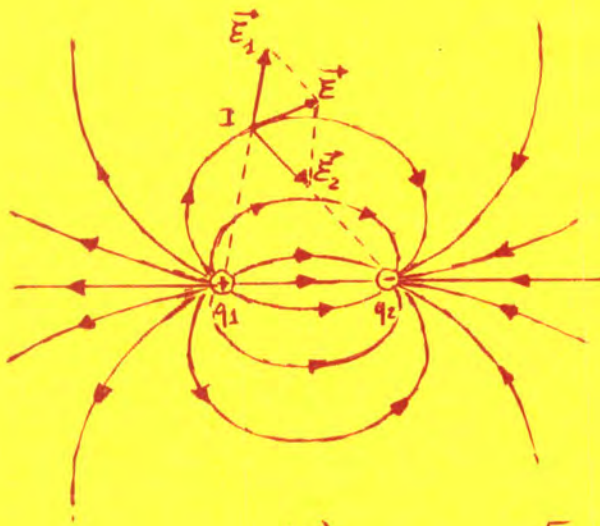


direction et même sens en tout point. Les lignes de champ sont alors des droites parallèles.

UNIVERSITÉ
DE NANCY I

CENTRE
DE TÉLÉ-ENSEIGNEMENT
UNIVERSITAIRE
DE NANCY II



(a)

Fig 1.7



(b)

I.5 Quantification de la charge électrique

physique

L'expérience de la goutte d'huile de Millikan a permis de montrer que la charge électrique d'un corps ne pouvait pas être indéfiniment divisée, mais qu'en fait elle était égale au multiple entier d'une quantité finie.

MODULE PH3 :

ÉLECTROMAGNÉTISME (I)

COURS DE P. GUILMIN

Sans entrer dans le détail de l'expérience, Millikan observait la chute d'une goutte d'huile placée dans un champ électrique E vertical, constant, la vitesse de la goutte est reliée à la charge électrique de la goutte, or cette charge peut augmenter ou diminuer au cours de la chute par transfert de charges provenant des molécules d'air de l'enceinte, molécules ionisées (naturellement par rayonnement cosmique ou artificiellement en introduisant dans l'enceinte une source de rayons X ou de rayons γ)

Millikan a constaté que la variation de la vitesse de la goutte se faisait par sauts ; il en a conclu que toute variation de la charge de la goutte était un multiple entier d'une charge fondamentale, e , dont la valeur est

DIPLOME D'ÉTUDES UNIVERSITAIRES GÉNÉRALES
SCIENCES DES STRUCTURES ET DE LA MATIÈRE
MATHÉMATIQUES - PHYSIQUE - INFORMATIQUE
SCIENCES DE L'ÉDUCATION

C'est, en valeur absolue, la charge portée par l'électron ou par le proton.

la maquette de la couverture a été réalisée par le L.E.P. Cyfflé - NANCY

© Édité et imprimé par l'Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (Université de Nancy I - Faculté des Sciences)
B.P. 239 - 54506 VANDOEUVRE-les-NANCY CEDEX

Dépôt légal : 1er trimestre 1988

n° de la publication : 2-85406-109-8

Le Responsable de la collection : Philippe LOMBARD

Ref. N 542

Introduction

Ce module PH3 - Electromagnétisme (1^{ère} partie) est consacré à l'étude des phénomènes électriques et magnétiques ne dépendant pas du temps (régimes statiques ou stationnaires).

Dans une première partie (Chapitres I et II) nous étudierons les effets dus à des charges électriques en équilibre, fixes : c'est l'électrostatique. On introduira notamment les notions de champ électrique et de potentiel dont il dérive. Cette première partie pourra paraître éloignée des situations rencontrées dans la vie courante, d'autant plus qu'on se limitera à l'étude des systèmes de charges placées dans le vide ! Que cela ne décourage pas le lecteur !

Dans une seconde partie nous étudierons le cas où les charges sont mobiles nous entrons dans le domaine de l'électromagnétisme. Seules les situations où les grandeurs ne varient pas au cours du temps seront étudiées. Cette étude se fera en deux chapitres distincts : l'électrocinétique (Chapitre III)

le magnétostatique (Chapitre IV)

Cette seconde partie paraîtra plus proche de faits expérimentaux observés et étudiés dès le collège (circuits électriques, ...)

Afin de ne pas surcharger le cours, les exemples d'application des résultats importants du cours sont volontairement limités. Le lecteur trouvera à la fin de chaque chapitre d'autres exercices d'application du cours. Il pourra, s'il le desire, se reporter à d'autres ouvrages traitant les principes fondamentaux de l'électromagnétisme. Parmi eux on peut citer :

• Physique MP-PC 1^{ère} Année Électricité (Tome II) et Electromagnétisme (début du Tome III) Collection "Du Cours aux Applications" par P. ALAIS, M. HULIN et Y. SIMON

Édit. A. Elen. Ouvrage comportant de nombreux exercices corrigés.

: Physique Générale Tome II (Champ et Ondes) de A. ALONSO, A. E. J. FINN

Intéréditum. Une présentation moderne de l'électromagnétisme dont ce cours a largement profité.

Pour terminer cette introduction, nous avons tenté de limiter au maximum l'utilisation d'outils mathématiques qui peuvent dérouter le lecteur. L'introduction des outils mathématiques indispensables (opérateurs gradient, divergence, rotationnel, angle solide, ...) fait l'objet d'une annexe à la fin du cours.

L'étude des phénomènes variant au cours du temps (courants induits, courants alternatifs, phénomènes de propagation, ...) ainsi que quelques notions d'électromagnétisme dans la matière seront traitées dans le module PH4 électromagnétisme (2^{ème} partie).

Chapitre I Le champ électrostatique

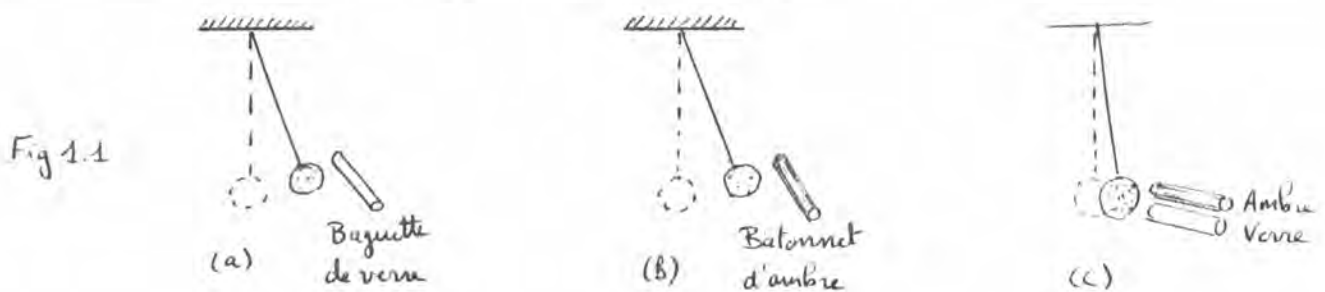
I.1 La charge électrique

Nous pouvons tous remarquer qu'après avoir frotté une baguette de verre avec un morceau de soie, ou qu'après s'être passé un peigne dans les cheveux, la baguette ou le peigne attirent des morceaux de papier (le phénomène est d'autant plus facile à montrer que le temps est sec !)

On peut conclure qu'à suite de l'effet du frottement, la baguette ou le peigne se sont électrisés (le mot provient du mot grec "elektron", qui signifie ambre, les premières expériences ayant été réalisées avec des batonnets d'ambre, sorte de résine, frottés avec de la fourrure) ; la baguette et le peigne ont acquis des propriétés nouvelles qui se traduisent par des interactions entre ces corps, ou entre ce corps et les autres corps.

Si cette interaction électrique rappelle l'interaction gravitationnelle entre deux masses (voir module PH2), elle en diffère cependant de manière importante.

En premier lieu, il n'y a qu'une espèce d'interaction gravitationnelle, qui a pour effet d'attirer entre elles deux masses (attraction universelle). Au contraire on peut distinguer deux espèces d'interaction électrique. Pour cela effectuons les expériences suivantes avec une boule de liège suspendue à un fil.



Nous constatons que la baguette de verre "électrisée" attire la boule de liège (a), que la baguette d'ambre "électrisée" attire également la boule de liège (b), par contre

que la boule de liège n'est presque plus attirée lorsqu'on présente simultanément les deux baguettes (c).

On en déduit que l'attraction exercée ^{sur} la boule de liège par la baguette de verre électrisée n'est pas du même type que l'attraction exercée par la baguette d'ambre, et que lorsque les deux baguettes sont présentées simultanément les deux processus se neutralisent. Proceçons alors à d'autres expériences : prenons deux boules de liège suspendues chacune à un fil.

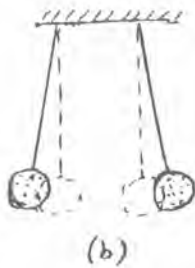
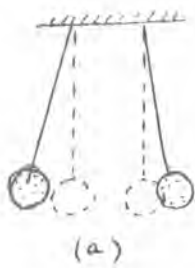


Fig 1.2

- (a) Mettons chaque boule de liège en contact avec une baguette de verre électrisée ; lorsqu'on approche ensuite les deux boules de liège, celles-ci se repoussent
- (b) Si nous effectuons la même opération en mettant en contact les deux boules de liège avec une baguette d'ambre électrisée, on constate là encore que les deux boules se repoussent
- (c) Enfin, si nous mettons en contact une des boules de liège avec la baguette de verre et l'autre boule de liège avec la baguette d'ambre, puis qu'on approche les deux boules, celles-ci s'attirent

On en conclut que l'interaction électrique peut être attractive ou répulsive.

On émet l'hypothèse qu'il existe deux types d'états électrisés, l'un qualifié de positif (ou état d'électricité vitreuse), l'autre de négatif (ou état d'électricité résineuse).

Des expériences de la fig. 1.2 nous déduisons que deux corps dans des états électriques de même signe se repoussent, alors que deux corps dans des états électriques opposés s'attirent.

Remarques pour comprendre les expériences précédentes -

- La plupart des corps semblent porteurs d'électricité positive et négative en quantités égales, c'est à dire qu'ils sont neutres électriquement. Ainsi, l'interaction électrique résultante entre deux corps macroscopiques est quasiment nulle. En frottant certains corps, on peut "arracher" préférentiellement un type d'électricité et, après frottement, le corps reste "chargé" positivement ou négativement.
- L'interaction électrique est bien plus forte que l'interaction gravitationnelle. Cette dernière n'aurait sans doute jamais été observée si, de fait, les corps macroscopiques n'étaient pas neutres électriquement !

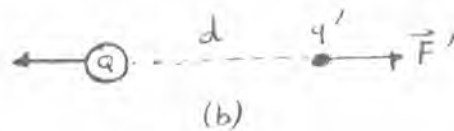
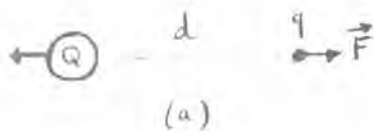
I.2. Mesure de la charge - Conservation de la charge

Nous caractérisons l'état d'électrisation d'un corps par sa charge électrique (ou simplement charge) notée q . Il y a les charges positives et les charges négatives. La charge résultante d'un corps est la somme algébrique de ses charges positives et négatives. Lorsque cette somme est nulle, le corps est dit électriquement neutre.

En chimie les ions sont des exemples de particules possédant une charge différente de zéro, lorsque celle-ci est positive on parlera de cations (se déposant à la cathode d'une cuve d'électrolyse), lorsque celle-ci est négative on parlera d'anions (se déposant à l'anode).

Pour mesurer la charge q d'un corps, nous utiliserons une charge "étalon" que l'on prendra arbitrairement égale à l'unité (procédure semblable à celle utilisée pour mesurer les masses).

Si nous plaçons une charge inconnue q en présence d'un corps arbitraire chargé (charge Q), on constate que ce corps chargé exerce sur q une force $\vec{F}$ (fig 1.3 a) (On peut noter que q exerce la force $-\vec{F}$ sur Q).



Si on place la charge étalon q' à la même distance d de Q , Q exerce alors sur q' une force $\vec{F}'$ (fig. 1.3 b). Par hypothèse les charges q et q' sont supposées proportionnelles aux ~~charges~~ forces $\vec{F}$ et $\vec{F}'$

$$q/q' = F/F'$$

Remarque F et F' sont considérées comme des valeurs algébriques (choix d'un sens positif le long de l'axe reliant les charges); le rapport q/q' peut donc être positif ou négatif.

Si q' est la charge unité, nous disposons d'un moyen de mesurer q

Une autre constatation expérimentale importante est la conservation de la charge; dans tous les processus observés dans la nature, la charge totale d'un système isolé se conserve.

I.3 Loi de Coulomb

La loi de Coulomb (énoncée dès 1800) décrit l'interaction entre deux charges au repos.

L'interaction électrostatique entre deux particules chargées est proportionnelle à leurs charges, et inversement proportionnelle au carré de la distance qui les sépare; elle est dirigée suivant la droite joignant les deux charges

L'expression mathématique de la force $\vec{F}$ exercée par la charge q sur la charge q' sera :

$$\boxed{\vec{F} = K_e \frac{q q'}{r^2} \vec{u}_r} \quad [1.1]$$

où r est la distance entre les charges, K_e une constante (qui dépend du choix des unités) et $\vec{u}_r$ un vecteur unitaire, dirigé de q vers q' , le long de la

droite joignant ces deux charges

Pour la loi de Coulomb, la constante K_e est fixée arbitrairement dans le système international (S.I.) à la valeur

$$K_e = 10^{-7} \times c^2 = 8,9874 \cdot 10^9 \text{ newtons} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2}$$

où c est la vitesse de la lumière ($\approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$). On prend souvent $K_e = 9 \cdot 10^9 \text{ en S.I.}$

Cela permet de fixer l'unité de charge, le coulomb, symbolisée par la lettre C .
Le coulomb est la charge qui placée dans le vide à un mètre d'une charge identique la repousse avec une force de $8,9874 \cdot 10^9 \text{ newtons}$.

On peut noter que la constante K_e s'exprime en $\text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2}$.

Pour la facilité des calculs on exprime K_e sous la forme

$$K_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

où la constante ϵ_0 est la permittivité du vide, la force d'interaction s'écrit

$$F = \frac{q q'}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Sous cette forme, une valeur négative de F correspond à une attraction, une valeur positive de F à une répulsion.

Attention! les forces d'interaction électrique (comme toute autre force) sont vectorielles ; lorsqu'on étudie un système constitué de plusieurs charges, et qu'on desire calculer la force exercée sur une charge par toutes les autres charges, il faut ajouter vectoremment les différentes forces d'interaction.

I.4 Champ électrique

De même qu'il est possible de définir le champ de gravitation à partir de la force d'interaction gravitationnelle, nous pouvons définir le champ électrique $\vec{E}$ à partir de la force d'interaction électrique $\vec{F}$.

agissant sur une charge q , force due à la présence d'une ou plusieurs autres charges.

Soyent trois charges q_1, q_2, q_3 exerçant sur la charge q placée en M la force $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$

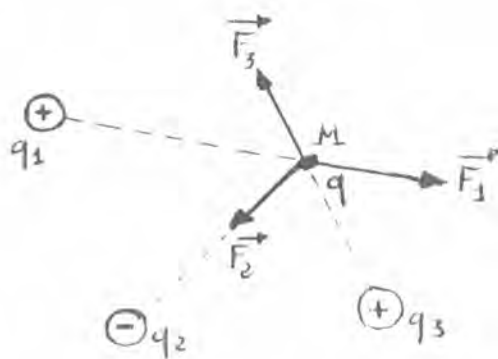


Fig 1.4

où $\|\vec{F}_1\| = \frac{q q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1^2}$, $\|\vec{F}_2\| = \frac{q q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2^2}$, ...

Chaque des forces $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ et $\vec{F}_3$ étant proportionnelle à q , la force totale $\vec{F}$ peut s'écrire :

$$\boxed{\vec{F} = q \vec{E}} \quad [1.2]$$

$\vec{E}$ est le champ électrique créé au point M par l'ensemble des charges q_1, q_2, q_3 . L'intensité de $\vec{E}$ est égale à la force exercée sur une charge unité placée en M .

Le champ $\vec{E}$ s'exprime en newton par coulomb. On verra un peu plus loin qu'il s'exprime plus couramment en volts par mètre.

Remarque le champ $\vec{E}$ exerce en un point M donne des forces de sens opposés selon que la charge q placée en M est positive ou négative. Si on applique le champ $\vec{E}$ à une région de l'espace où sont présentes simultanément des charges positives et des charges négatives (ce qui est le cas de la plupart des corps macroscopiques) le champ $\vec{E}$ tendra à déplacer les charges positives et les charges négatives en sens contraire. On dira qu'il y a polarisation.

En reprenant l'expression mathématique de la loi de Coulomb (§ I.3), le champ électrique $\vec{E}$ créé par la charge q , située en O , au point M s'écrit

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$$

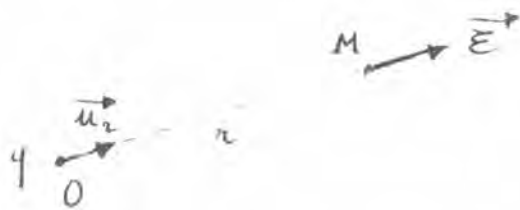


Fig 15

le champ créé par une charge ponctuelle est radial. En effet, les lignes de champ (lignes tangentes en chaque point de l'espace au vecteur $\vec{E}$ en ce point) sont les rayons vecteurs OM .

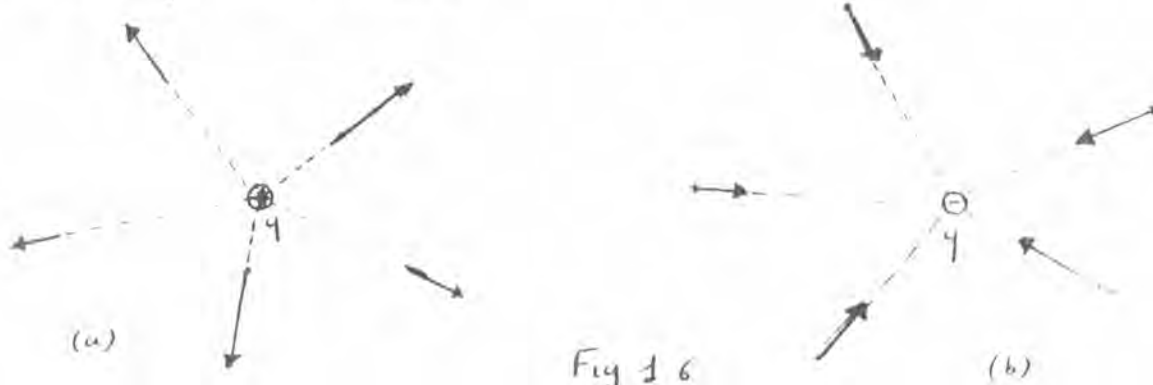


Fig 16

La figure 16(a) montre les lignes de champ de champ $\vec{E}$ produit par une charge ponctuelle positive ; la figure 16(b) les montre pour une charge ponctuelle négative.

Remarque ces lignes de champ sont également appelées lignes de force, car elles définissent en tout point la direction de la force que subirait une charge placée en ce point.

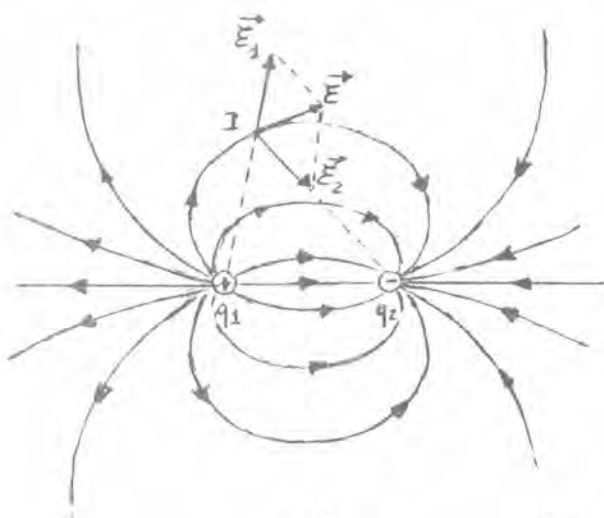
Lorsque le champ en un point est créé par plusieurs charges (voir fig 14), le champ électrique résultant est la somme vectorielle des champs produits par chacune des charges

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \dots = \sum_i \vec{E}_i$$

Les figures 17(a) et 17(b) représentent les lignes de champ du champ $\vec{E}$ créé respectivement par deux charges égales et de signe contraire (a) et par deux charges identiques (b).

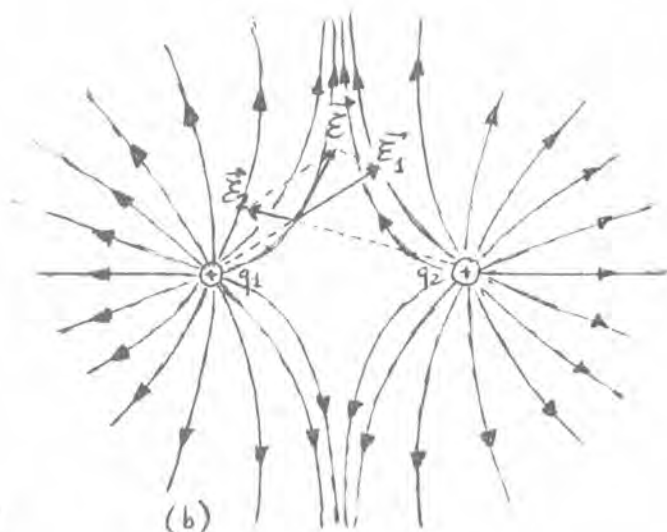
Un cas particulier, que nous rencontrerons dans la suite de ce cours, est celui du champ électrique uniforme, c'est à dire ayant même grandeur, même

direction et même sens en tout point. Les lignes de champ sont alors des droites parallèles.



(a)

Fig 1.7



(b)

I.5 Quantification de la charge électrique

L'expérience de la goutte d'huile de Millikan a permis de montrer que la charge électrique d'un corps ne pouvait pas être indéfiniment divisée, mais qu'en fait elle était égale au multiple entier d'une quantité finie.

Sans entrer dans le détail de l'expérience, Millikan observait la chute d'une goutte d'huile placée dans un champ électrique $\vec{E}$ vertical, constant; la vitesse de la goutte est reliée à la charge électrique de la goutte, or cette charge peut augmenter ou diminuer au cours de la chute par transfert de charges provenant des molécules d'air de l'enceinte, molécules ionisées (naturellement par rayonnement cosmique ou artificiellement en introduisant dans l'enceinte une source de rayons X ou de rayons γ).

Millikan a constaté que la variation de la vitesse de la goutte se faisait par sauts; il en a conclu que toute variation de la charge de la goutte était un multiple entier d'une charge fondamentale, e , dont la valeur est

$$e = 1,6021 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

C'est, en valeur absolue, la charge portée par l'électron ou par le proton.

Toutes les charges observées dans la nature sont égales ou multiples de cette charge élémentaire. Nous abordons ici la notion de quantification, qui est à la base des développements récents de la physique.

On peut noter que les théories les plus récentes de la physique des particules introduisent des "particules" élémentaires, appelées quarks, dont la charge électrique est une fraction de e .

I.6. Potentiel électrique

Une particule chargée, placée dans un champ électrique, possède une certaine énergie potentielle ; en effet le champ exerce sur elle une force et du travail a donc dû être fourni pour amener la charge au point considéré (On retrouve ici une analogie avec le champ de gravitation et l'énergie potentielle de gravitation). De plus un travail est effectué par le champ électrique lorsque une charge se déplace d'un point à un autre.

Le potentiel électrique en un point où existe un champ électrique $\vec{E}$ est défini comme l'énergie potentielle d'une charge unité placée en ce point. Il s'agit donc d'une grandeur scalaire.

Si on désigne par V le potentiel électrique en un point donné, et par E_p l'énergie potentielle d'une charge unité placée en ce point, on a

$$V = \frac{E_p}{q} \quad \text{ou} \quad E_p = q V$$

Le choix ^{du zéro} de l'énergie potentielle détermine le zéro du potentiel électrique, ce choix est arbitraire. Dans la plupart des cas, et notamment lorsqu'il n'y a pas de charges à l'infini, le zéro du potentiel électrique est pris à l'infini.

L'unité de potentiel, en système international, est donc le joule par coulomb, on l'appelle le volt.

On peut voir que le potentiel électrique et le champ électrique en un point

ne sont pas des grandeurs indépendantes.

Supposons qu'une charge q se déplace de A à B dans un champ $\vec{E}$ (fig 1.8)

la variation d'énergie potentielle de la charge

est alors :

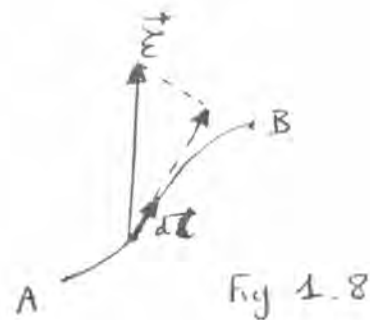
$$(E_P)_B - (E_P)_A = q (V_B - V_A)$$


Fig 1.8

Or cette différence d'énergie potentielle correspond au travail fourni par le champ électrique $\vec{E}$ pour déplacer la charge q de A à B .

Attention! Quand on parle du travail "fourni" par le champ $\vec{E}$, celui-ci peut être positif ou négatif selon qu'il s'agit d'un travail "moteur" ou d'un travail "résistant".

Le travail élémentaire δW correspondant au déplacement $d\vec{l}$ de la charge est défini par :

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{l} = q \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Le travail total pour déplacer la charge q de A à B est donc :

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B \delta W = q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

L'intégrale étant une intégrale curviligne calculée le long de la trajectoire qui relie les points A à B .

Attention! La relation entre $(E_P)_B - (E_P)_A$ d'un part, $W_{A \rightarrow B}$ d'autre part s'écrit :

$$(E_P)_B - (E_P)_A = - W_{A \rightarrow B}$$

Le signe $-$ devant $W_{A \rightarrow B}$ s'explique physiquement (analogie avec la gravitation) Si le déplacement de la charge se fait en sens opposé au champ $\vec{E}$,

l'énergie potentielle de la charge q croît : $(E_P)_B > (E_P)_A$ alors que le travail $W_{A \rightarrow B}$ est négatif ($\vec{E}$ et $d\vec{l}$ de sens contraires) (Fig 1.9a)

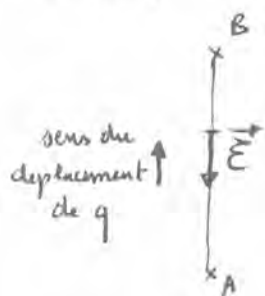


Fig 1.9 (a)

Inversement, si le déplacement de la charge se fait dans le même sens que celui de $\vec{E}$, l'énergie potentielle décroît, alors que $W_{A \rightarrow B}$ est positif.

On obtient donc, en éliminant la charge q entre les deux quantités que l'on égale

$$V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

On remarque que si les points A et B coïncident, le chemin d'intégration est alors une courbe fermée et on a $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$

Le travail fourni par le champ électrique à une charge parcourant un circuit fermé est nul ; le champ électrique dérive donc d'un potentiel. D'où

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_A^B dV$$

Si E_t est la composante de $\vec{E}$ tangente à la trajectoire (Fig 12), $\vec{E} \cdot d\vec{l} = E_t dl$ d'où

$$E_t dl = - dV$$

ou encore, pour un déplacement dl infiniment petit $E_t = - \frac{\partial V}{\partial l}$

Ce résultat signifie que la composante du champ électrique dans une direction donnée est égale à la variation changée de signe du potentiel électrique par unité de longueur dans cette direction.

Ainsi, en coordonnées cartésiennes, les composantes E_x , E_y et E_z de $\vec{E}$ sont données par :

$$E_x = - \partial V / \partial x \quad E_y = - \partial V / \partial y \quad E_z = - \partial V / \partial z$$

Ces relations peuvent s'écrire d'une manière beaucoup plus générale à l'aide de l'opérateur gradient (cf annexe)

$$\boxed{\vec{E} = - \overrightarrow{\text{grad } V}} \quad [13]$$

On dit que le champ $\vec{E}$ dérive du potentiel scalaire V

La relation très simple entre le champ électrique et le potentiel électrique montre qu'on peut exprimer un champ électrique en Volt par mètre (plutôt qu'en newton par coulomb)

I 7 Potentiel d'une charge ponctuelle

Nous avons vu (voir fig 15) qu'une charge ponctuelle produit un champ

radial. Dans ce cas en projetant l'équation [1.3] selon n importe quel rayon OM on obtient

$$\|\vec{E}\| = - \partial V / \partial r$$

$$\text{Or } \|\vec{E}\| = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = - \frac{\partial V}{\partial r}$$

L'intégration par rapport à la variable r donne $\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{r}\right) = -V + \text{constante}$

En supposant $V=0$ à l'infini, on définit le potentiel électrique d'une charge ponctuelle :

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Son signe est celui de la charge q

Si on a plusieurs charges $q_1, q_2, q_3, \dots$ le potentiel électrique créé en un point M (voir fig 1.4) sera la somme scalaire des potentiels dus à chacune des charges :

$$V = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2} + \dots = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i}$$

Remarque dans le cas de systèmes constitués de plusieurs charges il est souvent judicieux de calculer le potentiel en tout point M et d'en déduire le champ à l'aide de la relation [1.3], plutôt que de procéder dans l'ordre inverse. En effet la somme scalaire des potentiels individuels est souvent plus simple à effectuer que la somme vectorielle des champs électriques créés par chaque charge.

Les surfaces qui ont même potentiel électrique en tout point sont appelées surfaces équipotentielles.

Pour une charge ponctuelle les surfaces équipotentielles sont des sphères centrées sur la charge. A chaque sphère correspond une valeur différente du potentiel

M

On peut montrer qu'en tout point^M de l'espace la ligne de champ qui y passe est orthogonale à la surface équipotentielle contenant le point M . En effet soit M' un point de la même surface équipotentielle voisin de M

Par définition du potentiel $V_M - V_{M'} = \int_M^{M'} \vec{E} \cdot d\vec{l}$

Si M' est très proche de M , le champ $\vec{E}$ peut être considéré comme constant et ayant la même valeur qu'en M (fig 1 10)



$$\int_M^{M'} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \vec{E} \cdot \vec{MM'}$$

Or M et M' appartenant à la même surface équipotentielle

$$V_M = V_{M'} \text{ et } V_M - V_{M'} = 0 = \vec{E} \cdot \vec{MM'}$$

le produit scalaire des vecteurs $\vec{E}$ et $\vec{MM'}$ est nul, alors que

les modules de chacun des vecteurs sont différents de zéro. $\vec{E}$ et $\vec{MM'}$ sont donc perpendiculaires l'un à l'autre. Comme le point M' a été choisi arbitrairement sur la surface équipotentielle, cela permet de conclure que $\vec{E}$ est orthogonal à la surface équipotentielle passant par M .

I.8 Énergie d'une particule chargée dans un champ électrique

L'énergie totale de la particule sera la somme de son énergie cinétique et de son énergie potentielle :

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2} m v^2 + q V$$

où v est la vitesse de la particule de masse m et de charge q .

Quand la particule se déplace du point P_1 , où le potentiel électrique est égal à V_1 , au point P_2 , où le potentiel est égal à V_2 , et si on suppose que la particule ne subit aucune autre influence (on néglige notamment l'effet de la pesanteur), le principe de la conservation de l'énergie s'écrit

$$\frac{1}{2} m v_1^2 + q V_1 = \frac{1}{2} m v_2^2 + q V_2$$

D'après la définition de l'énergie cinétique la quantité $W = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2$ est égale au travail fourni à la particule chargée quand elle se déplace de P_1 à P_2 .

$$W = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = q (V_1 - V_2)$$

Cette relation permet de définir V comme la différence de potentiel

à travers laquelle une charge d'un coulomb doit se déplacer pour acquies une quantité d'énergie égale à un joule

Remarque Si nous choisissons le zéro du potentiel électrique au point P_2 , c'est à dire $V_2 = 0$, et si la particule part du point P_1 sans vitesse initiale, c'est à dire $v_1 = 0$, nous avons simplement

$$\frac{1}{2} m v^2 = q V$$

où v est la vitesse acquise par la particule au point P_2 , partant sans vitesse initiale du point P_1 où le potentiel était égal à V . Cette relation permet aussi de calculer la vitesse des électrons dans un tube cathodique (oscilloscope), dans un microscope électronique, ...

De plus le produit de la charge électrique élémentaire e (voir § I.5) par une différence de potentiel de un volt permet de définir une nouvelle unité d'énergie, l'électron-volt notée eV (c'est l'énergie acquise par une particule de charge e se déplaçant à travers une différence de potentiel de un volt)

$$1 eV = 1,6021 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

Cette unité ou ses multiples le kiloélectron-volt ($= 10^3 eV$) ^{noté keV} ou le mégaélectron-volt ($= 10^6 eV$) noté MeV sont très utilisés en physique nucléaire.

I.9 Courant électrique

Bien que ce chapitre soit centré sur l'étude des systèmes de charge au repos, nous donnons dans ce paragraphe une définition des grandeurs fondamentales intervenant dans le cas de charges se déplaçant. Le chapitre III sera consacré à une étude plus complète des circuits électriques.

On vient de voir qu'une charge q soumise à un champ $\vec{E}$ (créé par d'autres charges) se déplacera sous l'action de la force $\vec{F} = q \vec{E}$. Lorsqu'un ensemble de particules chargées est soumis à ce champ $\vec{E}$, on a un mouvement

global des charges, qui on désigne par courant électrique. Pour produire un courant électrique, il faut appliquer un champ électrique qui déplace les charges dans une direction bien définie. On désigne souvent ce champ comme le champ électromoteur.

L'intensité du courant se définit comme la charge électrique traversant par unité de temps la section de la région de l'espace où elle circule (par exemple la section d'un fil électrique). Ainsi, si pendant la durée de temps t , N particules chargées portant chacune la charge q traverse la section du milieu conducteur, l'intensité du courant correspondant à ce mouvement de charges sera

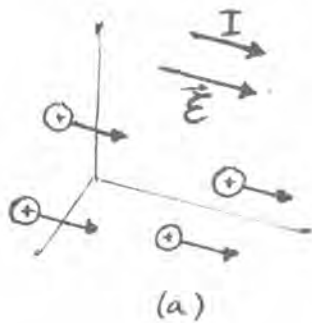
$$I = \frac{Nq}{t} = \frac{Q}{t}$$

L'expression ci-dessus donne la moyenne de l'intensité du courant pendant la durée de temps t ; on définit l'intensité I de manière instantanée

$$\boxed{I = dQ/dt} \quad [1.4]$$

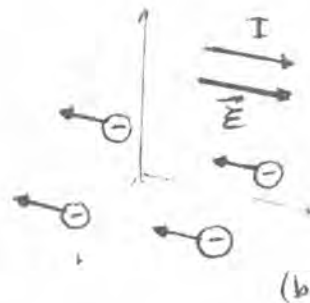
comme le rapport de la charge électrique dQ traversant la section du milieu conducteur dans l'intervalle de temps dt , par cet intervalle élémentaire de temps. L'intensité du courant s'exprime en Coulomb par seconde ou Ampère (note A)

Attention on admet que le sens du courant électrique est celui des charges positives en mouvement. C'est donc le même sens que celui du champ électrique appliqué ou de la chute de potentiel qui produit le mouvement des particules chargées (fig 1.11 a). Si le courant est due à un mouvement de particules négatives (des électrons par exemple, ce qui est le cas des conducteurs métalliques utilisés dans la vie courante) le sens du courant est opposé à celui du mouvement des particules (fig 1.11 b)



(a)

Fig 1.11



(b)

Le maintien d'un courant électrique exige de l'énergie car les ions (particules chargées) sont accélérées par le champ électrique. Supposons que pendant le temps t , N ions portant chacun la charge q se déplacent à travers une différence de potentiel ΔV . Chaque ion gagne l'énergie $q \Delta V$ et l'énergie totale gagnée est égale à $Nq \Delta V = Q \Delta V$. L'énergie par unité de temps, ou puissance nécessaire pour maintenir ce courant est alors égale à

$$P = \frac{Q \Delta V}{t} = I \Delta V$$

L'expression précédente est très générale et donne la puissance nécessaire pour maintenir un courant d'intensité I entre deux points de n'importe quel milieu conducteur présentant entre eux une différence de potentiel (d.d.p) ΔV .

Remarque : le produit $I \Delta V$ a bien les dimensions d'une puissance

$$I \Delta V = \frac{\text{Ampères}}{\text{Coulombs}} \cdot \frac{\text{Coulombs}}{\text{Seconde}} = \frac{\text{Joules}}{\text{Seconde}} = \text{Watts}$$

Attention : on pourrait croire que sous l'effet du champ électrique, les charges sont continuellement accélérées et acquièrent une vitesse de plus en plus grande. On verra au chapitre III qu'il n'en est rien et qu'un régime "stationnaire" s'établit dans le conducteur.

I.10 Etude d'un système de charges : le dipôle électrique

Dans le dernier § de ce chapitre nous étudions un système de charges constitué par deux charges égales et opposées, $+q$ et $-q$, séparées par une

distance très petite, d (cf fig. 1.12); ce système est appelé dipôle électrique

On définit le moment électrique de plaque $\vec{p}$ par

$$\vec{p} = q \vec{BA}$$

On peut calculer le potentiel électrique V créé par ce dipôle au point P repéré dans l'espace par ses coordonnées polaires r et θ . (l'origine O est choisie comme le milieu de AB , l'axe Ox étant la direction BA).

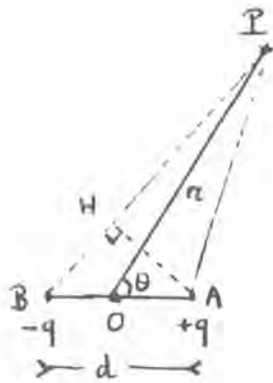


Fig. 1.12

D'après l'expression du potentiel créé par des charges

ponctuelles:
$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2} \right) = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} \right)$$

où r_1 représente la distance AP et r_2 la distance BP .

Nous pouvons poursuivre le calcul dans le cas d'un point P situé suffisamment loin des charges.

Dans ce cas: $r_1 r_2 \approx r^2$ d'une part

$r_2 - r_1 \approx d \cos \theta$ (dans le triangle ABH) d'autre part

et l'expression du potentiel devient:

$$V = \frac{q d \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

On calcule le champ $\vec{E}$ à l'aide de la relation [1.3]. Compte-tenu de

la symétrie du problème nous utilisons les coordonnées polaires et nous calculons les composantes radiale, E_r , et orthoradiale (ou transverse) E_θ (voir annexe maths)

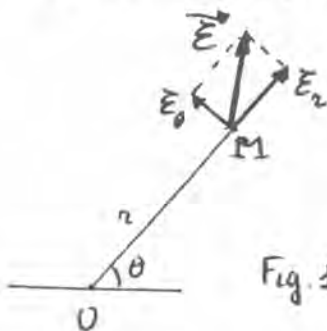


Fig. 1.13

$$E_r = - \frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2 p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

puisque le déplacement dl , le long de la direction radiale OM est égal à dr

$$E_\theta = - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

puisque le déplacement dl , le long de la direction orthoradiale est égal à $r d\theta$

On constate que, bien que la charge résultante du dipôle soit nulle, le fait que les charges positive et négative soient légèrement déplacées par rapport à O suffit à créer en tout point de l'espace un champ électrique non nul.

Ainsi, dans les atomes où le centre de masse des électrons coïncide avec le noyau, l'application d'un champ $\vec{E}$ peut séparer les positions du noyau d'une part, du centre de masse des électrons d'autre part. L'atome, électriquement neutre, devient un dipôle électrique de moment $\vec{p}$. On dit que l'atome est polarisé.

De même les molécules, globalement neutres électriquement, peuvent posséder spontanément (sans intervention d'un champ électrique appliqué) un moment électrique permanent $\vec{p}$, souvent lié à un "transfert" d'électrons sur la ou les liaisons internes à la molécule. Ainsi la molécule HCl (fig 1.14) où

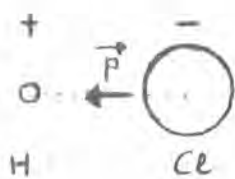


Fig 1.14

l'électron de l'atome d'hydrogène passe plus de temps à se déplacer autour de l'atome de chlore que autour de l'atome d'hydrogène. Le centre de masse des électrons se déplace vers l'atome de chlore, d'où l'apparition du moment dipolaire $\vec{p}$. (Cela explique aussi la notation $H^+(Cl^-)$)

Dans une molécule plus complexe comme l'eau, H_2O , les électrons des atomes d'hydrogène se déplacent vers l'atome d'oxygène, formant ainsi deux dipôles $\vec{p}_1$ et $\vec{p}_2$ le long des liaisons O-H.

Le moment dipolaire résultant $\vec{p}$ somme vectorielle de $\vec{p}_1$ et $\vec{p}_2$ (fig 1.15) est dirigé suivant l'axe de symétrie de la molécule.

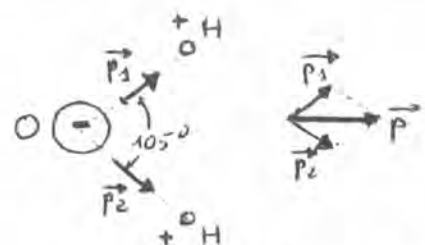


Fig 1.15

Les moments dipolaires des molécules sont faibles ; leur valeur est de l'ordre de $1 \cdot 10^{-30}$ à $5 \cdot 10^{-30}$ Coulomb x mètre.

Il est intéressant d'étudier le comportement d'un tel dipôle, lorsque il est placé dans un champ $\vec{E}$ (créé par d'autres charges) que l'on supposera uniforme (cette hypothèse est logique dans la mesure où les deux charges d'un dipôle sont très proches l'une de l'autre)

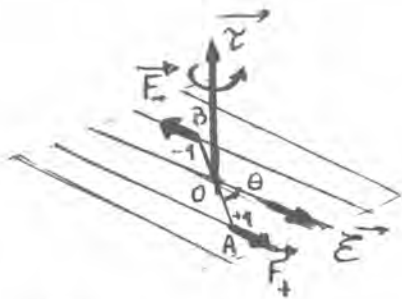


Fig. 1.16

On constate que la force totale à laquelle est soumis le dipôle est nulle : (fig. 1.16)

$$\vec{F} = \vec{F}_+ + \vec{F}_- = q\vec{E} - q\vec{E} = \vec{0}$$

Cependant le dipôle est soumis à un couple qui tend à aligner le dipôle parallèlement au champ. Le moment $\vec{\tau}$ caractérisant ce couple est égal à

$$\vec{\tau} = \vec{OA} \wedge \vec{F}_+ + \vec{OB} \wedge \vec{F}_-$$

On peut facilement montrer qu'il est égal à $\vec{p} \wedge \vec{E}$ où $\vec{p} = q\vec{BA}$

On peut retrouver ce résultat en calculant l'énergie potentielle du dipôle placé dans le champ $\vec{E}$:

$$E_p = qV_A - qV_B = qd \left[\frac{V_A - V_B}{d} \right] = -qd \left[-\frac{V_A - V_B}{d} \right]$$

La quantité entre crochets est exactement égale à la composante $\vec{E}_a$ du champ $\vec{E}$ parallèle au dipôle.

$$\|\vec{E}_a\| = \|\vec{E}\| \cos \theta$$

$$\text{Donc } E_p = -p \|\vec{E}_a\| = -p \|\vec{E}\| \cos \theta = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

L'énergie potentielle est bien minimale lorsque $\vec{p}$ est parallèle à $\vec{E}$.

Les propriétés des dipôles permettent d'expliquer la polarisation des molécules d'un solvant par un ion en solution. De même l'interaction entre dipôles permet d'apprécier l'importance des forces moléculaires (interactions type Van der Waals), voire même de calculer l'énergie de cohésion des cristaux de gaz rare à très basse température (quelques degrés Kelvin)

Pour conclure, il faut noter que pour une charge ponctuelle, le champ électrique décroît comme l'inverse du carré de la distance à la charge,

alors que le potentiel créé par la charge décroît comme l'inverse de cette distance

$$\|\vec{E}\| \propto 1/r^2 \qquad V \propto 1/r$$

$\vec{E}$ et V possèdent tous deux la symétrie radiale autour de la charge.

Pour le dipôle électrique, ces mêmes grandeurs varient pour $\|\vec{E}\|$ comme l'inverse du cube de la distance au centre du dipôle, pour V comme l'inverse du carré de cette distance, donc une décroissance plus rapide que dans le cas de la charge ponctuelle. De plus $\vec{E}$ et V n'ont plus la symétrie radiale.

On peut généraliser ces notions à des distributions de charge plus complexes appelées multipôles électriques (quadrupoles, ...).

I.11 Distribution de charges

Pour le moment, nous n'avons étudié que des systèmes formés d'une ou de plusieurs charges ponctuelles. Dans l'espace qui nous entoure, les charges ponctuelles sont très nombreuses et d'un point de vue macroscopique il n'est pas possible de les séparer individuellement les unes des autres.

On considérera donc des distributions de charge dans l'espace ou dans des portions d'espace. Lorsque les charges sont réparties le long d'un fil, on parlera de distribution linéique de charges, avec une densité de charges linéique λ , telle que la charge dq portée par une longueur élémentaire dl soit égale à $dq = \lambda dl$ (λ s'exprime en coulomb par mètre).

Lorsque les charges se répartissent sur une surface, on définit la densité surfacique de charges σ , telle que la charge élémentaire dq portée par la surface élémentaire dS soit égale à $dq = \sigma dS$ (σ en coulomb/mètre carré).

Enfin si les charges se répartissent dans un volume, on définit la densité volumique de charges ρ , telle que la charge dq contenue dans le volume élémentaire $d\tau$ soit égale à $dq = \rho d\tau$ (ρ en coulomb/mètre cube).

Lorsque les densités de charge λ , σ ou ρ sont indépendantes du point considéré (le long du fil, sur la surface ou dans le volume où se trouvent les charges) on dira que les distributions de charge sont uniformes.

Nous verrons dans le prochain chapitre que le calcul du champ électrique et du potentiel électrique créés par de telles distributions de charge ne peut s'effectuer analytiquement que lorsque ces distributions sont soit uniformes, soit présentant des symétries importantes.

Exercices du chapitre I

- 1- Calculer le champ électrique et le potentiel créés par une charge portée par un fil de longueur infinie, en un point M distant de z du fil.
On caractérisera la charge par sa densité linéique λ (charge par unité de longueur).
- 2- Calculer le champ électrique et le potentiel créés par une charge Q portée par une spire de rayon R centrée en O , en un point M de l'axe perpendiculaire à la spire passant par O tel que $OM = z$.
On supposera la charge Q uniformément répartie le long de la spire.
- 3- Calculer le champ électrique et le potentiel créés par un plan ^{infini} uniformément chargé en un point M situé à une hauteur z au dessus du plan.
On caractérisera la charge par sa densité surfacique σ (charge par unité de surface).
- 4- Dans le canon à électrons d'un tube cathodique, les électrons sont accélérés à l'aide d'une différence de potentiel de 3000 Volts appliquée entre deux plaques parallèles distantes de 4 cm.
En supposant le champ électrique uniforme entre les plaques, quelle est la vitesse atteinte par un électron émis sans vitesse initiale par la plaque négative lorsqu'il atteint la plaque positive?

Chapitre II : Propriétés du champ électrostatique

II.1 Notion de flux d'un champ de vecteurs

Un champ de vecteurs $\vec{V}$ est défini en associant à tout point M de l'espace un vecteur $\vec{V}(M)$. Le module, la direction et le sens de $\vec{V}(M)$ peuvent varier d'un point à un autre.

Soit une surface (S) placée dans une région de l'espace où le champ de vecteurs $\vec{V}$ est défini. On peut diviser la surface (S) en éléments de surface infiniment petits $dS_1, dS_2, \dots$. On affecte à chacun des dS_i un vecteur unitaire $\vec{u}_i$, normal à la surface dS_i et dont l'orientation sera déterminée d'après le sens de rotation qu'on fixera arbitrairement le long du contour $(\mathcal{C})$ qui délimite (S) figure 2.1

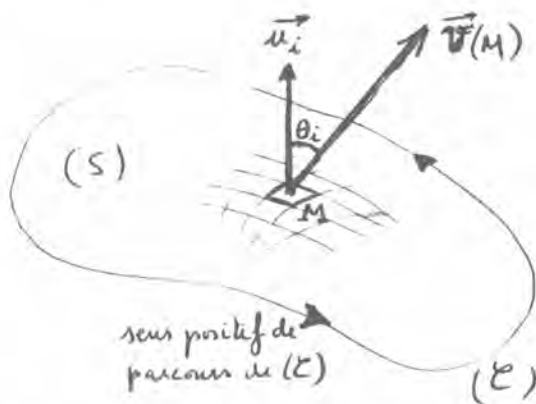


Fig. 2.1

En un point M , centre de la surface élémentaire dS_i , le vecteur $\vec{V}(M)$ fait un angle θ_i avec le vecteur $\vec{u}_i$. Par définition le flux du champ de vecteurs $\vec{V}$ à travers la surface (S) sera égal à

$$\Phi = \sum_i \vec{V}(M) \cdot \vec{u}_i dS_i$$

ou sous la forme d'une intégrale de surface

$$\Phi = \iint_{(S)} \vec{V} \cdot \vec{u} dS$$

On notera que le flux Φ est une grandeur scalaire

Remarques : Il peut arriver que l'angle θ_i entre $\vec{u}_i$ et $\vec{V}$ soit supérieur à $\pi/2$.

(Dans le cas de la fig 2.1, $\vec{V}$ pointerait vers le "dessous" de la surface (S)) Le résultat pour Φ peut donc être positif ou négatif.

Dans le cas d'une surface (S) fermée (la surface d'une sphère par exemple) on notera :

$$\Phi = \oint_{(S)} \vec{V} \cdot \vec{u} dS$$

Dans ce cas, si $\vec{u}_i$ est dirigé vers l'extérieur de (S) on parlera de flux "sortant", si par contre les vecteurs $\vec{u}_i$ sont dirigés vers l'intérieur de (S) on parlera de flux "entrant".

Attention ! le calcul du flux d'un champ de vecteurs à travers une surface (S) n'implique en rien un mouvement de particules qui traverseraient la surface (S) . Si le terme de flux est utilisé, c'est cependant par analogie avec le cas de l'écoulement d'un fluide à travers une surface.

II.2 Théorème de Gauss

1) Soit le cas d'une charge ponctuelle q placée à l'origine O . Calculons le flux du champ électrique $\vec{E}$ créé par cette charge q à travers la surface (S) d'une sphère de rayon r centrée au point O .

On a vu (§ I.4) que le champ $\vec{E}$ créé par la charge ponctuelle q s'écrit :

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$$

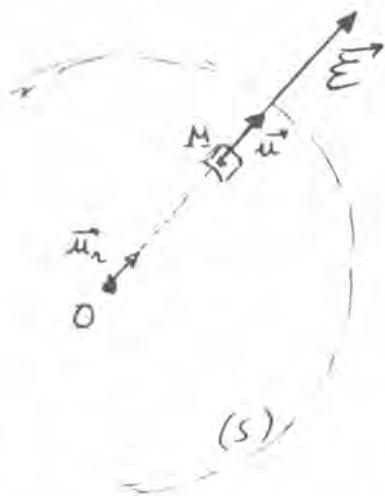


Fig. 2.2

le champ est radial, ce qui signifie qu'en tout point M de (S) le champ $\vec{E}$ est colinéaire au vecteur $\vec{u}$ normal en M à la surface (S) . fig. 2.2

Le flux sortant de $\vec{E}$ à travers (S) s'écrit

$$\Phi(\vec{E}) = \oint_{(S)} \vec{E} \cdot \vec{u} dS = \oint_{(S)} \|\vec{E}\| dS$$

$$\text{En effet } \vec{E} \cdot \vec{u} = \|\vec{E}\| \|\vec{u}\| = \|\vec{E}\|$$

puisque $\vec{E}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires et que $\vec{u}$ est un vecteur unitaire de module égal à un.

Or le module de $\vec{E}$ a la même valeur en tout point de la surface (S) ; il vaut $\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$, d'où :

$$\Phi(\vec{E}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \oint_{(S)} dS$$

On sait (voir annexe mathématique) que l'intégrale $\iint_{(S)} dS$ est égale à la ^{mesure} ~~valeur~~ de la surface (S). Pour une sphère de rayon r , la surface est égale à $4\pi r^2$ et on déduit :

$$\Phi(\vec{E}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

On constate que ce flux est indépendant du rayon r de la sphère, par conséquent si nous traçons plusieurs surfaces sphériques concentriques autour de la charge q , le flux de $\vec{E}$ à travers chacune d'entre elles est identique et vaut q/ϵ_0 . Ce résultat est une conséquence directe de la décroissance en $1/r^2$ du champ $\vec{E}$ créé par la charge ponctuelle q .

2) Considérons maintenant le cas d'une charge ponctuelle q placée à l'intérieur d'une surface (S) fermée de forme quelconque (Fig 2.3)

le flux de $\vec{E}$ à travers (S) s'écrit

$$\Phi(\vec{E}) = \oiint_S \vec{E} \cdot \vec{u} dS = \oiint_{(S)} \|\vec{E}\| \cos\theta dS$$

$$\text{Or } \|\vec{E}\| = q/4\pi\epsilon_0 r^2, \text{ d'où}$$

$$\Phi(E) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oiint_{(S)} \frac{\cos\theta dS}{r^2}$$

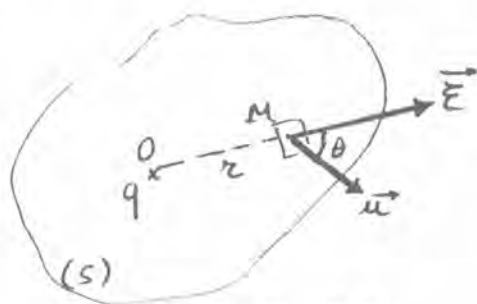


Fig. 2.3

Nous montrons dans l'annexe mathématique

placée à la fin de ce cours que la quantité $\frac{dS \cos\theta}{r^2}$ représente la portion élémentaire d'angle solide, $d\Omega$, sous lequel on voit la surface dS depuis le point O.

L'intégration étendue à (S) de $d\Omega$ consiste à sommer ces angles solides élémentaires dans toutes les directions de l'espace. Or on a montré (annexe math) que l'angle solide total autour d'un point a pour valeur 4π .

le flux $\Phi(\vec{E})$ est donc égal à
$$\Phi(\vec{E}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} 4\pi = \frac{q}{\epsilon_0}$$

On retrouve le même résultat que dans le cas d'une surface (S) sphérique centrée sur la charge q .

Considérons enfin le cas d'une charge q^* située à l'extérieur d'une surface fermée (S) . On peut montrer que le flux total de $\vec{E}$ à travers (S) est nul, le flux du champ créé par q^* à travers dS' étant égal et opposé au flux du champ créé par q^* à travers dS'' .

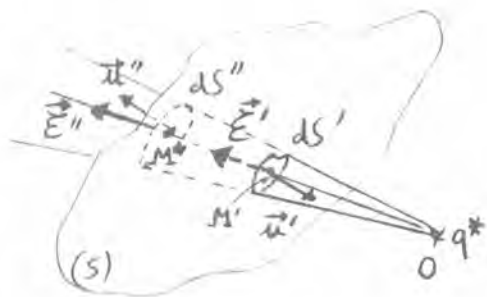


Fig. 2.4

Le résultat tient au fait que bien que dS'' soit de taille supérieure à dS' , $\|\vec{E}''\|$ est inférieur à $\|\vec{E}'\|$ et que, comme on le voit sur la figure 2.4, l'angle solide sous lequel les deux surfaces dS' et dS'' sont vues depuis le point O , où est située la charge q^* , est le même.

De ces trois résultats, on peut déduire l'énoncé du théorème de Gauss

Le flux du champ électrique à travers une surface fermée entourant des charges $q_1, q_2, q_3, \dots$ est égal à

$$\Phi(\vec{E}) = \oint_{(S)} \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{q}{\epsilon_0} \quad [2.1]$$

où $q = q_1 + q_2 + q_3 + \dots$ est la somme algébrique des charges situées à l'intérieur de la surface (S) .

Remarques : le théorème de Gauss peut s'appliquer au cas où on considère des distributeurs de charge et non plus des charges ponctuelles.

Le théorème de Gauss est particulièrement utile pour le calcul du champ électrique produit par des distributeurs de charge possédant des propriétés de symétrie.

Attention : Pour calculer le champ électrostatique $\vec{E}$ créé ^{en un point M de l'espace} par une distribution de charges, il faut se donner arbitrairement une surface (S) qui on appelle surface de Gauss. Cette surface (S) doit être fermée, elle doit ^{contenir} le point M (M doit être un point de (S)) et elle doit être telle que le calcul de l'intégrale soit simple.

Le choix de (S) doit tenir compte des symétries du problème, on cherchera une surface telle qu'en chaque point on ait soit $\vec{E}$ parallèle à $\vec{u}$, et dans ce cas $\vec{E} \cdot \vec{u} = \|\vec{E}\|$, soit $\vec{E}$ perpendiculaire à $\vec{u}$, et dans ce cas $\vec{E} \cdot \vec{u} = 0$. On cherchera enfin une surface (S) telle que le module de $\|\vec{E}\|$ soit le même sur l'ensemble de la surface, ou au moins sur les parties de (S) où $\vec{E} \cdot \vec{u}$ n'est pas nul.

On évitera enfin de choisir une surface de Gauss (S) sur laquelle est située une charge ponctuelle.

II.3 Forme différentielle du théorème de Gauss

Le théorème d'Ostrogradski (voir annexe maths) montre que le flux sortant d'un champ de vecteurs à travers une surface fermée (S) est égal à l'intégrale de la divergence de ce champ de vecteurs étendue au volume (V) intérieur à la surface (S) .

$$\oint_{(S)} \vec{V} \cdot d\vec{S} = \oint_{(S)} \vec{V} \cdot \vec{u} dS = \iiint_{(V)} \text{div } \vec{V} d\tau$$

On voit que $d\vec{S}$ est un vecteur normal à la surface, de module égal à la surface élémentaire dS entourant le point M .

Physiquement, et comme son nom l'indique, la divergence d'un champ de vecteurs est reliée à la forme des lignes de champ. C'est une grandeur scalaire qui sera différente de zéro dès que le flux du champ de vecteurs à travers une surface élémentaire fermée entourant le point considéré ne sera pas nul.

Dans le cas du champ électrique $\vec{E}$ nous pouvons écrire

$$\Phi(\vec{E}) = \oint_{(S)} \vec{E} \cdot \vec{u} dS = \iiint_{(V)} \text{div } \vec{E} d\tau$$

Et si on considère la charge intérieure à la surface (S) comme étant due à une distribution de charges réparties dans le volume (V) intérieur à (S) et caractérisée par la densité volumique de charges ρ (voir § I.11):

$$q = \iiint_{(V)} dq = \iiint_{(V)} \rho d\tau$$

De la forme intégrale du théorème de Gauss [2.1], on déduit

$$\iiint_{(V)} \operatorname{div} \vec{E} d\tau = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{(V)} \rho d\tau$$

Cette égalité étant vérifiée quel que soit le volume (V) et la surface (S) qui l'entoure (en forme, en taille, en direction) l'égalité précédente ne peut être vérifiée que si les quantités à intégrer sont égales :

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}} \quad [2.2]$$

Le théorème de Gauss, sous sa forme différentielle [2.2], exprime une relation locale entre le champ $\vec{E}$ en un point de l'espace et la densité volumique de charges au même point de l'espace.

On y voit directement le rôle des charges électriques comme sources de champ électriques.

II.4 Théorème de Gauss et potentiel électrique

En partant de la définition de la divergence d'un champ de vecteurs d'une part, du gradient d'une grandeur scalaire d'autre part, on peut montrer que :

$$\operatorname{div} (\overrightarrow{\operatorname{grad} V}) = \Delta V$$

où ΔV représente le laplacien de la grandeur scalaire V (cf annexe math).

On peut donc réécrire le théorème de Gauss sous sa forme différentielle

$$\operatorname{div} \vec{E} = \operatorname{div} (-\overrightarrow{\operatorname{grad} V}) = -\Delta V = \rho / \epsilon_0$$

Ceci est l'équation de Poisson. Elle permet de calculer directement le potentiel électrique V créé par la distribution de charges ρ . Dans les faits ce calcul nécessite la résolution d'équations différentielles du second ordre, et n'est pas toujours aisée.

Il faut noter que dans toutes les régions de l'espace où il n'y a pas de charge (le vide) on a

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0 \quad \text{et} \quad \Delta V = 0$$

Cette dernière égalité, appelée équation de Laplace, est d'une grande importance en physique; elle s'applique à des situations très diverses: propagation des ondes, mécanique des fluides, élasticité, ...

II 5 Conducteurs en équilibre

Soit un matériau conducteur isolé, c'est à dire à l'intérieur duquel on suppose que des particules chargées peuvent se déplacer librement. En présence d'un champ électrique, les charges mobiles qui subissent une force vont se déplacer dans le conducteur et s'accumuler à la surface jusqu'à ce que le champ qu'elles produisent vienne compenser totalement le champ extérieur appliqué. (le conducteur doit être isolé, sinon des charges pourraient quitter le conducteur et celui-ci, initialement neutre, se chargerait électriquement)

On atteint un nouvel état d'équilibre, tel que à l'intérieur du conducteur le champ électrique total est nul. ($\vec{E}_{\text{interieur}} = \vec{0}$)

Pour les mêmes raisons, le champ électrique à la surface doit être normal car, s'il existait une composante du champ parallèle à la surface, les charges se déplaceraient à la surface du conducteur.

Enfin, comme le champ électrique à l'intérieur du conducteur en équilibre est nul, toutes les parties de ce conducteur sont au même potentiel V .

(Dans la réalité les charges sont distribuées sur une profondeur égale à quelques couches atomiques)

En utilisant le théorème de Gauss, on peut montrer que le champ $\vec{E}$, au voisinage d'un point M de la surface est relié à la densité surfacique de

charge au point M , $\sigma(M)$ par

$$\|\vec{E}(M)\| = \frac{\sigma(M)}{\epsilon_0}$$

II.6 Capacité d'un conducteur

Lorsqu'un conducteur est isolé, on a vu dans le § précédent que les charges peuvent se déplacer librement dans le matériau, mais si le conducteur est initialement neutre, il le restera (principe de la conservation de la charge)

Par contre, si ce même conducteur n'est plus isolé, il peut se charger (ou se décharger). Lorsqu'il est chargé, la charge Q qu'il porte en surface est reliée à son potentiel électrique V par

$$Q = C V$$

où C est la capacité électrique du conducteur considéré. Le coefficient C ne dépend que de la géométrie du conducteur considéré. Pour une sphère, la capacité électrique C est égale à

$$C = 4\pi\epsilon_0 R$$

Pour calculer la capacité d'un conducteur chargé on peut calculer le champ électrique créé en tout point de l'espace extérieur au conducteur par la charge Q portée par le conducteur, en déduire (à l'aide de [1.3] par exemple) le potentiel V en tout point de l'espace et notamment en un point de l'espace très proche du conducteur. Comme le potentiel électrique est constant, cette valeur du potentiel est celle de tout le conducteur, V , et on obtient $C = Q/V$

(En fait ce calcul n'est simple que dans quelques cas où les propriétés de symétrie du conducteur sont importantes : sphère par exemple.)

La capacité électrique s'exprime en Farad (noté F), c'est la capacité d'un conducteur isolé dont le potentiel électrique est égal à un volt lorsqu'il a reçu une charge de un coulomb.

II.7 Système de conducteurs - Condensateurs

Dans ce cours nous avons volontairement limité l'étude des systèmes

de conducteurs au cas particulier de deux conducteurs $(\mathcal{E}_1)$ et $(\mathcal{E}_2)$ qu'on peut considérer séparément dans un montage. Cet ensemble s'appelle un condensateur et $(\mathcal{E}_1)$ et $(\mathcal{E}_2)$ sont les armatures du condensateur.

$(\mathcal{E}_1)$ est au potentiel V_1 , $(\mathcal{E}_2)$ est au potentiel V_2 . Les charges Q_1 et Q_2 portées respectivement par $(\mathcal{E}_1)$ et $(\mathcal{E}_2)$ sont reliées aux potentiels V_1 et V_2 par des relations :

$$\begin{cases} Q_1 = C_{11} V_1 + C_{21} V_2 \\ Q_2 = C_{12} V_1 + C_{22} V_2 \end{cases}$$

On peut noter que C_{11} mesure en coulombs la charge de $(\mathcal{E}_1)$ lorsque le potentiel de $(\mathcal{E}_2)$ est nul.

Attention! C_{11} n'est pas égal à la capacité du conducteur $(\mathcal{E}_1)$ définie au § précédent. On dit qu'il s'agit de la capacité de $(\mathcal{E}_1)$ en présence de $(\mathcal{E}_2)$.

C_{12} (dont on peut montrer qu'il est égal à C_{21}) est le coefficient d'influence de $(\mathcal{E}_1)$ sur $(\mathcal{E}_2)$.

Si les conducteurs $(\mathcal{E}_1)$ et $(\mathcal{E}_2)$ étaient éloignés infiniment l'un de l'autre $C_{11} \rightarrow C_1$, alors que $C_{12} = C_{21} \rightarrow 0$.

Nous supposons maintenant que les deux conducteurs $(\mathcal{E}_1)$ et $(\mathcal{E}_2)$ sont rapprochés très près l'un de l'autre sur une grande partie de leur surface : lorsque on applique une différence de potentiel entre les deux armatures (ou plus simplement si on fixe V_1 à la valeur V , le conducteur $(\mathcal{E}_2)$ étant maintenu au potentiel $V_2 = 0$) on peut montrer que les charges Q_1 et Q_2 apparaissant sur les armatures en regard sont égales et opposées (On dit qu'il y a influence totale entre les deux armatures)

$$Q_1 = C_{11} V_1 \quad Q_2 = C_{12} V_1 = -Q_1$$

Où $C_{11} = -C_{12}$.

Un raisonnement symétrique ($V_1 = 0, V_2 \neq 0$) permet d'aboutir à la relation $C_{22} = -C_{21}$. On sait enfin que $C_{12} = C_{21}$ (pour des raisons énergétiques)

Dans ce cas le coefficient $C = C_{11} = C_{22} = -C_{12} = -C_{21}$ sera appelé la capacité du condensateur.

On peut facilement généraliser le raisonnement au cas où on applique une différence de potentiel $V_1 - V_2$ entre les armatures ($\mathcal{E}_1$) et ($\mathcal{E}_2$) du condensateur. Il apparaît sur ces armatures respectivement les charges $+Q$ et $-Q$, la capacité C du condensateur sera égale à

$$C = \frac{Q}{V_2 - V_1}$$

Remarque Bien que le mot capacité apparaisse à la fois dans le § II.6 (capacité d'un conducteur) et le § II.7 (Capacité d'un condensateur), leur signification physique est différente -

→ Dans le premier cas il s'agit d'un conducteur isolé, qu'on "porte" à un potentiel V alors qu'initialement son potentiel était nul. La charge qui apparaît à sa surface est Q ; elle est égale à $C V$.

→ Dans le second cas il faut se rappeler que l'apparition d'une charge Q sur l'armature ($\mathcal{E}_1$) portée au potentiel V , entraîne automatiquement l'apparition d'une charge $-Q$ sur l'armature ($\mathcal{E}_2$) qui est très proche de ($\mathcal{E}_1$). $C = C_{11}$ est bien le coefficient de capacité d'un conducteur, mais en présence du second. Ceci permet d'ailleurs d'accumuler (de "condenser" d'où le mot condensateur) une charge Q importante sur un conducteur, celle-ci étant presque "neutralisée" par la présence de la charge $-Q$ très rapprochée.

La capacité C d'un condensateur ne dépend que de la forme géométrique de chaque armature et de la position respective de l'une par rapport à l'autre.

Pour le calcul de la capacité d'un condensateur, il est parfois utile de se souvenir qu'entre les armatures règne un champ $\vec{E}$ tel que les

la circulation de $\vec{E}$ d'une armature à l'autre sera égale à la différence de potentiel entre les armatures

$$V_1 - V_2 = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$\Delta \vec{E} = -\text{grad } V$$

et qu'au voisinage immédiat des armatures $\|\vec{E}\| = \sigma/\epsilon_0$ où σ est la densité surfacique de charge

II.8 Energie du champ électrique

Le fait de charger un conducteur exige une dépense d'énergie, car pour apporter une charge supplémentaire sur un conducteur, il faut effectuer un travail pour vaincre la répulsion due aux charges déjà présentes. Ce travail produit une augmentation de l'énergie du conducteur.

Soit, par exemple, un conducteur de capacité C portant la charge q . Son potentiel est égal à $V = q/C$. Si l'on amène depuis l'infini (où le potentiel est nul) jusqu'à la surface du conducteur une charge supplémentaire élémentaire, dq , le travail effectué est égal à :

$$\delta W = V dq$$

Le travail est égal à l'augmentation d'énergie électrique emmagasinée par le conducteur que l'on note dE_e .

$$dE_e = \delta W = V dq = q \frac{dq}{C}$$

Si l'on suppose qu'au départ le conducteur n'était pas chargé, l'énergie emmagasinée par apports successifs de charges élémentaires, sera donnée par

$$E_e = \int_{q=0}^{q=Q} dE_e = \frac{1}{C} \int_0^Q \frac{dq}{1} = \frac{Q^2}{2C}$$

la charge finale du conducteur étant égale à Q .

Dans le cas particulier d'un conducteur sphérique, pour lequel

$C = 4\pi\epsilon_0 R$ (§ II.6), on a

$$E_e = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R}$$

On peut exprimer cette énergie en fonction du module du champ $\vec{E}$ créé

par la charge Q portée par la sphère de rayon R . Le champ $\vec{E}$ est nul à l'intérieur de la sphère (conducteur en équilibre) ; à l'extérieur de la sphère il se calcule aisément à l'aide du théorème de Gauss ; on constate qu'il est radial et que son module est égal à

$$\|\vec{E}\| = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Si on calcule l'intégrale de $\|\vec{E}\|^2$ étendue à tout l'espace extérieur à la sphère (en utilisant les coordonnées sphériques, compte tenu de la symétrie du problème) on obtient :

$$\iiint_{\substack{\text{extérieur} \\ \text{de la sphère}}} \|\vec{E}\|^2 d\tau = \int_{r=R}^{r=\infty} \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)^2 4\pi r^2 dr$$

Le volume $d\tau = 4\pi r^2 dr$ est celui compris entre deux sphères de rayons r d'une part, $r+dr$ d'autre part.

L'intégrale est égale à
$$\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0^2} \int_R^{\infty} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0^2} \left[-\frac{1}{r} \right]_R^{\infty} = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0^2 R}$$

En comparant ce résultat à celui de l'énergie électrique emmagasinée par le conducteur sphérique, on obtient

$$E_c = \frac{1}{2} \epsilon_0 \iiint_{\substack{\text{extérieur} \\ \text{de la sphère}}} \|\vec{E}\|^2 d\tau$$

On peut noter que le champ $\vec{E}$ étant nul à l'intérieur de la sphère, on peut étendre l'intégration à l'espace tout entier.

Bien que démontré dans un cas particulier, on peut admettre que ce résultat est général et que l'énergie nécessaire pour assembler un système de charges est égal à :

$$E_c = \frac{1}{2} \epsilon_0 \iiint_{\text{espace}} \|\vec{E}\|^2 d\tau$$

où $\vec{E}$ est le champ électrique régnant dans l'espace, une fois l'ensemble des charges assemblé.

On peut noter qu'on peut associer au volume élémentaire $d\tau$, une énergie emmagasinée élémentaire $dE_c = \frac{1}{2} \epsilon_0 \|\vec{E}\|^2 d\tau$. La quantité $\frac{1}{2} \epsilon_0 \|\vec{E}\|^2$

a dans les caractéristiques d'une densité d'énergie électrique

Attention ! le calcul de l'énergie électrique emmagasinée totale nécessite une intégration dans tout l'espace, y compris là où n'existe pas de charge.

On peut remarquer, dans le cas du conducteur sphérique, que le potentiel électrique V en tout point de l'espace extérieur à la sphère se déduit de $\vec{E}$ par [1.3]. Il est égal à
$$V_{\text{ext}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Sur la surface de la sphère et à l'intérieur de la sphère il est constant et, par continuité, il vaut $\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$.

L'énergie électrique emmagasinée E_e peut s'exprimer en fonction de ce potentiel :

$$E_e = \frac{1}{2} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} Q = \frac{1}{2} Q V$$

On peut montrer là aussi que ce résultat se généralise sous la forme

$$E_e = \frac{1}{2} \iiint_{\text{espace}} \rho V d\tau$$

où ρ est la densité volumique de charge au point M où le potentiel est égal à V . Cette autre manière de calculer E_e permet de limiter le calcul de l'intégrale aux régions de l'espace où $\rho \neq 0$, c'est à dire là où il y a des charges.

II.9 Etude d'une distribution de charges : sphère uniformément chargée

Soit une sphère centrée en O , de rayon R , contenant la charge Q répartie uniformément dans son volume. On désire connaître le champ électrique $\vec{E}$ et le potentiel électrique V créés par cette distribution de charges en tout point de l'espace. On désire également calculer l'énergie électrostatique emmagasinée par la sphère.

[Dans les figures suivantes, le sens des vecteurs champs correspond à une charge Q positive ; le calcul reste valable si la charge Q était négative]

1) Calcul du champ $\vec{E}$

Ici, l'application du théorème de Gauss est indispensable. On ne peut en effet ~~pas~~ "découper" la sphère en petits volumes élémentaires, $d\tau$, contenant chacun une charge élémentaire, dq , et calculer en tout point le champ électrique résultant $\vec{E}$, en effectuant la somme vectorielle des champs électriques élémentaires $d\vec{E}$.

Pour appliquer le théorème de Gauss, nous devons distinguer deux cas

- Calcul du champ $\vec{E}$ en un point M extérieur à la sphère ($OM = r > R$)

On peut déterminer qualitativement la direction du champ $\vec{E}$ au point M . En effet on peut toujours associer deux volumes élémentaires ~~$d\tau_1$ et $d\tau_2$ situés par rapport à la direction OM~~ $d\tau_1$ et $d\tau_2$, de même taille,

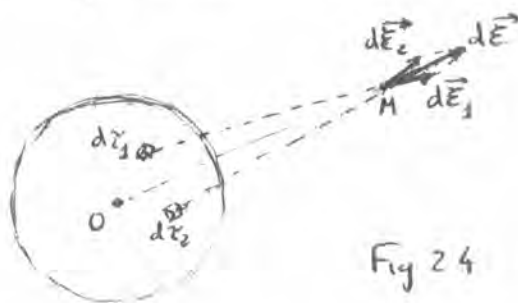


Fig 2.4

symétriques par rapport à la direction OM (Fig 2.4). La somme vectorielle des deux champs élémentaires $d\vec{E}_1$ et $d\vec{E}_2$ créés par les charges dq_1 et dq_2 est le vecteur $d\vec{E}$. Il est colinéaire à $\vec{OM}$. En effet les deux charges dq_1 et dq_2 sont identiques (la charge Q est répartie uniformément dans la sphère) et situées à la même distance du point M .

En effectuant la somme des vecteurs $d\vec{E}$ dus à tous les éléments de volume $d\tau$, pris deux à deux, on constate que le champ résultant $\vec{E}$ sera colinéaire à $\vec{OM}$. De plus, aucune direction de l'espace n'étant privilégiée, la distribution de charges ayant la symétrie sphérique, le module de $\vec{E}$ sera le même en tout point distant de r du centre de la sphère.

Ces considérations qualitatives nous aident à choisir la surface de Gauss (S) (voir § II.2). Nous prendrons ici pour surface de Gauss (S), la surface sphérique de centre O et de rayon r . ^(Elle est fermée) Elle passe par M (fig 2.5) et en tout point de cette sphère $\vec{E}$ est normal à la surface.

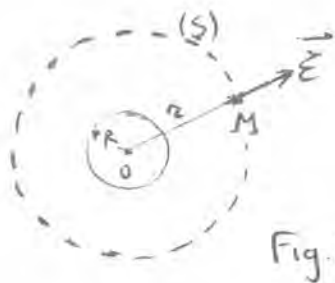


Fig. 2.5

On a donc: $\vec{E} \cdot \vec{u} \, dS = \|\vec{E}\| \, dS$

De plus $\|\vec{E}\|$ est identique en tout point de (S) et l'intégrale du flux de $\vec{E}$ à travers (S) s'écrit:

$$\oint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_{(S)} \|\vec{E}\| \, dS = \|\vec{E}\| \oint_{(S)} dS$$

Cette intégrale $\oint_{(S)} dS$ est la mesure de la surface (S). Ici elle vaut $4\pi r^2$ (surface d'une sphère de rayon r)

La charge intérieure à (S) est égale à la charge totale Q contenue dans la sphère de rayon R. D'où:

$$\oint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \|\vec{E}\| 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Le champ $\vec{E}$ en un point M extérieur à la sphère de rayon R est radial (dirigé selon $\vec{OM}$) et son module est égal à $Q/4\pi\epsilon_0 r^2$

Remarque: le champ $\vec{E}$ trouvé est identique à celui créé par une charge ponctuelle Q placée en O.

• Calcul du champ $\vec{E}$ en un point M intérieur à la sphère ($OM = r < R$)

Pour les mêmes raisons que dans le cas d'un point extérieur à la sphère, on peut montrer qualitativement que le champ $\vec{E}$ en M sera colinéaire à $\vec{OM}$

et son module sera le même en tout point distant de r de O.



Fig. 2.6

La surface de Gauss (S) sera encore la surface sphérique de centre O et de rayon r; le flux de $\vec{E}$ à travers (S) vaudra:

$$\oint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \|\vec{E}\| 4\pi r^2$$

Par contre, la charge intérieure à la surface de Gauss (S) n'est plus qu'une partie de la charge totale Q portée par la sphère de rayon R. La charge étant répartie uniformément, la partie de Q contenue à l'intérieur de (S) sera

égaux à $Q \frac{\frac{4}{3} \pi r^3}{\frac{4}{3} \pi R^3} = Q \frac{r^3}{R^3}$

En utilisant le théorème de Gauss, on obtient :

$$\|\vec{E}\| 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} Q \frac{r^3}{R^3} \quad \text{d'où} \quad \|\vec{E}\| = \frac{Q r}{4\pi\epsilon_0 R^3}$$

Le champ $\vec{E}$ à l'intérieur de la sphère est radial et son module croît linéairement avec la distance du point considéré au centre de la sphère.

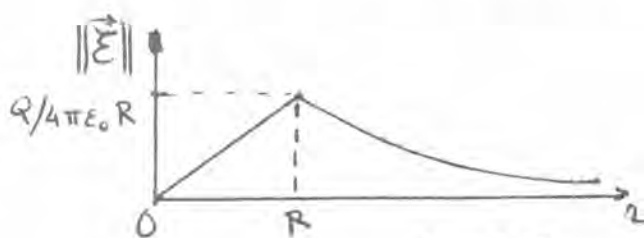


Fig. 2.7

La figure 2.7 montre la variation de $\|\vec{E}\|$ avec la distance r . On constate que le module du champ $\|\vec{E}\|$ est continu pour $r = R$. Par contre sa dérivée ne l'est pas (cassure de la courbe).

2) Calcul du potentiel électrique V

Ici, nous utiliserons la relation [1.3] $\vec{E} = -\text{grad } V$

Compte tenu de la symétrie du problème, nous utiliserons un système de coordonnées sphériques (r, θ, φ) (voir annexe math). De plus le potentiel V ne dépendra que de r à cause de la symétrie sphérique du problème.

On retrouve ici que le champ $\vec{E}$ n'a qu'une composante radiale, E_r , telle que

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{dV}{dr} \quad (V \text{ ne dépend que de } r)$$

d'où
$$V = -\int E_r dr$$

Le potentiel électrique s'obtiendra par intégration (par rapport à la variable r) de l'expression obtenue précédemment pour $\|\vec{E}\| = E_r$. Nous devons de nouveau distinguer deux cas :

- A l'extérieur de la sphère $V = -\int \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} + \text{Constante}$

En choisissant de prendre le zéro des potentiels à l'infini (r infini), on en déduit que la constante d'intégration est nulle.

Pour $z > R$, on a donc : $V(z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 z}$

là aussi, on retrouve le potentiel créé par une charge ponctuelle Q placée en O .

• A l'intérieur de la sphère $V = - \int \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} dz = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \left(-\frac{z^2}{2}\right) + C$

Ici la détermination de la constante se fera en écrivant la continuité du potentiel à la traversée de la surface limitant la sphère contenant les charges

$$\text{limite pour } z \rightarrow R \text{ de } V_{\text{exterieur}} = \text{limite pour } z \rightarrow R \text{ de } V_{\text{interieur}}$$

A l'extérieur $V(R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$

A l'intérieur $V(R) = -\frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R} + \text{Constante}$

On en déduit la valeur de la constante : $\frac{3Q}{8\pi\epsilon_0 R}$

Pour $z < R$, on a donc :

$$V(z) = \frac{3Q}{8\pi\epsilon_0 R} - \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R^3} z^2$$

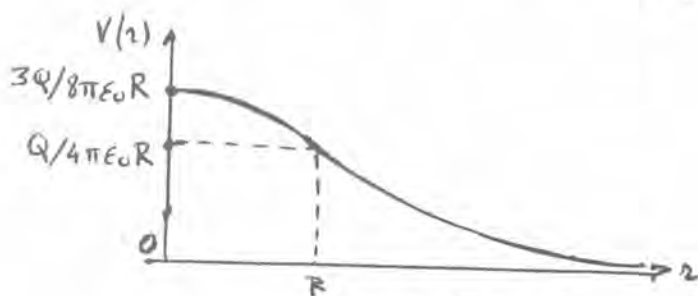


Fig 2.8

La figure 2.8 montre la variation de potentiel V avec la distance R . On constate ici que la valeur de V et la valeur de la dérivée de V par rapport à z sont continues en $z = R$.

On peut remarquer que en tout point z , la dérivée de la courbe $V(z)$ est donnée (au signe près) par la valeur du module de $\vec{E}$ en ce point

3) Calcul de l'énergie électrique associée à cette distribution

Nous allons effectuer ce calcul en utilisant les diverses formes trouvées pour l'énergie électrique d'un système de charges (voir § II.8)

- Utilisons d'abord l'expression obtenue à l'aide de la densité d'énergie électrique $\frac{1}{2} \epsilon_0 \|\vec{E}\|^2$

$$E_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 \iiint_{\text{espace}} \|\vec{E}\|^2 dz$$

Compte tenu de la symétrie sphérique du problème, l'élément de volume dz considéré sera celui contenu entre les sphères de rayon r et de rayon $r+dr$: il vaut $4\pi r^2 dr$. L'intégration sur tout l'espace devra être décomposée en deux parties, puisque le champ $\vec{E}$ n'a pas la même forme analytique selon que $r < R$ ou que $r > R$.

$$E_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_{r=0}^R \left[\frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3} \right]^2 4\pi r^2 dr + \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_{r=R}^{\infty} \left[\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right]^2 4\pi r^2 dr$$

$$E_e = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R^6} \int_{r=0}^R r^4 dr + \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \int_{r=R}^{\infty} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R^6} \left[\frac{r^5}{5} \right]_0^R + \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_R^{\infty}$$

$$E_e = \frac{Q^2}{40\pi\epsilon_0 R} + \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R} = \frac{3}{5} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R}$$

- Nous pouvons aussi utiliser le calcul de l'énergie électrique associée à chaque charge élémentaire ρdz

$$E_e = \frac{1}{2} \iiint_{\text{espace}} \rho V dz$$

Ici ρ n'est différent de zéro qu'à l'intérieur de la sphère de rayon R . L'intégrale sera donc limitée à la région $r < R$, le potentiel V étant dans ce potentiel obtenu pour $r < R$:

$$E_e = \frac{1}{2} \int_{r=0}^R \rho \left[\frac{3Q}{8\pi\epsilon_0 R} - \frac{Qr^2}{8\pi\epsilon_0 R^3} \right] 4\pi r^2 dr$$

ρ , la densité volumique de charges, est constante et vaut $Q/\frac{4}{3}\pi R^3$

le calcul de l'intégrale s'effectue aisément et aboutit au même résultat que précédemment, à savoir :

$$E_e = \frac{3}{5} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R}$$

- Une dernière méthode consiste à calculer le travail nécessaire à la "construction" de la sphère lorsqu'on amène au fur et à mesure les charges

depuis l'infini

On suppose qu'à un instant donné la sphère (en construction) ait un rayon x . Elle contient alors la charge $q(x)$.

$$q(x) = \rho \frac{4}{3} \pi x^3 = Q \frac{x^3}{R^3}$$

le champ à l'extérieur de la sphère a pour module $\frac{q(x)}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ à une distance $r > x$ du centre de la sphère

le potentiel dont ce champ dérive est égal à $\frac{q(x)}{4\pi\epsilon_0 r}$ (voir calcul qui précède)

A la surface de la sphère en construction, c'est à dire en $r = x$, ce potentiel est égal à

$$V(x) = \frac{q(x)}{4\pi\epsilon_0 x} = \frac{Q x^2}{4\pi\epsilon_0 R^3}$$

Lorsqu'on amène depuis l'infini, la charge supplémentaire dq , qui fera passer la sphère du rayon x au rayon $x + dx$, il faudra effectuer le travail

$$dW = dq [V(x) - V(\infty)] = dq V(x)$$

La charge supplémentaire dq est égale à $\rho \cdot 4\pi x^2 dx$ (densité de charges ρ constante dans le volume compris entre les sphères de rayon x et de rayon $x + dx$)

le travail dW est égal à la variation d'énergie électrique du système

$$dE_e = dW = \rho \cdot 4\pi x^2 dx \cdot \frac{Q x^2}{4\pi\epsilon_0 R^3} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \cdot 4\pi x^2 dx \cdot \frac{Q x^2}{4\pi\epsilon_0 R^3}$$

$$dE_e = \frac{3Q^2}{4\pi\epsilon_0 R^6} x^4 dx$$

L'énergie électrique totale emmagasinée par la sphère de rayon R contenant la charge Q répartie uniformément sera obtenue en sommant les énergies élémentaires dE_e depuis le début de la construction ($x=0$) jusqu'à sa fin ($x=R$)

$$E_e = \frac{3Q^2}{4\pi\epsilon_0 R^6} \int_{x=0}^R x^4 dx = \frac{3Q^2}{4\pi\epsilon_0 R^6} \left[\frac{x^5}{5} \right]_0^R = \frac{3}{5} \cdot \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R}$$

A travers cet exemple, nous vérifions le caractère général des expressions de l'énergie électrique obtenues dans le cas particulier d'une charge ponctuelle (voir § II.8)

On constate également que le choix d'une ou l'autre des méthodes conduit à des calculs plus ou moins compliqués.

Il n'en reste pas moins vrai que le calcul de $\vec{E}$, de V ou de l'énergie électrique ne sera possible que dans les cas où la distribution de charges présente des symétries importantes.

Exercices du Chapitre II

- 1 - À l'aide du théorème de Gauss, retrouver le champ électrique créé par un fil infini portant la densité de charges linéique λ , à une distance r du fil.
- 2 - À l'aide du théorème de Gauss, retrouver le champ électrique créé par un plan infini uniformément chargé (densité surfacique σ) à une distance z du plan.
- 3 - Étudier le système constitué par une sphère creuse ~~par~~ de rayon R portant la charge Q uniformément répartie sur sa surface. Calculer le champ électrique $\vec{E}$, le potentiel V en tout point de l'espace, ainsi que l'énergie électrostatique emmagasinée.
- 4 - Calculer la capacité d'un condensateur plan formé de deux armatures planes de surface S distantes de a .
- 5 - Retrouver les lois d'association de condensateurs.
 - en série $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$
 - en parallèle $C = C_1 + C_2$
- 6 - Retrouver l'énergie électrostatique emmagasinée dans un condensateur
$$E_c = \frac{1}{2} Q \cdot V = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$
- 7 - Calculer la capacité d'un condensateur formé de deux armatures cylindriques de rayons a et b ($b > a$) et de hauteur h , ayant même axe de symétrie.

Chapitre III : Électricité

On a vu dans le § I.9 que le mouvement des charges électriques pouvait donner naissance à un courant électrique, dont l'intensité est définie comme la quantité de charge traversant l'unité de surface d'une section droite du milieu conducteur par unité de temps. Dans ce chapitre, nous étudierons plus en détail ce phénomène, d'importance majeure au vu de ses applications.

III.1 Conducteurs et Isolants

On constate qu'en appliquant un champ électrique à une substance donnée, le comportement observé diffère d'une substance à une autre. Dans certaines, un courant électrique apparaît le long du matériau ; dans d'autres aucun phénomène de transfert de charges n'apparaît.

La manière dont une substance conduit l'électricité est étroitement liée à la structure électronique des atomes qui composent ce corps, c'est-à-dire la manière dont les électrons entourent le noyau.

Le modèle d'atome, développé au début du XX^e siècle par Bohr, comprend un noyau contenant les protons, ayant la charge $+e$, et les neutrons, entouré d'électrons formant des "couches", chaque couche étant caractérisée par une énergie différente et telle que la charge d'une couche donnée est égale à un nombre entier de fois la charge élémentaire. L'ensemble est neutre électriquement car il y a autant d'électrons que de protons dans l'atome.



Fig. 3.1

La figure 3.1 schématise ce modèle ; il faut cependant se garder de prendre à la lettre cette image de l'atome formé d'électrons gravitant sur des orbites bien précises (circularisées).

ou non) autour du noyau. Cette image a cependant l'avantage d'expliquer de nombreuses propriétés physiques ou chimiques de ces atomes.

Pour les métaux, qui sont de bons conducteurs électriques, l'atome comporte des couches électroniques internes totalement remplies et quelques électrons de valence situés sur la couche externe. A l'état solide, ces électrons s'arrachent facilement de l'atome et constituent ainsi un gaz d'électrons se déplaçant entre les ions du réseau, ces ions étant constitués par les noyaux entourés des électrons des couches internes.

Une excitation relativement faible, un champ électrique par exemple, provoque le mise en mouvement de ces électrons et le métal "conduit" l'électricité. Nous verrons dans le § III.2 comment on peut relier par la loi d'Ohm l'intensité du courant et le champ électrique appliqué au métal.

Dans d'autres substances les électrons de la couche externe sont "gelés", car ils assurent la liaison entre les atomes; deux atomes voisins mettent en commun leurs électrons périphériques, à la manière de ce que se produit dans certaines molécules, de manière à compléter leur couche externe, situation qui énergétiquement leur est favorable. Ne disposant plus d'électrons libres, ces substances conduisent peu, ou même pas du tout, le courant; on les appelle des isolants.

On peut remarquer que sous l'effet du champ appliqué les atomes se polarisent, mais aucun courant ne passe. Toutefois, pour de très grandes valeurs du champ électrique appliqué, certains électrons de valence peuvent être arrachés: il y a claquage de l'isolant.

Il existe des substances dont le comportement est intermédiaire entre les deux situations extrêmes présentées ci-dessus, on les appelle des semi-conducteurs. Nous consacrerons à la fin de ce chapitre un paragraphe à l'étude de quelques unes

de leurs propriétés, dans la mesure où ces substances ont connu un développement extrêmement important dans les quarante dernières années (diodes, transistors, ...)

III 2 Conductivité électrique - loi d'Ohm

Quand un champ électrique est appliqué à un matériau où des charges peuvent se déplacer librement, comme les électrons dans un métal, ces charges libres sont mises en mouvement et il en résulte un courant électrique. Les charges sont accélérées par le champ et acquièrent de l'énergie.

Dans le cas du métal, le mouvement des charges libres est gêné par l'interaction avec les ions positifs qui constituent le réseau cristallin et qui sont des charges fixes. Il faut remarquer que en l'absence de champ électrique appliqué, les électrons se déplacent dans le métal, mais leur mouvement se fait dans toutes les directions avec la même probabilité et il n'en résulte pas de mouvement global des charges.

Lorsque le champ est appliqué, un mouvement d'entraînement se superpose au mouvement aléatoire des électrons et il en résulte un courant. On admet que l'intensité de ce courant est fonction de la grandeur du champ appliqué et que leur relation est directement liée à la structure interne du métal.

Une description précise du phénomène impose d'utiliser les méthodes de la mécanique quantique. Cependant une étude phénoménologique, basée sur l'observation de faits expérimentaux nous permet d'établir la loi d'Ohm.

On observe en effet que, pour un conducteur métallique à température constante, le rapport entre la différence de potentiel ΔV entre deux points de ce conducteur et l'intensité I du courant électrique qui le traverse est constant. Cette constante est appelée résistance électrique du matériau.

$$R = \frac{\Delta V}{I}$$

ou

$$I = \frac{\Delta V}{R}$$

Il faut noter que tous les matériaux qui conduisent l'électricité n'obéissent pas à cette loi ; ceux qui la satisfont sont appelés conducteurs ohmiques, ou dipôles ohmiques.

R s'exprime en Volt par Ampère ou ohm (symbole Ω). L'ohm est la résistance du conducteur à travers lequel circule un courant d'un ampère lorsque une différence de potentiel de un volt est appliquée entre ses extrémités.

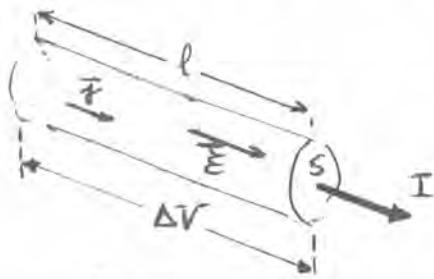


Fig 3.2

Examinons en détail le cas d'un conducteur cylindrique de longueur l et de section S (fig 3.2). On peut y définir la densité de courant j telle que $I = j S$.

Le champ électrique $\vec{E}$ le long du conducteur est

tel que $\|\vec{E}\| = \Delta V / l$ d'après [I.3]

Pour ce conducteur, la loi d'Ohm s'écrit $\|\vec{E}\| l = R j S$

ou encore $j = \left(\frac{l}{R S} \right) \|\vec{E}\| = \sigma \|\vec{E}\|$

où σ est une nouvelle constante, appelée conductivité électrique de la substance. Elle s'exprime en $\Omega^{-1} \text{m}^{-1}$.

On peut associer à j un vecteur $\vec{j}$ dirigé selon le sens du courant ; la relation précédente s'écrit alors vectoriellement :

$$\boxed{\vec{j} = \sigma \vec{E}} \quad [\text{III-1}]$$

C'est une manière différente d'écrire la loi d'Ohm.

L'inverse de la conductivité s'appelle la résistivité, ρ . Elle s'exprime en Ωm .

Pour des métaux bons conducteurs, σ varie de $2 \cdot 10^7$ à $6 \cdot 10^7 \Omega^{-1} \text{m}^{-1}$. Pour des isolants, σ est très faible : 10^{-10} à $10^{-14} \Omega^{-1} \text{m}^{-1}$ pour le verre,

environ $10^{-18} \Omega^{-1} m^{-1}$ pour le quartz ou le paraffine.

Remarque. Dans le paragraphe II.5 nous avions vu que le champ électrique $\vec{E}$ était nul dans un conducteur en équilibre, c'est-à-dire où les charges étaient immobiles. On voit que dès qu'il y a mouvement des charges, c'est-à-dire courant électrique dans le conducteur, le champ $\vec{E}$ n'est plus nul à l'intérieur du conducteur.

III.3 Effet Joule

Pour maintenir un courant dans un conducteur il faut dépenser de l'énergie. En effet sous l'effet du champ $\vec{E}$ les électrons libres sont accélérés, mais en interagissant avec les ions positifs du réseau, leur énergie cinétique est en partie transférée à ce réseau ; ceci conduit à une augmentation de la température du matériau, connue sous le nom d'effet Joule.

Soit $\vec{v}_e$ la vitesse moyenne de translation des électrons due au champ électrique $\vec{E}$. On peut noter que si n est le nombre d'électrons par unité de volume, la densité de courant $\vec{j}$ s'écrit :

$$\vec{j} = -e n \vec{v}_e$$

ou avec l'aide de [III.1] :

$$\vec{v}_e = - \frac{\sigma}{en} \vec{E}$$

L'énergie apportée par unité de temps à un électron est égale à

$$\vec{F} \cdot \vec{v}_e = -e \vec{E} \cdot \vec{v}_e$$

le travail effectué par unité de temps et par unité de volume, c'est-à-dire la puissance dissipée par unité de volume sera

$$P_{\text{un volume}} = n [-e \vec{E} \cdot \vec{v}_e] = n [-e \vec{E} \cdot \left(-\frac{\sigma}{en} \vec{E}\right)] = \sigma \vec{E}^2 = \vec{j} \cdot \vec{E}$$

Si nous considérons le conducteur cylindrique (fig 3.2) on a

$$P = (Sl) P_{\text{un volume}}.$$

$$P = (S \ell) (\vec{j} \cdot \vec{E}) = (\vec{j} S) \cdot (\vec{E} \ell) = I \cdot \Delta V.$$

C'est la puissance nécessaire pour maintenir le courant dans le conducteur. On retrouve l'expression obtenue au § I.9.

Pour les conducteurs ohmiques, on a $\Delta V = R I$ et donc

$$P = R I^2$$

III. 4. Force électromotrice

On a vu dans le chapitre I que le champ électrique $\vec{E}$ dérivait du potentiel électrique V par la relation [I.3].

Une conséquence importante en est que la circulation de $\vec{E}$ entre deux points A et B, $\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$, est égale à la différence de potentiel, $V_A - V_B$, et est indépendante du trajet suivi. On peut noter que ce résultat est égal au travail effectué pour déplacer une charge unité du point A jusqu'au point B.

Si les points A et B sont confondus, c'est-à-dire si le circuit est fermé (fig 3.3) on a

$$V = \oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

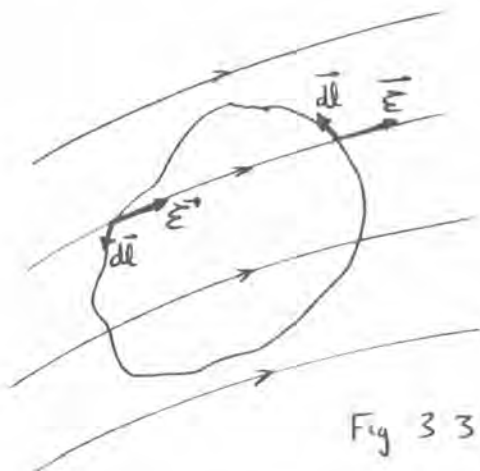


Fig 3.3

On appelle force électromotrice appliquée à un contour fermé le travail effectué lors du déplacement d'une charge unité le long de ce contour.

La force électromotrice (ou circulation) d'un champ électrique statique sur tout contour fermé est nulle.

Remarque : Le mot "force" est sans doute malheureux, puisque la grandeur concernée a les dimensions d'un potentiel et s'exprime donc en volts.

Si le champ électrique est appliqué à un conducteur fermé (ou circuit électrique) on a $\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = R I = 0$

Un champ électrique statique ne peut pas maintenir un courant dans

un circuit fermé. Pour maintenir un courant dans un circuit fermé, il est nécessaire d'alimenter le circuit en énergie : cela se fait à l'aide de générateurs électriques qui sont les sources de la force électromotrice. (f.e.m.)

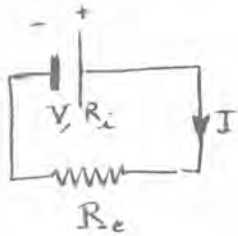


Fig 3.4.

Une source de f.e.m. est symbolisée par $\begin{array}{c} + \\ | \\ - \end{array}$ ou le sens du courant produit dans le circuit extérieur va du pôle + vers le pôle -. Cette source peut avoir une résistance interne. Placée dans un circuit, tel que celui de la fig 3.4, on aura :

$$V = (R_i + R_e) I$$

→ Il faut remarquer que la différence de potentiel aux bornes du générateur est égal à $V - R_i I$.

Cette différence de potentiel n'est égale à la force électromotrice que dans le cas où le générateur ne débite pas ($I = 0$).

III.5 Semiconducteurs

Comme nous l'avons vu au § III.1 certains corps ont un comportement intermédiaire entre celui des conducteurs et celui des isolants : ce sont notamment le silicium, le germanium, ...

En effet les électrons qui appartiennent tous à un liaison covalente entre deux atomes, peuvent relativement facilement être arrachés (sous l'effet d'une élévation de température par exemple). On constate ainsi une élévation de la conductivité avec la température (augmentation d'un facteur 10^6 pour le silicium lorsque on le chauffe de 250 à 450 ° Kelvin), alors que les corps conducteurs ont une conductivité qui décroît avec la température.

Outre cette conductivité intrinsèque, on peut artificiellement augmenter la conductivité d'un matériau semiconducteur en y introduisant des impuretés, c'est à dire en le dopant. Les atomes d'impureté seront appelés des donneurs

lorsque le nombre d'électrons de valence sera supérieur à celui de l'atome de la matrice (c'est-à-dire du silicium) ; on les appellera des accepteurs lorsque ce nombre sera inférieur.

Dans le premier cas on aura des électrons qui n'appartiennent pas à des liaisons covalentes entre atomes et qui ~~sont~~^{peuvent} facilement se déplacer dans le réseau. On dira qu'on a un semi-conducteur de type n (le transport du courant étant assuré par des électrons, charges négativement).

Dans le second cas on aura certaines liaisons entre atomes où il manquera un électron : on dira qu'on a un trou. Sous l'effet d'un champ appliqué un électron d'une liaison voisine pourra venir combler le trou, mais en quittant la liaison à laquelle il appartenait, il crée lui-même un trou. On dira qu'on a un semi-conducteur de type p (le transport pouvant être considéré comme due au déplacement des trous, qui électriquement peuvent être considérés comme des charges positives).

La jonction p-n (ou diode)

Lorsque on met en contact deux semi-conducteurs l'un de type p, l'autre de type n, il y a écoulement des porteurs libres à travers la jonction, les électrons de la partie n venant combler les trous de la partie p.

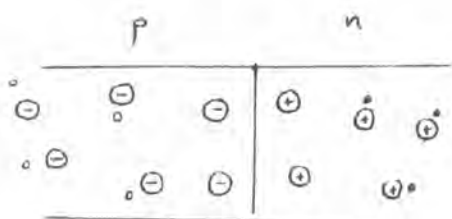


Fig. 3.5. Dans la zone p les impuretés sont représentées par $\ominus$ accompagnées du trou $\circ$ au voisinage de ces impuretés.

Dans la zone n les impuretés sont représentées par $\oplus$ accompagnées de l'électron supplémentaire $\bullet$.

Le phénomène de diffusion des porteurs libres à travers la jonction est cependant rapidement stoppé car les atomes d'impureté qui ne sont plus neutres forment au voisinage de la jonction une barrière de potentiel que les

électrons de la zone n ne ~~peuvent~~ plus franchir. (les impuretés sont rigidelement liées au réseau et ne se déplacent pas)

Si on applique une différence de potentiel aux bornes de la jonction, la situation sera très différente selon le sens de cette d.d.p. appliquée.

- Si le côté p est relié à la borne +, la barrière de potentiel à la jonction va être abaissée, le passage du courant est favorisé.
- Si le côté p est relié à la borne -, la barrière de potentiel à la jonction est relevée, le courant sera très faible (non nul cependant).

Ce dispositif est utilisé pour redresser un courant alternatif.

le transistor

Il est constitué par deux jonctions accolées ; il existera donc des transistors n-p-n et des transistors p-n-p. Les trois régions du transistor s'appellent Emetteur - Base - Collecteur. La région centrale (Base) doit être de dimensions très faibles.

En polarisant correctement les différentes jonctions, on peut utiliser ce dispositif pour l'amplification de courants, ...

Exercices du Chapitre III

1 - Retrouver les lois d'association de deux résistances ohmiques

- série $R = R_1 + R_2$

- parallèle $1/R = 1/R_1 + 1/R_2$

2 - En écrivant la conservation de la charge électrique et de l'énergie, retrouver les lois de Kirchhoff : lois des nœuds
lois des mailles.

3 - Mesure des intensités et des différences de potentiel.

L'aiguille d'un galvanomètre devie sur toute l'échelle (50 divisions) pour un courant de $0,1 \text{ mA}$. La résistance du galvanomètre est de 5Ω .

Que doit-on faire pour le transformer :

a) en un ampèremètre de sensibilité $0,2 \text{ A}$ par division ?

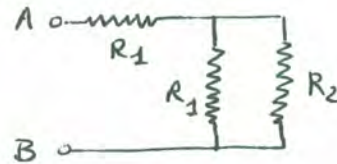
b) en un voltmètre de sensibilité $0,5 \text{ V}$ par division ?

4. Soit l'ensemble de résistances

ci-contre. Quelle doit être

la relation entre R_1 et R_2

pour que la résistance entre les points A et B soit égale à R_2 .



5. La différence de potentiel entre les bornes d'une batterie est de $8,5 \text{ V}$ lorsqu'un courant d'intensité 3 A traverse la batterie du pôle - au pôle +. Quand un courant d'intensité 2 A circule en sens inverse la différence de potentiel devient 11 V . Quelle est la résistance interne de la batterie ? Quelle est sa f.e.m. ?

Chapitre IV Magnéto statique

IV. 1 Mise en évidence expérimentale du champ magnétique

C'est en 1819 que le physicien danois Oerstedt observa qu'une boussole placée au voisinage d'un long fil conducteur traversé par un courant s'orientait perpendiculairement à la direction du fil. De plus, l'orientation de la boussole s'inversait lorsque le sens du courant dans le fil s'inversait.

Le courant électrique étant dû à un flux de charges électriques en mouvement, Oerstedt supposa que toute charge en mouvement produisait un champ magnétique. Le champ était responsable du mouvement de la boussole.

Toutefois, le magnétisme était une notion connue depuis fort longtemps; les Grecs avaient observé que certaines substances (fer, cobalt, manganèse, alliages de ces métaux) attiraient de petits morceaux de fer. Cette propriété propre à certains corps, donc très différente de la gravitation qui était universelle, semblait de plus être concentrée en certains points. Les régions d'un corps où le "magnétisme" semblait être concentré étaient appelés poles magnétiques, le corps lui-même était un aimant.

L'expérience suggérait qu'il existait deux sortes de pôles, désignés par + ou - ou par les lettres N et S. En effet en plaçant vis à vis (fig. 4.1) deux barreaux aimantés on constatait qu'ils s'attiraient ou qu'ils se repoussaient, selon que les pôles mis face à face étaient de même nature, ou de nature différente.



Fig. 4.1

L'appellation des pôles par les lettres N et S vient du fait que "un barreau aimanté s'orientait, lorsqu'il était libre de tourner autour de la verticale, de telle sorte que la même extrémité soit toujours tournée vers le pôle nord géographique (On doit noter qu'en fait il s'oriente vers le pôle nord magnétique qui n'est pas confondu avec le pôle nord géographique, qui n'est pas fixe au cours du temps : c'est la déclinaison magnétique)

L'existence de ces pôles de nature différente, l'interaction attractive ou répulsive entre deux barreaux aimantés, suggèrent une analogie importante avec l'électrostatique - charges de nature différente, interaction entre charges. - Mais toutes les tentatives d'isoler un pôle magnétique, ou d'identifier une particule magnétique possédant une espèce de magnétisme, N ou S, se sont avérées vaines. Les notions de pôle (et de masse) magnétique se sont révélées être différentes des notions d'électrostatique (charge), tout corps aimanté présentant toujours deux pôles égaux et d'espèce opposée.

Le mérite d'Oerstedt est d'avoir attribué l'existence du magnétisme à la présence de charges en mouvement. Cette étude a été largement développée au cours du XIX^{ème} siècle par Ampère, Laplace, Rowland, -

IV.2 Force magnétique s'exerçant sur une charge en mouvement

Par analogie avec le cas des interactions électriques et gravitationnelles, nous pouvons dire qu'un corps aimanté crée dans l'espace qui l'entoure un champ magnétique. C'est notamment le cas d'un aimant en U, ou ce champ est

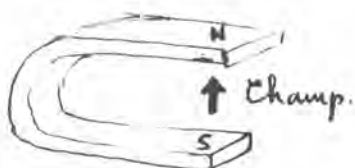


Fig. 4.2

observable dans la région située entre les pôles (en y mettant de la limaille de fer sur une feuille de papier glassée entre ces pôles)

Si on introduit entre les pôles de l'aimant un fil électrique, on constate que dans certaines conditions (que nous étudierons dans ce paragraphe) le fil subit une force lorsque il est parcouru par un courant.

Plus généralement, lorsqu'une charge se déplace dans une région où un champ magnétique existe, elle subit une force qui s'ajoute aux interactions électriques et gravitationnelles. On constate expérimentalement que la force exercée par un champ magnétique sur une charge en mouvement est proportionnelle à la charge électrique, à sa vitesse et la direction de la force est perpendiculaire à la vitesse de la charge et à la direction du champ.

En utilisant les propriétés du produit vectoriel (cf annexe maths), on peut donc écrire :

$$\boxed{\vec{F} = q \vec{v} \wedge \vec{B}} \quad [IV.1]$$

où $\vec{B}$ est le champ magnétique (c'est un champ de vecteurs, sa module et sa direction varient d'un point à l'autre de l'espace)

Lorsque la particule se déplace dans une région de l'espace où existent un champ électrique et un champ magnétique, la force totale subie par la charge q est

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

On l'appelle la force de Lorentz.

La formule [IV.1] permet de définir l'unité de champ magnétique, le tesla ; c'est le champ qui produit une force de un newton sur une charge d'un coulomb se déplaçant perpendiculairement au champ à la vitesse de un mètre par seconde.

Les applications de ce résultat [IV.1] sont nombreuses : effet Hall, spectrométrie de masse, cyclotron, confinement des plasmas, ... Nous étudierons dans le prochain paragraphe le mouvement d'une particule chargée dans un champ uniforme.

IV.3 Mouvement d'une charge dans un champ magnétique uniforme

Soit une charge q se déplaçant dans une direction perpendiculaire à celle du champ $\vec{B}$ supposé uniforme (fig. 4.3)

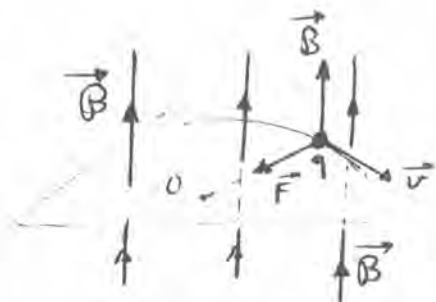


Fig 4.3

La force subie par q étant perpendiculaire à la vitesse, elle a pour effet de changer la direction de la vitesse sans en changer la grandeur et le mouvement sera alors un mouvement circulaire uniforme (cf aussi module PH2 Mécanique)

L'accélération est centripète, égale à v^2/r où r est le rayon de l'orbite circulaire

$$\|\vec{F}\| = m \frac{v^2}{r} = q v \|\vec{B}\|$$

$$\text{ou : } r = \frac{m v}{q \|\vec{B}\|}$$

Si ω est la vitesse angulaire, pour le mouvement circulaire uniforme, $v = r\omega$ et donc :

$$\omega = \frac{q \|\vec{B}\|}{m}$$

ω est appelée la fréquence cyclotron.

On peut noter que le sens de parcours de la trajectoire circulaire dépend du signe de la charge. Dans la fig 4.3, nous avons supposé la charge q positive.

IV.4 Force magnétique agissant sur un courant électrique

On ouït qu'un courant électrique était un déplacement de charges électriques dans le vide, ou à travers un milieu conducteur.

Soit une section droite du conducteur traversée par des particules de charge q possédant la vitesse $\vec{v}$. S'il y a n particules par unité de volume, le nombre total de particules traversant la surface unité par unité de temps sera $n v$, et la

densité de courant définie comme la charge traversant la surface unité par unité de temps sera

$$\vec{j} = n q \vec{v}$$

Si S est le section droite du conducteur, orientée perpendiculairement à $\vec{j}$, l'intensité du courant correspondant au déplacement des charges est

$$I = \vec{j} \cdot \vec{S} = n q \vec{v} \cdot \vec{S}$$

Si le conducteur est placé dans un champ magnétique $\vec{B}$, la force agissant sur chaque charge est $\vec{F} = q \vec{v} \wedge \vec{B}$ et la force par unité de volume sera

$$\vec{F}_{\text{uv}} = n q \vec{v} \wedge \vec{B} = \vec{j} \wedge \vec{B}$$

Soit le cas d'un courant I coulant à travers un fil de section S . La force s'exerçant sur l'élément de longueur dl du fil sera

$$d\vec{F} = (\vec{j} \wedge \vec{B}) S dl$$

Si on appelle $\vec{u}_T$ le vecteur unitaire tangent à l'axe du fil (fig. 4.4), on peut écrire

$$\vec{j} S = I \vec{u}_T$$

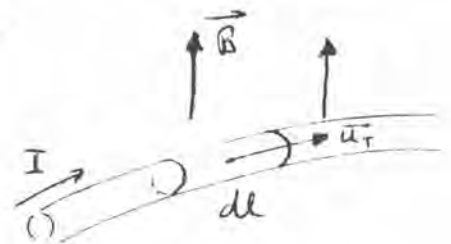


Fig. 4.4

$$\text{et} \quad \boxed{d\vec{F} = I (\vec{u}_T \wedge \vec{B}) dl} = \boxed{I d\vec{l} \wedge \vec{B}} \quad [\text{IV. 2}]$$

Tout conducteur est donc soumis à une force perpendiculaire à lui-même et au champ magnétique. C'est le principe sur lequel fonctionnent les moteurs.

IV.5 Couple magnétique agissant sur un courant électrique fermé

Un cas particulier d'application de l'expression [4.2] est le calcul de la force s'exerçant sur un circuit fermé parcouru par un courant d'intensité I placé dans un champ $\vec{B}$ uniforme.

On suppose (fig 4.5) que le circuit est rectangulaire et que la normale $\vec{u}_N$ au plan du circuit fasse un angle θ avec la direction de $\vec{B}$. (le sens de $\vec{u}_N$ est lié au sens du parcours du courant dans le circuit)

les forces $\vec{F}'$ agissant sur les côtés L' ont des grandeurs identiques

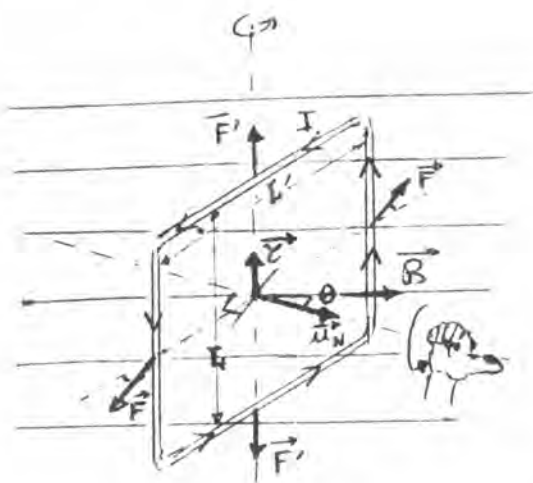


Fig 4.5

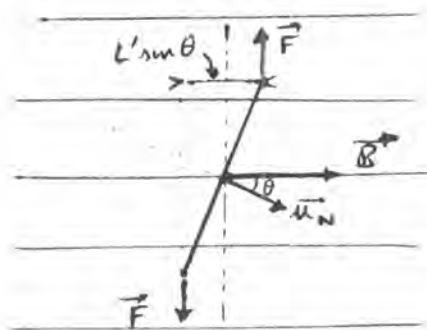


Fig 4.6

mais des directions opposées. Elles tendent à déformer le circuit mais ne produisent aucun couple.

Les forces $\vec{F}$ agissant sur les côtés L_1 ont pour module $I|\vec{B}|L_1$, elle constituent un couple (cf Fig 4.6) dont le bras de levier est égal à $L_1' \sin \theta$. le moment $\vec{\tau}$ du couple a pour module :

$$\|\vec{\tau}\| = I|\vec{B}|L_1' \sin \theta$$

$$\|\vec{\tau}\| = I S \|\vec{B}\| \sin \theta$$

puisque $S = L L'$ est l'aire du circuit

La direction de $\vec{\tau}$ est celle de l'axe de rotation du circuit. On définit le vecteur

$$\vec{M} = I S \vec{n}$$

et le couple s'exerçant sur le circuit a pour moment :

$$\vec{\tau} = \vec{M} \wedge \vec{B}$$

Par analogie avec le dipôle électrique placé dans un champ électrique extérieur, le vecteur $\vec{M}$ est appelé moment dipolaire magnétique du circuit.

Bien qu'établi dans un cas particulier, la notion de moment dipolaire magnétique d'une boucle de courant est valable dans un cas général.

De plus, toujours par un raisonnement analogue à celui du dipôle électrique, l'énergie d'un circuit fermé placé dans un champ magnétique $\vec{B}$ sera

$$E_{\text{mag}} = - \vec{M} \cdot \vec{B}$$

Le galvanomètre à cadre mobile est un appareil utilisant la mesure du couple s'exerçant sur le cadre (compensé par le couple de rappel exercé par le fil auquel est suspendu le cadre) pour déterminer l'intensité du courant qui le traverse.

IV 6 Champ magnétique produit par une charge en mouvement

Dans les § IV.2, IV.3 et IV.4 nous venons d'étudier l'effet du champ $\vec{B}$ sur des charges en mouvement. Or, l'expérience d'Oersted avait montré que inversement une charge en mouvement (un courant) produisait un champ magnétique.

Remarques * On a vu en électrostatique qu'une charge q (au repos) créait en tout point de l'espace un champ $\vec{E}$ qui agissait sur les autres charges. Ici une charge q en mouvement crée un champ magnétique $\vec{B}$ qui agit sur les autres charges en mouvement.

* Une charge q en mouvement produit à la fois un champ électrique et un champ magnétique. Ces deux champs sont deux aspects d'une seule propriété fondamentale de la matière, et le terme champ électromagnétique décrit de manière plus appropriée l'ensemble de la situation physique liée à des charges en mouvement. Cet aspect sera revu dans le Module PH 4 - Électromagnétisme (2^e partie).

Soit une charge q se déplaçant à la vitesse $\vec{v}$ (qu'on supposera faible devant la vitesse de la lumière) le long d'un axe (Fig. 4.7). En tout point A de l'espace il existe un champ électrique $\vec{E}$ donné par :

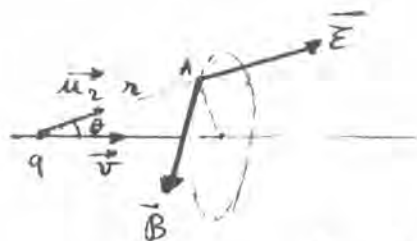


Fig 4.7

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$$

et un champ magnétique $\vec{B}$ dont l'expérience (orientation de la boussole) montre que les lignes de force sont circulaires et centrées sur la trajectoire de la charge. En particulier on note que $\vec{B}$ n'a pas de composante dans la direction de la charge.

Le module de $\vec{B}$ est proportionnel à la vitesse de la charge, inversement proportionnel au carré de la distance séparant la charge du point considéré. En utilisant encore la formule du produit vectoriel, on peut écrire :

$$\vec{B} = k_m \ q \frac{(\vec{v} \wedge \vec{u}_2)}{r^2}$$

Dans le système international, la constante k_m vaut 10^{-7} . On a cependant l'habitude d'écrire :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \ q \frac{(\vec{v} \wedge \vec{u}_2)}{r^2}$$

où μ_0 est appelée la perméabilité magnétique du vide

En comparant les expressions de $\vec{B}$ et de $\vec{E}$, on peut remarquer que

$$\vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 (\vec{v} \wedge \vec{E}) = \frac{1}{c^2} (\vec{v} \wedge \vec{E}).$$

En effet le produit des constantes ϵ_0 par μ_0 est égal ^(à l'inverse) du carré de la vitesse de la lumière (ou de tout autre rayonnement électromagnétique) dans le vide.

IV.7. Champ magnétique produit par une boucle de courant

Soit un fil de section S , de longueur élémentaire dl , parcouru par un courant d'intensité I . Le nombre de charges contenues dans cette portion de fil est

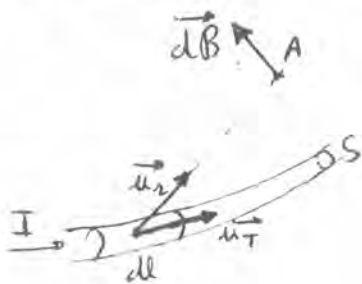


Fig 4.8

($d\vec{B}$ est normal au plan formé par $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$)

égal à $n S dl$, si n est le nombre de charges par unité de volume. La vitesse $\vec{v}$ des charges, identique à $\vec{u}_1$, est reliée à l'intensité I par

$$I = \|\vec{j}\| S = n q \|\vec{v}\| S.$$

L'induction élémentaire $d\vec{B}$, créée au point A, sera

donc :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} (n S dl q) \frac{I \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2}{r^2}$$

ou encore

$$\boxed{d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \wedge \vec{u}_2}{r^2}} \quad [IV-3]$$

Cette expression est appelée loi d'Ampère-Laplace, où $d\vec{l} = dl \vec{u}_1$.

L'expression [IV-3] permet de calculer le champ magnétique $\vec{B}$ créé par un courant parcourant un conducteur. Le calcul de $\vec{B}$, effectué en sommant vectoriellement

les champs élémentaires de $\vec{B}$, n'est possible que dans certains cas simples: fil rectiligne infini, champ magnétique en un point de l'axe d'une spire circulaire par exemple

IV. 8 Forces s'exerçant entre deux courants

Nous venons de voir qu'un courant d'intensité I produisant en tout point de l'espace un champ magnétique $\vec{B}$. D'après le § IV. 4, un autre courant I' , placé dans le champ $\vec{B}$ subit une force.

Examinons le cas particulier de deux courants parallèles I et I' , de même direction séparés par la distance R . Le champ $\vec{B}$ créé en tout point de I' par le courant I

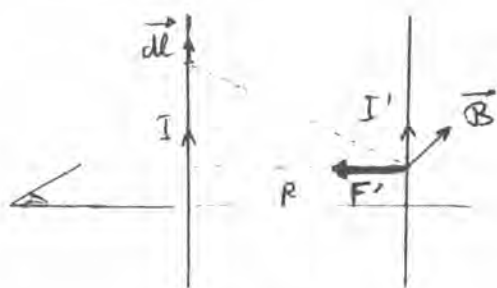


Fig. 4.9

sera orienté dans le plan perpendiculaire à I et I' (En effet tous les champs élémentaires de $\vec{B}$ créés par les éléments de longueur dl parcourus par le courant d'intensité I sont orientés identiquement)

La force $\vec{F}'$ s'exerçant sur le fil parcouru par le courant I' sera donc telle (fig. 4.9) qu'elle aura tendance à attirer le fil parcouru par le courant I' vers l'autre fil.

Il faut noter que symétriquement le fil parcouru par le courant I' crée en tout point de I un champ magnétique $\vec{B}'$ et la force $\vec{F}$ exercée par $\vec{B}'$ sur le fil parcouru par le courant I est égale et opposée à $\vec{F}'$ (fig. 4.10)

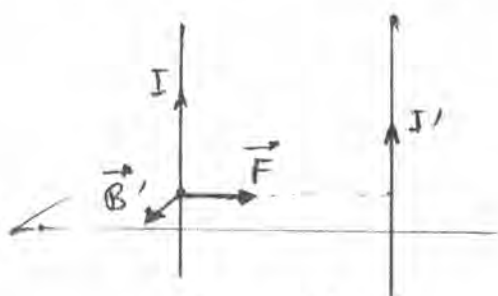


Fig. 4.10

Il faut noter que si deux courants parallèles de même sens s'attirent mutuellement, deux courants parallèles de sens opposés se repoussent.

En utilisant les expressions [IV. 2] et [IV. 3]

et en les intégrant pour tenir compte de la force totale exercée sur le deuxième conducteur exercée par le champ $\vec{B}$ créé par l'ensemble du premier conducteur,

il est théoriquement possible de calculer la force d'interaction entre deux conducteurs quelconques. Le calcul est cependant ardu dans la plupart des configurations.

Remarque : La force s'exerçant entre deux courants permet de définir la quatrième unité fondamentale du système international, l'ampère. C'est l'intensité du courant, qui circulant dans deux conducteurs parallèles séparés par une distance d'un mètre produit sur chaque conducteur une force de $2 \cdot 10^{-7}$ Newton par mètre de longueur de chaque conducteur.

Une fois l'ampère défini, le coulomb s'en déduit comme la quantité de charge qui s'écoule en une seconde à travers une section transversale du conducteur, quand le courant qui le parcourt est de un ampère.

IV.9 Théorème d'Ampère pour le champ magnétique

Soit un filament rectiligne parcouru par un courant d'intensité I . On

supposera le fil ayant une longueur infinie (Fig 4.11)

L'expression [IV.3] permet de calculer $d\vec{B}$ au point P créé par l'élément de courant $I dl$ placé au point M .

On a $HM = l = R \tan \alpha$; en différenciant.

$$dl = R \left(\frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha} \right)$$

le module de $d\vec{B}$ vaudra

$$\|d\vec{B}\| = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I R d\alpha}{\cos^2 \alpha} \frac{\sin \theta}{(MP)^2}$$

$$\text{Or } \sin \theta = \sin \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) = \cos \alpha \quad \text{et} \quad MP = R / \cos \alpha$$

$$\text{Donc : } \|d\vec{B}\| = \frac{\mu_0 I R \cos \alpha d\alpha}{4\pi R^2}$$

Tous les vecteurs $d\vec{B}$ sont colinéaires, et le champ $\vec{B}$ au point P aura pour

$$\text{module : } \|\vec{B}\| = \int_{\alpha = -\pi/2}^{+\pi/2} \|d\vec{B}\| = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \int_{\alpha = -\pi/2}^{+\pi/2} \cos \alpha d\alpha = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

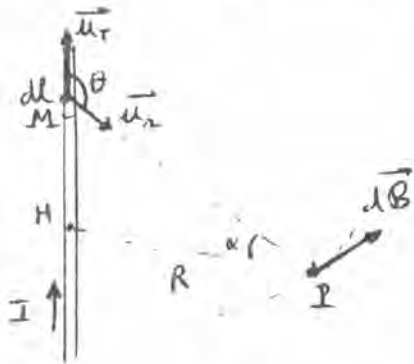


Fig 4.11

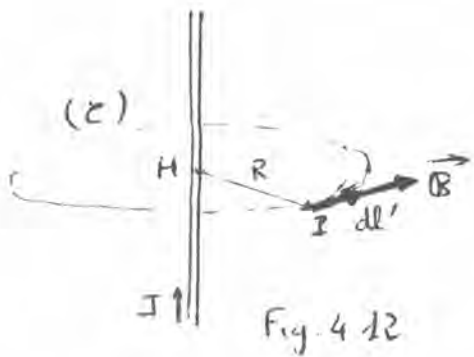


Fig. 4.12

Calculons la circulation du champ $\vec{B}$ le long du contour (C) , cercle de centre H , de rayon R , placé dans un plan perpendiculaire au fil (Fig. 4.12)

En tout point I de (C) , $\vec{B}$ est colinéaire à $d\vec{l}'$ déplacement élémentaire le long de (C) .

$$\vec{B} \cdot d\vec{l}' = \|\vec{B}\| dl'$$

De plus le module de $\vec{B}$ est identique en tout point de (C) ; d'où

$$\oint_{(C)} \vec{B} \cdot d\vec{l}' = \|\vec{B}\| \oint_{(C)} dl' = \|\vec{B}\| 2\pi R$$

puisque la longueur du cercle (C) est égale à $2\pi R$. Or $\|\vec{B}\| = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$, d'où

$$\oint_{(C)} \vec{B} \cdot d\vec{l}' = \mu_0 I$$

On remarque que le résultat est indépendant du rayon R .

Attention : Ne pas confondre $d\vec{l}'$, déplacement élémentaire le long de (C) , avec $d\vec{l}$ petit élément de longueur pris en M dans la direction du fil pour calculer $d\vec{B}$.

On peut montrer que ce résultat est valable pour tout contour embrassant un courant rectiligne, quelle que soit la position du courant par rapport au contour. De plus le résultat reste vrai pour toute forme de courant.

Si nous avons plusieurs courants I_1, I_2, I_3 embrassés par un contour (C)

fermé, chaque courant contribue à la circulation du champ magnétique le long de (C)

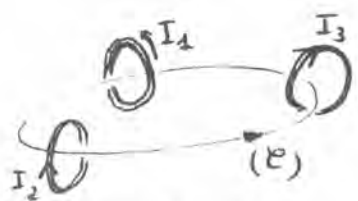


Fig. 4.13

La circulation du champ magnétique (ou force magnétomotrice) le long d'une courbe fermée est égale à μ_0 multipliée par la somme algébrique des courants embrassés

$$\oint_{(C)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I$$

C'est le théorème d'Ampère. Il faut noter que le sens de circulation de $(\mathcal{C})$ (sens arbitrairement choisi) détermine le signe des intensités. Dans le cas de la fig. 4.13, le sens de parcours de $(\mathcal{C})$ implique que les courants embrassés par $(\mathcal{C})$ et allant "de bas en haut" $[(\mathcal{C})$ étant considéré dans un plan "horizontal"] seront comptés positivement, c'est le cas de I_1 et de I_3 , ceux allant "de haut en bas" seront comptés négativement, c'est le cas de I_2 .

Le théorème d'Ampère permet de calculer le champ magnétique produit par une distribution de courant possédant certaines symétries (cf exercices).

Le fait que la circulation du champ magnétique $\vec{B}$ le long d'un contour fermé n'est généralement pas nulle, indique que le champ magnétique ne dérive pas d'un potentiel magnétique scalaire, au sens où le champ électrique dériverait du potentiel électrique.

On verra (cf module PH4) qu'on pourra considérer que le champ $\vec{B}$ dérive d'un potentiel-vecteur, $\vec{A}$, tel que $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$.

IV.10 Forme différentielle du théorème d'Ampère

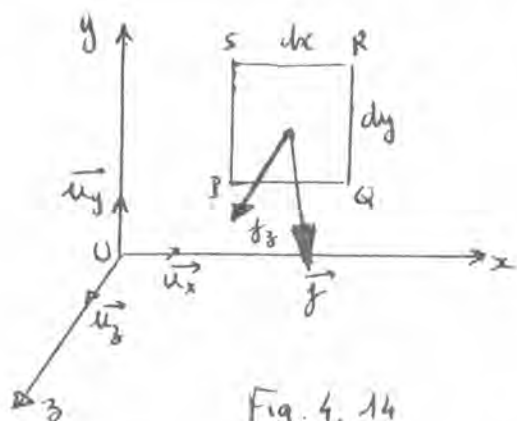


Fig. 4.14

Appliquons le théorème d'Ampère à un circuit très petit PQRS, rectangulaire, de côtés dx et dy

$$\oint_{(\mathcal{C})} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{PQ} + \int_{QR} + \int_{RS} + \int_{SP} \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

Sur le côté QR, parallèle à Oy , $d\vec{l} = \vec{u}_y dy$

$$\int_{QR} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{QR} \vec{B} \cdot \vec{u}_y dy$$

Or $\vec{B} \cdot \vec{u}_y$, le long de QR, est égal à la composante B_y de $\vec{B}$, tous les points de QR ont pour coordonnées $x+dx$, z et une ordonnée variant de y à $y+dy$

On a aussi $\int_{SP} \vec{B} \cdot d\vec{l} = - \int_{SP} \vec{B} \cdot \vec{u}_y dy$

Où $\vec{B} \cdot \vec{u}_y$ est égal à la composante B_y de $\vec{B}$, pour les points de SP ayant des coordonnées x, z et une ordonnée variant de $y+dy$ à y (ce qui explique le signe -)

En calculant ensemble $\int_{QR} + \int_{SP} \vec{B} \cdot d\vec{l}$, on obtient $[B_y(x+dx, y, z) - B_y(x, y, z)] dy$

En utilisant la notation des dérivées partielles (pour ce calcul, se rapporter à des calculs semblables développés dans l'annexe mathématique)

$$B_y(x+dx, y, z) - B_y(x, y, z) = \frac{\partial B_y}{\partial x} dx$$

Où $\int_{QR} + \int_{SP} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{\partial B_y}{\partial x} dx dy$

En raisonnant de manière semblable pour la circulation le long de RS et de PQ, on obtient :

$$\int_{PQ} + \int_{RS} \vec{B} \cdot d\vec{l} = - \frac{\partial B_x}{\partial y} dx dy$$

Où $\oint_{PQRS} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) dx dy$

Si dI est l'intensité élémentaire du courant traversant PQRS, et si $\vec{j}$ est la densité de courant correspondante (cf fig 4.14), on a

$$dI = \vec{j} \cdot d\vec{S} = j_z dx dy$$

j_z est la seule composante de la densité de courant qui contribue au courant traversant PQRS. On obtient comme résultat du théorème d'Ampère :

$$\left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) dx dy = \mu_0 j_z dx dy$$

ou $\left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) = \mu_0 j_z$

Un résultat obtenu de même en prenant des contours judicieusement orientés

$$\left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) = \mu_0 j_x \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) = \mu_0 j_y$$

On retrouve dans les quantités entre parenthèses, les composantes du vecteur rotationnel de $\vec{B}$. Les trois égalités précédentes peuvent donc s'écrire sous forme

vectorielle.

$$\boxed{\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}} \quad [\text{IV.4}]$$

Il s'agit de la forme différentielle du théorème d'Ampère, qui établit une relation locale entre le champ magnétique $\vec{B}$ en un point et la densité de courant $\vec{j}$ au même point.

On retrouve une relation similaire à la forme différentielle du théorème de Gauss qui établissent une relation locale entre le champ $\vec{E}$ et la densité de charges en un point de l'espace. Il se confirme ainsi que ce sont les courants électriques qui sont les sources de champ magnétique.

Remarque. Comme la circulation de $\vec{E}$ le long d'un contour fermé est nulle, on retrouverait en faisant le raisonnement qui précède que

$$\text{rot } \vec{E} = \vec{0}$$

IV.11 Flux magnétique

Le flux magnétique à travers une surface (S) quelconque, fermée ou non, placée dans un champ magnétique $\vec{B}$ est :

$$\Phi_B = \iint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint_{(S)} \vec{B} \cdot \vec{u}_N dS$$

Le flux magnétique s'exprime en Tesla $\times m^2$ ou Weber. Il est d'une grande importance dans les phénomènes d'induction que nous étudierons dans le module PH4.

Comme il n'y a pas de masses ou pôles magnétiques (ou du moins n'en ont-ils encore jamais été observés), les lignes de force du champ magnétique sont fermées sur elles-mêmes. Le flux du champ magnétique à travers une surface fermée est alors toujours nul :

$$\oiint_{S_1} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

Ce résultat, qu'on peut retrouver à l'aide de l'expression de $d\vec{B}$ donnée par

[IV 3], constitue le théorème de Gauss pour le champ magnétique. On peut l'écrire sous sa forme différentielle, par analogie avec le champ électrique, et on trouve bien entendu :

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

Dans ce module nous nous consacrons ici dans l'étude du champ magnétique $\vec{B}$. Comme pour le champ électrique $\vec{E}$, signalons qu'on peut associer à l'existence du champ $\vec{B}$ une énergie magnétique E_{mag} caractérisée par sa densité égale à $\frac{\|\vec{B}\|^2}{2\mu_0}$. Nous étudierons plus en détail cette notion dans le module PH 4.

Exercices sur le Chapitre IV

• IV.1 Expérience de Thomson pour la mesure de q/m .

Un faisceau d'électrons, ayant la vitesse v , traverse une région d'espace où existe un champ $\vec{E}$ vertical et un champ $\vec{B}$ horizontal. Quelle relation doit-il exister entre les modules de $\vec{E}$ et de $\vec{B}$ pour que le faisceau ne soit pas dévié?

• IV.2 A l'aide de la formule [IV.3] déterminer le module et la direction du champ $\vec{B}$ en un point P situé sur l'axe d'une spire circulaire de rayon R , centrée en O , parcourue par un courant d'intensité I .

• IV.3 A l'aide du résultat précédent, déterminer le module et la direction de $\vec{B}$ en un point de l'axe d'un solénoïde formé de N spires de rayon R parcourues par un courant d'intensité I , la longueur de la bobine étant égale à L . Que vaut $\vec{B}$ lorsque la longueur du solénoïde et le nombre de spires deviennent infinis, le rapport N/L restant constant?

• IV.4. A l'aide du théorème d'Ampère déterminer le module et le sens de $\vec{B}$ en tout point de l'espace produits par un fil de longueur infinie, de section circulaire de rayon a , parcouru par un courant d'intensité I . On distinguera les cas où la distance x entre le point P considéré et l'axe du fil est inférieure à a d'une part, supérieure à a d'autre part.

• IV.5 Utiliser le théorème d'Ampère pour retrouver le champ $\vec{B}$ produit par un solénoïde de longueur infinie parcouru par un courant d'intensité I (cf exercice IV.3).

Conclusion

Dans ce module, nous avons discuté des champs électrique et magnétique statiques comme étant deux grandeurs indépendantes, en dehors du fait que les sources du champ électrique sont des charges électriques, les sources du champ magnétique étant ces charges en mouvement. Nous sommes ainsi arrivés à établir des lois qui sont résumées dans ce tableau.

Loi	Forme intégrale	Forme différentielle
Théorème de Gauss pour le champ électrique	$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$	$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$
Théorème de Gauss pour le champ magnétique	$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$	$\text{div } \vec{B} = 0$
Circulation du champ électrique	$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$	$\text{rot } \vec{E} = \vec{0}$
Circulation du champ magnétique	$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$	$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$

On a cependant noté (§ IV.6) une relation existant entre $\vec{E}$ et $\vec{B}$. Nous venons dans le module PH 4, où nous étudierons notamment les phénomènes dépendant du temps, que les ~~relations~~ ^{relations} du tableau ci-dessus doivent être corrigées, et que le lien entre $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sera beaucoup plus fondamental.

Summary

I le champ électrostatique

I.1 la charge électrique	1
I.2 Mesure de la charge - Conservation de la charge	3
I.3 Loi de Coulomb	4
I.4 Champ électrique	5
I.5 Quantification de la charge électrique	8
I.6 Potentiel électrique	9
I.7 Potentiel d'une charge ponctuelle	11
I.8 Énergie d'une particule chargée dans un champ électrique	13
I.9 Courant électrique	14
I.10 Étude d'un système de charges - le dipôle électrique	16
I.11 Distribution de charges	20

II Propriétés du champ électrostatique - Conducteurs en équilibre

II.1 Notion de flux d'un champ de vecteurs	23
II.2 Théorème de Gauss	24
II.3 Forme différentielle du théorème de Gauss	27
II.4 Théorème de Gauss et potentiel électrique	28
II.5 Conducteurs en équilibre	29
II.6 Capacité d'un conducteur	30
II.7 Système de conducteurs - Condensateurs	30
II.8 Énergie du champ électrique	33
II.9 Étude d'une distribution de charges : sphère uniformément chargée	35

III Circuits électriques

III. 1	Conducteurs et isolants	43
III. 2	Conductivité électrique, Loi d'Ohm	45
III. 3	Effet Joule	47
III. 4	Force électromotrice	48
III. 5	Semi-conducteurs	49

IV Magnétostatique

IV. 1	Mise en évidence expérimentale du champ magnétique	53
IV. 2	Force magnétique s'exerçant sur une charge en mouvement	54
IV. 3	Mouvement d'une charge dans un champ mag. uniforme.	56
IV. 4	Force magnétique agissant sur un courant électrique	56
IV. 5	Torque magnétique agissant sur un courant électrique fermé	57
IV. 6	Champ magnétique produit par une charge en mouvement	59
IV. 7	Champ magnétique produit par une Boucle de courant	60
IV. 8	Forces s'exerçant entre deux courants	61
IV. 9	Théorème d'Ampère pour le champ magnétique	62
IV. 10	Forme différentielle du théorème d'Ampère	64
IV. 11	Flux magnétique	66

Conclusion

Annexe Mathématiques

Rapports de calcul vectoriel

I. Produit scalaire de deux vecteurs	p. 1-M
II. Produit vectoriel (ou extérieur) de deux vecteurs	p. 1-M
III. Produit mixte de trois vecteurs	p. 1-M
IV. Dérivée vectorielle	p. 2-M
V. Systèmes de coordonnées	p. 2-M
VI. Domaines élémentaires d'intégration	p. 3-M
VII. Quelques utilisations du calcul intégral	p. 4-M
VIII. Gradient d'une fonction scalaire f	p. 5-M
IX. Divergence d'un champ de vecteurs $\vec{A}$, calcul en coord. cartésiennes	p. 7-M
X. Rotationnel d'un champ de vecteurs $\vec{A}$; calcul en coord. cartésiennes	p. 7-M
XI. Circulation d'un champ de vecteurs	p. 7-M
XII. Flux d'un champ de vecteurs	p. 8-M
XIII. Théorème de Stokes (démonstration p. 19-M)	p. 8-M
XIV. Théorème d'Ostrogradski (ou de la divergence) (démonst. p. 20-M)	p. 8-M
XV. Calcul de la divergence d'un champ de vecteurs en coord. cylindriques	p. 9-M
XVI. Calcul de la divergence d'un champ de vecteurs en coord. sphériques	p. 12-M
XVII. Calcul du rotationnel d'un champ de vecteurs en coord. cylindriques	p. 14-M
XVIII. Calcul du rotationnel d'un champ de vecteurs en coord. sphériques	p. 16-M
XIX. Laplacien d'une fonction scalaire V	p. 18-M
XX. Laplacien d'un champ de vecteurs $\vec{A}$	p. 19-M
XXI. Angle solide	p. 22-M

Quelques rappels de calcul vectoriel

I. Produit scalaire de deux vecteurs

Soyent deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$, dont les composantes (dans un repère orthonormé) sont respectivement A_x, A_y et A_z, B_x, B_y et B_z . Le produit scalaire S des deux vecteurs est (comme son nom l'indique !) un scalaire :

$$S = \vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = \vec{B} \cdot \vec{A}$$

On peut montrer que : $S = \|\vec{A}\| \|\vec{B}\| \cos(\widehat{\vec{A}, \vec{B}})$

où $\|\vec{A}\|$ et $\|\vec{B}\|$ sont les normes (ou modules) des vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ ($\|\vec{A}\| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$) et $(\widehat{\vec{A}, \vec{B}})$ l'angle que fait entre eux les deux vecteurs.

II. Produit vectoriel (ou produit extérieur) de deux vecteurs

Le produit vectoriel des deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ est un vecteur $\vec{C}$, normal au plan formé par les vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$, et tel que le trièdre $(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C})$ soit direct, c'est-à-dire qu'en passe de $\vec{A}$ à $\vec{B}$, ou de $\vec{B}$ à $\vec{C}$, par une rotation d'angle positif inférieur à π .

On note

$$\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B}$$

(Rq. dans les ouvrages anglais, on trouve $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ ou $\vec{C} = \vec{A} \otimes \vec{B}$)

les composantes du vecteur $\vec{C}$ sont égales à :

$$C_x = A_y B_z - A_z B_y, \quad C_y = A_z B_x - A_x B_z \quad \text{et} \quad C_z = A_x B_y - A_y B_x$$

le module du vecteur $\vec{C}$ est égal à $\|\vec{C}\| = \|\vec{A}\| \|\vec{B}\| \sin(\widehat{\vec{A}, \vec{B}})$

On remarque que : $\vec{A} \wedge \vec{B} = -(\vec{B} \wedge \vec{A})$

III. Produit mixte de trois vecteurs

Le produit mixte de trois vecteurs $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ est un scalaire défini par :

$$M = (\vec{A} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{C}$$

On peut montrer que M représente le volume du parallépipède construit sur les trois vecteurs $\vec{A}$, $\vec{B}$ et $\vec{C}$.

IV. Dérivée vectorielle

Si un vecteur $\vec{A}$ a pour composantes dans un repère orthonormé $A_x(t)$, $A_y(t)$ et $A_z(t)$, on définit la dérivée vectorielle de $\vec{A}$ par rapport à la variable t , comme étant le vecteur $\vec{B}$ tel que :

$$\vec{B} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\vec{A}(t+dt) - \vec{A}(t)}{dt} = \frac{d\vec{A}}{dt}$$

Si le repère orthonormé est fixe^(*), les composantes du vecteur $\vec{B}$ seront dans ce repère :

$$B_x(t) = \frac{dA_x}{dt}, \quad B_y(t) = \frac{dA_y}{dt} \quad \text{et} \quad B_z(t) = \frac{dA_z}{dt}$$

V. Systèmes de coordonnées

En Physique on utilise, selon les symétries du problème étudié, divers systèmes de coordonnées pour repérer un point dans l'espace. Les plus courants sont :

* à deux dimensions les coordonnées cartésiennes (fig. 1) et les coordonnées polaires (fig. 2)

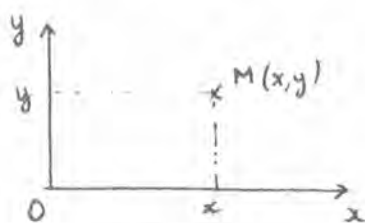


Fig. 1

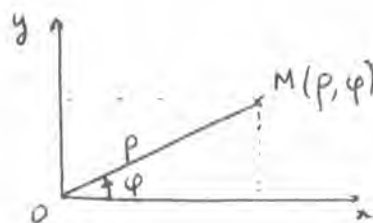


Fig. 2

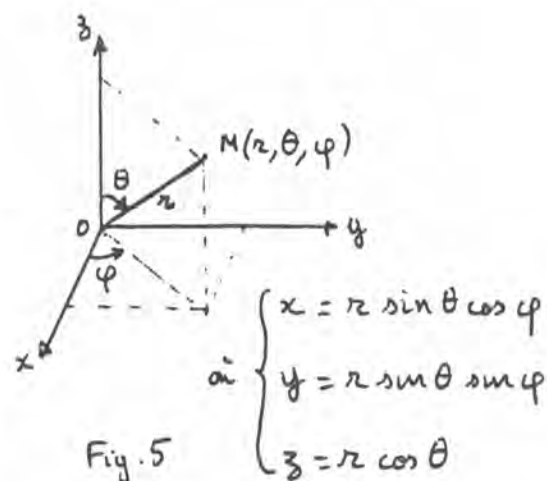
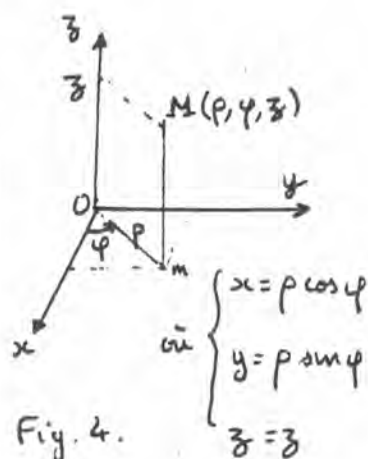
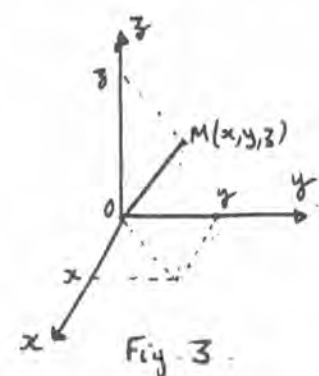
$$\text{ou} \begin{cases} x = p \cos \varphi \\ y = p \sin \varphi \end{cases}$$

* à trois dimensions, les coordonnées cartésiennes (fig. 3), les coordonnées cylindriques (fig. 4) et les coordonnées sphériques (fig. 5)

.../.

(*) Lorsque le repère n'est pas fixe, on doit tenir compte des dérivées vectorielles des vecteurs de base $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ de ce repère.

$$\text{Si } \vec{A} = A_x(t) \vec{i}, \quad \frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{dA_x}{dt} \vec{i} + A_x \frac{d\vec{i}}{dt}$$



VI. Domaines élémentaires d'intégration

Il s'agit de la surface élémentaire (à deux dimensions) ou du volume élémentaire (à trois dimensions) sur lequel on suppose que la fonction à intégrer reste constante. Il s'obtient en effectuant, à partir d'un point donné, des variations élémentaires de chacune des coordonnées.

Les directions de ces divers déplacements définissent en tout point de l'espace un repère local, selon lequel il est parfois utile d'exprimer les composantes d'un vecteur.

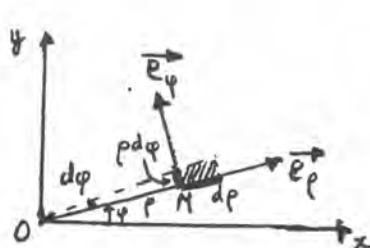
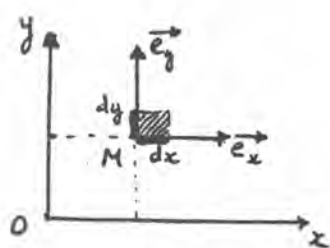
* A deux dimensions :

- en coordonnées cartésiennes, le domaine d'intégration aura pour surface (fig. 6) :

$$dS = (dx) (dy)$$

- en coordonnées polaires, le domaine d'intégration aura pour surface (fig. 7) :

$$dS = (dp) (p d\varphi)$$



* A trois dimensions :

- en coordonnées cartésiennes, le domaine d'intégration aura pour volume

(fig. 8): $dv = (dx)(dy)(dz) = dx dy dz$

- en coordonnées cylindriques, le domaine d'intégration aura pour volume

(fig. 9) $dv = (dp)(p d\varphi)(dz) = p dp d\varphi dz$

- en coordonnées sphériques, le domaine d'intégration aura pour volume

(fig. 10) $dv = (dr)(r d\theta)(r \sin\theta d\varphi) = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$

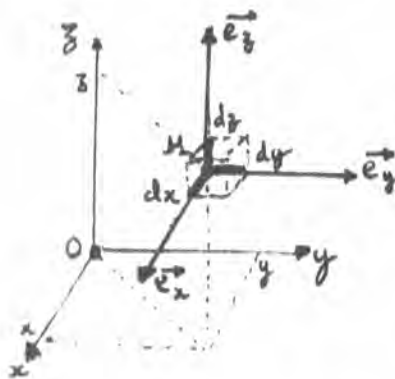


Fig. 8

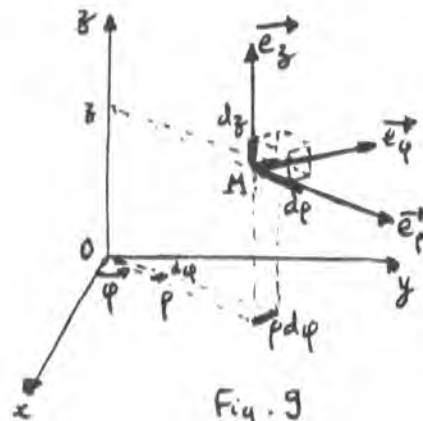


Fig. 9

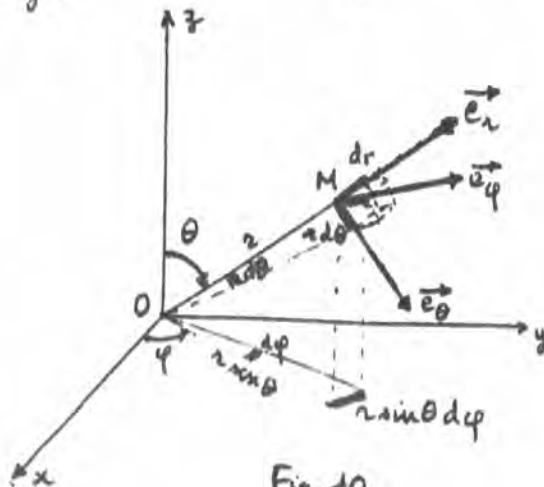


Fig. 10

VII Quelques utilisations du calcul intégral

VII.1. Calcul d'une valeur moyenne

La valeur moyenne d'une fonction sur l'intervalle $[a, b]$ est défini par

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

Pour une fonction dépendant de plusieurs variables, la formule précédente se généralise :

$$\mu = \frac{1}{(b_1 - a_1) \dots (b_n - a_n)} \int_{x_1=a_1}^{b_1} \int_{x_2=a_2}^{b_2} \dots \int_{x_n=a_n}^{b_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_n \dots dx_2 dx_1$$

VII.2. Calcul de longueurs, surfaces et volumes

* L'intégrale $\int_a^b f(x) dx$ représente la surface hachurée (fig. 11). Dans le cas particulier où $f(x) = 1$ pour toute valeur de x , le résultat de cette intégrale est égal à la longueur de l'intervalle $[a, b]$.

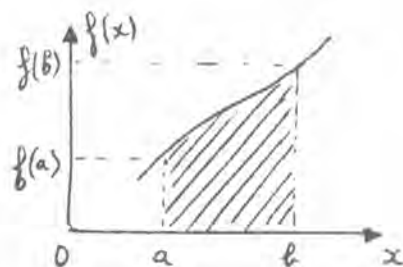


Fig. 11

* L'intégrale $\iint_D f(x, y) dx dy$ représente le volume compris entre le domaine D d'intégration (contenu dans le plan xOy), la surface construite en affectant à chaque point M (x_m, y_m) de D , la cote $z_m = f(x_m, y_m)$, et les génératrices parallèles à Oz . (fig. 12)

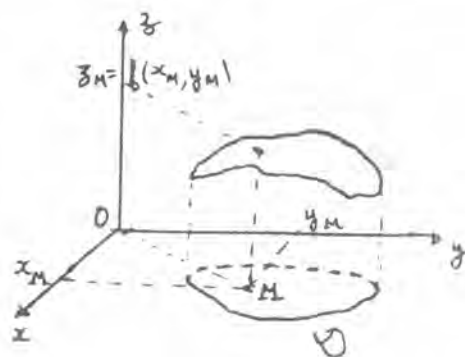


Fig. 12

Dans le cas particulier où $f(x, y) = 1$ en tout point de D , le résultat de l'intégrale est égal à la surface du domaine d'intégration D .

* Enfin le résultat de l'intégrale $\iiint_V ds dx dy dz$ est égal au volume du domaine d'intégration V .

VIII. Gradient d'une fonction scalaire f

C'est un champ de vecteurs, tel que la $\frac{1}{2}$ variation de la fonction f entre les points M et M' distants de $\vec{dl}$ soit égale à :

$$df = \overrightarrow{\text{grad } f} \cdot \vec{dl}$$

* En coordonnées cartésiennes les composantes du vecteur $\overrightarrow{\text{grad } f}$ sont, selon

le repère $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ de la fig. 3, égales à

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial z}$$

* En coordonnées cylindriques les composantes du vecteur $\overrightarrow{\text{grad } f}$ sont, selon le repère $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$ de la fig. 4, égales à :

$$\frac{\partial f}{\partial \rho}, \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial z}$$

* En coordonnées sphériques, les composantes du vecteur $\overrightarrow{\text{grad } f}$ sont, selon le repère $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ de la fig. 5, égales à :

$$\frac{\partial f}{\partial r}, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \quad \text{et} \quad \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi}$$

Remarque : Il est commode d'utiliser l'opérateur nabla, $\vec{\nabla}$, tel que

$$\overrightarrow{\text{grad } f} = \vec{\nabla} f$$

Cet opérateur peut agir sur un scalaire ou sur un vecteur (cf § IX et X).

• En coordonnées cartésiennes il s'écrit :

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

[Il faut utiliser avec précaution le langage "les composantes de l'opérateur nabla sont égales à $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$ et $\partial/\partial z$ "]

• En coordonnées cylindriques, il s'écrit

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

• En coordonnées sphériques, il s'écrit

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

Pour connaître l'effet de l'opérateur $\vec{\nabla}$ sur un vecteur $\vec{A}$, dont on connaît les composantes dans un repère $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ on doit tenir compte de l'action de $\vec{\nabla}$ non seulement sur les composantes du vecteur $\vec{A}$ mais aussi sur les vecteurs de base eux-mêmes.

IX. Divergence d'un champ de vecteurs $\vec{A}$. Calcul en coordonnées cartésiennes

C'est une fonction scalaire définie par : $\text{div } \vec{A} = \nabla \cdot \vec{A}$

Si A_x, A_y, A_z sont les composantes de $\vec{A}$ selon le repère orthonormé $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ de la fig. 4, on aura :

$$\text{div } \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Rq. : On a implicitement écrit que :

$$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x = \vec{e}_y \cdot \vec{e}_y = \vec{e}_z \cdot \vec{e}_z = 1 \quad (\text{vecteurs unitaires})$$

$$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = \vec{e}_y \cdot \vec{e}_z = \vec{e}_z \cdot \vec{e}_x = 0 \quad (\text{vecteurs orthogonaux})$$

et que toutes les dérivées partielles des vecteurs de base par rapport aux variables x, y et z étaient nulles.

X. Rotationnel d'un champ de vecteurs $\vec{A}$. Calcul en coordonnées cartésiennes

Il s'agit d'un autre champ de vecteurs, $\vec{B}$, défini par

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} = \nabla \wedge \vec{A}$$

Si A_x, A_y et A_z sont les composantes de $\vec{A}$ selon le repère orthonormé $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ de la fig. 4, on aura :

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \quad B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \quad \text{et} \quad B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}$$

XI. Circulation d'un champ de vecteurs

On définit la circulation du champ de vecteurs $\vec{A}$ entre deux points M_1 et M_2 le long d'une courbe (C) par l'intégrale curviligne

$$\int_{M_1}^{M_2} \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

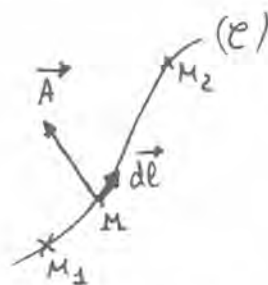


Fig. 13

où $d\vec{l}$ représente un déplacement élémentaire pris le long de (C) au point M (fig. 13)

lorsque le champ de vecteurs $\vec{A}$ derive d'un potentiel V , c'est à dire si

$$\vec{A} = - \text{grad } V$$

(le signe $-$ est une convention utilisée par les physiciens), la circulation de $\vec{A}$ entre les points M_1 et M_2 ne dépend pas du chemin suivi puisque

$$\int_{M_1}^{M_2} \vec{A} \cdot d\vec{l} = V(M_1) - V(M_2)$$

XII. Flux d'un champ de vecteurs

On définit le flux d'un champ de vecteurs $\vec{A}$ à travers une surface (S) par l'intégrale de surface

$$\iint_{(S)} \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

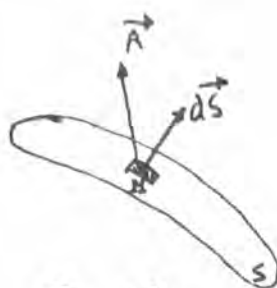


Fig. 14

où $d\vec{S}$ est un vecteur normal à la surface (S) au point considéré (fig. 14) et de module égal à la surface élémentaire dS découpée autour de ce point.

XIII. Théorème de Stokes (cf démonstration page 29 M)

La circulation d'un champ de vecteurs $\vec{A}$, le long d'une courbe fermée (C) est égale au flux du rotationnel de $\vec{A}$, à travers toute surface ouverte (S) , s'appuyant sur le contour (C) . (fig. 15)

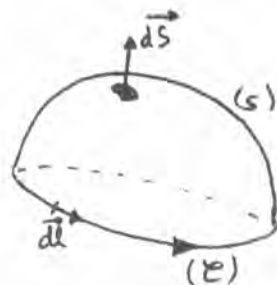


Fig. 15

$$\oint_{(C)} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_{(S)} \text{rot } \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

Remarque: L'orientation du vecteur $d\vec{S}$ dépend de l'orientation du contour (C)

XIV. Théorème d'Ostrogradski (ou de la divergence) (cf démonstration page 20 M)

Le flux sortant d'un champ de vecteurs $\vec{A}$ à travers une surface fermée (S) est égal à l'intégrale de la divergence de $\vec{A}$ étendue au volume V intérieur à cette surface :

$$\oiint_{(S)} \vec{A} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \text{div } \vec{A} \, d\tau$$

XV Calcul de la divergence d'un champ de vecteurs en coordonnées cylindriques

XV.1. Utilisation de l'opérateur nabla

Comme on l'a vu au § VIII (page 6), l'opérateur $\vec{\nabla}$ peut s'écrire

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

Il agit scalairement sur le vecteur $\vec{A}$ qui dans le repère $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$ de la fig. 4 s'exprime :

$$\vec{A} = A_\rho \vec{e}_\rho + A_\varphi \vec{e}_\varphi + A_z \vec{e}_z$$

$$\text{div } \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \vec{e}_\rho \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} [A_\rho \vec{e}_\rho + A_\varphi \vec{e}_\varphi + A_z \vec{e}_z] + \dots$$

$$\dots \vec{e}_\varphi \cdot \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} [A_\rho \vec{e}_\rho + A_\varphi \vec{e}_\varphi + A_z \vec{e}_z] + \dots$$

$$\dots \vec{e}_z \cdot \frac{\partial}{\partial z} [A_\rho \vec{e}_\rho + A_\varphi \vec{e}_\varphi + A_z \vec{e}_z]$$

Il faut connaître l'effet des opérateurs $\partial/\partial \rho$, $\partial/\partial \varphi$ et $\partial/\partial z$ sur les vecteurs de base $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi$ et $\vec{e}_z$. Dans un repère fixe (lié aux axes Ox, Oy et Oz), c'est à dire dans le repère $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ les vecteurs de base ont pour composantes

$$\vec{e}_\rho \begin{cases} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{cases}, \quad \vec{e}_\varphi \begin{cases} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{cases}, \quad \vec{e}_z \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 1 \end{cases}$$

le vecteur $\frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial \rho}$ aura pour composantes $(0, 0, 0)$. Par contre le vecteur $\frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial \varphi}$ a pour composantes $(-\sin \varphi, \cos \varphi, 0)$, c'est à dire celles de $\vec{e}_\varphi$. On obtient les

relations :

$$\left\{ \begin{array}{lll} \frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial \rho} = \vec{0} & \frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial \varphi} = \vec{e}_\varphi & \frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial z} = \vec{0} \\ \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \rho} = \vec{0} & \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \varphi} = -\vec{e}_\rho & \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial z} = \vec{0} \\ \frac{\partial \vec{e}_z}{\partial \rho} = \vec{0} & \frac{\partial \vec{e}_z}{\partial \varphi} = \vec{0} & \frac{\partial \vec{e}_z}{\partial z} = \vec{0} \end{array} \right.$$

$$\text{Donc } \text{div } \vec{A} = \vec{e}_\rho \cdot \left[\frac{\partial A_\rho}{\partial \rho} \vec{e}_\rho + \frac{\partial A_\varphi}{\partial \rho} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \vec{e}_z \right] + \dots$$

$$\dots \vec{e}_\varphi \cdot \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} \vec{e}_\rho + A_\rho \vec{e}_\varphi + \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi - A_\varphi \vec{e}_\rho + \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} \vec{e}_z \right] + \dots$$

$$\dots \vec{e}_z \cdot \left[\frac{\partial A_\rho}{\partial z} \vec{e}_\rho + \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial A_z}{\partial z} \vec{e}_z \right]$$

Le trièdre $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$ étant orthonormé, on a les relations :

$$\vec{e}_\rho \cdot \vec{e}_\rho = \vec{e}_\varphi \cdot \vec{e}_\varphi = \vec{e}_z \cdot \vec{e}_z = 1$$

$$\vec{e}_\rho \cdot \vec{e}_\varphi = \vec{e}_\varphi \cdot \vec{e}_z = \vec{e}_z \cdot \vec{e}_\rho = 0$$

Donc $\text{div } \vec{A} = \frac{\partial A_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} [A_\rho + \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}] + \frac{\partial A_z}{\partial z}$

On peut remarquer que $\frac{\partial A_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} A_\rho = \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho A_\rho)}{\partial \rho}$

Donc :
$$\text{div } \vec{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

XV.2 Utilisation du théorème d'Ostrogradski

On applique le théorème à un cube
infinitésimal $MNIQ M'N'I'Q'$, de côtés
respectivement égaux à $d\rho$, $\rho d\varphi$ et dz
selon les vecteurs $\vec{e}_\rho$, $\vec{e}_\varphi$ et $\vec{e}_z$ (fig 16)

Pour ce cube de volume

$$d\tau = \rho d\rho d\varphi dz$$

on a : $d\phi = \text{flux élémentaire sortant du cube}$

$$d\phi = \text{div } \vec{A} d\tau$$

On évalue successivement le flux de $\vec{A}$ à travers les six faces du cube.

• à travers $MM'QQ'$, surface normale au vecteur $\vec{e}_\rho$, le flux sortant est

$$d\phi_1 = - [A_\rho]_{\rho, \varphi, z} \rho d\varphi dz$$

Le signe - vient du fait que pour cette face le vecteur $d\vec{S}$ de module $\rho d\varphi dz$ est dirigé suivant $-\vec{e}_\rho$.

• à travers $NN'I'I'$ le flux sortant est égal à :

$$d\phi_2 = + [A_\rho]_{\rho+d\rho, \varphi, z} (\rho+d\rho) d\varphi dz$$

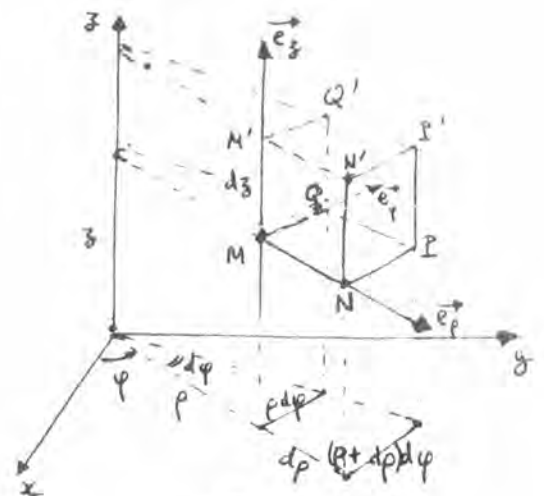


Fig. 16

En effet tous les points de la face $NN'IP'$ ont un module égal à $(\rho + d\rho)$, et la longueur de NI est égale à $(\rho + d\rho)d\varphi$.

Comme (au premier ordre) $f(x_0 + dx) = f(x_0) + \left(\frac{df}{dx}\right)_{x_0} dx$, on a

$$(\rho + d\rho)[A_\rho]_{\rho+d\rho, \varphi, z} = \rho[A_\rho]_{\rho, \varphi, z} + \frac{\partial}{\partial \rho} [\rho A_\rho]_{\rho, \varphi, z} d\rho$$

Soit $d\phi_1 + d\phi_2 = \frac{\partial}{\partial \rho} [\rho A_\rho] d\rho d\varphi dz$

• A travers $MM'NN'$ le flux sortant est égal à :

$$d\phi_3 = -[A_\varphi]_{\rho, \varphi, z} d\rho dz$$

• à travers $II'QQ'$ le flux sortant est égal à :

$$d\phi_4 = [A_\varphi]_{\rho, \varphi+d\varphi, z} d\rho dz = \left\{ [A_\varphi]_{\rho, \varphi, z} + \frac{\partial}{\partial \varphi} [A_\varphi]_{\rho, \varphi, z} d\varphi \right\} d\rho dz$$

Soit $d\phi_3 + d\phi_4 = \frac{\partial}{\partial \varphi} [A_\varphi]_{\rho, \varphi, z} d\rho d\varphi dz$

• à travers $MNIQ$ le flux sortant est égal à :

$$d\phi_5 = -[A_z]_{\rho, \varphi, z} \rho d\rho d\varphi$$

• à travers $M'N'I'Q'$ le flux sortant est égal à :

$$d\phi_6 = +[A_z]_{\rho, \varphi, z+dz} \rho d\rho d\varphi = \left\{ [A_z]_{\rho, \varphi, z} + \frac{\partial}{\partial z} [A_z]_{\rho, \varphi, z} dz \right\} \rho d\rho d\varphi$$

Soit $d\phi_5 + d\phi_6 = \frac{\partial}{\partial z} [A_z]_{\rho, \varphi, z} \rho d\rho d\varphi dz$

Le flux total sortant $d\phi$ est donc égal à :

$$d\phi = \left\{ \frac{\partial}{\partial \rho} [\rho A_\rho] + \frac{\partial}{\partial \varphi} [A_\varphi] + \rho \frac{\partial}{\partial z} [A_z] \right\} d\rho d\varphi dz$$

En comparant à $d\phi = \text{div } \vec{A} d\tau = \text{div } \vec{A} \rho d\rho d\varphi dz$

on en déduit :

$$\text{div } \vec{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} [\rho A_\rho] + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} [A_\varphi] + \frac{\partial}{\partial z} [A_z]$$

XVI. Calcul de la divergence d'un champ de vecteurs en coordonnées sphériques

XVI.1 Utilisation de l'opérateur nabla

Comme on l'a vu au § VIII (page 6), l'opérateur $\vec{\nabla}$ peut s'écrire

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

Il agit scalairement sur le vecteur $\vec{A}$ qui dans le repère $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ de la fig. 5 s'exprime : $\vec{A} = A_r \vec{e}_r + A_\theta \vec{e}_\theta + A_\varphi \vec{e}_\varphi$

Cherchons l'effet des opérateurs $\partial/\partial r$, $\partial/\partial \theta$ et $\partial/\partial \varphi$ sur les vecteurs de base $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$ et $\vec{e}_\varphi$, qui dans le repère fixe $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ ont pour composantes :

$$\vec{e}_r \begin{cases} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{cases}, \quad \vec{e}_\theta \begin{cases} \cos \theta \cos \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi \\ -\sin \theta \end{cases}, \quad \vec{e}_\varphi \begin{cases} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{cases}$$

En dérivant ces composantes par rapport aux variables r, θ et φ on obtient les relations :

$$\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial r} = \vec{0} \quad \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta} = \vec{e}_\theta \quad \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \varphi} = \sin \theta \vec{e}_\varphi$$

$$\frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial r} = \vec{0} \quad \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta} = -\vec{e}_r \quad \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \varphi} = \cos \theta \vec{e}_\varphi$$

$$\frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial r} = \vec{0} \quad \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \theta} = \vec{0} \quad \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \varphi} = -\sin \theta \vec{e}_r - \cos \theta \vec{e}_\theta$$

$$\text{Donc : } \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \vec{e}_r \cdot \left[\frac{\partial A_r}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{\partial A_\theta}{\partial r} \vec{e}_\theta + \frac{\partial A_\varphi}{\partial r} \vec{e}_\varphi \right] + \dots$$

$$\dots \vec{e}_\theta \cdot \frac{1}{r} \left[\frac{\partial A_r}{\partial \theta} \vec{e}_r + A_r \vec{e}_\theta + \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} \vec{e}_\theta - A_\theta \vec{e}_r + \frac{\partial A_\varphi}{\partial \theta} \vec{e}_\varphi \right] + \dots$$

$$\dots \vec{e}_\varphi \cdot \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \vec{e}_r + A_r \sin \theta \vec{e}_\varphi + \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \vec{e}_\theta + A_\theta \cos \theta \vec{e}_\varphi + \dots \right. \\ \left. - \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi - A_\varphi \sin \theta \vec{e}_r - A_\varphi \cos \theta \vec{e}_\theta \right].$$

Le trièdre $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ étant orthonormé :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \left[A_r + \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} \right] + \frac{1}{r \sin \theta} \left[A_r \sin \theta + A_\theta \cos \theta + \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \right]$$

Comme $\frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{1}{r} A_r + \frac{1}{r \sin \theta} A_r \sin \theta = \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} A_r = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 A_r)}{\partial r}$

et que $\frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} A_\theta \cos \theta = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (\sin \theta A_\theta)}{\partial \theta}$

Donc :

$$\text{div } \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (A_\varphi)}{\partial \varphi}$$

XVI.2 Utilisation du théorème d'Ostogradski

On applique la relation d'Ostogradski au cube $MNPQM'N'I'Q'$, infiniment petit, de côtés respectivement égaux à dr , $r d\theta$ et $r \sin \theta d\varphi$ selon les vecteurs de base $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$ et $\vec{e}_\varphi$ (fig. 17).

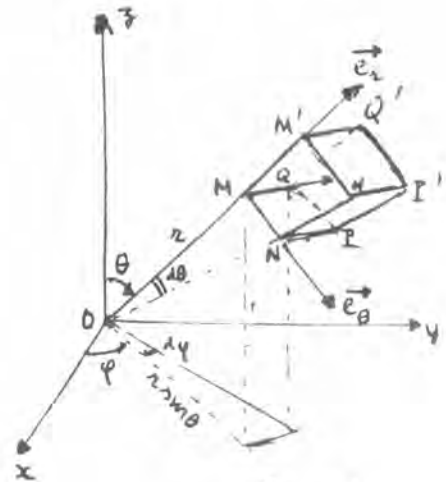


Fig 17

Pour ce cube, le flux élémentaire sortant est égal à :

$$d\phi = \text{div } \vec{A} \, d\tau$$

$$d\phi = \text{div } \vec{A} \, r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\varphi$$

On évalue les flux élémentaires sortant à travers chacune des faces

• à travers $MNPQ$ le flux sortant est égal à :

$$d\phi_1 = - [A_r]_{r, \theta, \varphi} \, r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi$$

• à travers $M'N'I'Q'$ le flux sortant est égal à :

$$d\phi_2 = + [A_r]_{r+dr, \theta, \varphi} \, (r+dr)^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi$$

$$\text{Or } (r+dr)^2 [A_r]_{r+dr, \theta, \varphi} = r^2 [A_r]_{r, \theta, \varphi} + \frac{\partial}{\partial r} [r^2 A_r]_{r, \theta, \varphi} \, dr$$

$$\text{Donc } d\phi_1 + d\phi_2 = \frac{\partial}{\partial r} [r^2 A_r]_{r, \theta, \varphi} \, dr \, \sin \theta \, d\theta \, d\varphi$$

• à travers $MM'QQ'$ le flux sortant est égal à :

$$d\phi_3 = - [A_\theta]_{r, \theta, \varphi} \, r \sin \theta \, dr \, d\varphi$$

• à travers $NN'II'$ le flux sortant est égal à :

$$d\phi_4 = + [A_\theta]_{r, \theta+d\theta, \varphi} \, r \sin(\theta+d\theta) \, dr \, d\varphi$$

$$Or \sin(\theta+d\theta) [A_\theta]_{r,\theta,\varphi} = \sin\theta [A_\theta]_{r,\theta,\varphi} + \frac{\partial [\sin\theta A_\theta]}{\partial \theta} d\theta \quad r dr d\varphi$$

$$Soit \quad d\phi_3 + d\phi_4 = \frac{\partial [\sin\theta A_\theta]}{\partial \theta} d\theta \quad r dr d\varphi$$

• à travers MM'NN' le flux sortant est égal à :

$$d\phi_5 = - [A_\varphi]_{r,\theta,\varphi} \quad r dr d\theta$$

• à travers PP'QQ' le flux sortant est égal à :

$$d\phi_6 = + [A_\varphi]_{r,\theta,\varphi+d\varphi} \quad r dr d\theta = \left\{ [A_\varphi]_{r,\theta,\varphi} + \frac{\partial [A_\varphi]}{\partial \varphi} d\varphi \right\} r dr d\theta$$

$$Soit \quad d\phi_5 + d\phi_6 = \frac{\partial [A_\varphi]}{\partial \varphi} d\varphi \quad r dr d\theta$$

le flux total sortant $d\phi$ est donc égal à :

$$d\phi = \frac{\partial [r^2 A_r]}{\partial r} \sin\theta \quad r dr d\theta d\varphi + \frac{\partial [\sin\theta A_\theta]}{\partial \theta} r dr d\theta d\varphi + \frac{\partial [A_\varphi]}{\partial \varphi} r dr d\theta d\varphi$$

$$\text{En comparant à } d\phi = \text{div } \vec{A} \quad d\tau = \text{div } \vec{A} \quad r^2 \sin\theta \quad dr d\theta d\varphi$$

on retrouve :

$$\text{div } \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial [r^2 A_r]}{\partial r} + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial [\sin\theta A_\theta]}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial [A_\varphi]}{\partial \varphi}$$

XVII Calcul du rotationnel d'un champ de vecteurs en coordonnées cylindriques

XVII.1. Utilisation de l'opérateur nabla

$$\text{On a } \overrightarrow{\text{rot } A} = \nabla \wedge \vec{A} = (\vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}) \wedge (A_r \vec{e}_r + A_\varphi \vec{e}_\varphi + A_z \vec{e}_z)$$

$$\overrightarrow{\text{rot } A} = \vec{e}_r \wedge \left[\frac{\partial}{\partial r} (A_r \vec{e}_r + A_\varphi \vec{e}_\varphi + A_z \vec{e}_z) \right] + \dots$$

$$\dots \vec{e}_\varphi \wedge \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (A_r \vec{e}_r + A_\varphi \vec{e}_\varphi + A_z \vec{e}_z) \right] + \vec{e}_z \wedge \left[\frac{\partial}{\partial z} (A_r \vec{e}_r + A_\varphi \vec{e}_\varphi + A_z \vec{e}_z) \right]$$

En utilisant les relations donnant l'effet des opérateurs $\partial/\partial r$, $\partial/\partial \varphi$ et $\partial/\partial z$ sur les vecteurs de base (§ XV.1 page 9), on obtient :

$$\overrightarrow{\text{rot } A} = \vec{e}_r \wedge \left[\frac{\partial A_r}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{\partial A_\varphi}{\partial r} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial A_z}{\partial r} \vec{e}_z \right] + \dots$$

$$\dots \vec{e}_\varphi \wedge \left[\frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \vec{e}_r + \frac{1}{r} A_r \vec{e}_\varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi - \frac{1}{r} A_\varphi \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} \vec{e}_z \right] + \dots$$

$$\dots \vec{e}_z \wedge \left[\frac{\partial A_\rho}{\partial z} \vec{e}_\rho + \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial A_z}{\partial z} \vec{e}_z \right]$$

le trièdre $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$ étant un trièdre direct orthonormé, on a les relations :

$$\vec{e}_\rho \wedge \vec{e}_\rho = \vec{e}_\varphi \wedge \vec{e}_\varphi = \vec{e}_z \wedge \vec{e}_z = \vec{0}$$

$$\vec{e}_\rho \wedge \vec{e}_\varphi = \vec{e}_z, \quad \vec{e}_\varphi \wedge \vec{e}_z = \vec{e}_\rho \quad \text{et} \quad \vec{e}_z \wedge \vec{e}_\rho = \vec{e}_\varphi$$

$$\text{Donc : } \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \frac{\partial A_\varphi}{\partial \rho} (\vec{e}_z) + \frac{\partial A_z}{\partial \rho} (-\vec{e}_\varphi) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} (-\vec{e}_z) - \frac{1}{\rho} A_\varphi (-\vec{e}_z) + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} (\vec{e}_\rho) + \frac{\partial A_\rho}{\partial z} (\vec{e}_\varphi) + \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} (-\vec{e}_\rho)$$

$$\overrightarrow{\text{rot } A} = \vec{e}_\rho \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right] + \vec{e}_\varphi \left[-\frac{\partial A_z}{\partial \rho} + \frac{\partial A_\rho}{\partial z} \right] + \dots$$

$$\dots - \vec{e}_z \left[\frac{\partial A_\varphi}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho} A_\varphi \right]$$

$$\text{En remarquant que } \frac{\partial A_\varphi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} A_\varphi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\varphi)$$

on obtient les composantes du champ de vecteurs $\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot } A}$ dans le repère $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$.

$$\underline{B_\rho = \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}}, \quad \underline{B_\varphi = \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}}, \quad \underline{B_z = \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho A_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi}}$$

XVII.2 Utilisation du théorème de Stokes

On applique le théorème au circuit fermé $MQQ'M'M$ de côtés respectivement égaux à $\rho d\varphi$ et dz selon $\vec{e}_\varphi$ et $\vec{e}_z$ (fig. 18). On prend pour surface dS , le plan $MQQ'M'$. Le vecteur $\vec{dS}$ est alors dirigé suivant $\vec{e}_\rho$ et le produit scalaire $\overrightarrow{\text{rot } A} \cdot \vec{dS}$ se simplifie en :

$$(\overrightarrow{\text{rot } A})_\rho dS = (\overrightarrow{\text{rot } A})_\rho \rho d\varphi dz$$

où $(\overrightarrow{\text{rot } A})_\rho = B_\rho$ est la composante suivant $\vec{e}_\rho$ du champ de vecteurs $\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot } A}$.

On évalue successivement la circulation de $\vec{A}$ le long des quatre côtés :

• le long de MQ $\vec{A} \cdot \vec{dl} = + [A_\varphi]_{\rho, \varphi, z} \rho d\varphi$

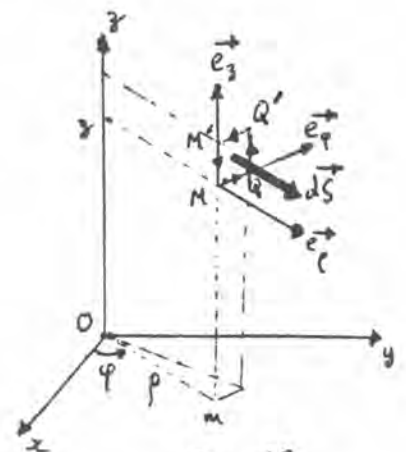


Fig. 18

- le long de QQ' $\vec{A} \cdot d\vec{l} = + [A_z]_{\rho, \varphi + d\varphi, z} dz$
- le long de $Q'M'$ $\vec{A} \cdot d\vec{l} = - [A_\varphi]_{\rho, \varphi, z + dz} \rho d\varphi$
- le long de $M'M$ $\vec{A} \cdot d\vec{l} = - [A_z]_{\rho, \varphi, z} dz$

La circulation totale sera donc

$$d\mathcal{C} = \vec{A} \cdot d\vec{l} = \{ [A_\varphi]_{\rho, \varphi, z} - [A_\varphi]_{\rho, \varphi, z + dz} \} \rho d\varphi + \{ [A_z]_{\rho, \varphi + d\varphi, z} - [A_z]_{\rho, \varphi, z} \} dz$$

$$d\mathcal{C} = \left\{ -\frac{\partial}{\partial z} [A_\varphi] dz \right\} \rho d\varphi + \left\{ \frac{\partial}{\partial \varphi} [A_z] d\varphi \right\} dz$$

Cette circulation élémentaire étant égale à $(\text{rot } \vec{A})_\rho \rho d\varphi dz$, on en déduit

$$\underline{B_\rho = (\text{rot } \vec{A})_\rho = \frac{1}{\rho} \frac{\partial [A_z]}{\partial \varphi} - \frac{\partial [A_\varphi]}{\partial z}}$$

On obtiendrait par un raisonnement analogue les composantes B_φ et B_z en appliquant la relation de Stokes respectivement au circuit $MM'N'NM$ (fig. 19) et au circuit $MNPQM$ (fig. 20).

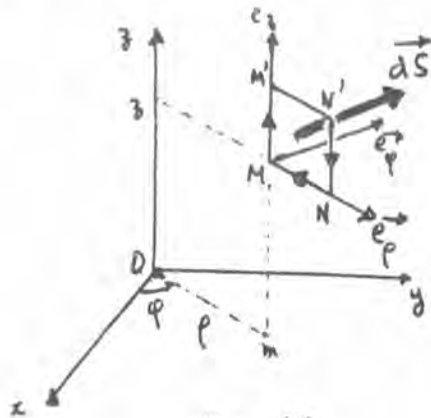


Fig. 19

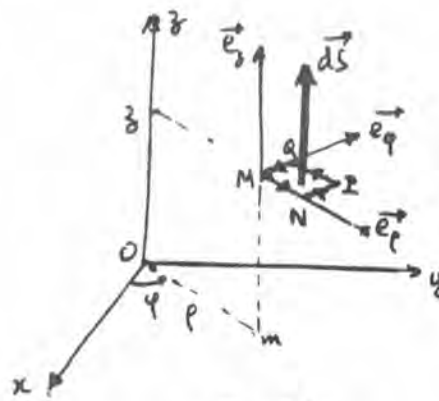


Fig. 20

XVIII. Calcul du rotationnel d'un champ de vecteurs en coordonnées sphériques

XVIII.1. Utilisation de l'opérateur nabla

$$\text{On a : } \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \left(\vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \wedge (A_r \vec{e}_r + A_\theta \vec{e}_\theta + A_\varphi \vec{e}_\varphi)$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = & \vec{e}_r \wedge \left[\frac{\partial}{\partial r} (A_\theta \vec{e}_\theta + A_\varphi \vec{e}_\varphi) \right] + \vec{e}_\theta \wedge \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_r \vec{e}_r + A_\varphi \vec{e}_\varphi) \right] + \dots \\ & \dots \vec{e}_\varphi \wedge \left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} (A_r \vec{e}_r + A_\theta \vec{e}_\theta) \right] \end{aligned}$$

En utilisant les relations donnant l'effet des opérateurs $\partial/\partial r$, $\partial/\partial \theta$ et $\partial/\partial \varphi$ sur les vecteurs de base (§ XVI.1 page 12^{AM}), on obtient :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \vec{e}_r \wedge \left[\frac{\partial A_r}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{\partial A_\theta}{\partial r} \vec{e}_\theta + \frac{\partial A_\varphi}{\partial r} \vec{e}_\varphi \right] + \dots$$

$$- \vec{e}_\theta \wedge \left[\frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \vec{e}_r + \frac{A_r}{r} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{A_\theta}{r} (-\vec{e}_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \theta} \vec{e}_\varphi \right] + \dots$$

$$\dots \vec{e}_\varphi \wedge \left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \vec{e}_r + \frac{A_r}{r \sin \theta} (\sin \theta \vec{e}_\varphi) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \vec{e}_\theta + \frac{A_\theta}{r \sin \theta} (\cos \theta \vec{e}_\varphi) + \dots \right. \\ \left. - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{A_\varphi}{r \sin \theta} (-\sin \theta \vec{e}_r - \cos \theta \vec{e}_\theta) \right]$$

Le trièdre $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ étant un trièdre direct orthonormé, on a les relations :

$$\vec{e}_r \wedge \vec{e}_r = \vec{e}_\theta \wedge \vec{e}_\theta = \vec{e}_\varphi \wedge \vec{e}_\varphi = \vec{0}$$

$$\vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta = \vec{e}_\varphi, \quad \vec{e}_\theta \wedge \vec{e}_\varphi = \vec{e}_r \quad \text{et} \quad \vec{e}_\varphi \wedge \vec{e}_r = \vec{e}_\theta$$

$$\text{Donc } \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \left[\frac{\partial A_\theta}{\partial r} (\vec{e}_\varphi) + \frac{\partial A_\varphi}{\partial r} (-\vec{e}_\theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} (-\vec{e}_\varphi) - \frac{A_\theta}{r} (-\vec{e}_\varphi) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \theta} (\vec{e}_r) + \dots \right.$$

$$\left. - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} (\vec{e}_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} (-\vec{e}_r) - \frac{A_\varphi}{r} (\vec{e}_\theta) - \frac{A_\varphi \cos \theta}{r \sin \theta} (-\vec{e}_r) \right]$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \vec{e}_r \left[\frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \theta} - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} + \frac{A_\varphi \cos \theta}{r \sin \theta} \right] + \vec{e}_\theta \left[-\frac{\partial A_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{A_\varphi}{r} \right] + \dots$$

$$- \vec{e}_\varphi \left[\frac{\partial A_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} + \frac{A_\theta}{r} \right]$$

En remarquant que :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \theta} + \frac{A_\varphi \cos \theta}{r \sin \theta} = \frac{1}{r \sin \theta} (\sin \theta \frac{\partial A_\varphi}{\partial \theta} + A_\varphi \cos \theta) = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\varphi \sin \theta)$$

que :

$$\frac{\partial A_\varphi}{\partial r} + \frac{A_\varphi}{r} = \frac{1}{r} (r \frac{\partial A_\varphi}{\partial r} + A_\varphi) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi)$$

et que :

$$\frac{\partial A_\theta}{\partial r} + \frac{A_\theta}{r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta)$$

on obtient les composantes du champ de vecteurs $\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$ dans le repère $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$:

$$\underline{B_r = \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (A_\varphi \sin \theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right]}, \quad \underline{B_\theta = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial (r A_\varphi)}{\partial r}}$$

$$\underline{\text{et } B_\varphi = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right]}$$

XVIII.2. Utilisation du théorème de Stokes

les composantes B_r , B_θ et B_φ du champ de vecteur $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ peuvent être obtenues en appliquant le théorème de Stokes respectivement aux circuits élémentaires $MNPQM$ (fig 21), $MQQ'M'M$ (fig 22) et $MM'N'NM$ (fig 23).

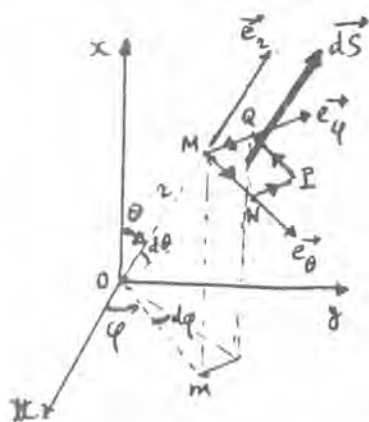


Fig. 21

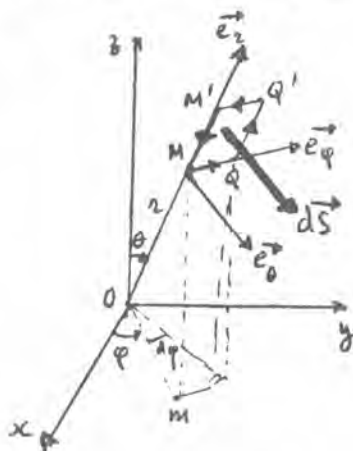


Fig. 22.

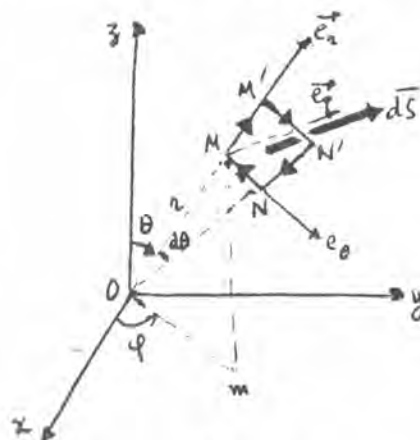


Fig. 23

XIX. laplacien d'une fonction scalaire V

Δ est une fonction scalaire, notée ΔV , telle que

$$\Delta V = \text{div}(\text{grad } V) = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} V$$

* En coordonnées cartésiennes, le laplacien s'exprime par

$$\Delta V = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)$$

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

* En coordonnées cylindriques, le laplacien s'exprime par :

$$\Delta V = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)$$

$$\Delta V = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

* En coordonnées sphériques, le laplacien s'exprime par :

$$\Delta V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \right)$$

$$\Delta V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}$$

XX. Laplacien d'un champ de vecteurs

C'est un champ de vecteurs, noté $\Delta \vec{A}$, tel que :

$$\Delta \vec{A} = \text{grad}(\text{div} \vec{A}) - \text{rot}(\text{rot} \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A})$$

En coordonnées cartésiennes, on peut montrer que le laplacien du champ de vecteurs $\vec{A}$ de composantes A_x, A_y et A_z , a pour composantes

$$B_x = \Delta A_x, \quad B_y = \Delta A_y, \quad \text{et} \quad B_z = \Delta A_z.$$

c'est à dire les laplaciens des composantes du champ de vecteurs $\vec{A}$.

Ceci n'est pas vrai dans les autres systèmes de coordonnées. On peut utiliser les résultats précédemment trouvés pour le gradient, la divergence et le rotationnel; les expressions trouvées sont compliquées.

XIII (suite) Démonstration du théorème de Stokes

On considère le circuit élémentaire MNIQ de côtés dx et dy , situé dans un plan parallèle à xOy . On calcule la circulation du champ de vecteurs $\vec{A}$, le long des 4 côtés du carré :

- $\int_{MN} \vec{A} \cdot d\vec{l} = A_x(x, y, z) dx$,
- $\int_{NP} \vec{A} \cdot d\vec{l} = A_y(x+dx, y, z) dy$, car tous les points du segment NP ont l'abscisse $x+dx$,
- $\int_{PQ} \vec{A} \cdot d\vec{l} = -A_x(x, y+dy, z) dx$, le signe - tenant compte du sens de parcours
- $\int_{QM} \vec{A} \cdot d\vec{l} = -A_y(x, y, z) dy$

La circulation totale sera donc :

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = A_y(x+dx, y, z) dy - A_y(x, y, z) dy - A_x(x, y+dy, z) dx + A_x(x, y, z) dx$$

(comme au premier ordre) $f(x_0+dx) = f(x_0) + \left(\frac{df}{dx} \right)_{x_0} dx$,

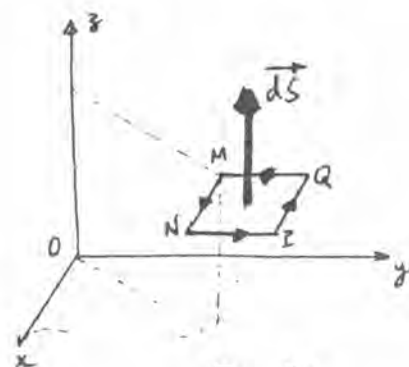


Fig. 24

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = \left[A_y(x,y,z) + \frac{\partial A_y(x,y,z)}{\partial x} dx \right] dy - A_y(x,y,z) dy - \left[A_x(x,y,z) + \frac{\partial A_x(x,y,z)}{\partial y} dy \right] dx + A_x(x,y,z) dx$$

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = \frac{\partial A_y(x,y,z)}{\partial x} dx dy - \frac{\partial A_x(x,y,z)}{\partial y} dy dx = \left[\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right] dx dy$$

Si on considère comme surface (S) s'appuyant sur le contour MNPQ, le plan MNPQ lui-même, le vecteur $d\vec{S}$ correspondant (tenant compte du sens de parcours du circuit MNPQ) aura pour composantes (cf fig. 24) : $0, 0, dx dy$

Le vecteur $\text{rot } \vec{A}$ a pour composantes selon la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$

$$\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}$$

Le produit scalaire $\text{rot } \vec{A} \cdot d\vec{S}$ aura donc pour valeur : $\left[\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right] dx dy$

On a donc bien, dans le cas étudié ici : $\oint_{(\mathcal{C})} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_{(S)} \text{rot } \vec{A} \cdot d\vec{S}$

On peut montrer que la relation reste vérifiée pour tout contour ($\mathcal{C}$) et pour toute surface (S). Il suffit de décomposer le circuit ($\mathcal{C}$) en un grand nombre de circuits élémentaires.

XIV (suite) Démonstration du théorème d'Ostrogradski

On considère la surface fermée constituée par les 6 faces d'un cube élémentaire de côtés dx, dy et dz (cf fig. 25).

On évalue le flux sortant de $\vec{A}$ sur les six faces du cube

• $\Phi_1 = \iint_{MNPQ} \vec{A} \cdot d\vec{S} = - A_z(x,y,z) dx dy$

Le vecteur $d\vec{S}$ ayant pour composantes $(0, 0, -dx dy)$ pour cette face

• $\Phi_2 = \iint_{M'N'I'Q'} \vec{A} \cdot d\vec{S} = + A_z(x,y,z+dz) dx dy$

le vecteur $d\vec{S}$ ayant pour composantes $(0, 0, +dx dy)$ pour cette face, et

tous les points de la face ayant la cote $z+dz$.

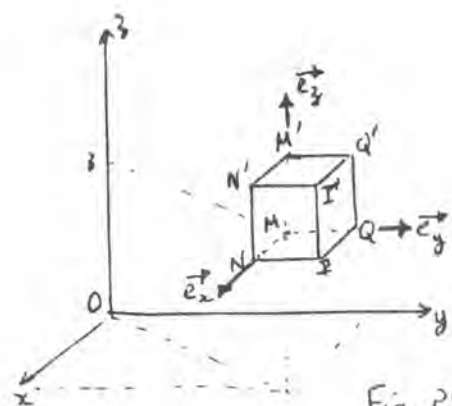


Fig. 25

On remarque que : $\phi_3 + \phi_2 = [A_z(x, y, z+dz) - A_z(x, y, z)] dx dy = \left[\frac{\partial A_z}{\partial z} dz \right] dx dy$

$$\bullet \phi_3 = \iint_{HNM'N'} \vec{A} \cdot d\vec{S} = -A_y(x, y, z) dx dz$$

$$\bullet \phi_4 = \iint_{PQT'Q'} \vec{A} \cdot d\vec{S} = +A_y(x, y+dy, z) dx dz$$

tous les points de la face $PQT'Q'$ ayant l'ordonnée $y+dy$

On remarque que : $\phi_3 + \phi_4 = [A_y(x, y+dy, z) - A_y(x, y, z)] dx dz = \left[\frac{\partial A_y}{\partial y} dy \right] dx dz$

$$\bullet \phi_5 = \iint_{MQM'Q'} \vec{A} \cdot d\vec{S} = -A_x(x, y, z) dy dz$$

$$\bullet \phi_6 = \iint_{NPN'P'} \vec{A} \cdot d\vec{S} = +A_x(x+dx, y, z) dy dz$$

tous les points de la face $NPN'P'$ ayant l'abscisse $x+dx$

On remarque que : $\phi_5 + \phi_6 = [A_x(x+dx, y, z) - A_x(x, y, z)] dy dz = \left[\frac{\partial A_x}{\partial x} dx \right] dy dz$

Le flux total sortant sera donc :

$$\phi = \oint \vec{A} \cdot d\vec{S} = \left[\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right] dx dy dz$$

L'expression de la divergence du vecteur $\vec{A}$ en coordonnées cartésiennes (cf. § IX) étant :

$$\text{div } \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

et le volume intérieur à la surface fermée considérée, étant le volume du cube de côté

dx, dy et dz , c'est à dire :

$$d\tau = dx dy dz$$

on a vérifié que dans le cas particulier étudié :

$$\oint_{(S)} \vec{A} \cdot d\vec{S} = \iiint_{(V)} \text{div } \vec{A} d\tau$$

On peut montrer que la relation reste vraie pour toute surface (S) ; il suffit de décomposer le volume (V) , intérieur à cette surface fermée, en une infinité de petits volumes élémentaires

XXI. Angle solide

Un angle solide est constitué par la portion d'espace située à l'intérieur d'une surface conique (cf. fig. 26). Sa valeur, exprimée en stéradians, s'obtient en traçant une surface sphérique centrée sur le sommet O du cône, de rayon arbitraire R , et vaut

$$\Omega = \frac{S}{R^2}$$

où S est la surface de la calotte sphérique interceptée par l'angle solide.

Remarque : L'aire totale de la sphère étant égale à $4\pi R^2$, l'angle solide total autour d'un point est égal à 4π stéradians.

Si l'angle solide est petit (fig. 27), l'aire de la surface S devient dS et peut être considérée comme un élément de surface plane perpendiculaire au rayon vecteur OP . On a alors

$$d\Omega = \frac{dS}{R^2}$$

Enfin, dans le cas d'un angle solide élémentaire $d\Omega$, il se peut que la surface dS "coupée" par le cône ne soit pas perpendiculaire à OP . (fig. 28) Dans ce cas, il faut projeter dS sur un plan perpendiculaire à OP , ce qui donne une surface égale à $dS' = dS \cos \theta$. Dans ces conditions

$$d\Omega = \frac{dS \cos \theta}{R^2}$$

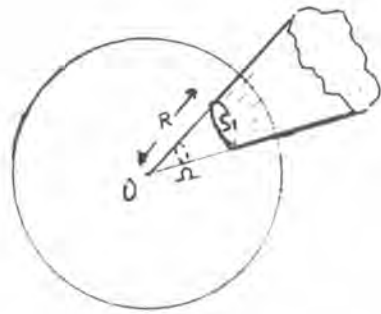


Fig. 26

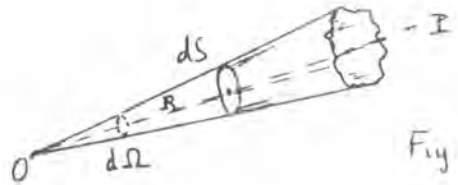


Fig. 27

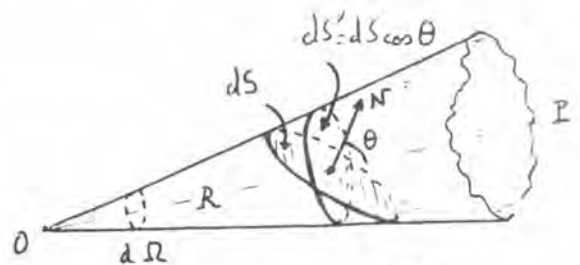
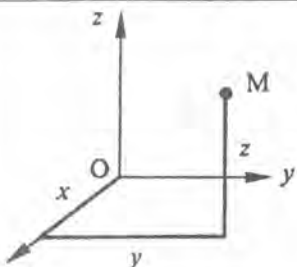
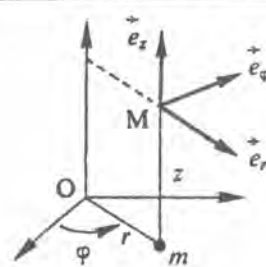
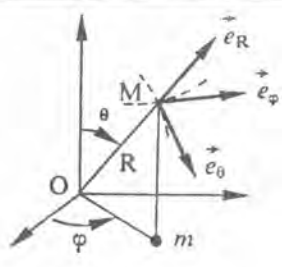


Fig. 28

	CARTÉSIENNES	CYLINDRIQUES	SPHÉRIQUES
DÉFINITION	 $V = V(x, y, z)$ $\vec{a} \left\{ \begin{array}{l} a_x \\ a_y \\ a_z \end{array} \right.$	 $V = V(r, \varphi, z)$ $\vec{a} \left\{ \begin{array}{l} a_r \\ a_\varphi \\ a_z \end{array} \right.$	 $V = V(R, \varphi, \theta)$ $\vec{a} \left\{ \begin{array}{l} a_R \\ a_\varphi \\ a_\theta \end{array} \right.$
GRADIENT	$\vec{\nabla} V \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{\partial V}{\partial z} \end{array} \right.$	$\vec{\nabla} V \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial V}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial V}{\partial z} \end{array} \right.$	$\vec{\nabla} V \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial V}{\partial R} \\ \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \\ \frac{1}{R} \frac{\partial V}{\partial \theta} \end{array} \right.$
DIVERGENCE	$\text{div } \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$	$\text{div } \vec{a} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r a_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$	$\text{div } \vec{a} = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} (R^2 a_R) + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (a_\theta \sin \theta) + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi}$

ROTATIONNEL	$\vec{\text{rot}} \vec{a} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \\ \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \\ \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \end{array} \right.$	$\vec{\text{rot}} \vec{a} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{r} \frac{\partial a_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial a_\varphi}{\partial z} \\ \frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \left[\frac{\partial (r a_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} \right] \end{array} \right.$	$\vec{\text{rot}} \vec{a} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{R \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (a_\varphi \sin \theta) - \frac{\partial a_\theta}{\partial \varphi} \right) \\ \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial a_R}{\partial \varphi} - \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R a_\varphi) \\ \frac{1}{R} \left[\frac{\partial}{\partial R} (R a_\theta) - \frac{\partial a_R}{\partial \theta} \right] \end{array} \right.$
LAPLACIEN	$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$	$\Delta V = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$	$\Delta V = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial V}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}$