

la maquette de la couverture a été réalisée par le L.E.P. Cyfflé - NANCY

© Édité et imprimé par l'**Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques** - (Université de Nancy I - Faculté des Sciences) -
B.P. 239 - 54506 VANDOEUVRE-les-NANCY CEDEX
Dépôt légal : 1er trimestre 1988
n° de la publication : 2-85406-107-1
Le Responsable de la collection : Philippe LOMBARD

Ref. N 560

Table des matières

I- Cinématique

0. Introduction, court historique.
1. Deux mouvements élémentaires : translation, rotation autour d'un axe.
2. Mouvements composés.
3. Champ des vitesses et des accélérations d'un solide en mouvement.
4. Retour sur la composition des mouvements.
5. Les angles d'EULER.
6. Mouvement de deux solides en contact : la notion de roulement sans glissement.
7. Le mouvement plan sur plan.

II- Cinétique

1. La notion de masse.
2. La notion de centre de gravité.
3. Moments d'inertie d'un solide.
4. L'ellipsoïde d'inertie d'un solide.
5. Quantité de mouvement, et moment cinétique.
6. Énergie cinétique.

III- Dynamique

1. La loi fondamentale de la Mécanique classique.
2. Les théorèmes fondamentaux de la Mécanique du solide.
3. Résolution d'un problème de Dynamique.

4. Mouvement d'un solide autour d'un point fixe.
5. Le théorème de la force vive.
6. La notion de liaison dans un système matériel.
7. Le mouvement de LAGRANGE, et l'effet gyroscopique.

Cinématique

0. Introduction, court historique.

Le propos de la Cinématique est l'étude du mouvement des systèmes, sans se préoccuper des facteurs qui sont à l'origine de ce mouvement.

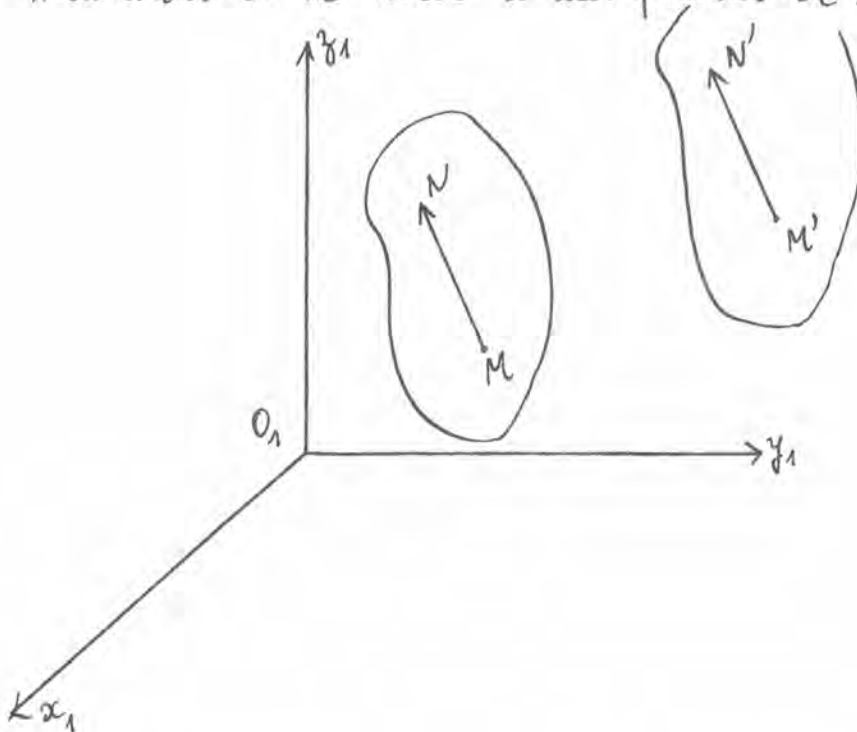
Un solide est un système matériel dont les molécules conservent leurs distances mutuelles au cours du mouvement. Les molécules sont repérées par rapport à un trièdre de référence $O_1 x_1 y_1 z_1$, par les coordonnées de la position géométrique qu'elles occupent à l'instant de l'étude. Lorsque le temps varie, cette position varie, et va décrire la trajectoire de la molécule dans le mouvement du solide par rapport à $O_1 x_1 y_1 z_1$.

Lorsque plusieurs solides sont en jeu, nous serons naturellement amenés à introduire des notations permettant de distinguer les différentes molécules occupant la même position géométrique à l'instant de l'étude.

Les notions fondamentales de vitesse et d'accélération remontent à G. GALILÉE (1564-1642), le premier traité de Cinématique du solide est dû à L. EULER (1765), et c'est A.M. AMPÈRE qui en fit une branche d'étude particulière (1775-1836). L. POINSON (1777-1859) a remarqué la possibilité de composer des rotations, et introduit la notion d'axe instantané de rotation. Enfin, c'est le développement industriel qui a consacré la Cinématique comme discipline technique fondamentale, avec la parution de la "Cinématique des Machines" de POINSON et PONCELET, et le "Principles of Mechanisms" de WILLIS, traitant du problème des engrenages.

1. Deux mouvements élémentaires : translation, rotation autour d'un axe.

1.1 Le solide (S) , auquel est attaché le repère $Oxyz$, est animé d'un mouvement de translation, par rapport au repère fixe $O_1x_1y_1z_1$ si, pour tout couple de points (M, N) de (S) , le vecteur $\overrightarrow{MN}$ se déplace en restant parallèle à lui-même (pensez au mouvement d'une bielle d'accouplement de machine):



Les trajectoires des points de (S) se déduisent donc les unes des autres par translation. En dérivant par rapport au temps l'égalité vectorielle:

$$\overrightarrow{O_1N} = \overrightarrow{O_1M} + \overrightarrow{MN}$$

nous obtenons donc, puisque $\overrightarrow{MN}$ reste constant:

$$\frac{d}{dt}(\overrightarrow{O_1N}) = \frac{d}{dt}(\overrightarrow{O_1M}), \text{ puis:}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(\overrightarrow{O_1N}) = \frac{d^2}{dt^2}(\overrightarrow{O_1M})$$

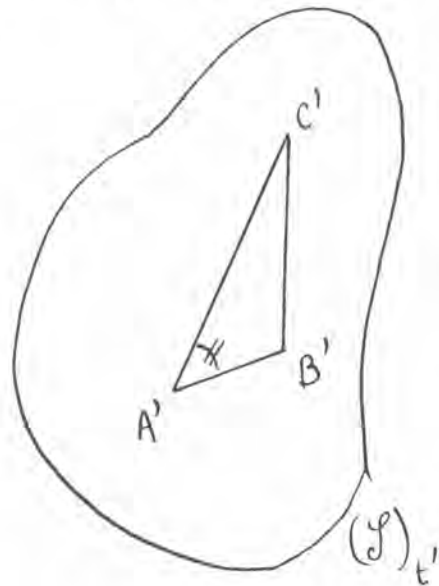
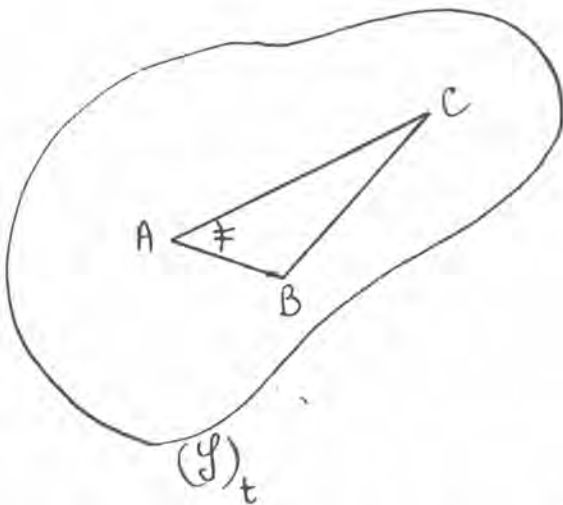
Ainsi les points de (S) ont-ils, à chaque instant, même vecteur

vitesse : $\vec{V}(M) \doteq \frac{d}{dt}(\vec{O_1 M})$, et même vecteur-accelération :

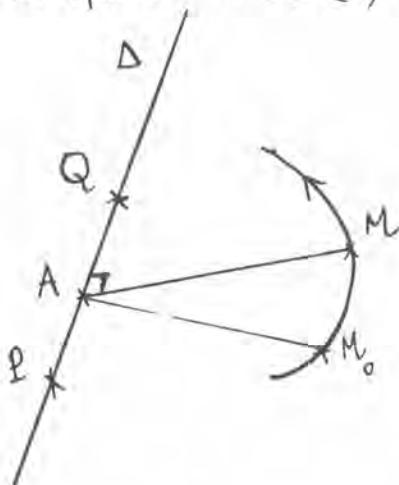
$$\vec{\Gamma}(M) \doteq \frac{d^2}{dt^2}(\vec{O_1 M})$$

par rapport au repère $O_1 x_1 y_1 z_1$: nous pouvons donc parler de la vitesse et de l'accélération du solide $(\mathcal{S})$.

1.2 Supposons maintenant qu'au cours du mouvement de $(\mathcal{S})$, deux points distincts P et Q de $(\mathcal{S})$ restent fixes. D'après la conservation des distances entre molécules de $(\mathcal{S})$, les points de $(\mathcal{S})$ se trouvant sur la droite $\Delta = (PQ)$ restent fixes, et, comme il y a aussi conservation des angles :

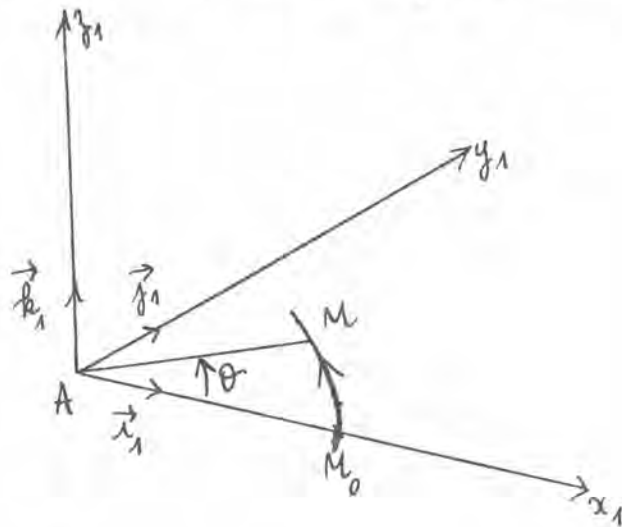


c'est que tout point M de $(\mathcal{S})$ se projette sur (Δ) en un point fixe A :



La trajectoire de M sera donc un cercle d'axe Δ .

Il est alors naturel de choisir comme repère fixe $O_1 x_1 y_1 z_1$, celui centré sur $O_1 = A$, de sorte que Ax_1 porte la position initiale M_0 de la molécule étudiée, l'axe Az_1 étant confondu avec Δ :



La position M est repérée par ses coordonnées polaires dans le plan $Ax_1 y_1$:

$$(1) \overrightarrow{AM} = r (\cos \theta \cdot \vec{i}_1 + \sin \theta \cdot \vec{j}_1)$$

ce qui conduit, par dérivation dans le temps, à l'expression suivante de la vitesse :

$$(2) \vec{V}(M) = r \cdot \dot{\theta} \cdot (-\sin \theta \cdot \vec{i}_1 + \cos \theta \cdot \vec{j}_1) \\ = \dot{\theta} \vec{k}_1 \wedge \overrightarrow{AM}$$

Maintenant, il est facile de se convaincre (Exercice !) que la quantité : $\omega = \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$ ne dépend pas du choix de M . Le vecteur :

$$(3) \vec{\Omega} = \omega \cdot \vec{k}_1 \quad \text{est le vecteur-rotation de } (S).$$

Passons donc au calcul de l'accélération de M , en dérivant par cela l'expression (2):

$$\vec{\Gamma}(M) = \ddot{\theta} \vec{k}_1 \wedge \vec{AM} + \dot{\theta} \vec{k}_1 \wedge \vec{V}(M)$$

soit, d'après la formule du double produit vectoriel*:

$$(4) \quad \vec{\Gamma}(M) = \ddot{\theta} \vec{k}_1 \wedge \vec{AM} - (\dot{\theta})^2 \vec{AM}$$

(puisque : $\vec{k}_1 \cdot \vec{AM} = 0$)

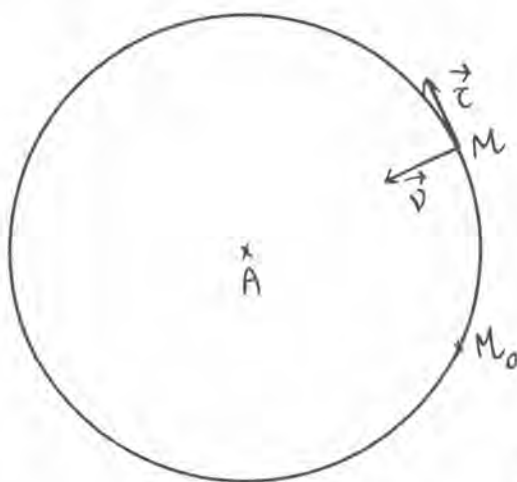
Comme le vecteur-vitesse $\vec{V}(M)$, le vecteur accélération $\vec{\Gamma}(M)$ est perpendiculaire à l'axe de rotation Δ . Il possède deux composantes:

• une composante tangentielle à la trajectoire, soit:

$$(5) \quad \vec{\Gamma}_t(M) = \ddot{\theta} \vec{k}_1 \wedge \vec{AM} = r \ddot{\theta} \vec{e}$$

• et une composante normale à la trajectoire, soit:

$$(6) \quad \vec{\Gamma}_n(M) = (\dot{\theta})^2 \vec{MA} = r (\dot{\theta})^2 \vec{v}$$



(*) voir Proposition 12 p. 191 du Module AG 1.

Si $s(t)$ désigne l'abscisse curviligne de $M(t)$ sur la trajectoire, repérée à partir de la position initiale M_0 , la vitesse algébrique est donc donnée par:

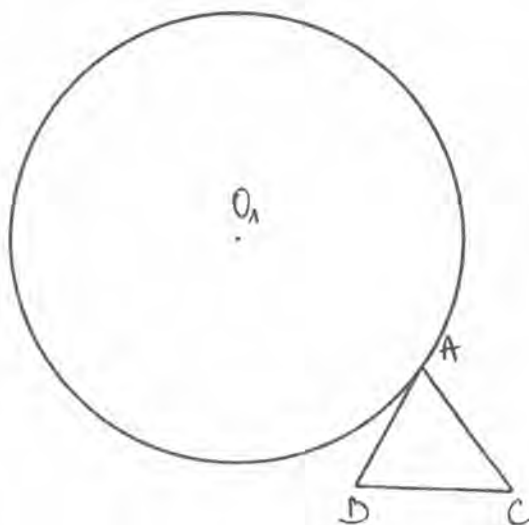
$$(7) v = r \dot{\theta} = \frac{ds}{dt}$$

tandis que les composantes de l'accélération selon les vecteurs unitaires tangente $\vec{e}$ et normale $\vec{v}$ sont données par:

$$(8) \gamma_r = r \ddot{\theta} = \frac{d^2 s}{dt^2} \quad \text{et:} \quad (9) \gamma_v = r(\dot{\theta})^2 = \frac{v^2}{r}$$

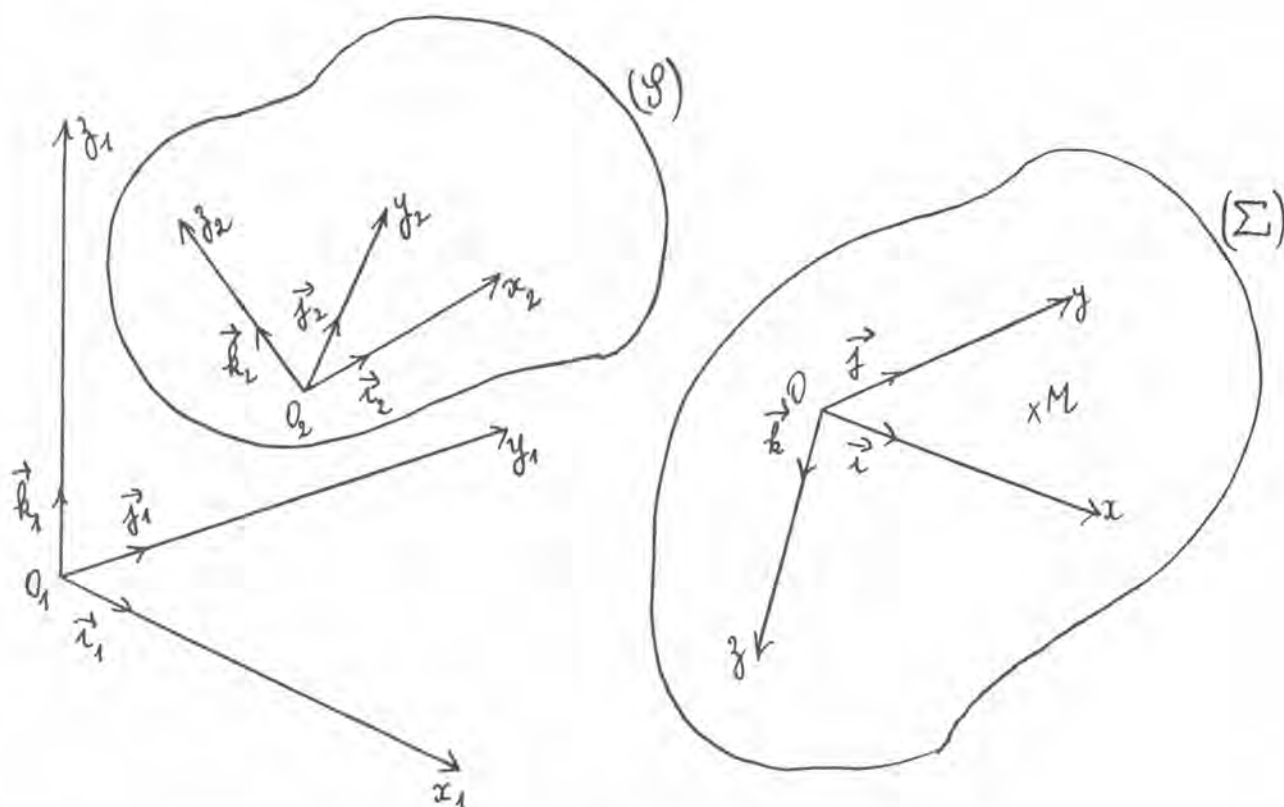
C'est ce qui est conforme aux formules classiques de la Cinématique du point (*).

Exercice: Une roue de rayon $R=2m$. tourne autour de son axe horizontal Δ , de sorte que la vitesse d'un point A de la jante soit constamment égale à $4m/s$. En A , est articulé un triangle indéformable de barres ABC , qui effectue un mouvement tel que la barre BC reste horizontale. On demande de déterminer: la trajectoire, la vitesse et l'accélération du sommet C du triangle:



3. Mouvements composés.

Il s'agit de résoudre le problème suivant :



: le solide (G), auquel est attaché le repère $O_2 x_2 y_2 z_2$ est en mouvement par rapport au repère fixe $O_1 x_1 y_1 z_1$, et le solide (Σ) est en mouvement par rapport à (G) : on lui a attaché le repère $O x y z$.

Connaissant chacun de ces mouvements, dérive le mouvement de (Σ) par rapport à $O_1 x_1 y_1 z_1$?

Ce type de problème abonde : pensez au mouvement de la pédale d'une bicyclette roulant le long d'une route ; observez la figure p.5 du Module PH2 : Abécédaire du point ...

Nous allons répondre à la question posée en donnant un début de description au champ des vitesses et des accélérations de (Σ) dans le repère fixe $O_1 x_1 y_1 z_1$.

2.1 Soit M une molécule de (Σ) . Nous pouvons repérer la position de M à l'instant t , dans le repère fixe $O_1 x_1 y_1 z_1$, via les coordonnées dans le repère mobile $O_2 x_2 y_2 z_2$, en écrivant:

$$\begin{aligned}\vec{O_1 M} &= \vec{O_1 O_2} + \vec{O_2 M} \\ &= \vec{O_1 O_2} + x_2 \vec{i}_2 + y_2 \vec{j}_2 + z_2 \vec{k}_2\end{aligned}$$

où x_2, y_2 et z_2 désignent donc les coordonnées de M dans le repère $O_2 x_2 y_2 z_2$, coordonnées qui dépendent du temps puisque (Σ) est en mouvement par rapport à $(\mathcal{G})$. Générions donc l'égalité vectorielle précédente dans le temps:

$$\begin{aligned}(10) \quad \frac{d}{dt}(\vec{O_1 M}) &= \left(\frac{d}{dt}(\vec{O_1 O_2}) + x_2 \frac{d\vec{i}_2}{dt} + y_2 \frac{d\vec{j}_2}{dt} + z_2 \frac{d\vec{k}_2}{dt} \right) \\ &\quad + \left(\dot{x}_2 \vec{i}_2 + \dot{y}_2 \vec{j}_2 + \dot{z}_2 \vec{k}_2 \right)\end{aligned}$$

Le terme de gauche de l'égalité obtenue représente la vitesse de M par rapport au repère fixe $O_1 x_1 y_1 z_1$; on le note: $\vec{V}(M)_{/1}$

À droite, nous avons scindé l'expression en deux parties:
• le premier terme:

$$(11) \quad \frac{d}{dt}(\vec{O_1 O_2}) + x_2 \frac{d\vec{i}_2}{dt} + y_2 \frac{d\vec{j}_2}{dt} + z_2 \frac{d\vec{k}_2}{dt}$$

s'obtient en dérivant $\vec{O_1 M}$, et en faisant comme si x_2, y_2 et z_2 étaient indépendants du temps: il s'agit donc de la vitesse, toujours par rapport au repère fixe $O_1 x_1 y_1 z_1$, de la molécule $M^{(2)}$ du solide $(\mathcal{G})$ qui occupe, à l'instant t du calcul, la même position que M (on parle de "point coïncident").

On appelle ce terme la vitesse d'entraînement de M , dans le mouvement de $(\mathcal{G})$ par rapport à $O_1 x_1 y_1 z_1$; on le notera: $\vec{V}(M)_{/1}$, ou $\vec{V}_e(M)$.

• le second terme:

(12) $\dot{x}_2 \vec{i}_2 + \dot{y}_2 \vec{j}_2 + \dot{z}_2 \vec{k}_2$
 s'obtient en dérivant $\vec{O_1 M}$, et en faisant comme si $(\mathcal{I})$ était fixe; on peut aussi le voir comme la dérivée de $\vec{O_2 M}$ obtenue en supposant le repère $O_2 x_2 y_2 z_2$ fixe: on parle de vitesse relative de M par rapport à $(\mathcal{I})$, ou au repère $O_2 x_2 y_2 z_2$ qui lui est attaché; on note:

$$\vec{V}(M)_{1/2} \quad \text{ou} \quad \vec{V}_{1/2}(M)$$

Avec ces notations, nous avons établi la formule fondamentale suivante, dite formule de composition des vitesses:

$$(13) \quad \boxed{\vec{V}(M)_{1/1} = \vec{V}(M)_{1/2} + \vec{V}(M)_{2/1}}$$

" vitesse absolue = vitesse relative + vitesse d'entraînement "

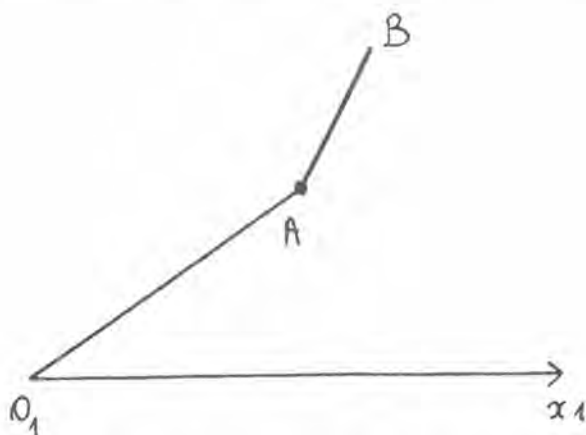
Ainsi, en composant les deux mouvements élémentaires vu au § précédent, on obtient-on de nouveaux:

Exercice 2.1. On suppose que $(\mathcal{I})$ est animé d'un mouvement de translation, de vitesse $v \vec{k}_1$, et que (Σ) est animé d'un mouvement de rotation autour de l'axe $O_2 z_2$, de vitesse-rotation $\omega \vec{k}_2$. On suppose que v et ω sont constants. On demande d'écrire le champ des vitesses de (Σ) , et de décrire la trajectoire des points de (Σ) .

(On obtient le mouvement hélicoïdal (voir le Module AN02, p.121))

Exercice 2.2: Une barre rectiligne $O_1 A$, de longueur a , tourne autour de son extrémité fixe O_1 dans le plan $O_1 x_1 y_1$. Une seconde barre

AB, de longueur $\underline{l}$, est articulée en A. On demande la vitesse du point B :



(On laisse au lecteur le soin de préciser les paramètres de position...)

2.2. Étudions maintenant le champ des accélérations du solide (Σ) : en dérivant l'égalité (10) dans le temps, nous obtenons l'expression suivante de l'accélération de la molécule M par rapport au repère fixe $O_1x_1y_1z_1$:

$$(14) \quad \vec{\Gamma}(M)_{11} = \frac{d^2}{dt^2}(\vec{O}_1\vec{M}) = \left(\frac{d^2}{dt^2}(\vec{O}_1\vec{O}_2) + x_2 \frac{d^2\vec{x}_2}{dt^2} + y_2 \frac{d^2\vec{y}_2}{dt^2} + z_2 \frac{d^2\vec{k}_2}{dt^2} \right) + \left(\ddot{x}_2 \vec{x}_2 + \ddot{y}_2 \vec{y}_2 + \ddot{z}_2 \vec{k}_2 \right) + \mathcal{L} \left(\dot{x}_2 \frac{d\vec{x}_2}{dt} + \dot{y}_2 \frac{d\vec{y}_2}{dt} + \dot{z}_2 \frac{d\vec{k}_2}{dt} \right)$$

Les deux premières parenthèses représentent des termes qui relèvent des mêmes interprétations que les termes (11) et (12), à savoir :

• $\frac{d^2}{dt^2}(\vec{O}_1\vec{O}_2) + x_2 \frac{d^2\vec{x}_2}{dt^2} + y_2 \frac{d^2\vec{y}_2}{dt^2} + z_2 \frac{d^2\vec{k}_2}{dt^2}$ est l'accélé-

-ration du point $M^{(2)}$ de $(\mathcal{J})$, coïncident avec M à l'instant du calcul : il s'agit de l'accélération d'entraînement, qu'on notera :

$$\vec{\Gamma}(M)_{2/1}, \text{ ou } \vec{\Gamma}_e(M)$$

• $\ddot{x}_2 \vec{x}_2 + \ddot{y}_2 \vec{y}_2 + \ddot{z}_2 \vec{k}_2$ est l'accélération de M par rapport

au solide (S) : on l'appelle accélération relative, et on la note :

$$\vec{\Gamma}(M)_{/2}, \text{ ou } \vec{\Gamma}_2(M).$$

Le troisième terme est d'interprétation plus difficile : on l'appelle accélération complémentaire, ou accélération de CORIOLIS, et on la note :

$$\vec{\Gamma}_c(M)$$

Nous réécrivons la formule :

$$(15) \quad \boxed{\vec{\Gamma}(M)_{/1} = \vec{\Gamma}(M)_{/2} + \vec{\Gamma}(M)_{2/1} + \vec{\Gamma}_c(M)}$$

$$\begin{array}{ccccccc} \text{accélération} & & \text{accélération} & + & \text{accélération} & + & \text{accélération} \\ \text{absolue} & = & \text{relative} & & \text{d'entraînement} & & \text{complémentaire} \end{array}$$

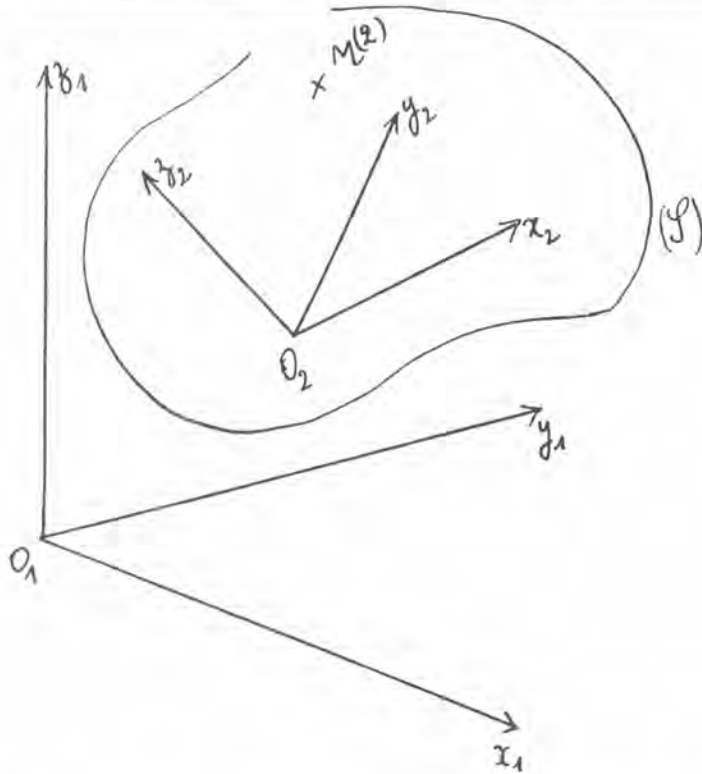
Exercice 2.3 : Une bicyclette roule sur un chemin rectiligne, avec une vitesse constante, égale à $\underline{v}$. Le cycliste fait tourner son pédalier avec une vitesse angulaire constante, égale à $\underline{\omega}$. On demande de calculer la vitesse et l'accélération d'une pédale.

(Observation : on constate que l'accélération de CORIOLIS est, ici, nulle)

Exercice 2.4 : Un plateau horizontal de rayon R est animé d'un mouvement de rotation uniformément retardé autour de son axe. Un point M se déplace sur le bord du plateau, avec une vitesse de module constant par rapport au plateau, et dans le sens de rotation inverse de ce dernier. On demande de calculer l'accélération de M .

Afin d'expliquer les formules (12) et (15), nous allons entreprendre l'étude du :

3. Champ des vitesses et des accélérations d'un solide en mouvement.



3.1 Reprenons l'expression (11) de la vitesse d'entraînement, c'est-à-dire de la vitesse, par rapport au repère fixe $O_1 x_1 y_1 z_1$, de la molécule $M^{(2)}$ de (S) .

$$(11)' \quad \vec{V}(M^{(2)})_{/1} = \vec{V}(O_2)_{/1} + x_2 \frac{d\vec{i}_2}{dt} + y_2 \frac{d\vec{j}_2}{dt} + z_2 \frac{d\vec{k}_2}{dt}$$

La base mobile $(\vec{i}_2, \vec{j}_2, \vec{k}_2)$ étant orthonormale, nous avons par exemple :

$$\vec{i}_2 \cdot \vec{i}_2 = 1 \quad \text{à chaque instant} \quad (*)$$

D'où, par dérivation en t :

(*) le $\cdot$ désigne le produit scalaire: voir Module AG1, VI.

$$\vec{i}_2 \cdot \frac{d\vec{i}_2}{dt} = 0$$

Autrement dit, $\frac{d\vec{i}_2}{dt}$ est de la forme :

$$\frac{d\vec{i}_2}{dt} = r \cdot \vec{j}_2 - q \cdot \vec{k}_2$$

De la même façon, $\frac{d\vec{j}_2}{dt} = p \cdot \vec{k}_2 + \alpha \cdot \vec{i}_2$, avec :

$$\alpha = \frac{d\vec{j}_2}{dt} \cdot \vec{i}_2 = \frac{d}{dt}(\vec{j}_2 \cdot \vec{i}_2) - \vec{j}_2 \cdot \frac{d\vec{i}_2}{dt} = -r$$

Ainsi a-t-on :

$$\frac{d\vec{j}_2}{dt} = -r \cdot \vec{i}_2 + p \cdot \vec{k}_2$$

En raisonnant de même avec $\vec{k}_2$, on est conduit à :

$$\frac{d\vec{k}_2}{dt} = q \cdot \vec{i}_2 - p \cdot \vec{j}_2 \quad (: \text{l'établit !})$$

Il est commode de concentrer les trois formules obtenues dans l'écriture matricielle :

$$(16) \quad \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \vec{i}_2 \\ \vec{j}_2 \\ \vec{k}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & r & -q \\ -r & 0 & p \\ q & -p & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{i}_2 \\ \vec{j}_2 \\ \vec{k}_2 \end{pmatrix}$$

Avec ces notations, l'expression (11)' prend la forme :

$$\vec{V}(M^{(2)})_{/1} = \vec{V}(O_2)_{/1} + (qz_2 - rz_2) \cdot \vec{i}_2 + (rx_2 - pz_2) \cdot \vec{j}_2 + (py_2 - qx_2) \cdot \vec{k}_2$$

soit, en introduisant le vecteur :

$$\vec{\Omega} = p \cdot \vec{i}_2 + q \cdot \vec{j}_2 + r \cdot \vec{k}_2$$

$$(17) \quad \boxed{\vec{V}(M^{(2)})_{/1} = \vec{V}(O_2)_{/1} + \vec{\Omega} \wedge \vec{O_2 M^{(2)}}}$$

Exercice 3.1 : Montrer que le vecteur $\vec{\Omega}$ ne dépend que du solide (S) , et non du repère $O_2 x_2 y_2 z_2$ qui lui a été attaché.

Remarquons d'autre part que les formules (2) et (17) sont cohérentes. Ceci nous permet d'appeler $\vec{\Omega}$ le vecteur-rotation instantané du solide (S) dans son mouvement par rapport au repère fixe $O_1 x_1 y_1 z_1$.

Remarque : Le lecteur aura trouvé comme expression de la vitesse dans l'Exercice 2.1 :

$$\vec{V}(M)_{/1} = v \cdot \vec{k}_1 + \omega \vec{k}_2 \wedge \vec{O_2 M}$$

Il s'agit du mouvement hélicoïdal de (Σ) par rapport au repère fixe $O_1 x_1 y_1 z_1$. Cette formule est à rapprocher de (17). On peut d'ailleurs établir, à partir de la formule (17), l'existence à chaque instant, d'un mouvement hélicoïdal (de (S) par rapport à $O_1 x_1 y_1 z_1$) qui possède le même champ de vitesses que le mouvement étudié : c'est le mouvement hélicoïdal tangent, dont l'axe de rotation est appelé axe instantané de rotation du mouvement.

(*) Exercice 3.2 : Établir les points précédents, et caractériser les éléments du mouvement hélicoïdal tangent.

3.2 En dérivant l'expression (17) de la vitesse, nous obtenons pour l'accélération :

$$\begin{aligned}\vec{\Gamma}(M^{(2)})_{11} &= \vec{\Gamma}(O_2)_{11} + \frac{d}{dt}(\vec{\Omega} \wedge \vec{O_2 M^{(2)}}) \\ &= \vec{\Gamma}(O_2)_{11} + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \vec{O_2 M^{(2)}} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{V}(M^{(2)})_{11} - \vec{V}(O_2)_{11})\end{aligned}$$

soit, en utilisant de nouveau (17), et la formule du double produit vectoriel :

$$\begin{aligned}(18) \quad \vec{\Gamma}(M^{(2)})_{11} &= \vec{\Gamma}(O_2)_{11} + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \vec{O_2 M^{(2)}} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{O_2 M^{(2)}}) \\ &= \vec{\Gamma}(O_2)_{11} + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \vec{O_2 M^{(2)}} + (\vec{\Omega} \cdot \vec{O_2 M^{(2)}}) \vec{\Omega} - \|\vec{\Omega}\|^2 \vec{O_2 M^{(2)}}\end{aligned}$$

où $\|\vec{\Omega}\| = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$ désigne la longueur du vecteur $\vec{\Omega}$.

4. Retour sur la composition des mouvements

4.1 Revenons au problème soulevé au début du §2. En désignant par $\vec{\Omega}_{2/1}$ le vecteur-rotation instantané du solide (S) par rapport au repère $O_1 x_1 y_1 z_1$, le § précédent nous a appris que la vitesse d'entraînement peut s'écrire :

$$\vec{V}(M)_{2/1} = \vec{V}(O_2)_{11} + \vec{\Omega}_{2/1} \wedge \vec{O_2 M}$$

La formule (13) s'écrivait donc :

$$(19) \quad \boxed{\vec{V}(M)_{11} = \vec{V}(M)_{12} + \vec{V}(O_2)_{11} + \vec{\Omega}_{2/1} \wedge \vec{O_2 M}}$$

4.2 Explicitons maintenant la formule (15) :

le terme d'entraînement :

$$\vec{\Gamma}(M)_{2/1}$$

est donné par la formule (13) ,

quant à l'accélération de CORIOLIS $\vec{\Gamma}_c(M)$, elle s'écrit sous la forme :

$$\vec{\Gamma}_c(M) = 2 \left(\dot{x}_2 \frac{d\vec{r}_2}{dt} + \dot{y}_2 \frac{d\vec{j}_2}{dt} + \dot{z}_2 \frac{d\vec{k}_2}{dt} \right) \quad \text{d'après (14)}$$

soit, d'après (16), et le même calcul que celui qui a conduit à (17),

$$(20) \quad \boxed{\vec{\Gamma}_c(M) = 2 \vec{\Omega}_{2/1} \wedge \vec{V}_2(M)}$$

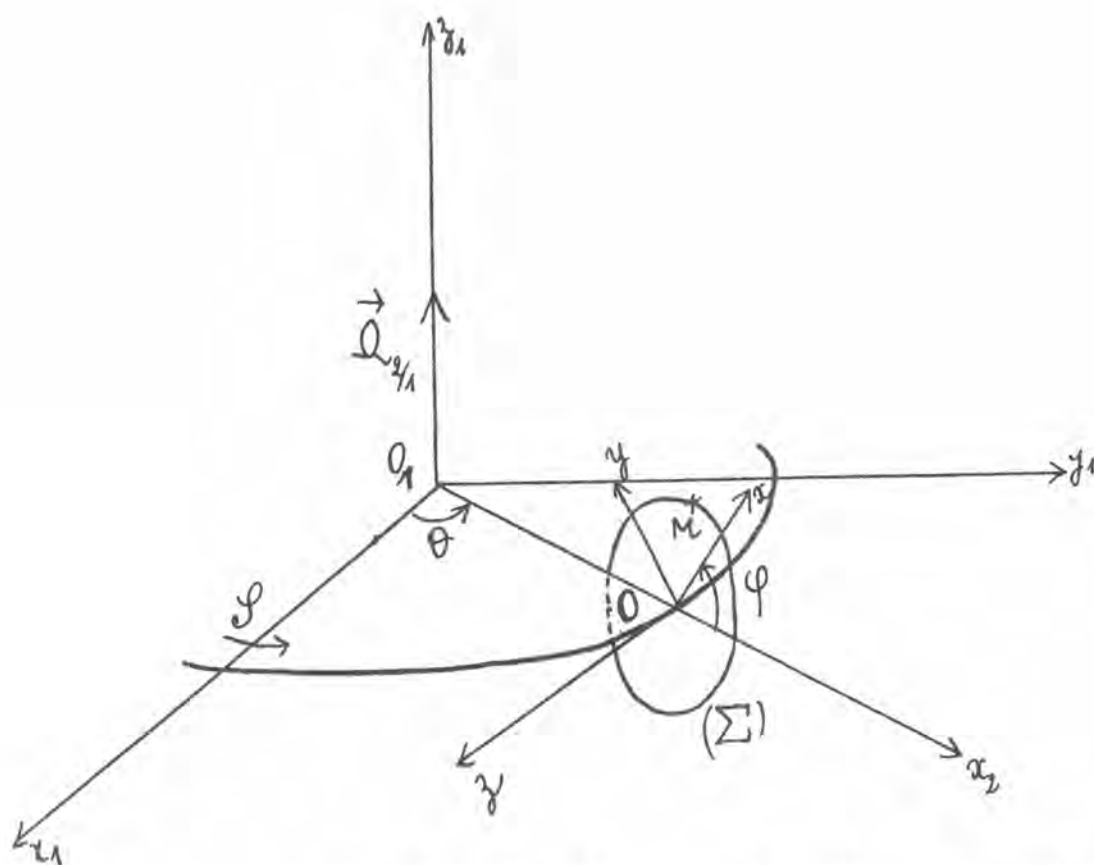
où, rappelons-le, $\vec{V}_2(M) = \vec{V}(M)_{/2}$ désigne la vitesse relative de M.

Exercice 4.1 : Comment doit être la courbure d'un fleuve coulant vers la Mer du Nord, à la vitesse de 3 km/h, pour que l'accélération de CORIOLIS due à la rotation de la Terre soit supérieure à l'accélération normale due au méandre ?

(indication : utilisez les formules (6) et (20))

Exercice 4.2 : Donnez des cas d'annulation de l'accélération de CORIOLIS, et imaginez pour chaque cas un exemple.

(*) Exercice 4.3 : Dans le dispositif illustré en haut de la page suivante, le plateau ($\mathcal{P}$) tourne autour de son axe vertical fixe Oz_1 , le point O est fixé sur le bord de ($\mathcal{P}$), et est le centre d'un anneau (Σ), qui tourne autour de son axe Oz , tangent au bord de ($\mathcal{P}$).



On demande de calculer les champs des vitesses et accélération du solide (Σ) , par rapport au repère fixe $O_1x_1y_1z_1$.

4.3 Dans l'Exercice précédent, le Lecteur doit être naturellement tenté d'appliquer, plutôt que la formule (13) de composition des vitesses, la formule (17), en écrivant :

$$\vec{V}(M)_{/1} = \vec{V}(O)_{/1} + \vec{\Omega} \wedge \vec{OM}$$

où $\vec{\Omega}$ désigne le vecteur-rotation instantanée du solide (Σ) dans son mouvement par rapport au repère fixe $O_1x_1y_1z_1$.

Alors, disons un peu les notations : cela permettra de retenir plus facilement la formule obtenue. Nous allons appeler par $O_3x_3y_3z_3$ le repère $Oxyz$ lié au solide (Σ) , et nous allons noter par $M^{(i)}$ la molécule liée au repère $O_ix_iy_iz_i$, qui occupe la position

géométrique M à l'instant du calcul de la vitesse, i prenant les valeurs 1, 2, ou 3.

Avec cette notation, la formule précédente prend la forme:

$$(a) \quad \vec{V}(M)_{11} = \vec{V}(O_3)_{11} + \vec{\Omega}_{3/1} \wedge \vec{O_3 M}$$

tandis que (13) s'écrit:

$$\vec{V}(M)_{11} = \vec{V}(M)_{12} + \vec{V}(M^{(2)})_{11}$$

Mais, toujours d'après (17), nous avons encore:

$$\vec{V}(M)_{12} = \vec{V}(O_3)_{12} + \vec{\Omega}_{3/2} \wedge \vec{O_3 M}$$

$$\text{et: } \vec{V}(M^{(2)})_{11} = \vec{V}(O_2)_{11} + \vec{\Omega}_{2/1} \wedge \vec{O_2 M}$$

On en obtient-ou:

$$\vec{V}(M)_{11} = \vec{V}(O_3)_{12} + \vec{\Omega}_{3/2} \wedge \vec{O_3 M} + \vec{V}(O_2)_{11} + \vec{\Omega}_{2/1} \wedge \vec{O_2 M}$$

$$\text{ou encore, comme: } \vec{O_2 M} = \vec{O_2 O_3} + \vec{O_3 M},$$

$$\vec{V}(M)_{11} = \vec{V}(O_3)_{12} + \vec{\Omega}_{3/2} \wedge \vec{O_3 M} + \vec{V}(O_2)_{11} + \vec{\Omega}_{2/1} \wedge (\vec{O_2 O_3} + \vec{O_3 M})$$

où l'on reconnaît, dans: $\vec{V}(O_2)_{11} + \vec{\Omega}_{2/1} \wedge \vec{O_2 O_3}$, la vitesse

$$\vec{V}(O_2^{(1)})_{11}.$$

Ainsi:

$$(b) \quad \vec{V}(M)_{11} = \vec{V}(O_3)_{12} + \vec{V}(O_2^{(1)})_{11} + (\vec{\Omega}_{3/2} + \vec{\Omega}_{2/1}) \wedge \vec{O_3 M}$$

où, d'après (13), $\vec{V}(O_3)_{1/2} + \vec{V}(O_3^{(2)})_{1/1} = \vec{V}(O_3)_{1/1}$. En comparant les lignes (a) et (b), nous obtenons donc l'égalité vectorielle :

$$\vec{\Omega}_{3/1} \wedge \vec{O_3 M} = (\vec{\Omega}_{3/2} + \vec{\Omega}_{2/1}) \wedge \vec{O_3 M}$$

qui doit être valable pour tout point M, donc pour tout vecteur $\vec{O_3 M}$.

Ainsi a-t-on enfin démontré la formule de composition des vecteurs rotation :

$$(21) \quad \boxed{\vec{\Omega}_{3/1} = \vec{\Omega}_{3/2} + \vec{\Omega}_{2/1}}$$

et qui, pour revenir à des notations faisant apparaître les solides plutôt que les repères, s'écrit :

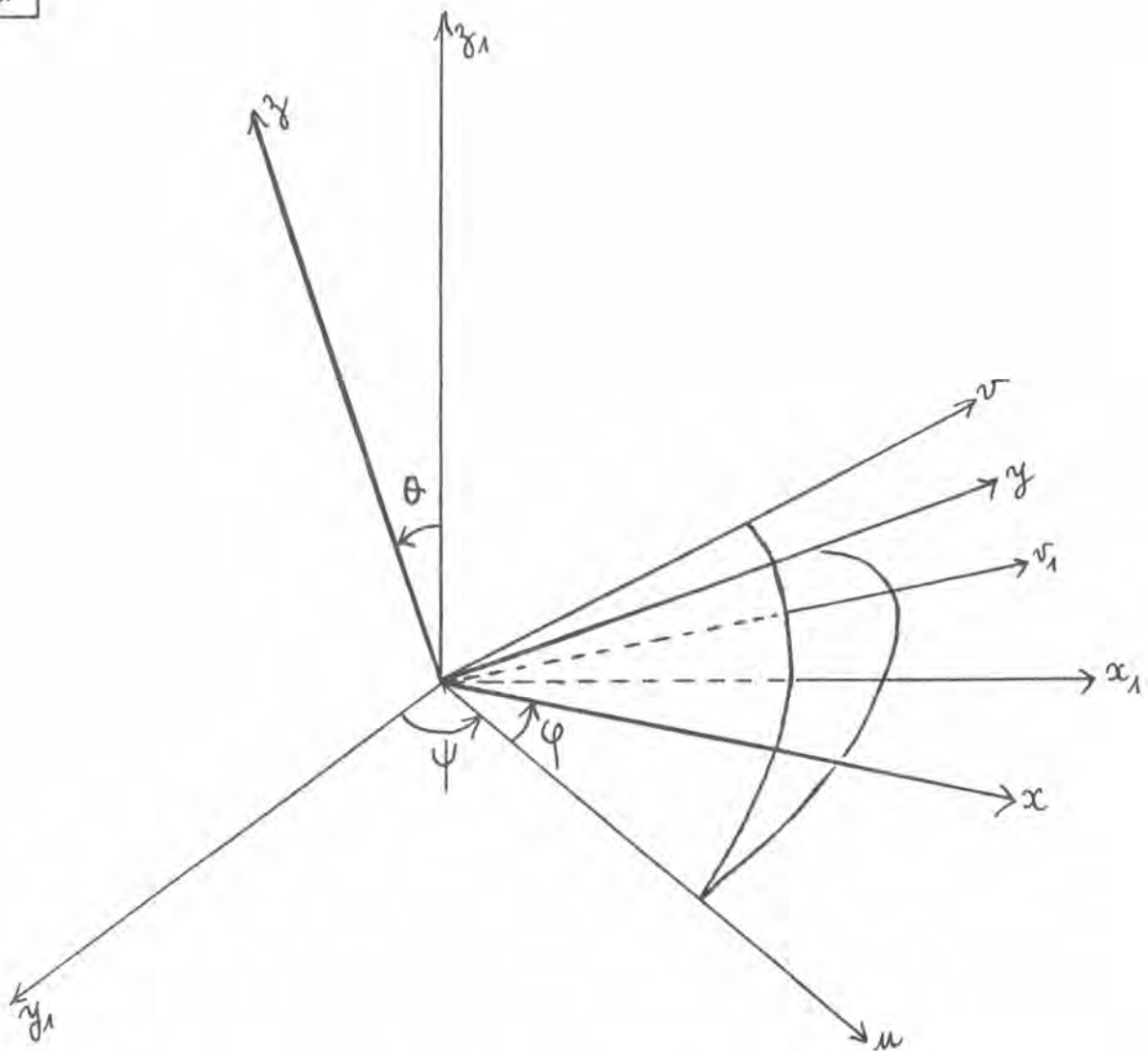
$$\vec{\Omega}_{\Sigma/1} = \vec{\Omega}_{\Sigma/2} + \vec{\Omega}_{2/1}$$

Exercice 4.4 : Reprendre l'exercice 4.3, en utilisant (21).

5. Les angles d'EULER

Supposons que le solide (S) en mouvement possède un point fixe O_1 : il est alors commode de le situer dans l'espace, à l'aide de trois paramètres, qui sont les angles d'EULER. L'idée est de passer du repère fixe $O_1 x_1 y_1 z_1$, au repère mobile $O_1 x y z$ lié au solide, par trois rotations successives : c'est ce que nous allons préciser ici.

5.1



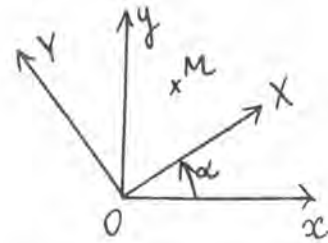
On est l'intersection des plans Ox_1y_1 et Oxy : on l'appelle la ligne des nœuds

On effectue donc, dans l'ordre suivant,

- 1) la rotation d'axe Oz_1 et d'angle ψ , qui amène Oy_1 sur la ligne des nœuds On ; ψ est la précession ;
- 2) la rotation d'axe On , et d'angle θ , appelé nutaton ;
- 3) la rotation d'axe Oz_1 , et d'angle ϕ , appelé rotation propre

Rappelons que la matrice de la rotation d'axe $\vec{k}$, et d'angle α s'écrit:

$$R_{\alpha} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Ainsi, les anciennes coordonnées (x, y, z) du point M sont-elles reliées aux nouvelles coordonnées (X, Y, Z) par la relation matricielle:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = R_{-\alpha} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

En effectuant le produit matriciel:

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

nos sommes conduits à la matrice M:

$$\begin{pmatrix} \cos \psi \cdot \cos \varphi - \sin \psi \cdot \cos \theta \cdot \sin \varphi & \sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \cdot \cos \theta \cdot \sin \varphi & \sin \theta \cdot \sin \varphi \\ -\cos \psi \cdot \sin \varphi - \sin \psi \cdot \cos \theta \cdot \cos \varphi & -\sin \psi \cdot \sin \varphi + \cos \psi \cdot \cos \theta \cdot \cos \varphi & \sin \theta \cdot \cos \varphi \\ \sin \psi \cdot \sin \theta & -\cos \psi \cdot \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

telle que:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

et appelée en Mécanique "tableau des cosinus directeurs". Les angles ψ , θ et φ sont les angles d'EULER.

5.2 Nous allons écrire l'expression du vecteur-rotation instantané $\vec{\Omega}$ du solide ($\mathcal{S}$) dans son mouvement par rapport au repère fixe $O_1x_1y_1z_1$.

D'après la formule (21), appliquée deux fois, nous avons:

$$\vec{\Omega} = \vec{\Omega}_{O_1xyz / O_1uvw} + \vec{\Omega}_{O_1uvw / O_1u'v'z'} + \vec{\Omega}_{O_1u'v'z' / O_1x_1y_1z_1}$$

d'où, en appliquant maintenant la formule (3):

$$(22) \quad \boxed{\vec{\Omega} = \dot{\varphi} \cdot \vec{k} + \dot{\theta} \cdot \vec{u} + \dot{\psi} \cdot \vec{k}_1}$$

Il est maintenant facile, en faisant appel au Calcul matriciel, d'écrire les composantes de $\vec{\Omega}$ dans le repère O_1xyz , et dans le repère $O_1x_1y_1z_1$. On obtient:

$$(23) \quad \vec{\Omega} = p \cdot \vec{i} + q \cdot \vec{j} + r \cdot \vec{k} \quad , \quad \begin{cases} p = \dot{\psi} \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi + \dot{\theta} \cdot \cos\varphi \\ q = \dot{\psi} \cdot \sin\theta \cdot \cos\varphi - \dot{\theta} \cdot \sin\varphi \\ r = \dot{\psi} \cdot \cos\theta + \dot{\varphi} \end{cases}$$

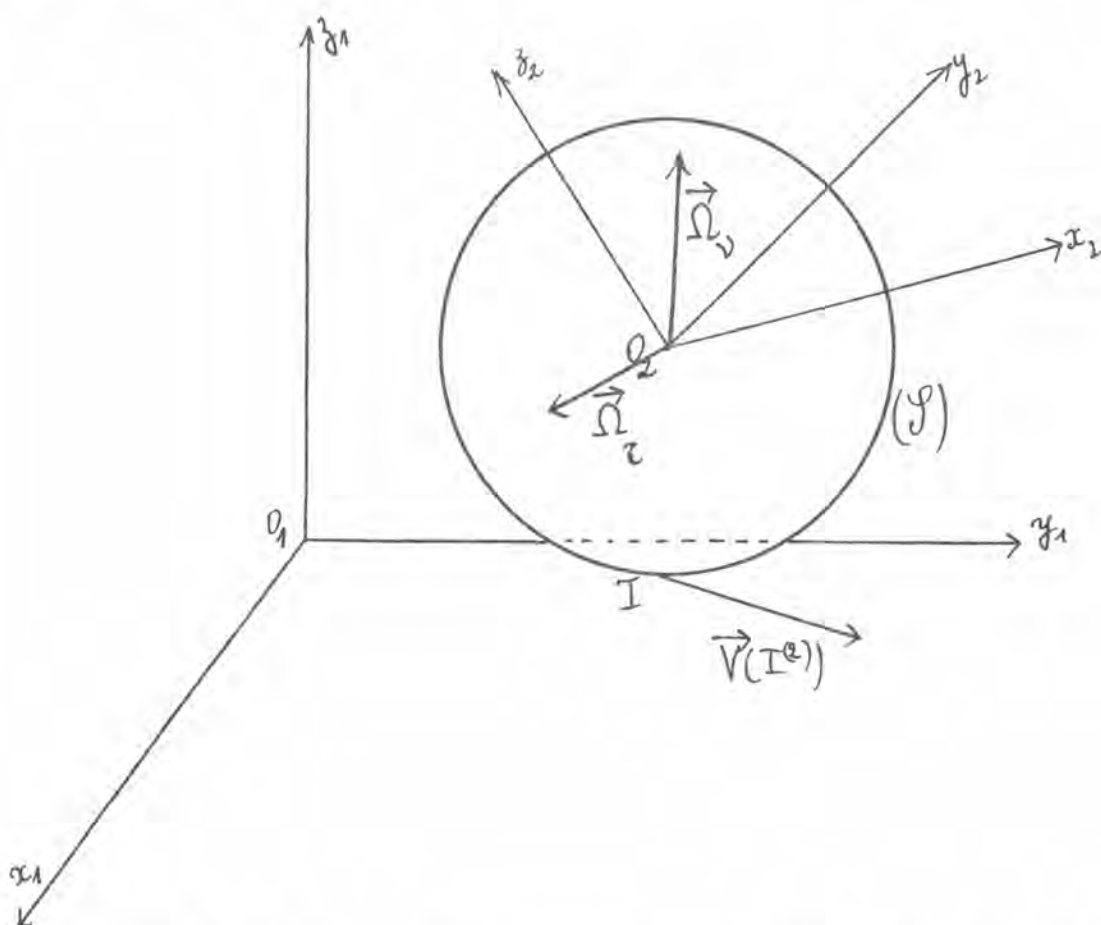
$$(24) \quad \vec{\Omega} = p_1 \cdot \vec{x}_1 + q_1 \cdot \vec{y}_1 + r_1 \cdot \vec{z}_1 \quad , \quad \begin{cases} p_1 = \dot{\varphi} \sin\theta \sin\psi + \dot{\theta} \cos\psi \\ q_1 = -\dot{\varphi} \sin\theta \cos\psi + \dot{\theta} \sin\psi \\ r_1 = \dot{\varphi} \cos\theta + \dot{\psi} \end{cases}$$

Exercice 5.1 : Établir les formules précédentes

6. Mouvement de deux solides en contact : la notion de roulement sans glissement.

6.1 Il est fréquent, en Mécanique, d'avoir à étudier des systèmes comportant des solides assujettis à rester en contact (engrenages, par exemple).

À titre d'illustration, observons le mouvement d'une bille sur un plan horizontal :



Le repère fixe O_1, x_1, y_1, z_1 est naturellement choisi de sorte que le plan horizontal ait $z_1 = 0$ comme équation. La bille (S), de rayon R , se voit repérée par les coordonnées (α, β) du point de contact I avec le plan horizontal.

Le champ des vitesses est entièrement déterminé par la vitesse du

point $I^{(2)}$ de $(\mathcal{S})$ coïncident avec I , et par le vecteur-rotation instantané :

$$\vec{V}(M)_{/1} = \vec{V}(I^{(2)})_{/1} + \vec{\Omega} \wedge \vec{IM}$$

(: écrire la formule (17) pour les deux points M et $I^{(2)}$, et faire la différence)

Le vecteur $\vec{V}(I^{(2)})_{/1}$ est porté par le plan horizontal: c'est la itesse de glissement de la bille $(\mathcal{S})$.

Décomposons d'autre part le vecteur $\vec{\Omega}$ selon :

$$\vec{\Omega} = \vec{\Omega}_\tau + \vec{\Omega}_\nu$$

où $\vec{\Omega}_\tau$ est horizontal, $\vec{\Omega}_\nu$ vertical. Les champs de vitesse correspondant à ces vecteurs-rotation étant, comme toujours donnés par la formule (2), il est naturel d'appeler $\vec{\Omega}_\tau$ vecteur rotation de railement, $\vec{\Omega}_\nu$ de pirotement :



6.2 Plus généralement, considérons deux solides $(\mathcal{S})$ et (Σ) , limités par des surfaces assujetties à posséder un seul point commun au cours de leurs mouvements. Ce point I est dit point

de contact. Nous reprenons les notations du § 4.3 : $O_1 x_1 y_1 z_1$ désigne le repère fixe, $O_2 x_2 y_2 z_2$ un repère attaché à $(\mathcal{G})$, et $O_3 x_3 y_3 z_3$ un repère attaché au solide (Σ) .

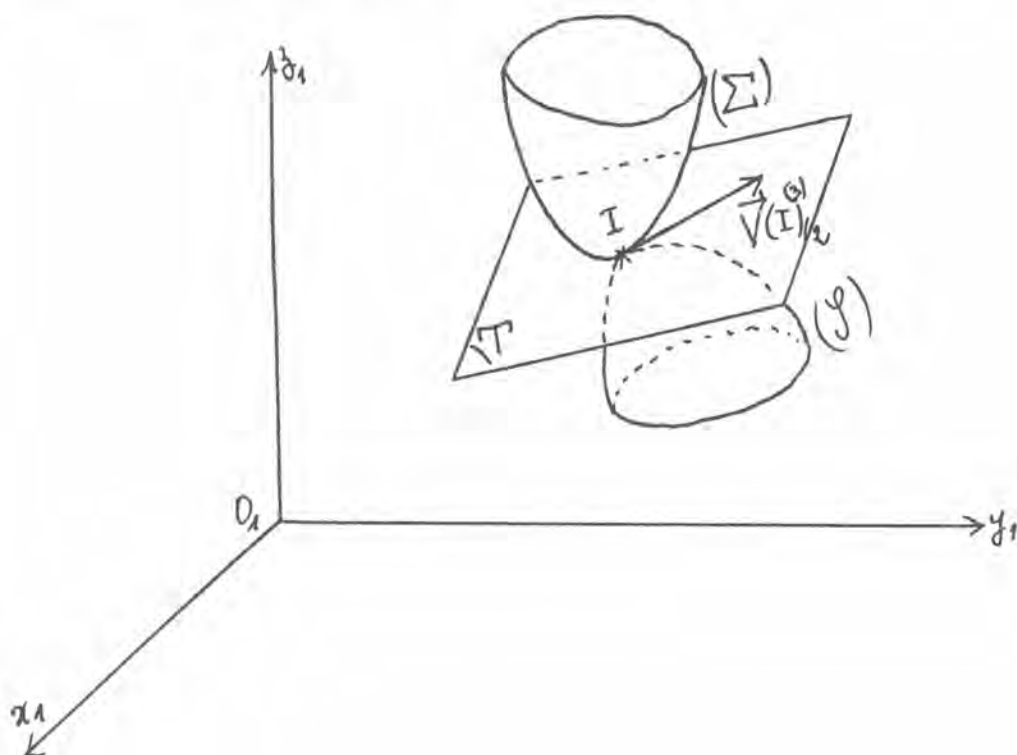
Nous appelons vitesse de glissement de (Σ) sur $(\mathcal{G})$, le vecteur :

$$\vec{V}(I^{(3)})_{/2}$$

qui vaut encore, d'après la formule (13) de composition des vitesses :

$$(25) \quad \vec{V}(I^{(3)})_{/2} = \vec{V}(I^{(3)})_{/1} - \vec{V}(I^{(2)})_{/1}$$

Lorsque le temps varie, les points $I^{(2)}$ vont définir sur $(\mathcal{G})$ une courbe $\mathcal{C}^{(2)}$, les points $I^{(3)}$ une courbe $\mathcal{C}^{(3)}$ sur (Σ) : ces deux courbes sont tangentes à chaque instant en I , et $\vec{V}(I^{(3)})_{/2}$ est portée par le plan T tangent aux deux surfaces $(\mathcal{G})$ et (Σ) en leur point de contact I :



En décomposant d'autre part le vecteur-rotation $\vec{\Omega}_{(\Sigma)/(\mathcal{G})} = \vec{\Omega}_{3/2}$

selon la composante $\vec{\Omega}_n$ portée par la normale commune à $(\mathcal{S})$ et (Σ) en I , et la composante $\vec{\Omega}_\tau$ portée par le plan tangent (T) , nous introduisons le vocabulaire suivant:

- si $\vec{\Omega} = 0$, on parle de glissement simple;
- si $\vec{V}(I^{(3)})_{/2} = 0$, de roulement sans glissement, et en particulier:
 - si $\vec{\Omega}_\tau = 0$, on parle de piotement simple;
 - si $\vec{\Omega}_v = 0$, de roulement simple.

Exercice 6.1 : On suppose que la bille du §6.1 pivote simplement et de sorte que sa rotation θ reste constante. On demande la trajectoire du centre de la bille.

(indication: utiliser l'expression (24) de $\vec{\Omega}$, et exprimer α et β à l'aide de la rotation propre φ).

7. Le mouvement plan sur plan.

Il s'agit là d'un modèle utile lors de l'étude de systèmes mécaniques comportant des solides à symétrie cylindrique (: problème d'engrenages, par exemple).

7.1 Supposons qu'un solide $(\mathcal{S})$ se déplace de sorte que trois de ses points M_1, M_2 et M_3 , non situés sur la même droite, aient leurs trajectoires inscrites dans un même plan (Π) . Nous allons montrer que, dans ces conditions, la trajectoire d'un point M quelconque de $(\mathcal{S})$ est parallèle au plan (Π) :

d'après la formule (17), nous avons, en désignant comme toujours par $\vec{\Omega}$ le vecteur-rotation instantané de $(\mathcal{S})$ par rapport au repère

fixe $O_1 x_1 y_1 z_1$,

$$\begin{cases} \vec{V}(M_2) - \vec{V}(M_1) = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{M_1 M_2} \\ \vec{V}(M_3) - \vec{V}(M_1) = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{M_1 M_3} \end{cases}$$

Comme les vecteurs vitesse sont dans le plan (Π) (: ils sont tangents aux trajectoires, supposées inscrites dans (Π)), c'est que $\vec{\Omega}$ doit être normal à (Π) (: le Lecteur non convaincu prendra un repère orthonormé bien choisi dans le plan (Π) , le complètera pour en faire un repère orthonormé de $\mathbb{R}^3$, et fera les calculs)

Écrivait maintenant la formule (17) pour M :

$$\vec{V}(M) = \vec{V}(M_1) + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{M_1 M}$$

nous constatons que $\vec{V}(M)$ est parallèle au plan (Π) . Nous en déduisons enfin que la trajectoire de M est inscrite dans un plan parallèle à (Π) : en effet, si $\vec{k}_1$ désigne un vecteur unitaire normale à (Π) , si O_1 désigne un point de (Π) , nous avons:

$$\frac{d}{dt} (\overrightarrow{O_1 M} \cdot \vec{k}_1) = \vec{V}(M) \cdot \vec{k}_1 = 0$$

donc:

$$\overrightarrow{O_1 M} \cdot \vec{k}_1 = K \stackrel{?}{=}$$

si bien que, si M' et M'' sont deux portions de la molécule M ,

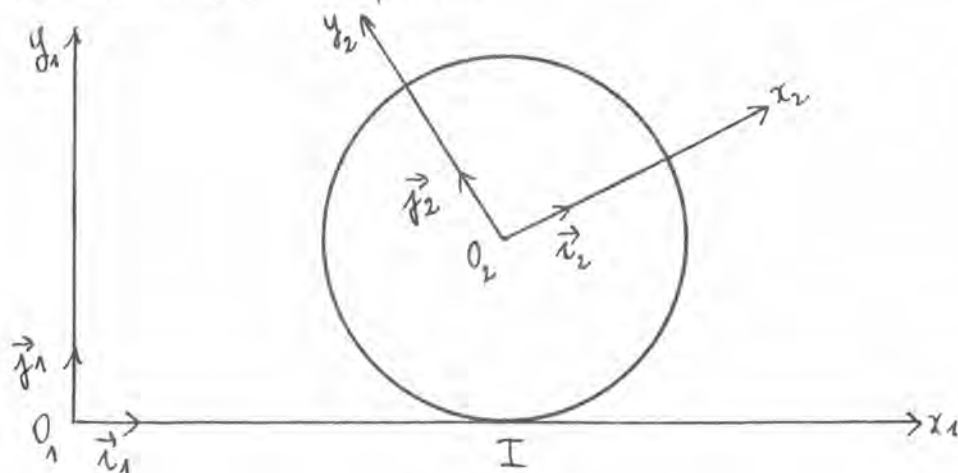
$$\overrightarrow{M' M''} \cdot \vec{k}_1 = 0$$

ce qui permet de conclure.

Il suffit donc, dans ces conditions, d'étudier le mouvement du plan défini par les trois points M_1, M_2 et M_3 , sur le plan fixe (Π) .

On parle de mouvement plan sur plan (: pensez au mouvement d'une feuille de papier glissant sur une table).

Exercice 7.1 : Soit $(\mathcal{I})$ un disque qui roule sans glisser sur une droite (D) du plan :



Écrire la condition de non-glissement, étudier la trajectoire d'un point du bord du disque.

(réponse: la cycloïde, étudiée dans le Module AN02, p.122)

7.2 Considérons donc un repère $O_2x_2y_2$ en mouvement sur le repère $O_1x_1y_1$. Le champ des vitesses des points de $(\mathcal{I})$, auquel est attaché le repère $O_2x_2y_2$, est donné par la formule (17) :

$$\vec{V}(M)_{/1} = \vec{V}(O_2)_{/1} + \vec{\Omega} \wedge \vec{O_2M}$$

Explicitons cette relation, en posant :

$$\vec{\Omega} = \omega \cdot \vec{k}_1 \quad \left(\vec{k}_1 = \vec{x}_1 \wedge \vec{y}_1 \right)$$

et: $\vec{V}(O_2)_{/1} = \xi \cdot \vec{x}_2 + \eta \cdot \vec{y}_2$

Obtient en désignant par x, y les coordonnées de M dans le repère

mobile $O_2x_2y_2$:

$$V(M)_{1,1} = (\xi - \omega y) \cdot \vec{x}_2 + (\eta + \omega x) \cdot \vec{y}_2$$

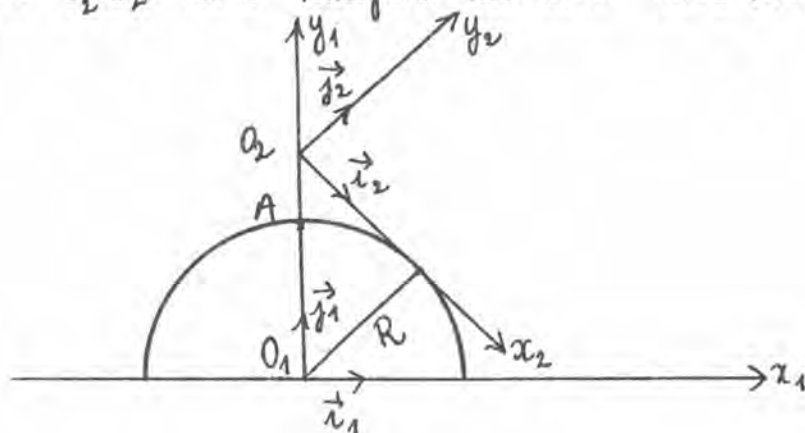
Si $\omega \neq 0$, il existe donc à chaque instant t un point et un seul, qui possède une vitesse nulle. C'est le point, que nous allons noter $I_{2/1}$, de coordonnées

$$x = -\eta/\omega, \quad y = \xi/\omega$$

dans le repère de $(\mathcal{I})$. Ce point est appelé centre instantané de rotation du mouvement plan sur plan (: dans le mouvement de la feuille de papier sur la table, tout se passe à l'instant t donné comme si la feuille était fixée à la table par une épingle fichée en $I_{2/1}$). Ainsi, dans le mouvement plan sur plan de l'Exercice 7.1, la condition de non glissement signifie-t-elle que le point de contact I coïncide avec le centre instantané de rotation.

Exercice 7.2 : Montrer que le centre instantané de rotation $I_{1/2}$ du mouvement de $O_1x_1y_1$ par rapport à $O_2x_2y_2$ coïncide avec $I_{2/1}$.

Exercice 7.3 : On suppose que, dans le mouvement du plan $O_2x_2y_2$ sur le plan $O_1x_1y_1$, le point O_2 décrit la demi-droite Ay_2 , et l'axe O_2x_2 reste tangent au cercle centré en O_1 , et passant par A .



On demande de tracer les trajectoires de $I_{2/1}$ dans chaque plan.
 (indication: on prendra l'angle $\theta = (\vec{i}_2, \vec{i}_1)$ comme paramètre de position de $O_2 x_2 y_2$ par rapport à $O_1 x_1 y_1$)

Solution de l'Exercice 7.3:

$$\vec{O_1 O_2} = \frac{R}{\cos \theta} \cdot \vec{j}_1, \text{ donc: } V(O_2)_{1/1} = R \cdot \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{j}_1.$$

comme d'autre part, $\vec{\Omega}_{2/1} = -\dot{\theta} \vec{k}_1$ où $\vec{k}_1 = \vec{i}_1 \wedge \vec{j}_1$ (: pour bien s'en convaincre, reprendre (16)), le centre instantané de rotation I est déterminé par l'équation:

$$R \cdot \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} \dot{\theta} \vec{j}_1 - \dot{\theta} \vec{k}_1 \wedge \vec{O_2 I} = 0$$

soit, en posant: $\vec{O_2 I} = x_1 \vec{i}_1 + y_1 \vec{j}_1$,

$$\begin{cases} x_1 = \frac{R \sin \theta}{\cos^2 \theta} \\ y_1 = \frac{R}{\cos \theta} \end{cases}$$

Pour obtenir les coordonnées de I dans le plan mobile, il suffit d'écrire:

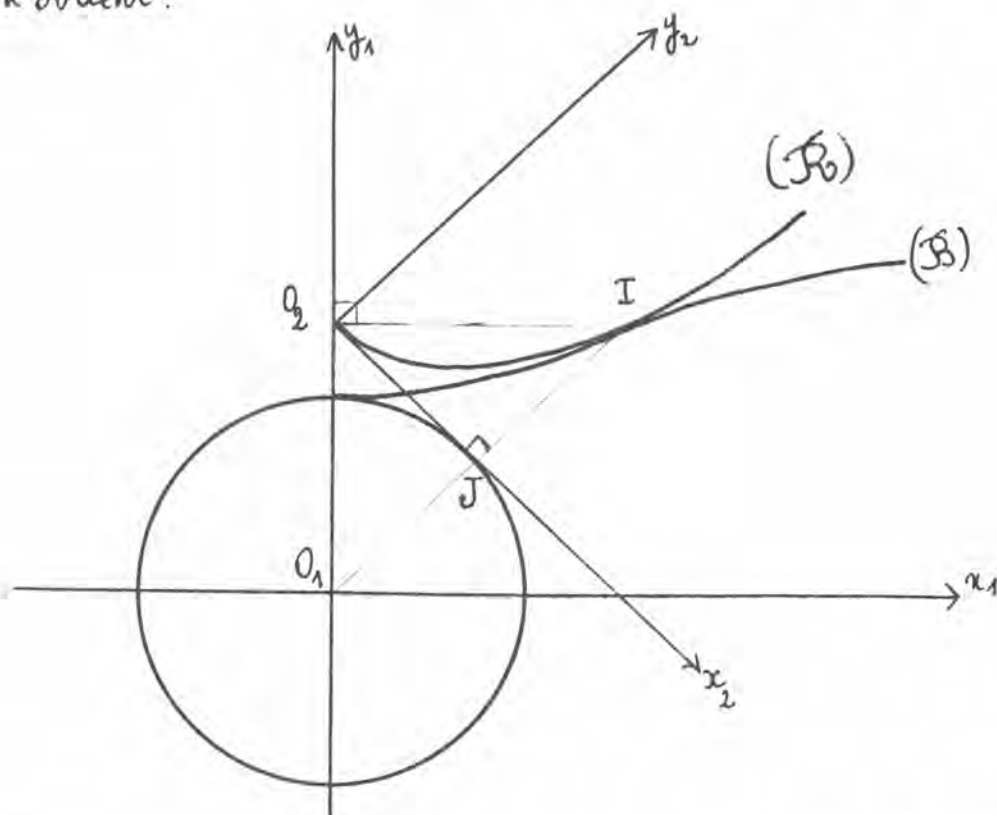
$$\vec{O_2 I} = \vec{O_2 O_1} + \vec{O_1 I}$$

d'où:
$$\begin{cases} x_2 = R \tan \theta \\ y_2 = R (\tan \theta)^2 \end{cases}$$

En éliminant θ entre x_2 et y_2 , nous obtenons: $y_2 = \frac{1}{R} (x_2)^2$, si bien que I décrit dans le plan mobile un arc de parabole (: θ

varie sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}[$). Le tracé du lieu de I dans le plan fixe relève de la pratique des courbes paramétriques^(*).

On obtient :



La courbe (B) dérivée par I dans $O_1 x_1 y_1$ s'appelle la base du mouvement, la courbe (B_0) dérivée par I dans $O_2 x_2 y_2$, la roulante du mouvement. Conformément à la définition du § 6, (B_0) roule sans glisser sur (B) .

La vitesse d'une molécule $M^{(2)}$ de $O_2 x_2 y_2$ étant donnée par :

$$\begin{aligned} \vec{V}(M^{(2)})_{/1} &= \vec{V}(I_{2/1})_{/1} + \vec{\Omega} \wedge \vec{IM} \\ (26) \quad &= \vec{\Omega} \wedge \vec{IM} \end{aligned}$$

nous constatons que le vecteur $\vec{IM}$ est normal à la trajectoire

(*) Module ANO2, Leçon n° 11

définie par $M^{(2)}$ dans le plan $O_1 x_1 y_1$.

Cette importante propriété permet dans certains cas une construction rapide du centre instantané de rotation : ainsi, dans le cas de l'exercice 7.3, I doit-il se trouver d'une part sur la perpendiculaire menée de O_2 à $O_1 y_1$ (puisque O_2 admet $O_1 y_1$ comme trajectoire dans le plan $O_1 x_1 y_1$), et d'autre part sur la droite $O_1 J$, normale à la trajectoire circulaire du point de contact J.

7.3 Considérons maintenant trois plans $(\mathcal{P}_i)$, $i=1,2,3$ en mouvement l'un par rapport à l'autre, et désignons par $I_{i/j}$ le centre instantané de rotation de $(\mathcal{P}_i)$, dans son mouvement par rapport au plan $(\mathcal{P}_j)$. Nous savons déjà que : $I_{i/j} = I_{j/i}$, et nous disposons par conséquent de trois points $I_{1/2}$, $I_{2/3}$ et $I_{3/1}$.

Montrons que les trois points sont alignés :

soit $M^{(3)}$ une molécule de $(\mathcal{P}_3)$: sa vitesse par rapport au plan $(\mathcal{P}_1)$ peut s'exprimer de deux façons :

$$\vec{V}(M^{(3)})_{/1} = \vec{\Omega}_{3/1} \wedge \overrightarrow{I_{3/1} M} \quad , \text{d'après (26)}$$

$$\begin{aligned} \vec{V}(M^{(3)})_{/1} &= \vec{V}(M^{(3)})_{/2} + \vec{V}(M^{(2)})_{/1} \quad , \text{d'après (13)} \\ &= \vec{\Omega}_{3/2} \wedge \overrightarrow{I_{3/2} M} + \vec{\Omega}_{2/1} \wedge \overrightarrow{I_{2/1} M} \quad , \text{d'après (26)} \end{aligned}$$

En comparant ces deux expressions, et en utilisant la formule (1) il vient :

$$\vec{\Omega}_{3/2} \wedge \left(\overrightarrow{I_{3/1} M} - \overrightarrow{I_{3/2} M} \right) = \vec{\Omega}_{2/1} \wedge \left(\overrightarrow{I_{2/1} M} - \overrightarrow{I_{3/1} M} \right)$$

Soit encore, en écrivant $\vec{\Omega}_{i/j} = \omega_{i/j} \vec{k}$:

$$\vec{k} \wedge \left(\omega_{3/2} \overrightarrow{I_{3/1} I_{3/2}} - \omega_{2/1} \overrightarrow{I_{2/1} I_{3/1}} \right) = 0$$

Ce qui entraîne bien que :

$$\omega_{3/2} \overrightarrow{I_{3/1} I_{3/2}} + \omega_{2/1} \overrightarrow{I_{3/1} I_{2/1}} = 0$$

et en particulier l'alignement annoncé.

Exercice 7.4 : Une barre rectiligne $(\mathcal{G})$ tourne autour de son extrémité O_1 à la vitesse angulaire constante $\underline{\omega}$ dans le plan fixe $O_1 x_1 y_1$. Un disque circulaire (Σ') roule sans glisser le long de $(\mathcal{G})$, dans le plan $O_1 x_1 y_1$, et à la vitesse constante $\underline{v}$.

On demande de déterminer le centre instantané de rotation du mouvement du disque dans le plan $O_1 x_1 y_1$, et d'étudier base et roulante du mouvement.

Cinétique

II-1

1. La notion de masse

La Cinématique s'occupait des questions de trajectoires, sans soulever le problème des causes occasionnant le mouvement. Avant de formuler les lois qui régissent le mouvement, et d'en tirer les conséquences, nous avons besoin d'introduire une notion nouvelle: celle de masse.

Considérant le point matériel, I. NEWTON entendait par là la quantité de matière enfermée dans le corps: c'est la notion de masse inerte m , dont la mesure s'effectue par le poids p , selon la formule bien connue:

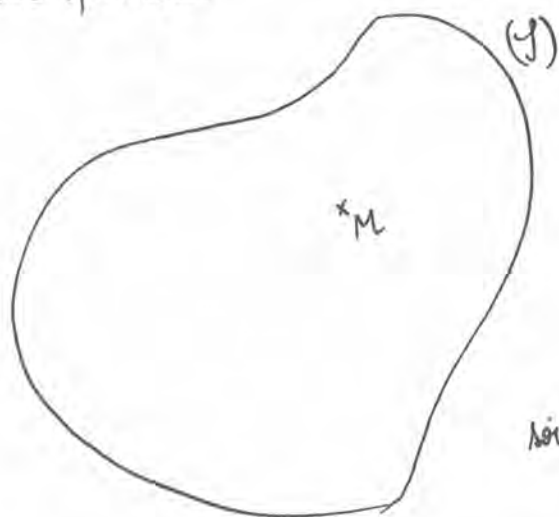
$$m = \frac{p}{g}$$

où $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ désigne l'accélération de la pesanteur Terrestre.

Nous supposons donc qu'à chaque point M d'un système matériel est attaché un nombre positif m , appelé masse du point M : la masse du système est alors égale à la somme des masses de ses différentes composantes. Ainsi, une haltère possède-t-elle une masse égale à la masse de sa barre, augmentée du double de la masse d'un de ses poids.

Maintenant, si $(\mathcal{S})$ est un corps solide, nous supposons qu'il existe une fonction ρ qui, à tout point M de $(\mathcal{S})$, associe un nombre positif: $\rho(M)$, appelé densité de masse au point M . Nous supposons ρ continue sur $(\mathcal{S})$: c'est la densité de masse du solide $(\mathcal{S})$.

Si $(\mathcal{G})$ est un solide tridimensionnel, la masse totale de $(\mathcal{G})$ s'obtient en sommant les masses de chacun de ses éléments, selon la formule:

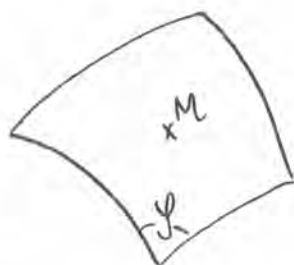


$$m = \iiint_{(\mathcal{G})} \rho(M) dv(M)$$

soit:

$$(1) \quad m = \iiint_{(\mathcal{G})} \rho(x, y, z) dx dy dz$$

où M est repéré par ses coordonnées dans le repère orthonormal $Oxyz$.
Si $(\mathcal{G})$ est un corps bidimensionnel (: une surface), ou monodimensionnel (: une ligne), nous parlerons de densité de masse surfacique ou linéique ρ , et la masse totale du corps se calculera par une intégrale de surface:



$$(2) \quad m = \iint_{(\mathcal{G})} \rho(M) dS(M)$$

ou par une intégrale curviligne:



$$(3) \quad m = \int_{(\mathcal{G})} \rho(M) ds(M)$$

Pour toutes les notions, ainsi que pour les techniques de calcul correspondantes, nous renvoyons le Lecteur au Module AN03: Leçons n°8, et suivantes.

Illustrons seulement par un

Exercice 1.1: Quelle est la masse d'une boule de rayon R dont la densité de masse est donnée par la formule:

$$\rho(M) = OM^3$$

si O désigne le centre de la boule?

(indication: passer en coordonnées sphériques; réponse: $\frac{2}{3}\pi R^6$)

2. La notion de centre de gravité

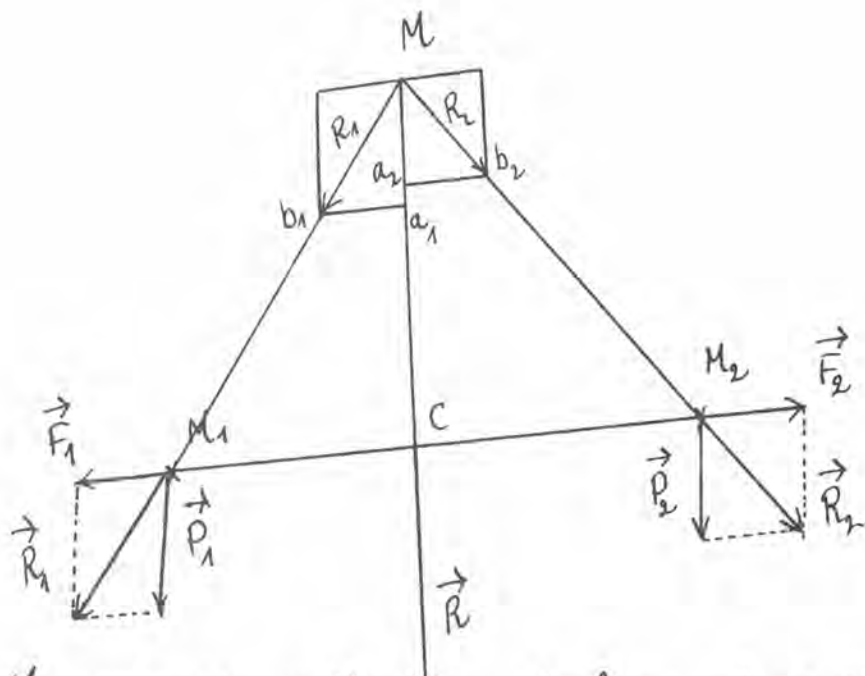
2.1 Considérons pour commencer un système formé de plusieurs points matériels: $M_1, M_2, \dots, M_k$, affectés des masses respectives: $m_1, m_2, \dots, m_k$, et soumis à l'action de la pesanteur.

Commençons par le cas $k=2$. La statique, branche de la Mécanique s'occupant des problèmes d'équilibre des systèmes matériels (et dont l'étude remonte à l'Antiquité, ARCHIMÈDE ayant donné au 3^{ème} siècle avant notre ère la solution au problème du levier, et introduit la notion de centre de gravité), nous apprend que le système des forces parallèles $\{\vec{P}_1, \vec{P}_2\}$ peut être remplacé par une seule force, appelée résultante:

$$\vec{R} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2$$

et dont le point d'application se trouve en un point C , appelé "centre des forces parallèles", et déterminé à partir de la règle bien connue dite du parallélogramme. Pour l'appliquer, utilisons deux forces voisines $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$

appliquées en M_1 et M_2 :



La construction se lisant sur la figure, la similitude des triangles $M a_1 b_1$ et $M C M_1$ d'une part, $M a_2 b_2$ et $M C M_2$ d'autre part, nous donne :

$$\frac{P_1}{MC} = \frac{F_1}{M_1 C} \quad \text{et} \quad \frac{P_2}{MC} = \frac{F_2}{CM_2} = \frac{F_1}{CM_2}$$

Il vient donc :

$$CM_1 \times P_1 = CM \times F_1 = CM_2 \times P_2$$

ce qui permet de préciser la position du point C : si O est un point donné, nous avons en effet :

$$\begin{cases} m_1 \cdot \vec{OC} = m_1 \cdot \vec{OM_1} + m_1 \cdot \vec{M_1 C} \\ m_2 \cdot \vec{OC} = m_2 \cdot \vec{OM_2} + m_2 \cdot \vec{M_2 C} \end{cases}$$

qui donne, par addition :

$$(m_1 + m_2) \cdot \vec{OC} = m_1 \cdot \vec{OM_1} + m_2 \cdot \vec{OM_2}$$

Dans le cas général, nous attacherons donc au système $\left\{ \vec{P}_j = m_j \vec{g} \right\}$

$j=1, 2, \dots, k$, des forces de pesanteur :

- le vecteur : $\vec{R} = \sum_{j=1}^k \vec{P}_j$, appelé résultante ;

- le vecteur : $\vec{M}_O = \sum_{j=1}^k \vec{OM}_j \wedge \vec{P}_j$, appelé moment résultant

par rapport au point O ;

et, par analogie avec le cas $k=2$ qui vient d'être étudié :

- le centre des forces parallèles C, défini par :

$$\vec{OC} = \frac{\sum_{j=1}^k m_j \cdot \vec{OM}_j}{\sum_{j=1}^k m_j}$$

Observation :

$$\vec{M}_O = \left(\sum_{j=1}^k m_j \cdot \vec{OM}_j \right) \wedge \vec{g}$$

$$= m \cdot \vec{OC} \wedge \vec{g} \quad , \quad \text{où } m = \sum_{j=1}^k m_j$$

$$= \vec{OC} \wedge \vec{R}$$

Or, bien,

le moment résultant est-il le moment (au point considéré) de la résultante, appliquée au centre des forces parallèles.

2.2] Étant donné un système de points matériels M_j , de masse m_j , $j=1, 2, \dots, k$, nous appellerons donc centre de gravité G du système, le point G défini par:

$$(4) \quad \vec{OG} = \frac{\sum_{j=1}^k m_j \vec{OM}_j}{\sum_{j=1}^k m_j}$$

Il s'agit donc, physiquement, du centre des forces parallèles introduit précédemment, et, mathématiquement, du barycentre du système $\{(M_j, m_j)\}_{j=1}^k$ (*)

Maintenant, si $(\mathcal{G})$ est un corps solide, ayant ρ comme densité de masse, le centre de gravité (appelé encore centre de masse) de $(\mathcal{G})$ est défini de manière analogue par:

$$(5) \quad \vec{OG} = \frac{1}{m} \iiint_{(\mathcal{G})} \vec{OM} \cdot \rho(M) \, dv(M)$$

En tenant dit, dans un repère orthonormé donné $Oxyz$, l'abscisse x_G de G est donné par:

$$(6) \quad x_G = \frac{1}{m} \iiint_{(\mathcal{G})} x \cdot \rho(x, y, z) \cdot dx dy dz$$

y_G et z_G étant donnés par des formules analogues.

(*) voir la Leçon VIII du Module AG 1.

Nous avons naturellement les mêmes définitions pour les corps bidimensionnel ou monodimensionnel.

Exercice 2.1 : Positionner le centre de gravité d'un arc d'hélice circulaire droite homogène.

Solution : le corps étant homogène, nous pouvons prendre $\rho = 1$; l'écriture paramétrique d'une spirale d'hélice prend la forme :

$$\begin{cases} x(t) = R \cdot \cos(\omega t) \\ y(t) = R \cdot \sin(\omega t) \\ z(t) = h \cdot t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$R > 0$ est le rayon de base du cylindre droit qui porte l'hélice, ω est la pulsation avec laquelle ce cercle de base est parcouru, $h > 0$ est le pas de l'hélice.

Alors,

$$ds^2 = (R^2 \omega^2 + h^2) dt^2 \quad (*)$$

et la longueur de la spirale vaut : $L = \int_0^T ds = \sqrt{R^2 \omega^2 + h^2} \cdot T$

Nous avons donc :

$$L \cdot x_G = \int_0^T R \cdot \cos \omega t \cdot dt = \frac{R}{\omega} \cdot \sin \omega T = 0$$

$$L \cdot y_G = \int_0^T R \cdot \sin \omega t \cdot dt = 0$$

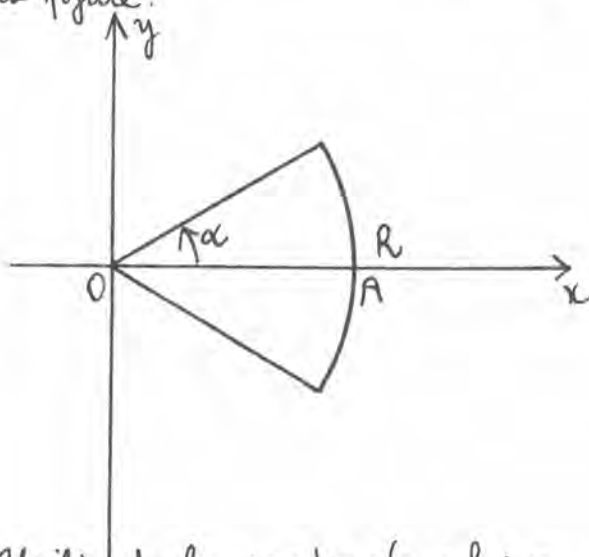
$$L \cdot z_G = \int_0^T h t \cdot dt = \frac{h}{2} T^2$$

Ainsi, $G(0, 0, \frac{h \cdot T}{\sqrt{R^2 \omega^2 + h^2}})$.

(*) ou, $\frac{ds}{dt} = \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2 + (\dot{z}(t))^2} = \sqrt{R^2 \omega^2 + h^2}$, voir, de nouveau le Module AN02, p. 130.

Exercice 2.2 : Déterminer le centre de gravité d'un secteur plan circulaire homogène.

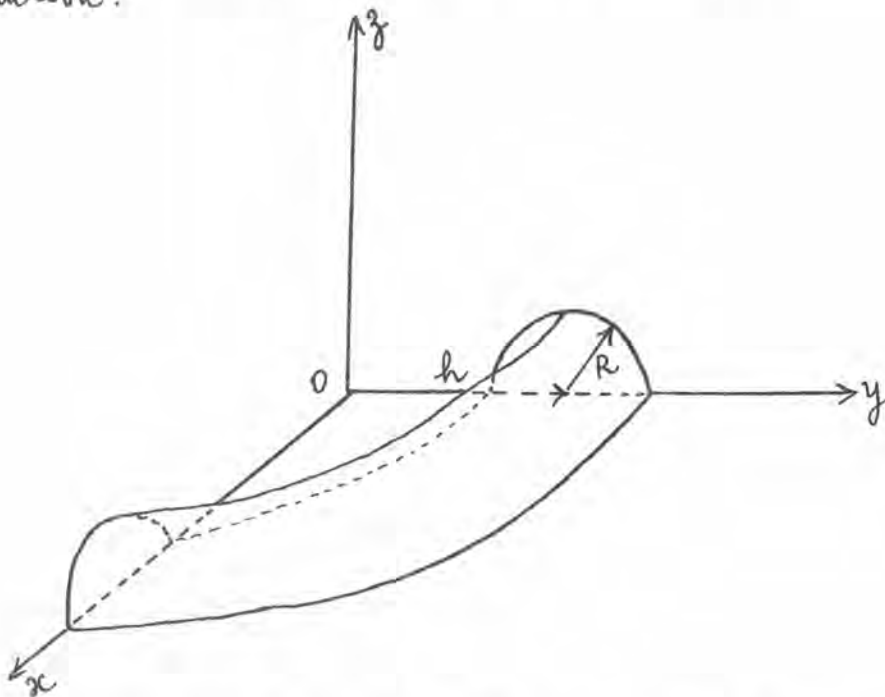
Solution : choisissons le repère plan Oxy , de sorte à avoir la figure :



Utilisant les coordonnées polaires, on trouve : $\vec{OG} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sin \alpha}{\alpha} \cdot \vec{OA}$

Exercice 3 : Déterminer le centre de gravité d'un demi-tore homogène, limité par le plan de l'équateur.

Solution :



: nous avons représenté ici le $1/4$ du demi-tore.

En coordonnées cylindriques, le $\frac{1}{2}$ -tore est défini par les inégalités:

$$(r-h)^2 + z^2 \leq R^2 \quad \text{et} \quad z \geq 0$$

Le volume du corps vaut:

$$\iiint_{(Y)} dx dy dz = 2\pi \cdot \iint_{\text{Demi-cercle}} r dr dz = 2\pi \cdot \int_0^\pi \int_0^R (h + \rho \cos \varphi) \rho d\rho d\varphi$$

soit $V = 2\pi \cdot h \pi \cdot \frac{R^2}{2} = \pi^2 h R^2 (= 2\pi h \cdot \pi \frac{R^2}{2} !)$. Par symétrie, nous aurons:

$$x_G = y_G = 0. \quad \text{Enfin:}$$

$$\iiint_{(Y)} z dx dy dz = 2\pi \int_0^\pi \int_0^R \rho \sin \varphi \cdot (h + \rho \cos \varphi) \rho d\rho d\varphi = \frac{4}{3} \pi h R^3$$

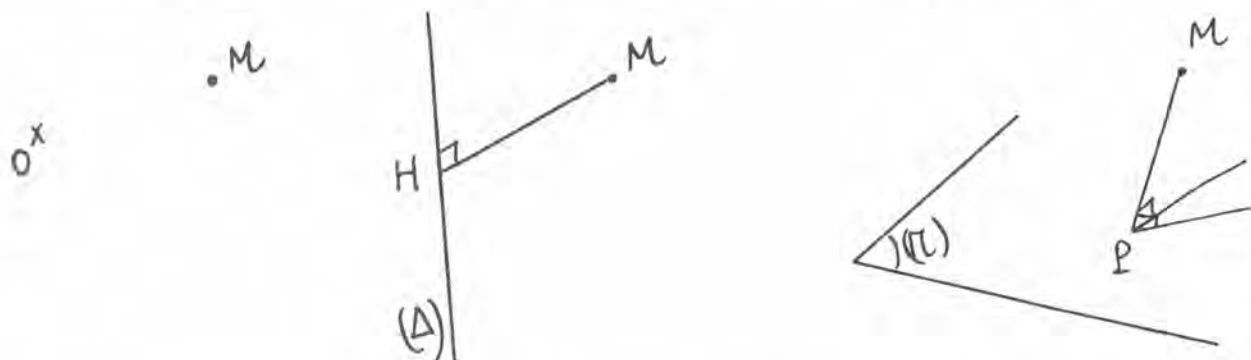
si bien que: $z_G = \frac{4}{3\pi} \cdot R$

Revenons au leçon de ces trois exemples: il est important, avant de se lancer dans les calculs, d'exploiter (: dans le cas d'un corps homogène) les propriétés de symétrie du corps, pour effectuer ensuite les calculs dans un système de coordonnées bien adapté.

3. Moments d'inertie d'un solide.

3.1 Etant donnée une masse ponctuelle m , placée en M , nous appelons moment d'inertie de cette masse, par rapport au point O , à l'axe (Δ) ou au plan (Π) les quantités suivantes:

$$I_0 = m \cdot OM^2, \quad I_\Delta = m \cdot HM^2, \quad I_\pi = m \cdot PM^2:$$



les points H et P désignant donc les projections orthogonales de M sur (Δ) et (π) respectivement.

Par sommation, nous pouvons définir les mêmes notions pour un système $\{M_j, m_j\}_{j=1}^k$ de points matériels:

$$I_0 = \sum_{j=1}^k m_j \cdot OM_j^2, \quad I_\Delta = \sum_{j=1}^k m_j \cdot HM_j^2, \quad I_\pi = \sum_{j=1}^k m_j \cdot PM_j^2$$

ou pour un solide $(\mathcal{G})$ de densité de masse ρ continue:

$$I_0 = \iiint_{(\mathcal{G})} \rho(M) \cdot OM^2 \cdot dv(M), \quad I_\Delta = \iiint_{(\mathcal{G})} \rho(M) \cdot HM^2 \cdot dv(M),$$

(7)

$$I_\pi = \iiint_{(\mathcal{G})} \rho(M) \cdot PM^2 \cdot dv(M)$$

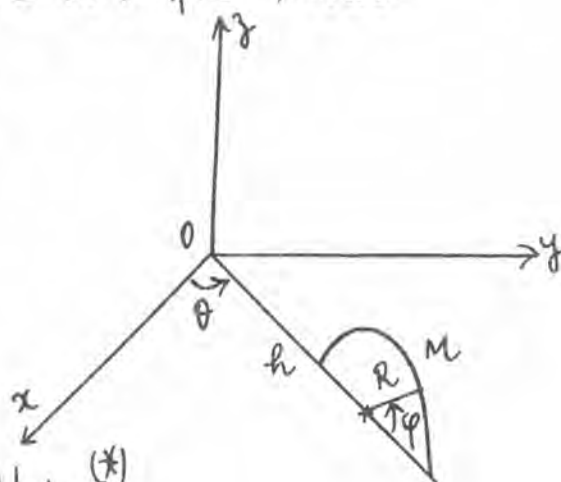
ou une combinaison des deux.

Exercice 3.1 : Calculer le moment d'inertie d'un cylindre de révolution homogène, par rapport à son axe.
(réponse: $m R^2/2$)

Exercice 3.2 : Calculer le moment d'inertie de la surface d'un demi-tore, limitée par le plan de l'équateur, supposée homogène, par rapport au centre du tore.

(indication: un point de la surface s'écrit:

$$\begin{cases} x = (h + R \cos \varphi) \cdot \cos \theta \\ y = (h + R \cos \varphi) \cdot \sin \theta \\ z = R \sin \varphi \end{cases}$$



ce qui conduit à l'élément d'aire: (*)

$$dS = R \cdot (h + R \cos \varphi) d\theta d\varphi.$$

réponse: $I_0 = m(h^2 + 3R^2).$

Exercice 3.3 : Calculer le moment d'inertie d'une barre rectiligne homogène, par rapport à son milieu.

(réponse: $I_0 = m l^2 / 12$)

[32] Étant donné un repère orthonormé $Oxyz$, nous avons clairement les relations suivantes entre les différents moments d'inertie:

$$I_0 = \iiint_{(V)} (x^2 + y^2 + z^2) \cdot \rho(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{(V)} x^2 \cdot \rho(x, y, z) dx dy dz + \iiint_{(V)} (y^2 + z^2) \cdot \rho(x, y, z) dx dy dz$$

(*) Module AN03, Leçon n° 11

soit: $I_0 = I_{0yz} + I_{0xz}$, et, de manière analogue:

$$(8) \quad I_0 = I_{0zx} + I_{0y} \quad , \quad I_0 = I_{0xy} + I_{0z}$$

Ensuite,

$$\begin{aligned} I_{0x} &= \iiint_{(V)} (y^2 + z^2) \cdot \rho(x, y, z) dx dy dz \\ &= \iiint_{(V)} y^2 \cdot \rho(x, y, z) dx dy dz + \iiint_{(V)} z^2 \cdot \rho(x, y, z) dx dy dz \end{aligned}$$

ce qui se lit:

$$I_{0x} = I_{0zx} + I_{0yx} \quad , \quad \text{et, de même:}$$

$$(9) \quad I_{0y} = I_{0xy} + I_{0zy} \quad , \quad I_{0z} = I_{0zx} + I_{0zy}$$

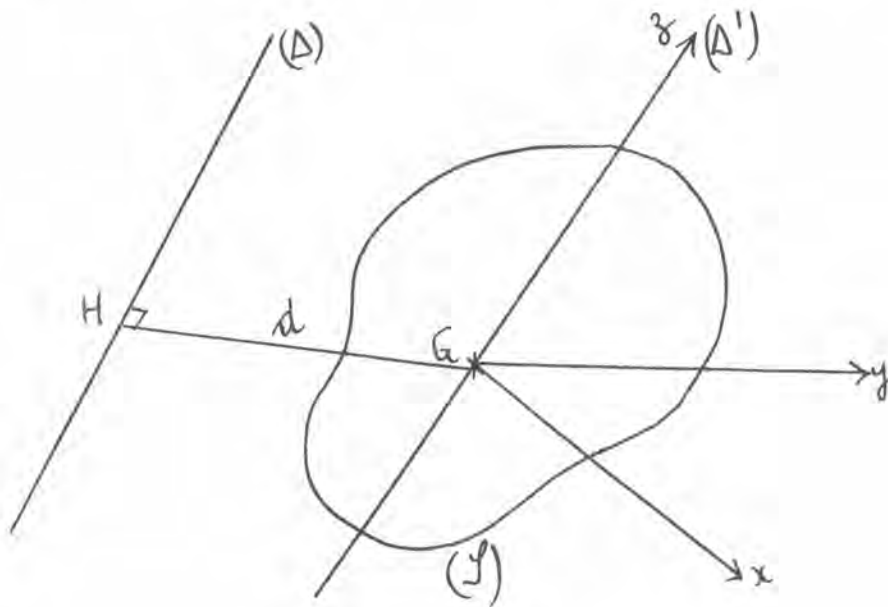
Exercice 3.4 : Dédurre des relations (8), (9) :

$$(10) \quad I_0 = I_{0xy} + I_{0yz} + I_{0zx}$$

$$(11) \quad I_0 = \frac{1}{2} (I_{0x} + I_{0y} + I_{0z})$$

3.3 Dans les Exercices 3.1, 3.2 et 3.3, nous avons effectué des calculs de moments d'inertie, par rapport à un élément de symétrie du corps étudié. L'énoncé suivant est intéressant, car il ramène rapidement le calcul à ce cas particulier:

Le moment d'inertie du corps (S) , par rapport à l'axe (Δ) peut s'obtenir en faisant la somme du moment d'inertie de (S) par rapport à l'axe (Δ') mené parallèlement à (Δ) au centre de gravité G de (S) , et du moment d'inertie par rapport à (Δ) de la masse m de (S) placée en G .



$$(12) \quad I_{\Delta} = I_{\Delta'} + m \cdot HG^2$$

Cette formule est connue sous le nom de formule de STEINER.

La démonstration repose sur un calcul, qui est simple à condition de choisir, comme toujours, un bon repère. Nous agit ici du repère $Gxyz$, centré en G , et tel que (Δ') soit l'axe Gz . Alors:

$$I_{\Delta'} = \iiint_{(S)} (x^2 + y^2) \cdot \rho \, dx \, dy \, dz = \iiint_{(S)} ((x-d)^2 + y^2) \cdot \rho \, dx \, dy \, dz +$$

$$2d \cdot \iiint_{(S)} x \cdot \rho \, dx \, dy \, dz - d^2 \cdot \iiint_{(S)} \rho \, dx \, dy \, dz$$

Soit, en traduisant:

$$\begin{aligned} I_{\Delta'} &= I_{\Delta} + 2d.m.x_G - d^2.m \\ &= I_{\Delta} - md^2 \end{aligned}$$

Donnons encore une définition: on appelle rayon de giration de (S) par rapport à (Δ) , la quantité:

$$\rho = \sqrt{\frac{I_{\Delta}}{m}}$$

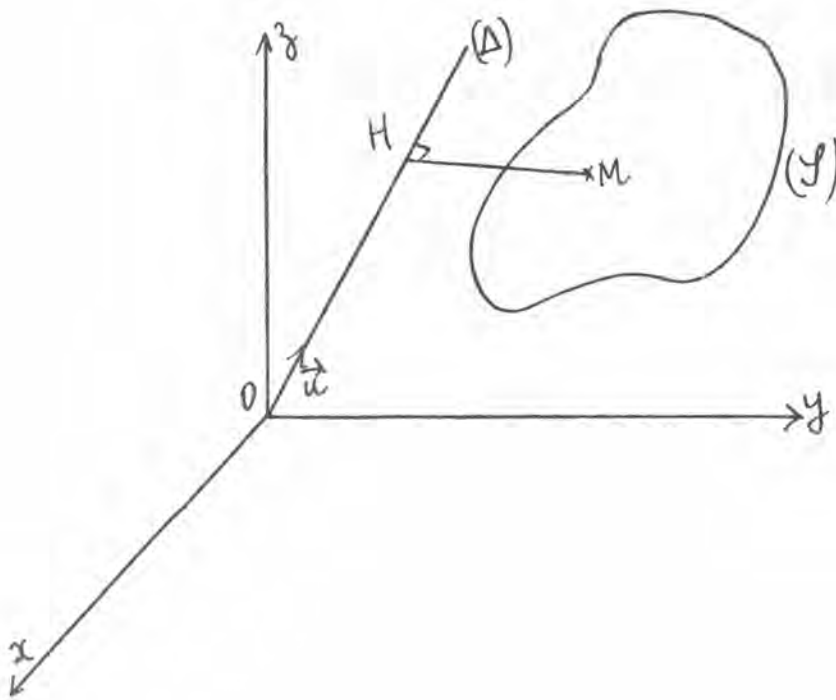
(: (S) a même moment que la masse totale localisée à la distance ρ de l'axe (Δ)).

4. L'ellipsoïde d'inertie d'un solide

La formule de STEINER permet de comprendre comment varie le moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe, lorsque celui-ci subit une translation. Nous allons maintenant étudier les effets d'une rotation autour d'un point fixe.

4.1 Afin de traiter analytiquement le problème, choisissons un repère orthonormé $Oxyz$ centré sur le point fixe de l'axe, et repérons ce dernier par un vecteur unitaire $\vec{u}$, de composantes α, β et γ ($\because \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$; α, β et γ sont les "cosinus directeurs de l'axe"):

$$\begin{aligned} \text{comme: } MH^2 &= \|\vec{MH} \wedge \vec{u}\|^2 = \|\vec{OM} \wedge \vec{u}\|^2 \\ &= (\gamma y - \beta z)^2 + (\alpha z - \gamma x)^2 + (\beta x - \alpha y)^2 \\ &= \alpha^2(y^2 + z^2) + \beta^2(z^2 + x^2) + \gamma^2(x^2 + y^2) \\ &\quad - 2\alpha\beta xy - 2\beta\gamma yz - 2\gamma\alpha zx \end{aligned}$$



il apparaît naturellement dans l'expression de :

$$I_{\Delta} = \iiint_{(S)} \rho \cdot MH^2 \cdot dv(M)$$

les quantités suivantes :

$$A = \iiint_{(S)} \rho \cdot (y^2 + z^2) dx dy dz = I_{Ox} \quad , \quad B = I_{Oy} \quad , \quad C = I_{Oz}$$

et :

$$D = \iiint_{(S)} \rho \cdot yz dx dy dz \quad , \quad E = \iiint_{(S)} \rho \cdot zx dx dy dz,$$

(13)

$$F = \iiint_{(S)} \rho \cdot xy dx dy dz$$

On obtient, avec ces notations :

$$(14) \quad I_{\Delta} = A.\alpha^2 + B.\beta^2 + C.\gamma^2 - 2D.\beta.\gamma - 2E.\gamma.\alpha - 2F.\alpha.\beta$$

Le moment d'inertie de $(\mathcal{G})$ par rapport à l'axe (Δ) apparaît donc comme une forme quadratique dans les composantes du vecteur $\vec{u}$. Écrivons cette forme quadratique matriciellement, en posant :

$$(15) \quad \mathcal{J} = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix} \quad \text{et :} \quad U = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

On aient :

$$(16) \quad I_{\Delta} = \widetilde{U} \cdot \mathcal{J} \cdot U$$

où $\widetilde{U} = (\alpha \quad \beta \quad \gamma)$ désigne la matrice transposée de U .

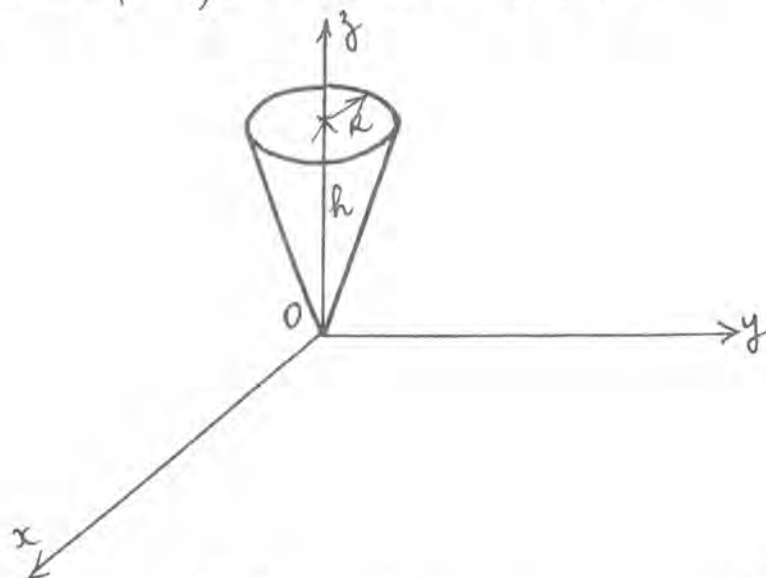
La matrice symétrique $\mathcal{J}$ est appelée matrice d'inertie du solide $(\mathcal{G})$. Pour tout axe (Δ) , I_{Δ} est naturellement un nombre positif : la forme quadratique associée à $\mathcal{J}$ est définie positive.

Exercice 4.1 : Écrire la matrice d'inertie d'un cône droit homogène, à base circulaire (dans un repère bien choisi).

Réponse :

$$\mathcal{J} = \frac{3}{10} m \cdot \begin{pmatrix} 2h^2(1 + \frac{1}{4}(\frac{R}{h})^2) & 0 & 0 \\ 0 & 2h^2(1 + \frac{1}{4}(\frac{R}{h})^2) & 0 \\ 0 & 0 & R^2 \end{pmatrix}$$

avec le repère, et les notations suivantes:



Exercice 4.2: Même question, pour un cylindre droit, à base circulaire, homogène.

4.2 Dans les deux exemples précédents, la matrice J prend une forme diagonale. D'une façon générale, il est toujours possible de réduire J sous forme diagonale, en s'aidant d'une matrice de passage orthogonale^(*).

Rappelons le procédé pratique de réduction, avant de l'illustrer sur un exemple.

L'équation caractéristique :

$$\det(J - \lambda \cdot I) = 0$$

admet trois racines réelles (λ_j) , appelées valeurs propres de J ; il est alors possible de trouver trois vecteurs V_j , tels que:

$$J \cdot V_j = \lambda_j \cdot V_j, \quad j = 1, 2, 3$$

(*) voir Module AG05

et qui définissent une base orthonormée de l'espace géométrique.

Exercice 4.3 : Un système matériel est formé de trois masses égales, disposées aux points : $M_1(1, 0, 0)$, $M_2(0, 1, 2)$ et $M_3(0, 2, 1)$. Calculer la matrice d'inertie. Réduisez-la.

(réponse:
$$J = 2m \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} = Q \cdot D \cdot Q^{-1}, \text{ avec:}$$

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

4.3 Considérons maintenant l'ensemble des points M de l'espace, de coordonnées x, y, z dans le repère orthonormé $Oxyz$, telle que, en posant:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

on ait:

$$\tilde{X} \cdot J \cdot X = 1$$

Autrement dit : si $OM = \lambda \cdot \vec{u}$, avec $\vec{u}$ unitaire, nous avons:

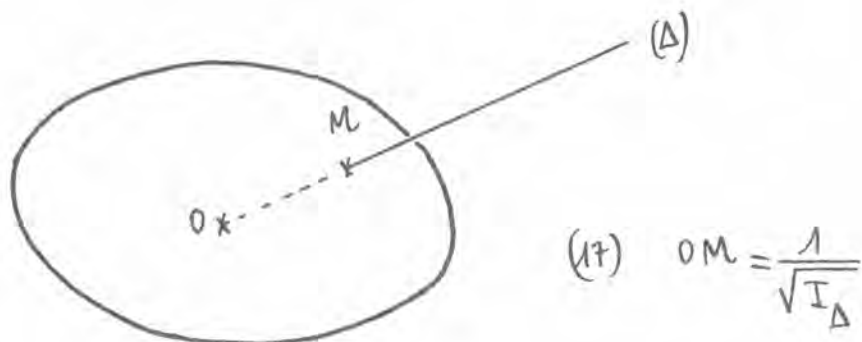
$\lambda^2 \cdot I_{\Delta} = 1$, d'après (16), si (Δ) désigne l'axe défini par $\vec{u}$, et le point M s'obtient donc en portant $\pm \frac{1}{\sqrt{I_{\Delta}}}$ sur (Δ) .

Rapportée au repère $OXYZ$ défini par les vecteurs $\vec{V}_1, \vec{V}_2$ et $\vec{V}_3$ associés aux valeurs propres de J (et appelés vecteurs propres), la relation $\tilde{X} \cdot J \cdot X = 1$ s'écrit:

$$\lambda_1 \cdot X^2 + \lambda_2 \cdot Y^2 + \lambda_3 \cdot Z^2 = 1$$

Il s'agit de l'équation d'un ellipsoïde ayant pour axes les directions propres de $\mathcal{I}$, c'est-à-dire les directions portées par les vecteurs propres, et pour longueurs des demi-axes $\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}$, $\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}$ et $\frac{1}{\sqrt{\lambda_3}}$.

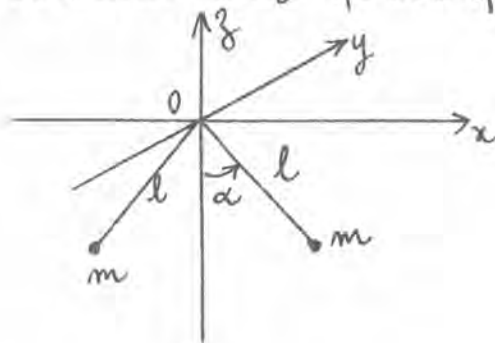
On appelle cet ellipsoïde l'ellipsoïde d'inertie de $(\mathcal{S})$. Le tracé de cet ellipsoïde permet de connaître la valeur du moment d'inertie de $(\mathcal{S})$, par rapport à n'importe quel axe issu de l'origine.



Pour bien comprendre l'intérêt de cette notion, le Lecteur doit par exemple tracer l'ellipsoïde d'inertie du cône étudié dans l'Exercice 4.1, et se rendre compte que, lorsque par exemple la hauteur h augmente, le rayon R restant constant, l'ellipsoïde s'affine dans la direction Oz .

Exercice 4.4 : Un homme porte deux masses à bout de bras. Étudier la déformation de l'ellipsoïde d'inertie lorsque l'homme lève les bras, en les écartant.

Solution : nous pouvons prendre le modèle suivant :



d'où $\mathcal{I} = 2ml \begin{pmatrix} \sin^2 \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos^2 \alpha \end{pmatrix}$

Après avoir étudié le mouvement cinématique, et la géométrie des masses, nous allons parler des grandeurs liées aux masses en mouvement dans l'espace : dans ce qui suit, et conformément aux notations de la partie cinématique, $O_1 x_1 y_1 z_1$ sera un repère fixe, et $Oxyz$ un repère mobile lié au solide en mouvement.

5. Quantité de mouvement et moment cinétique

5.1 Etant donné un point matériel M de masse m , en mouvement par rapport au repère $O_1 x_1 y_1 z_1$, sa quantité de mouvement est définie par le vecteur :

$$\vec{p} = m \cdot \vec{V}$$

où $V = V(M)_{/1}$ désigne la vitesse de M par rapport au repère $O_1 x_1 y_1 z_1$.

Maintenant, si $\{M_j, m_j\}_{j=1}^k$ est un système de masses ponctuelles en mouvement, sa quantité de mouvement est définie par :

$$\vec{p} = \sum_{j=1}^k m_j \cdot \vec{V}(M_j)$$

En dérivant l'expression (4) qui définit le centre de gravité du système, on obtient :

$$\vec{V}(G)_{/1} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^k m_j \cdot \vec{V}(M_j)_{/1}$$

d'où :

$$\vec{p} = m \cdot \vec{V}(G) \quad , \quad \text{où} \quad m = \sum_{j=1}^k m_j$$

D'une façon analogue, la quantité de mouvement d'un corps solide ($\mathcal{S}$) de densité de masse ρ , en mouvement par rapport au

repère $O_1 x_1 y_1 z_1$ s'obtient selon :

$$\begin{aligned}\vec{p} &= \iiint_{(S)} \rho(M) \vec{V}(M) dv(M) \\ &= \iiint_{(S)} \rho(M) \frac{d}{dt} \vec{O_1 M} dv(M) = \frac{d}{dt} \iiint_{(S)} \rho(M) \vec{O_1 M} dv(M)\end{aligned}$$

Soit, d'après la formule (5) :

$$\vec{p} = m \cdot \vec{V}(G)_{/1}$$

Ainsi, en tous cas, a-t-on :

La quantité de mouvement d'un système matériel est égale à celle de la masse totale du système, placée au centre de gravité du système. C'est la résultante cinétique du système.

5.2 Etant donné un point O de l'espace, nous appellerons moment cinétique de la masse ponctuelle m placée en M , le vecteur :

$$\vec{K}_O = \vec{OM} \wedge \vec{p}$$

Plus généralement, le moment cinétique du solide (S) de densité ρ , en mouvement par rapport au repère $O_1 x_1 y_1 z_1$, est défini par :

$$(18) \quad \vec{K}_O = \iiint_{(S)} \rho(M) \cdot \vec{OM} \wedge \vec{V}(M) dv(M)$$

Nous écrivons : $\vec{K}_{O/1}$ lorsqu'il deviendra nécessaire de signaler

par rapport à quel repère le moment cinétique est calculé.

Supposons que $(\mathcal{S})$ possède le point fixe O dans son mouvement par rapport à $O_1 x_1 y_1 z_1$: la formule (17) de la partie Cinématique nous donne le moyen de calculer le champ des vitesses de $(\mathcal{S})$ à l'aide du vecteur rotation instantané $\vec{\Omega}$:

$$\vec{V}(M) = \vec{\Omega} \wedge \vec{OM}$$

En explicitant les vecteurs dans le repère $Oxyz$ lié à $(\mathcal{S})$:

$$\vec{\Omega} = p \cdot \vec{i} + q \cdot \vec{j} + r \cdot \vec{k}$$

$$\vec{OM} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$$

nous obtenons :

$$\begin{aligned} \vec{OM} \wedge \vec{V}(M) &= \vec{OM} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{OM}) \\ &= (p(y^2+z^2) - qxy - ryz) \vec{i} + (q(z^2+x^2) - ryz - pzx) \vec{j} \\ &\quad + (r(x^2+y^2) - pzx - qxy) \vec{k} \end{aligned}$$

D'où, après multiplication par ρ et intégration :

$$\begin{aligned} \vec{K}_O &= (A.p - F.q - E.r) \vec{i} + (-F.p + B.q - D.r) \vec{j} \\ &\quad + (-E.p - D.q + C.r) \vec{k} \end{aligned}$$

où $A, \dots, F$ sont définies par (13).

En identifiant la matrice $\mathcal{I}$ d'inertie avec l'opérateur qu'elle définit dans $\mathbb{R}^3$, muni de sa base canonique, nous avons donc

montré que :

$$(19) \quad \vec{K}_0 = J(\vec{\Omega})$$

Nous retiendrons donc que, en général, les vecteurs $\vec{\Omega}$ et $\vec{K}_0$ ne définissent pas les mêmes directions : cette situation se présente seulement si $\vec{\Omega}$ est un vecteur propre de J , c'est-à-dire si $\vec{\Omega}$ est porté par un axe principal d'inertie du solide.

Exercice 5.1 : Un cône homogène de révolution, ayant son sommet O fixe, tourne autour de l'une de ses génératrices, supposée fixe. Comment choisir R et h pour que $\vec{K}_0$ et $\vec{\Omega}$ soient colinéaires?

5.3 Prenons les directions portées par $\vec{\Omega}$ et $\vec{K}_0$, relativement à l'ellipsoïde d'inertie $(\mathcal{E})$ du solide.

Soit M le point de $(\mathcal{E})$ défini par : $\vec{OM} = \mu \cdot \vec{\Omega}$.

Si $\vec{\Omega} = \omega \cdot \vec{u}$, et si (Δ) désigne l'axe défini par le vecteur unitaire $\vec{u}$, d'après la formule (17), nous avons :

$$\mu = \frac{1}{\omega \cdot \sqrt{I_{\Delta}}}$$

D'autre part, nous savons (*) que la normale en M , de coordonnées x, y, z à $(\mathcal{E})$ est portée par le vecteur :

$$\vec{\nabla} f(M)$$

$$\text{où } f(x, y, z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 2Dyz - 2Ezx - 2Fxy - 1$$

(*) voir MODULE AN03, leçon n°6

ce qui donne ici :

$$\vec{\nabla} f(M) = 2(Ax - Ez - Fy) \vec{x} + 2(By - Dz - Fx) \vec{y} + 2(Cz - Dy - Ex) \vec{z}$$

soit :

$$(20) \vec{\nabla} f(M) = 2\mu \cdot \vec{K}_0$$

Nous avons établi le résultat suivant :

Le moment cinétique en O est perpendiculaire au plan tangent à l'ellipsoïde d'inertie au point d'intersection de ce dernier avec l'axe défini par le vecteur rotation instantané.

5.4 Nous avons appris à étudier le moment cinétique du solide (S) dans un mouvement au cours duquel (S) possède un point fixe. Nous allons maintenant expliquer comment varie le moment cinétique en fonction du point O :

$$\vec{K}_0 = \iiint_{(S)} \rho(M) \cdot \vec{OM} \wedge \vec{V}(M) dv(M)$$

se développe, en écrivant : $\vec{OM} = \vec{OG} + \vec{GM}$

et : $\vec{V}(M) = \vec{V}(G) + \vec{\Omega} \wedge \vec{GM}$, selon :

$$\vec{K}_0 = \vec{OG} \wedge \iiint_{(S)} \rho(M) \cdot \vec{V}(M) dv(M) + \iiint_{(S)} \rho(M) \cdot \vec{GM} \wedge (\vec{V}(G) + \vec{\Omega} \wedge \vec{GM}) dv(M)$$

En développant la seconde intégrale, nous obtenons:

$$(21) \quad \vec{K}_O = \vec{OG} \wedge \vec{P} + \vec{K}_G$$

car:

$$\iiint_{(G)} \rho(M) \cdot \vec{GM} \, dv(M) = 0$$

Ces calculs sont effectués par rapport au repère fixe $O_1 x_1 y_1 z_1$. Introduisons maintenant le repère $G x_2 y_2 z_2$, centré en G , et déduit du repère $O_1 x_1 y_1 z_1$ par la translation $\vec{O_1 G}$. Alors, d'après la formule de composition (21) de la partie Cinématique, nous avons:

$$\begin{aligned} \vec{\Omega}_{1/1} &= \vec{\Omega}_{1/2} + \vec{\Omega}_{2/1} \\ &= \vec{\Omega}_{1/2}, \text{ puisque } \vec{\Omega}_{2/1} = 0 \text{ par construction} \end{aligned}$$

Il faut bien que le moment $\vec{K}_G$ peut se calculer à l'aide de la formule (19):

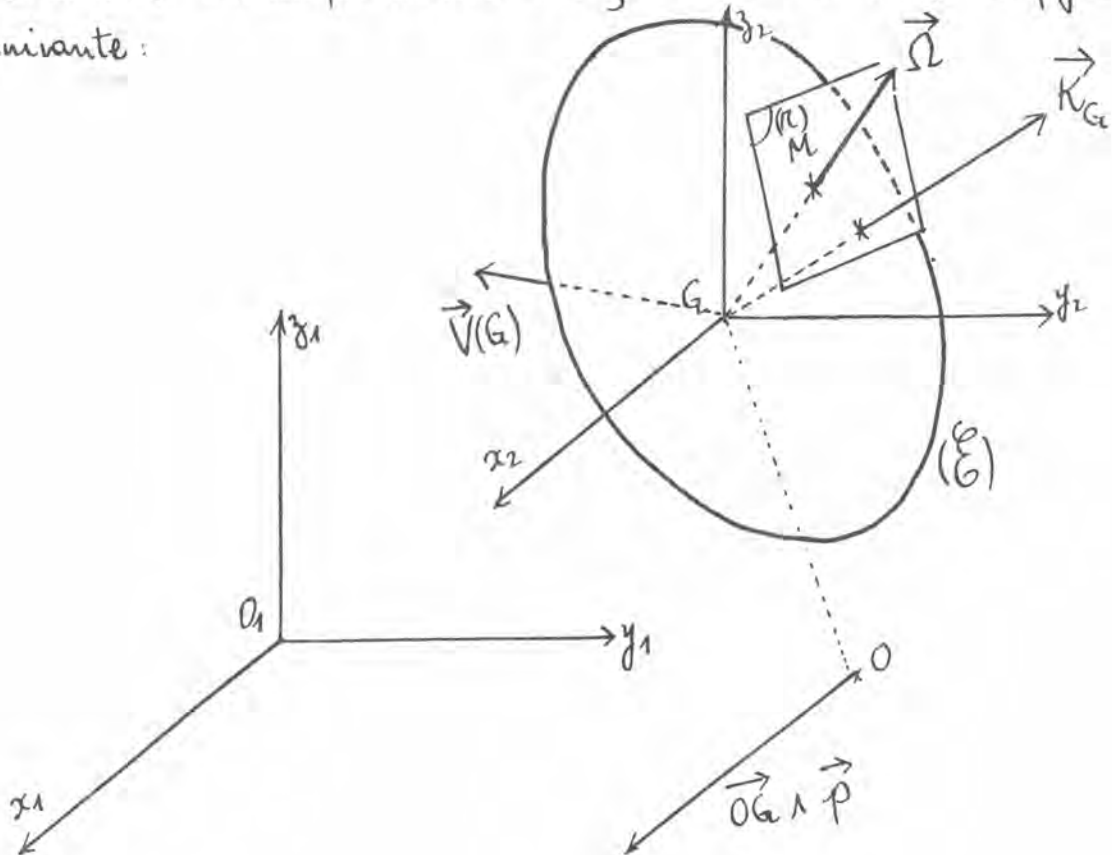
$$\vec{K}_G = J(\vec{\Omega}_{1/2})$$

où J désigne la matrice d'inertie de (G) dans le repère $G x_2 y_2 z_2$.

La formule (21) s'énonce sous la forme suivante:

Le moment cinétique en O est égal au moment cinétique en G (dans le mouvement du solide autour de son centre de gravité), augmenté du moment cinétique en O de la masse totale du solide placée en G . ("théorème de KÖNIG")

Résumons les informations des § 5.3 et 5.4 dans la figure suivante :



6. Énergie cinétique

Rappelons que la force vive d'un point matériel M de masse m animé d'un mouvement, avec la vitesse V est définie par :

$$2T = m \cdot V^2$$

La quantité T est l'énergie cinétique de la particule.

L'énergie cinétique d'un solide ($\mathcal{S}$) en mouvement s'obtient par sommation, selon la formule:

$$(22) \quad T = \frac{1}{2} \iiint_{(\mathcal{S})} \rho(M) \cdot V^2(M) \cdot dv(M)$$

où $V^2(M)$ désigne le carré de la longueur du vecteur $\vec{V}(M)$

6.1 Comme dans le § 5.3, désignons par $Gx_2y_2z_2$ le repère déduit du repère fixe $O_1x_1y_1z_1$ par la translation O_1G . La formule (13) de composition des vitesses, vue dans la partie cinématique, s'écrit:

$$\vec{V}(M)_{11} = \vec{V}(M)_{12} + \vec{V}(M^{(2)})_{11}$$

où : $\vec{V}(M^{(2)})_{11} = \vec{V}(G)_{11}$, puisque $\vec{\Omega}_{2/1} = 0$ par construction.
Ainsi :

$$V^2(M)_{11} = V^2(M)_{12} + 2 \vec{V}(M)_{12} \cdot \vec{V}(G)_{11} + V^2(G)_{11}$$

Ce qui donne, après multiplication par la densité de masse ρ et intégration sur ($\mathcal{S}$):

$$2T = \iiint_{(\mathcal{S})} \rho(M) \cdot V^2(M)_{12} \cdot dv(M) + m \cdot V^2(G)_{11}$$

$$\text{car : } \iiint_{(\mathcal{S})} \rho(M) \cdot \vec{V}(M)_{12} \cdot \vec{V}(G)_{11} \cdot dv(M) = \iiint_{(\mathcal{S})} \rho(M) \cdot \vec{V}(M)_{12} \cdot dv \cdot \vec{V}(G)_{11}$$

où :

$$\iiint_{(V)} \rho(M) \cdot \vec{V}(M)_{/2} dv(M) = \iiint_{(V)} \rho(M) \cdot \left. \frac{d}{dt} \right|_{/2} \vec{GM} \cdot dv(M)$$

le symbole $\left. \frac{d}{dt} \right|_{/2}$ signifiant que la dérivée est effectuée en supposant le repère $Gx_2y_2z_2$ fixe (: voir la formule (12) de la partie cinématique).

$$= \left. \frac{d}{dt} \right|_{/2} \iiint_{(V)} \rho(M) \vec{GM} \cdot dv(M)$$

et cette dernière intégrale vaut 0, d'après la définition (5) du centre de gravité G.

La formule démontrée :

$$(23) \quad 2T_{/1} = 2T_{/2} + m \cdot V^2(G)_{/1}$$

constitue un autre théorème de KÖNIG, qu'on peut énoncer ainsi :

L'énergie cinétique d'un solide s'obtient en ajoutant à l'énergie cinétique dans le mouvement autour du centre de gravité, l'énergie cinétique de la masse totale du solide concentrée au centre de gravité.

[6.2] Il s'agit maintenant d'expliquer l'énergie cinétique d'un solide qui possède un point fixe O.

Désignant comme toujours par $\vec{\Omega}$ le vecteur rotation instantané, le champ des vitesses s'obtient à l'aide de la formule (17) de la Cinématique:

$$\vec{V}(M) = \vec{\Omega} \wedge \vec{OM} \quad , \quad \text{puisque } \vec{V}(O) = 0 \text{ par hypothèse.}$$

Calculons donc:

$$\begin{aligned} V^2(M) &= (\vec{\Omega} \wedge \vec{OM}) \cdot (\vec{\Omega} \wedge \vec{OM}) \\ &= (\vec{\Omega}, \vec{OM}, \vec{\Omega} \wedge \vec{OM}) \quad (*) \\ &= \vec{\Omega} \cdot [\vec{OM} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{OM})] \end{aligned}$$

Il vient donc:

$$2.T = \vec{\Omega} \cdot \iiint_{(V)} \rho(M) \cdot [\vec{OM} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{OM})] \cdot dv(M)$$

Soit, d'après (18):

$$2.T = \vec{\Omega} \cdot \vec{K}_0 \quad \text{ou: (24)} \quad T = \frac{1}{2} \vec{\Omega} \cdot \vec{K}_0$$

Jointe à la formule (23), cette formule conduit donc à l'expression suivante de l'énergie cinétique d'un solide:

$$(25) \quad T = \frac{1}{2} m \cdot V(G)^2 + \frac{1}{2} \vec{\Omega} \cdot \vec{K}_0$$

(*) voir Leçon VI du MODULE AG-1

$$\frac{OM}{Oa} = \frac{OH}{Ob}$$

$$\text{on : } Ob = \vec{K}_0 \cdot \vec{u} = \frac{1}{\omega} \cdot \vec{K}_0 \cdot \vec{\Omega} = \frac{2T}{\omega} = \omega \cdot I_D.$$

Il vient donc:

$$(26) \begin{cases} K_0 = Oa = \frac{OM \cdot Ob}{OH} = \frac{\omega}{OM \cdot OH} \\ \sqrt{2T} = \frac{\omega}{OM} = K_0 \cdot OH \end{cases}$$

Ceinsi, la connaissance de l'ellipsoïde d'inertie en un point donné permet-elle de calculer les différentes grandeurs cinétiques (moment et énergie) du solide, dans son mouvement autour du point, à partir du vecteur rotation instantané (: grandeur cinématique!).

Exercice 6.1 : On reprend le dispositif de l'exercice 4.3 de la Cinématique. Calculer l'énergie cinétique de l'anneau (Σ) en fonction de $\dot{\theta}$, $\dot{\varphi}$, de la masse m de (Σ), et des rayons r et R de (Σ) et de ($\mathcal{P}$).

(réponse:

$$T = \frac{1}{2} m \left[(R^2 + r^2/4) \cdot (\dot{\theta})^2 + r^2/2 \cdot (\dot{\varphi})^2 \right])$$

Dynamique

1. La loi fondamentale de la Mécanique Classique.

1.1 Rappelons (*) que la Mécanique du point matériel est basée sur le principe de base suivant:

Il existe un repère géométrique, dit repère absolu, et un repère temporel, dit temps absolu, pour lesquels le mouvement d'un point matériel M , de masse m , et soumis à un système de forces de résultante $\vec{F}_{\text{ext}}$, est tel que l'accélération $\vec{\Gamma}$ soit donnée par:

$$(1) \quad \vec{F}_{\text{ext.}} = m \cdot \vec{\Gamma}$$

Par conséquent, la connaissance de la position et de la vitesse du point matériel à l'instant initial $t=0$ détermine entièrement le mouvement.

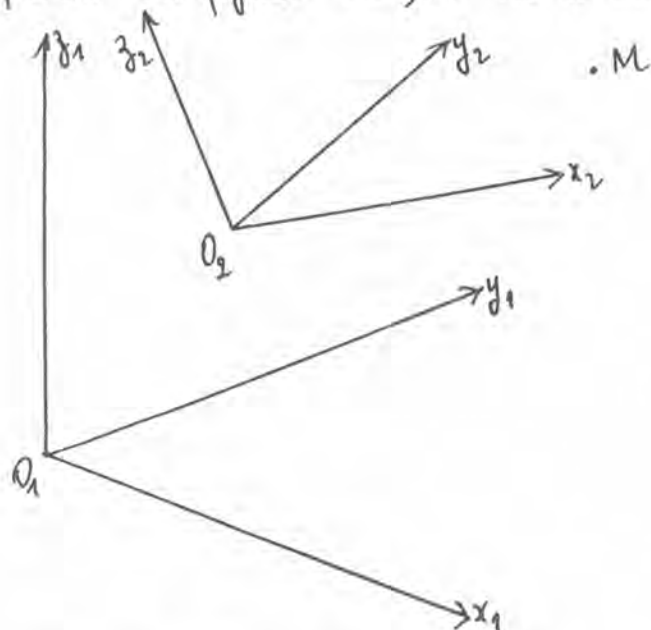
C'est la loi de NEWTON, formulée dans les "Principia" en 1687, et qui a permis à l'auteur, avec la loi d'attraction universelle, également découverte par lui, d'expliquer les lois que KÉPLER (1571-1630) avait déduites des observations de COPERNIC (1473-1543) et de TYCHO-BRAHÉ (1546-1601), afin d'expliquer le mouvement des planètes. L'exploitation complète de cette loi dut cependant attendre le développement de la théorie des équations différentielles, et en particulier les travaux d'EULER (1707-1783).

(*) nous renvoyons le Lecteur au Chapitre 4 du MODULE PH2.

Dans la recherche d'un repère absolu, pour lequel la loi de NEWTON conduit à des résultats compatibles avec l'expérience, on a été conduit à choisir un repère lié à la Terre (: ce qui est suffisant pour expliquer les phénomènes se déroulant à sa surface, et de toute durée), puis un repère centré au centre de gravité de la Terre, et dont les axes sont dirigés vers des étoiles fixes (: mieux adapté à l'étude des phénomènes de longue durée, comme celui mis en évidence par l'expérience de FOUCAULT), enfin un repère dit de COPERNIC, ou sidéral, centré au centre de gravité du système solaire et dont les axes sont fixes par rapport aux étoiles (: adopté à la Mécanique Céleste).

Ces différents repères sont en mouvement les uns par rapport aux autres, et c'est la partie Cinématique qui va nous permettre de comprendre comment modifier la loi de NEWTON, lorsqu'on veut l'écrire dans un repère quelconque.

Reprenons la figure du §2. de la Cinématique :



$O_1 x_1 y_1 z_1$ est un repère absolu, $O_2 x_2 y_2 z_2$ un repère mobile. D'après la formule (15), nous avons :

$$\vec{\Gamma}(M)_{1/1} = \vec{\Gamma}(M)_{1/2} + \vec{\Gamma}(M)_{2/1} + \vec{\Gamma}_c(M)$$

si bien que la loi de NEWTON s'écrit:

$$\vec{F}_{\text{ext.}} = m \vec{\Gamma}(M)_{1/2} + m \vec{\Gamma}(M)_{2/1} + m \vec{\Gamma}_c(M)$$

Où encore:

$$\vec{F} = m \vec{\Gamma}(M)_{1/2}$$

mais, naturellement:

$$(2) \quad \vec{F} = \vec{F}_{\text{ext.}} + \vec{F}_{\text{ent.}} + \vec{F}_c$$

où l'on a posé:

$$(3) \quad \vec{F}_{\text{ent.}} = -m \vec{\Gamma}(M)_{2/1} = -m \vec{\Gamma}_e(M)$$

$$(4) \quad \vec{F}_c = -m \vec{\Gamma}_c(M)$$

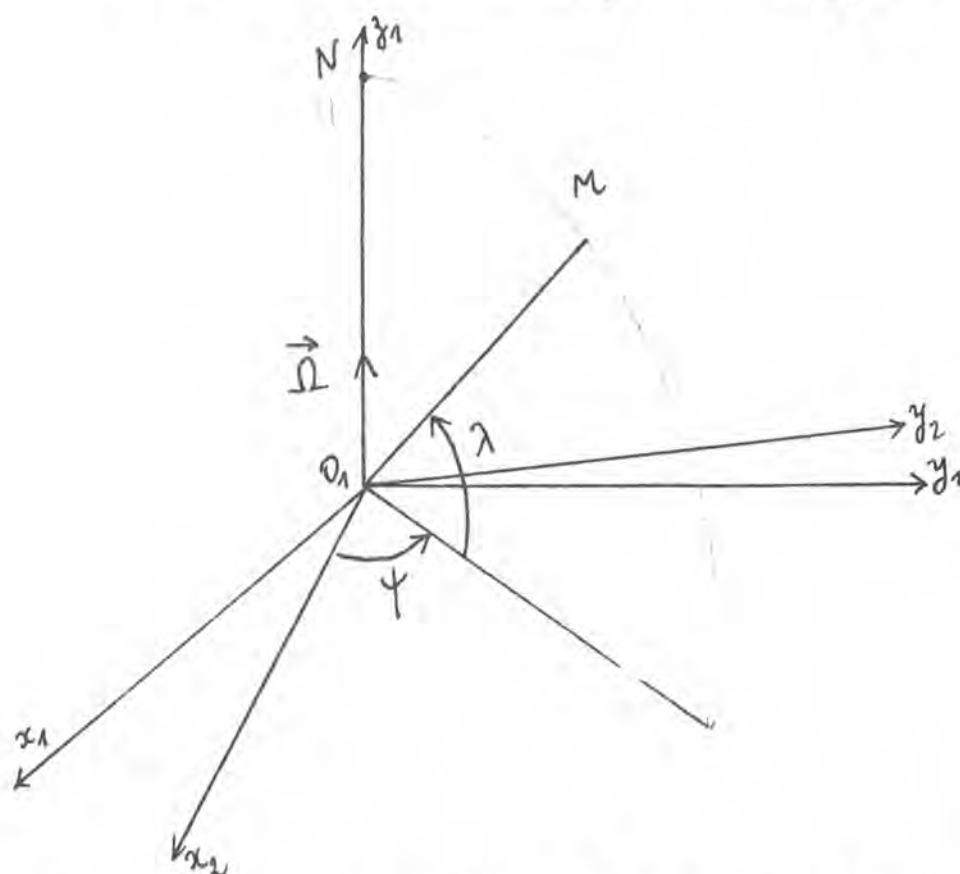
quantités appelées respectivement force d'inertie d'entraînement et force d'inertie complémentaire, ou de CORIOLIS. (*)

1.2 La plus belle illustration de ce qui précède est le phénomène de déviation dans la chute libre des corps à la surface de la Terre, phénomène dû à la rotation de celle-ci sur elle-même. Cet exemple est longuement développé dans le Chapitre 5 du MODULE PH2, et nous y renvoyons le Lecteur, et nous contentant ici de quelques

(*) voir les commentaires, p. 49 et suivantes, du MODULE PH2.

remarques et services.

Fixons d'abord les notations, sur une figure :



$O_1 x_1 y_1 z_1$ est un repère absolu, $O_1 x_2 y_2 z_2$ est lié à la Terre : il est animé par rapport au repère absolu, d'un mouvement de rotation autour de l'axe Sud-Nord, de vitesse qu'on admet constante,

$$\omega = \frac{2\pi}{24 \times 3600} \cong 7,3 \times 10^{-5} \text{ rad/s.}$$

Le point M de la surface terrestre est repéré par ses coordonnées sphériques : R (rayon de la Terre), ψ (longitude) et λ (latitude).

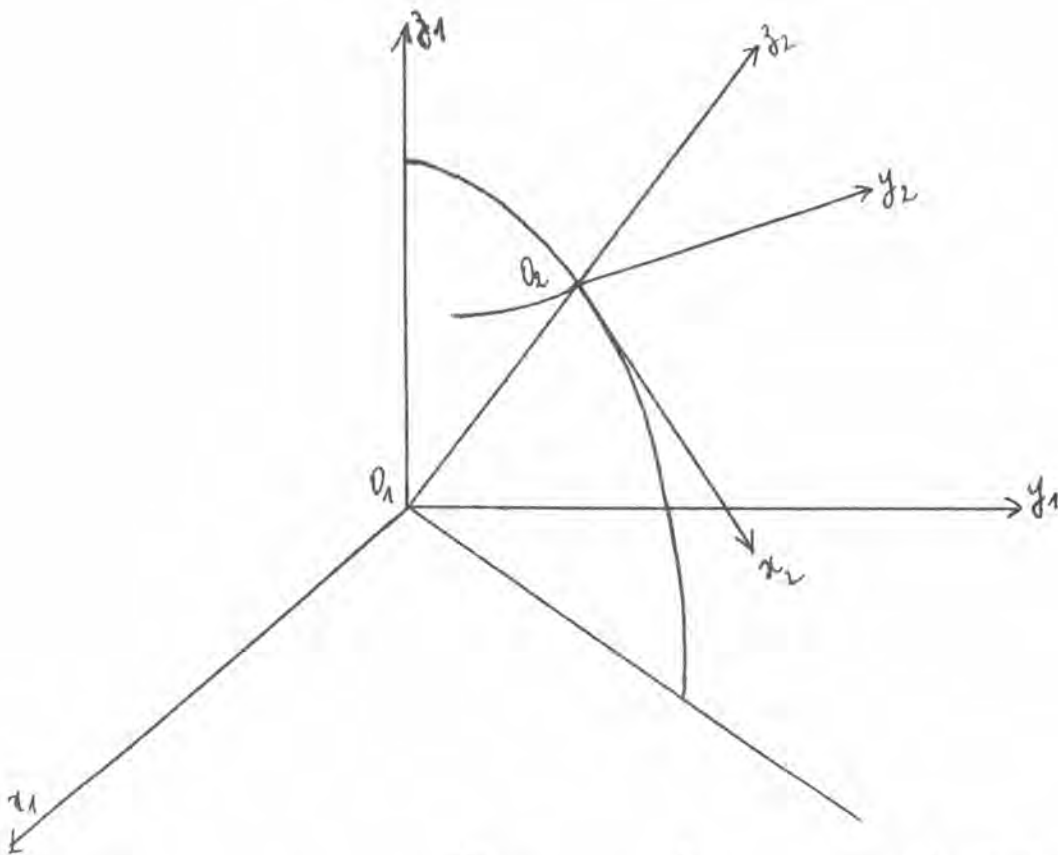
Si $\vec{V}$ ($= \vec{V}(M)_{12}$) désigne la vitesse relative de M par rapport à la Terre, les forces d'inertie sont :

$$(5) \quad \begin{aligned} \vec{F}_{\text{ent.}} &= -m \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{OM}) \quad , \text{ d'après (18)} \\ \vec{F}_c &= -2m \vec{\Omega} \wedge \vec{V} \quad , \text{ d'après (20) de la Cinématique.} \end{aligned}$$

Exercice 1.1 : Soit M un point de l'équateur, immobile par rapport à la Terre. Représenter les forces d'inertie, et calculer l'importance relative de la force d'inertie centrifuge par rapport au poids. ($R = 6400 \text{ km}$).

Exercice 1.2 : On lâche, sans lui imprimer de vitesse initiale, une pierre dans un puits de 250 m de profondeur, à NANCY. Calculer l'écart du point de chute par rapport à la verticale.

Solution : un repère mobile $O_2 x_2 y_2 z_2$ lié à la Terre et bien adapté au problème est celui centré à l'entrée du puits, et dont les axes $O_2 x_2$ et $O_2 y_2$ sont tangents respectivement au méridien et au parallèle en O_2 :



D'après NEWTON, $m \vec{\Gamma}(M)_{/2} = \vec{F}_{\text{ext}} - m \omega^2 \vec{k}_1 \wedge (\vec{k}_1 \wedge \vec{O}_2 \vec{M})$
 $- 2m \omega \vec{k}_1 \wedge \vec{V}$, où :

III-6

$$\begin{aligned}\vec{k}_1 \wedge (\vec{k}_1 \wedge \vec{O}_2 \vec{M}) &= \vec{k}_1 \wedge (\vec{k}_1 \wedge \vec{O}_1 \vec{M}) \\ &= (\vec{k}_1 \cdot \vec{O}_1 \vec{M}) \vec{k}_1 - \vec{O}_1 \vec{M} \\ &= -\vec{HM}\end{aligned}$$

Nous avons donc, en incluant dans $\vec{g}$ le terme $\vec{\omega} \wedge \vec{HM}$ (petit par rapport à la pesanteur, d'après l'exercice 1.1) :

$$\vec{\Gamma}(M)_{12} = \vec{g} - 2\omega \vec{k}_1 \wedge \vec{V}$$

En posant : $\vec{O}_2 \vec{M} = x \cdot \vec{i}_2 + y \cdot \vec{j}_2 + z \cdot \vec{k}_1$, la relation précédente s'écrit selon :

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} + 2\omega \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -\cos \lambda \\ 0 \\ \sin \lambda \end{pmatrix}$$

soit :

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2\omega \sin \lambda \cdot \dot{y} \\ \ddot{y} = -2\omega \sin \lambda \cdot \dot{x} - 2\omega \cos \lambda \cdot \dot{z} \\ \ddot{z} = -g + 2\omega \cos \lambda \cdot \dot{y} \end{cases}$$

Nous avons là un système d'équations différentielles linéaires à coefficients constants (*), qui, compte tenu des conditions initiales :

$$x(0) = y(0) = z(0) = 0$$

$$\dot{x}(0) = \dot{y}(0) = \dot{z}(0) = 0$$

s'intègre facilement, pour donner, après une première quadrature :

(*) Leçon n°9 du MODULE AN04

$$\begin{cases} \dot{x} = 2\omega \sin \lambda \cdot y \\ \ddot{y} = -2\omega \sin \lambda \cdot \dot{x} - 2\omega \cos \lambda \cdot \dot{z} \\ \dot{z} = -gt + 2\omega \cos \lambda \cdot y \end{cases}$$

Reportant les valeurs de $\dot{x}$ et de $\dot{z}$ dans l'expression de $\ddot{y}$, nous obtenons:

$$\ddot{y} + 4\omega^2 y = 2\omega \cos \lambda \cdot gt$$

Compte tenu des conditions initiales $y(0) = \dot{y}(0) = 0$, cela donne:

$$y = \frac{g \cos \lambda}{4\omega^2} (2\omega t - \sin(2\omega t))$$

En remplaçant alors y par sa valeur dans $\dot{x}$ et $\dot{z}$, il est enfin possible d'obtenir:

$$\dot{x} = \frac{g \sin 2\lambda}{8\omega^2} (-1 + 2\omega^2 t^2 + \cos(2\omega t))$$

$$\dot{z} = \frac{g}{4\omega^2} (-2\omega^2 t^2 + \cos^2 \lambda (-1 + 2\omega^2 t^2 + \cos(2\omega t)))$$

L'instant t_1 de la chute au fond du puits est la solution positive de l'équation:

$$z(t_1) = -h$$

Soit:

$$\omega^2 \sin^2 \lambda \cdot t^2 + \cos^2 \lambda \cdot \sin^2(\omega t) = \frac{2\omega^2}{g} h$$

Écrivons cette équation sous la forme:

$$f(\omega, t) = 0$$

où $f(\omega, t)$ est la fonction définie par:

$$f(\omega, t) = \begin{cases} \sin^2 \lambda \cdot t^2 + \omega^2 \lambda \cdot \left(\frac{\sin \omega t}{\omega} \right)^2 - \frac{2h}{g}, & \text{si } \omega \neq 0 \\ t^2 - \frac{2h}{g} & \text{en } (0, t) \end{cases}$$

Il s'agit donc de résoudre l'équation implicite $f(\omega, t) = 0$: le Lecteur vérifiera que les conditions d'application du théorème de la Leçon n°6 du MODULE AN03 sont vérifiées. Nous sommes donc assurés de l'existence d'une seule solution $t_1(\omega)$, qui est dérivable en $\omega = 0$. De plus, il est facile de voir que :

$$t_1(0) = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

(c'est le temps de chute, en négligeant l'effet de la rotation terrestre ; l'équation à résoudre s'écrit $f(0, t) = t^2 - \frac{2h}{g} = 0$). ω étant petit, $\sqrt{\frac{2h}{g}}$ peut être prise comme valeur approchée de t_1 , ce qui conduit à la déviation vers l'Est :

$$\gamma(t_1(0)) = \frac{g \cos \lambda}{4\omega^2} \cdot (2\omega t_1(0) - \sin 2\omega t_1(0))$$

soit, en effectuant un développement limité en ω :

$$\gamma(t_1(0)) \sim \frac{2}{3} \cos \lambda \cdot h \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Le théorème des fonctions implicites, cité ci-dessus, permet de préciser la déviation, mais, vu la petite valeur de $\gamma(t_1(0))$, nous pouvons nous contenter de celle-ci.

1.3] D'après l'expression des forces d'inertie, tout repère animé d'un mouvement de translation uniforme par rapport à un repère absolu, est lui-même un repère absolu. Ainsi, les lois de la Mécanique seront-elles les mêmes dans les deux repères : ce phénomène ayant été découvert par GALILÉE (1564-1642), on parle de repère galiléen.

2. Les théorèmes fondamentaux de la Mécanique du solide

2.1] Considérons un système matériel constitué de k points $M_1, M_2, \dots, M_k$, de masses respectives $m_1, m_2, \dots, m_k$, soumis à l'action des forces extérieures $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_k$, et en mouvement par rapport à un repère galiléen O, x, y, z . En écrivait la loi de NEWTON pour chaque point, et en sommant, nous obtenons :

$$\sum_{j=1}^k \vec{F}_j = \sum_{j=1}^k m_j \vec{\Gamma}_j = \frac{d^2}{dt^2} \sum_{j=1}^k m_j \vec{O}M_j = \frac{d^2}{dt^2} (\vec{p})$$

où $\vec{p}$ désigne la quantité de mouvement du système.

En considérant un solide au lieu d'un système matériel, on obtiendrait un résultat analogue. Ceci constitue le :

Théorème de la résultante cinétique :

La vitesse de la résultante cinétique d'un solide en mouvement par rapport à un repère galiléen est égale à la résultante des forces extérieures s'exerçant sur le solide :

$$(6) \quad \boxed{\vec{F}_{\text{ext}} = \frac{d\vec{p}}{dt}}$$

Vue l'expression de $\vec{p}$ obtenue au § 5.1 de la partie Cinétique, le résultat prend encore la forme suivante :

Théorème du mouvement du centre de gravité :

Le centre de gravité d'un solide en mouvement par rapport à un repère galiléen se déplace comme si toute la masse du solide y était concentrée, et comme si la résultante des forces extérieures y était appliquée :

$$(7) \quad \boxed{\vec{F}_{\text{ext}} = m \cdot \vec{\Gamma}(G)}$$

2.2. Soit maintenant O un point fixe du repère galiléen O, x, y, z , par rapport auquel est étudié le mouvement du solide. Toujours en intégrant la loi de NEWTON, nous avons :

$$\begin{aligned} \iiint_{(\mathcal{V})} \vec{OM} \wedge \vec{F}(M) \, dv(M) &= \iiint_{(\mathcal{V})} \vec{OM} \wedge \rho(M) \vec{\Gamma}(M) \, dv(M) \\ &= \frac{d}{dt} \iiint_{(\mathcal{V})} \vec{OM} \wedge \rho(M) \vec{V}(M) \, dv(M) \end{aligned}$$

$\rho(M)$ désignant comme d'habitude la densité de masse de $(\mathcal{V})$ en M , et $\vec{F}(M)$ la valeur du champ de forces extérieures en M .

Dans l'intégrale de droite, nous reconnaissons l'expression (18) du moment cinétique $\vec{K}_O$ de $(\mathcal{V})$ par rapport à O , l'expression de gauche étant le moment des forces extérieures au même point.

Nous avons établi le :

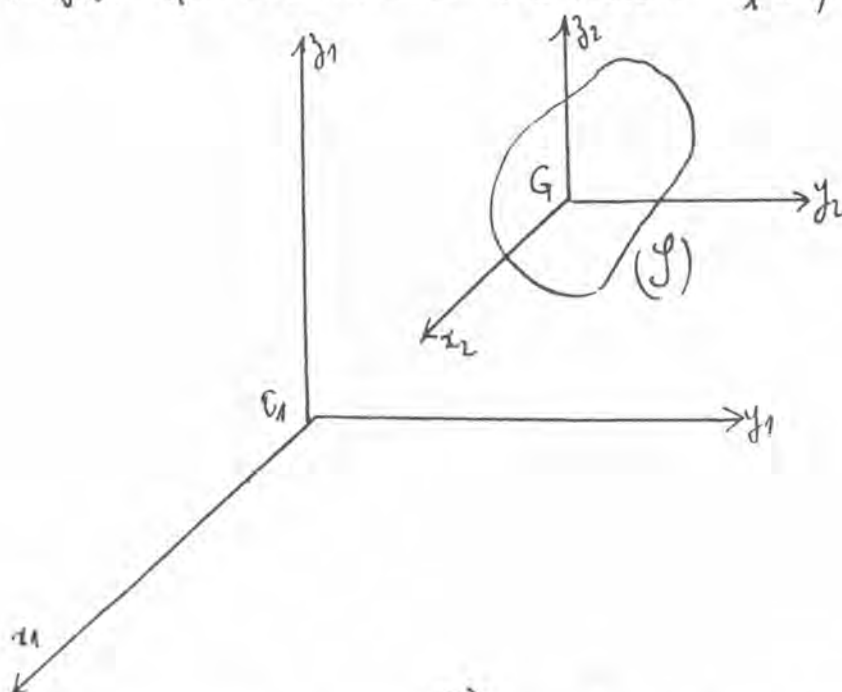
Théorème du moment cinétique :

La vitesse du moment cinétique, en un point fixe, d'un solide en mouvement par rapport à un repère galiléen, est égale au moment des forces extérieures au même point :

$$(8) \quad \boxed{\vec{M}_{\text{ext}}^{(0)} = \frac{d}{dt}(\vec{K}_0)}$$

Ces énoncés restent valables dans un repère non galiléen, à condition d'inclure dans les forces extérieures les forces d'inertie.

Cependant, si nous considérons comme repère mobile, le repère centré au centre de gravité G de (S) , et déduit du repère galiléen $O_1 x_1 y_1 z_1$ par la translation de vecteur $\vec{O}_1 G$,



comme par construction, $\vec{\Omega}_{2/1} = 0$, d'après (18) de la partie cinématique, $\vec{\Gamma}^{(0)}(M) = \vec{\Gamma}^{(G)}(M) = \vec{\Gamma}^{(G)}(G)_{11}$, et d'après (20) de la même partie, $\vec{\Gamma}_c^{(0)}(M) = 0$.

Par conséquent :

$$\iiint_{(\mathcal{V})} F_{\text{ext.}}(M) \cdot dv(M) = -m \cdot \Gamma(G)_{/1}$$

$$\iiint_{(\mathcal{V})} F_c(M) \cdot dv(M) = 0$$

et le moment en G des forces d'inertie est nul. Nous avons démontré le :

Théorème du mouvement du solide autour de son centre de gravité :

Dans l'étude du mouvement du solide autour de son centre de gravité, le théorème du moment cinétique en G s'applique comme dans un repère galiléen :

$$(9) \quad \boxed{\vec{M}_{\text{ext}}(G) = \frac{d}{dt} \Big|_{/12} \vec{H}_G}$$

3. Résolution d'un problème de Dynamique.

Nous pouvons formuler ainsi le problème de la dynamique du corps solide : connaissant les forces qui agissent sur un solide, ainsi que la position et la vitesse initiales de ce solide, prévoir son mouvement.

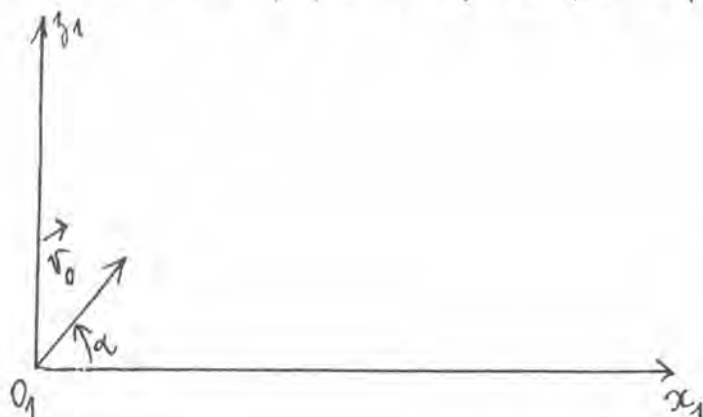
Nous allons résoudre ici le problème d'un corps solide lancé, pas trop fort, de la surface de la Terre, c'est-à-dire dérivé, par exemple le mouvement d'un ballon de rugby.

- 3.1 D'après le théorème du mouvement du centre de gravité, nous avons, en réduisant l'action des forces extérieures à celle de la pesanteur (on néglige l'action du vent...), et en négligeant le phénomène de déviation due à la rotation de la Terre (: étudié par ailleurs en 1.2) :

$$m \cdot \vec{g} = m \cdot \vec{\Gamma}(G)_{11}$$

$O_1 x_1 y_1 z_1$ étant donc un repère lié à la terre, centré au point de départ du ballon.

Nous obtenons, après intégration, la parabole bien connue :



l'équation de NEWTON s'explicitant selon :

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = 0 \\ \ddot{z}_1 = -g \end{cases}$$

pour donner, après intégration :

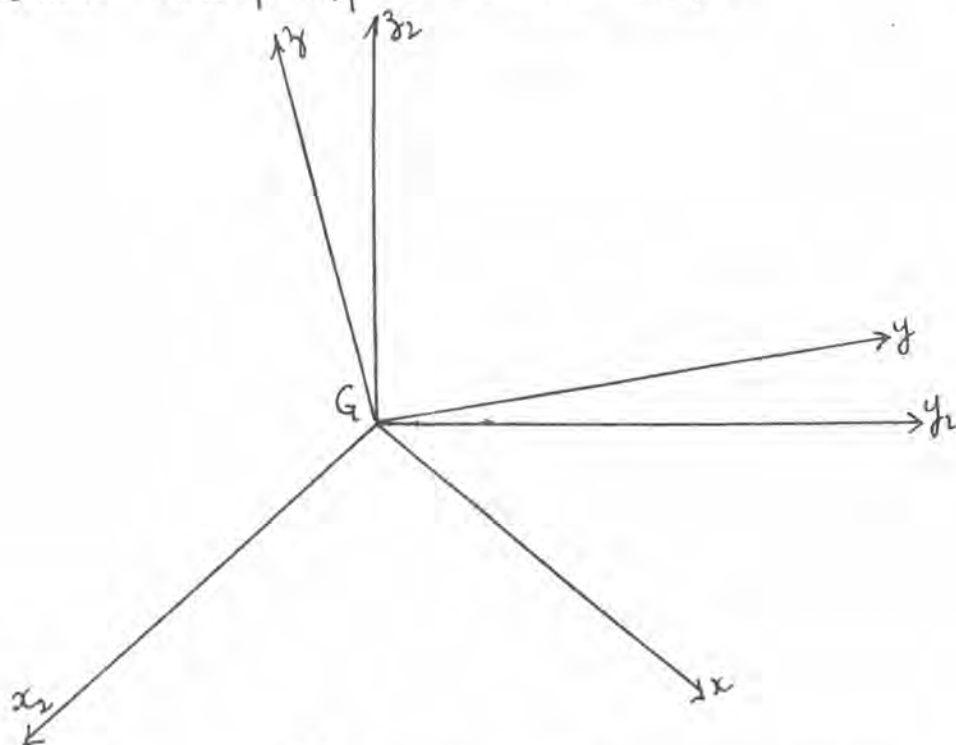
$$\begin{cases} x_1 = v_0 t \cos \alpha \\ z_1 = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 t \sin \alpha \end{cases}$$

- 3.2 Il s'agit maintenant d'entreprendre l'étude, autrement plus difficile, du mouvement du ballon autour de son centre de gravité. Cette étude a été menée par EULER (Mémoire de Berlin, 1758), JACOBI (pour l'étude analytique, 1849) et POINCARÉ (pour l'étude géométrique, Théorie nouvelle de la rotation des corps, 1834)

Commençons par mettre le problème en équation. Comme les forces extérieures se réduisent à la pesanteur, appliquée en G , nous avons, d'après la formule (9):

$$\frac{d}{dt} \left| \vec{K}_G \right|_{1/2} = 0$$

où la vitesse de $\vec{K}_G$ est calculée dans le repère mobile $Gx_2y_2z_2$.
 Attachons au solide ($\mathcal{S}$) le repère $Gxyz$, centré en G , et dont les axes sont axes principaux d'inertie de ($\mathcal{S}$).



Désignons par $\vec{\Omega}$ le vecteur rotation instantané de ($\mathcal{S}$) dans son mouvement par rapport à $Gx_2y_2z_2$, et notons par p, q et r ses composantes dans le repère $Gxyz$:

$$\vec{\Omega} = p \cdot \vec{i} + q \cdot \vec{j} + r \cdot \vec{k}$$

D'après la formule (19) de la partie Cinétique, nous avons donc:

$$\vec{K}_G = \mathcal{J}(\vec{\Omega}) = A p \cdot \vec{i} + B q \cdot \vec{j} + C r \cdot \vec{k}$$

Pour expliciter (9), il faut savoir calculer la dérivée de $\vec{K}_G$ dans le repère $Gx_2y_2z_2$. Avec la méthode qui a conduit à la formule (17) de la partie Cinématique (*) nous donne ici :

$$\frac{d}{dt} \left| \vec{K}_G \right|_{12} = \frac{d}{dt} \left| \vec{K}_G \right|_{Gxyz} + \vec{\Omega} \wedge \vec{K}_G$$

En explicitant l'expression de droite dans le repère $Gxyz$, nous obtenons les équations d'EULER :

$$(10) \begin{cases} A \cdot \dot{p} + (C-B) q \cdot r = 0 \\ B \cdot \dot{q} + (A-C) r \cdot p = 0 \\ C \cdot \dot{r} + (B-A) p \cdot q = 0 \end{cases}$$

Remarque : l'intégration du système différentiel (10) n'est pas élémentaire, car elle n'entre pas dans le cadre des systèmes différentiels linéaires (à coefficients constants) traité dans le MODULE AN04. Une fois connus p, q, r , nous pouvons en théorie déterminer la position de (S) grâce aux expressions (23) de la partie Cinématique : de nouveau, la connaissance des angles d'EULER passe par la résolution d'un système différentiel non linéaire, donc non élémentaire.

[3.3] L'outil essentiel dans la résolution de (10) est la notion d'intégrales premières du mouvement, c'est-à-dire de fonctions

(*) il est ici conseillé au Lecteur d'écrire la démonstration.

qui restent constantes lors du mouvement.

Comme $\vec{K}_G$ doit rester fixe par rapport au repère $Gx_1y_1z_1$ ($\because \frac{d}{dt} \Big|_{\vec{K}_G} = 0$), nous obtenons immédiatement une intégrale première en énonçant que la longueur de $\vec{K}_G$ reste constante :

$$(11) \quad A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2 = C^2$$

D'autre part, en multipliant chaque ligne de (10) respectivement par p , q et r , puis en sommant, nous obtenons :

$$A p \dot{p} + B q \dot{q} + C r \dot{r} = 0$$

Autrement dit, la quantité :

$$(12) \quad A p^2 + B q^2 + C r^2 = 2T$$

c'est-à-dire la force vive du solide (dans son mouvement par rapport à $Gx_1y_1z_1$), est également une intégrale première.

3.4 Avant d'exploiter analytiquement (11) et (12), entreprenons la description géométrique du mouvement. Nous conseillons au Lecteur d'avoir sous les yeux les figures des pages 26 et 30 de la partie Cinétique.

Rappelons que le vecteur $\vec{K}_G$ est fixe (toujours par rapport au repère $Gx_1y_1z_1$). Comme :

$$GH = \frac{\sqrt{2T}}{K_G}$$

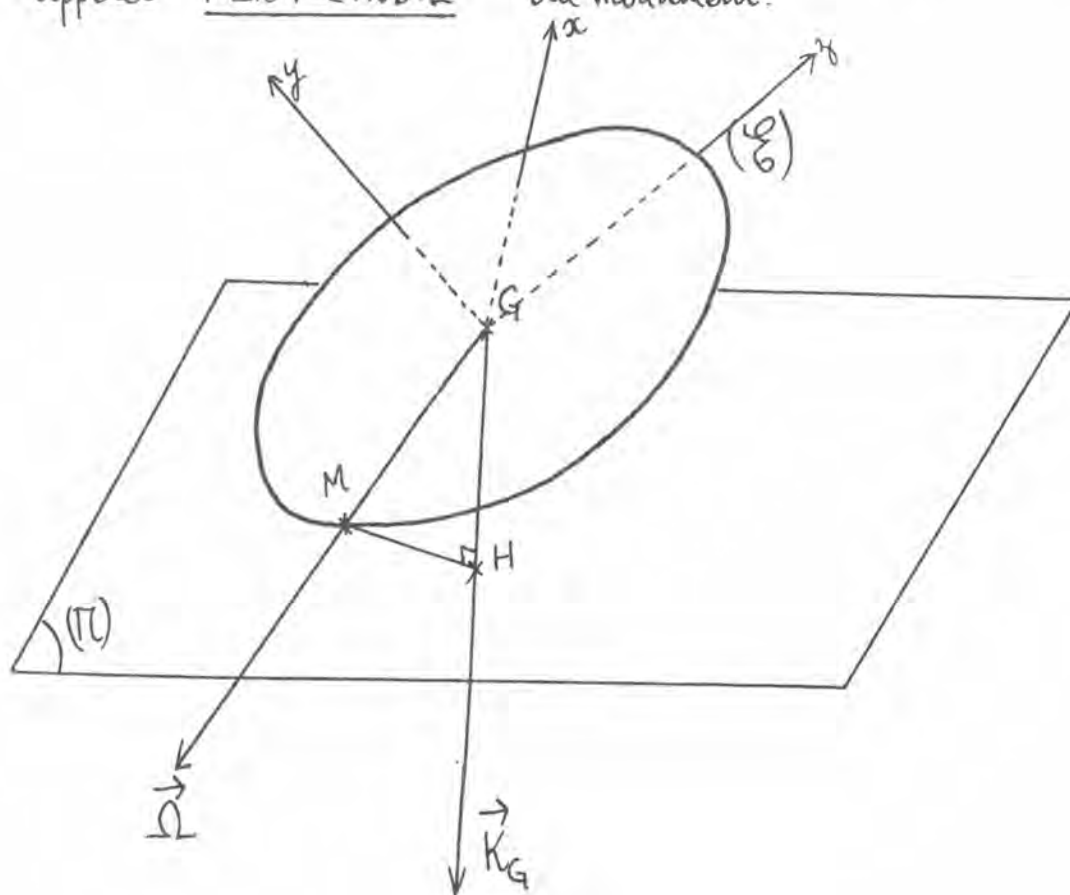
c'est que le point H est fixe, d'après les intégrales premières (11) et (12). Par conséquent, le plan tangent en M à l'ellipsoïde

d'inertie $(\mathcal{E})$ est fixe. De plus, $\vec{V}(M)_{12} = \vec{\Omega} \wedge \vec{GM} = 0$.

On a donc montré que :

le mouvement de $(\mathcal{I})$ autour de son centre de gravité se déroule de sorte que l'ellipsoïde d'inertie $(\mathcal{E})$ roule et pivote sans glisser^(*) sur un plan fixe.

Lors de ce mouvement, le point de contact M va décrire sur $(\mathcal{E})$ une courbe, appelée POLHODIE, et, sur (Π) , une autre courbe appelée HER POLHODIE du mouvement.



Le lecteur n'ayant jamais lancé de ballon de rugby fera rouler un œuf dur sur une table ...

Le tracé de la polhodie décrit le mouvement de $\vec{\Omega}$ par rapport à l'ellipsoïde d'inertie, et donne donc une idée précise du

(*) voir le § 6. de la partie Cinématique.

mouvement. Pour obtenir l'équation de la polhodie, nous allons énoncer que la distance GH de G au plan tangent (Π) doit rester constante. En désignant par x, y et z les coordonnées de M dans le repère $Gxyz$ des axes principaux d'inertie de (J) , nous savons que le vecteur normal à (Π) est porté par $\vec{K}_G$, de composantes Ap, Bq et Cr . Comme $\vec{GM}$ est proportionnel à $\vec{\Omega}$, (Π) admet donc comme équation:

$$(X-x).Ax + (Y-y).By + (Z-z).Cz = 0$$

et la distance GH cherchée vaut donc: ^(*)

$$\frac{Ax^2 + By^2 + Cz^2}{\sqrt{A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2}}$$

Nous savons d'autre part que:

$$\vec{OM} = \frac{\omega}{\sqrt{2T}} \vec{u} = \frac{\vec{\Omega}}{\sqrt{2T}}$$

ce qui montre que:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = \frac{Ap^2 + Bq^2 + Cr^2}{2T} = 1 \quad (**)$$

Ainsi l'équation de la polhodie est-elle donnée par:

$$(13) \begin{cases} Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1 \\ A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2 = \frac{|K_G|^2}{2T} = c_{te} \end{cases}$$

(*) Proposition 4, p. III.175, du MODULE AG1

(**) (E) admet bien comme équation: $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$

En désignant par δ la valeur de la constante $\frac{|K_G|^2}{2T}$, nous pouvons encore mettre le système précédent sous la forme équivalente :

$$\begin{cases} Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1 \\ A(A-\delta)x^2 + B(B-\delta)y^2 + C(C-\delta)z^2 = 0 \end{cases}$$

où la seconde équation, étant homogène, représente un cône de sommet O . Afin d'avoir une idée de la forme des polhodies, étudions leurs projections sur les plans de coordonnées :

- en éliminant z entre les deux équations précédentes, nous obtenons comme équation de la projection sur le plan Gxy :

$$A(A-C)x^2 + B(B-C)y^2 = \delta - C$$

- en opérant de la même façon, on obtient comme projections sur le plan Gyz :

$$B(A-B)y^2 + C(A-C)z^2 = A - \delta$$

et, sur le plan Gzx :

$$A(A-B)x^2 + C(C-B)z^2 = \delta - B.$$

Pour poursuivre l'étude, supposons par exemple que :

$$A > B > C > 0$$

Alors, pour $\delta \geq C$, la projection sur le plan Gxy est une ellipse centrée en G , d'axes Gx et Gy , éventuellement dégénérée en G . La projection sur le plan Gzy est de même

nature, cependant que la projection sur le plan Gyz est une branche d'hyperbole, éventuellement dégénérée dans une asymptote.

Pour que le mouvement soit possible, il faut que la constante S soit comprise entre C et A . Étudions les valeurs limites de S :

Pour $S = C$, les points M et H coïncident avec l'un des sommets du grand axe de l'ellipsoïde : $\vec{\Omega}$ et $\vec{K}_G$ sont colinéaires, et $(\mathcal{E})$ pivote sur (Π) autour de son grand axe, à la vitesse constante $\frac{2T}{C}$ (en valeur absolue).

Pour $S = A$, l'ellipsoïde pivote à vitesse constante autour de son petit axe.

Pour $S = B$, l'équation de la projection de la polhodie sur le plan Gyz s'écrit donc:

$$A(A-B)x^2 = C(B-C)z^2$$

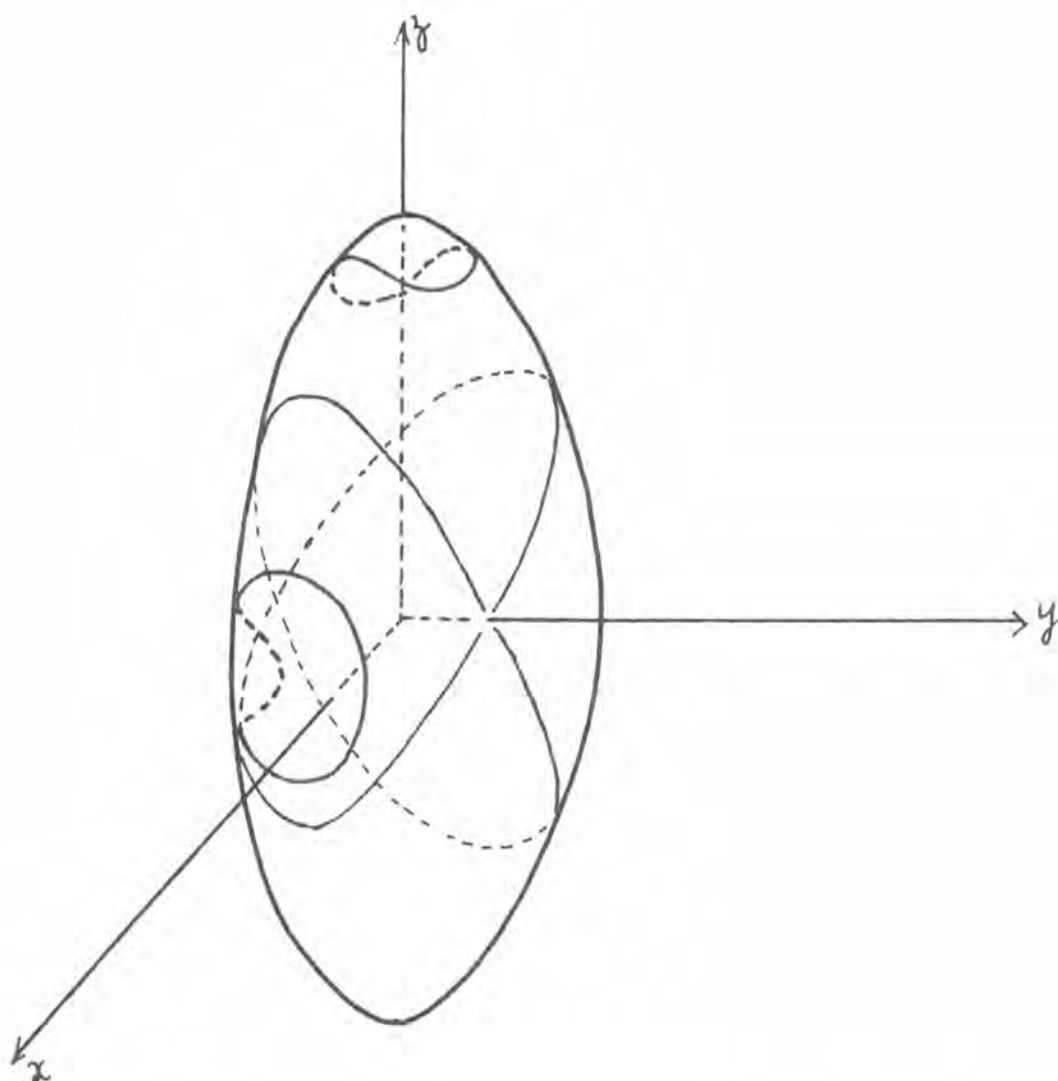
Cette projection se compose donc:

- d'une part du point $x = y = 0$, ce qui correspond à une rotation de $(\mathcal{E})$ autour de son axe moyen, à vitesse constante.
- d'autre part des demi-droites d'équations:

$$\sqrt{A(A-B)} x = \pm \sqrt{C(B-C)} z$$

les polhodies correspondantes étant alors inscrites dans les sections de $(\mathcal{E})$ par les plans définis par ces droites, et l'axe Gy : il s'agit de deux ellipses, appelées ellipses limite.

Donnons la représentation des différentes polhodies sur $(\mathcal{E})$:



Remarque: Nous avons montré que, parmi les mouvements possibles de $(\mathcal{E})$ sur (Π) , existent les 6 rotations sur chacun des sommets de l'ellipsoïde, autour de l'axe correspondant, et à vitesse constante : on parle des rotations stationnaires. Les rotations autour du grand et du petit axe d'une part, autour de l'axe moyen d'autre part, sont de natures très différentes : une petite perturbation autour des deux premiers axes a peu de conséquence, contrairement à la même petite perturbation sur la rotation autour de l'axe moyen. On parle, dans le premier cas, de rotation stationnaire stable, et de rotation stationnaire instable dans

le second cas.

3.5 Entrepreneons maintenant l'étude analytique du mouvement.

Considérons les équations (11) et (12) comme un système avec inconnues p et r . En opérant par élimination, nous obtenons:

$$(14) \quad \begin{cases} A.(A-C).p^2 + B.(B-C).q^2 = K_G^2 - 2T.C \\ B.(B-A).q^2 + C.(C-A).r^2 = K_G^2 - 2T.A \end{cases}$$

Pour que le mouvement soit possible, il faut donc que:

$$2T.C \leq K_G^2 \leq 2T.A$$

et les cas extrêmes ont déjà été résolus (rotations stationnaires).

En portant les expressions de p et r , tirées des équations précédentes, dans la seconde équation d'EULER (10), nous obtenons une équation différentielle dans la seule inconnue q , et qui s'écrit:

$$\dot{q} \pm k.\sqrt{f(q)} = 0$$

avec:

$$k = \sqrt{\frac{(A-B)(B-C)}{AC}}$$

$$f(q) = (q_1^2 - q^2).(q_2^2 - q^2)$$

où:

$$q_1 = \sqrt{\frac{K_G^2 - 2TC}{B.(B-C)}}$$

$$q_2 = \sqrt{\frac{2TA - K_G^2}{B(A-B)}}$$

Il est conseillé au Lecteur d'effectuer les calculs en détail. L'indétermination en signe dans l'équation différentielle sera levée par les conditions initiales. Nous allons pour simplifier supposer qu'elle s'écrit :

$$\dot{q} + k \sqrt{f(q)} = 0$$

Il s'agit là d'une équation différentielle à variables séparables (*) puisqu'elle s'écrit :

$$\frac{dq}{\sqrt{f(q)}} = -k dt$$

Cependant, l'intégration par quadrature ne relève pas des fonctions classiques connues du Lecteur, et ne saurait être donnée dans le cadre de ce cours (il faudrait introduire les fonctions elliptiques de JACOBI, qui sont en quelque sorte une extension des fonctions circulaires de la trigonométrie classique). C'est pourquoi nous allons nous contenter d'une étude qualitative.

La valeur initiale q_0 de q ($q_0 = q(0)$) est donc telle que : $f(q_0) > 0$, et $q(t)$ doit varier de sorte que $f(q)$ reste positif. Nous sommes naturellement amenés à tracer le graphe de f . Les positions relatives des racines q_1 et q_2 dépendent du signe de $(K_G^2 - 2T.B)$:

- si $K_G^2 < 2T.B$, $q_1 < \sqrt{\frac{2T}{B}} < q_2$,
- si $K_G^2 = 2T.B$, $q_1 = q_2 = \sqrt{\frac{2T}{B}}$,

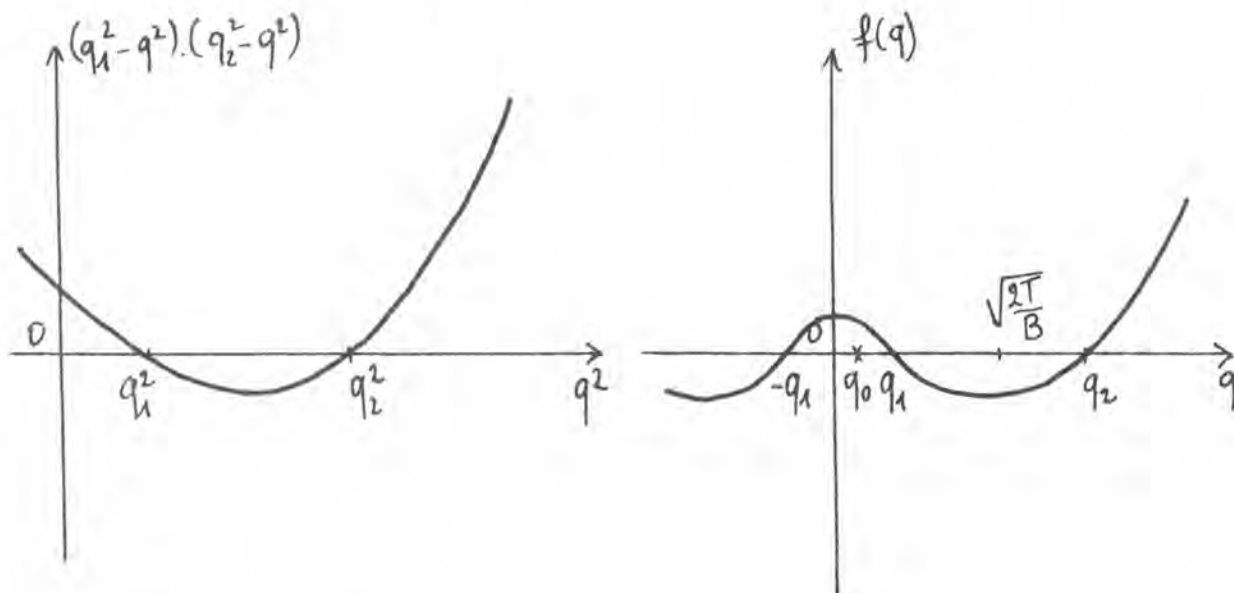
(*) voir la leçon n° 12 du MODULE ANO2.

- et, si $K_G^2 > 2T.B$, $q_1 > \sqrt{\frac{2T}{B}} > q_2$.

Remarquons aussi que : $2T = A.p^2 + B.q^2 + C.r^2 \geq B.q^2$, donc : $|q| \leq \sqrt{\frac{2T}{B}}$.

Supposons, pour fixer les idées, que :

$$2T.C < K_G^2 < 2T.B$$



Ainsi, q doit-il varier en restant compris entre $-q_1$ et $+q_1$.
Comme :

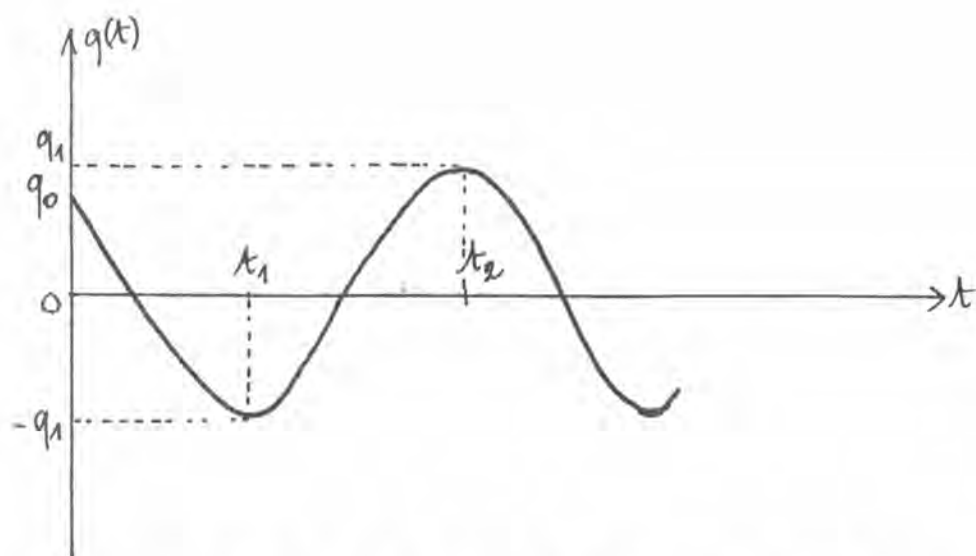
$$\frac{dq}{dt}(0) = -k \sqrt{f(q_0)} < 0$$

q commence par décroître, jusqu'à atteindre la valeur $(-q_1)$, à l'instant, disons, t_1 . Remarquons alors que $q(t)$ ne peut rester constamment égal à $(-q_1)$, car d'après (14), on aurait alors :

$$p(t) = r(t) = 0, \text{ donc, avec (11) et (12), } q^2 = \frac{K_G^2}{B^2} = \frac{2T}{B}, \text{ soit :}$$

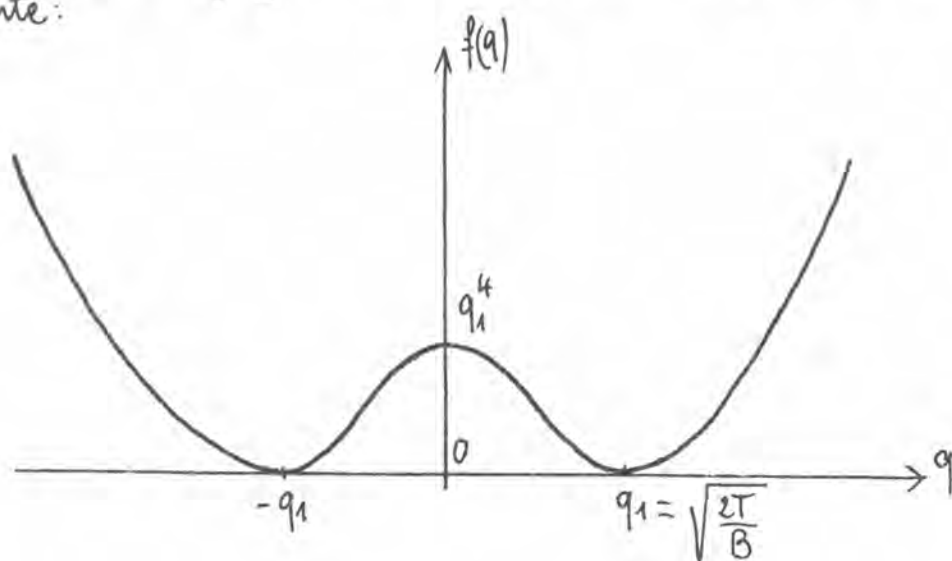
$$K_G^2 = 2T.B. \text{ Par conséquent, et comme } f(q(t)) \text{ doit rester posi-}$$

tive, c'est que $q(t)$ doit changer de sens de variation, pour croître jusqu'à atteindre la valeur q_1 , à l'instant, disons, t_2 .
Le mouvement se répète alors périodiquement :



Ce qui correspond au mouvement périodique du point M le long de la polhodie correspondante.

3.6 Le cas où $K_G^2 = 2T \cdot B$ se prête à une étude analytique possible à l'aide des fonctions classiques : nous avons signalé que $q_1 = q_2 = \sqrt{\frac{2T}{B}}$, et le graphe de f a alors l'allure suivante :



En supposant, comme précédemment, que $\dot{q}(0) < 0$, l'équation différentielle en q s'écrit :

$$\dot{q} = k (q^2 - q_1^2)$$

Cette équation s'intègre par une quadrature classique, selon :

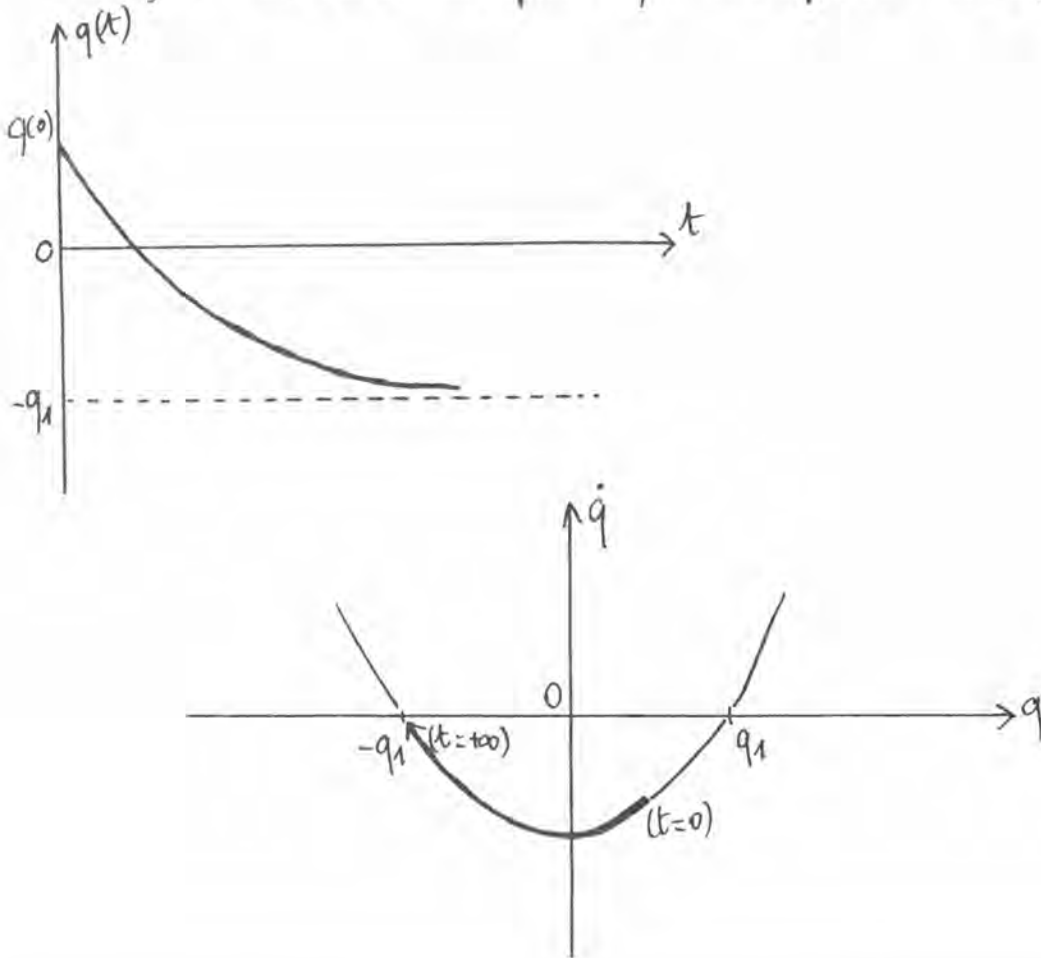
$$q(t) = q_1 \cdot \frac{C e^{-2q_1 kt} - 1}{C e^{-2q_1 kt} + 1} \quad (*)$$

où C est imposée par la condition initiale:

$$q(0) = q_1 \frac{C-1}{C+1}$$

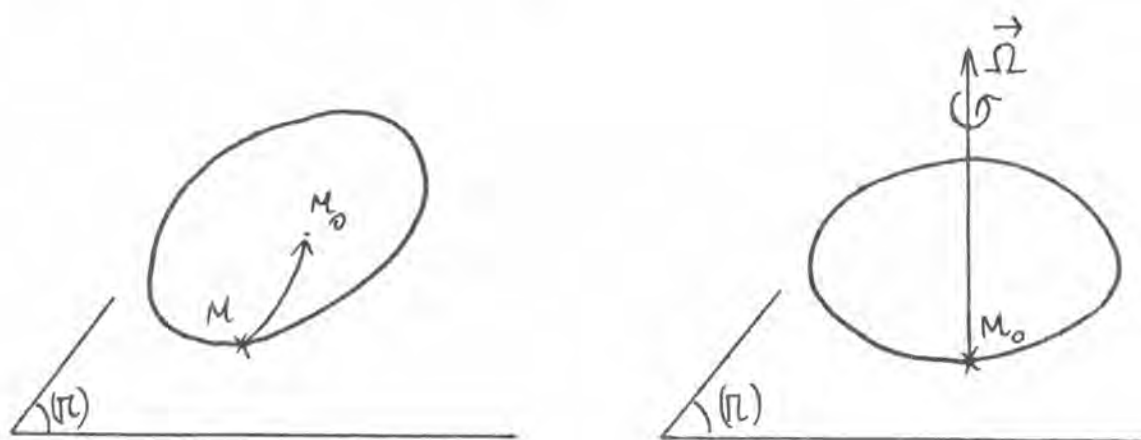
ceci étant valable pour $q(0) \neq q_1$. Si la condition initiale $q(0)$ est égale à q_1 , nous obtenons la solution constante $q(t) = q_1$ (position d'équilibre de l'équation différentielle).

Tracons la courbe intégrale et la trajectoire correspondante:



(*) le lecteur fera les calculs intermédiaires ! nous le renvoyons à la table p. 37 du MODULE ANO2, pour le calcul de primitives.

ceci correspond au parcours de M le long d'une ellipse limite: le vecteur rotation instantané s'approche asymptotiquement de la rotation stationnaire instable $-\sqrt{\frac{2T}{B}}$ autour de l'axe moyen de l'ellipsoïde d'inertie ($\mathcal{E}$)

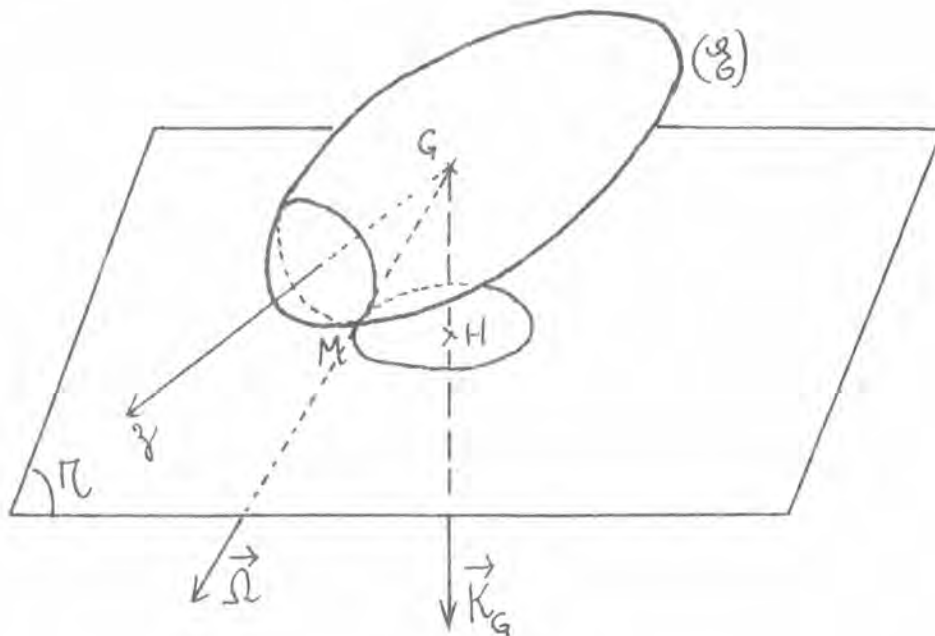


3.7 Dans le cas du ballon de rugby, nous avons par exemple: $A=B > C$. La troisième des équations d'EULER (10) montre alors immédiatement que:

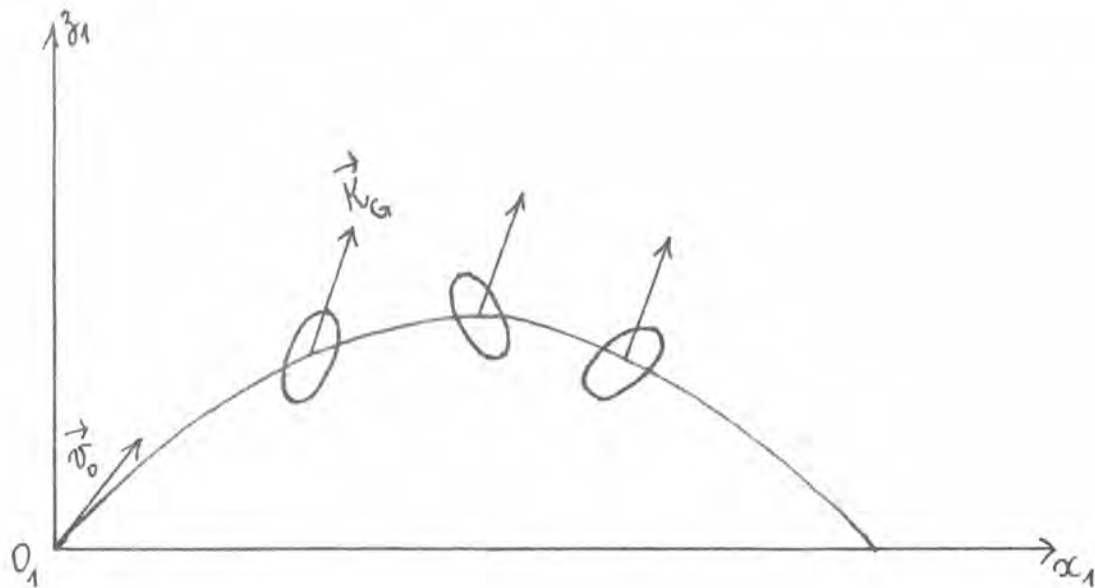
$$\dot{r} = 0$$

Pour conséquent, r est constant et d'après l'une des équations (11) ou (12), il en est de même de la quantité: $p^2 + q^2$. Il en résulte que la polhodie et l'herpolhodie sont toutes deux des cercles tracés respectivement sur l'ellipsoïde d'inertie ($\mathcal{E}$), et le plan (Π) (cercles éventuellement dégénérés dans des points).

En nous reportant à la figure de la page 17, nous observons que, dans son mouvement autour de son centre de gravité, le ballon tourne sur lui-même, de telle sorte qu'un cône ($\mathcal{K}$) de sommet G et d'axe Gz , roule sans glisser et à vitesse constante sur un cône ($\mathcal{C}$) fixe, de sommet G , et d'axe porté par $\vec{K}_G$:



Entrons de représenter quelques positions du ballon dans l'espace :



En particulier, le ballon va conserver une direction fixe dans l'espace lors d'une rotation stationnaire stable autour de son grand axe: c'est le mouvement que le joueur cherche à imprimer à son ballon ! Pour prendre un exemple plus guerrier, c'est aussi

le mouvement donné à un obus lancé par un canon dont l'âme est rayée.

4. Mouvement d'un solide autour d'un point fixe.

4.1 Supposons que le solide (S) possède un point fixe O_1 .

En désignant par M , N et P les composantes du moment $\vec{M}_{exp}(O_1)$ des forces extérieures par rapport à O_1 , dans le repère O_1xyz centré en O_1 et dirigé selon les axes principaux d'inertie de (S) , l'équation (8) s'écrit selon:

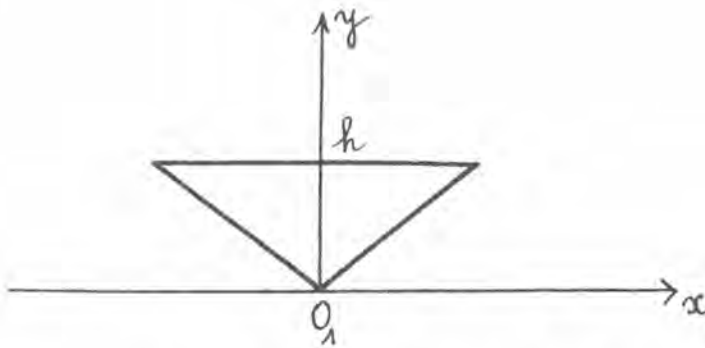
$$(15) \begin{cases} A \cdot \dot{p} + (C - B) q \cdot r = M \\ B \cdot \dot{q} + (A - C) r \cdot p = N \\ C \cdot \dot{r} + (B - A) p \cdot q = P \end{cases}$$

avec les mêmes notations, et selon la même démarche qui a permis de passer de (8) à (10). Ce sont les équations d'EULER du mouvement.

Si $M = N = P = 0$, nous retrouvons (10) : il s'agit des équations qui régissent le mouvement d'un solide soumis uniquement à l'action de la pesanteur, ou encore d'un solide ayant un point fixe, dans le vide : c'est le mouvement de POINOT, longuement étudié au § précédent. Nous proposons au Lecteur un exemple simple, qui doit lui permettre de vérifier certains points établis en 5.

Exercice 4.1: Une plaque mince homogène ayant la forme d'un triangle isocèle est animée d'un mouvement de POINOT autour de son sommet:

1)tracer son ellipsoïde d'inertie.



On suppose qu'à l'instant $t=0$, le vecteur rotation instantané $\vec{\Omega}$ est donné par:

$$\vec{\Omega} = \omega_0 (\sqrt{3} \cdot \vec{j} + \vec{k})$$

2) Donner les expressions des composantes p, q, r en fonction du temps. Représenter les courbes intégrales correspondantes. Trouver la polhodie, et décrire le mouvement de M le long de celle-ci.

4.2. Nous savons repérer la portion du solide (S) possédant le point fixe O_1 à l'aide de ses angles d'EULER (: voir le § 5.1 de la partie Cinématique) et, pour décrire complètement le mouvement de (S) , il nous suffit d'obtenir les variations de ψ, φ et θ en fonction du temps. Pour cela, et puisque nous avons déjà étudié les variations de $p(t), q(t)$ et $r(t)$, il faut intégrer le système différentiel:

$$(16) \begin{cases} \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi = p \\ \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi = q \\ \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi} = r \end{cases}$$

(d'après les relations (23) de la Cinématique), et connaissant en outre la position initiale de (S) , c'est-à-dire les valeurs $\psi(0), \varphi(0)$ et $\theta(0)$ des angles d'EULER à l'instant $t=0$.

Comme $\vec{K}_{O_1}$ est constant, il est naturel de choisir le repère fixe $O_1 x_1 y_1 z_1$, de sorte que:

$$\vec{K}_{O_1} = K_{O_1} \cdot \vec{k}_1$$

Alors, comme: $\vec{k}_1 = \sin \theta \cdot \sin \varphi \vec{i} + \sin \theta \cdot \cos \varphi \vec{j} + \cos \theta \cdot \vec{k}$

et: $\vec{K}_{O_1} = A p \vec{i} + B q \vec{j} + C r \vec{k}$, nous obtenons, par comparaison:

$$(17) \begin{cases} K_{O_1} \cdot \sin \theta \cdot \sin \varphi = A \cdot p \\ K_{O_1} \cdot \sin \theta \cdot \cos \varphi = B \cdot q \\ K_{O_1} \cdot \cos \theta = C \cdot r \end{cases}$$

Ce qui permet, sans intégration, d'obtenir θ (au signe près, c'est-à-dire à une orientation près de la ligne des nœuds), puis φ . On obtient enfin ψ par quadrature, à partir de la dernière des équations (16).

Exercice 4.2 (suite de l'Exercice 4.1)

- 1) Calculer $\theta(t)$, $\varphi(t)$ et $\psi(t)$ (: en supposant $\psi(0)$ connu), et tracer les courbes intégrales correspondantes.
- 2) Trouver l'herpolhode du mouvement (: pour les conditions initiales données dans l'Exercice 4.1)
(indication: utiliser les relations (24) de la Cinématique; on obtiendra une spirale du plan $r_1 = \omega_0 \sqrt{3}$)
- 3) Essayer de représenter le mouvement de l'ellipsoïde (E) sur le plan (Π) !

Nous revenons sur l'étude du mouvement d'un solide symétrique autour d'un point fixe, dans le § final du cours.

5. Le théorème de la force vive.

5.1 Rappelons (*) que le travail $\mathcal{C}$ effectué par un champ de forces $\vec{F}$ lorsque son point d'application M se déplace le long d'une courbe $\mathcal{C}$ est donné par l'intégrale curviligne:

$$(13) \quad \mathcal{C} = \int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot \vec{\tau} \, ds$$

où $\vec{\tau}$ désigne, comme dans la partie Cinématique le vecteur tangente unitaire.

Si $\vec{\gamma}: t \in [a, b] \longrightarrow \vec{\gamma}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ est un paramétrage de classe $\mathcal{C}^1$ du chemin $\mathcal{C}$, si le champ de forces s'explique selon: $\vec{F}(M) = P(M)\vec{i} + Q(M)\vec{j} + R(M)\vec{k}$, $\mathcal{C}$ est donné par:

$$\mathcal{C} = \int_a^b [P(\vec{\gamma}(t))\dot{x}(t) + Q(\vec{\gamma}(t))\dot{y}(t) + R(\vec{\gamma}(t))\dot{z}(t)] dt$$

Nous renvoyons le Lecteur à la Leçon n° 11 du MODULE AN03. Il y trouvera en particulier la démonstration du fait que si le champ de forces dérive d'un champ de potentiel U , c'est-à-dire s'il existe une fonction U du domaine de définition de $\vec{F}$, à valeurs réelles, telle que:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U$$

alors, $\mathcal{C}$ ne dépend que de l'origine ($A = \vec{\gamma}(a)$) et de l'extrémité ($B = \vec{\gamma}(b)$) du chemin, et, plus précisément, est donné par

(*) MODULE PH2, Chapitre 6.

l'accroissement de U le long de $\mathcal{C}$:

$$(19) \quad \mathcal{E} = U(A) - U(B)$$

[5.2] Si le point matériel M , de masse m , est en mouvement dans le repère galiléen O, x, y, z , sous l'action d'un champ de forces $\vec{F}$, nous avons, d'après la loi de NEWTON (1):

$$\dot{T} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \vec{V} \cdot \vec{V} \right) = m \vec{F} \cdot \vec{V} = \vec{F} \cdot \vec{V}$$

si bien que le travail effectué par $\vec{F}$ lors du déplacement de M le long de $\mathcal{C}$ est donné par:

$$\mathcal{E} = \int_a^b \dot{T} dt = \int_a^b \frac{d}{dt} (T(\gamma)) \cdot dt = T(\gamma(b)) - T(\gamma(a))$$

c'est-à-dire par l'accroissement $T(B) - T(A)$ de l'énergie cinétique le long de $\mathcal{C}$.

En particulier, si $\vec{F}$ dérive du champ de potentiel U , nous aurons:

$$(20) \quad (T + U)(A) = (T + U)(B)$$

La quantité $E = T + U$, somme de l'énergie cinétique T et de l'énergie potentielle U reste donc constante au cours du mouvement: c'est le Principe de conservation de l'Energie.

De nouveau, nous renvoyons le Lecteur au Chapitre 6 du MODULE PH2 pour ce qui concerne les Exemples classiques d'utilisation de ce principe en Mécanique du point.

[53] Selon le procédé classique, en intégrant le résultat précédent sur un solide (S) qui possède une densité de masse continue, nous obtenons le

Théorème de la force vive :

L'accroissement de l'énergie cinétique T d'un corps solide en mouvement par rapport à un repère galiléen est égal au travail effectué par les forces extérieures appliquées au solide. En particulier si celles-ci dérivent d'un potentiel V , l'énergie totale $(T+V)$ doit rester constante au cours du mouvement.

Ainsi s'explique l'origine de l'intégrale première (12) dans le mouvement de POINSON.

6. La notion de liaison dans un système matériel.

La Mécanique nous amène naturellement à étudier des systèmes matériels, constitués de plusieurs solides en mouvement, tout en étant assujettis à certaines contraintes, ou liaisons. C'est ainsi que dans le mouvement de POINSON, le solide (S) possédait un point fixe.

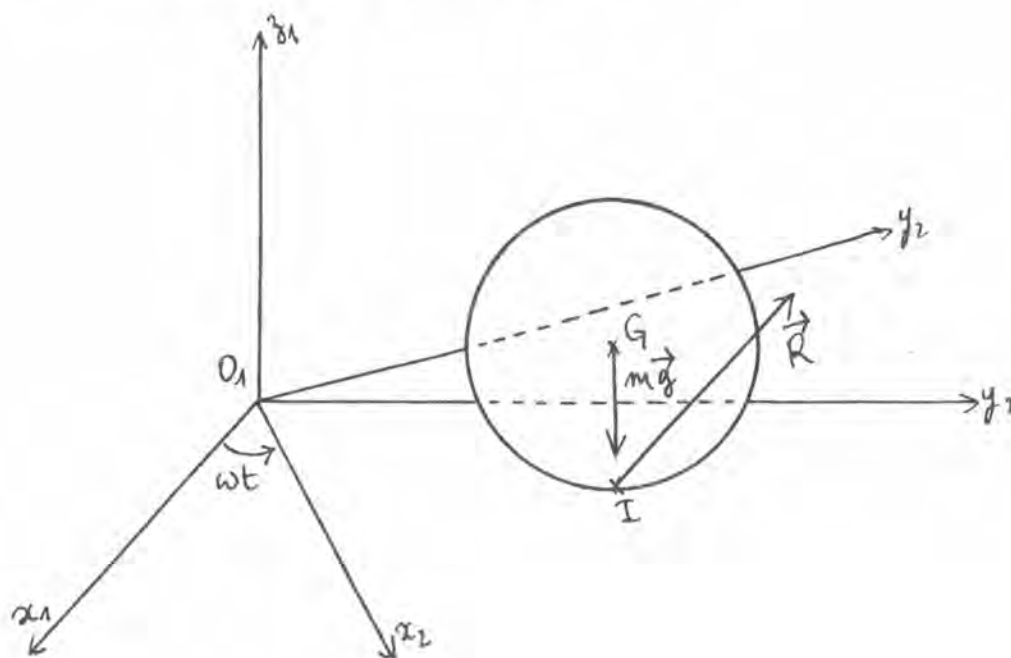
Dans l'inventaire des forces extérieures agissant sur (S), inventaire qui doit naturellement précéder l'écriture des lois de la Dynamique, il ne faut pas oublier les forces de réaction, qui sont là pour assurer les liaisons. Ainsi, dans le mouvement de POINSON, (S) est-il soumis à l'action de la réaction du support en O_1 : en appliquant le théorème du moment cinétique au point O_1 , nous avons éliminé du même coup les inconnues supplémentaires que constituent les composantes de cette réaction.

Dans le cas général, les liaisons en un point de contact introduisent les six inconnues supplémentaires que sont les composantes de la résultante $\vec{R}$, et du moment résultant $\vec{M}$ en I. La poursuite de l'étude passe alors par une connaissance plus approfondie des lois de contact. En général, il sera licite de négliger $\vec{M}$, et, pour ce qui concerne $\vec{R}$ les lois expérimentales du frottement donnent, dans deux cas extrêmes:

- $\vec{R}$ normale au plan tangent commun en I aux deux solides en contact en l'absence de frottement ;
- et, s'il ya rugosité parfaite (ou "frottement infini"), $\vec{R}$ peut avoir une direction quelconque, mais il ya alors roulement sans glissement d'un solide sur l'autre, ce qui conduit à écrire une équation cinématique supplémentaire.

Nous allons traiter deux exemples, à titre d'illustration.

Exemple 6.1 : Mouvement d'une bille pesante sur un plan horizontal rugueux, en rotation uniforme.



Les notations sont les notations habituelles. $\vec{\Omega}$ va désigner le vecteur rotation instantané de la bille (S) par rapport au repère mobile $O_1 x_1 y_1 z_1$, lié au plan.

- La liaison s'écrit ici: $\gamma_G = \rho$, rayon de la bille

- La condition de roulement sans glissement s'écrit:

$$(a) \quad \vec{V}(I)_{/2} = \vec{V}(G)_{/2} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{GI} = 0$$

(voir § 6, et formule (17) de la Cinématique)

- L'accélération de G par rapport au repère galiléen $O_1 x_1 y_1 z_1$ s'écrit:

$$\vec{\Gamma}(G)_{/1} = \vec{\Gamma}(G)_{/2} + \omega \vec{k}_1 \wedge (\omega \vec{k}_1 \wedge \overrightarrow{O_1 G}) + 2\omega \vec{k}_1 \wedge \vec{V}(G)_{/2}$$

d'après (18) et (20) de la Cinématique (rappelons que ω est supposée constante), et, par conséquent d'après le théorème du mouvement du centre gravité (formule (7)),

$$(b) \quad m \vec{\Gamma}(G)_{/2} = \vec{R} + m \vec{g} + m \omega^2 \overrightarrow{O_1 I} - 2m\omega \vec{k}_1 \wedge \vec{V}(G)_{/2}$$

- Le théorème du moment cinétique (9) écrit en G, donne enfin:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{GI} \wedge \vec{R} &= \frac{d}{dt} \Big|_{/1} \vec{K}_G \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{/2} \vec{K}_G + \omega \vec{k}_1 \wedge \vec{K}_G, \quad \text{d'après (17) de la} \end{aligned}$$

Cinématique.

$\vec{K}_G$ se calcule à l'aide de la formule p.25 de la partie Cinétique, qui donne ici:

$$\vec{K}_G = \frac{2}{5} m \rho^2 \cdot \vec{\Omega}$$

Ainsi avons-nous:

$$(c) \quad \frac{2}{5} m \rho^2 \cdot \frac{d}{dt} \Big|_{1/2} \vec{\Omega} + \frac{2}{5} m \rho^2 \omega \vec{k}_1 \wedge \vec{\Omega} = - \rho \vec{k}_1 \wedge \vec{\Omega}$$

Le problème est ainsi mis en équation: les inconnues étant les coordonnées de G, et les composantes des vecteurs $\vec{\Omega}$ et $\vec{R}$, nous disposons au total de 9 équations.

Déterminons la trajectoire du centre de gravité G de la bille.

Explicitons pour cela les équations (a), (b) et (c) sous forme scalaire, en désignant par: x, y et $z = \rho$ les coordonnées de G, p, q et r les composantes de $\vec{\Omega}$, X, Y et Z celles de $\vec{R}$, dans le repère mobile O, x_1, y_1, z_1 . Nous obtenons:

$$(a)' \quad \begin{cases} \ddot{x} = \rho \cdot q \\ \ddot{y} + \rho \cdot p = 0 \end{cases}$$

$$(b)' \quad \begin{cases} m \ddot{x} = X + m \omega^2 x + 2m \omega \cdot \dot{y} \\ m \ddot{y} = Y + m \omega^2 y - 2m \omega \cdot \dot{x} \\ m \ddot{z} = m g + Z \end{cases}$$

$$(c)' \quad \begin{cases} \frac{2}{5} m \rho^2 \cdot \dot{p} - \frac{2}{5} m \rho^2 \cdot \omega q = \rho \cdot Y \\ \frac{2}{5} m \rho^2 \cdot \dot{q} + \frac{2}{5} m \rho^2 \cdot \omega p = -\rho \cdot X \\ \frac{2}{5} m \rho^2 \cdot \dot{r} = 0 \end{cases}$$

D'où nous tirons immédiatement:

$$Z = -mg, \quad r \text{ constant}$$

puis, en éliminant p et q à l'aide de (a)', X et Y à l'aide (c)',
un système différentiel en (x, y) qui s'écrit:

$$\begin{cases} 7\ddot{x} = 5\omega^2 x + 12\omega \dot{y} \\ 7\ddot{y} = 5\omega^2 y - 12\omega \dot{x} \end{cases}$$

Pour intégrer ce système, posons:

$$u = x + iy$$

Il vient l'équation différentielle dans la fonction à valeurs complexes u :

$$7\ddot{u} + 12i\omega \dot{u} - 5\omega^2 u = 0$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants qui se résout selon le procédé exposé aux Leçons 9 et 10 du MODULE ANO2 :

$$u(t) = e^{\lambda t}$$

sera solution particulière si λ est solution de l'équation caractéristique:

$$7\lambda^2 + 12i\omega\lambda - 5\omega^2 = 0.$$

La solution générale est donc de la forme:

$$u(t) = C_1 e^{-i\omega t} + C_2 e^{-\frac{5}{7}i\omega t}$$

C_1 et C_2 étant deux constantes complexes, qui seront déterminées par les conditions initiales.

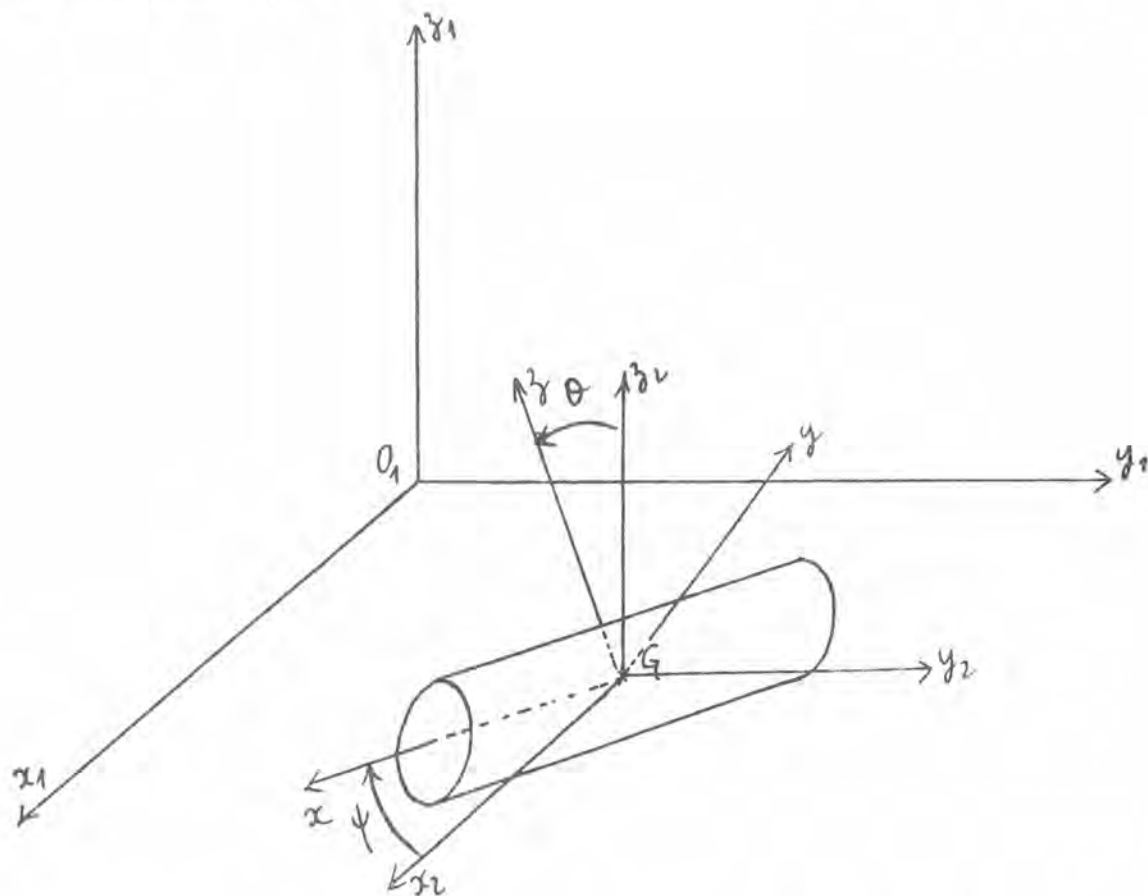
Comme le plan mobile tourne à la vitesse ω par rapport au plan

fixe $O_1 x_1 y_1 z_1$, les coordonnées x_1 et y_1 de G dans le dernier s'obtiennent selon:

$$\begin{aligned} x_1(t) + i y_1(t) &= e^{i\omega t} u(t) \\ &= C_1 + C_2 e^{\frac{2}{7}i\omega t} \end{aligned}$$

Ainsi, la trajectoire de G est-elle un cercle du plan $z = \rho$, parcouru à la vitesse angulaire constante $(\frac{2}{7}\omega)$.

Exemple 6.2, Mouvement sans frottement d'un cylindre pesant sur un plan fixe.



En l'absence de frottement, la résultante des forces de liaison le long de la génératrice de contact, est une force verticale $\vec{R}$, appliquée en un point I , de coordonnées $(\alpha, 0, -\rho)$ dans le repère $G x y z$ (les notations sont celles de la partie Cinématique, §5.)

- La liaison s'écrit: $z_G^1 = \rho$, rayon de base du cylindre.
- Le théorème de la résultante cinétique donne:

$$m \cdot \vec{\Gamma}(G)_{/1} = m \vec{g} + \vec{R}$$

et, comme $\vec{R}$ est vertical, cela nous renseigne tout de suite sur le mouvement du centre de gravité G , animé d'un mouvement rectiligne uniforme.

- Le théorème du moment cinétique en G s'écrit:

$$\frac{d}{dt} \Big|_1 \vec{K}_G = \vec{GI} \wedge \vec{R}$$

Soit, d'après (17) de Cinématique:

$$\frac{d}{dt} \Big|_{Gxv_{Gx}} \vec{K}_G + (\dot{\psi} \vec{k}_1 + \dot{\theta} \vec{i}) \wedge \vec{K}_G = - \vec{GI} \wedge m \vec{g}$$

où (Exercice 4.2 de la Cinétique):

$$\vec{K}_G = \begin{pmatrix} \rho_4^2 + h_3^2 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_4^2 + h_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_2^2 \end{pmatrix} (\vec{\Omega})$$

$2h$ désignant la hauteur du cylindre.

En explicitant, il vient:

$$(\rho_4^2 + h_3^2) \ddot{\theta} \vec{i} + \rho_2^2 \ddot{\psi} \vec{k}_1 + (\rho_4^2 + h_3^2) \dot{\theta} \dot{\psi} \vec{v} = -mg a \vec{v}$$

Soit, les équations différentielles:

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = 0 \\ \ddot{\psi} = 0 \\ \left(l_4^2 + \frac{h^2}{3} \right) \dot{\theta} \dot{\psi} = -mg \alpha \end{cases}$$

Ainsi, $\dot{\theta}$ et $\dot{\psi}$ sont-ils constants et, comme :

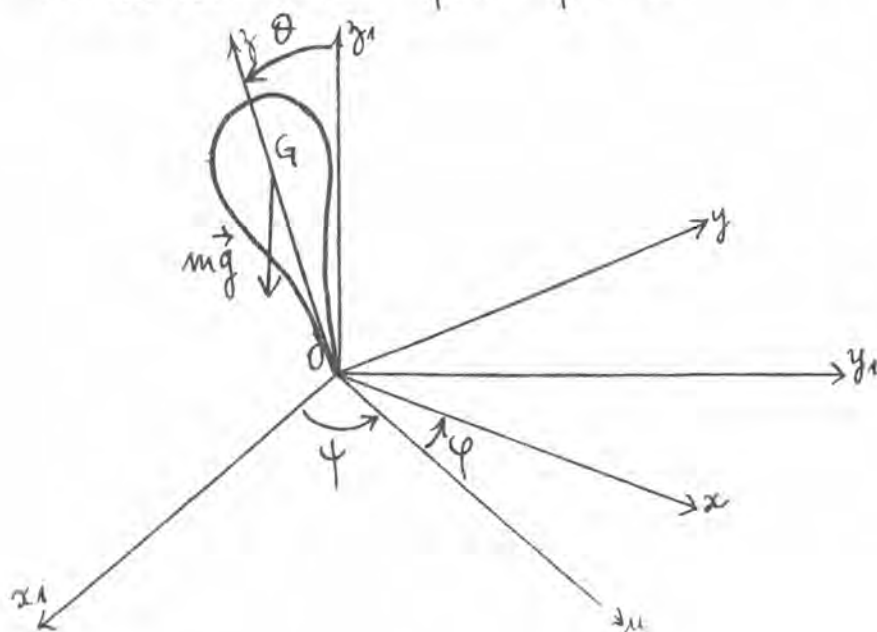
$$\alpha = -\frac{1}{mg} \left(l_4^2 + \frac{h^2}{3} \right) \dot{\theta} \dot{\psi}$$

la condition de contact : $|\alpha| < h$ se traduit-elle par une condition sur la vitesse initiale du cylindre :

$$|\dot{\theta} \dot{\psi}| < \frac{mg h}{\left(l_4^2 + \frac{h^2}{3} \right)}$$

7. Le mouvement de Lagrange et l'effet gyroscopique.

Nous allons terminer le cours par l'étude du mouvement d'une toupie ($\mathcal{S}$) possédant un axe de symétrie cinétique Oz , et qui doit tourner autour du point fixe O .



$$OG = l$$

7.1 Commençons par mettre le problème en équation, en dérivant le théorème du moment cinétique au point O (de sorte à éliminer la réaction de liaison $\vec{R}$) :

$$\frac{d}{dt} \left| \vec{K}_O \right|_{/A} = \vec{OG} \wedge m \vec{g}$$

Cette relation s'explique dans le repère $Ouvz$ selon :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} A \ddot{\theta} \\ A \dot{\psi} \sin \theta \\ C (\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\psi} \cos \theta \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} A \dot{\theta} \\ A \dot{\psi} \sin \theta \\ C (\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}) \end{pmatrix} = mgl \sin \theta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(on rappelle que $B=A$, par hypothèse)

Exercice 7.1 : Établir l'équation précédente.

La dernière ligne conduit à l'intégrale première :

$$(a) \quad \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi} = a$$

Portant cette information dans les deux premières lignes, il vient :

$$\begin{cases} A \ddot{\theta} + \dot{\psi} \sin \theta \cdot (Ca - A \dot{\psi} \cos \theta) = mgl \sin \theta \\ A (\dot{\psi} \sin \theta)' - \dot{\theta} (Ca - A \dot{\psi} \cos \theta) = 0 \end{cases}$$

Multipliant la première de ces équations par $\dot{\theta}$, la seconde par $\dot{\psi} \sin \theta$, et ajoutant, nous obtenons :

$$A \dot{\theta} \ddot{\theta} + A (\dot{\psi} \sin \theta) (\dot{\psi} \sin \theta)' = mgl \dot{\theta} \sin \theta$$

Ce qui conduit à la nouvelle intégrale première :

$$(b) \quad \frac{1}{2} A \left((\dot{\theta})^2 + (\dot{\psi} \sin \theta)^2 \right) + mgl \cos \theta = b$$

Exercice 7.2 : Vérifier qu'il s'agit-là de l'énergie totale de la boucle.

Enfin, en remarquant que $\vec{OG} \wedge m\vec{g}$ a une composante nulle sur $\vec{k}_1$, nous obtenons la troisième intégrale première:

$$(c) \quad \vec{K}_0 \cdot \vec{k}_1 = A \dot{\psi} \sin^2 \theta + Ca \cos \theta = c$$

7.2 Grâce à la connaissance des trois intégrales premières précédentes, il est possible d'intégrer, selon le schéma suivant: en tirant $\dot{\psi}$ de (c), et en portant la valeur obtenue dans (b), nous obtenons une équation différentielle en θ :

$$A(\dot{\theta})^2 = 2(b - mgl \cos \theta) - \frac{(c - Ca \cos \theta)^2}{A \sin^2 \theta}$$

qui doit s'intégrer par quadrature. Alors, une fois connue $\theta(t)$, les équations (c) et (a) donnent ψ et ρ par le même procédé.

En posant: $u = \cos \theta$, l'équation différentielle en θ s'écrit:

$$(\dot{u})^2 = f(u)$$

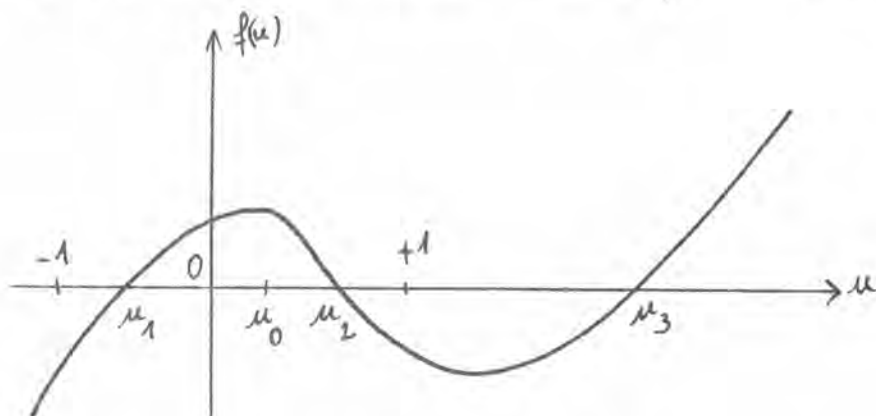
avec:

$$f(u) = \frac{2}{A} (b - mgl \cdot u) (1 - u^2) - \frac{1}{A^2} (c - Ca \cdot u)^2$$

Le second membre est un polynôme de degré trois, et l'intégration du mouvement par quadrature doit recourir aux fonctions elliptiques de JACOBI. Nous allons nous contenter ici d'une des-

-cription du mouvement. Les arguments sont ceux développés lors de l'étude du mouvement de POINSON. Aussi allons-nous donner les grandes lignes du raisonnement, en invitant le Lecteur à écrire lui-même le détail.

Le graphe de f a l'allure suivante, si $c \neq Ca \neq 0$:



$$(f(\pm 1) \leq 0, \lim_{u \rightarrow \pm \infty} f(u) = \pm \infty \text{ en particulier}).$$

$u_0 = \cos \theta_0$ étant la valeur initiale de u , la mutation θ va osciller entre deux valeurs θ_1 et θ_2 ($u_1 = \cos \theta_1$, $u_2 = \cos \theta_2$).

Étudions maintenant les variations de la précession ψ , régies par (c):

$$\dot{\psi} = \frac{c - Ca \cdot u}{A \cdot (1 - u^2)}$$

Nous sommes naturellement conduit à la discussion suivante:

- 1) si: $\frac{c}{Ca} > u_2$, $\dot{\psi}$ reste positif, et $\psi(t)$ croît avec t ;
- 2) si: $u_1 < \frac{c}{Ca} < u_2$, $\dot{\psi}$ change de signe, et le sens de

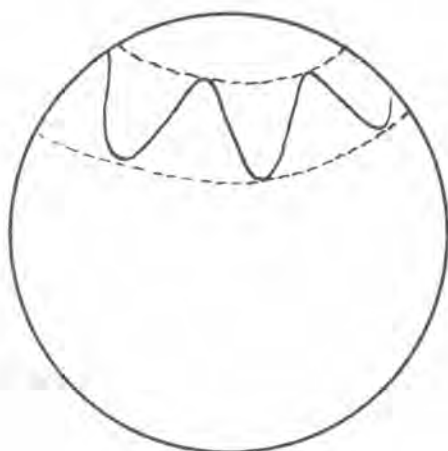
variation de ψ diffère aux instants où θ atteint ses valeurs extrêmes θ_1 et θ_2 ;

3) $\frac{c}{Ca}$ ne peut être égal à u_1 , car : $f\left(\frac{c}{Ca}\right) = 0$ donne :

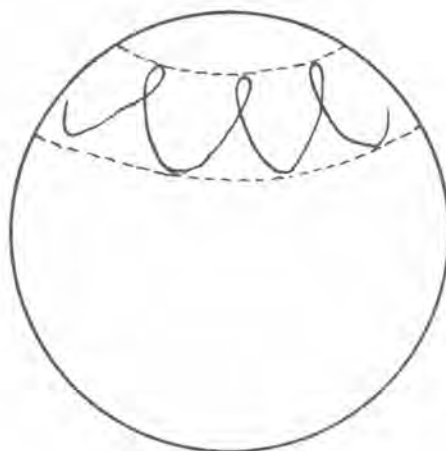
$$\frac{c}{Ca} = \frac{b}{mgl} \quad \text{et} : f'\left(\frac{c}{Ca}\right) = -\frac{mgl}{A} (1 - (\frac{c}{Ca})^2) < 0$$

ce qui est en contradiction avec l'allure du graphe de f en u_1 .

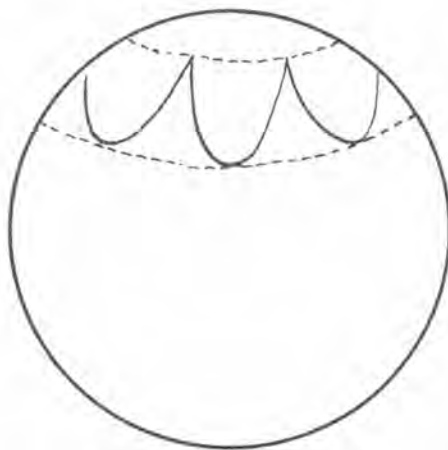
Il reste donc à envisager le seul cas : $\frac{c}{Ca} = u_2$. Alors, pour u proche de u_1 , u se comporte comme $\sqrt{u - u_1}$, tandis que ψ se comporte comme $(u - u_1)$, ce qui explique les points de rebroussement observés sur la trajectoire du point intersection de l'axe Oz de la toupie avec la sphère unité centrée en O :



1)



2)



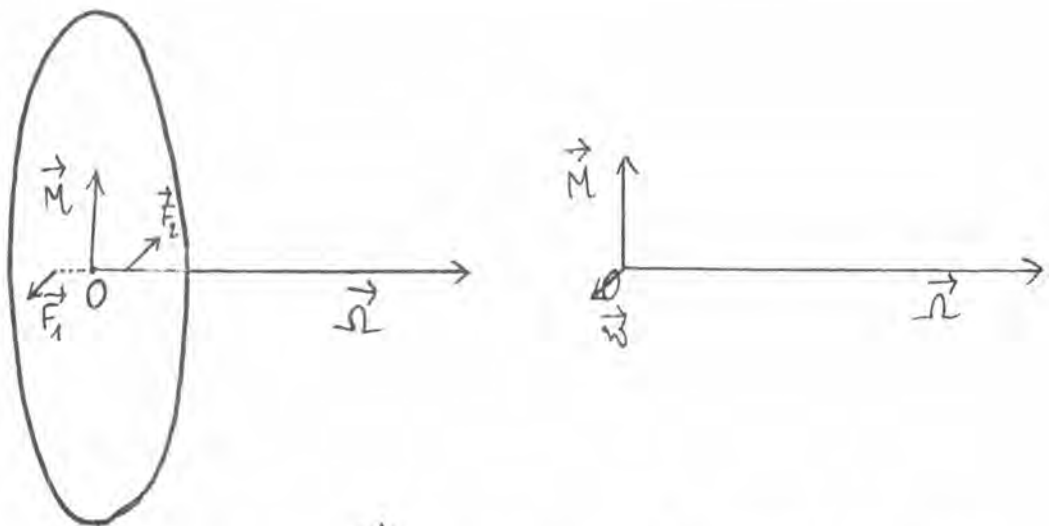
3)

73 Le lecteur doit avoir fait un jour l'expérience suivante :

Tenir à bout de bras les extrémités de l'axe d'une roue de bicyclette, à laquelle on imprime une rotation rapide, dans le plan vertical ; chercher à faire tourner l'axe autour de la verticale de son milieu, dans le plan horizontal : pour le moins, le mouvement de la roue paraît difficile à contrôler !

En fait, l'axe se déplace dans une direction perpendiculaire à celle qu'on cherche à lui donner.

L'explication est la suivante, en première approximation :



Comme la rotation propre $\vec{\Omega}$ est grande, le moment cinétique de la roue au O est voisin de :

$$I_{\Delta} \cdot \vec{\Omega}$$

où I_{Δ} désigne, comme d'habitude le moment d'inertie de la roue par rapport à son axe (Δ).

Si $\vec{\Omega} + \vec{\omega}$ désigne le vecteur rotation instantané de la roue, après son déplacement autour de O, dû à l'action du couple exercé par l'expérimentateur, le théorème du moment

cinétique s'écrit :

$$\begin{aligned}\vec{M} &= \frac{d}{dt} (I_{\Delta} \vec{\Omega}) \\ &= I_{\Delta} (\vec{\omega} + \vec{\Omega}) \wedge \vec{\Omega} \\ &= I_{\Delta} \vec{\omega} \wedge \vec{\Omega}\end{aligned}$$

Cela montre que $\vec{\omega}$ doit être horizontal : la roue a tendance à basculer vers la gauche.

C'est l'effet gyroscopique.

7.4 Traduisons le raisonnement précédent sur la toupie. La rotation propre $\dot{\varphi} = \omega$ étant supposée très grande, $\vec{\Omega}$ est assimilé à $\omega \vec{k}$ et K_0 à $C\omega \vec{k}$. Le théorème du moment cinétique s'écrit alors :

$$\vec{\Omega} \wedge (C\omega \vec{k}) = mgl \sin\theta \cdot \vec{u}$$

soit, en remplaçant $\vec{\Omega}$ par sa valeur :

$$(\dot{\varphi} \vec{k}_1 + \dot{\theta} \vec{u} + \omega \vec{k}) \wedge (C\omega \vec{k}) = mgl \sin\theta \cdot \vec{u}$$

Ce qui donne :

- 1) $\dot{\theta} = 0$: la nutation reste constante ;
- 2) $\dot{\varphi} = \frac{mgl}{C\omega}$: la précession suit une loi uniforme, de

petite vitesse.

Il faut savoir qu'il est possible de justifier, et de préciser le raisonnement précédent. Cela dépasse malheureusement le cadre de ce cours.