

Corrigés

Classes de Lycée

Géométrie

dans

l'espace

Irem de Lorraine

Les auteurs :

- DIDRY Jean-Marie - lycée Frédéric Chopin, Nancy
- LEMERCIER Geneviève - lycée Arthur Varoquaux, Tomblaine
- ROUYER Joseph - lycée Frédéric Chopin, Nancy
- SIBILLE Pierrette - lycée Jeanne d'Arc, Nancy
- THIRY Michel - lycée Georges de la Tour, Nancy

© Edité et imprimé par l'**Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques** - (Université de NANCY I - Faculté des Sciences) - B.P. 239 - 54506 VANDOEUVRE-les-NANCY CEDEX

Dépôt légal : 2ème trimestre 1993

n° de la publication : 2-85406-133-O

Responsable de la publication : Le Directeur de l'IREM, Michel BONN

SOMMAIRE

1ère série : Familiarisation avec les conventions du dessin en perspective cavalière.

A) Règles élémentaires :

- *PC1 : mesure de longueurs d'après une vue en perspective cavalière. p. 1
- *PC2 : dessin en perspective cavalière d'après une vue de dessus (1) .
- *PC3 : dessin en perspective cavalière d'après une vue de dessus (2) .
- *PC4 : angle d'après une vue en perspective cavalière.
- *PC5 : rectangles en perspective cavalière.
- PC6 : échelles contre un mur.

B) Le cercle :

- *PC7 : exemple simple de rotation. p. 7
- PC8 : portes ouvertes ou entrouvertes.
- *PC9 : napperons sur une table.
- *PC10 : méthode pour dessiner un cercle de l'espace à l'aide de huit points.
- PC11 : cercles sur trois faces d'un cube.

C) Le disque :

- *PC12 : partage d'un disque en quatre secteurs égaux. p. 12
- *PC13 : bissectrice d'un secteur angulaire.
- PC14 : trisection du disque.
- PC15 : étiquette sur une boîte cylindrique.
- PC16 : décoration d'un tambour.
- PC17 : coupe oblique d'un cylindre.

2e série : Un repère pour l'espace.

- *R1 : points dans un repère (1) . p. 20
- *R2 : points dans un repère (2) .
- *R3 : droites et plans liés aux axes du repère.
- *R4 : plans parallèles aux axes.
- R5 : prisme droit dans un repère (1) .
- R6 : prisme droit dans un repère (2) .
- R7 : prisme droit dans un repère (3) .
- R8 : prisme droit dans un repère (4) .
- R9 : prisme droit dans un repère (5) .
- R10 : cylindre à base non circulaire (1) .
- R11 : cylindre à base non circulaire (2) .
- R12 : cylindre à base circulaire (1) .

R13 : cylindre à base circulaire (2) .
 R14 : représentation paramétrique d'un segment.
 R15 : représentation paramétrique d'un cercle, d'une ellipse.
 R16 : représentation paramétrique d'une hélice circulaire.

3e série : Cônes et troncs de cônes.

A) Première utilisation de l'énoncé de Thalès dans le cône.

*C1 : points sur un cône p. 33
 C2 : points sur un tétraèdre.
 C3 : liquide dans un verre conique (1) .
 *C4 : liquide dans un verre conique (2) .
 C5 : cône dans un repère (1) .
 C6 : cône dans un repère (2) : équation cartésienne.

B) Le cône de révolution et son patron, exercices d'optimisation.

*C7 : arc de cercle et angle au centre associé (1) . p. 39
 *C8 : arc de cercle et angle au centre associé (2) .
 *C9 : le cône à partir de son patron.
 *C10 : patron d'un cône.
 C11 : liens entre les paramètres d'un cône et ceux de son patron (1) .
 C12 : liens entre les paramètres d'un cône et ceux de son patron (2) .
 *C13 : aire d'un secteur circulaire.
 *C14 : aire latérale d'un cône de révolution.
 C15 : cône de révolution de plus grand volume dont le patron est découpé dans un disque donné.
 C16 : cône de plus grand volume pour une aire totale donnée et cône de plus petite aire totale pour un volume donné.

C) Le tronc de cône et son patron.

C17 : patron d'un tronc de cône (1) . p. 49
 C18 : patron d'un tronc de cône (2) .
 C19 : comparaison des hauteurs de deux troncs de cône d'après leur patron.
 C20 : hauteur d'un tronc de cône de patron donné.
 C21 : aire latérale d'un tronc de cône de révolution.
 C22 : volume d'un tronc de cône de révolution.

4e série : Solides de révolution.

SR1 : dis-moi qui m'a engendré ? p. 53
 SR2 : rotation d'une plaque rectangulaire (1) .
 SR3 : rotation d'une plaque rectangulaire (2) .
 SR4 : rotation d'une plaque rectangulaire (3) .
 SR5 : rotation d'une plaque rectangulaire (4) .
 SR6 : rotations d'une plaque rectangulaire et d'une plaque triangulaire, comparaison des volumes.
 SR7 : rotation d'un triangle rectangle autour d'un de ses côtés.
 SR8 : rotation d'une plaque triangulaire autour d'un de ses côtés.

SR9 : rotation d'une plaque triangulaire autour d'un axe passant par un de ses sommets.
SR10 : rotation d'un triangle rectangle autour d'un axe parallèle à un des côtés de l'angle droit (1) .
SR11 : rotation d'un triangle rectangle autour d'un axe parallèle à un des côtés de l'angle droit (2) .
SR12 : rotation d'un triangle rectangle autour d'un axe parallèle à un des côtés de l'angle droit (3) .

5e série : Solides inscrits dans un solide.

SI1 : cylindres de révolution inscrits dans une sphère.
SI2 : cônes de révolution inscrits dans une sphère.
SI3 : prismes droits à base carrée inscrits dans une sphère.
SI4 : pyramides régulières de base un triangle équilatéral inscrites dans une sphère.
SI5 : cylindres inscrits dans un cône.
SI6 : cônes circonscrits à une sphère.
SI7 : troncs de cône circonscrits à une sphère.
SI8 : octaèdre inscrit dans un cube.
SI9 : tétraèdre régulier inscrit dans un cube.
SI10 : solides de BELL.
SI11 : tétraèdres associés de MOEBIUS.

p. 66

Fiche PC1 (niveau A)

La perspective cavalière conserve le rapport des distances sur une même droite donc, en observant la figure, on peut conclure que dans la réalité :

K est le milieu de [AD]

I celui de [AK]

N celui de [KC]

$$\frac{AJ}{AB} = \frac{1}{3} \text{ et } \frac{KM}{KB} = \frac{1}{4}$$

1. On déduit alors que $AI = \frac{1}{2} \text{ m}$, $AJ = \frac{1}{3} \text{ m}$. Or $\widehat{BAK}$ est un angle droit ; en utilisant le théorème de Pythagore, on a $IJ = \frac{\sqrt{13}}{6} \approx 0,6 \text{ m}$.

2. De même, dans le triangle rectangle BAK, on a $BK = \sqrt{2} \text{ m}$.

$$\text{D'où } BK = KC = \sqrt{2} \text{ m}, KM = \frac{KB}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4} \text{ m}, KN = \frac{KC}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ m}.$$

3. Comme $BK^2 + KC^2 = BC^2$, la réciproque du théorème de Pythagore nous permet de conclure que $\widehat{BKC}$ est un angle droit.

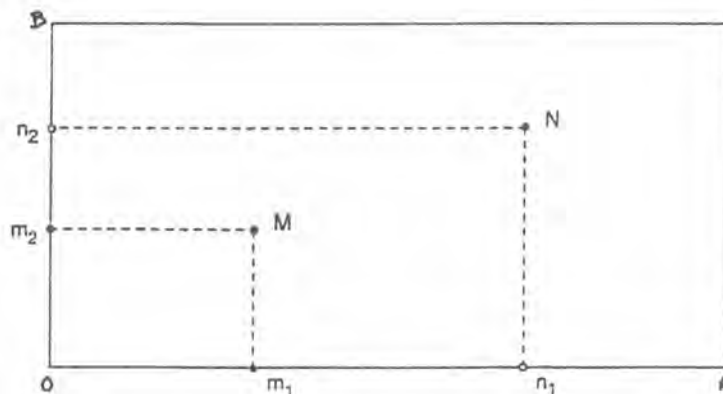
Autre méthode : $\widehat{AKB} = \widehat{DKC} = 45^\circ$.

On trouve $MN = \frac{\sqrt{10}}{4} \approx 0,79 \text{ m}$ en utilisant le théorème de Pythagore.

Fiche PC2 (niveau A)

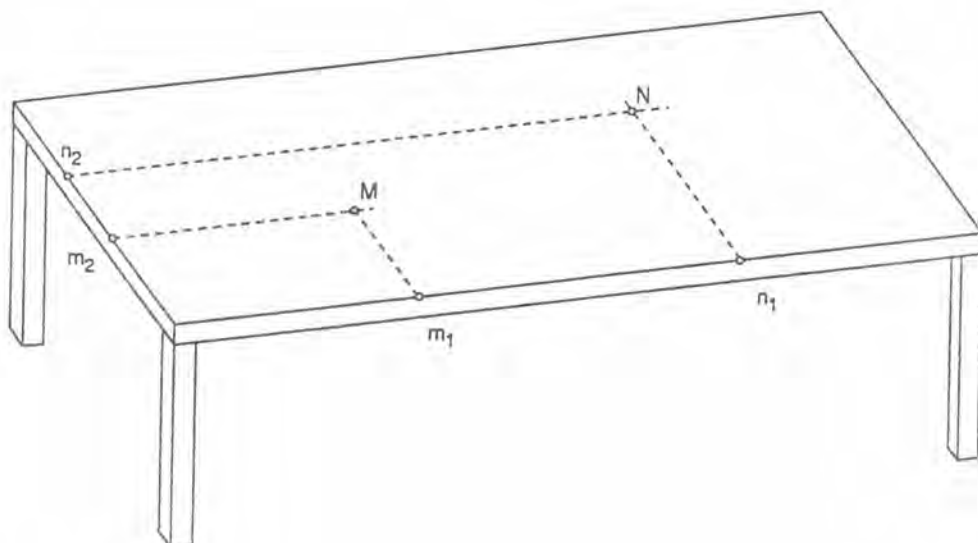
On utilise toujours la même propriété : "la perspective cavalière conserve le rapport des distances sur une même droite".

- a) On a $Om_1/OA = \frac{3}{10}$ et $Om_2/OB = \frac{2}{5}$ donc on peut placer correctement les points m_1 et m_2 sur le dessin n° 2. m_1 et m_2 sont les projetés orthogonaux du point M , on a placé le point M sur le dessin n° 2 en tenant compte que la perspective cavalière conserve le parallélisme.



b)

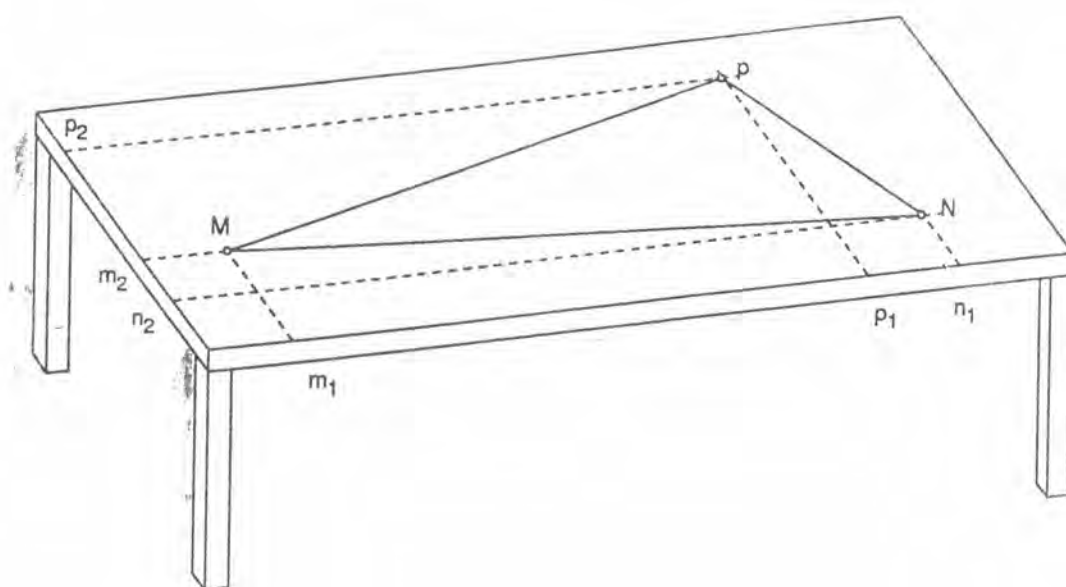
- On construit sur le dessin n° 1 les projetés orthogonaux n_1 et n_2 de N .
- On les place sur le dessin n° 2 comme précédemment.
- On en déduit la position de N .



- c) Pour placer un point sur le dessin n° 2, on peut construire ses projetés orthogonaux sur le dessin n° 1 et les reproduire sur le dessin n° 2.

Fiche PC3 (niveau A)

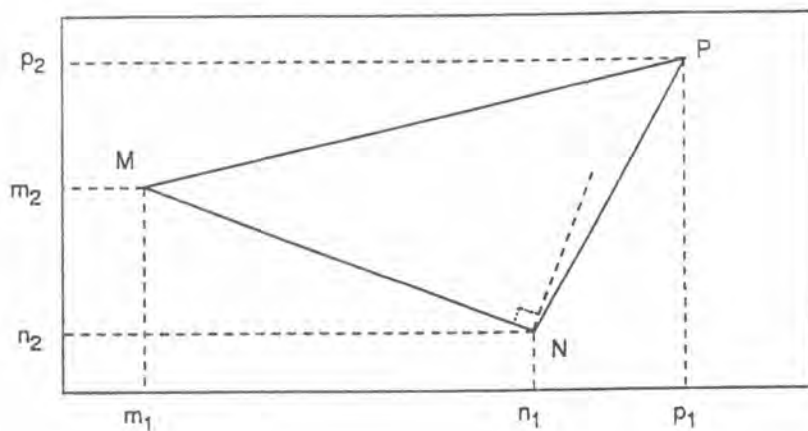
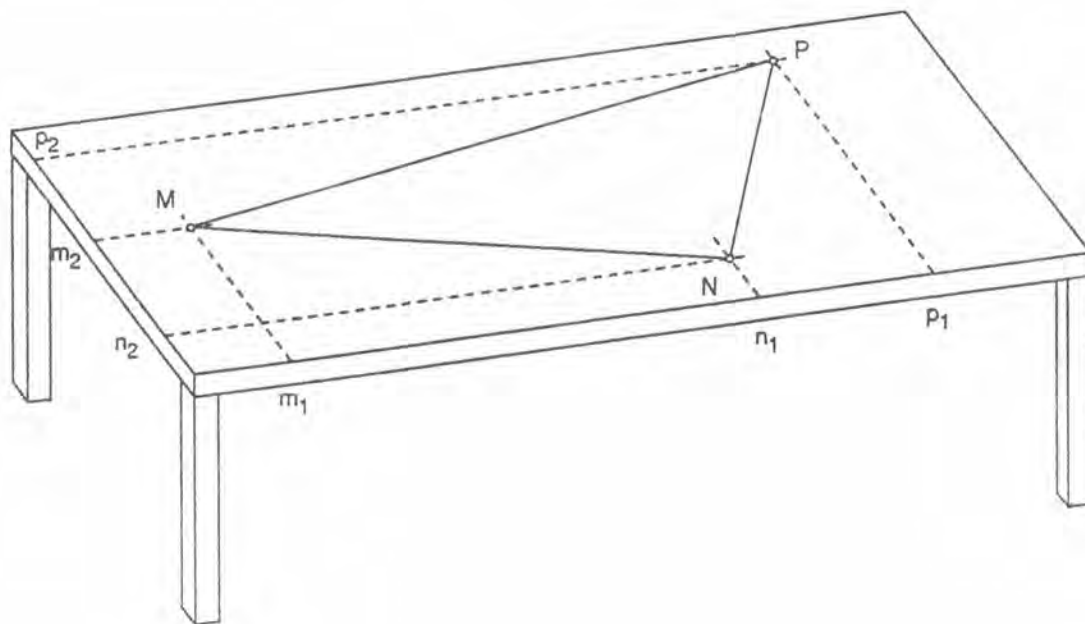
Il suffit de construire, sur le dessin n° 2, les sommets de l'équerre en utilisant la méthode de construction introduite dans la fiche PC2 .



Fiche PC4 (niveau A)

Sur le dessin en perspective, un des angles de l'équerre semble droit mais il y a très peu de chance qu'il le soit.

Pour le justifier, il nous suffit de dessiner cette table vue de dessus en représentant par exemple 1 m par 5 cm, puis de représenter l'équerre en utilisant la méthode des projetés orthogonaux mise en évidence dans la fiche PC2. Donc l'élève n'a pas représenté une équerre.



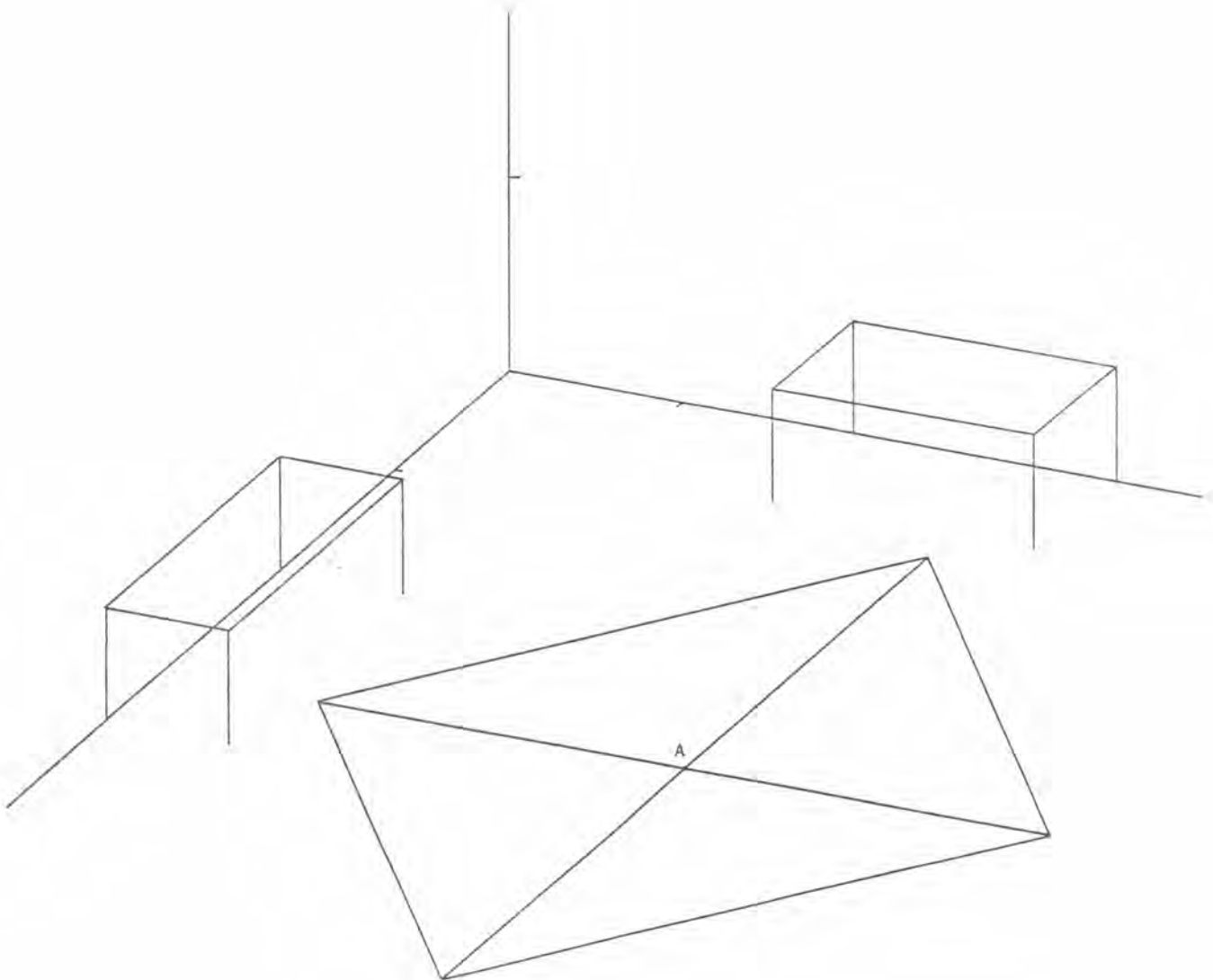
Fiche PC5 (niveau A)

1. Pour construire les tables, il faut tenir compte :

- de l'unité sur les axes, matérialisée sur le coin du mur,
- du fait que : "la perspective cavalière conserve le parallélisme" ..

2.

- a) Les diagonales sont parallèles au bord des murs.
- b) Chaque diagonale mesure $3\sqrt{2}$ m .
- c) Pour dessiner le tapis, on trace les supports des diagonales et on reporte les longueurs en tenant compte des unités sur les axes.



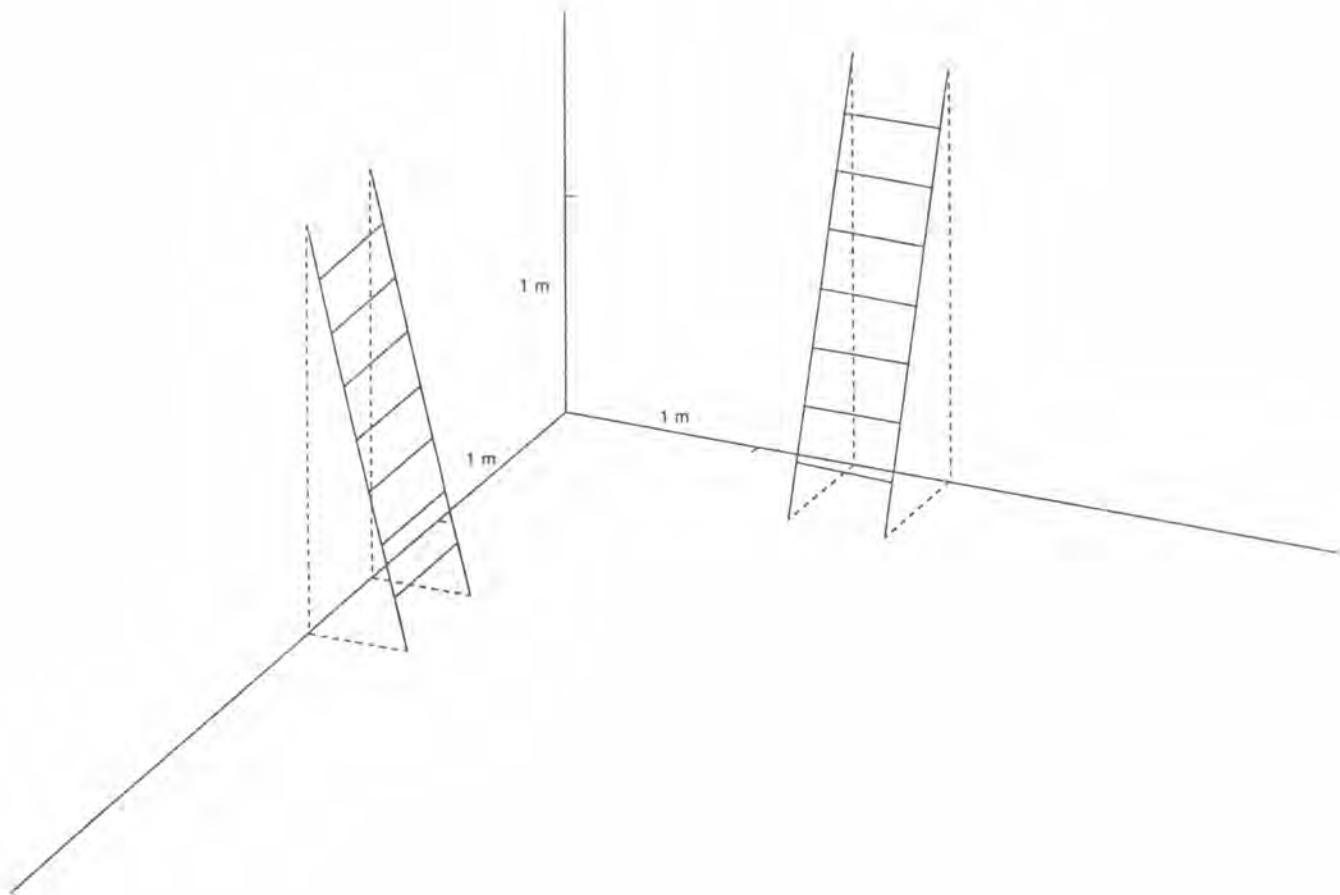
Fiche PC6 (niveau A)

Les points de contact avec le sol sont déterminés à partir de droites tracées sur le sol et parallèles à chacun des murs.

Le théorème de Pythagore permet de calculer la hauteur des points de contact des échelles avec les murs.

$$h = \sqrt{2^2 - 0,5^2} \approx 1,936 .$$

Les barreaux pourront être dessinés au compas en recherchant des milieux successifs.



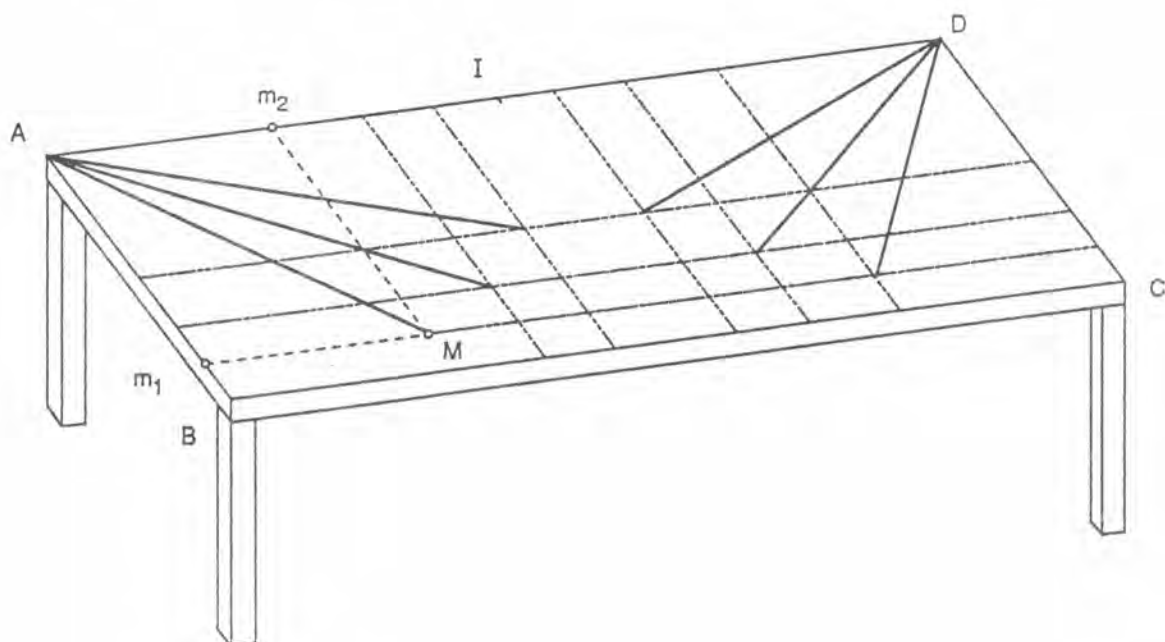
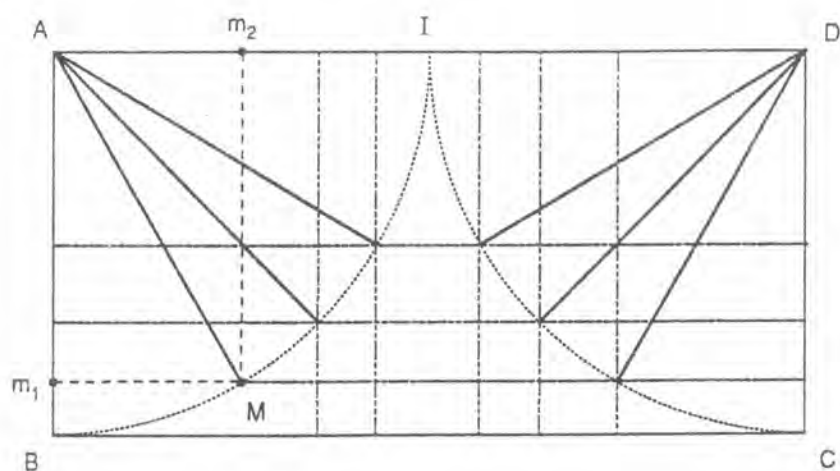
Fiche PC7 (niveau A)

Pour obtenir le dessin en perspective, il suffit de repérer sur la vue de dessus les différentes positions de l'extrémité de la tige et de les reporter selon la technique dégagée dans la fiche PC1.

Par exemple, pour localiser l'extrémité M de la tige dans la première position, on utilise :

$$Am_1 = AM \cos 30^\circ = AB \cos 30^\circ = AB \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$Am_2 = AM \sin 30^\circ = AB \sin 30^\circ = \frac{1}{2} AB$$



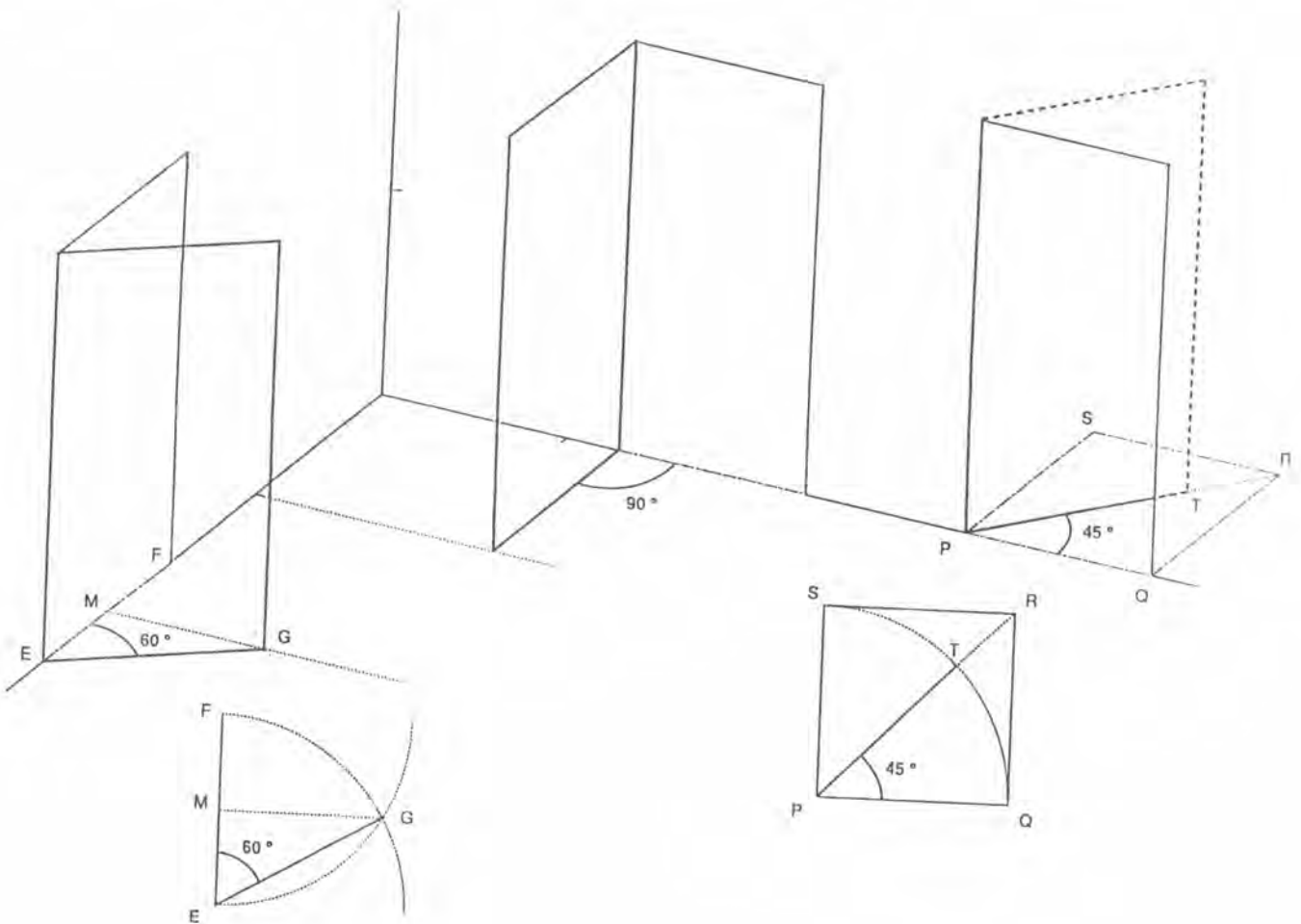
Fiche PC8 (niveau A) -

Porte n° 1 : Ouverte à 90°, la porte n° 1 est parallèle à l'un des murs. Sa construction est immédiate.

Porte n° 2 : Ouverte à 45°, la porte n° 2 prend, au sol, la direction de la diagonale (PR) du carré PQRS.

Sur cette diagonale, on reporte la longueur $PT = \frac{PR}{\sqrt{2}}$ (car $PT = PQ = \frac{PR}{\sqrt{2}}$).

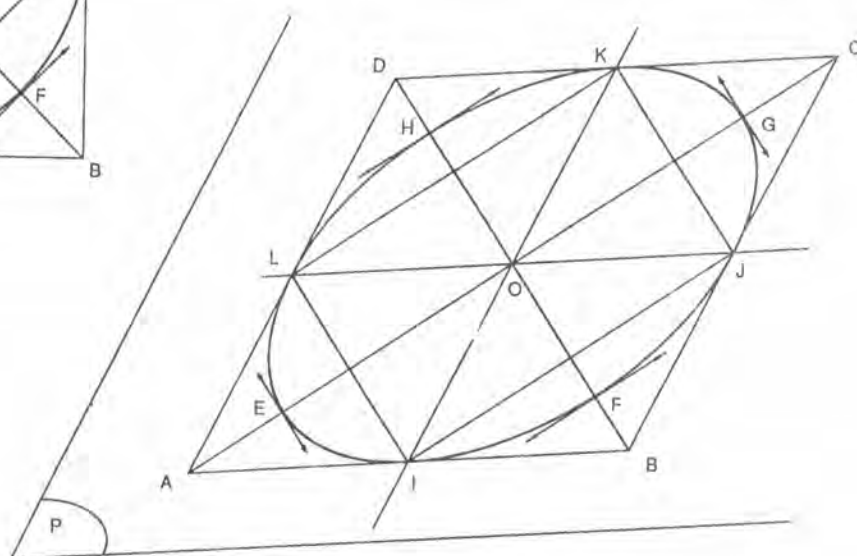
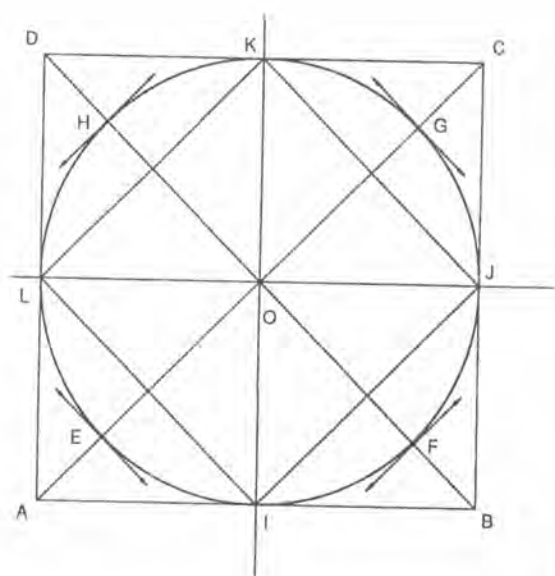
Porte n° 3 : La porte est ouverte à 60° : $\widehat{FEG} = 60^\circ$. Or $EF = EG$. Le triangle EFG est donc équilatéral. Soit M le milieu de [EF]. Sur la perpendiculaire à (EF) passant par M on place le point G vérifiant $MG = EF \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

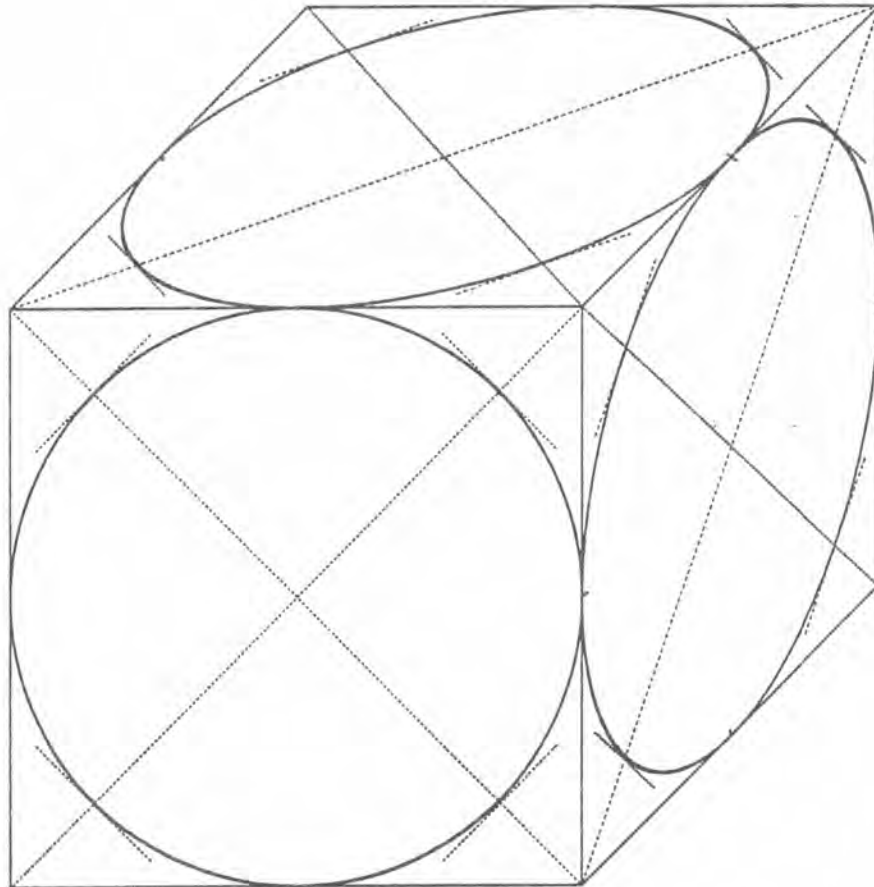


Fiche PC9 (niveau A)

$$OE = OI = \frac{OA}{\sqrt{2}}.$$

La tangente en E au cercle et la droite (BD) sont parallèles, car perpendiculaires toutes les deux à (OE).





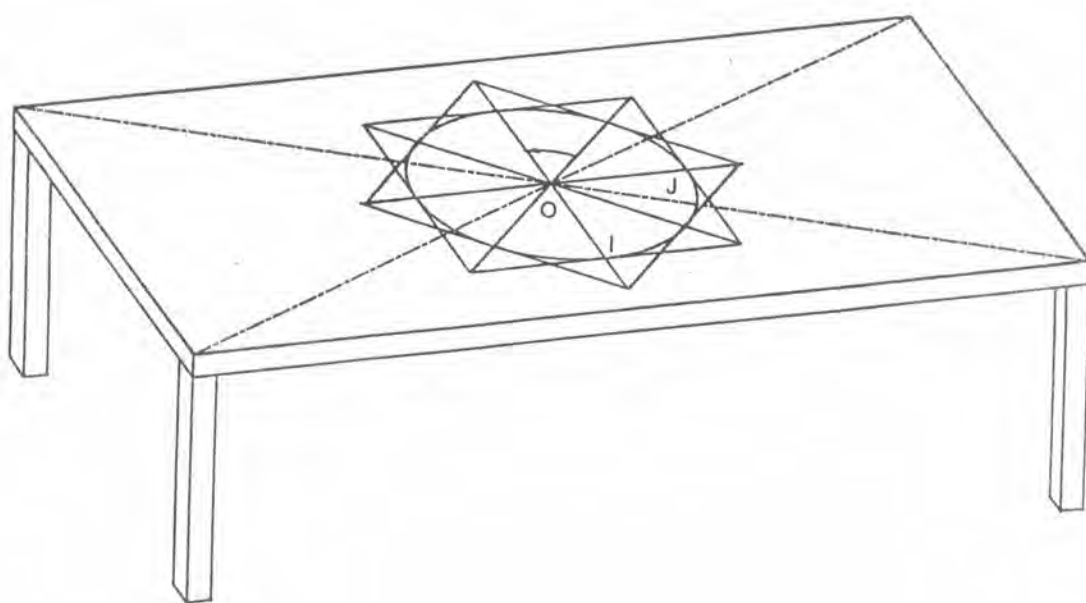
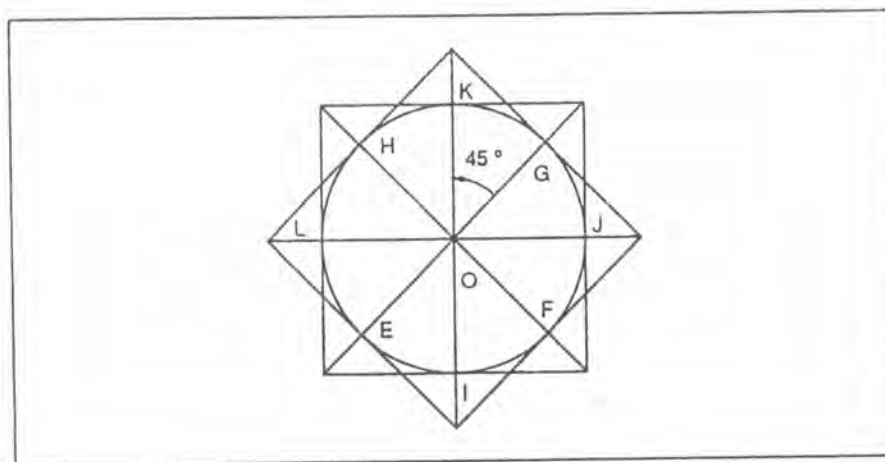
Fiche PC11 (niveau A)

La vue de dessus met en évidence les huit points particuliers I, F, J, G, K, H, L, E, utilisés dans la fiche PC9, et une propriété intéressante : "les médianes de chaque carré ont même direction que les diagonales de l'autre carré".

Pour réaliser le dessin en perspective :

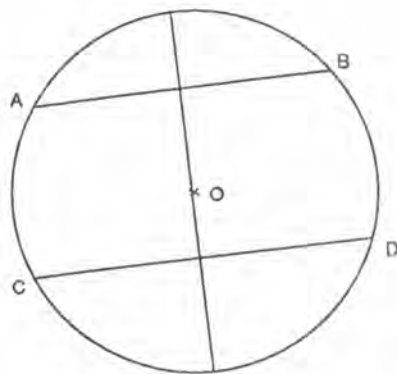
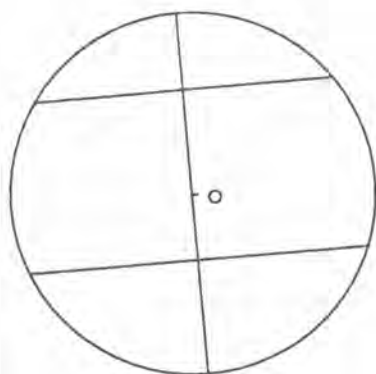
- on détermine le centre O de la table, qui sera aussi celui des napperons, en traçant les diagonales du rectangle ;
- on trace les demi-médianes [OI] et [OJ] du premier napperon en respectant les rapports de longueurs.

La méthode développée dans la fiche PC9 permet alors d'achever le dessin.

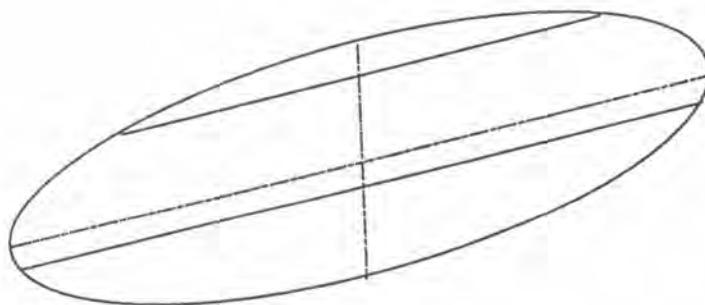


Fiche PC12 (niveau A)

1. $OA = OB$; O appartient à la médiatrice de $[AB]$ donc (OI) est perpendiculaire à (AB) . De même (OJ) est perpendiculaire à (CD) ; deux perpendiculaires à deux droites parallèles sont parallèles, O étant commun, elles sont confondues, donc O appartient à (IJ) .
2. On trace deux cordes parallèles et leurs milieux ; la droite joignant les deux milieux est un diamètre dont on détermine le milieu O ; O est le centre du cercle.



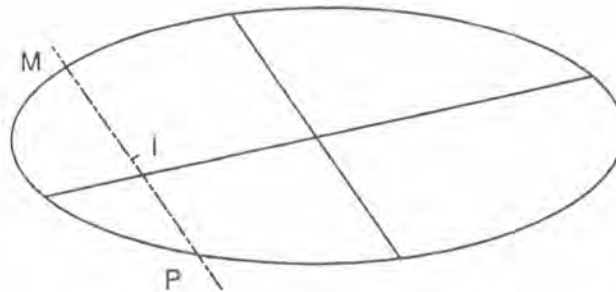
3. On prend deux cordes parallèles et leurs milieux ; la droite joignant les deux milieux est un diamètre, son milieu est le centre du disque.
4. Par ce centre on trace une parallèle aux deux cordes parallèles qui nous détermine quatre parts égales.



Fiche PC12 (niveau A) - suite

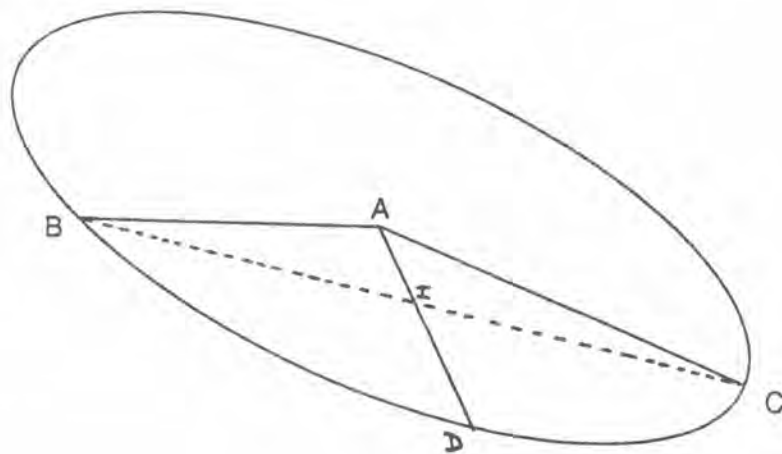
5. On trace une corde parallèle à l'un des diamètres tracés ; si les segments déterminés sur cette corde par l'autre diamètre ont même longueur, les parts sont égales.

On constate que $MI \neq IP$, donc les quatre parts ne sont pas égales.

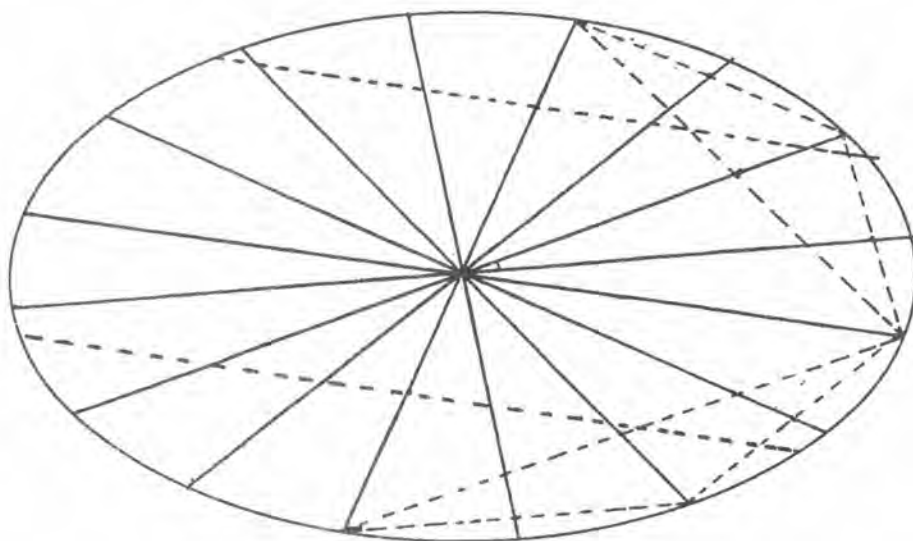


Fiche PC13 (niveau A)

1. Il suffit de tracer $[BC]$ et d'en prendre le milieu I . En effet, la droite (AI) est la médiatrice de $[BC]$, donc, dans le triangle isocèle ABC , la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$.



2. On partage en quatre parties égales par la méthode donnée par la fiche PC12, puis on utilise la méthode décrite ci-dessus.



Fiche PC14 (niveau A)

(CD) est la médiatrice de [AO], donc I est le milieu de [AO] et (AO) est perpendiculaire à la corde [CD], donc I est aussi le milieu de [CD]. B appartient à la médiatrice de [CD], donc $BC = BD$.

On peut utiliser deux méthodes pour achever.

Première méthode :

— dans le triangle rectangle (CIB) :

$$CB^2 = CI^2 + IB^2$$

— dans le triangle rectangle (COI) :

$$CO^2 = CI^2 + IO^2$$

$$R^2 = CI^2 + \frac{R^2}{4}$$

$$CI^2 = \frac{3R^2}{4} \quad \text{d'où} \quad CI = \frac{R\sqrt{3}}{2}$$

$$CB^2 = \frac{3R^2}{4} + \left(\frac{3R}{2}\right)^2 = \frac{12R^2}{4} \quad \text{donc} \quad CD = R\sqrt{3}$$

$$CB^2 = 3R^2 \quad \text{d'où} \quad CB = R\sqrt{3}$$

$$CB = CD = BD = R\sqrt{3}$$

Deuxième méthode :

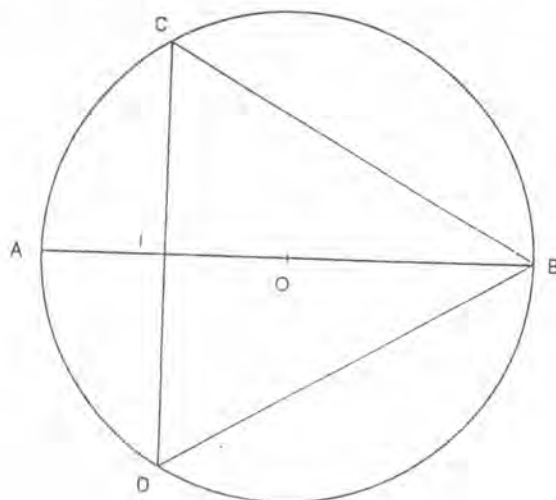
D'après le théorème de l'angle inscrit : $\widehat{CBD} = \frac{1}{2} \widehat{COD}$.

Or le triangle ACO est équilatéral car $OC = OA$,
et $CA = CO$ puisque (CD) est la médiatrice de [AO]

On a $\angle COA = 60^\circ$ d'où $\widehat{COD} = 120^\circ$.

$$\text{et } \widehat{CBD} = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ.$$

Le triangle CBD isocèle a un angle de 60° , il est donc équilatéral.



Fiche PC14 (niveau A) - suite

On trace deux cordes parallèles $[MN]$ et $[PQ]$. On place les milieux U et V de $[MN]$ et $[PQ]$.

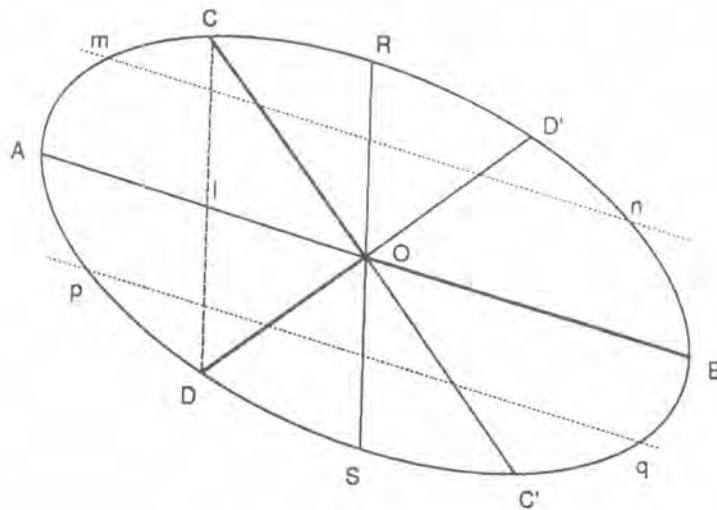
La droite (UV) coupe le cercle en R et S : $[RS]$ est un diamètre du cercle ; son milieu O est le centre du cercle.

La parallèle à (MN) passant par O coupe le cercle en A et B : $[AB]$ est le diamètre perpendiculaire au diamètre $[RS]$.

Soit I le milieu de $[AO]$. D'après la question 1, la parallèle à (RS) passant par I coupe le cercle en deux points C et D tels que BCD soit un triangle équilatéral.

Les angles $\widehat{COB}$, $\widehat{BOD}$ et $\widehat{DOC}$ sont donc égaux.

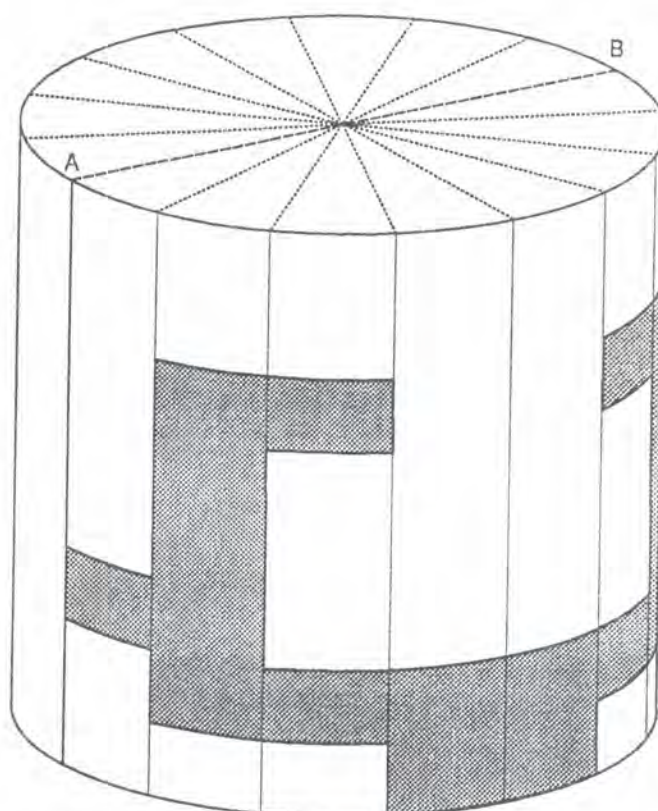
Pour partager en six parties égales, il suffit de tracer les symétriques C' et D' de C et D par rapport à O : les points A, C, D', B, C', D sont les sommets d'un hexagone régulier.



Fiche PC15 (niveau A)

Après subdivision du cercle supérieur, on trace les segments verticaux qui partent des points de la subdivision vers le bas de la boîte.

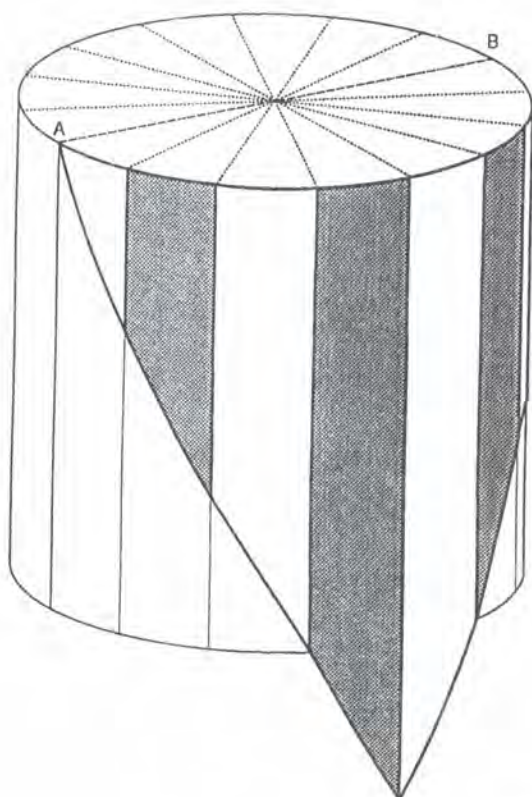
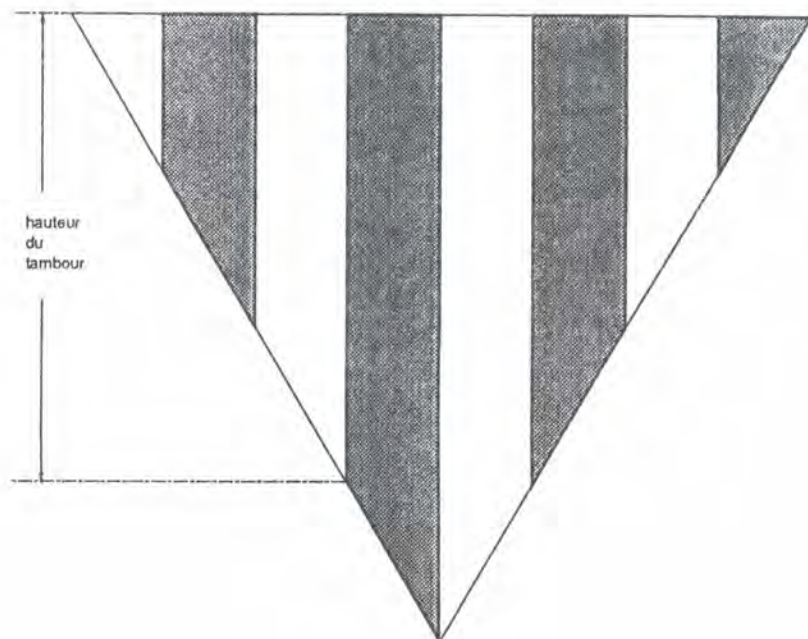
Ensuite, on reporte les longueurs qui apparaissent sur l'étiquette.



Fiche PC16 (niveau A)

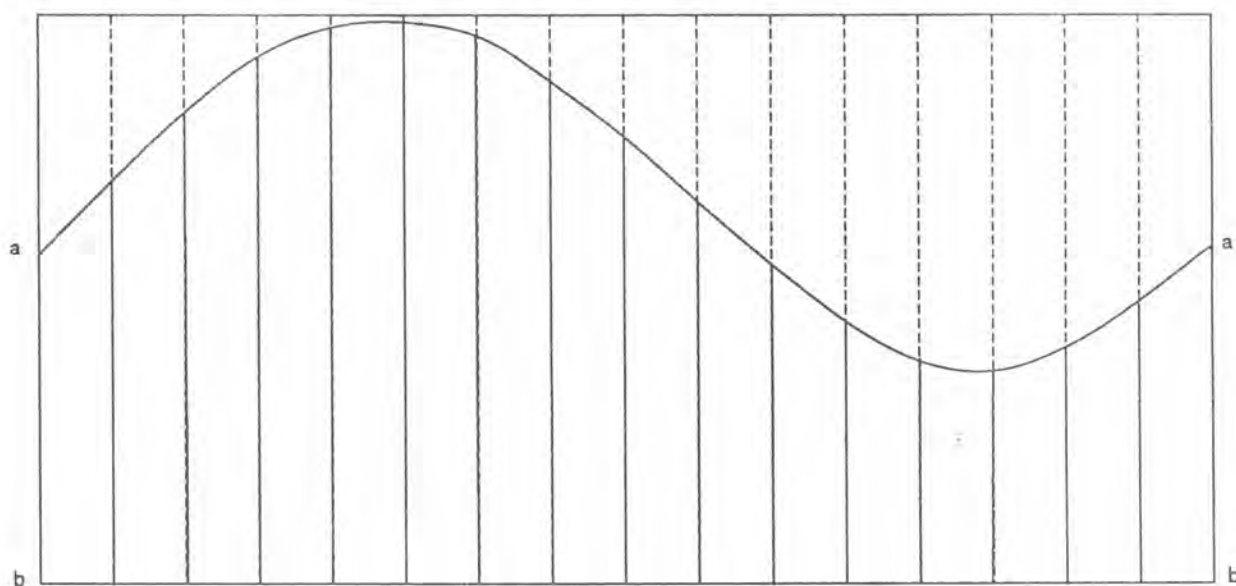
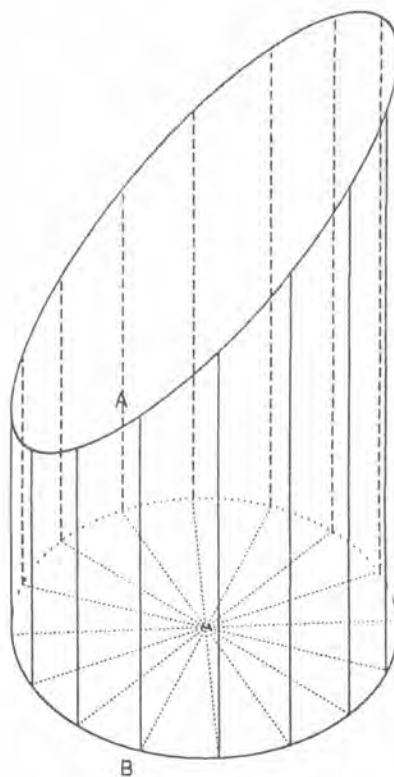
Après subdivision du cercle supérieur, on trace les segments verticaux qui partent des points de la subdivision vers le bas du tambour.

On reporte ensuite, les longueurs qui apparaissent dans le dessin du foulard.

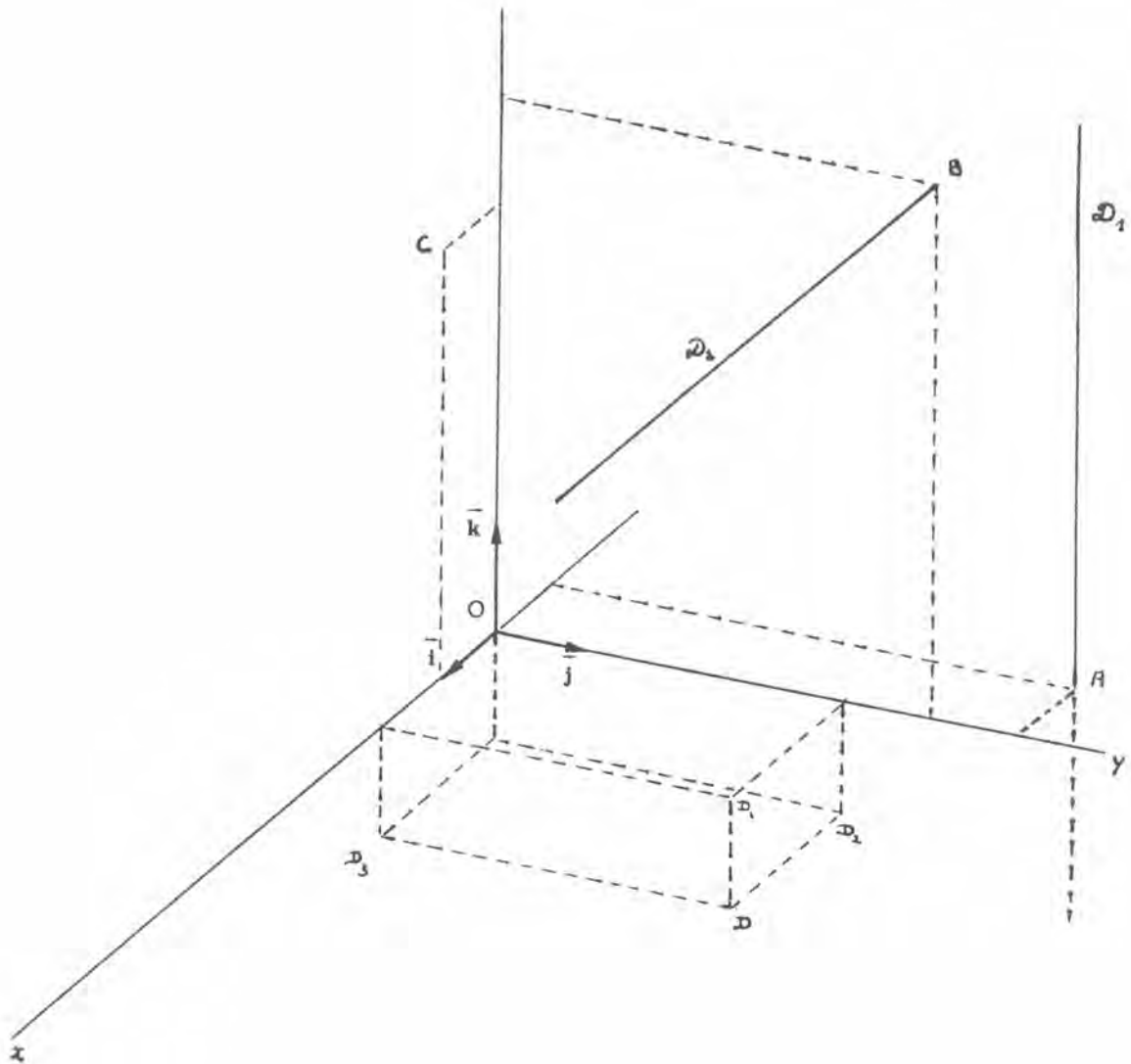


Fiche PC17 (niveau A)

Après subdivision du cercle de base, on trace les parallèles à (AB) passant par les points de la subdivision. Il suffit de reporter les longueurs des segments ainsi déterminés sur le développement du cylindre.



a)

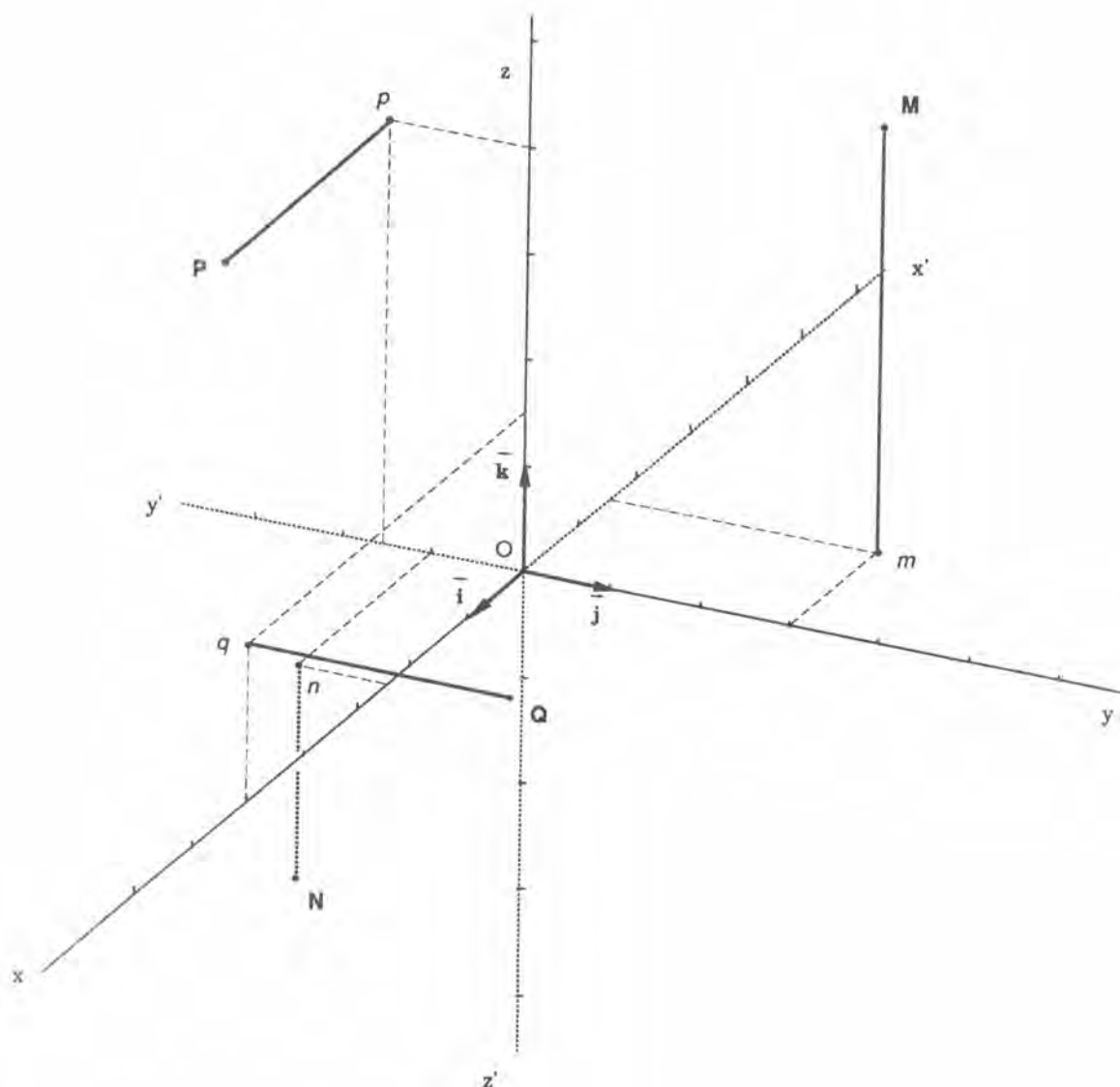


b) $D_1(2; 4; 0)$ $D_2(0; 2; -1)$ $D_3(2; 0; -1)$.

c) Les points qui se projettent en A sur (xoy) sont ceux de la droite $(A, \vec{k})$, ceux qui se projettent en B sur (yoz) sont ceux de la droite $(B, \vec{i})$.

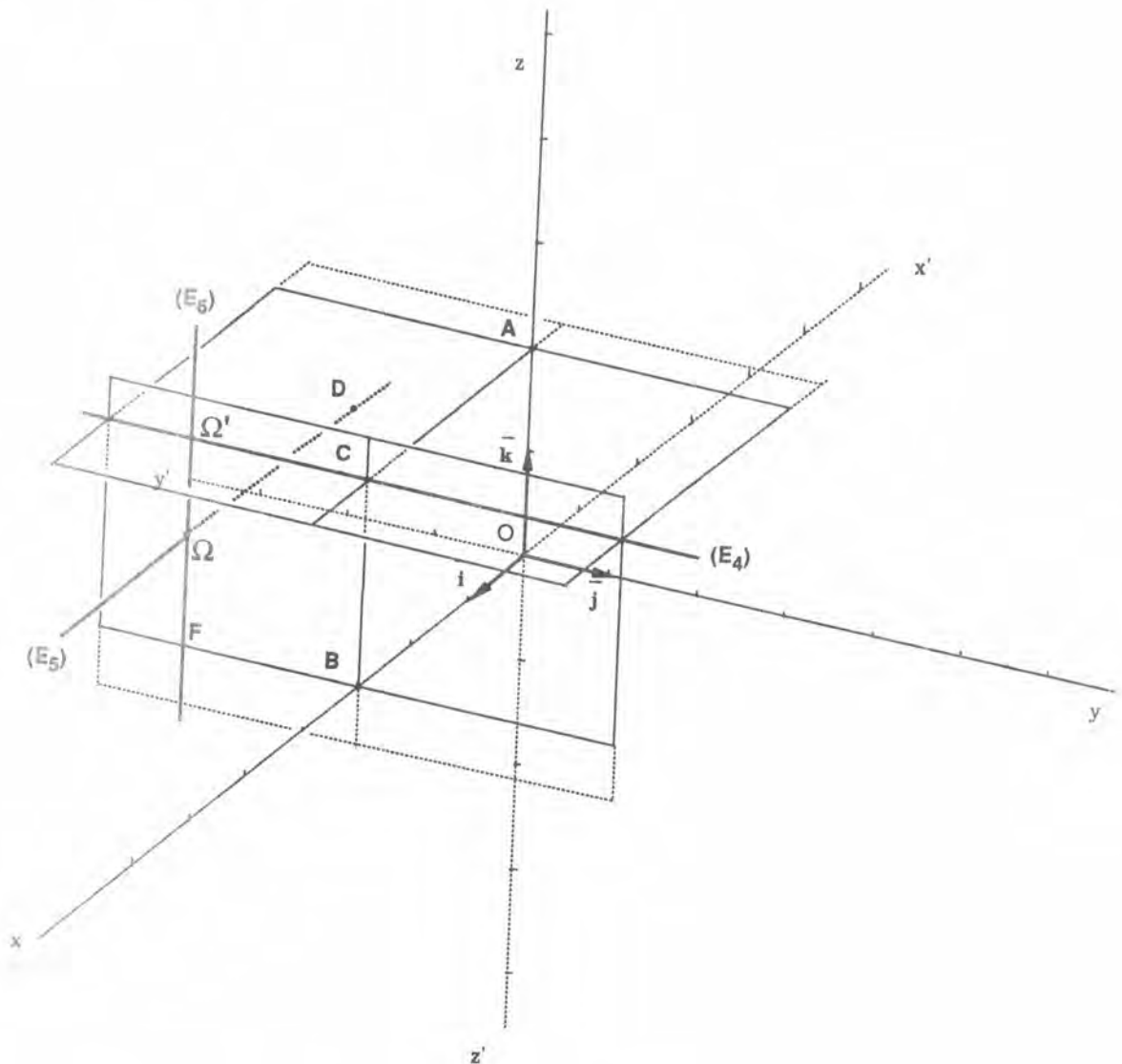
Il n'existe pas de point M de l'espace qui se projette, à la fois en A sur (xoy) et en B sur (yoz), car $(A, \vec{k}) \cap (B, \vec{i}) = \emptyset$.

Fiche R2 (niveau B)



- a) $M (-1,5 ; 3 ; 4)$
- b) $N (2,5 ; -1 ; -2)$
- c) $P (3 ; -1,5 ; 4)$
- d) $Q (5 ; 3 ; 1,5)$

Fiche R3 (niveau B)



1. E_1 est le plan (xOy) .
2. Soit $A(0; 0; 2)$.
 E_2 est le plan parallèle au plan (xOy) et contenant le point A .
3. Soit $B(3; 0; 0)$.
 E_3 est le plan parallèle au plan (yOz) et contenant B .
4. Soit $C(3; 0; 2)$.
 E_4 est l'intersection des plans E_2 et E_3 .
 E_4 est la droite $(C; \vec{j})$.
5. E_5 est la droite $(D; \vec{i})$ où $D(0; -2; 1)$.
6. E_6 est la droite $(F; \vec{k})$ où $F(3; -2; 0)$.
7. $E_4 \cap E_5 = \emptyset$
 $E_5 \cap E_6 = \{\Omega\}$ où $\Omega(3; -2; 1)$
 $E_4 \cap E_6 = \{\Omega'\}$ où $\Omega'(3; -2; 2)$.

Fiche R4 (niveau B)

1. a) L'ensemble E_0 est la droite (DC) . (figure 1)
- b) L'ensemble E_1 est la droite (AB) .
- c) L'ensemble E_3 est la bande de frontières E_0 et E_1 .
- d) L'ensemble E_4 est un plan parallèle à l'axe $z'Oz$.

Ce n'est pas facile de représenter un ensemble infini. On peut dessiner sa trace sur l'avant du trièdre (figure 2) .

2. L'ensemble des points $M(x,y,z)$ tels que $x + z = 3$ est un plan parallèle à l'axe $y'Oy$. On a dessiné sa trace sur l'avant du trièdre. (figure 3)
3. L'ensemble des points $M(x,y,z)$ tels que $y - z = 5$ est un plan parallèle à l'axe $x'Ox$. On a suggéré sa trace sur l'avant du trièdre. (figure 4)

Figure 1

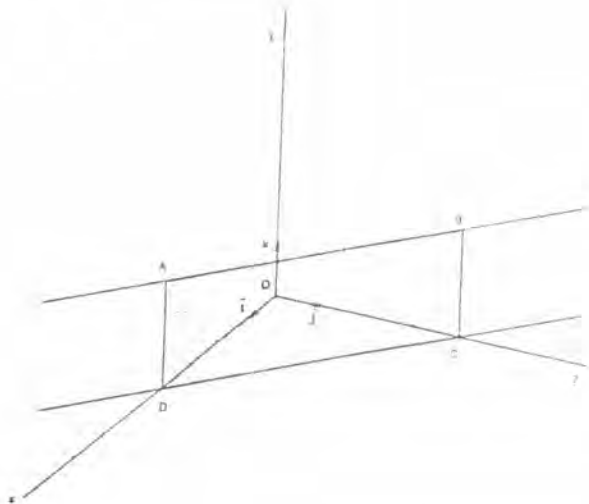


Figure 2

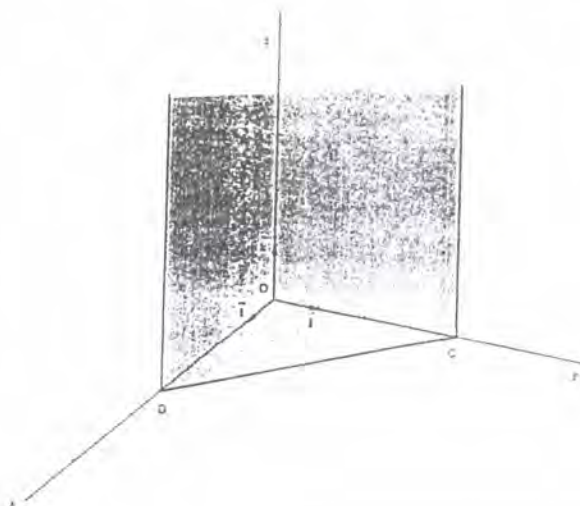


Figure 3

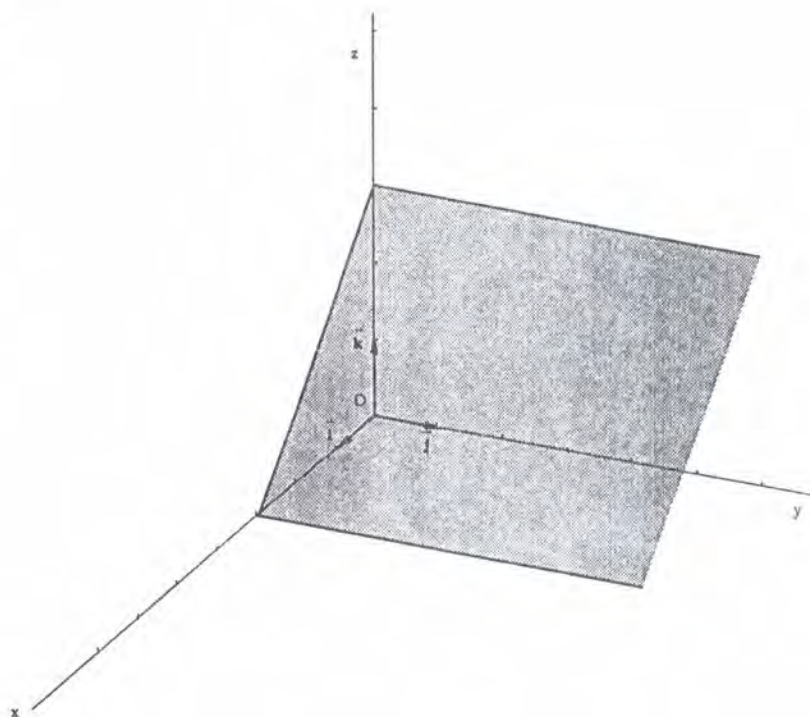
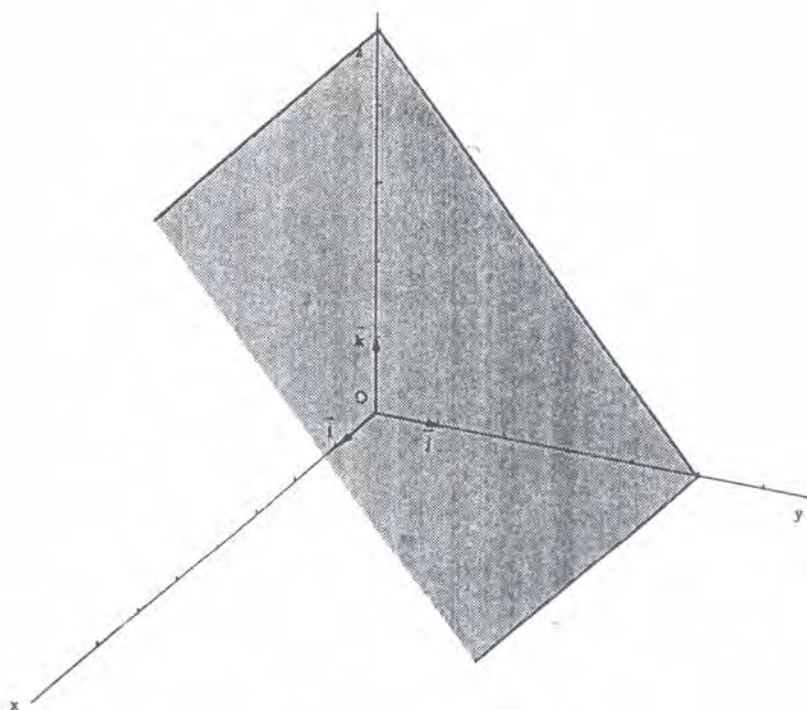
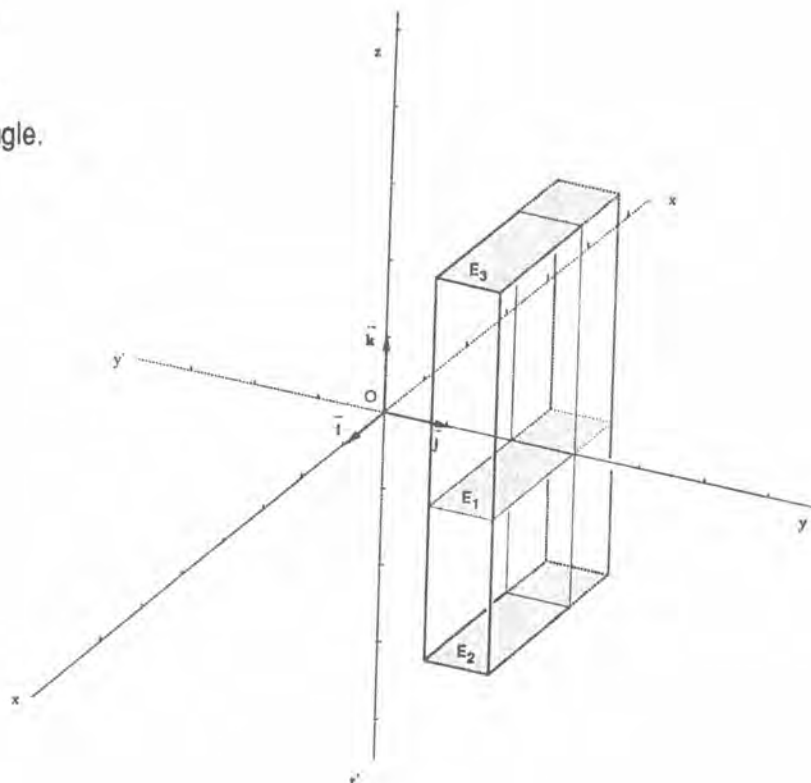


Figure 4



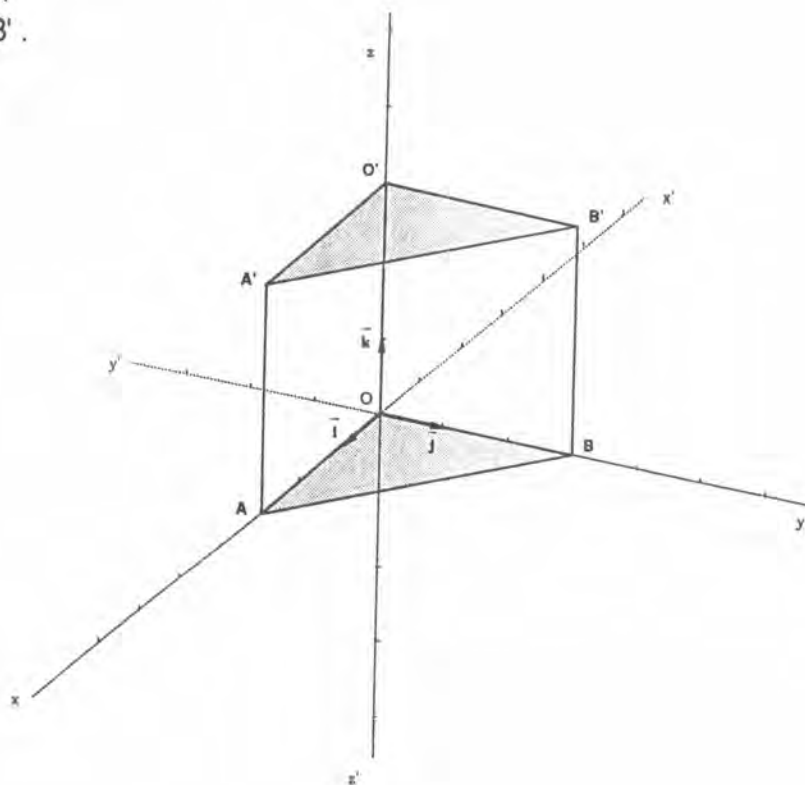
Fiche R5 (niveau B)

1. E_1 est le rectangle du "milieu"
2. E_2 est le rectangle "inférieur"
3. E_3 est le rectangle "supérieur"
4. E_4 est un parallélépipède rectangle.



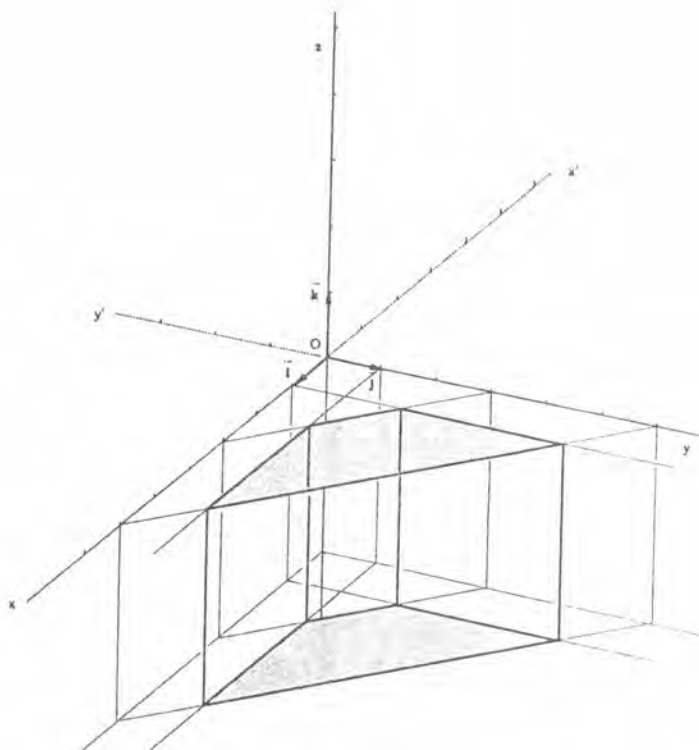
Fiche R6 (niveau B)

1. E_1 est le segment $[AB]$.
2. E_2 est le triangle OAB .
3. E_3 est le triangle $O'A'B'$.
4. E_4 est un prisme droit.



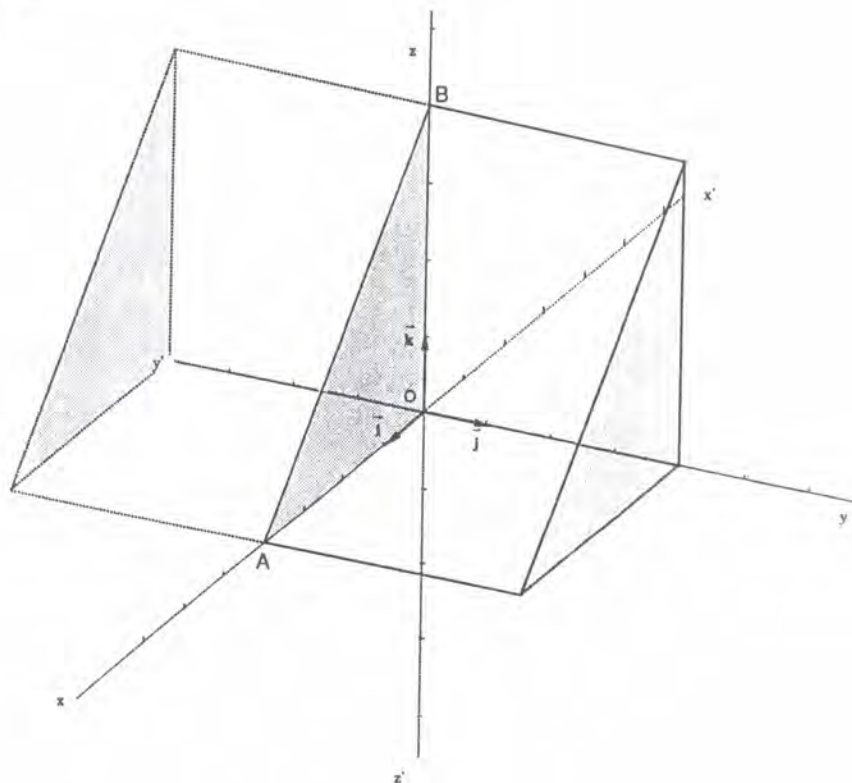
Fiche R7 (niveau B)

E_1 et E_2 sont des trapèzes.
Le solide obtenu est un prisme droit.



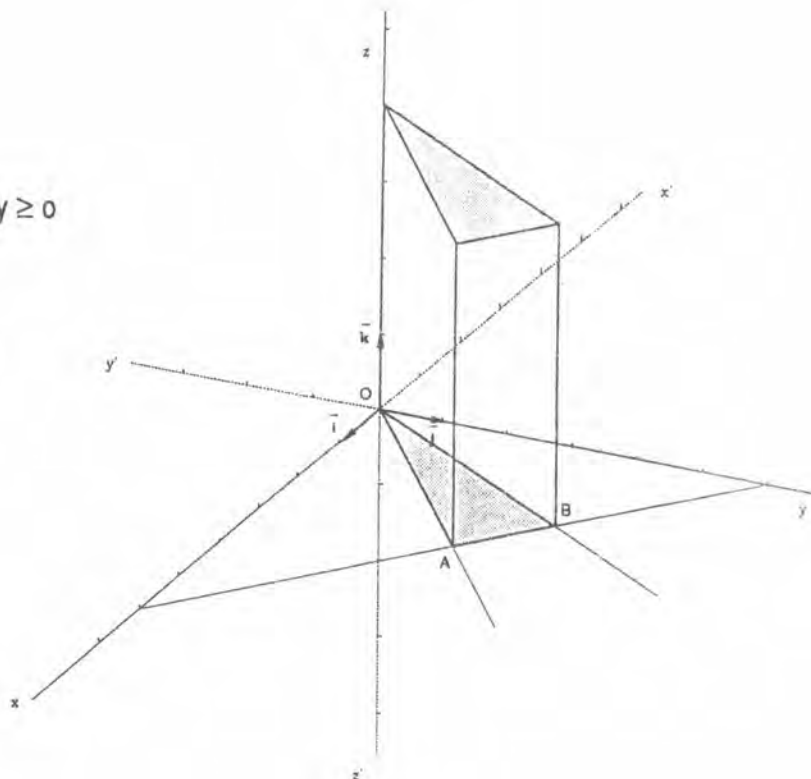
Fiche R8 (niveau B)

E_1 est le triangle OAB rectangle isocèle en O .
Le solide obtenu est un prisme droit.

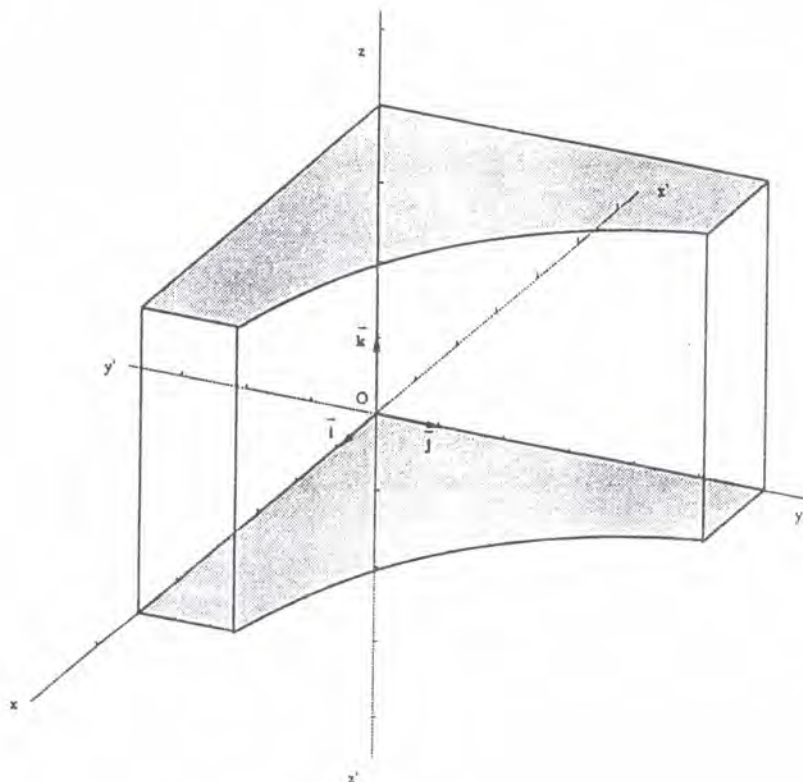


Fiche R9 (niveau B)

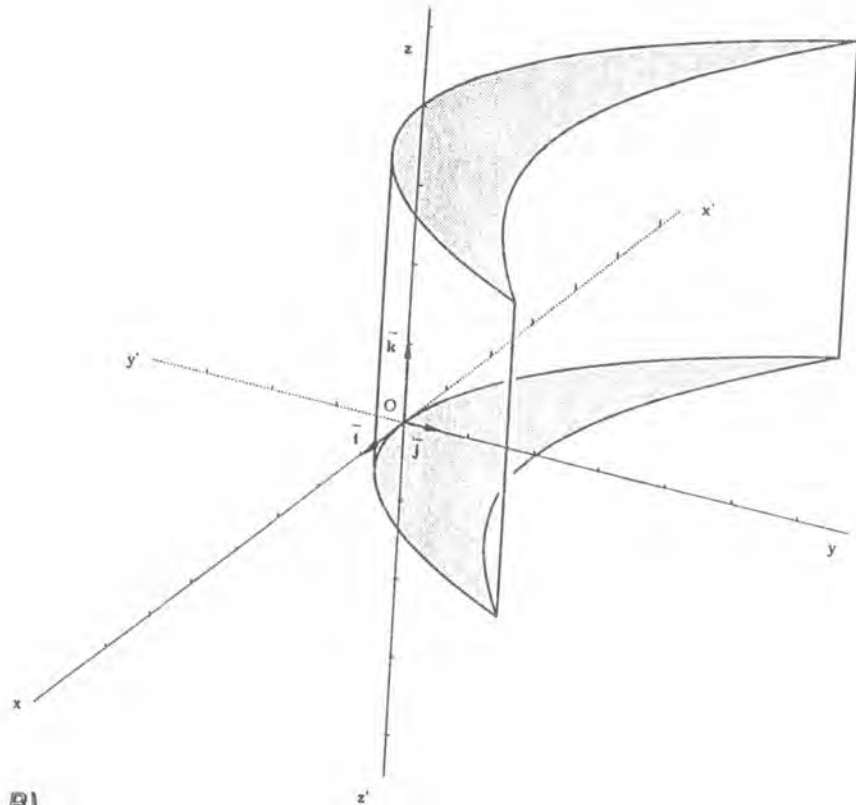
1. E_1 est la demi-droite $[AO]$.
 E_2 est la demi-droite $[BO]$.
2. l'inégalité $x \leq 3x$ implique $x \geq 0$ d'où $y \geq 0$
 E est le triangle OAB .
3. Le solide obtenu est un prisme droit.



Fiche R 10

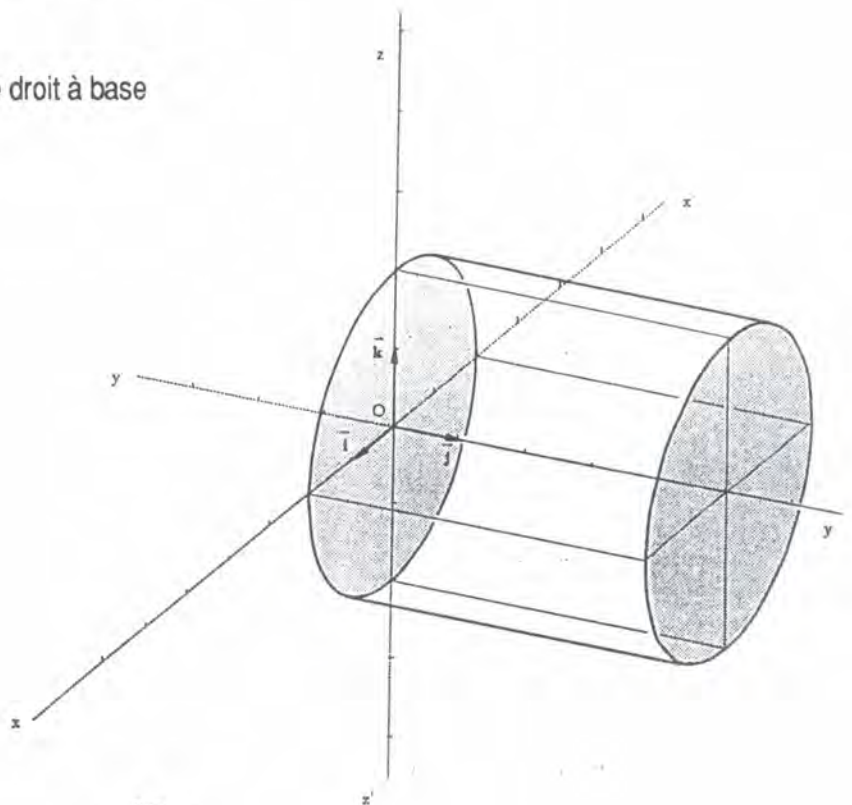


Fiche R11



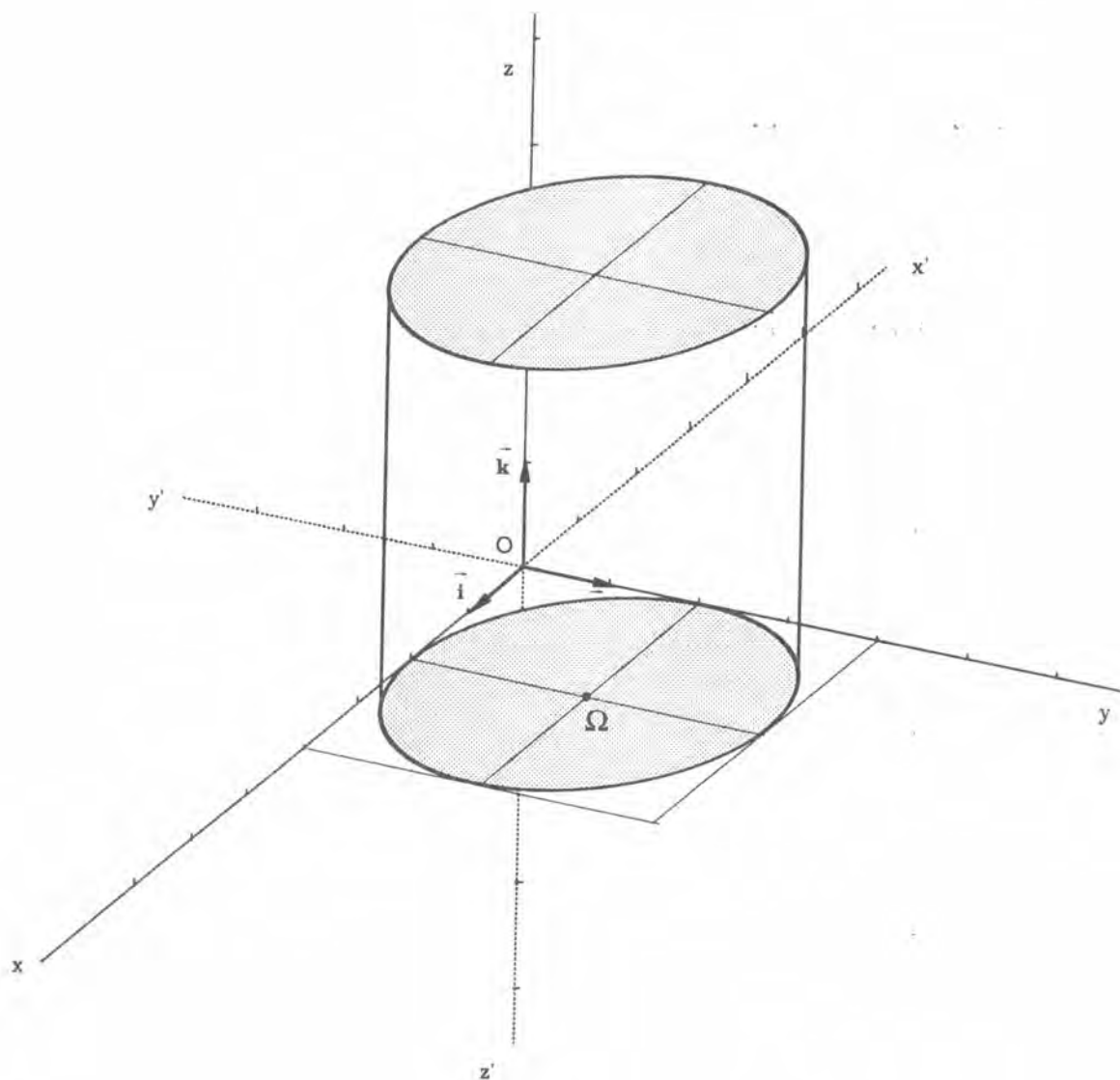
Fiche R12 (niveau B)

1. E_1 est le cercle de centre O et de rayon 2 ,
dans le plan $(O, \vec{i}, \vec{k})$.
2. E_2 est le disque de centre O et de rayon 2 ,
dans le plan $(O, \vec{i}, \vec{k})$.
3. Le solide obtenu est un cylindre droit à base
circulaire, d'axe $(O, \vec{j})$.



Fiche R13 (niveau B)

1. E_1 est le cercle de centre Ω et de rayon 2 dans le plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$ où Ω est le point de coordonnées $(2; 2; 0)$.
2. Le solide obtenu est un cylindre droit à base circulaire, d'axe $(\Omega, \vec{k})$.



Fiche R14 (niveau C)

1. a)

t	0	1	2	3	4
Mt	0; 0; 0	$\frac{1}{2}; \frac{3}{4}; \frac{1}{2}$	$1; \frac{3}{2}; -1$	$\frac{3}{2}; \frac{9}{4}; -\frac{3}{2}$	2; 3; -2

et on peut observer que $M_{-t} = s_0(M_t)$.

b) $\vec{OM}_1 : (\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, -\frac{1}{2})$, d'où $t\vec{OM}_1 : (\frac{t}{2}, \frac{3}{4}t, -\frac{t}{2})$; or $\vec{OM}_t : (\frac{t}{2}, \frac{3}{4}t, -\frac{t}{2})$, donc $\vec{OM}_t = t\vec{OM}_1$.

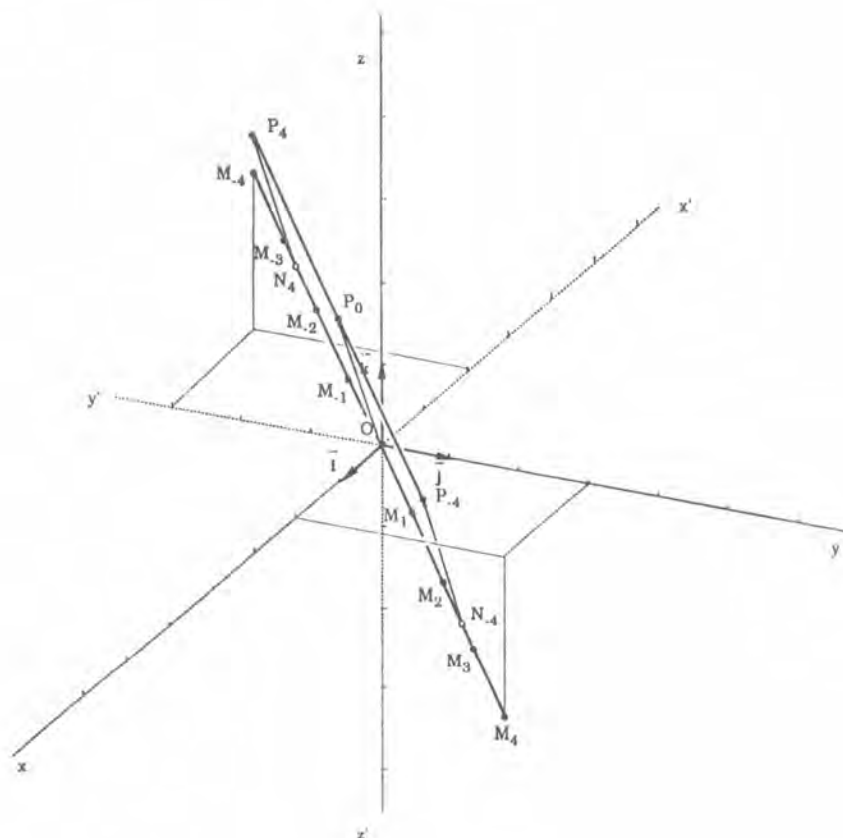
Ainsi $S_1 = \{t\vec{OM}_1, t \in [-4; 4]\}$ est le segment $[M_{-4}, M_4]$.

2. a) Les points de S_2 semblent tous se trouver sur S_1 .

b) $-\frac{2}{3}\vec{OM}_t : (-\frac{t}{3}, -\frac{t}{2}, \frac{t}{3})$, donc $\vec{ON}_t = -\frac{2}{3}\vec{OM}_t$ pour tout $t \in [-4, 4]$.

Ainsi S_2 est l'homothétique du segment S_1 par l'homothétie de centre O , de rapport $-\frac{2}{3}$.

3. $N_1P_1 : (1, 0, 2)$ est un vecteur fixe $\vec{u}$, donc $S_3 = t_{\vec{u}}(S_2)$, d'où son tracé en translatant les extrémités de S_2 .



Fiche R15 (niveau C)

1. a) En observant que $m(-t)$ et $m(t)$ sont dans le plan (xOy) et symétriques par rapport à $(x'x)$, on obtient rapidement le tracé des points m_k à partir du tableau suivant :

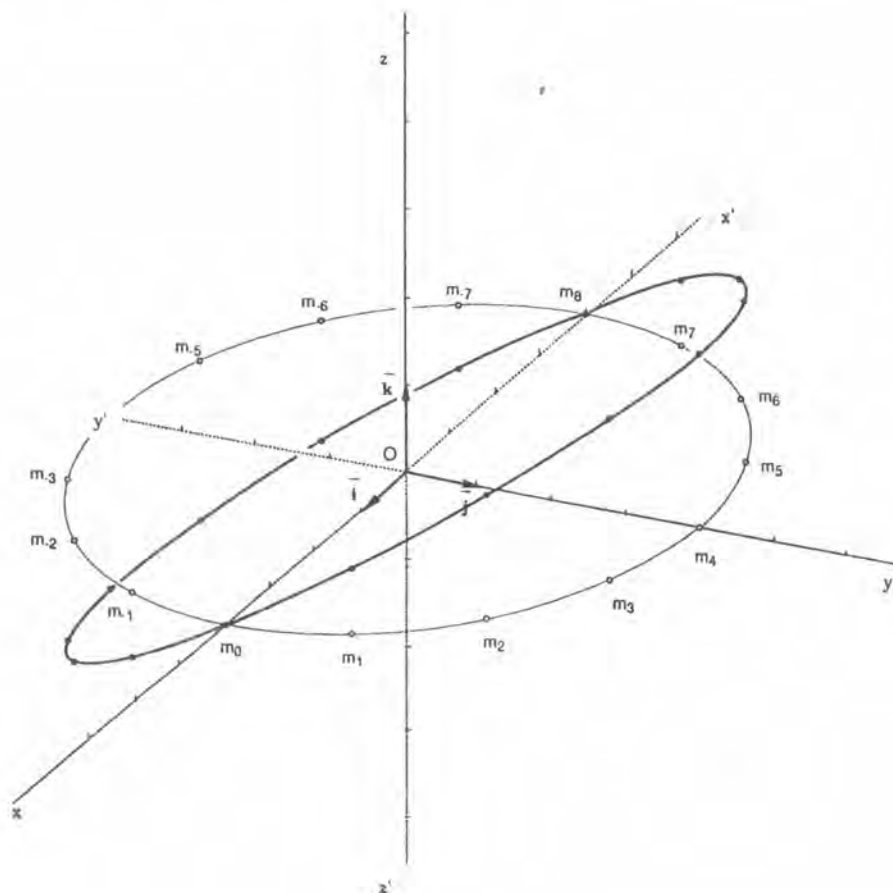
k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
coord. de m_k à 10^{-1} près	4 ; 0 ; 0	3,7 ; 1,5 ; 0	2,8 ; 2,8 ; 0	1,5 ; 3,7 ; 0	0 ; 4 ; 0	-1,5 ; 3,7 ; 0	-2,8 ; 2,8 ; 0	-3,7 ; 1,5 ; 0	-4 ; 0 ; 0

- b) $Om(t) = 4$. On en déduit que les points de C sont sur le cercle de centre O , de rayon 4, du plan xOy (car $z_m = 0$).

2. a) cf. figure : il suffit de "relever" convenablement chaque point m_k .

b) $x^2 + y^2 = 16$
 $-2 \leq z \leq 2$

les points de $\mathcal{E}$ sont donc sur la partie du cylindre droit de base C , limitée par les plans d'équation $z = -2$ et $z = 2$. De plus $y - 2z = 4 \sin t - 2 \cdot (2 \sin t) = 0$, donc les points de $\mathcal{E}$ sont à l'intersection du cylindre précédent et du plan d'équation $y - 2z = 0$ (défini par les droites sécantes en $O : (O, \vec{i})$ et (OM_4)).



Fiche R16 (niveau C)

1. a) On a $\cos(2\pi - t) = \cos t$ et $\sin(2\pi - t) = -\sin t$. Donc $m(t)$ et $m(2\pi - t)$ sont, dans le plan xOy , symétriques par rapport à $(x'x)$.

On obtient le tracé des points m_k à partir du tableau suivant :

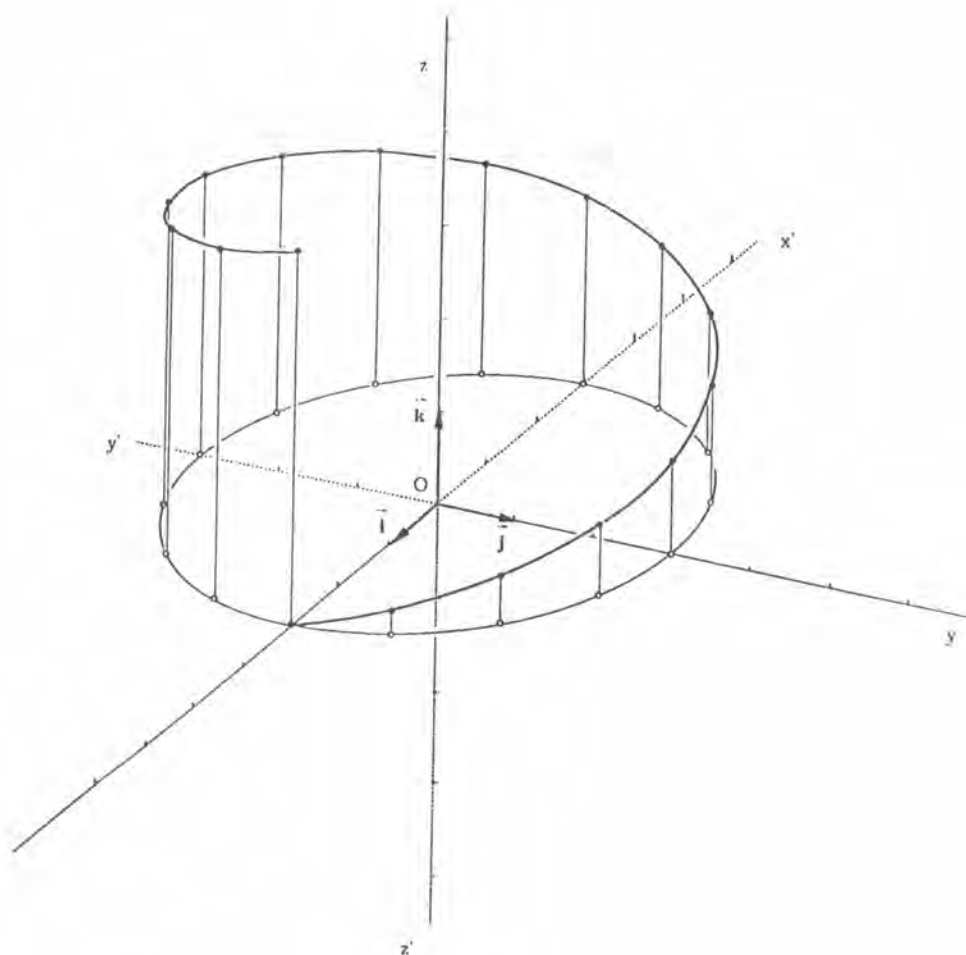
k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
coord. de m_k à 10^{-1} près	3 ; 0 ; 0	2,8 ; 1,1 ; 0	2,1 ; 2,1 ; 0	1,1 ; 2,8 ; 0	0 ; 3 ; 0	-1,1 ; 2,8 ; 0	-2,1 ; 2,1 ; 0	-2,8 ; 1,1 ; 0	-3 ; 0 ; 0

- b) $Om(t) = 3$. Les points de C sont donc sur le cercle de centre O , de rayon 3 du plan xOy (car $z_m = 0$).

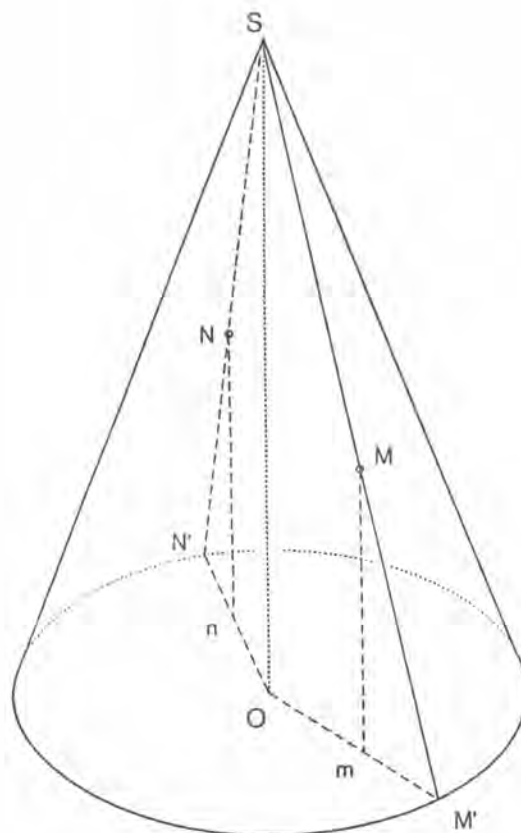
2. a) cf. figure : il suffit de relever convenablement chaque point m_k (on remarquera que $z_{M(k\pi/8)} = \frac{k}{4}$).

b) $x^2 + y^2 = 9$
 $0 \leq z \leq 4$

Les points M de $\mathcal{H}$ sont donc sur la partie du cylindre droit de base C , limitée par les plans d'équations $z = 0$ et $z = 4$.



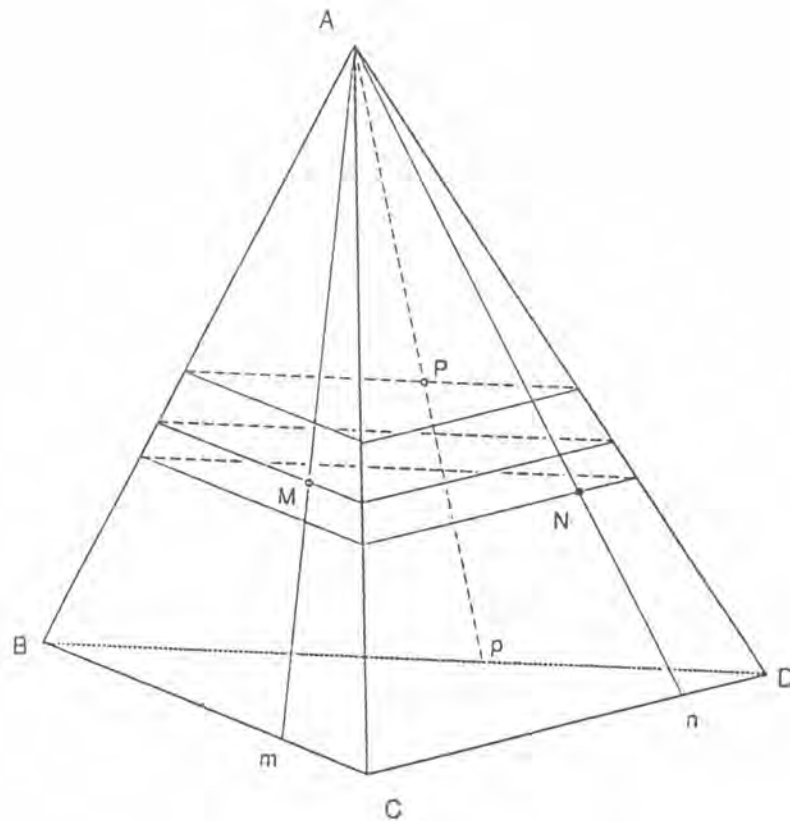
Fiche C1 : Points sur un cône (niveau A)



- a) La génératrice (SM) coupe le cercle de base du cône au point M' ; M' est situé sur la partie avant de ce cercle.
- b) La génératrice (SN) coupe le cercle de base du cône au point N' ; N' est situé sur la partie arrière de ce cercle.

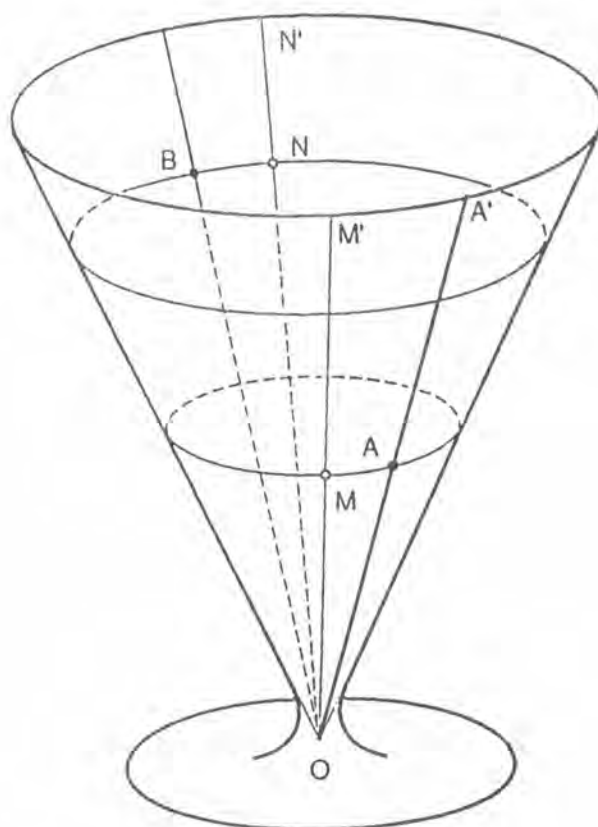
c) $\frac{Mm}{SO} = \frac{M'm}{M'O}$ d'où $Mm = 2 \times \frac{1,25}{2,8} \approx 0,89m$
 $\frac{Nn}{SO} = \frac{N'n}{N'O}$ d'où $Nn = 2 \times \frac{0,7}{1,8} \approx 0,78m$

Fiche C2 : Points sur un tétraèdre (niveau A)



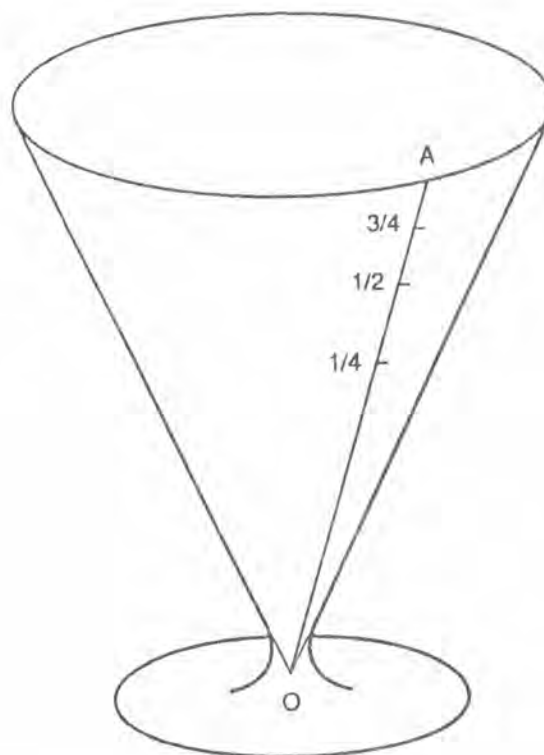
- a) On suggère que M est sur la face ABC en traçant la droite (AM) et en faisant apparaître son intersection m avec la droite (BC).
De même, (AN) coupe (CD) en n, et (AP) coupe (BD) en p.
- b) Les intersections du tétraèdre avec les plans parallèles au plan (BCD) et contenant respectivement les points M, N et P montrent que P est le point le plus éloigné et N le plus proche du plan (BCD)

Fiche C3 : Liquide dans un verre conique (1) (niveau A)



1. A tout point M' du bord du verre on associe le point M tel que $\frac{OM}{OM'} = \frac{OA}{OA'} = \frac{1}{2}$, soit $OM = \frac{1}{2} OM'$.
2. A tout point N' du bord du verre on associe le point N tel que $\frac{ON}{ON'} = \frac{OB}{OB'} = 0,8$, soit $ON = 0,8 ON'$.

Fiche C4 : Liquide dans un verre conique (2) (niveau A)



On peut imaginer un sondage dans la classe pour la première question.

1. $V(h) = \frac{1}{3} \pi r^2 h$.

2. D'après le théorème de Thalès, $\frac{r'}{x} = \frac{r}{h}$,

donc $r' = \frac{r}{h} x$.

Si on note $S(x)$ la surface du liquide, $S(x) = \pi r'^2 = \pi r^2/h^2 x^2$ et

$V(x) = \frac{1}{3} \pi \frac{r^2}{h^2} x^2 \times x = \frac{1}{3} \pi r^2 h \frac{x^3}{h^3} = \left(\frac{1}{3} \pi r^2 h\right) \left(\frac{x}{h}\right)^3 = V(h) \left(\frac{x}{h}\right)^3$. La fraction de liquide

laissée par Paul à son frère est égale à $\frac{V(x)}{V(h)}$ c'est-à-dire à $\left(\frac{x}{h}\right)^3$ avec $\frac{x}{h} = \frac{3}{4}$.

On a donc $\frac{V(x)}{V(h)} = \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64}$.

Pour que le partage fût équitable, il eût fallu que $\frac{V(x)}{V(h)} = \frac{1}{2}$ ($= \frac{32}{64}$). Cela correspond à une

fraction de hauteur égale à $\sqrt[3]{\frac{1}{2}} \approx 0,79$ alors que $\frac{3}{4} = 0,75$.

André a donc eu moins de diabolo menthe que son frère.

3. Pour graduer $[O,A]$, on utilise l'énoncé de Thalès.

Si g est une graduation, $Og = OA \times \frac{x}{h} = OA \times \sqrt[3]{\frac{V(x)}{V(h)}}$

$\frac{V(x)}{V(h)} = \frac{1}{4}$ correspond à $Og \frac{1}{4} = OA \times \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$, $\frac{V(x)}{V(h)} = \frac{1}{2}$ à $Og \frac{1}{2} = OA \times \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ et

$\frac{V(x)}{V(h)} = \frac{3}{4}$ à $Og \frac{3}{4} = OA \times \sqrt[3]{\frac{3}{4}}$.

Fiche C5 : Cône dans un repère (1) (niveau C)

1. Pour représenter le cône Σ , il suffit :

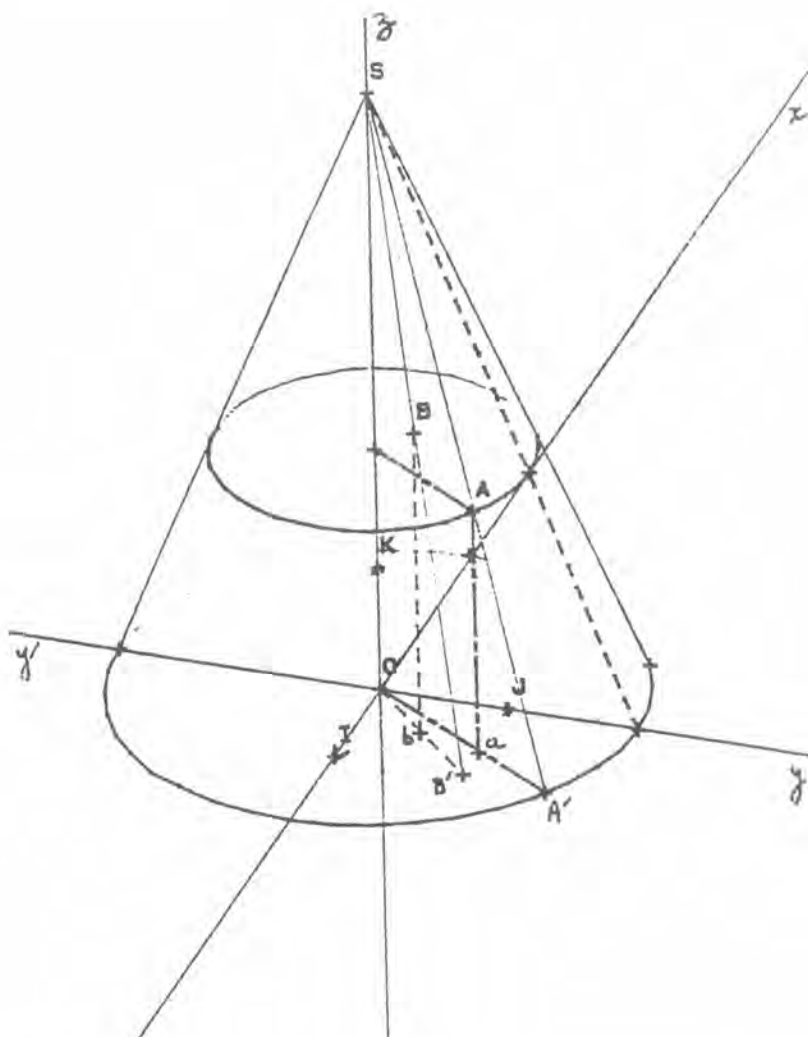
— de placer le point $S(0, 0, 5)$,

— de construire le cercle C d'équation $x^2 + y^2 = 4$ à l'aide de huit de ces points, méthode développée à la fiche PC9,

— de tracer quelques génératrices.

2. Le projeté a du point A sur le plan xOy est à l'intersection de la parallèle menée par A à $z'Oz$ et de la droite (OA') , où A' est lui-même l'intersection de la génératrice $[SA]$ avec le cercle C .

On lit alors $A(0,7; 1; 2)$.



3. Le point $B(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{5}{2})$ n'est pas sur le cône.

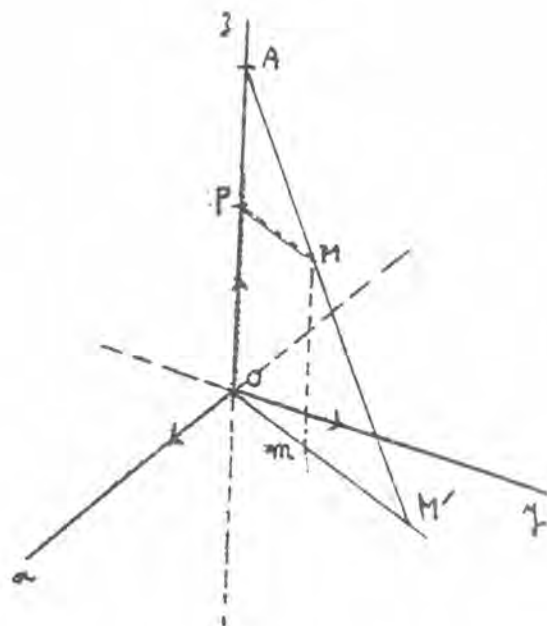
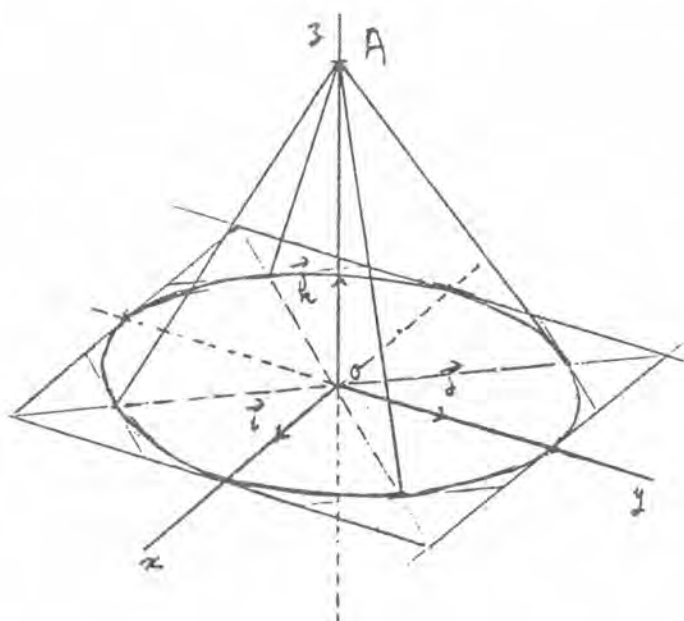
Justification géométrique : On place le point B et son projeté orthogonal $b(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0)$ sur xOy . Les droites (Ob) et (SB) sont sécantes en un point B' qui n'est pas situé sur le cercle C .

Justification par le calcul : L'énoncé de Thalès appliqué au triangle SOB' doit être vérifié si B est sur le cône. Or $\frac{SO}{Bb} = 5 / (5/2) = 2$ et $\frac{OB'}{Ob} = 2 / (1/2\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$; donc $\frac{SO}{Bb} \neq \frac{OB'}{Ob}$ et B n'est pas sur le cône.

4. Par contre, le point $C(\sqrt{2}/2; -\sqrt{2}/2; 5/2)$ est sur le cône.

La vérification par le calcul donne : $\frac{SO}{Cc} = 5 / (5/2) = 2$ et $\frac{OC'}{Oc} = \frac{2}{1} = 2$; donc $\frac{SO}{Cc} = \frac{OC'}{Oc}$ et le théorème de Thalès est bien vérifié.

Fiche C6 : Cône dans un repère (2) : Equation cartésienne (niveau C)



1. On construit le cercle C en utilisant la méthode vue dans la fiche PC 9 à l'aide de huit de ces points et des tangentes en ces points.

2. a), b) Pour construire m et M' , on trace la droite (AM) , puis la parallèle à (pM) passant par O . M' , quand il existe, est le point d'intersection de ces deux droites. Pour que M' existe, il faut et il suffit que la droite (AM) ne soit pas parallèle au plan xOy , c'est-à-dire que z soit différent de 3.

3. L'énoncé de Thalès appliqué au triangle AOM' permet d'écrire : $\frac{OM'}{Om} = \frac{AM}{AM'} = \frac{AO}{Ap}$ et

$Om = pM$, $AO = 3$ et $Ap = OA - Op = 3 - z$. On a donc $\frac{OM'}{pM} = \frac{3}{3-z}$. On a $pM = Om$ et m a pour coordonnées $(x, y, 0)$. On en déduit que $pM = Om = \sqrt{x^2 + y^2}$.

4. $OM' = \frac{3}{3-z} \times pM = \frac{3}{3-z} \sqrt{x^2 + y^2}$. Si $z \neq 3$, $OM' = \frac{3}{3-z} \sqrt{x^2 + y^2}$. Si $0 \leq z < 3$, on a l'équivalence :

$OM' = \frac{3}{3-z} \sqrt{x^2 + y^2} \Leftrightarrow OM'^2 = \frac{9}{(3-z)^2} (x^2 + y^2)$, où M est un point de Σ si et seulement si M' est un point de C , c'est-à-dire si et seulement si $OM' = 2$, ce qui peut s'écrire :

$$M \in \Sigma \Leftrightarrow 4 = \frac{9}{(3-z)^2} (x^2 + y^2) \Leftrightarrow (x^2 + y^2) - \frac{4}{9} (3 - z)^2 = 0.$$

5. $E \notin \Sigma$ car $z > 3$

$F \in \Sigma$

$G \in \Sigma$

$H \notin \Sigma$

Fiche C7 : Arc de cercle et angle au centre associé (niveau A)

1.

α	L
2π	$2\pi R$
1	$\frac{2\pi R}{2\pi} = R$
α	$R\alpha$

2. a) Pour 25° , $L = 5 \times 25 \times \frac{\pi}{180} = \frac{125\pi}{180} \approx 2,2 \text{ cm}$.

Pour 90° , $L = 5 \times 90 \times \frac{\pi}{180} = \frac{5\pi}{2} \approx 7,85 \text{ cm}$.

Pour 140° , $L = 5 \times 140 \times \frac{\pi}{180} = \frac{35\pi}{9} \approx 12,2 \text{ cm}$.

Pour 210° , $L = 5 \times 210 \times \frac{\pi}{180} = \frac{35\pi}{6} \approx 18,3 \text{ cm}$.

b) On a $5 = 5 \times \alpha$, donc $\alpha = 1 \text{ radian} = \frac{180}{\pi} \approx 57^\circ$.

De même, $11 = 5 \times \alpha$, soit $\alpha = \frac{11}{5} \text{ radian} = \frac{11}{5} \times \frac{180}{\pi} \approx 126^\circ$

et $30 = 5 \times \alpha$, soit $\alpha = 6 \text{ radians} = \frac{6 \times 180}{\pi} \approx 344^\circ$.

Fiche C8 : Le cône à partir de son patron (niveau A)

1. La mesure de l'angle α en degrés est 225 . La longueur SA est de 8 cm .
2. Pour mesurer plus facilement le rayon du cercle de base, on peut dessiner celui-ci sur une feuille. On lit approximativement un diamètre de 10 cm , soit un rayon de 5 cm . La hauteur semble être de 6,5 cm.
3. Sur le schéma du cône de révolution, l'arc $\widehat{AB}$ est le cercle de base, la longueur g est celle d'une génératrice, notée SM .
4. Sur le patron, la longueur l de l'arc $\widehat{AB}$ est $l = g\alpha$. Sur le cône, on a $l = 2\pi r$; donc $g\alpha = 2\pi r$, soit $r = \frac{\alpha g}{2\pi}$.

On applique le théorème de Pythagore au triangle SOM , $SM^2 = SO^2 + OM^2$;

$$g^2 = h^2 + r^2 = h^2 + \frac{\alpha^2 g^2}{4\pi^2}$$

d'où
$$h^2 = g^2 \left(1 - \frac{\alpha^2}{4\pi^2} \right)$$

donc
$$h = g \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{4\pi^2}}$$

Par le calcul, on trouve que $\alpha = \pi \times \frac{225}{180} = \frac{5\pi}{4}$ radians.

Donc $r = \frac{5\pi}{4} \times \frac{8}{2\pi} = 5$ cm et $h = 8 \sqrt{1 - \frac{25\pi^2}{16 \times 4\pi^2}} = 8 \sqrt{1 - \frac{25}{64}} \approx 6,25$ cm .

Fiche C9 : Patron d'un cône (niveau A)

1. En conservant les notations de la fiche C8, le théorème de Pythagore donne :

$$\begin{aligned} SM^2 &= h^2 + r^2 = 144 + 25 = 169 \\ \text{donc } SM &= 13 \text{ cm} \end{aligned}$$

2. On obtient le patron du cône, donc :

$$\begin{aligned} g &= SA = SB = SM = 13 \text{ cm} \\ l &= \text{longueur de l'arc } AB = \text{périmètre du cercle de base} = 10\pi \text{ cm} \end{aligned}$$

$$\text{donc } \alpha = \frac{l}{g} = \frac{10\pi}{13} \text{ radians}$$

3. Application : $h = 10 \text{ cm}$, $r = 8 \text{ cm}$.

On calcule les deux éléments permettant de construire le patron, c'est-à-dire g et α . Or :

$$\begin{aligned} g^2 &= h^2 + r^2 = 100 + 64 = 164 \quad \text{donc } g \approx 12,8 \text{ cm} \\ \alpha &= \frac{2\pi r}{g} = \frac{16\pi}{12,8} \text{ radians, soit } \alpha \approx 225^\circ . \end{aligned}$$

Fiche C10 : Liens entre les paramètres d'un cône et ceux de son patron (1)
(niveau A)

1. Dans la figure 2, g est la longueur de chacun des bords droits, ℓ est la longueur de l'arc de cercle.

2. a) On connaît $g = 2\sqrt{5}$ cm ; il nous reste à trouver $\alpha = \frac{\ell}{g}$ pour construire le patron.

$$\alpha = \frac{4\pi}{2\sqrt{5}} = \frac{2\pi}{\sqrt{5}} \text{ radians, soit } 160,1^\circ.$$

2. b) On connaît $g = 8$ cm ; on calcule r grâce au théorème de Pythagore. Soit :

$$r^2 = g^2 - h^2 = 64 - 36 = 28$$

$$\text{donc } r = 2\sqrt{7} \text{ cm.}$$

$$\text{On déduit } \alpha = \frac{\ell}{g} = \frac{4\pi\sqrt{7}}{8} = \frac{\pi\sqrt{7}}{2} \text{ radians, soit } 238,1^\circ.$$

3. Dans chacun des cas, il nous faut déterminer g et α pour construire le patron.

3 a) $\ell = 30$ cm donne $r = \frac{15}{\pi}$, donc $g = \sqrt{h^2 + r^2} \approx 11,1$ cm, soit $\alpha = \frac{30}{11,1}$ radians.

3 b) On connaît $\alpha = 140^\circ$, soit $\frac{7\pi}{8}$ radians ; donc $g = \frac{20 \times 8}{7\pi} \approx 7,3$ cm.

3 c) $\cos \theta = \frac{h}{g}$, donc $g = \frac{h}{\cos \theta} = \frac{10}{\cos 15^\circ} \approx 10,4$ cm

$$\text{tg } \theta = \frac{r}{h}, \text{ donc } r = h \text{ tg } \theta = 10 \times \text{tg } 15^\circ \approx 2,7 \text{ cm, d'où } \ell \approx 16,8 \text{ cm et } \alpha = \frac{16,8}{10,4} \approx 1,6 \text{ radians, soit } 92,8^\circ.$$

3 d) $\sin \theta = \frac{r}{g}$, donc $g = \frac{r}{\sin \theta} = \frac{5}{\sin 20^\circ} \approx 14,6$ cm ; d'où $\alpha = \frac{10\pi}{14,6}$ radians, soit environ $123,3^\circ$.

3 e) $\ell = 25$ cm, donc $r = \frac{25}{2\pi}$ et $g = \frac{r}{\sin \theta} = \frac{25}{2\pi \sin 25^\circ} \approx 6,7$ cm, d'où

$$\alpha = \frac{25}{6,7} \text{ radians, soit } 213,8^\circ.$$

3 f) $\sin \theta = \frac{r}{g}$, donc $r = g \sin \theta = 12 \sin 30^\circ = 6$ cm et $\ell = 12\pi$ cm ; donc $\alpha = \pi$ radians, soit $\alpha = 180^\circ$.

Fiche C11 : Liens entre les paramètres d'un cône et ceux de son patron (2)
(niveau A)

1. $g = \frac{r}{\sin \theta}$.

2. g est le rayon du secteur circulaire, et ℓ la longueur de l'arc correspondant.

$\ell = 2\pi r$ (figure 1) et $\ell = g\alpha$ (figure 2), d'où $g\alpha = 2\pi r$ et $g = \frac{2\pi r}{\alpha}$.

Des relations $g = \frac{r}{\sin \theta}$ et $g = \frac{2\pi r}{\alpha}$ on tire $\alpha = 2\pi \sin \theta$.

3. a) Si $\theta = 60^\circ$, alors $\alpha = \pi$ radians.

b) Pour $\alpha = 100^\circ$, on trouve $\theta \simeq 16^\circ$. Pour $\alpha = \frac{3\pi}{2}$, on trouve $\theta \simeq 49^\circ$.

4. a) Si $\alpha = 180^\circ$, alors $\theta = 60^\circ$ et $g = \frac{h}{\cos \theta} = \frac{20\sqrt{3}}{3}$ cm.

b) Si $\alpha = 270^\circ$, alors $\sin \theta = \frac{3}{4}$ et $g = \frac{r}{\sin \theta} = 8$ cm.

Fiche C12 : Aire latérale d'un cône de révolution (niveau A)

1.

α	$\mathcal{A}$
2π	πR^2
1	$\frac{\pi R^2}{2\pi} = \frac{1}{2} R^2$
α	$\frac{1}{2} R^2 \times \alpha$

2. a) Sur la figure 2 : $g = SM$.

L'aire $\mathcal{A}$ est celle du secteur de centre S , de rayon g et d'angle α : d'après 1 :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} g^2 \alpha.$$

b) Sur la figure 2, ℓ est la longueur de l'arc du secteur qui représente le patron. $\alpha = 2\pi \sin \theta$ (voir fiche C11). Le triangle SOM est rectangle en O , d'où $\sin \theta = \frac{r}{g}$ et $\alpha = 2\pi \times \frac{r}{g}$.

$$c) \mathcal{A} = \frac{1}{2} g^2 \alpha = \frac{1}{2} g^2 \times 2\pi \frac{r}{g} = \pi.r.g.$$

Fiche C13 : Cône de plus grand volume de génératrice donnée (niveau B)

1. g s'interprète comme longueur des génératrices du cône obtenu. Ainsi, $SA = g$. Le triangle rectangle SOA fournit : $h = g \cos \theta$ et $r = g \sin \theta$, d'où $V = \frac{1}{3} \pi (g \sin \theta)^2 g \cos \theta$, soit
- $$V = \frac{\pi}{3} g^3 \cos \theta \sin^2 \theta.$$

2. On en déduit $V^2 = \frac{\pi^2}{9} g^6 \cos^2 \theta \sin^4 \theta$. Mais $\sin^2 \theta = \frac{\alpha^2}{4\pi^2}$, d'où
- $$\cos^2 \theta = \frac{4\pi^2 - \alpha^2}{4\pi^2} \text{ et } V^2 = \frac{g^6}{576\pi^4} \alpha^4 (4\pi^2 - \alpha^2).$$

3. $f(x) = 4\pi^2 x^4 - x^6$, donc $f'(x) = x^3(16\pi^2 - 6x^2)$. f est donc $\nearrow$ sur $[0; 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}]$ et $\searrow$ sur $[2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}; 2\pi]$. Ainsi V^2 , et donc V est maximum pour $\alpha = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$ (noté α_0).
- On a $\alpha_0 \approx 5,13$ rd (à 10^{-2} près) ou $\alpha_0 \approx 294^\circ$ (à 1° près) et $\sin \theta_0 = \frac{\alpha_0}{2\pi} = \sqrt{\frac{2}{3}}$, d'où $\theta_0 \approx 55^\circ$ (à 1° près).

Fiche C14 : Cône de plus grand volume pour une aire totale donnée (niveau B)

A)

1. évident.

$$2. a = \pi r g + \pi r^2 \text{ donne } g = \frac{a}{\pi r} - r \text{ et } g^2 = \frac{a^2}{\pi^2 r^2} + r^2 - 2 \frac{a}{\pi}.$$

$$3. h^2 = g^2 - r^2, \text{ d'où } h^2 = \frac{a^2}{\pi^2 r^2} - 2 \frac{a}{\pi} \text{ et } V^2 = \frac{1}{9} \pi^2 r^4 \left(\frac{a^2}{\pi^2 r^2} - 2 \frac{a}{\pi} \right),$$

$$\text{soit } V^2 = \frac{1}{9} (a^2 r^2 - 2 a r^4 \pi).$$

$$4. \text{ On peut encore écrire } V^2 = \frac{a\pi}{9} \left(\frac{a}{\pi} r^2 - 2 r^4 \right).$$

V est maximal lorsque V^2 l'est, ou encore lorsque $\frac{9}{a\pi} V^2$ l'est, c'est-à-dire quand $\left(\frac{a}{\pi} r^2 - 2 r^4 \right)$ est maximal.

$$5. f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, r \mapsto \frac{a}{\pi} r^2 - 2 r^4.$$

On a $f'(r) = 2r \left(\frac{a}{\pi} - 4r^2 \right)$, donc f $\nearrow$ est sur $[0; \sqrt{\frac{a}{4\pi}}]$ puis $\searrow$ sur

$[\sqrt{\frac{a}{4\pi}}; +\infty[$: V est ainsi maximal pour $r = \sqrt{\frac{a}{4\pi}}$.

$$6. \text{ Pour } r = \sqrt{\frac{a}{4\pi}} :$$

$$g = \frac{a - \pi r^2}{\pi r} = \frac{4\pi r^2 - \pi r^2}{\pi r}, \text{ soit } g = 3r$$

$$h = \sqrt{g^2 - r^2} = \sqrt{9r^2 - r^2}, \text{ soit } h = 2\sqrt{2}r$$

$$g\alpha = 2\pi r, \text{ d'où } \alpha = \frac{2\pi r}{3r} = \frac{2\pi}{3} \text{ (rd)}, \text{ soit } \alpha = 120^\circ$$

$$V_{\max}^2 = \frac{a\pi}{9} \left[\frac{a}{\pi} \cdot \frac{a}{4\pi} - \left(\frac{a}{4\pi} \right)^2 \right] = \frac{a^4}{72\pi}, \text{ d'où } V_{\max} = \sqrt{\frac{a^2}{72\pi}}$$

B)

— L'aire a_0 pour laquelle le volume maximum associé est de 20 cl est définie par $20 = \sqrt{\frac{a_0^3}{72\pi}}$
d'où $a_0 = 43\sqrt{450\pi}$, soit $a_0 \approx 44,9 \text{ cm}^2$ (à 10^{-1} près).

— Si l'on part d'une aire a' inférieure à a_0 , on pourra au mieux réaliser un flacon de volume

$$\sqrt{\frac{a'^3}{72\pi}}. \text{ Mais } a' < a_0 \Rightarrow \sqrt{\frac{a'^3}{72\pi}} < \sqrt{\frac{a_0^3}{72\pi}} = 20.$$

Bref, a_0 est bien la plus petite aire permettant la fabrication d'un flacon de 20 cl.

Fiche C15 : Tronc de cône (niveau B)

1. $(P) \parallel (P') .$
 $\frac{SO'}{SO} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} .$

Dans le triangle (SOM) , on applique le théorème de Thalès :

$$\frac{SO'}{SO} = \frac{SM'}{SM} = \frac{O'M'}{OM} = \frac{1}{3}$$

OM = 6 cm , donc O'M' = 2 cm .

Le triangle (SOM) est rectangle en O . On applique dans ce triangle le théorème de Pythagore :

$$SM^2 = SO^2 + OM^2 = 12^2 + 6^2 = 6^2 \times 5$$

$$SM = 6\sqrt{5}$$

$$SM' = \frac{1}{3} SM = 2\sqrt{5} = SM'$$

2. D'après la fiche C11, étant donné α l'angle de patron du cône, θ le demi-angle au sommet du cône :

$$\alpha = 2\pi \sin \theta$$

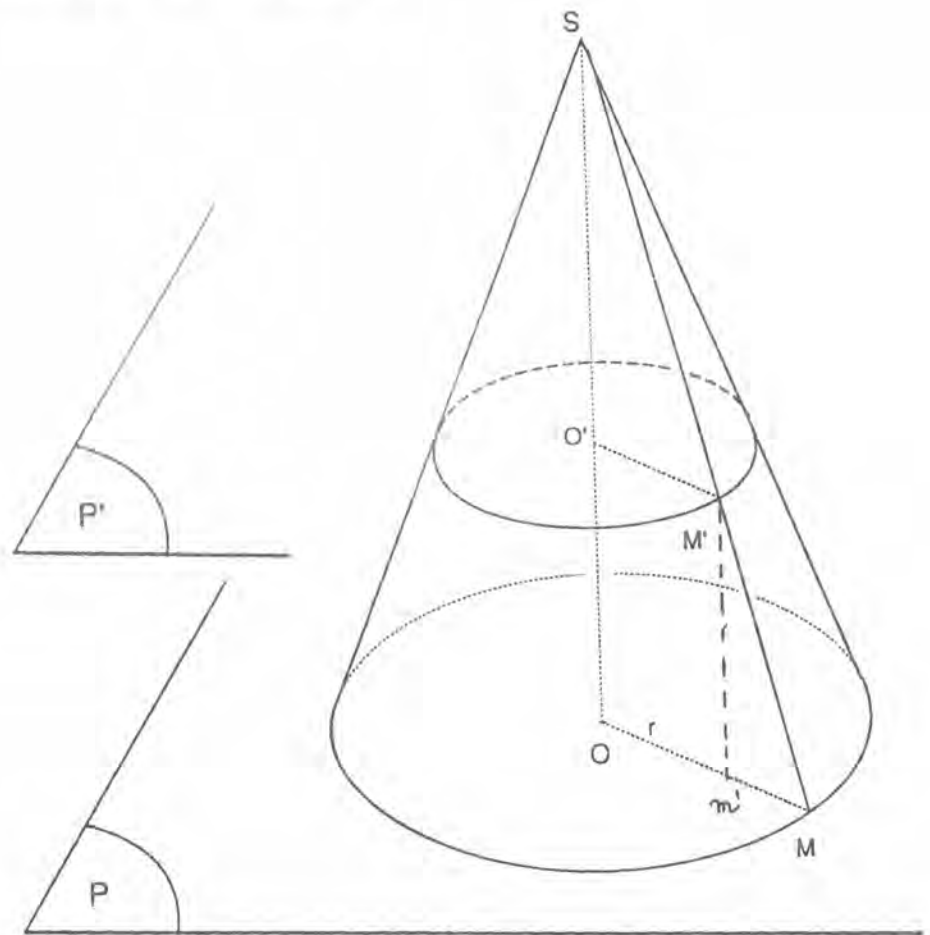
Dans le triangle (SOM) , rectangle en O :

$$\sin \theta = \frac{OM}{SM} = \frac{6}{6\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\alpha = \frac{2\pi}{\sqrt{5}}$$

On construit donc le secteur angulaire de sommet S , de rayon $SM = 6\sqrt{5}$ et d'angle $\frac{2\pi}{\sqrt{5}}$.

Fiche C16 : Patron d'un tronc de cône (niveau B)



1.

2. D'après le théorème de Thalès :

$$\frac{SO'}{SO} = \frac{SM'}{SM} = \frac{OM'}{OM} = \frac{2}{5}$$

or $SO' = SO - OO' = SO - 6$
donc :

$$\frac{SO-6}{SO} = \frac{2}{5} \text{ d'où } SO = 10 \text{ cm et } SO' = 4 \text{ cm}$$

Dans le triangle rectangle SOM :

$$SM^2 = SO^2 + OM^2$$

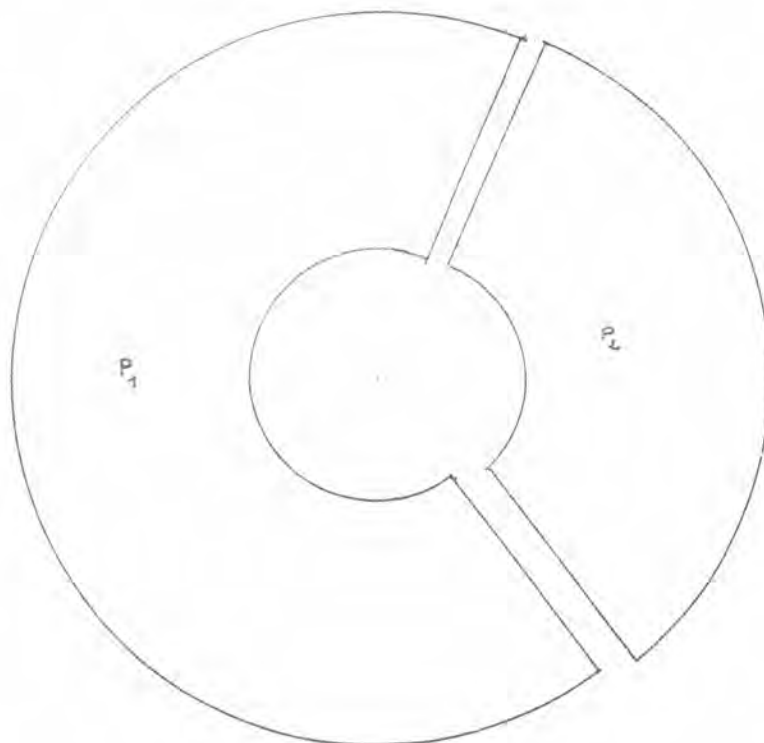
$$SM^2 = 100 + 25$$

$$SM = 5\sqrt{5} \text{ cm et } SM' = 2\sqrt{5} \text{ cm}$$

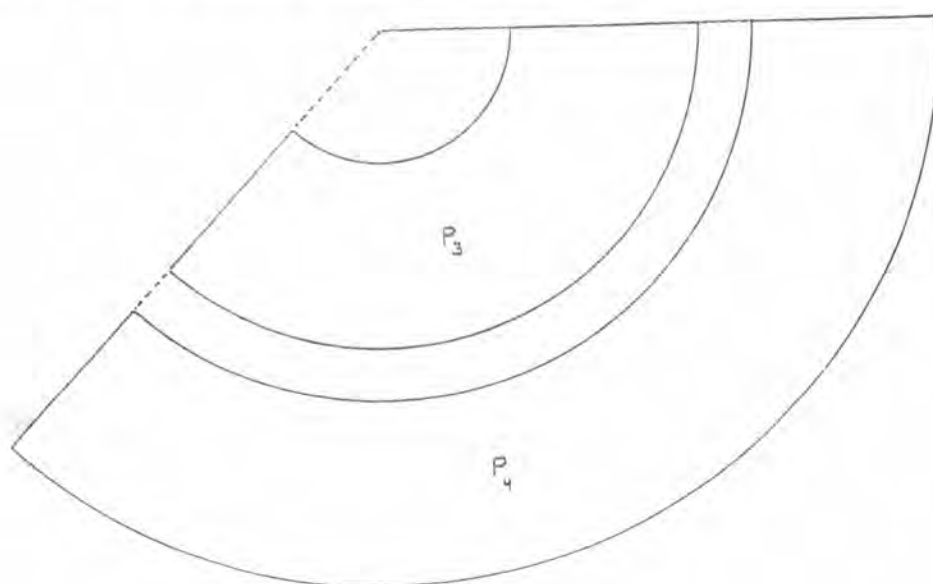
3. Pour tracer le patron du tronc de cône, on construit les deux secteurs angulaires de même sommet, de même angle $\alpha = \frac{2\pi}{\sqrt{5}}$ (voir corrigé fiche C15) et de rayons respectifs $5\sqrt{5}$ et $2\sqrt{5}$.

Fiche C17 : Comparaison des hauteurs de deux troncs de cône (niveau A)

1. Après vérification, le patron P2 donne le tronc de cône de plus grande hauteur.

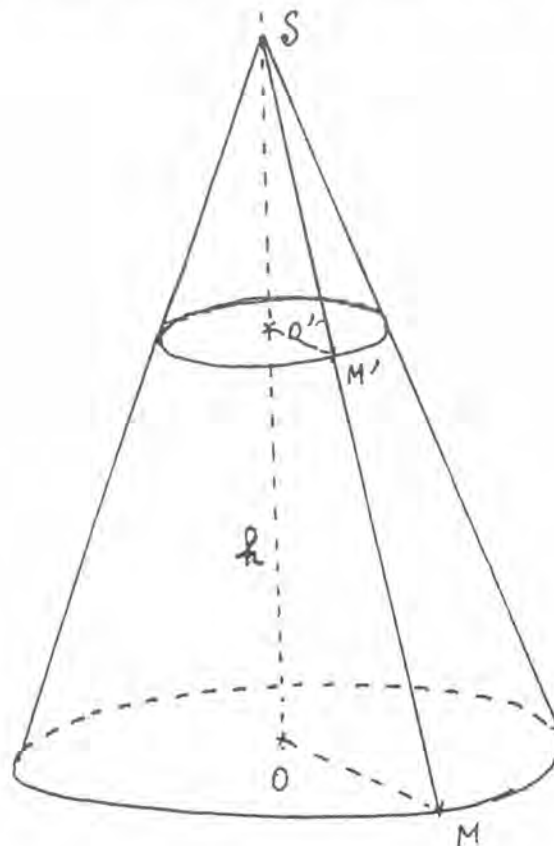


2. Par contre, les troncs de cône de patrons P3 et P4 ont même hauteur.



Fiche C18 : Hauteur du tronc de cône à partir de son patron (niveau B)

1.



2.

or $SM = g$; $SM' = g'$ et $MM' = d = g - g'$

$$SO = g \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{4\pi^2}}$$

$$SO' = g' \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{4\pi^2}}$$

$$h = OO' = SO - SO' = (g - g') \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{4\pi^2}}$$

$$\text{d'où } h = d \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{4\pi^2}}$$

3.

Pour $g = 9 \text{ cm}$, $g' = 3 \text{ cm}$ et $\alpha = 240^\circ$, on trouve $h = 2\sqrt{5} \text{ cm} \approx 4,47 \text{ cm}$

Dans le cas où $\alpha = 150^\circ$ ou $\frac{5\pi}{6} \text{ rad}$, on trouve $h = \frac{1}{2}\sqrt{119} \text{ cm} \approx 5,45 \text{ cm}$

4.

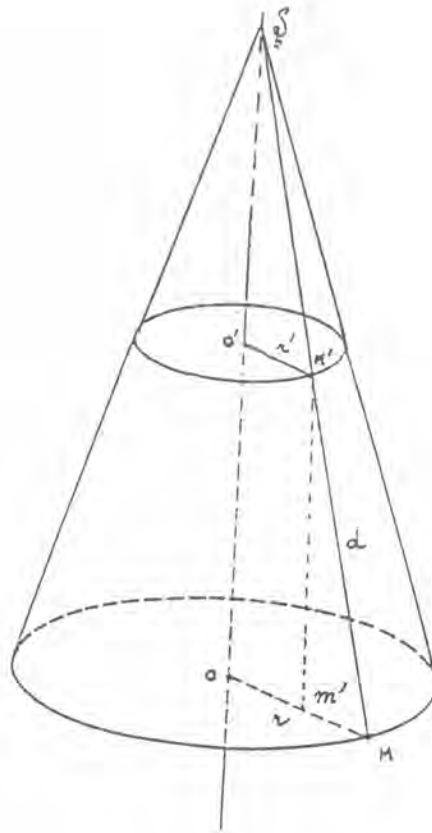
On trouve respectivement $h = \frac{3}{2}\sqrt{5} \text{ cm} \approx 3,35 \text{ cm}$

$$h = 2\sqrt{5} \text{ cm} \approx 4,47$$

$$\text{puis } h = 3\sqrt{5} \text{ cm} \approx 6,71 \text{ cm}$$

Fiche C19 : Aire latérale d'un tronc de cône (niveau B)

1.



2. D'après la fiche C8 on a : $r = \frac{\alpha g}{2\pi}$.

r : rayon de base du cône

g : la génératrice

α : l'angle du patron

D'après la fiche C12, l'aire latérale du cône est : $\pi r g$

$$A = \pi r \cdot SM - \pi r' \cdot SM' = \pi r SM - \pi r' (SM - d) = \pi(r - r') SM + \pi r' d \quad (1)$$

3. En appliquant le théorème de Thalès :

$$\frac{SM'}{SM} = \frac{r'}{r} \quad \text{soit} \quad \frac{SM - d}{SM} = \frac{r'}{r}$$

$$\frac{d}{SM} = 1 - \frac{r'}{r} \quad \text{soit} \quad SM = d \frac{r}{r - r'}$$

en remplaçant dans (1), on a :

$$A = \pi d (r - r')$$

Fiche C20 : Volume du tronc de cône de révolution (niveau B)

1. Si V_1 est le volume du cône de base le cercle de centre O et de rayon r , et V_2 le volume du cône de base le cercle de centre O' et de rayon r' :

$$V = V_1 - V_2 = \frac{1}{3} \pi (r^2 SO - r'^2 SO') \quad (1)$$

2.

or $SO' = SO - h$

d'où $V = \frac{1}{3} \pi [SO(r^2 - r'^2) + r'^2 \cdot h] \quad (2)$

3. Dans le triangle (SOM) :

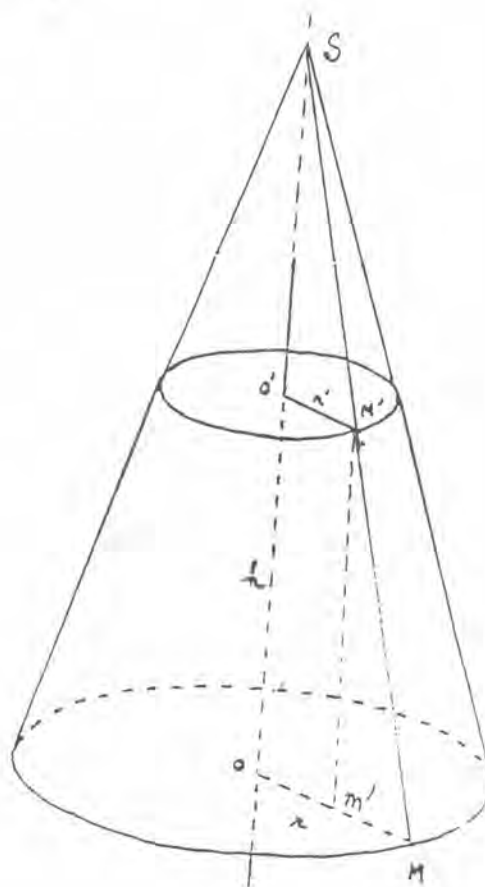
$$\frac{SO'}{SO} = \frac{r'}{r}$$

soit $\frac{SO - h}{SO} = \frac{r'}{r}$

d'où $SO = \frac{rh}{r - r'} \quad (3)$

4. En reportant (3) dans (2), on trouve

$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot h [r^2 + rr' + r'^2]$$



Fiche SR1 : (niveau A)

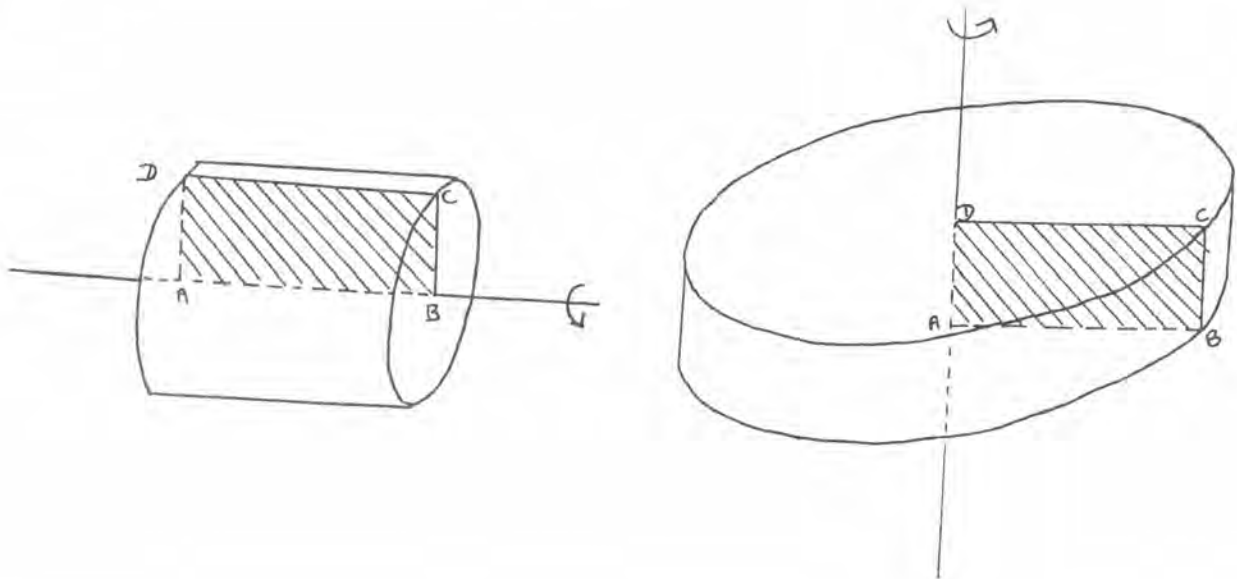
La solution du tableau est :

plaque	A	B	C	D	E	F	G	H	I
solide n°	3	8	9	1	2	5	6	4	7

Fiche SR2 : (niveau B)

1. C et D décrivent dans les plans perpendiculaires à (AB) passant respectivement par le point A et par le point B deux cercles dont les centres sont respectivement A et B .
Les points du segment [AB] ne changent pas de position quand la plaque tourne autour de (AB) .

2.



Le solide Σ_1 est obtenu en dessinant par exemple le cercle de centre B . On obtient ensuite celui de centre A par translation.

On peut procéder de même pour Σ_2 .

3. $V_1 = (\pi l_2^2) \times l_1$ et $V_2 = (\pi l_1^2) \times l_2$.

On a donc $\frac{V_1}{V_2} = \frac{\pi l_1 l_2^2}{\pi l_1^2 l_2} = \frac{l_2}{l_1}$.

Puisque $l_1 > l_2 > 0$, on a $1 > \frac{l_2}{l_1} > 0$ donc $\frac{V_1}{V_2} < 1$ ainsi $V_1 < V_2$

Fiche SR3 : (niveau B)

1. On obtient un cylindre auquel on a retiré un cylindre de même axe. Cela peut faire penser à une rondelle.

2. D'après les hypothèses, $AH = x + \frac{1}{2}$.

Le volume du grand cylindre est donc $V_1 = \pi AH^2 \times h = \pi \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 h$, celui du petit cylindre

(celui que l'on retire du grand) vaut $V_2 = \pi HB^2 h = \pi \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 h$.

On a donc $V = V_1 - V_2 = \pi \left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2\right] h$, donc $V = 2\pi x h = (2\pi h)x$. h et x sont des grandeurs positives, ce qui prouve que V augmente quand x augmente.

3. G est le centre de symétrie du rectangle $ABCD$, G se projette en I sur (AB) . G est donc à une distance x de l'axe.

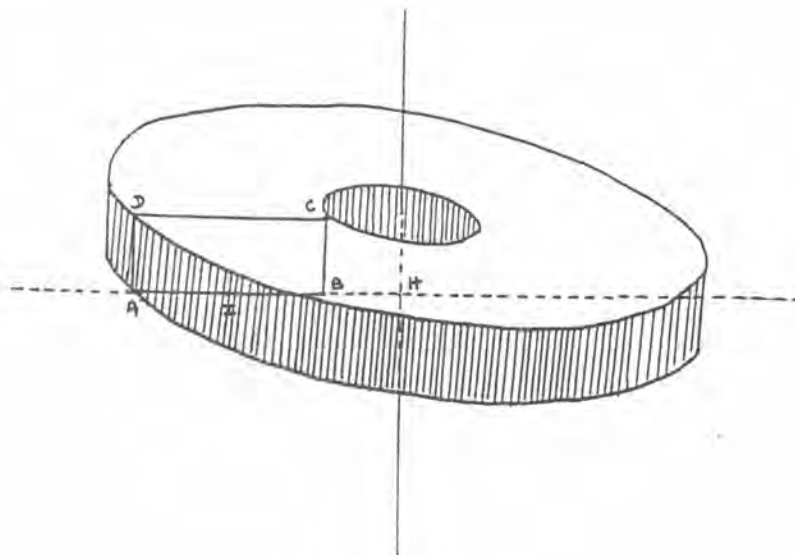
Le chemin parcouru par G pendant une révolution a pour longueur $c = 2\pi x$.

L'aire du rectangle $ABCD$ vaut $S = lh$.

On a donc $V = 2\pi x h = (2\pi x) \times (lh) = c \times S = S \times c$.

On peut remarquer que le volume de Σ est proportionnel à la longueur du chemin parcouru par le point G .

Plus précisément, V est exactement égal au produit de la longueur du chemin parcouru par G par l'aire de la plaque.

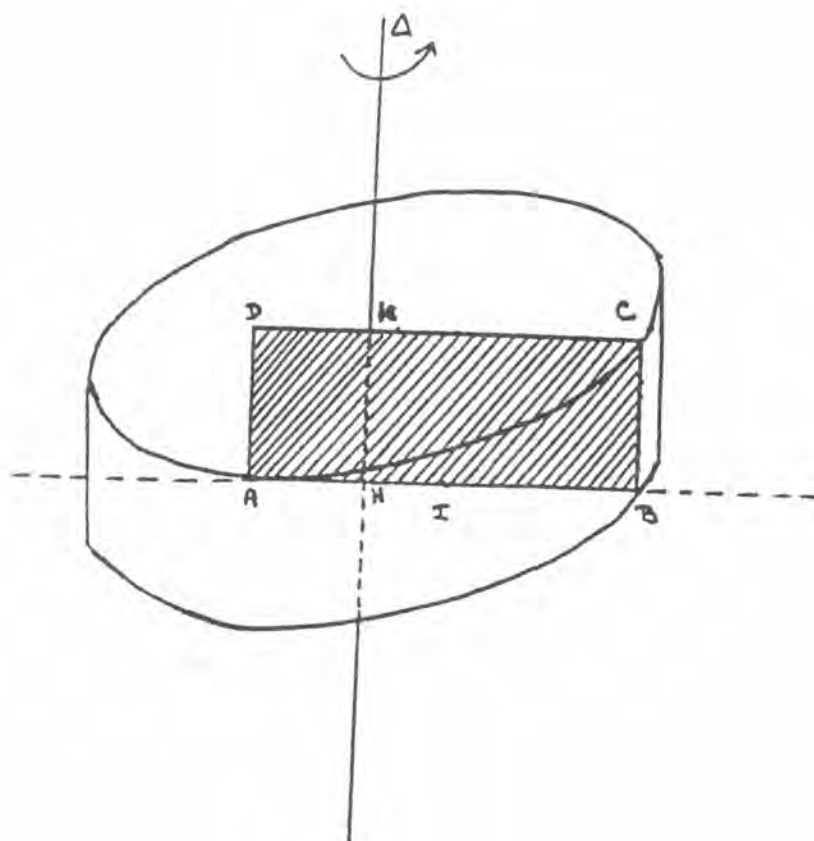


Fiche SR4 : (niveau B)

1. Le solide est engendré par la rotation du rectangle HBCK autour de Δ .

2. On a donc $V = \pi HB^2 \times BC$; or $HB = HI + IB = x + \frac{1}{2}$ et $h = BC$, donc $V = \pi \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 h$.

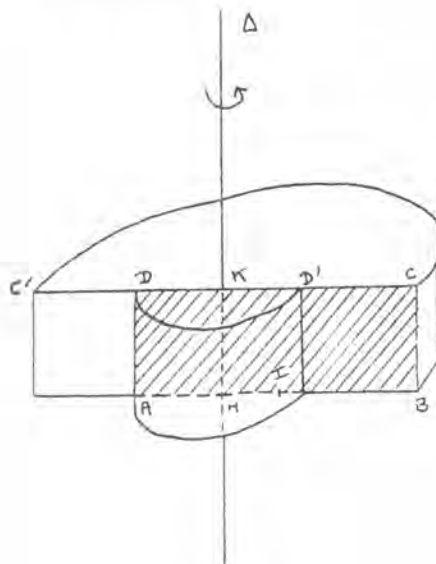
V est proportionnel à $\left(\frac{1}{2} + x\right)^2$; comme $\frac{1}{2} + x \geq 0$ (du fait que $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$), V est minimal pour $x = 0$ et maximal pour $x = \frac{1}{2}$.



Fiche SR5 : (niveau B)

1. Les courbes décrites par C et D au cours du demi-tour sont deux demi-cercles de centre K situés dans le plan orthogonal à Δ passant par le point K.

2.



3. On peut considérer Σ comme la réunion de deux demi-cylindres. Le volume du plus grand, noté V_1 , vérifie :

$$V_1 = \frac{1}{2} (\pi H B^2) BC = \frac{1}{2} (\pi [H I + I B]^2) BC = \frac{1}{2} \pi \left(x + \frac{l}{2} \right)^2 h$$

le volume du plus petit, noté V_2 , vérifie :

$$V_2 = \frac{1}{2} (\pi H A^2) BC = \frac{1}{2} \pi (I A - I H)^2 BC = \frac{1}{2} \pi \left(\frac{l}{2} - x \right)^2 h$$

Si on note V le volume de Σ :

$$V = V_1 + V_2 = \frac{1}{2} \pi \left[\left(\frac{l}{2} + x \right)^2 + \left(\frac{l}{2} - x \right)^2 \right] h = \frac{1}{2} \pi \left(2 \frac{l^2}{4} + 2x^2 \right) h$$

donc
$$V = \pi h \left(\frac{l^2}{4} + x^2 \right)$$

4. V est maximal quand x^2 est maximal ; donc, puisque $x \geq 0$, quand x est maximal, $H \in [AI]$ implique que $0 \leq x \leq \frac{l}{2}$.

V est donc maximal pour $x = \frac{l}{2}$.

Fiche SR6 : (niveau B)

1. La partie que l'on enlève à Σ_1 pour obtenir Σ_2 a un volume inférieur à celui de la partie que l'on rajoute.

2. Si on note V_1 le volume de Σ_1 , on a :

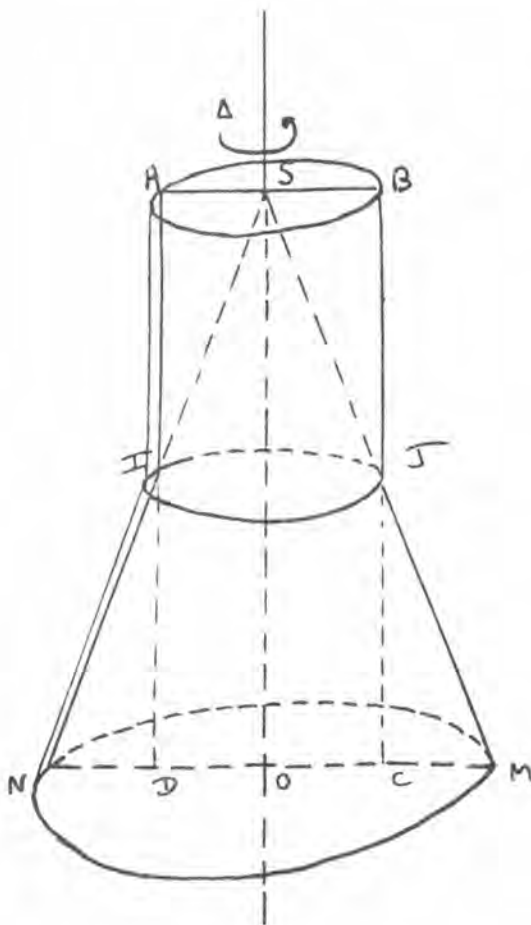
$$V_1 = \pi \left(\frac{1}{2} AB \right)^2 BC = \frac{1}{4} \pi AB^2 BC$$

Si on note V_2 le volume de Σ_2 , on a :

$$V_2 = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{1}{2} MN \right)^2 \times BC = \frac{1}{12} \pi MN^2 \times BC$$

(IJ) est la droite qui joint les milieux dans le triangle (SNM) donc $MN = 2 IJ = 2 AB$;

donc $V_2 = \frac{1}{3} \pi AB^2 \cdot BC$. comme $\frac{1}{3} > \frac{1}{4}$ on a donc $V_2 > V_1$.



3 et 4. Si on note V_3 le volume du cône décrit par SIJ, on a :

$$V_3 = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{AB}{2} \right)^2 AD \text{ Al donc :}$$

$$V_3 = \frac{1}{24} \pi AB^2 \cdot AD$$

Le volume du tronc de cône engendré par IJMN est donc :

$$V_4 = V_2 - V_3$$

$$\text{donc : } V_4 = \frac{7}{24} \pi AB^2 \cdot AD$$

Le volume du cylindre engendré par ABJI est

$$V_5 = \pi \left(\frac{AB}{2} \right)^2 \cdot AD \text{ Al donc } V_5 = \frac{1}{8} \pi AB^2 \cdot AD.$$

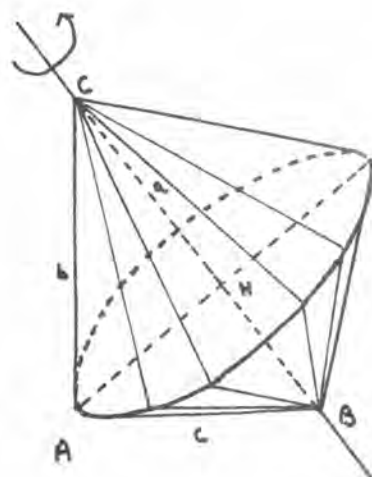
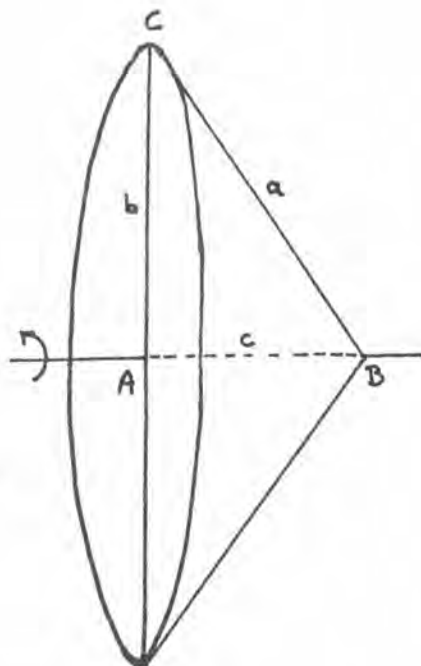
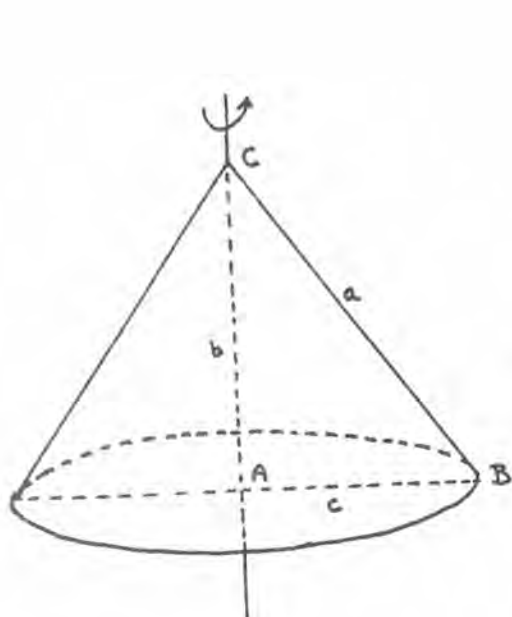
Le volume de Σ est égal à $V_4 + V_5$, d'où $V =$

$$\frac{5}{12} \pi AB^2 \cdot AD.$$

Fiche SR7 : (niveau B)

1. L'observation du dessin suggère que Σc a le plus grand volume.

2. $V_b = \frac{1}{3} \pi c^2 b$; $V_c = \frac{1}{3} \pi b^2 c$.

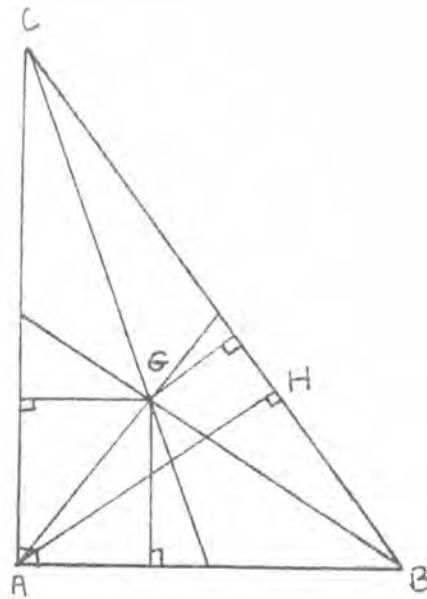


3. a) $\mathcal{A} = \frac{1}{2} cb$ et $\mathcal{A} = \frac{1}{2} ah$. On a donc $cb = ah$, donc $h = \frac{bc}{a}$.

b) $V_a = \frac{1}{3} \pi h^2 HB + \frac{1}{3} \pi h^2 HC = \frac{1}{3} \pi h^2 BC = \frac{1}{3} \pi \frac{b^2 c^2}{a}$.

4. $\frac{V_b}{V_c} = \frac{c}{b}$; or $c < b$ donc $\frac{V_b}{V_c} < 1$, donc $V_b < V_c$.

$\frac{V_a}{V_b} = \frac{b}{a}$; or $b < a$ (dans un triangle rectangle, la longueur de l'hypoténuse est supérieure à celle d'un des autres côtés) , donc $\frac{V_a}{V_b} < 1$ et $V_a < V_b$. Conclusion : $V_a < V_b < V_c$.



5. b) G est aux deux tiers de chacune des médianes à partir du sommet correspondant. On a donc, en appliquant le théorème de Thalès :

$$da = \frac{1}{3} AH = \frac{1}{3} h \quad , \quad db = \frac{1}{3} AB = \frac{1}{3} c \quad \text{et} \quad dc = \frac{1}{3} AC = \frac{1}{3} b$$

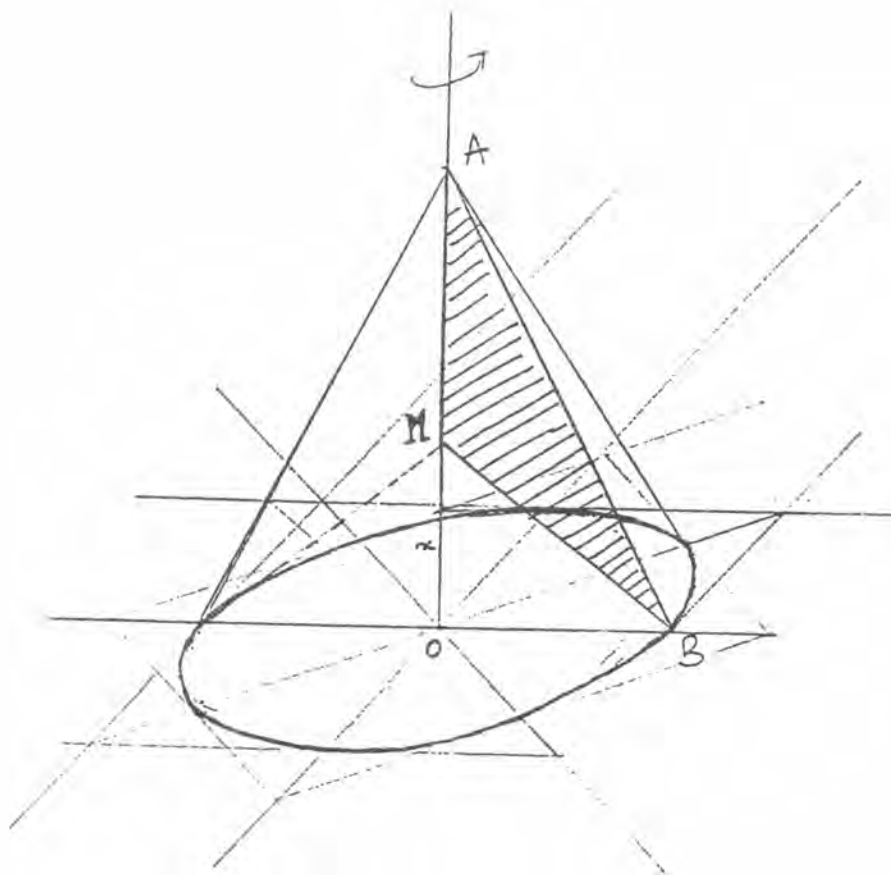
c) On a donc $La = 2\pi \frac{1}{3} h = \frac{2}{3} \pi \frac{bc}{a}$, $Lb = 2\pi \frac{1}{3} c = \frac{2}{3} \pi c$ et $Lc = 2\pi \frac{1}{3} b = \frac{2}{3} \pi b$.

d) $La \times \mathcal{A} = \frac{2}{3} \pi \frac{bc}{a} \times \frac{1}{2} bc = \frac{1}{3} \pi \frac{b^2 c^2}{a} = Va$

$Lb \times \mathcal{A} = \frac{2}{3} \pi c \times \frac{1}{2} bc = \frac{1}{3} \pi bc^2 = Vb$

$Lc \times \mathcal{A} = \frac{2}{3} \pi b \times \frac{1}{2} bc = \frac{1}{3} \pi cb^2 = Vc$

1.



2. Soit V_1 le volume du solide décrit par la rotation du triangle AOB autour de (OA)

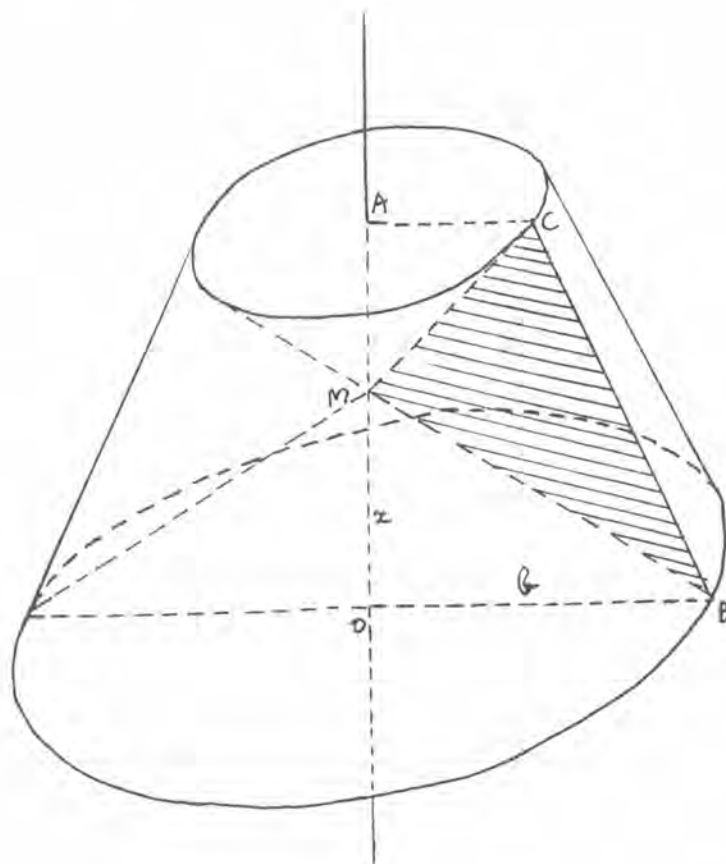
$$V_1 = \frac{1}{3} \pi OB^2 OA = \frac{1}{3} \pi ab^2$$

Soit V_2 le volume du solide décrit dans les mêmes conditions par le triangle MOA :

$$V_2 = \frac{1}{3} \pi OB^2 OM = \frac{\pi}{3} b^2 x$$

On a alors $V = V_1 - V_2 = \frac{\pi}{3} b^2(a-x)$.

1.



2. Le tronc de cône décrit par AOBC a pour volume :

$$V_1 = \frac{1}{3} \pi (b^2 + bc + c^2) a \quad (\text{cf. fiche C20})$$

Le cône décrit par le triangle MOB a pour volume :

$$V_2 = \frac{1}{3} \pi b^2 x$$

Le cône décrit par le triangle MAC a pour volume :

$$V_3 = \frac{1}{3} \pi c^2 (a-x)$$

On a donc :

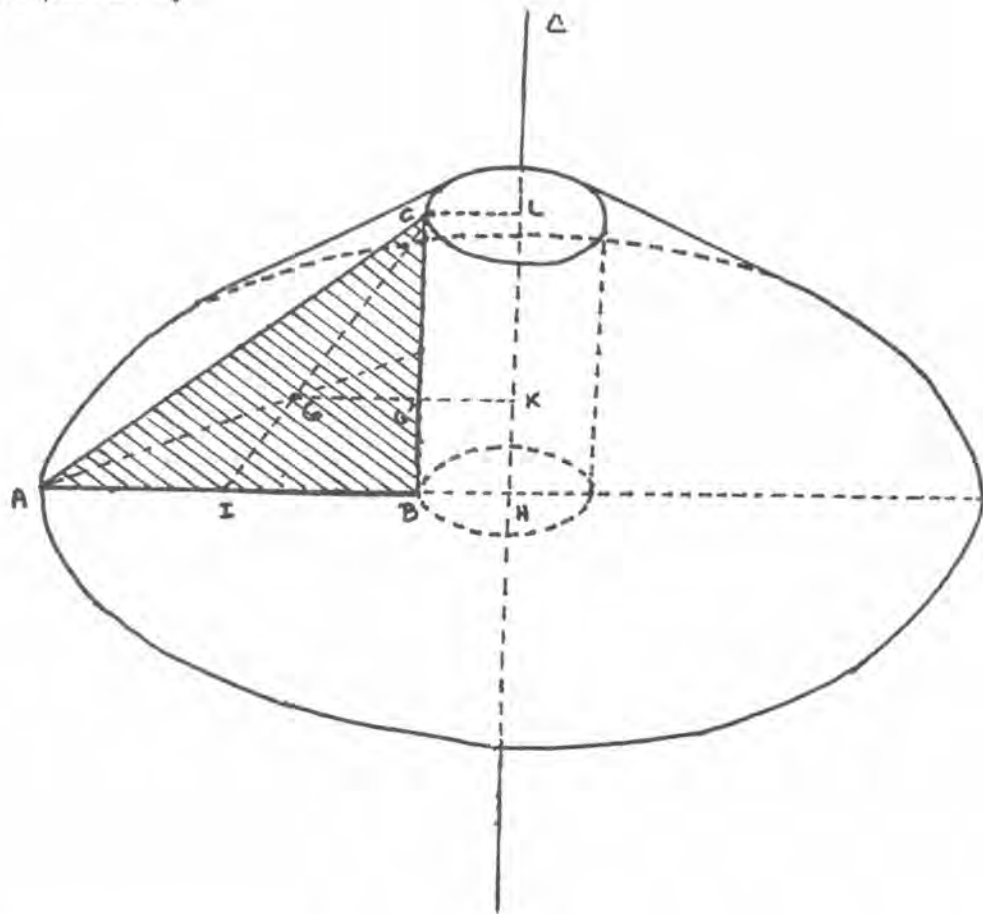
$$V = V_1 - V_2 - V_3$$

$$V = \frac{1}{3} \pi [ab^2 + abc + ac^2 - b^2x - ac^2 + c^2x]$$

$$= \frac{1}{3} \pi [ab(b+c) - (b^2 - c^2)x] = \frac{1}{3} \pi (b+c)[ab - (b-c)x]$$

Comme $b - c > 0$, $-(b - c) < 0$. V est donc une fonction affine décroissante de x . Comme $x \in [0, a]$, V est maximal pour $x = 0$.

1.



2. ☐ Soit L le projeté orthogonal de C sur (Δ) . Le tronc de cône décrit par $AHLC$ a pour volume V_1 :

$$V_1 = \frac{1}{3} \pi [AH^2 + CL^2 + AH \times CL] \quad HL \quad (\text{cf. fiche n}^\circ 20)$$

$$V_1 = \frac{1}{3} \pi [x^2 + (x-1)^2 + x(x-1)] \quad h$$

- Le cylindre engendré par la rotation du rectangle BHLC a pour volume $V_2 = \pi BH^3 HL$
 $= \pi(x-l)^2 h$.

$$\square \quad V = V_1 - V_2 = \frac{1}{3} \pi \hbar [x^2 + (x-1)^2 + x^2 - x - 3(x-1)^2] = \frac{\pi \hbar}{3} (3x-2)$$

V est une fonction affine de x . Le coefficient de x est égal au nombre positif $\pi.h.l$: donc V augmente lorsque x augmente, c'est-à-dire lorsque H s'éloigne de B .

3. a) $\frac{GG'}{IB} = \frac{CG}{CI} = \frac{2}{3}$ d'où $GG' = \frac{2}{3} IB = \frac{1}{3}$ et

$$GK = GG' + G'K = GG' + BH = \frac{1}{3} + x - 1 = \frac{3x-2}{3}.$$

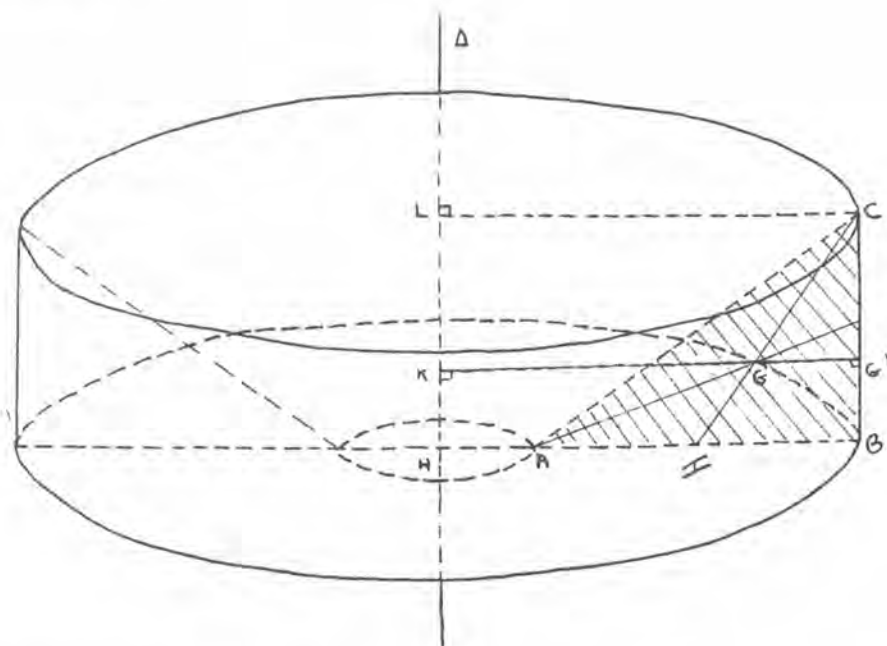
$$b) \quad c = 2\pi \times GK = \frac{2\pi}{3} (3x-2l) .$$

$$c) \quad S = \frac{1}{2} AB \times BC = \frac{1 \times h}{2}.$$

$$Sc = \frac{lh}{2} \times \frac{2\pi}{3} (3x-2l) = \frac{\pi hl}{3} (3x-2l) = V.$$

Fiche SR11 : (niveau 8)

1.



2. Soit L le projeté orthogonal de C sur (Δ).
Le volume du cylindre engendré par le rectangle BCLH est :

$$V_1 = \pi \times BH^2 \times BC = \pi(x+l)^2 h$$

Le volume du tronc de cône engendré par AHLC est :

$$V_2 = \frac{\pi}{3} (AH^2 + AH \times LC + LC^2) \times HL \quad (\text{cf. fiche 20})$$

$$V_2 = \frac{\pi}{3} (x^2 + x(x+l) + (x+l)^2) h$$

Donc

$$V = V_1 - V_2 = \frac{\pi h}{3} [3(x+l)^2 - x^2 - x(x+l) - (x+l)^2]$$

$$= \frac{\pi h}{3} [2x^2 + 4lx + 2l^2 - x^2 - x^2 - xl]$$

$$V = \frac{\pi hl}{3} (3x+2l)$$

V est une fonction affine de variable x ; le coefficient de x est positif, donc V augmente lorsque x augmente, par suite lorsque H s'éloigne de A.

3. a) Le théorème de Thalès appliqué au triangle CIB, où I est le milieu de [AB] donne :

$$\frac{GG'}{IB} = \frac{CG}{CI} = \frac{2}{3} \quad \text{d'où } GG' = \frac{2}{3} IB \quad \text{donc } GG' = \frac{l}{3}$$

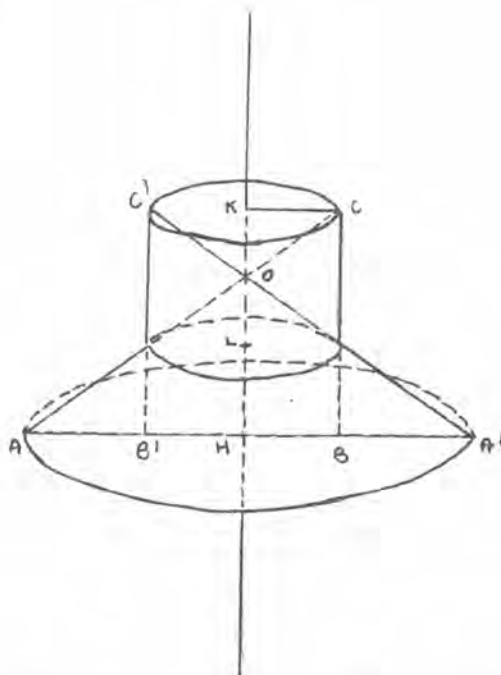
$$\text{Donc } GK = G'K - GG' = l + x - \frac{l}{3} = \frac{2l+3x}{3}.$$

$$\text{b) } c = 2\pi GK = \frac{2\pi}{3} (3x+2l).$$

$$\text{c) Or } S = \frac{AB \times BC}{2} = \frac{lh}{2} \quad \text{donc } Sc = \frac{\pi lh}{3} (3x+2l) = V.$$

Fiche SR12 : (niveau B)

1 et 2.



3. a) On peut considérer le solide Σ comme la réunion du cône Σ_1 engendré par le triangle OAH et du cylindre Σ_3 engendré par le rectangle CDLK privé du cône Σ_2 engendré par le triangle OCK et du cône symétrique de Σ_2 par rapport à O.
On a donc $V = V_1 + V_3 - 2V_2$.

- b) $HB = AB - AH = l - x$.

Le théorème de Thalès permet d'écrire $\frac{OH}{BC} = \frac{AH}{AB}$, donc $OH = BC \times \frac{AH}{AB} = h \frac{x}{l}$.

Le théorème de Thalès permet aussi d'écrire $\frac{OK}{OH} = \frac{CK}{AH}$, donc $\frac{AK}{OH} = \frac{HB}{AH}$; donc :

$$OK = OH \times \frac{HB}{AH} = \frac{hx}{l} \times \frac{l-x}{x} = \frac{h}{l} (l-x).$$

On a donc :

$$V_1 = \frac{1}{3} \pi AH^2 \times OH = \frac{1}{3} \pi x^2 h \frac{x}{l} = \frac{1}{3} \pi \frac{h}{l} x^3$$

$$V_2 = \frac{1}{3} \pi KC^2 \times OK = \frac{1}{3} \pi HB^2 \times OK = \frac{\pi}{3} (l-x)^2 \frac{h}{l} (l-x) = \frac{\pi}{3} \frac{h}{l} (l-x)^3$$

$$V_3 = \pi LD^2 \times LK = \pi HB^2 \times 2OK = 2\pi (l-x)^2 \frac{h}{l} (l-x) = 2\pi \frac{h}{l} (l-x)^3$$

$$V = V_1 + V_3 - 2V_2 = \frac{1}{3} \pi \frac{h}{l} (x^3 + 6(l-x)^3 - 2(l-x)^3) =$$

$$\frac{\pi}{3} \frac{h}{l} (x^3 + 4(l-x)^3) =$$

$$\frac{\pi}{3} \frac{h}{l} (-3x^3 + 12lx^2 - 12l^2x + 4l^3)$$

c) $H \in [AB]$, donc $x \in [0, l]$. Or $t = \frac{x}{l}$ d'où $t \in [0, 1]$

$$V = \frac{\pi}{3} h l^2 (-3t^3 + 12t^2 - 12t + 4).$$

4. V varie comme f puisque $\frac{\pi}{3} h l^2$ est une constante positive.

On a $f'(t) = -9t^2 + 24t - 12$. f' a pour racines $\frac{2}{3}$ et 2 , d'où le tableau de variation de f sur $[0; 1]$

t	0	$\frac{2}{3}$	1
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$	$\searrow$		$\nearrow$

V est donc minimal pour $t = \frac{2}{3}$ c'est-à-dire $x = \frac{2}{3} l$.

On a alors $V = \frac{4\pi h l^2}{27}$.

Le théorème de Thalès permet aisément de démontrer que le cas $x = \frac{2}{3} l$ est réalisé lorsque Δ passe par le centre de gravité du triangle ABC .

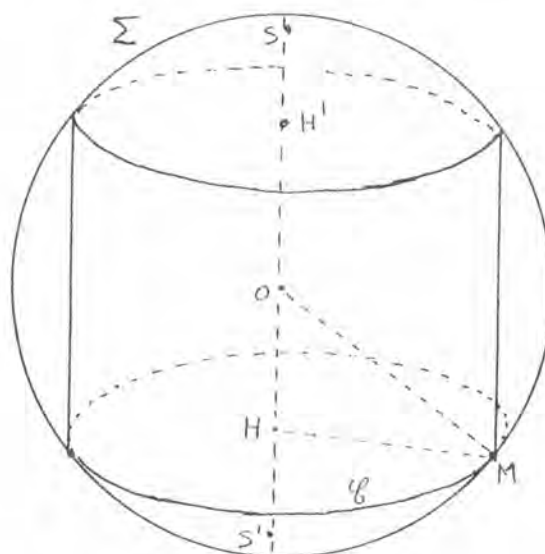
5. Dans la fiche SR10, on a $x \geq l$. Comme V est une fonction croissante de x , V est minimal pour $x = l$ et vaut alors $\frac{\pi h l^2}{3}$.

Dans la fiche SR11, $x \geq 0$; V est minimal de manière évidente pour $x = 0$ et vaut alors $\frac{2\pi h l^2}{3}$.

6. On a $\frac{4\pi h l^2}{27} < \frac{\pi h l^2}{3} < \frac{2\pi h l^2}{3}$, d'où le résultat annoncé.

Fiche SI 1 : Cylindres de révolution inscrits dans une sphère (niveau B)

1.



2.

a) Soit M un point de C ;

On applique le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle OHM :

$$\begin{aligned} OM^2 &= OH^2 + HM^2 \\ R^2 - x^2 &= r^2 \end{aligned}$$

$$V = \pi r^2 \cdot HH' = \pi(R^2 - x^2) \cdot 2x .$$

b) or $f(x) = (R^2x - x^3)$

$$\text{d'où } f'(x) = -3x^2 + R^2$$

x	0	$\frac{R\sqrt{3}}{3}$	R
f'(x)	+	0	-
f(x)	0 ↗	$\frac{2R^3\sqrt{3}}{9}$	↘ 0

$$V(x) = 2 \pi f(x)$$

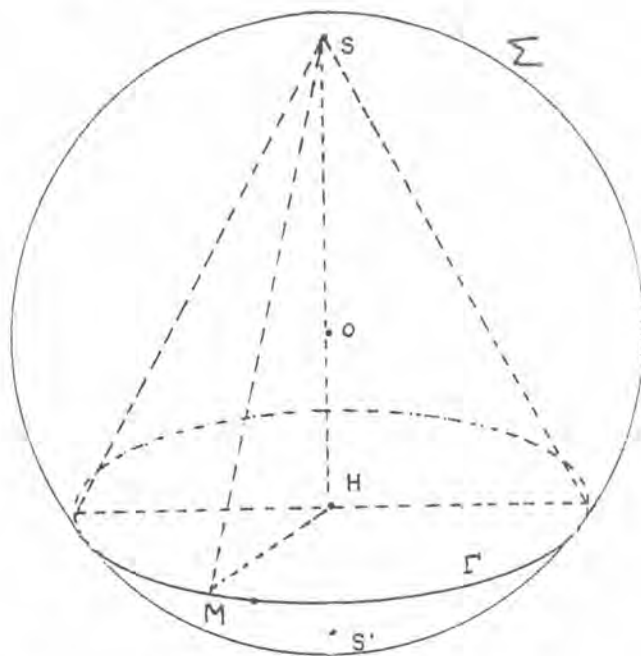
Le volume est maximum pour $x = \frac{R\sqrt{3}}{3}$ et sa valeur est $\frac{4\pi R^3\sqrt{3}}{9}$.

Le volume V_S de la sphère de rayon R est $\frac{4\pi R^3}{3}$:

$$\frac{V}{V_S} = \frac{\frac{4\pi R^3\sqrt{3}}{9}}{\frac{4\pi R^3}{3}} \text{ soit } \frac{V}{V_S} = \frac{\sqrt{3}}{3} .$$

Fiche SI 2 : Cônes de révolution inscrits dans une sphère (niveau B)

1. Figure



2. Dans le triangle rectangle SOH, on applique le théorème de Pythagore :

$$OM^2 = OH^2 + HM^2$$

$$R^2 = x^2 + r^2$$

$$r^2 = R^2 - x^2$$

$$\overline{HS} = \overline{OS} - \overline{OH} = R - x$$

Le volume du cône est égal à :

$$V = \frac{\pi r^2 HS}{3} = \frac{\pi(R^2 - x^2)(R - x)}{3} = \frac{\pi R^3}{3} \left(1 - \frac{x^2}{R^2}\right) \left(1 - \frac{x}{R}\right)$$

3. H variant de S' à S, donc x varie de -R à +R, donc t varie de -1 à +1.

$$V = \frac{\pi R^3}{3} (1 - t^2)(1 - t)$$

a) $f'(t) = (t-1)(3t+1)$

t	-1	$-\frac{1}{3}$	1
f'(t)	+	0	- 0
f(t)	0 ↗	$\frac{32}{27}$	↘ 0

Pour $t = -\frac{1}{3}$, $V = V_{\max} = \frac{\pi R^3}{3} \times f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{32\pi R^3}{81}$ et $\overline{SH} = -\frac{R}{3} - R = -\frac{4R}{3}$;

la hauteur maximum est $\frac{4R}{3} = 2R \times \frac{2}{3}$.

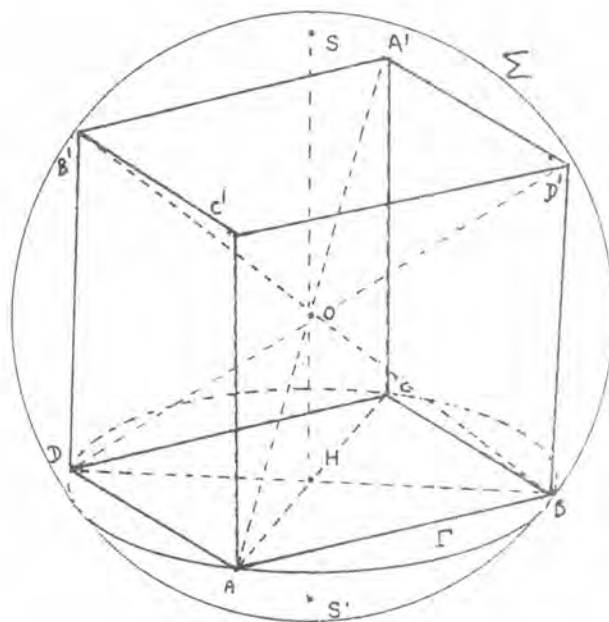
Le volume maximum du cône est celui qui correspond au cône dont la hauteur est le $\frac{2}{3}$ du diamètre :

$$\frac{V_{\max}}{V_S} = \frac{\frac{32\pi R^3}{81}}{\frac{4\pi R^3}{3}} = \frac{8}{27}$$

Fiche SI 3 : Prismes droits à base carrée inscrits dans une sphère (niveau B)

1. (AH) coupe Γ en C. On trace une corde parallèle à (AC), l son milieu : (HI) est alors la deuxième diagonale du carré.
2. L'aire du carré (ABCD) est égale à :

$$\frac{AC \times BD}{2} = 2r^2$$
3. A', B', C', D' sont symétriques de C, D, A, B par rapport à O.
4. $V = S(ABCD) \times HH' = 4r^2x$
 Dans le triangle OHB : $r^2 = R^2 - x^2$
 $V = 4x(R^2 - x^2)$
5. $V(a) = -4x^3 + 4xR^2$
 $V'(a) = -12x^2 + 4R^2$



x	0	$\frac{R\sqrt{3}}{3}$	R
V'(x)	+	0	-
V(x)	0 ↗	$\frac{8R^3\sqrt{3}}{9}$	↘ 0

V est maximal pour $x = \frac{R\sqrt{3}}{3}$ et $V = \frac{8R^3\sqrt{3}}{9}$

6. Lorsque $x = \frac{R\sqrt{3}}{3}$, $r = R\sqrt{\frac{2}{3}}$

le côté du carré vaut $r\sqrt{2} = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$.

Or dans ce cas $HH' = 2x = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$.

La hauteur est donc égale au côté du carré de base, le prisme est un cube.

$$\frac{V_{\max}}{V_S} = \frac{\frac{8R^3\sqrt{3}}{9}}{\frac{4\pi R^3}{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3\pi}$$

Fiche SI 4 : Pyramides régulières dont la base est un triangle équilatéral (niveau C)

1. (AH) coupe Γ en A' , soit I le milieu de $[HA']$; une parallèle à (AA') coupe Γ en D et D', soit J le milieu de $[DD']$; la parallèle à (JH) passant par I coupe (Γ) en B et C.

2. Dans le triangle rectangle AIB :

$$AB^2 = AI^2 + IB^2 = \frac{9r^2}{4} + \frac{AB^2}{4}$$

d'où $AB = r\sqrt{3}$

$$\mathcal{A}(ABC) = r\sqrt{3} \times \frac{3r}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3r^2\sqrt{3}}{4}$$

3. $\overline{HS} = \overline{HO} + \overline{OS}$; $\overline{HS} = R - x$ et $R \geq x$ entraîne $HS = R - x$.

4. Le triangle OHA est rectangle en H, donc $r^2 = R^2 - x^2$.

$$V = \frac{1}{3} \mathcal{A}(ABC) \times HS ; \frac{1}{3} \frac{3r^2\sqrt{3}}{4} (R - x) = \frac{\sqrt{3}}{4} (R^2 - x^2)(R - x) =$$

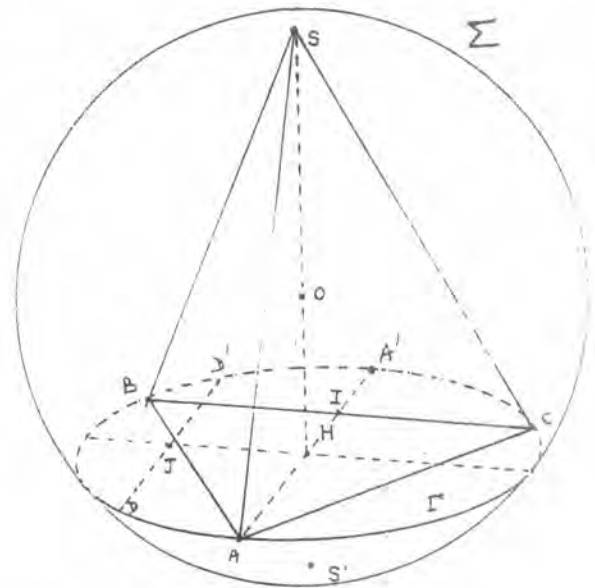
$$\frac{\sqrt{3}}{4} R^3 \left(1 - \frac{x^2}{R^2}\right) \left(1 - \frac{x}{R}\right)$$

5. x varie entre $-R$ et $+R$, donc t varie de -1 à $+1$:

$$f(t) = 1 - t - t^2 + t^3$$

$$f'(t) = 3t^2 - 2t - 1 = (t - 1)(3t + 1)$$

t	-1	$-\frac{1}{3}$	+1
f'(t)	+	0	- 0
f(t)	0 ↗	$\frac{32}{27}$	↘ 0



Pour prouver que la pyramide est régulière lorsque le volume est maximum, calculons AB et SA or

$$-\frac{1}{3} = \frac{x}{R}, \text{ donc } SH = R - x = \frac{4R}{3}$$

$$\text{De plus } AB = r\sqrt{3} \text{ et } r^2 = \frac{8R^2}{9} \text{ soit } r = \frac{2R\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{donc } AB = \frac{2R\sqrt{6}}{3}$$

Dans le triangle SAH rectangle en H :

$$SA^2 = SH^2 + AH^2$$

$$SA^2 = \frac{16R^2}{9} + \frac{8R^2}{9} = \frac{24R^2}{9}$$

donc $SA = \frac{2R\sqrt{6}}{3} = AB$

$$V_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{4} R^3 \times f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{8R^3\sqrt{3}}{27}$$

$$\frac{V_{\max}}{VS} = \frac{\frac{8R^3\sqrt{3}}{27}}{\frac{4\pi R^3}{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{9\pi}$$

$$\frac{V_{\max}}{VS} = 0,12 \text{ à } 10^{-2} \text{ près par défaut.}$$

Fiche SI 5 : Cylindre inscrit dans un cône (niveau B)

1. Les deux plans (P) et (P') sont parallèles, ils coupent le plan (SOM) suivant les parallèles (O'M') et (OM). Le théorème de Thalès appliqué en triangle (SOM) donne :

$$\frac{SO'}{SO} = \frac{O'M'}{OM} \quad r' = \frac{xr}{h}$$

2. a) Le volume du cylindre :

$$V = \pi r'^2 \cdot OO'$$

$$OO' = h - x \text{ donc } V = \frac{\pi r^2}{h^2} x^2 (h - x)$$

- b) $f(x) = x^2(h - x)$; $x \in [0, h]$
 $f'(x) = x(-3x + 2h)$

x	0	$+\frac{2h}{3}$	h
f'(x)	0	+	0
f(x)	0 ↗	$\frac{4h^3}{27}$	↘ 0

Le volume est maximum pour $x = \frac{2h}{3}$, la hauteur du cylindre est bien le tiers de celle du cône. Dans ce cas, $r' = \frac{2h}{2} \cdot \frac{r}{h} = \frac{2r}{3}$, le rayon de son cercle de base est les deux tiers du rayon de base du cône et :

$$V_{\max} = \frac{\pi r^2}{h^2} f\left(\frac{2h}{3}\right) = \pi \frac{r^2}{h^2} \times \frac{4h^3}{27} = \frac{4\pi r^2 h}{27}$$

$$V_{\text{cône}} = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

$$\frac{V_{\max}}{V_{\text{cône}}} = \frac{\frac{4\pi r^2 h}{27}}{\frac{\pi r^2 h}{3}} = \frac{4}{9}$$

Fiche SI 6 : Cônes circonscrits à une sphère (niveau C)

1. a) La droite (SO) est axe de symétrie de la figure, la symétrie conserve les angles ; (SM') est symétrique de (SM), et donc tangente au cercle.

b) Le théorème de Pythagore appliqué aux triangles rectangles IHM et IOM nous donne :

$$\begin{aligned} IM^2 &= IH^2 + MH^2 = MO^2 + IO^2 \\ \text{d'où} \\ MH &= MO \text{ car } IH = IO = a \end{aligned}$$

c) Dans le triangle rectangle SOM :

$$\tan \widehat{OSM} = \frac{OM}{SO} = \frac{r}{h}.$$

Dans le triangle rectangle SIH :

$$\tan \widehat{OSM} = \frac{IH}{SH} = \frac{a}{g-r}$$

$$\text{par suite} \quad \frac{a}{g-r} = \frac{r}{h} \quad \text{ou} \quad g-r = \frac{ah}{r} \quad (1)$$

$$d) \quad A(SOH) = \frac{OM \times SO}{2} = \frac{r \times h}{2}$$

$$A(SOH) = A(SIM) + A(IOM) = \frac{SM \times IH}{2} + \frac{IO \times OM}{2} = \frac{a(g+r)}{2}$$

$$\text{d'où} \quad g+r = \frac{rh}{a} \quad (2)$$

$$(1) \text{ et } (2) \text{ conduisent à : } h = \frac{2ar^2}{r^2-a^2}$$

$$\text{d'où} \quad r^2 = \frac{a^2h}{h-2a}$$

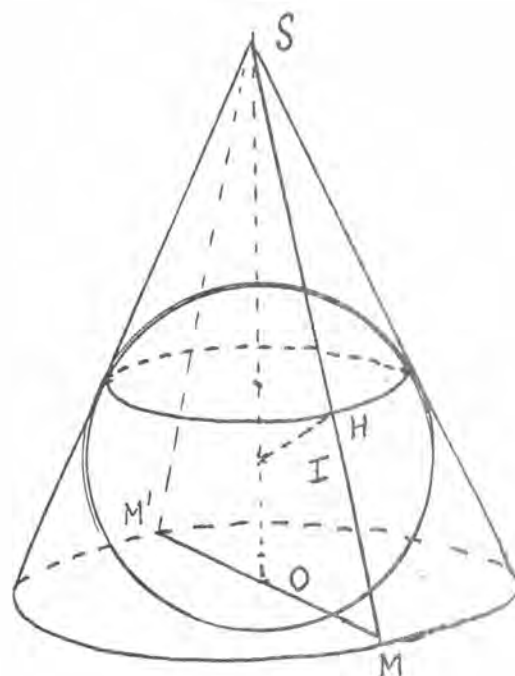
$$2 \quad a) \quad V = \frac{\pi \times OM^2 \times SO}{3} = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

D'après la question précédente :

$$r^2 = \frac{a^2h}{h-2a} \text{ donc } V = \frac{\pi}{3} a^2 \frac{4a^2x^2}{2ax-2a}$$

$$\text{et puisque } x = \frac{h}{2a} \quad V = 2 \frac{\pi}{3} a^3 \frac{x^2}{x-1}$$

h doit être plus grand que 2a, donc $x > 1$.



b) $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ pour $x \in]1, \infty[$

$$f'(x) = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

x	1	2	$+\infty$
f'(x)	-	0	+
f(x)	$\searrow$	4	$\nearrow$

Le volume du cône est minimum quand $x = 2$, c'est-à-dire $h = 4a$, la hauteur est bien le double du diamètre de la sphère :

$$V_{\min} = \frac{2\pi a^3}{3} f(2) = 2 \times \frac{4\pi a^3}{3}$$

son volume est bien le double de celui de la sphère inscrite.

Fiche SI 7 : Troncs de cône circonscrits à une sphère (niveau C)

1. a) D'après le théorème de Pythagore :

$$IM^2 = IO^2 + OM^2 = IM^2 + MH^2 \text{ or } IO = IH$$

donc : $MH = MO$.

de même $M'H = M'O'$:

on en déduit que $d = MH + HM' = MO + M'O' = r + r'$

b) Le théorème de Pythagore appliqué au triangle $MM'm'$ donne :

$$MM'^2 = M'm'^2 + Mm'^2 \quad \text{or } OO' = M'm' = 2a$$

d'où $d^2 = 4a^2 + (r - r')^2$

En remplaçant d par sa valeur :

$$(r + r')^2 = 4a^2 + (r - r')^2$$

d'où $2r \cdot 2r' = 4a^2$ et $rr' = a^2$

2 a) $V = \frac{\pi h}{3} (r^2 + rr' + r'^2)$

on a $h = 2a$, $rr' = a^2$ soit $r' = \frac{a^2}{r}$

donc $V = \frac{2\pi}{3} a \left(r^2 + a^2 + \frac{a^4}{r^2} \right) = \frac{2\pi}{3} a^3 \left(\frac{r^2}{a^2} + 1 + \frac{a^2}{r^2} \right)$

d'où $V = \frac{2\pi}{3} a^3 \left(x^2 + 1 + \frac{1}{x^2} \right)$

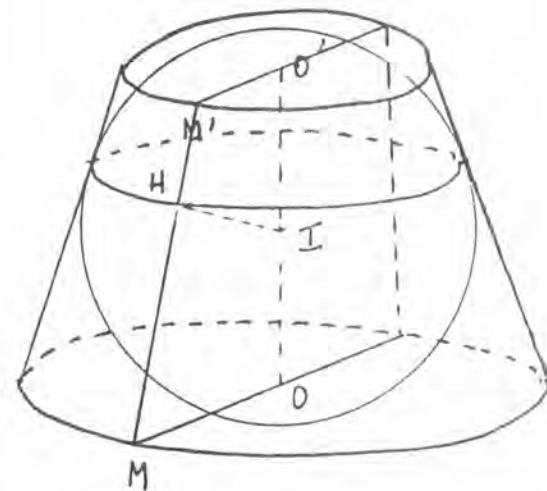
b) $f(x) = x^2 + 1 + \frac{1}{x^2}$ avec $x \in]0, +\infty[$

$$f'(x) = 2x - \frac{2}{x^3} = \frac{2(x^4 - 1)}{x^3}$$

x	0	1	$+\infty$
f'(x)	-	0	+
f(x)	$+\infty$ ↘	3	↗ $+\infty$

Si $x = 1$, $r = a$ et $r' = a$.

Le volume est minimum lorsque le solide circonscrit est un cylindre. Son volume est :



$$V_{\min} = \frac{2\pi a^3}{3} \cdot f(1) = \frac{2\pi a^3}{3} \cdot 3 = 2\pi a^3$$

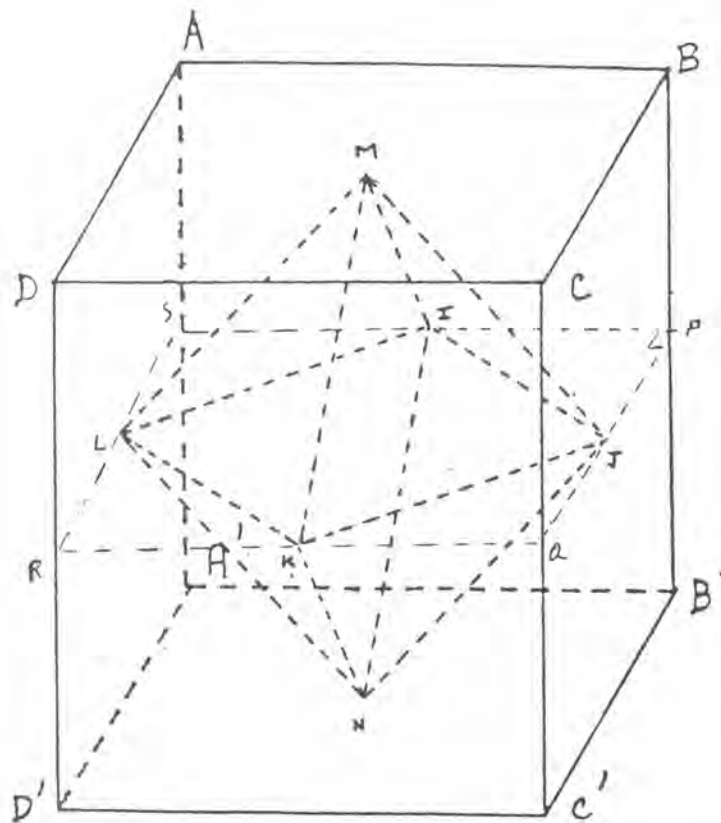
Le volume de la sphère de rayon a est $\frac{4}{3} \pi a^3$:

$$\frac{V_{\min}}{V_S} = \frac{2\pi a^3}{4\pi a^3} \cdot 3 = \frac{3}{2}$$

Tous les troncs de cône circonscrits à une sphère donnée ont un volume strictement supérieur à celui des cylindres circonscrits à cette sphère. Ce dernier a un volume égal à une fois et demie celui de la sphère.

Fiche SI 8 : Octaèdre inscrit dans un cube (niveau A)

1.



Les faces du solide obtenu sont huit triangles équilatéraux. Compte tenu des isométries qui laissent le cube invariant, tous les "coins" du solide sont superposables. D'où le nom d'octaèdre régulier.

2. Soit P le milieu de $[BB']$: le triangle IPJ est rectangle en P , d'où $IJ^2 = PI^2 + PJ^2 = \frac{c^2}{4} + \frac{c^2}{4}$.

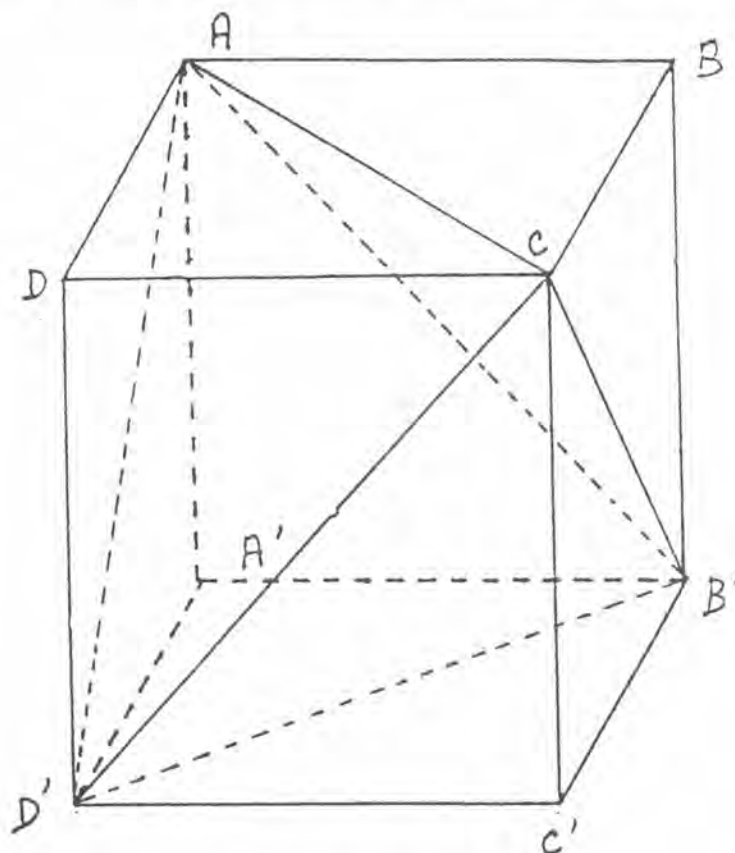
Ainsi, $IJ = c \frac{\sqrt{2}}{2}$. De même pour les autres arêtes.

3. Soient Q, R, S les milieux de $[CC'], [DD']$ et $[AA']$. Les points P, Q, R, S forment évidemment un carré. Les points I, J, K, L sont les milieux des côtés de ce carré. Le quadrilatère $IJKL$ ayant ses diagonales perpendiculaires et de même longueur est un carré.

L'octaèdre est composé de deux pyramides superposables de hauteur $\frac{MN}{2} = \frac{c}{2}$.

Son volume V est donc : $V = 2 \cdot \frac{1}{3} A(IJKL) \cdot \frac{c}{2} = \frac{1}{6} c^3$.

Fiche SI 9 : Tétraèdre régulier inscrit dans un cube (niveau B)



1. Toutes les arêtes du tétraèdre mesurent $c\sqrt{2}$: il est donc régulier.

$$2. V(ACDD') = \frac{1}{3} A(ADD') \times DC = \frac{1}{3} \times \frac{c^2}{2} \times c = \frac{c^3}{6}.$$

Tétraèdre de même volume : $BACB'$, $C'B'CD'$, $A'B'D'A$ et....

Le volume du cube, égal à c^3 , peut aussi s'écrire :

$$V(ACB'D') + 4 V(ACDD') \text{ d'où } V(ACB'D') = c^3 - 4 \frac{c^3}{6}$$

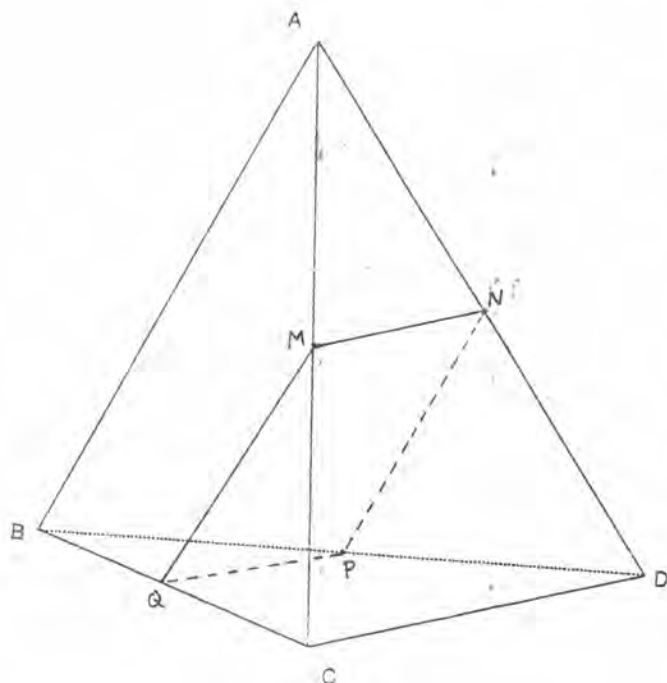
$$\text{soit } V(ACB'D') = \frac{c^3}{3}$$

$$3. \text{ Si on pose } a = c\sqrt{2}, \text{ c'est-à-dire } c = \frac{a}{\sqrt{2}} \text{ d'où } V = \frac{a^3}{6\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3$$

$$\text{Par ailleurs } V = \frac{1}{3} A(AB'D') h \text{ et } A(AB'D') = \frac{1}{2} a \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{d'où } h = 3 \frac{\sqrt{2}}{12} a^3 \frac{1}{a^2 \frac{\sqrt{3}}{4}} \text{ Ainsi } h = \frac{\sqrt{6}}{3} a$$

Fiche SI 10 : Solides de Bell (niveau B)



1) $CA = CB$, de même $DA = DB$: C et D sont tous deux dans le plan médiateur de $[AB]$; (AB) est donc orthogonale à (CD) .

2) Dans le triangle ABC , $\vec{MQ} = \frac{1}{2} \vec{AB}$.

Dans le triangle ABD , $\vec{NP} = \frac{1}{2} \vec{AB}$ donc

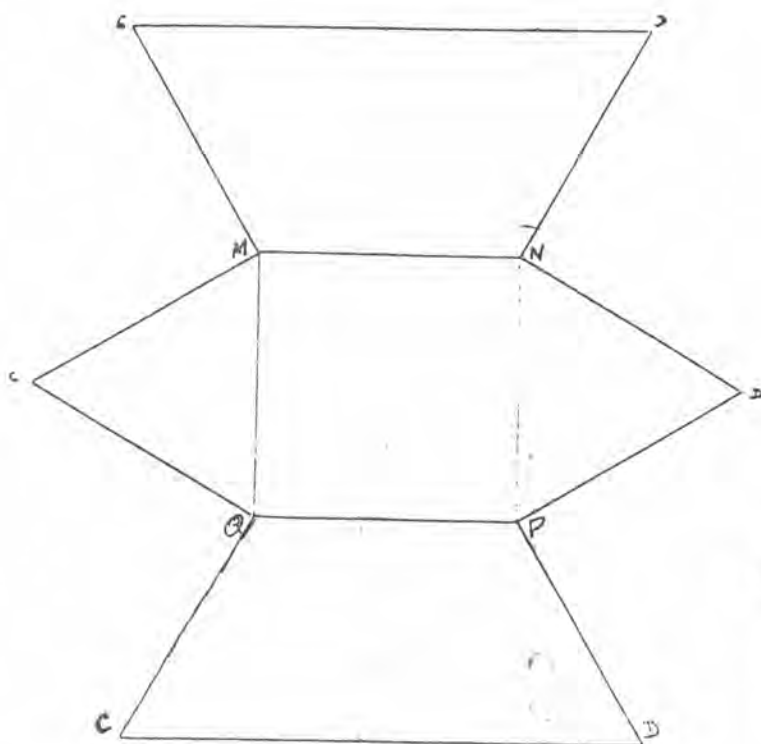
$\vec{MQ} = \vec{NP}$ et $MNPQ$ est un parallélogramme.

D'après (1), $(MN) \perp (NP)$.

Enfin $RN = CD/2 = AB/2 = MQ$

$MNPQ$ est donc un carré.

3) Le patron est obtenu en greffant sur le carré $MNPQ$ de côté 5 cm, 2 triangles équilatéraux et 2 trapèzes isocèles, comme ci-contre :



Les 2 solides obtenus ont évidemment même volume

4) Curieusement, face aux 2 solides, le premier réflexe est plutôt de vouloir faire coïncider 2 faces triangulaires ou trapézoïdales. De plus, seules deux des quatre juxtapositions permettent de constituer le tétraèdre.

Fiche SI 11 : Tétraèdres associés de MOEBIUS (niveau C)

1. Le problème est donc le suivant : existe-t-il deux triangles ABC et A'B'C' au plan tels que tout sommet de l'un soit situé sur la droite support d'un côté de l'autre ?

La réponse est non. On aurait en effet C', A, B alignés et aussi A, B', C' d'où C', A, B, B', alignés ou bien C' = A (1)

De même A'BCC' alignés ou bien A' = B (2)

et B'CAA' alignés ou bien B' = C (3)

Mais si C' = A, on s'aperçoit en reportant dans (2) que nécessairement A' = B en ABC non alignés puis dans (3) : B' = C pour la même raison. C'est impossible car les triangles doivent être distincts.

Donc C' ≠ A. Et de même A' ≠ B et B' ≠ C.

Alors C'ABB' alignés et A'BCC' alignés impliquent ABC alignés ce qui est absurde.

2. Les tétraèdres ABCD et A'B'C'D' sont bien associés.

Les seules appartenances un peu moins évidentes sont :

A' ∈ (BCD) et A ∈ (B'C'D')

B' ∈ (ACD) et B ∈ (A'C'D')

Elles font intervenir les plans diagonaux du cube.

3. a) $\vec{BC} + \vec{BD} = \vec{BA'} + \vec{A'C} + \vec{BA'} + \vec{A'D}$

mais $\vec{A'B} + \vec{A'C} + \vec{A'D} = \vec{O}$

d'où $\vec{BC} + \vec{BD} = 3\vec{BA'}$

Or $\vec{BC} = \vec{D'A}$ et $\vec{BD} = \vec{A'C'}$

d'où $\vec{D'A} = 3\vec{BA'} : \vec{BA'} = \frac{1}{3}\vec{D'A}$

De même $\vec{CA'} = \frac{1}{3}\vec{B'D'}$ et $\vec{DA'} = \frac{1}{3}\vec{C'B'}$

b) $\vec{AB'} + \vec{AD'} + \vec{AC'} = \vec{DC} + \vec{CB} + \vec{BD} = \vec{O}$

c) D'après b) : A ∈ (B'C'D')

D'après a) : $\vec{A'B} = \frac{1}{3}\vec{C'D'}$ donc

B ∈ (A'C'D')

De même on montre que :

$$C \in (A'B'D')$$

$$D \in (A'B'C')$$

Par ailleurs les hypothèses sur $A'B'C'D'$ montrent que $A' \in (BCD)$, $B' \in (ACD)$, $C' \in (ABD)$ et $D' \in (ACB)$. Ainsi $(ABCD)$ et $(A'B'C'D')$ sont bien associés.

- d) $\alpha)$ $\vec{AD'} = \vec{CB}$ donc $AD'BC$ est un parallélogramme : le milieu I de $[AB]$ est aussi le milieu de $[CD']$. Le point I appartient à (AB) et à la droite $(D'C)$ qui est incluse dans le plan $(A'B'D')$

$$\text{car } \vec{A'I} = \frac{1}{3} \vec{D'B'}.$$

De même pour J et K

$$\beta) \vec{A'I} = \frac{1}{3} \vec{D'B'}$$

$[A'B')$ et $[D'C]$ sont ainsi les diagonales d'un trapèze, qui se coupent en R .

D' est dans le plan (ABC) , donc (CD') est incluse dans le plan (ABC) : R appartient donc à (ABC) .

De plus R appartient à $(A'B')$. On en déduit que R est le point d'intersection de l'arête $(A'B')$ et de la face (ABC) . De même pour les points L et M .