}{\partial t} (\text{div} \vec{A})$$

A joutons à chacun des membres le terme $-\epsilon_0 \mu_0 \partial^2 V / \partial t^2$ pour retrouver une expression analogue à celle trouvée ci-dessus pour le potentiel-vecteur $\vec{A}$

$$\Delta V - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} - \frac{\partial}{\partial t} (\text{div} \vec{A} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial V}{\partial t})$$

qui en tenant compte de [A1-2] se simplifie

$$\Delta V - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{[A1-5]}$$

Dans de nombreux cas, la connaissance des "sources" du champ électromagnétique, c'est-à-dire les fonctions ρ et $\vec{j}$, permettra à l'aide de [A1-4] et de [A1-5] de déterminer les potentiels $\vec{A}$ et V ; de ces potentiels on déduira les champs $\vec{B}$ et $\vec{E}$.

Annexe 2 Électromagnétisme et relativité

L'étude de l'électromagnétisme peut donner lieu à quelques situations paradoxales.

Ainsi soient deux charges Q et q situées dans un repère $O'x'y'z'$ et se déplacent à une vitesse $\vec{v}$ constante dans un repère $Ox y z$. Pour un observateur placé en O' se déplaçant avec le repère $O'x'y'z'$, les charges Q et q sont fixes et la force exercée par Q sur q est du type $\vec{F}' = q \vec{E}'$, où $\vec{E}'$ est le champ produit par Q au point où est située q (tel que le mesure l'observateur O').

Pour contre un observateur placé en O et relié au repère $Ox y z$ voit la charge Q se déplacer à la vitesse $\vec{v}$, elle crée donc un champ $\vec{B}$. Comme la charge q se déplace également pour cet observateur à la vitesse $\vec{v}$, la force totale exercée par Q sur q sera du type $\vec{F} = q (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$.

Un autre exemple est celui de deux observateurs, également en translation uniforme l'un par rapport à l'autre, observant l'induction électromagnétique liée à la variation de flux d'un champ $\vec{B}$ à travers un circuit.

Pour l'observateur placé dans un repère où le circuit est immobile, l'induction est due à une variation du champ $\vec{B}$, il peut relier cette variation à un champ $\vec{E}$ (par [5.3]) et mesurer l'action de $\vec{E}$ sur une charge au repos dans son propre repère.

Inversement pour un ^{autre} observateur la f.e.m. induite sera attribuée à la force $q \vec{v} \wedge \vec{B}$ exercée par le champ $\vec{B}$ constant sur les charges du conducteur se déplaçant à la vitesse $\vec{v}$.

Ces situations peuvent paraître paradoxales dans la mesure où les

phénomènes physiques doivent pouvoir se décrire de manière semblable dans deux repères galiléens, c'est-à-dire en translation uniforme l'un par rapport à l'autre (cf module PH2 Mécanique, par exemple)

La solution à ce paradoxe est donnée par les lois de la relativité. Nous n'entrons pas ici dans une étude détaillée de ces lois, mais il est important de savoir qu'il existe une relation entre le principe de la relativité d'une part, la dépendance de $\vec{E}$ et de $\vec{B}$ d'autre part.

Un autre aspect de ce problème est celui des temps mis pour transmettre une interaction (entre deux charges, par exemple). On a vu dans le chapitre VIII que le champ électromagnétique se propageait à la vitesse de la lumière, c . On pourrait montrer que les solutions des équations aux potentiels établies dans l'annexe précédente tiennent explicitement compte de cette vitesse de transmission. Ainsi le potentiel scalaire V au point M à l'instant t dépendra de la distribution de charge ρ en tout point de l'espace, P , cette densité de charge ρ étant mesurée à l'instant $(t - \frac{r}{c})$, si r est la distance de P à M .

Pour cette raison les solutions des équations [A1-4] et [A1-5] sont appelées potentiels retardés.

Sommaire

V le champ électromagnétique

V.1	Loi de Faraday - Henry	1
V.2	Induction électromagnétique due au mouvement relatif d'un conducteur et d'un champ magnétique	4
V.3	Potentiel électrique et induction électromagnétique	8
V.4	Forme différentielle de la loi de Faraday - Henry	9
V.5	Principe de conservation de la charge électrique	10
V.6	Loi d'Ampère - Maxwell	11
V.7	Forme différentielle de la loi d'Ampère - Maxwell	13
V.8	Equations de Maxwell	14

VI Circuits électriques en régime variable

VI.1	Auto-induction	17
VI.2	Établissement du courant dans un circuit	18
VI.3	Énergie du champ magnétique	19
VI.4	Oscillations électriques libres dans un circuit	21
VI.5	Oscillations électriques forcées dans un circuit	23
VI.6	Induction mutuelle	26
VI.7	Conclusion	27

VII le champ électromagnétique dans la matière

VII.1	Polarisation de la matière	29
VII.2	Déplacement électrique	31
VII.3	Aimantation de la matière	33

VII 4	Champ magnétisant	35
VII 5	Comportements macroscopiques de la matière	38

VIII Ondes planes dans le vide

VIII 1	Caractéristiques d'un mouvement oscillatoire	41
VIII 2	Equation différentielle d'un mouvement oscillatoire	43
VIII 3	Equation de propagation du champ électromagnétique	44
VIII 4	Onde électromagnétique plane	45
VIII 5	Energie et Quantité de mouvement d'une onde élect	47

Annexe 1	Potentiel vecteur et jauge	50
----------	----------------------------	----

Annexe 2	Electromagnétisme et relativité	53
----------	---------------------------------	----