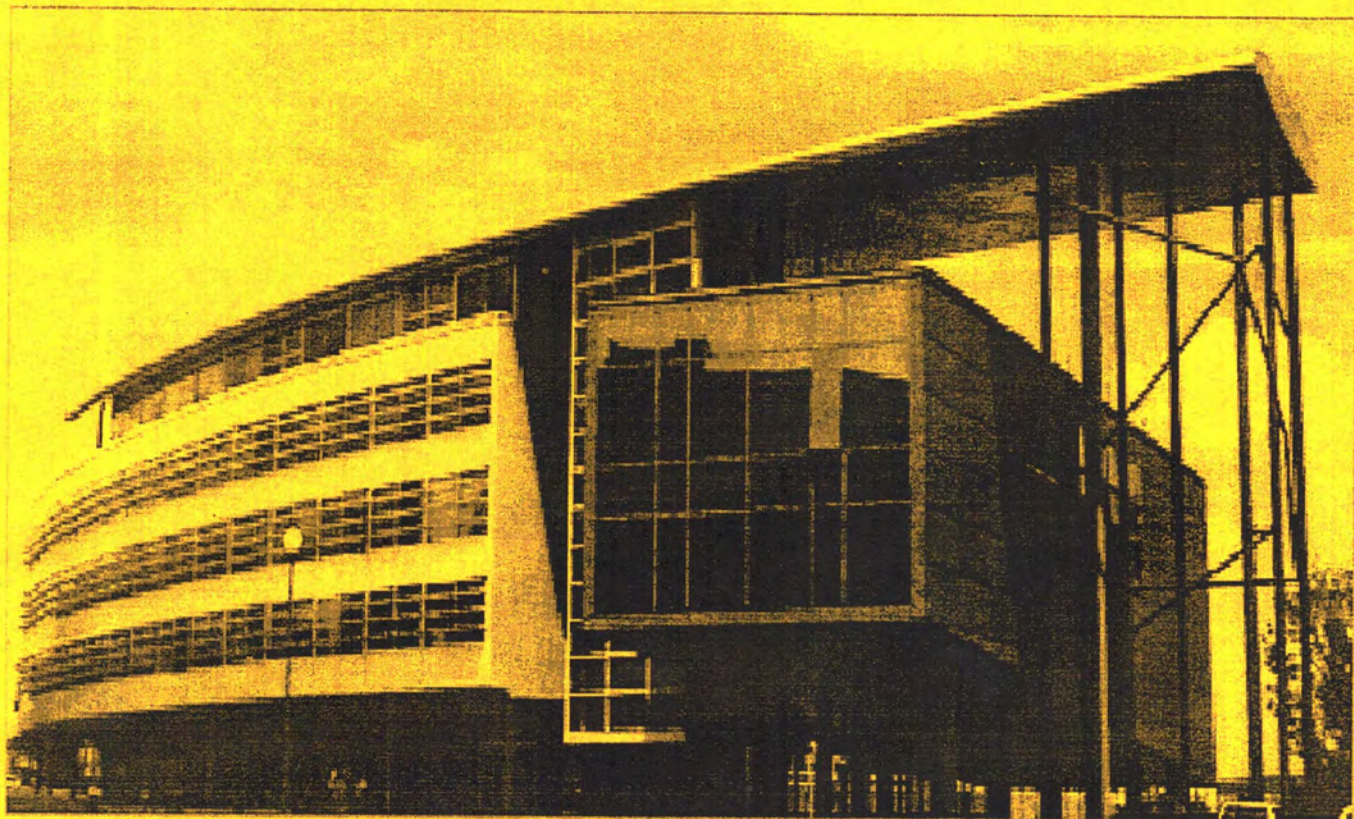


**DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
UNIVERSITÉ HENRI POINCARÉ - NANCY**



**Compléments d'analyse pour
L'AGRÉGATION**

Pierre RABOIN

N° 21

ANNÉE 2002-2003

Compléments d'analyse pour l'Agégation

P R A B O I N .

N° - 21

Année 2002-2003.

Compléments d'Analyse pour l'Agégation :

équations différentielles ordinaires à coefficients analytiques

1) La méthode itérative de PICARD s'applique au problème de CAUCHY

$$(PC) \begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

où f est une fonction holomorphe sur l'ouvert Ω du plan complexe (suppé contenant l'origine) et où x_0 est un nombre complexe, pour en trouver l'unique solution locale : il s'agit de trouver la solution de l'Equation Intégrale

$$(EI) \quad x(t) = x_0 + \int_0^t f(x(u)) du$$

où l'intégrale est prise, pour $|t|$ assez petit, le long du rayon $\overrightarrow{Ox}$ autrement dit de trouver le point fixe de l'application en x définie par le membre de droite, en considérant la suite énumérée

$$\begin{cases} x_0(t) = x_0 \\ x_{n+1}(t) = x_0 + \int_0^t f(x_n(u)) du, \quad n \geq 0 \end{cases}$$

Selon l'estimation découlant de l'inégalité des accroissements finis

$$|x_{n+1} - x_n|(t) \leq C|t| \int_0^1 |x_n - x_{n-1}|(st) ds$$

où C majore $|f'|$ sur le disque $D(0; R)$ contenu dans Ω
 et si z_{n-1}, z_n prennent leurs valeurs dans le même disque.

En partant de $|z_1(t) - z_0| \leq M|t|$ où M majore
 $|f|$ sur $D(0; R)$, multipliant par $|t| < \frac{R}{M}$

$$|z_n - z_{n-1}|(t) \leq M C^{n-1} \frac{|t|^n}{n!}$$

en raisonnant par récurrence sur n , ce qui assure la convergence
 normale de la série de fonctions holomorphes $\sum_{n \geq 0} (z_{n+1} - z_n)$

donc de la suite (z_n) , sur tout compact du disque $|t| < \rho$
 avec $\rho = \frac{1}{C} \ln(1 + \frac{RC}{M})$, vers une fonction qui est holomor-
 -morphe sur le même disque selon un théorème de WEIERSTRASS et qui
 est solution de l'Ei selon un passage à la limite élemen-
 -taire dans la relation de récurrence.

Les mêmes estimations établissent l'unicité de la solution ainsi
 obtenue au PC: c'est le théorème de PICARD-LINDELÖF.

2) La méthode d'identification de NEWTON de résolution du PC

où f est donc analytique sur le disque $D(0; R)$ conduit
 au même résultat selon le calcul des limites de CAUCHY:

- dans un premier temps, on cherche une solution série formelle

$$x(t) = \sum_0^{\infty} z_n t^n$$

où, par conséquent z_0 est donné, et on peut commencer

$$z_1 = \dot{x}(0) = f(z_0)$$

$$z_2 = \frac{1}{2!} \ddot{x}(0) = \frac{1}{2!} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(x(t)) = \frac{1}{2!} f'(z_0) z_1$$

et, plus généralement z_{n+1} apparaît comme une fonction polynômiale

$$P_{n+1}(z_0, z_1, \dots, z_n, f(z_0), f'(z_0), \dots, f^{(n)}(z_0))$$

à coefficients positifs.

- comme, sous les inégalités de CAUCHY

$$\frac{1}{n!} |f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{M}{R^n}$$

si l'on remplace $f(x)$ par $\frac{M}{1 - \frac{x-z_0}{R}}$

la solution série formelle

des PC majorant

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{M}{1 - \frac{x-z_0}{R}} \\ x(0) = z_0 \end{cases}$$

qu'on va approximer nul par la suite

va donner x des le sens à chaque n , on a n^{th} coefficient
 majoré celui de x .

- or, en reportant la variable, on obtient

$$\int_0^{x(t)} \left(1 - \frac{x}{R}\right) dx = Mt$$

qui donne $x(t)$ comme racine du trinôme $x^2 - 2Rx + 2Mkt$

soit $x(t) = R - \sqrt{R^2 - 2Mkt}$ qui définit (en prenant

pour le radical la détermination principale liée à la coupure $(-\infty, 0]$

une fonction holomorphe sur le disque $|t| < \frac{R}{2M}$.

En conclusion, le PC possède une unique solution analytique locale

3) Si $A(t)$ est une application matricielle holomorphe sur le
domaine simplement connexe D , le PC linéaire

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}} = A \vec{x} \\ \vec{x}(0) = \vec{x}_0 \in \mathbb{C}^n \end{cases}$$

possède une unique solution analytique sur D en entier.

- Pour la méthode de 1), on convertit le PC sous l'EI

où l'intégrale est prise le long d'un chemin joignant 0 au

point courant (l'hypothèse de simple connexité est ici

essentielle) : en paramétrant ce chemin (de classe C^1) selon

$u = \gamma(s) \approx s$ désigne l'abscisse curviligne, on a donc

$$x_{n+1}(t) = x_0 + \int_0^L A(\gamma(s)) \cdot x_n(\gamma(s)) \gamma'(s) ds$$

où L est la longueur de la courbe et, par suite

$$|x_1(\gamma(s)) - x_0| \leq \|A\|_K \cdot |x_0| \cdot s$$

et $\|A\|_K$ majoré $\|A\|$ sur un compact K de D contenant la courbe, puis

$$|x_2 - x_1|(\gamma(s)) \leq \|A\|_K^2 \cdot |x_0| \frac{s^2}{2}$$

et, en général

$$|x_{n+1} - x_n|(\gamma(s)) \leq |x_0| \frac{(\|A\|_K s)^n}{n!}$$

permettra de conclure.

Le point 2) assure l'existence d'une unique solution analytique

sur tout disque $D(t_0, \frac{R_K}{2M_K})$ si $t_0 \in K$ et où

R_K désigne la distance de K au complémentaire de D dans $\mathbb{C}$

on peut donc prolonger la solution locale obtenue en 2)
analytiquement le long de la courbe $\mathcal{C}$ joignant l'origine au
point courant, selon le procédé de WEIERSTRASS qui consiste
à recouvrir $\mathcal{C}$ à l'aide de N disques $D_j = D(t_j, \frac{R_K}{2M_K})$

où $t_j \in D_{j-1}$, $j=1, \dots, N$ pour obtenir la solution
globale en résolvant successivement les $(P_K)_j$ $\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(t_j) = x_{j-1}(t_j) \end{cases}$.

4) Par exemple, la solution générale de l'EDO scalaire linéaire
d'ordre 2

$$\ddot{x} + p\dot{x} + qx = 0$$

où p et q sont des fractions rationnelles, est localement
analytique en dehors de pôles.

- Ainsi l'EDO de LEGENDRE d'indice n entier positif

$$(L_n) \quad (1-t^2) \ddot{x} - 2t \dot{x} + n(n+1)x = 0$$

présente en particulier comme solution le n-ème polynôme de LEGENDRE

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \left((t^2 - 1)^n \right)^{(n)}$$

normalisé par la condition $P_n(1) = 1$, et au lequel on peut s'appuyer
pour trouver la solution générale x avec le théorème de LIOUVILLE

qui donne un wronskien proportionnel à $\frac{1}{1-t^2}$, d'où que

$$\frac{z}{P_n}(t) = \int_{-1}^t \frac{du}{(1-u^2)P_n^2(u)}$$

Sachant que $\{P_n\}_{n \geq 0}$ est la suite de polynômes orthogonaux sur $(-1, 1)$ par le mesure de LEBESGUE, les zéros de P_n ont 2 à 2 distincts dans l'intervalle $] -1, 1[$ et, en les désignant par $(t_j)_{j=1}^m$

la quadrature s'effectuera en décomposant $\frac{1}{(1-u^2)P_n^2(u)}$ en éléments

simples sous la forme

$$\frac{A}{1-u} + \frac{B}{1+u} + \sum_{j=1}^m \frac{A_j}{(u-t_j)^2}$$

ce, selon 3) il ne saurait y avoir de singularité de branchement aux points t_j .

On obtient facilement

$$z(t) = a \cdot P_n(t) + b \cdot Q_n(t) \quad \text{avec } a, b \text{ complexes et}$$

où

$$Q_n(t) = \frac{1}{2} P_n(t) \ln \frac{1+t}{1-t} - U_{n-1}(t)$$

avec U_{n-1} polynôme de degré $(n-1)$, est la fonction de LEBESGUE de

8
 seconde copie. la fonction $\ln \frac{1+t}{1-t}$ peut être définie comme
 la composition de la détermination principale du logarithme pour
 la coupure $(-\infty, 0]$ avec la fonction homographique, qui correspond
 dans le plan $\mathbb{C}_t$ à la coupure $]-\infty, -i] \cup [i, +\infty[$ (donnant
 un ouvert simplement connexe) : elle fait apparaître les
 pôles ± 1 des coefficients p et q comme singularités de
 branchement de la solution générale de l'EDO.

- De même, pour l'EDO de BESSEL modifiée d'indice 0

$$(B_0) \quad t \ddot{x} + i - tx = 0$$

l'origine apparaît comme une singularité polaire des coefficients de
 l'équation différentielle.

5) On aborde par conséquent le problème de l'EDO linéaire

$$\dot{\vec{x}} = A \vec{x}$$

où A est une application matricielle analytique sur un
 disque ouvert centré en 0 mais privé de son centre.

- Selon la démarche déjà suivie en 3), il est alors possible
 de prolonger la solution locale X_0 du problème de CAUCHY

$$\begin{cases} \dot{X} = A \cdot X \\ X(t_0) = I \end{cases} \quad \text{où } t_0 \text{ est proche de } 0 \text{ mais non nul}$$

le long du cercle $\partial D(0, |t_0|)$ selon le procédé de WEIERSTRASS au bout d'un tour, on obtient une solution X_1 de l'EDO

$\dot{X} = A \cdot X$ qui va, en général, différer de la matrice fondamentale X_0 au point t_0 et on obtient une relation de la forme

$$X_1 = X_0 \cdot M$$

où la matrice constante inversible M est appelée matrice de monodromie de l'EDO.

- Si $\vec{v}$ désigne un vecteur propre de M , associé à la valeur propre λ , la solution $\vec{x}(t) = X_0(t) \cdot \vec{v}$ de l'EDO se prolonge selon $X_1(t) \cdot \vec{v} = \lambda \vec{x}(t)$, tout comme la fonction puissance t^r où $r = \frac{\ln(\lambda)}{2i\pi}$: autrement

dit $t^r \vec{x}(t) = \vec{\varphi}(t)$ est analytique au voisinage pointé de l'origine. Ainsi, pour une EDO scalaire

d'ordre 2 telle que les coefficients p et q possèdent en 0 une singularité isolée, si la matrice de monodromie

arrivé est diagonalisable, cela signifie que la solution générale prend la forme

$$x(t) = at^{r_1} \varphi_1(t) + bt^{r_2} \varphi_2(t)$$

avec a, b complexes, φ_1 et φ_2 analytiques au voisinage de 0 sauf éventuellement à l'origine. Par contre, et si M n'est pas diagonalisable, il existe une solution de la forme

$$x_2(t) = t^r \varphi_1(t) (b \ln t + \psi(t))$$

- Sachant que les fonctions φ et ψ présentent en 0 une singularité polaire ou essentielle, on parle de Point Singulier Régulier ou Irregulier.

Si 0 est un PSR, et en supposant M diagonalisable cela entraînera que le wronskien

$$W = x_1 \dot{x}_2 - \dot{x}_1 x_2$$

est de la forme $t^\alpha y(t)$ avec y analytique à l'origine et

comme $\dot{W} = -pW$ selon le théorème de LIOUVILLE, cela

montre que $p(t)$ possède en 0 au plus une singularité

polaire d'ordre 1, tandis que pour $q = -p \frac{\dot{t}}{t} - \frac{\ddot{t}}{t}$ cette singularité

est d'ordre 2 au plus : Au cette lecture de la singularité à la vue des coefficients de l'EDO, on parle de Pont Singulier de 1^{re} espèce. C'est par exemple le cas de l'EDO de BESSEL (B_0).

Le théorème de FUCHS établit la réciproque $PS1 \Rightarrow PSR$, et sa démonstration repose sur la méthode d'identification vue en 2), cherchant à résoudre l'EDO sous la forme

$$x(t) = t^r \cdot \sum_0^{\infty} x_n t^n$$

et en écrivant $p(t) = \frac{1}{t} \cdot \sum_0^{\infty} p_n t^n$, $q(t) = \frac{1}{t^2} \cdot \sum_0^{\infty} q_n t^n$

On obtient la relation récurrente

$$(n+r)(n+r-1)x_n + \sum_{k=0}^n [(k+r)p_{n-k} + q_{n-k}] x_k = 0$$

pour n entier, et la condition $x_0 \neq 0$ conduit à l'équation déterminante

$$r(r-1) + rp_0 + q_0 = 0.$$

- Ainsi pour (B_0), on a $r^2 = 0$ et il existe une solution entière

$$I_0(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t/2)^{2n}}{(n!)^2}$$

Une solution de (B_0) indépendante de I_0 peut s'obtenir par quadrature à partir du wronskien qui donne

$$x(t) = I_0(t) \int \frac{du}{u \cdot I_0^2(u)}$$

faisant apparaître à l'origine une singularité logarithmique.

Pour revenir au théorème de FUCHS, on peut en donner une démonstration plus rapide (mais moins constructive) en mettant pour commencer l'EDO scalaire sous la forme

$$\ddot{y} = \frac{1}{t} B \cdot \dot{y} \quad \text{où} \quad \vec{y}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ t i(t) \end{pmatrix} \quad \text{et avec}$$

B analytique au voisinage de 0. En posant $\vec{y}(p e^{i\theta}) = \tilde{y}(p, \theta)$ on obtient $|\partial_p \tilde{y}| \leq \|B\| \cdot |\tilde{y}|_p$ puis

$$\partial_p |\tilde{y}| + \frac{\|B\|}{p} |\tilde{y}| \geq 0 \quad \text{qui} \quad \text{à variance lente}$$

$$|\tilde{y}| \leq C \cdot p^{-\|B\|} \quad \text{de } \vec{y}, \quad \text{et la conclusion cherchée}$$

avec les inégalités de CAUCHY.

6) On obtient une représentation intégrale de I_0 par la méthode de LAPLACE complexe qui consiste à chercher une

solution sous la forme

$$x(t) = \int_{\mathcal{C}} e^{-tz} X(z) dz$$

où le chemin d'intégration $\mathcal{C}$ et la transformée X sont inconnus :
un calcul formel de dérivation sous le signe $\int_{\mathcal{C}}$ et d'intégration

proprie donne

$$\dot{x}(t) = \int_{\mathcal{C}} e^{-tz} (-z X(z)) dz$$

$$t \ddot{x}(t) = \int_{\mathcal{C}} z^2 X(z) d\left(\frac{-e^{-tz}}{z}\right) = -e^{-tz} z^2 X(z) \Big|_{\partial \mathcal{C}} + \int_{\mathcal{C}} e^{-tz} (z^2 X)' dz$$

$$\text{et } t x(t) = \int_{\mathcal{C}} X(z) d\left(\frac{-e^{-tz}}{z}\right) = -e^{-tz} X(z) \Big|_{\partial \mathcal{C}} + \int_{\mathcal{C}} e^{-tz} X'(z) dz$$

En portant dans (B₀) et en reportant le terme tout intégré, on obtient
naturellement conduit à considérer le système

$$\begin{cases} e^{-tz} (1-z^2) X(z) \Big|_{\partial \mathcal{C}} = 0 \\ (z^2 X)' - zX - X' = 0 \end{cases}$$

où l'intégration de l'EDO (libérée d'elles-mêmes variables séparables)

donne $X(z) = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$: un chemin lisse joindra les points -1 et 1 dans le domaine simplement connexe défini par les coupures $]-\infty, -1]$ et $[1, +\infty[$ (sur lequel X est bien défini).

Garibizi maintenant sans difficulté que

$$x(t) = \int_{-1}^1 \frac{e^{-ts} ds}{\sqrt{1-s^2}}$$

est une solution entière de (B_0) , les opérations formelles étant licites. D'après 5), x est donc proportionnel à I_0 et, de fait

$$I_0(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{e^{-ts}}{\sqrt{1-s^2}} ds$$

(qui peut être d'ailleurs vérifiée en développant e^{-ts} en série, et en intégrant terme à terme).

Cette représentation intégrale permet d'obtenir le développement asymptotique de la fonction de BESSEL modifiée I_0 lorsque $t \rightarrow +\infty$ (selon la méthode de WATSON) :

$$I_0(t) = \frac{e^{-t}}{\pi\sqrt{2}} \int_0^2 \frac{e^{-t\theta}}{\sqrt{\theta(1-\theta/2)}} d\theta \quad \text{ou} \quad \int_1^2 \frac{e^{-t\theta}}{\sqrt{\theta(1-\theta/2)}} d\theta = G(e^{-t})$$

tandis que

$$\int_0^1 \frac{e^{-t\theta}}{\sqrt{1-\theta/2}} \cdot \frac{d\theta}{\sqrt{\theta}} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \int_0^1 e^{-t\theta} \left(\frac{\theta}{2}\right)^n \frac{d\theta}{\sqrt{\theta}} + R_N(t)$$

d'après le développement de TAYLOR de

$$(1-z)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} z^n + r_N(z)$$

$$\text{ou} \quad r_N(z) = \frac{(2N)!}{(2^N N!)^2} (1-\xi_z)^{-\frac{2N+1}{2}} \cdot z^N \quad \text{avec } \xi_z \text{ compris}$$

entre 0 et $\xi = \frac{\theta}{2}$ appartenant à $[0, \frac{1}{2}]$ conduit à l'estimation

du reste

$$R_N(t) \leq \frac{(2N)!}{(2^N N!)^2} \sqrt{2} \int_0^1 e^{-t\theta} \theta^{N-1/2} d\theta.$$

maintenant, et pour chaque n

$$\int_0^1 e^{-t\theta} \theta^{n-1/2} d\theta = \int_0^\infty e^{-\lambda} \lambda^{n-1/2} \frac{d\lambda}{t^{n+1/2}} - \int_1^\infty e^{-t\theta} \theta^{n-1/2} d\theta$$

16 11
 on a $\int_1^\infty$, étant majorée par $e^{-t/2} \int_0^\infty e^{-t\theta/2} \theta^{n-1/2} d\theta$

est exponentiellement petite lorsque $t \rightarrow +\infty$. Tout cela montre que

$$\int_0^1 \frac{e^{-t\theta}}{\sqrt{1-\theta/2}} \cdot \frac{d\theta}{\sqrt{\theta}} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \cdot \frac{\Gamma(n+1/2)}{2^n t^{n+1/2}} + O\left(\frac{1}{t^{N+1/2}}\right)$$

et conduit au DA

$$I_0(t) \underset{(t \rightarrow +\infty)}{\sim} \frac{e^t}{\sqrt{2\pi t}} \cdot \sum_{n \geq 0} \frac{((2n)!)^2}{2^{5n} (n!)^3} \cdot \frac{1}{t^n}$$

On peut retrouver la forme de ce DA par la méthode de LIOUVILLE-STÉKLOV qui consiste, pour commencer à éliminer la forme en i dans (B_0) en posant $x = \varphi(y)$: on est naturellement conduit à poser $x(t) = \frac{y(t)}{\sqrt{t}}$, y obéissant à l'EDO

$$\ddot{y} - y = -\frac{y}{4t^2} \quad \text{pour } t > 0$$

à laquelle on applique la méthode de LAGRANGE par la transformée dans l'Ei

$$y(t) = ae^t + be^{-t} + \int_1^t \frac{\sinh(t-s)}{4s^2} y(s) ds$$

En posant $y(t) = e^t z(t)$, cela s'écrit encore

$$z(t) = a + be^{-2t} + \int_1^t \frac{1-e^{-2(t-s)}}{8s^2} z(s) ds$$

et si $Z(t) = \sup_{1 \leq s \leq t} |z(s)|$ pour $t \geq 1$, on obtient

$$|z(t)| \leq |a| + |b| + \frac{1}{8} Z(t)$$

qui montre que $Z(t) \leq \frac{8}{7}(|a| + |b|)$ est borné sur $[1, \infty[$:

ainsi, $z(t) = e^{-t} \text{VE. } z(t)$ est solution d'une E1 de

VOLTERRA régulière de la forme

$$z(t) = a + be^{-2t} - \int_t^{+\infty} \frac{1-e^{-2(t-s)}}{8s^2} z(s) ds$$

où a, b désignent des constantes. On étudie par exemple l'E1

$$(E1)_1 \quad z(t) = 1 - \int_t^{\infty} \frac{1-e^{-2(t-s)}}{8s^2} z(s) ds$$

en cherchant une solution de la forme $\sum_{n=0}^{\infty} z_n(t) \cdot t^n$ selon

la méthode d'identification de NEWTON qui conduit à étudier la suite récurrente

$$z_{n+1}(t) = - \int_t^{\infty} \frac{1-e^{-2(t-s)}}{8s^2} z_n(s) ds, \quad n \geq 0$$

avec $z_0 = 1$. On a pour commencer

$$|z_1(t)| = \left| - \int_t^{\infty} \frac{1-e^{-2(t-s)}}{8s^2} ds \right| \leq \frac{1}{8t}$$

puis

$$|z_2(t)| \leq \int_t^{\infty} \frac{ds}{8^2 s^3} = \frac{1}{2 \cdot 8^2 t^2}$$

et, en général

$$|z_n(t)| \leq \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{8t} \right)^n$$

estimation qui assure la convergence normale de la série $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ sur $[1, +\infty[$, le membre étant solution de $l'(Ei)_1$; en outre ce développement est un DA au voisinage de $+\infty$.

19
10

Lectures :

- 1) E. GOURSAT Cours d'Analyse Mathématique § 389.
J. DIEUDONNE Calcul infinitésimal XI § 5.
- 2) E. GOURSAT § 383 - 388.
- 3) J. DIEUDONNE XII § 5.
G. VALIRON Equations fonctionnelles. Applications § 45 - 46
- 4) G. VALIRON § 119. 120
- 5) F.G. TRICOMI Differential Equations § 44 - 46
E.A. CODDINGTON - N. LEVINSON Theory of ODE Chp 4.
- 6) G. VALIRON § 264.
E.T. COLESON Asymptotic expansions § 22
A. ERDELYI Asymptotic expansions § 3.3

Compléments d'Analyse pour l'Agrégation:

exemple d'étude qualitative d'EDO

1) Comme exemple d'étude de système conservatif d'ordre 2, on considère par l'EDO du pendule $\ddot{\theta} + \sin \theta = 0$ qui, mis sous la forme d'un Système Différentiel d'ordre 1 prend la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\sin x \end{cases} \quad (1) \quad \vec{\dot{x}} = \vec{f}(\vec{x}) \quad \left| \begin{array}{l} P(x, y) = y \\ Q(x, y) = -\sin x \end{array} \right.$$

selon les variables d'état $x = \theta$, $y = \dot{\theta}$ (c'est-à-dire angulaire)

Il existe ici une intégrale première $V(x, y)$ du mouvement, c'est-à-dire une fonction restant constante le long de chaque trajectoire

$$\frac{d}{dt} V(x(t), y(t)) = 0 \quad : \quad \text{il suffit que } \underline{\text{la dérivée de } V}$$

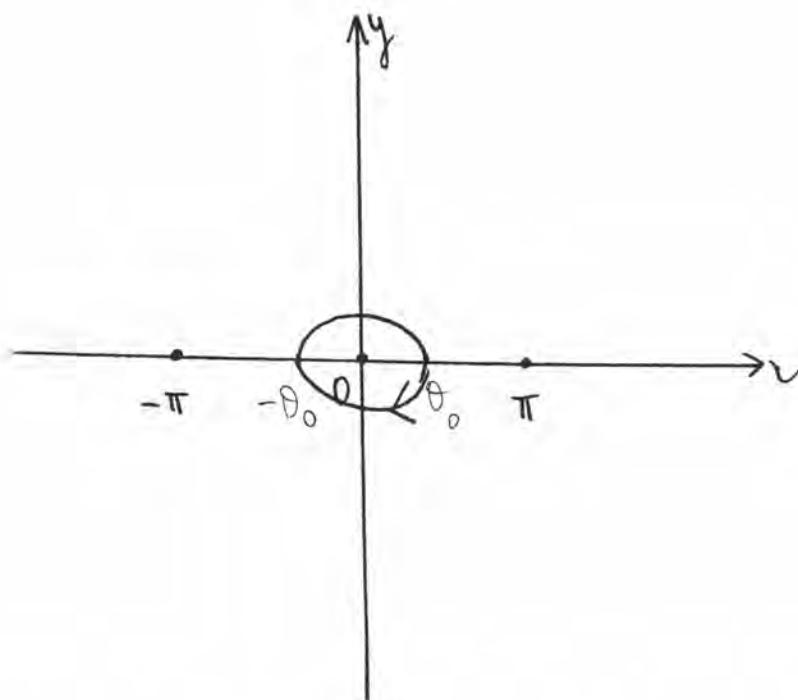
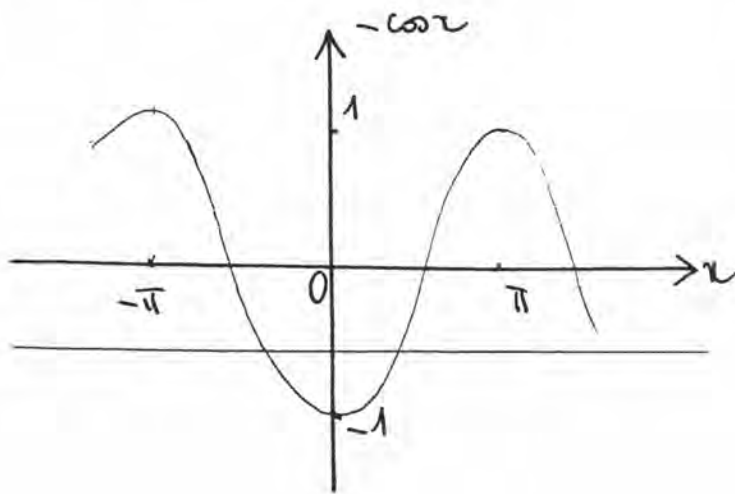
le long du flot différentiel

$$L_{\vec{f}}(V) = \vec{f} \cdot \vec{\nabla} V = y \frac{\partial V}{\partial x} - \sin x \frac{\partial V}{\partial y} = 0$$

En séparant les variables, on obtient une équation qui s'écrit

$$V(x, y) = \frac{1}{2} y^2 - \cos x$$

et qui correspond, du point de vue Mécanique à l'énergie du pendule, somme de l'énergie cinétique $\frac{1}{2} \dot{\theta}^2$, et de l'énergie potentielle $-\cos \theta$. Cela conduit à étudier les lignes de niveau de la surface d'équation cartésienne $z = V(x, y)$:



les points critiques $(\pi, 0)$ de V correspondent aux positions d'équilibre de l'EDO (positions haute et basse du pendule) dans le plan de phase $\mathbb{R}^2_{(x,y)}$ des variables d'état.

Partant de la condition initiale $x(0) = \theta_0 \in]-\pi, \pi[$, $y(0) \neq 0$
(pendule écarté de sa position basse, et abandonné sans vitesse initiale),
on obtient $V(x, y) = V(\theta_0, 0) = -\cos \theta_0$ soit

$$y^2 = 2(\cos x - \cos \theta_0)$$

qui donne une ligne de niveau bornée : la solution
maximale du problème de CAUCHY est donc définie à chaque
instant t , et la trajectoire est un cycle, dont on
écrit l'équation implicite, par conséquent ; le cycle est
orienté dans le sens horaire, la vitesse en $t=0$ étant
donnée par le vecteur $\vec{f}(\theta_0, 0) \begin{vmatrix} 0 \\ -\sin \theta_0 \end{vmatrix}$ < 0 pour $0 < \theta_0 < \pi$.

Cela correspond au mouvement d'oscillation du pendule, lorsque
pour une condition initiale $x(0) = 0$, $y(0) = \dot{\theta}_0 > 0$ par
exemple, le mouvement est d'évolution.

Pour la condition initiale limite $x(0) = 0$, $y(0) = 2$, on
obtient l'équation implicite

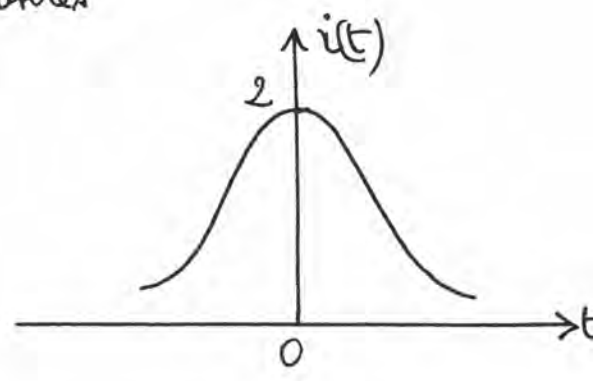
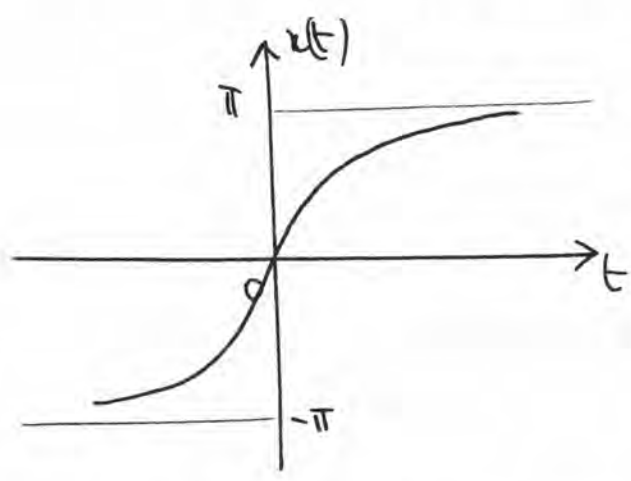
$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 4 \cos^2 \frac{x}{2}$$

qui donne par quadrature

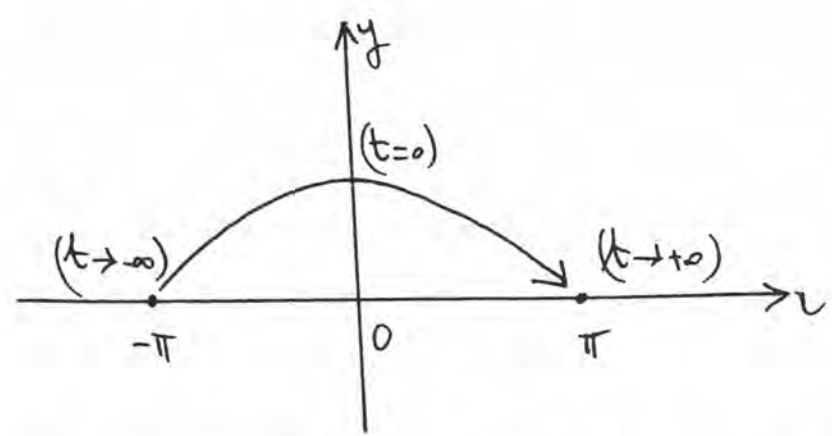
$$x(t) = 4 \operatorname{Arctg}(e^t) - \pi$$

$$\text{et } i(t) = \frac{2}{\cosh t}$$

Le tracé des courbes intégrales correspondantes

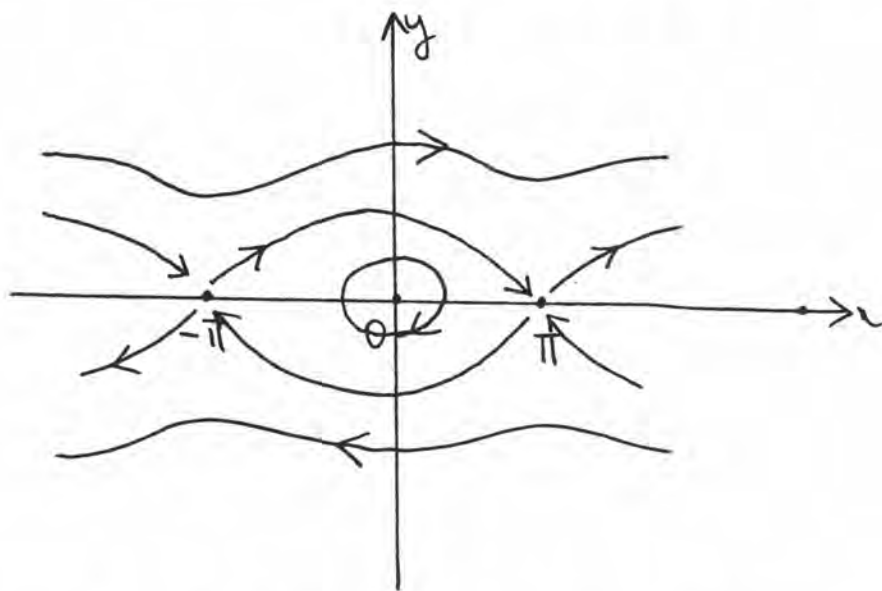


montre que la trajectoire arrive



relie les équilibres haut : la ligne de niveau $\{V=1\}$ contient une infinité de trajectoires ... en pratique l'équilibre haut et deux trajectoires appelées homoclines ou séparatrices (de mouvement périodiques).

On peut ainsi tracer le portrait de phase de l'EDO du pendule:

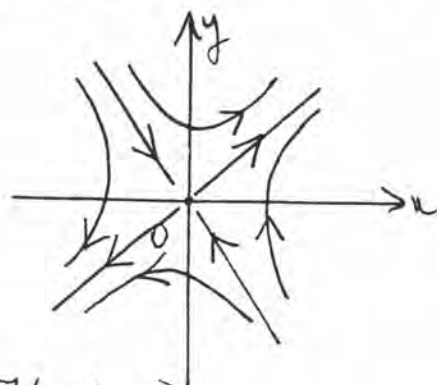
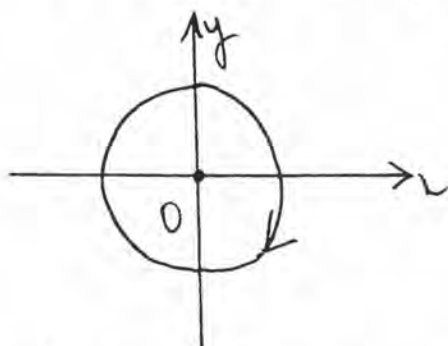


qui met en particulier en évidence la différence de nature des deux points d'équilibre, l'origine (le point bas) étant stable (c'est un centre), l'équilibre haut étant instable (c'est un col). Les EDO linéaires n'ont

$$(1)_0 \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases}$$

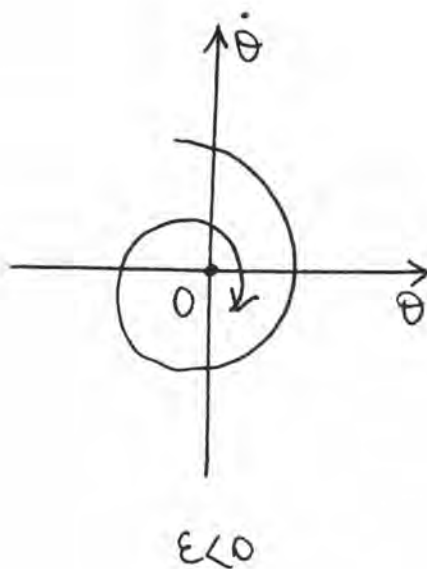
$$(1)_{(0,\pi)} \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x \end{cases}$$

et leurs portraits de phase ressemblent localement à ceux du pendule près de l'équilibre correspondant

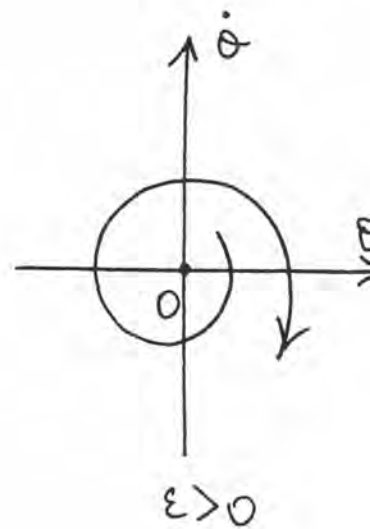
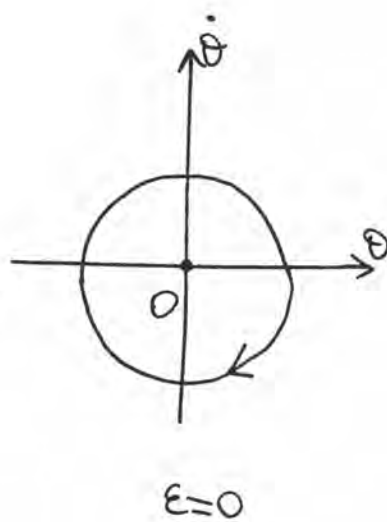


(cf. A. de la table marquant de la (b) (c) (d) (e) (f) (g) (h) (i) (j) (k) (l) (m) (n) (o) (p) (q) (r) (s) (t) (u) (v) (w) (x) (y) (z) (aa) (ab) (ac) (ad) (ae) (af) (ag) (ah) (ai) (aj) (ak) (al) (am) (an) (ao) (ap) (aq) (ar) (as) (at) (au) (av) (aw) (ax) (ay) (az) (ba) (bb) (bc) (bd) (be) (bf) (bg) (bh) (bi) (bj) (bk) (bl) (bm) (bn) (bo) (bp) (bq) (br) (bs) (bt) (bu) (bv) (bw) (bx) (by) (bz) (ca) (cb) (cc) (cd) (ce) (cf) (cg) (ch) (ci) (cj) (ck) (cl) (cm) (cn) (co) (cp) (cq) (cr) (cs) (ct) (cu) (cv) (cw) (cx) (cy) (cz) (da) (db) (dc) (dd) (de) (df) (dg) (dh) (di) (dj) (dk) (dl) (dm) (dn) (do) (dp) (dq) (dr) (ds) (dt) (du) (dv) (dw) (dx) (dy) (dz) (ea) (eb) (ec) (ed) (ee) (ef) (eg) (eh) (ei) (ej) (ek) (el) (em) (en) (eo) (ep) (eq) (er) (es) (et) (eu) (ev) (ew) (ex) (ey) (ez) (fa) (fb) (fc) (fd) (fe) (ff) (fg) (fh) (fi) (fj) (fk) (fl) (fm) (fn) (fo) (fp) (fq) (fr) (fs) (ft) (fu) (fv) (fw) (fx) (fy) (fz) (ga) (gb) (gc) (gd) (ge) (gf) (gg) (gh) (gi) (gj) (gk) (gl) (gm) (gn) (go) (gp) (gq) (gr) (gs) (gt) (gu) (gv) (gw) (gx) (gy) (gz) (ha) (hb) (hc) (hd) (he) (hf) (hg) (hh) (hi) (hj) (hk) (hl) (hm) (hn) (ho) (hp) (hq) (hr) (hs) (ht) (hu) (hv) (hw) (hx) (hy) (hz) (ia) (ib) (ic) (id) (ie) (if) (ig) (ih) (ii) (ij) (ik) (il) (im) (in) (io) (ip) (iq) (ir) (is) (it) (iu) (iv) (iw) (ix) (iy) (iz) (ja) (jb) (jc) (jd) (je) (jf) (jg) (jh) (ji) (jj) (jk) (jl) (jm) (jn) (jo) (jp) (jq) (jr) (js) (jt) (ju) (jv) (jw) (jx) (jy) (jz) (ka) (kb) (kc) (kd) (ke) (kf) (kg) (kh) (ki) (kj) (kk) (kl) (km) (kn) (ko) (kp) (kq) (kr) (ks) (kt) (ku) (kv) (kw) (kx) (ky) (kz) (la) (lb) (lc) (ld) (le) (lf) (lg) (lh) (li) (lj) (lk) (ll) (lm) (ln) (lo) (lp) (lq) (lr) (ls) (lt) (lu) (lv) (lw) (lx) (ly) (lz) (ma) (mb) (mc) (md) (me) (mf) (mg) (mh) (mi) (mj) (mk) (ml) (mm) (mn) (mo) (mp) (mq) (mr) (ms) (mt) (mu) (mv) (mw) (mx) (my) (mz) (na) (nb) (nc) (nd) (ne) (nf) (ng) (nh) (ni) (nj) (nk) (nl) (nm) (nn) (no) (np) (nq) (nr) (ns) (nt) (nu) (nv) (nw) (nx) (ny) (nz) (oa) (ob) (oc) (od) (oe) (of) (og) (oh) (oi) (oj) (ok) (ol) (om) (on) (oo) (op) (oq) (or) (os) (ot) (ou) (ov) (ow) (ox) (oy) (oz) (pa) (pb) (pc) (pd) (pe) (pf) (pg) (ph) (pi) (pj) (pk) (pl) (pm) (pn) (po) (pp) (pq) (pr) (ps) (pt) (pu) (pv) (pw) (px) (py) (pz) (qa) (qb) (qc) (qd) (qe) (qf) (qg) (qh) (qi) (qj) (qk) (ql) (qm) (qn) (qo) (qp) (qq) (qr) (qs) (qt) (qu) (qv) (qw) (qx) (qy) (qz) (ra) (rb) (rc) (rd) (re) (rf) (rg) (rh) (ri) (rj) (rk) (rl) (rm) (rn) (ro) (rp) (rq) (rr) (rs) (rt) (ru) (rv) (rw) (rx) (ry) (rz) (sa) (sb) (sc) (sd) (se) (sf) (sg) (sh) (si) (sj) (sk) (sl) (sm) (sn) (so) (sp) (sq) (sr) (ss) (st) (su) (sv) (sw) (sx) (sy) (sz) (ta) (tb) (tc) (td) (te) (tf) (tg) (th) (ti) (tj) (tk) (tl) (tm) (tn) (to) (tp) (tq) (tr) (ts) (tt) (tu) (tv) (tw) (tx) (ty) (tz) (ua) (ub) (uc) (ud) (ue) (uf) (ug) (uh) (ui) (uj) (uk) (ul) (um) (un) (uo) (up) (uq) (ur) (us) (ut) (uu) (uv) (uw) (ux) (uy) (uz) (va) (vb) (vc) (vd) (ve) (vf) (vg) (vh) (vi) (vj) (vk) (vl) (vm) (vn) (vo) (vp) (vq) (vr) (vs) (vt) (vu) (vv) (vw) (vx) (vy) (vz) (wa) (wb) (wc) (wd) (we) (wf) (wg) (wh) (wi) (wj) (wk) (wl) (wm) (wn) (wo) (wp) (wq) (wr) (ws) (wt) (wu) (wv) (ww) (wx) (wy) (wz) (xa) (xb) (xc) (xd) (xe) (xf) (xg) (xh) (xi) (xj) (xk) (xl) (xm) (xn) (xo) (xp) (xq) (xr) (xs) (xt) (xu) (xv) (xw) (xx) (xy) (xz) (ya) (yb) (yc) (yd) (ye) (yf) (yg) (yh) (yi) (yj) (yk) (yl) (ym) (yn) (yo) (yp) (yq) (yr) (ys) (yt) (yu) (yv) (yw) (yx) (yy) (yz) (za) (zb) (zc) (zd) (ze) (zf) (zg) (zh) (zi) (zj) (zk) (zl) (zm) (zn) (zo) (zp) (zq) (zr) (zs) (zt) (zu) (zv) (zw) (zx) (zy) (zz))

Il faut savoir que si cette ressemblance (en particulier la nature de la stabilité) est toujours vérifiée dans le cas d'un col (ou d'un nœud, ou d'un foyer), ce n'est plus du centre : l'étude du pendule libéré avec frottement $\ddot{\theta} + \epsilon \dot{\theta} + \theta = 0$ suffit à s'en convaincre :

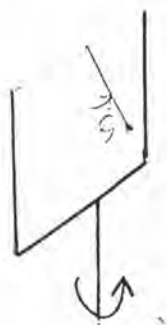


0 foyer stable



0 foyer instable

On aborde ici le problème de l'évolution du portrait de phase d'une SD dépendant d'un paramètre, et on pourra étudier l'exemple moins banal du pendule entraîné dans un mouvement de rotation de vitesse uniforme ω , régi par l'EDO



$$(1) \quad \ddot{\theta} + \sin \theta - \omega^2 \sin \theta \cos \theta = 0$$

en mettant en évidence la valeur de bifurcation $\omega = 1$ du paramètre

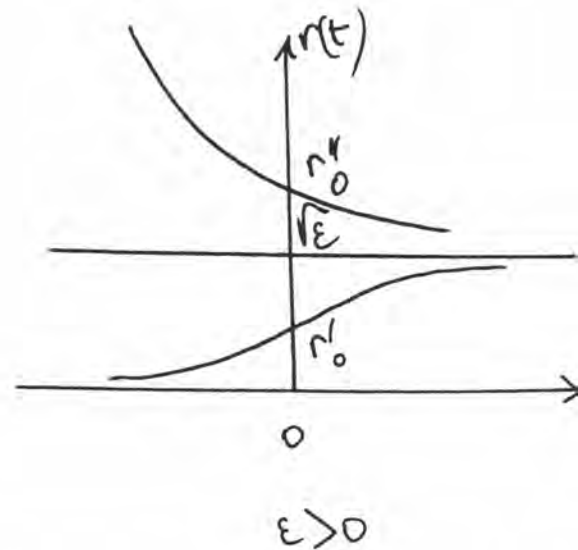
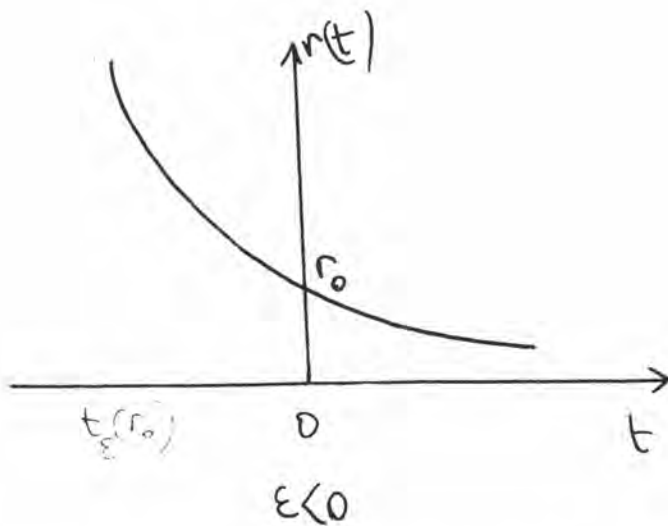
2) Comme exemple de SD d'ordre 1 non conservatif en dimension 2 on commence par étudier

$$\begin{cases} \dot{x} = \varepsilon x - y - x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = x + \varepsilon y - y(x^2 + y^2) \end{cases}$$

qui, en coordonnées polaires prend la forme

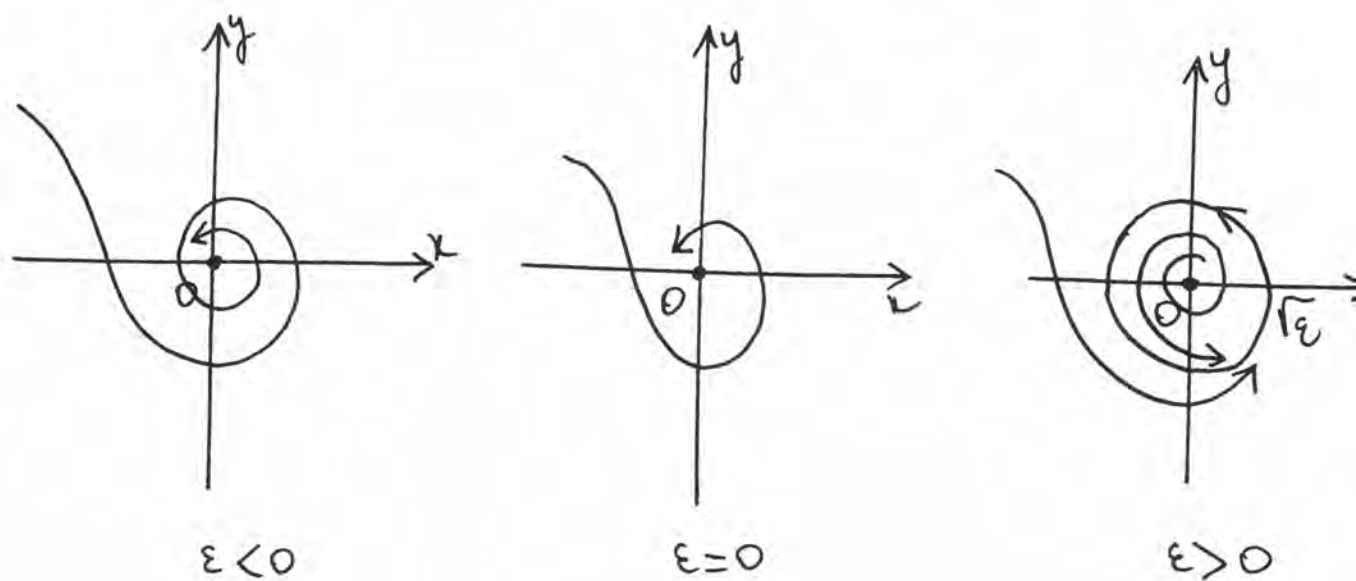
$$\begin{cases} \dot{r} = r(\varepsilon - r^2) \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases}$$

Ici $\theta(t) = \theta_0 + t$ mais l'intégration de l'Eq d'ordre 1 à variables séparées en r conduit à distinguer les cas



et pour $\varepsilon > 0$, la solution générale s'écrit $r(t) = \frac{r_0}{\sqrt{1 + 2t r_0^2}}$, $t > -\frac{1}{2r_0^2}$

L'origine étant en tous cas une position d'équilibre, on observe lorsque ε varie, une évolution du portrait de phase :



Le foyer perdant sa stabilité à $\varepsilon = 0$ il apparaît un type nouveau de trajectoire, à savoir le cycle isolé $r = \sqrt{\varepsilon}$ vers lequel tendent toutes les autres trajectoires : on parle de cycle limite.

Ce phénomène de bifurcation, appelé d'ANDRONOV-HOPF et fondamental, car étant générique il explique le fonctionnement des oscillateurs en particulier.

Le système linéaire en 0 s'écrit ici

$$(1) \begin{cases} \dot{x} = \varepsilon x - y \\ \dot{y} = x + \varepsilon y \end{cases}$$

et on y lit la perte de stabilité du foyer lorsque ε passe

pu bivalence 0 de bifurcation. La démonstration de ce fait général n'est pas très difficile :

i (1) $\vec{x} = \vec{f}(x)$ est une EDO dans $\mathbb{R}^2$ avec $\vec{f}$ champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^1$ s'annulant en 0, avec $f'(0) = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$.

ii $\alpha < 0 < \beta$, l'équilibre 0 est en effet un foyer stable d.

En effet, en coordonnées polaires, l'EDO s'écrit

$$\begin{cases} \dot{r} = \alpha r + R(r, \theta) \\ \dot{\theta} = \beta + H(r, \theta) \end{cases}$$

avec $R = O(r^2)$ et $H = O(r)$ lorsque $r \rightarrow 0$ si $\vec{f}$ est de

classe $\mathcal{C}^2$. Si $|R(r, \theta)| \leq \frac{\alpha}{2} r$, et $|H(r, \theta)| \leq \beta_L$ pour

$r \leq r_0$, $\theta \in \mathbb{R}$, on obtient $r(t) \leq r_0 e^{\frac{\alpha}{2} t}$ pour $t \geq 0$

car, par un raisonnement $\vec{f} \cdot \vec{OM} = \alpha r^2 + O(r^3) < 0$ sur le

cercle $\{r = r_0\}$ si le champ de vecteurs est donc rentrant

ce qui assure que la trajectoire est bien définie à chaque

instant $t \geq 0$; ensuite $r(t) \leq r_0 e^{\frac{\alpha}{2} t}$ pour t proche

de 0 permet de prolonger cette estimation sur $t \geq 0$ entier

on a aussi $\dot{\theta} \geq \beta_L$ qui donne $\theta(t) \geq \theta_0 + \beta_L t$, d'où
 on voit que la trajectoire s'enroule autour de l'origine, en
 tendant vers l'équilibre, ressemblant ainsi à une spirale.

Ainsi est-il possible également de détecter la perte de
 stabilité de l'équilibre par l'étude du système linéarisé,
 ce qui est facile.

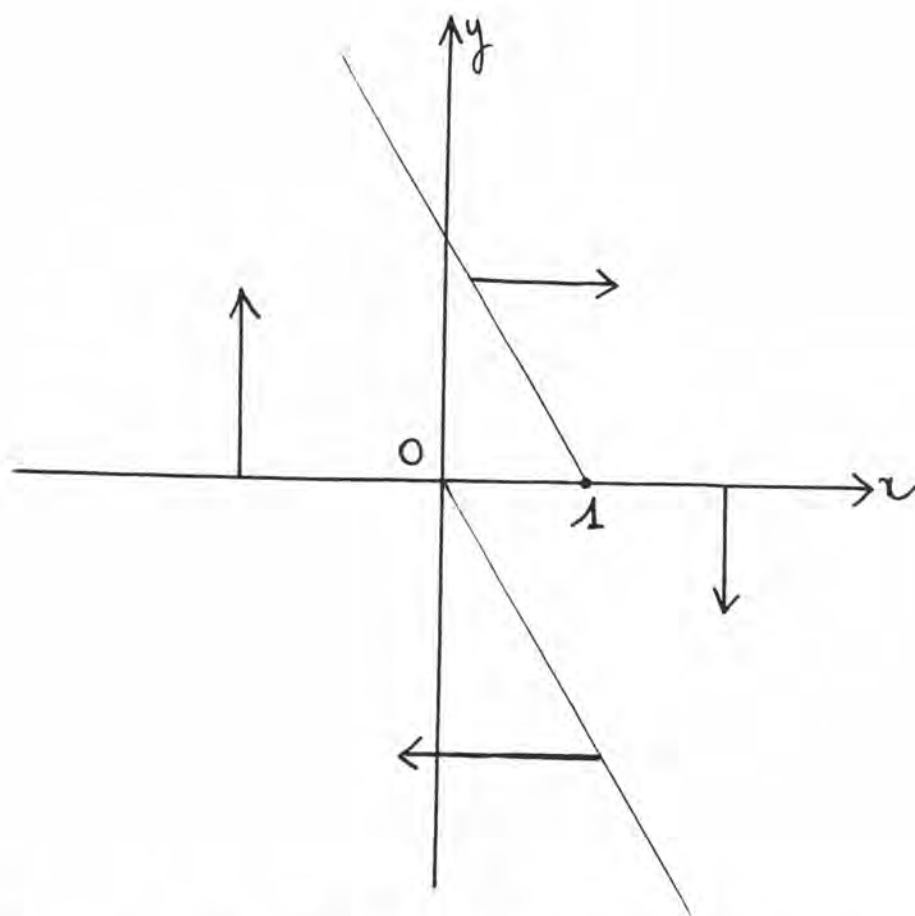
3) Étude de l'oscillateur d'AMBRONOV guidé par l'EDO

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 Y(x) = \omega_0^2 \begin{cases} 1, & \text{si } x \geq 0 \\ 0, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

avec $\omega_0 > 0$, $h > 0$ désigne une perturbation, un coefficient
 d'atténuation. Soit, sous forme d'un SD

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega_0^2 x - 2hy + \omega_0^2 Y(y) \end{cases}$$

avec le champ des vecteurs $\vec{f}$ est donc non linéaire. Le tracé
 du champ dans le plan de phase $\mathbb{R}_{xy}^2$ met en évidence, en
 particulier les lignes isoclines Ox et $y = (\omega_0^2 - \omega_0^2)/2h$, $y =$
 $y = -\frac{\omega_0^2}{2h}, y < 0$



et suggère de plus l'allure des trajectoires, autour de la position d'équilibre $(1, 0)$. Comme le champ $\vec{f}$ subit une discontinuité à la traversée de l'axe des x , il faut préciser qu'on entend ici par plutôt de l'EDO une fonction de classe C^1 par morceaux, et C^0 .

Maintenant l'étude précise du comportement des solutions repose sur la notion d'application de POINCARÉ pour la section D_x :

pour la position initiale $x(0) = x_0 > 1$, $y(0) = 0$

la particule commence par être gouvernée par l'EDO

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

donc on prend la forme

$$x(t) = x_0 e^{-ht} \left(\cos(\omega t) + \frac{h}{\omega} \sin(\omega t) \right)$$

où $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - h^2}$ (si $h < \omega_0$), du moins tant que

$$\dot{x}(t) = -\frac{\omega_0^2}{\omega} \sin(\omega t)$$

reste < 0 , c'est-à-dire jusqu'à l'instant $t_1 = \frac{\pi}{\omega}$ à partir duquel on passe au régime de l'EDO

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2$$

avec la condition de raccordement $x(t_1) = x_0 e^{-ht_1} \cos \omega t_1$
 $\dot{x}(t_1) = 0$

ce qui conduit à la nouvelle expression

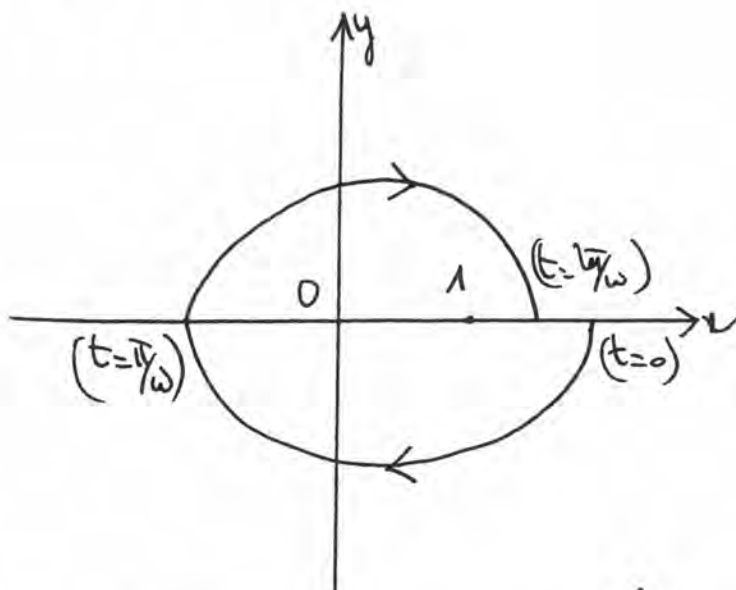
$$x(t) = 1 - \left(1 + x_0 e^{-\frac{h\pi}{\omega}} \right) e^{-h(t-t_1)} \left(\cos \omega(t-t_1) + \frac{h}{\omega} \sin \omega(t-t_1) \right)$$

qui est valable tant que $\dot{x}(t)$ est > 0 , soit jusqu'à

l'instant $t_2 = \frac{2\pi}{\omega}$ auquel x prend la valeur

$$x(t_2) = 1 + e^{-\frac{h\pi}{\omega}} (1 + x_0 e^{-\frac{h\pi}{\omega}})$$

et $i(t)$ s'annule :



L'application $X : x_0 \longrightarrow 1 + e^{-\frac{h\pi}{\omega}} (1 + x_0 e^{-\frac{h\pi}{\omega}})$ qui

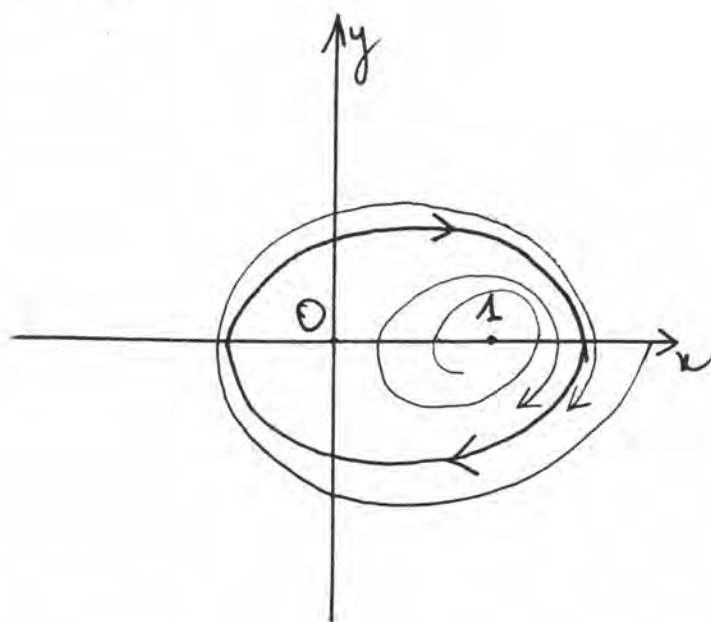
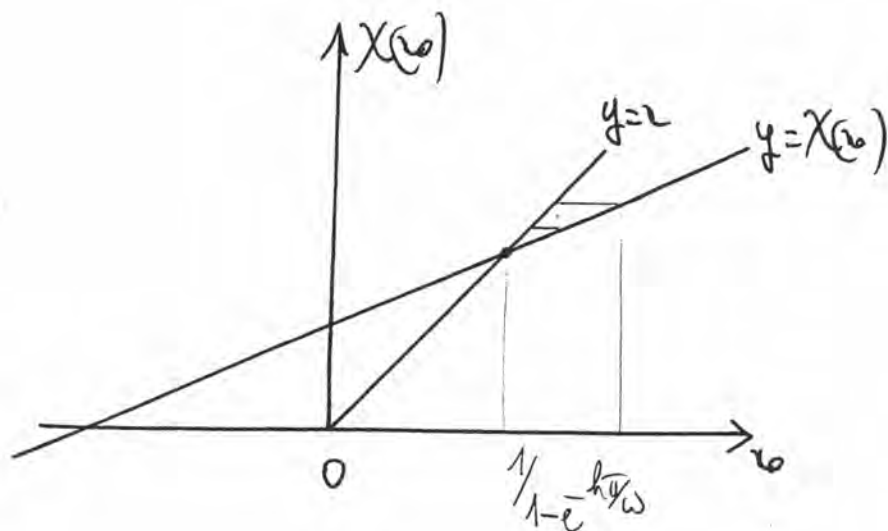
tient compte du comportement de la trajectoire au bout d'un tour

est appelée application de POINCARÉ. Elle permet, à travers

on peut faire $\frac{1}{1 + e^{-\frac{h\pi}{\omega}}}$ de détecter le cycle-limite

qui vient d'être ainsi caractérisé, ainsi que le comportement

des autres trajectoires qui s'en approchent exponentiellement.



④ Cette notion d'application de POINCARÉ (pas la forme application sur une période dans l'espace des phases élargi) sert à détecter les solutions de l'EDO linéaire à coefficients périodique

$$(1)_\varepsilon \quad \ddot{x} + (\omega_0^2 - \varepsilon \cos t) x = \sin t$$

à petit paramètre ε , de même période 2π que le second membre.

On applique sur les solutions de $(1)_0$ pour chercher une

solution synchrone avec la méthode de LAGRANGE

$$x(t) = A(t) \cos(\omega_0 t) + B(t) \sin \omega_0 t$$

qui donne

$$x(t) = a \cos(\omega_0 t) + b \sin(\omega_0 t) + \frac{1}{\omega_0} \int_0^t \sin \omega_0 (t-s) \cdot \sin s \, ds$$

Cette solution de (1)₀ sera 2 π -périodique si (a, b) obéit au système linéaire

$$\begin{cases} x(0) = x(2\pi) \\ i(0) = i(2\pi) \end{cases}$$

qui possède une unique solution sous la condition de non-résonance
 $\omega_0 \notin \mathbb{N}$: la solution correspondante $x(t)$ est alors entièrement déterminée par ce qui précède, et les valeurs de a, b .

On considère maintenant la solution de (1)_c qui correspond à la position initiale

$$\begin{cases} x(0) = a + \alpha \\ i(0) = b\omega_0 + \beta \end{cases}$$

Pour le théorème de dépendance dans la position initiale et le paramètre, cette solution $x(t, \varepsilon, \alpha, \beta)$ est de classe C^∞ sur $[0, 2\pi]_\varepsilon \times \mathbb{R}_0^3$ et admet par conséquent un développement de la forme

$$x_0(t) + A(t)\alpha + B(t)\beta + C(t)\varepsilon + \dots$$

où A (resp. B) doit à l'E.D. la première variation

$$\begin{cases} \ddot{A} + \omega_0^2 A = 0 \\ A(0) = 1 \quad \dot{A}(0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{B} + \omega_0^2 B = 0 \\ B(0) = 0 \quad \dot{B}(0) = 1 \end{cases}$$

et vaut donc $\cos(\omega_0 t)$ (resp. $\sin(\omega_0 t)/\omega_0$).

L'application χ_ε sur la période 2π est donc régulière, et on en déduit les points fixes (pour les petites valeurs de ε):

$$\text{en posant } \varphi(\varepsilon, \alpha, \beta) = \chi_\varepsilon(a + \alpha, b\omega_0 + \beta) - (a + \alpha, b\omega_0 + \beta)$$

il s'agit donc de résoudre l'équation $\varphi(\varepsilon, \alpha, \beta) = 0$ dans $\mathbb{R}^4$

sachant que $\varphi(0, 0, 0) = 0$ et que $\frac{\partial \varphi}{\partial (\alpha, \beta)}(0, 0, 0)$

s'écrit

$$\begin{pmatrix} A(k\tau) - 1 & B(k\tau) \\ \dot{A}(k\tau) & \dot{B}(k\tau) - 1 \end{pmatrix} : \text{compte-tenu de } \omega_0 \in \mathbb{N},$$

on conclut grâce au théorème de la fonction implicite, à l'existence pour ε proche de 0, d'un unique cycle synchrone proche de celui obtenu pour $(1)_0$.

Lectures:

1) V. ARNOLD EDO 1 § 12.

2) idem § 5.

3) L. PONTRJAGVINE EDO § 29.

4) COBBINGTON - N. LEVINSON ODE Chap 14 sec 4.

Compléments d'Analyse pour l'Aggrégation :

Analyse de FOURIER et équations aux dérivées partielles, exemples.

1) Afin de justifier le choix des exemples au sein des EDP linéaires du second ordre, on examine l'effet du changement de variables

$$\begin{cases} x = \varphi(\xi, \eta) \\ y = \psi(\xi, \eta) \end{cases}$$

sur l'opérateur différentiel L défini par

$$L(u) = a \partial_{xx}^2 u + 2b \partial_{xy}^2 u + c \partial_{yy}^2 u$$

où a, b, c désigne des fonctions de classe C^1 à valeurs réelles avec $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$ sur un ouvert Ω ; un calcul élémentaire

montre que si $u(x, y) = v(\xi, \eta)$, $L u$ devient

$$\Lambda(v) = \alpha \partial_{\xi\xi}^2 v + 2\beta \partial_{\xi\eta}^2 v + \gamma \partial_{\eta\eta}^2 v$$

avec $\alpha = a(\partial_x \varphi)^2 + 2b \partial_x \varphi \cdot \partial_x \psi + c(\partial_y \varphi)^2$

$$\beta = a \partial_x \varphi \cdot \partial_\eta \varphi + b(\partial_x \varphi \cdot \partial_\eta \psi + \partial_\eta \varphi \cdot \partial_x \psi) + c \partial_\eta \varphi \cdot \partial_\eta \psi$$

$$\gamma = a(\partial_\eta \varphi)^2 + 2b \partial_\eta \varphi \cdot \partial_\eta \psi + c(\partial_\eta \psi)^2$$

Ainsi le signe du déterminant

$$ac - b^2 = (\alpha\gamma - \beta^2) \cdot \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} \right|^2$$

est-il invariant, et l'ED L est dit

elliptique si $ac - b^2 > 0$

hyperbolique si $ac - b^2 < 0$

parabolique si $ac - b^2 = 0$

et on montre la possibilité de l'écrire sous la forme

$$\Lambda(v) = \alpha \cdot \Delta v$$

$$= \alpha \left(\sum_{i,j} \partial_{ij}^2 v - \sum_{i,j} \partial_{ji}^2 v \right)$$

$$= 2 \sum_{i,j} \partial_{ij}^2 v$$

$$= \alpha \sum_{i,j} \partial_{ij}^2 v$$

selon le cas, par un changement de coordonnées locales.

On donne la démonstration dans le cas hyperbolique où l'on peut toujours supposer que $a \neq 0$ au point étudié : comme

$ac - b^2 < 0$, le trinôme $aX^2 + 2bX + c$ possède deux

racines $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ et on va donc chercher à résoudre

le système d'EDP

$$\begin{cases} \partial_x \varphi - \lambda_1 \partial_y \varphi = 0 \\ \partial_x \psi - \lambda_2 \partial_y \psi = 0 \end{cases}$$

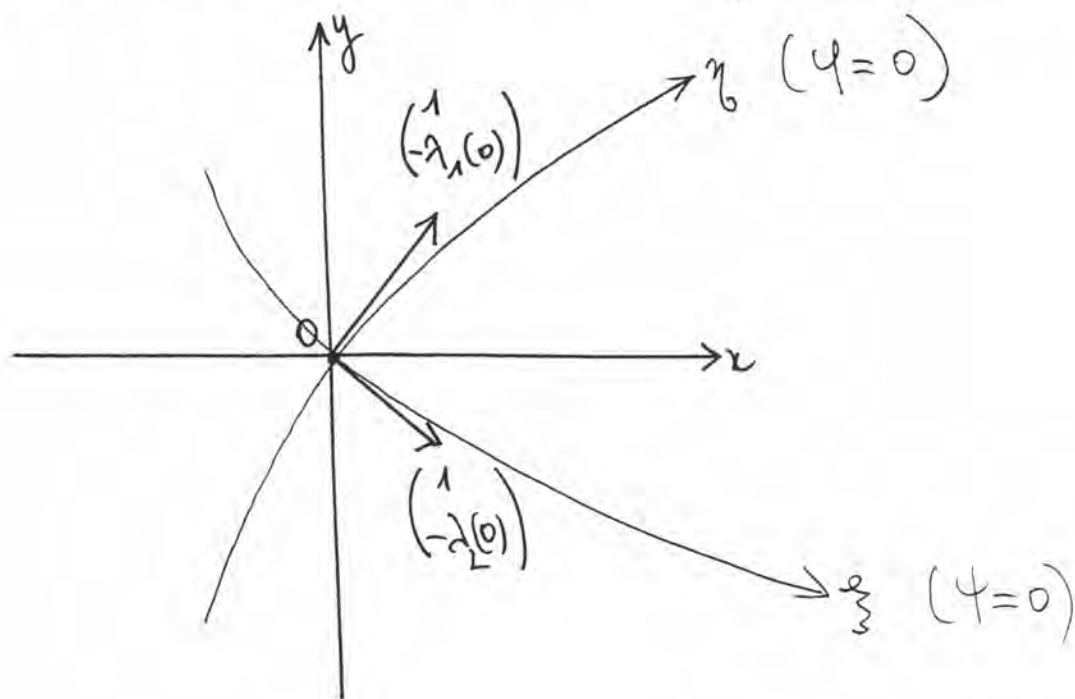
en s'assurant que $\left| \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(x, y)} \right| \neq 0$. Tout d'abord, λ_1 et λ_2

sont de classe $\mathcal{C}^1$ d'après le théorème de la fonction implicite.

On résout ensuite localement le système d'EDP linéaires d'ordre 1 par la méthode des caractéristiques qui consiste à faire appel aux systèmes dynamiques

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 \\ \dot{y} = -\lambda_1(x, y) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \dot{x} = 1 \\ \dot{y} = -\lambda_2(x, y) \end{cases}$$

menant à l'EDO résolue $ay''^2 - 2by' + c = 0$:



Comme $\left| \frac{\partial(\eta, \psi)}{\partial(x, y)} \right| = \lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$, la conclusion suit.

2) On peut commencer à présenter la méthode de FOURIER ou la résolution d'un problème de DIRICHLET par l'OD de LAPLACE

sur le disque-unité : il s'agit donc de résoudre le

$$PD \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } D(0;1) \\ u = \varphi & \text{donnée sur } \partial D(0;1) \end{cases}$$

Vue la symétrie, on passe en coordonnées polaires $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$

et le laplacien prend la forme $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial u}{\partial r}) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$, et

on peut commencer par chercher des fonctions harmoniques particulières

de la forme $R(r) \cdot \Phi(\theta)$ variables séparées : $\Delta(R \cdot \Phi) = 0$

d'où l'on obtient alors

$$\frac{r(rR'' + R')}{R} = - \frac{\Phi''}{\Phi}$$

par conséquent constant. Si λ désigne cette constante, l'EDO

$$\Phi'' + \lambda \Phi = 0$$

ne peut admettre de solution telle que $\Phi(0) = \Phi(2\pi)$ que si

$\lambda = n^2$ avec n entier ; on obtient alors l'EDO en R

$$r^2 R'' + r R' - n^2 R = 0$$

qui relève du théorème de FUCHS (c'est une EDO d'EULER)

et admet les solutions fondamentales r^n et r^{-n} sur $]0, \infty[$

de cette manière, on obtient la famille de fonctions harmoniques

$$r^{|n|} e^{in\theta}, \quad n \text{ parcourant } \mathbb{Z}$$

sur $\mathbb{R}^2$.

- Si la donnée frontière φ est de classe C^1 , on peut le développer en Séries de Fourier selon

$$\varphi(e^{i\theta}) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta}$$

car $c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(e^{it}) e^{-int} dt$ pour $n \in \mathbb{Z}$, et selon le

principe de superposition associé par la linéarité de l'EDP, il est naturel de chercher à résoudre le PD selon

$$v(r, \theta) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta} \cdot r^{|n|}$$

Par un calcul formel, on est ainsi conduit à considérer

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in(\theta-t)} \cdot \varphi(e^{it}) dt$$

où la série se calcule facilement pour donner $\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t) \varphi(e^{it}) dt$

avec $P_r(\theta) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1-r^2}{1-2r \cos \theta + r^2}$, $0 \leq r < 1$

dénommant le noyau de Poisson.

- Il reste maintenant à montrer que si φ est continue sur $\partial D(0,1)$,

l'intégrale de convolution $\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t) \varphi(e^{it}) dt$ donne la

solution au PD : que la fonction soit harmonique dans le disque
on en déduit immédiatement de la propriété analytique de P_r .

Quant au fait que $v(r, \theta) \xrightarrow{r \rightarrow 1-} \varphi(e^{i\theta})$ c'est-à-dire que

v tende radicalement vers la donnée frontière, cela découle du
fait que $(P_r)_{0 \leq r < 1}$ constitue une Unité Approximée. En effet

• $P_r \geq 0$ est 2π -périodique et paire

$$\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta) d\theta = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\theta} d\theta \cdot r^{|n|} = 1 \quad \text{pour } 0 \leq r < 1$$

(puisque la série converge abs normalement en θ)

• si $0 < \delta < \pi$, on a

$$\int_{\delta}^{\pi} P_r(\theta) d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1-r^2}{1-2r\cos\delta+r^2} \pi \xrightarrow{(r \rightarrow 1-)} 0$$

- On explicitera l'unicité par la formule de GREEN

$$\iint_{D(0,1)} \operatorname{div}(u \vec{\nabla} u) dx dy = \int_{\partial D(0,1)} u \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nu} d\theta$$

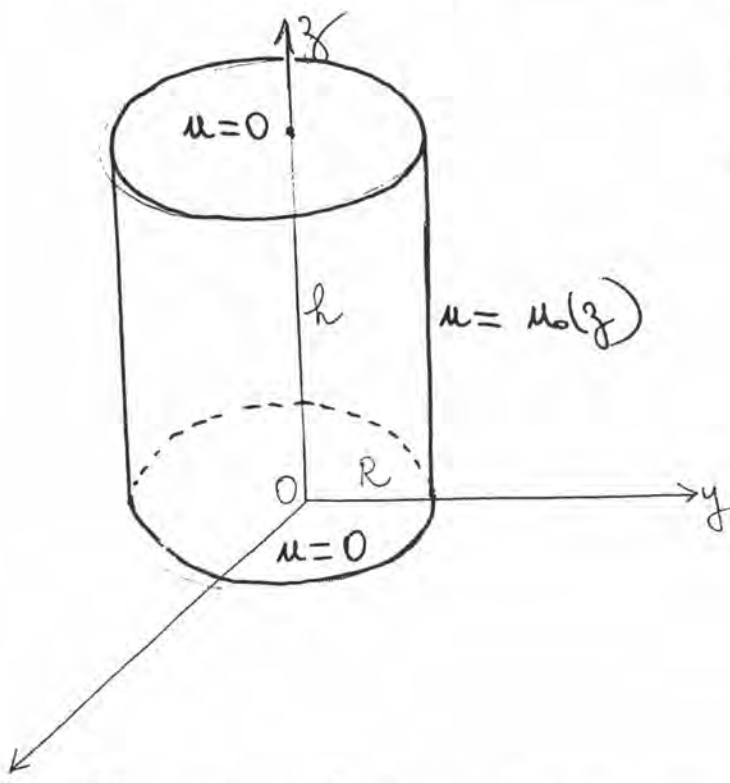
$$\text{soit} \quad \iint_{D(0,1)} (\|\vec{\nabla} u\|^2 + u \Delta u) dx dy = \int_{\partial D(0,1)} u \frac{\partial u}{\partial \nu} d\theta$$

et qui montre que si $\varphi=0$, $\vec{\nabla}u=0$ dans $D(0;1)$ qui permet de conclure.

- Enfin, on expliquera comment résoudre à partir de là le PD sur un ouvert simplement connexe borné à l'aide de la transformation conforme.

3) On peut choisir un exemple moins répandu, en résolvant le PD pour un cylindre droit, avec une donnée frontière nulle

sur la base, et valant $u_0(z)$ sur la surface latérale.



- L'unicité de la solution découle avec de la formule de GREEN, et avec la forme de la donnée frontière, on la cherche sous la forme $v(r, z)$ (en coordonnées cylindriques). La fonction

v doit obéir à l'EDP
$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0$$

- La recherche de solutions particulières de la forme $R(r) \cdot Z(z)$ conduit à étudier

$$\frac{rR'' + R'}{rR} = -\frac{z''}{z} = \lambda$$

où $Z(0) = Z(h) = 0$ (si l'on veut une solution non triviale) que $\lambda = \left(\frac{n\pi}{h}\right)^2$ avec n entier : on obtient alors $Z(z)$ proportionnel à $\sin\left(\frac{n\pi}{h}z\right)$, tandis que R doit obéir à l'EDO

$$rR'' + R' - \omega^2 rR = 0$$

qui est à rapprocher de l'EDO de BESSEL modifiée

$$(B_0) \quad t\ddot{x} + \dot{x} - tx = 0$$

étudiée par ailleurs : comme R doit être régulière en 0, on obtient

$$R(r) = I_0\left(\frac{n\pi}{h}r\right)$$

à une constante multiplicative près. Ainsi dispose-t-on d'une famille

$$I_0\left(\frac{n\pi}{h}r\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{h}z\right), \quad n \in \mathbb{N}^*$$

de fonctions harmoniques vérifiant les conditions au bord du

cylindre.

- Selon le principe de superposition, on cherche v sous la forme

$$v(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n I_0\left(\frac{n\pi}{h} r\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{h} z\right)$$

où les coefficients devront donc être liés au développement en Série de Fourier de la fonction $u_0(z)$ obtenue en rendant u_0 nulle sur $[-h, h]$, puis en la rendant $2h$ -périodique :

$$a_n \cdot I_0\left(\frac{n\pi}{h} R\right) = \frac{2}{h} \int_0^h u_0(z) \sin\left(\frac{n\pi}{h} z\right) dz, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

et on est naturellement conduit à considérer la fonction

$$v(r, z) = \frac{2}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^h u_0(z) \sin\left(\frac{n\pi}{h} z\right) dz \cdot \frac{I_0\left(\frac{n\pi}{h} r\right)}{I_0\left(\frac{n\pi}{h} R\right)} \sin\left(\frac{n\pi}{h} z\right)$$

définie comme la somme d'une série normalement convergente sur tout cylindre $\{0 \leq r \leq \rho < R\} \times [0, h]_z$ si la donnée u_0 est par exemple continue. En effet, l'étude du comportement asymptotique de $I_0(t) \underset{(t \rightarrow +\infty)}{\sim} \frac{e^t}{\sqrt{2\pi t}}$ assure que le terme général de la série est contrôlé par

$$|c_n(u_0)| \frac{I_0(n\pi R/k)}{I_0(n\pi R/k)} \leq |c_n(u_0)| \frac{I_0(n\pi R/k)}{I_0(n\pi R/k)}$$

qui est exponentiellement petit à l'infini. Il reste à montrer
de la possibilité de donner une ligne source, par le même
type d'arguments. Enfin, si l'on suppose u_0 de classe C^1 , la
série $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n(u_0)|$ converge (avec l'inégalité de CAUCHY-SCHWARTZ
et l'égalité de PARSEVAL), si bien que $w(r, z) \xrightarrow{r \rightarrow R^-} u(z)$
le passage à la limite sur la ligne source étant licite par convergence
dominée.

4) On étudie le problème de GOURSAT hyperbolique

$$(PG) \begin{cases} \partial_{xy}^2 u = u & \text{sur } x > 0, y > 0 \\ u(x, 0) = 1 \quad \forall x \geq 0, \quad u(0, y) = 1 \quad \forall y \geq 0 \end{cases}$$

selon différents procédés.

— En intégrant l'EDP sur le rectangle $[0, x] \times [0, y]$
à $x, y > 0$ donné, on transforme le PG selon l'

$$(Ei) \quad u(x, y) = 1 + \int_0^x \int_0^y u(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

et il s'agit là d'une E.I. de VOLTERRA qui s'intègre par itération, en étudiant la suite

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1}(x, y) = \int_0^x \int_0^y u_n(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad n \geq 0 \end{cases}$$

(en considérant l'É.I.) $u = 1 + \lambda \iint_{[0,1]^2} u d\xi d\eta$, et chercher à développer selon $\sum_0^\infty u_n \lambda^n$ par identification selon les puissances de

Un calcul simple montre que $u_n(x, y) = \frac{(xy)^n}{(n!)^2}$, et on verrait

dans la série $\sum_0^\infty \frac{(xy)^n}{(n!)^2}$ la valeur de I_0 au point $2\sqrt{xy}$

C'est là l'unique point fixe de l'application fonctionnelle Φ définie par $\Phi u = \iint_{[0,1]^2} u d\xi d\eta$ qui s'avère en effet contractante

sur l'espace de BANACH $C^0([0,1] \times [0,1])$ une fois qu'on l'itère assez de fois.

- En admettant que la solution au (PG) vérifie une condition de croissance de la forme

$$|u(x, y)| \leq C e^{cx}$$

où $C, c > 0$, on peut considérer la transformée de FOURIER

complexe en z

$$U(\xi, y) = \int_0^{\infty} e^{-2i\pi\xi x} u(x, y) dx$$

de $u(\cdot, y) \in \mathcal{D}(\cdot)$, qui à $y \geq 0$ dure, et analytique en $e^{\frac{y}{2\pi\xi}}$

sur le demi-plan $\text{Im}(\xi) < -\frac{1}{2\pi}$. En faisant la même hypothèse

sur $\frac{\partial u}{\partial y}$, on obtiendra

$$\frac{\partial U}{\partial y}(\xi, y) = \int_0^{\infty} e^{-2i\pi\xi x} \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) dx$$

soit, en intégrant par parties

$$\frac{e^{-2i\pi\xi x}}{-2i\pi\xi} \cdot \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \Big|_{x=0}^{\infty} + \frac{1}{2i\pi\xi} \int_0^{\infty} e^{-2i\pi\xi x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x, y) dx$$

valant $\frac{1}{2i\pi\xi} U(\xi, y)$. Ainsi a-t-on $U(\xi, y) = K(\xi) e^{\frac{y}{2\pi\xi}}$

avec $K(\xi) = U(\xi, 0) = \int_0^{\infty} e^{-2i\pi\xi x} dx = \frac{1}{2i\pi\xi}$ qui donne

$$U(\xi, y) = \frac{e^{\frac{y}{2\pi\xi}}}{2i\pi\xi} \quad \text{pour} \quad \text{Im}(\xi) < -\frac{1}{2\pi}$$

et suggère la solution

$$u(x,y) = \overline{F} U(\cdot + i\eta, y)(x) e^{2\pi\eta x}$$

à $\xi = \zeta + i\eta$, on $U(\zeta + i\eta, y) = \overline{F} \left(e^{2\pi\eta x} u(x,y) \right) \Big|_{L^1(\mathbb{R}_x)}$

équivalente

$$u(x,y) = \frac{1}{2i\pi} \int_{i\eta - \infty}^{i\eta + \infty} e^{2i\pi\zeta x} \cdot e^{\frac{y}{k} i\pi\zeta} \frac{d\zeta}{\zeta}, \quad \eta < -\frac{c}{2\pi}$$

où l'intégrale est prise au sens d'une valeur principale de CAUCHY

Le théorème de CAUCHY montre l'indépendance en η , et permet de transformer l'intégrale selon

$$u(x,y) = \frac{1}{2i\pi} \int_{i\eta - \infty}^{i\eta + \infty} e^{i\sqrt{1-y} \left(\zeta - \frac{1}{\zeta} \right)} \frac{d\zeta}{\zeta}$$

qui se peut relier à l'équation intégrale de

$$I_0(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 e^{-\lambda t} \frac{d\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}}$$

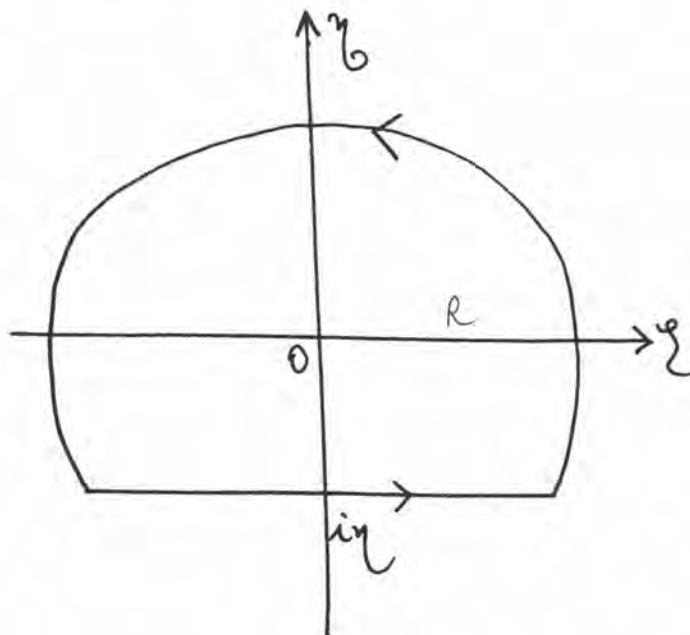
selon LAPLACE. En effet, celle-ci se lit comme l'intégrale

curviligne $\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_D(0;1)} e^{it \frac{z-1}{2}} \frac{dz}{z}$ (intégrale de SONINE)

qui, avec le théorème d'homotopie de CAUCHY se transforme selon

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_R} e^{it \frac{z-1}{2}} \frac{dz}{z}$$

on



Pour conclure, il suffit maintenant de montrer que l'intégrale sur l'arc de cercle tend vers 0 lorsque le rayon $R \rightarrow +\infty$:

cela découle de l'estimation

$$\int_0^\pi e^{-\frac{t}{2}(R-\frac{1}{R})\sin\theta} d\theta \xrightarrow{(R \rightarrow \infty)} 0 \quad \text{par majoration dominée}$$

- Les estimations a priori sont satisfaites, en vertu du comportement asymptotique de I_0 et de sa dérivée.

5) On étudie le problème de diffusion (de type parabolique)

$$\partial_t u = \frac{\sigma^2}{2} \partial_{xx}^2 u + \alpha u \quad \text{sur } t > 0, 0 < x < L$$

pour les Conditions Limites $u(t, 0) = u(t, L) = 0 \quad \forall t \geq 0$

et la Condition Initiale $u(0, \cdot) = u_0$ donnée.

$\sigma > 0$ est le coefficient de diffusion, $\alpha > 0$ celui de création...

- En cherchant des solutions particulières de la forme $u(t, x) = T(t) \cdot X(x)$

à l'EDP et qui vérifient les CL, on est conduit à

$$\frac{\dot{T}}{T}(t) = \left(\frac{\sigma^2}{2} X'' + \alpha X \right) / X(x) = \lambda \in \mathbb{R}$$

et le

$$(PD) \begin{cases} \frac{\sigma^2}{2} X'' + (\alpha - \lambda) X = 0 \\ X(0) = X(L) = 0 \end{cases}$$

n'admet de solution non triviale que si $\lambda = \alpha - n^2 \frac{\sigma^2}{2L^2}$ avec

n dans $\mathbb{N}^*$: $T(t)$ prend alors la forme

$$T(t) = e^{\lambda t}$$

et on obtient de cette manière une famille

$$e^{(\alpha - n^2 \frac{\sigma^2}{2L^2})t} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad n \in \mathbb{N}^*$$

de solutions particulières.

On cherche donc à résoudre le problème d'évolution sur la forme

$$u(t, x) = e^{\frac{\lambda^2}{2L} t} \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{n^2 \pi^2}{2L} t} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

où les coefficients (c_n) devront être tels que

$$u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

On prolonge donc u_0 sur $[-L, L]$ en la rendant impaire puis par $2L$ périodicité : en supposant u_0 de classe C^1 sur $[0, L]$

cela conduit à poser

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L u_0(\xi) \sin\left(\frac{n\pi}{L} \xi\right) d\xi$$

Maintenant la série considérée plus haut converge normalement sur $[0, \infty[\times [0, L]$ et définit une fonction de classe C^1 sur $]0, \infty[\times [0, L]$, d'après le théorème de dérivation sous le signe somme. Ainsi la diffusion régularise-t-elle la donnée initiale.

L'origine du problème pouvant être l'évolution d'une densité de

population, il est important de s'assurer que $n, n_0 \geq 0, u \geq 0$.

- Si $u(t, \cdot)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, on peut introduire

la transformée de Fourier

$$U(t, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t, x) \cdot e^{-i x \xi} dx$$

et, en supposant les opérations licites, transforme l'EDP selon

$$\partial_t U(t, \xi) = -2\sigma^2 \pi^2 \xi^2 \cdot U(t, \xi) + \alpha U(t, \xi)$$

ce qui conduit, en tenant compte de la CI au

$$(PC) \begin{cases} \partial_t U(t, \xi) = (\alpha - 2\sigma^2 \pi^2 \xi^2) U(t, \xi) \\ U(0, \xi) = \hat{u}_0(\xi) \end{cases}$$

so solution

$$U(t, \xi) = \hat{u}_0(\xi) e^{(\alpha - 2\sigma^2 \pi^2 \xi^2)t}$$

Comme $\hat{g} = g$ par $g(x) = e^{-\pi x^2}$ fonction de GAUSS, cela

amène à considérer, par u_0 intégrable sur $\mathbb{R}$, la fonction

$$u(t, x) = u_0 * \underset{L^1(\mathbb{R}_x)}{e^{\alpha t}} \cdot \frac{e^{-\frac{x^2}{4\sigma^2 t}}}{\sigma \sqrt{2\pi t}} \quad (1)$$

ait

$$u(t, x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\alpha t}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{2\sigma^2 t}} dy \cdot e^{\alpha t}$$

Maintenant, et comme $\left(g_t(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\alpha t}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2 t}}\right)_{t>0}$ est une

V.A., si u_0 est continue bornée sur $\mathbb{R}$, $u(t, x) \xrightarrow[t \rightarrow 0+]{} u_0(x)$

de sorte que u répond le

$$\text{P.C.I.} \begin{cases} \partial_t u = \frac{\sigma^2}{2} \partial_{xx} u + \alpha u & \text{sur }]0, \infty[\times \mathbb{R}_x \\ u(0, \cdot) = u_0 \end{cases}$$

et, revenant au problème posé, en posant u_0 plus $\tilde{u}_0$ comme on l'a fait par la première méthode, on est conduit

à considérer

$$u(t, x) = \frac{e^{\alpha t}}{\sigma\sqrt{2\alpha t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{u}_0(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{2\sigma^2 t}} dy$$

qui vérifie bien en outre le C.H. En effet

$$u(t, 0) = 0, \quad \text{l'intégrant étant impair}$$

et

$$u(x, L) = \frac{e^{at}}{\sigma \sqrt{L\sigma t}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}_0(L-y) e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2 t}} dy = 0$$

car

$$\tilde{u}_0(L+y) = \tilde{u}_0(-L+y) = -\tilde{u}_0(L-y).$$

On obtient ainsi une relation intégrale du problème, qui est naturellement positive.

— On relie directement la série et l'intégrale (sans passer par l'unicité de la solution).

Pour u_0 continue bornée, on peut écrire

$$\sum_1^{\infty} \frac{2}{L} \int_0^L u_0(\xi) \sin\left(\frac{n\pi}{L}\xi\right) d\xi \cdot e^{-\frac{n^2 \frac{\sigma^2}{L^2} t}{2}} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) =$$

$$\frac{2}{L} \int_0^L \sum_1^{\infty} e^{-\frac{n^2 \frac{\sigma^2}{L^2} t}{2}} \sin\left(\frac{n\pi}{L}\xi\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cdot u_0(\xi) d\xi$$

$$\text{c'est, en linéarisant } 2 \sin\left(\frac{n\pi}{L}\xi\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = \cos \frac{n\pi}{L}(x-\xi) - \cos \frac{n\pi}{L}(x+\xi)$$

et en tenant du fait que

$$-\int_0^L \cos \frac{n\pi}{L}(x+\xi) u_0(\xi) d\xi = \int_{-L}^0 \cos \frac{n\pi}{L}(x-\xi) \tilde{u}_0(\xi) d\xi$$

l'expression intégrale

$$u(t, x) = \int_{-L}^L \mathcal{N}(t, x-\xi) \tilde{u}_0(\xi) d\xi$$

de noyau

$$\mathcal{N}(t, x) = e^{\alpha t} \cdot \frac{1}{L} \cdot \sum_1^{\infty} e^{-\frac{n^2 \sigma^2 \pi^2}{2L^2} t} \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right).$$

On étudie maintenant le noyau intégral obtenue par la transformation de FOURIER

$$u(t, x) = \frac{e^{\alpha t}}{\sigma \sqrt{2\alpha t}} \sum_{-\infty}^{+\infty} \int_{(2k-1)L}^{(2k+1)L} \tilde{u}_0(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{4\sigma^2 t}} dy$$

soit, par le changement de variable $y = 2kL + \xi$ et

le théorème d'intégration terme à terme

$$e^{\alpha t} \int_{-L}^L \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi-2kL)^2}{2\sigma^2 t}} \tilde{u}_0(\xi) \frac{d\xi}{\sigma \sqrt{2\alpha t}}$$

où il apparaît le noyau

$$\mathcal{N}(t, x) = e^{\alpha t} \cdot \frac{1}{\sigma \sqrt{2\alpha t}} \cdot \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-2kL)^2}{2\sigma^2 t}}$$

Or, l'identité $\wp' = 4\wp$ n'est autre que la formule sommatoire de POISSON par la fonction θ de RIEMANN :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \wp(z+n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\pi n z} \hat{\wp}(2\pi n)$$

par $\wp(z) = e^{-\frac{i}{2\pi} z^2}$ à $t > 0$ fixé.

lectures

- 1) R. COURANT - D. HILBERT MMP 2 - III § 1.
- 2) LAURENTIEV - CHABAT Méthodes de la théorie des fonctions d'une variable complexe § 43 - 44.
- 3) R. COURANT - D. HILBERT MMP 1 - II § 6.
- 4) G. VALIRON 2 § 291.
E. GOURSAT § 499.
- 5) R. COURANT - D. HILBERT 2 - III § 6.

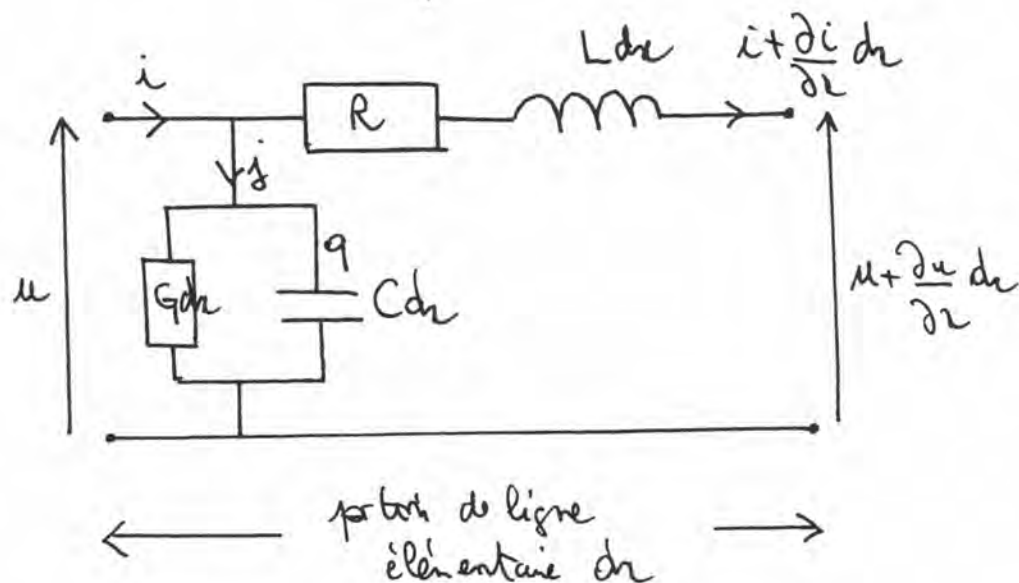
Développement (L216), sur l'EDP dite des télégraphistes.

Le choix se justifie par le thème applicatif "Propagation des Ondes" (et l'usage de la transformation de LAPLACE, au programme de l'option Probabilités et Statistiques).

1) il s'agit d'étudier le système d'EDP

$$\begin{cases} \frac{\partial i}{\partial z} = -Gu - C \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial u}{\partial z} = -Ri - L \frac{\partial i}{\partial t} \end{cases}$$

qui trouve son origine dans la modélisation des lignes électriques à constantes réparties:



$$j = Gdz \cdot u + \frac{d}{dt}(Cdz \cdot u)$$

Après élimination de l'inconnue $i(x, t)$, on est conduit à l'EDP de type hyperbolique

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (RC + GL) \frac{\partial u}{\partial t} + RG u$$

2) et on démontre que le problème de conditions initiales

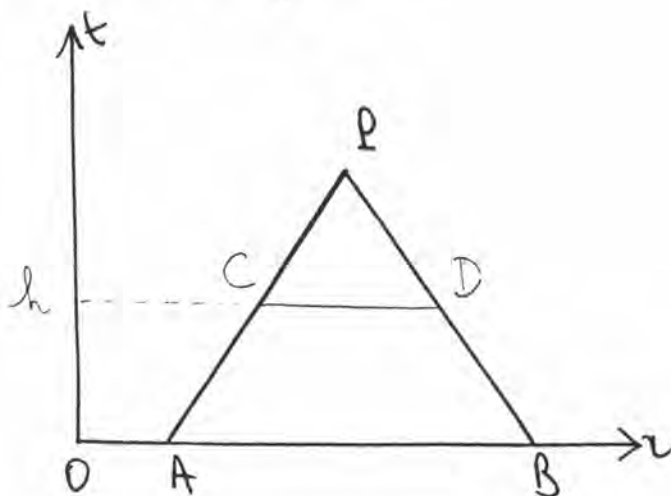
$$u(x, 0) = 0, \quad i(x, 0) = 0 \quad (\text{qui entraîne } \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0)$$

n'admet que la solution triviale $u = 0$ par la méthode de l'énergie, laquelle consiste à intégrer (pour $LC = \omega_0^2 = 1$ afin de simplifier l'écriture) l'identité

$$2 \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (RC + GL) \frac{\partial u}{\partial t} + RG u \right) =$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\| \nabla u \|^2) - 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(2 \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right) + 2 (RC + GL) \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + 2 RG u \frac{\partial u}{\partial t}$$

sur le triangle



constitué à partir d'un point courant $P(x, t)$ en menant les parallèles PA et PB aux caractéristiques $x \mp t = C_{\pm}$.

On montre avec la formule de GREEN-RIEMANN en particulier que l'énergie $E(h) = \int_0^h \|\nabla u\|^2 dx$ obéit à l'inégalité intégrale

$$E(h) \leq C(L) \cdot \int_0^h E(t) dt$$

et, de là, on déduit que $E = 0$. Les calculs sont effectués dans Couant - Hilbert MMP 2 IV § 3.2.

3) pour une ligne sans pertes ($R = G = 0$), on obtient la classique EDP des ondes $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \omega_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ où $\omega_0 = \sqrt{LC}$

et on peut résoudre le problème de conditions initiales

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = v_0(x) \quad \text{données ... à l'aide de}$$

la transformée de FOURIER partielle en x qui conduit,

$$\text{posant } \hat{u}(\xi, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i \xi x} u(x, t) dx \quad \text{à l'EDO}$$

$$\omega_0^2 \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2} + 4\pi^2 \xi^2 \hat{u} = 0$$

$$\text{avec les ci} \quad \hat{u}(\xi, 0) = \hat{u}_0(\xi), \quad \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\xi, 0) = \hat{v}_0(\xi)$$

qui donnent après quadrature

$$\hat{u}(\xi, t) = \hat{u}_0(\xi) \cdot \cos\left(\frac{2\pi \xi}{\omega_0} t\right) + \hat{v}_0(\xi) \cdot \frac{\sin\left(\frac{2\pi \xi}{\omega_0} t\right)}{(2\pi \xi)}$$

Le premier terme s'écrit

$$\frac{1}{2} \left(e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t} \right) \hat{u}_0(x)$$

qui est la transformée de Fourier de

$$\frac{1}{2} \left(u_0(\cdot + t/\omega_0) + u_0(\cdot - t/\omega_0) \right), \text{ tandis que le second}$$

terme faisant apparaître la fonction sinc cardinal $\frac{\sin \pi \xi}{\pi \xi}$, transformée de Fourier de la fonction rectangle $\mathbb{1}_{(-1/2, 1/2)}$, on y reconnaît

le produit de convolution

$$v_0 * \frac{\omega_0}{2} \mathbb{1}_{(-t/\omega_0, t/\omega_0)} = \frac{(x)_{\omega_0}}{2} \int_{x-t/\omega_0}^{x+t/\omega_0} v_0(y) dy$$

Ainsi, la transformée $\mathcal{F}$ permet-elle de décrire la solution

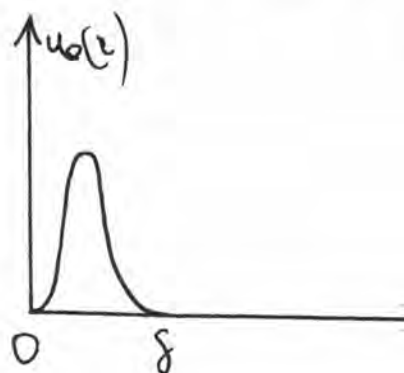
$$u(x, t) = \frac{1}{2} \left[u_0(x - t/\omega_0) + u_0(x + t/\omega_0) \right] + \frac{1}{2} \omega_0 \int_{x-t/\omega_0}^{x+t/\omega_0} v_0(y) dy$$

les calculs formels précédents se justifiant maintenant au vu de leurs hypothèses sur les données initiales.

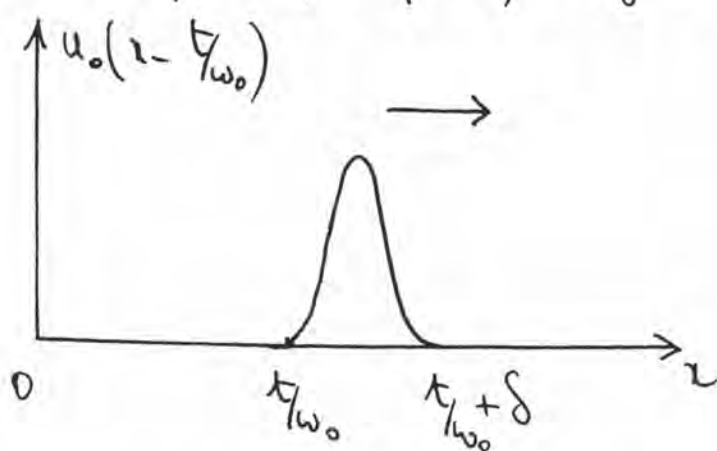
Remarque: i) Il est plus rapide d'effectuer le changement de variables $\xi = t - \omega_0 x$ de lignes caractéristiques, qui transforment $\eta = t + \omega_0 x$

l'EOP sous $\gamma^2 = 0$ de solution générale $f(x) + g(z)$
et de déterminer f, g à l'aide des Ci.

ii) si, par exemple u_0 a la forme



$u_0(z - t_{w_0})$ représente une onde qui se propage à vitesse $\frac{1}{\sqrt{LC}}$
($\approx 300.000 \text{ km/s}$ en pratique) le long de la ligne électrique, car



On trouve une étude justifiée par une hypothèse de naissance au u
dans Titchmarsh, Introduction to the Theory of Fourier
integrals § 10.11

4) en transformant le système d'EOP avec LAPLACE
obtient, en supposant les Ci u_0, i_0 données, le SD

ordinaire

$$\begin{cases} \frac{\partial I}{\partial z} = -GV - C(pV - u_0) \\ \frac{\partial V}{\partial z} = -RI - L(pI - i_0) \end{cases}$$

$$\text{on } I(x, p) = \int_0^{\infty} e^{-tp} i(x, t) dt \quad \text{et} \quad V(x, p) = \int_0^{\infty} e^{-tp} u(x, t) dt.$$

Avec des ci nulle, on obtient $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \gamma^2 U = 0$ on

$$\gamma^2 = (R + Lp)(G + Cp) \quad \dots \text{de solution}$$

$$V(x, p) = A(p)e^{\gamma x} + B(p)e^{-\gamma x}$$

durant alors

$$I(x, p) = \sqrt{\frac{G + Cp}{R + Lp}} \left(-A(p)e^{\gamma x} + B(p)e^{-\gamma x} \right)$$

En pratique, l'Electricien se donne une tension d'entrée $u(0, t)$ et ferme sa ligne sur une impédance de charge $Z(p)$, c'est-à-dire que $Z(p) \cdot I(x, p) = V(x, p)$ où L désigne la longueur de la ligne. On trouvera ce type de calcul dans Angot, Compléments de Mathématiques § 8.4 ...

5) par exemple, pour une ligne sans perte ($G=0$, câble parfaitement isolé) fermée sur son impédance caractéristique

$$Z(p) = \sqrt{\frac{Lp + R}{Cp}}, \quad \text{à laquelle on applique l'échelle unité, on}$$

$$\text{et onduit à} \quad I(x, p) = \sqrt{\frac{C}{p(R + Lp)}} \cdot e^{-\sqrt{Cp(R + Lp)} \cdot x}$$

dont il s'agit de trouver l'originale $i(r, t)$: le calcul est fait dans Laurentien Chabat, Méthodes de la théorie des fonctions d'une variable complexe Chapitre VI § 87 6)

et $i(r, t)$ s'exprime à l'aide de la fonction de BESSEL modifiée I_0

$$i(r, t) = \sqrt{C_L} \cdot e^{-\alpha t} \cdot I_0(\alpha \sqrt{t^2 - LC^2}) \cdot Y(t - \sqrt{LC})$$

où $\alpha = \frac{R}{2L}$ et Y désigne l'écrou-unité d'HEAVISIDE.

Compte-tenu du comportement asymptotique de I_0 , et de Y , on arrive encore à la propagation d'une onde se déplaçant, à la même vitesse.

On donne le schéma du calcul de la transformée de LAPLACE de $I_0(\alpha \sqrt{t^2 - LC^2}) \cdot Y(t - z)$ pour $z (= \omega_0 L) > 0$, à partir de la représentation intégrale de SONINE

$$I_0(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{D}(0;1)} e^{i \frac{x}{2} (\omega - \frac{1}{\omega})} \frac{d\omega}{\omega}$$

qui donne

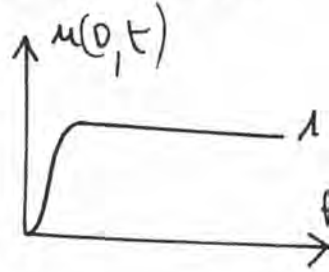
$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{D}(0;1)} \int_z^\infty e^{-pt} \cdot e^{i \frac{\alpha}{2} (\xi - \frac{1}{\xi}) t} dt \cdot e^{i \frac{\alpha}{2} (\xi + \frac{1}{\xi}) z} \frac{d\xi}{\xi}$$

après le "chgt de variable" $w = \sqrt{\frac{t+z}{t-z}} \cdot \zeta$ et avec le théorème
 FUBINI. Le théorème des résidus permet de calculer alors

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma(0,1)} \frac{e^{i\alpha z \zeta}}{\rho - \frac{i}{2}\alpha \left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right)} \cdot \frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{2i}{\alpha} \operatorname{rés}_{\frac{i}{2}(-\rho + \sqrt{\rho^2 - \alpha^4})}$$

pour conclure.

critique: ayant supposé $u(x,0)=0$, il faut présenter le
 calcul précédent comme une idéalisation de



On trouve d'autres cas d'étude de l'EDP de télégraphie, avec
 les éléments nécessaires au la transformée de LAPLACE dans

Goursat-Hillert 2 III § 3. 1.215- , en particulier.

Compléments d'Analyse pour l'Aggrégation:

approximation par des fonctions polynomiales, le moussa

1) Pour une fonction f continue sur le segment $[a, b]$, le théorème de WEIERSTRASS assure l'existence d'une suite $(P_n)_{n \geq 0}$ de polynômes qui converge vers f uniformément sur $[a, b]$. Une démonstration possible est de faire appel à l'unité approchée de LANDAU $L_n(t) = C_n(1-t^2)^n$ sur $[a, b] = [-1, 1]$ auquel on a recours par translation - homothétie si $C_n > 0$ est tel que $\int_{-1}^1 L_n(t) dt = 1$, une autre est celle de BERNSTEIN qui sur $[a, b] = [0, 1]$ établit que la suite

$$B_n f(t) = \sum_{k=0}^n C_n^k t^k (1-t)^{n-k} \cdot f\left(\frac{k}{n}\right)$$

converge. Il convient d'en signaler la démonstration probabiliste qui fait le lien avec la loi des grands nombres, mais il s'agit là encore d'un argument de type U.A.

On prouve le résultat à l'aide du module de continuité

$$\omega(\delta) = \sup_{|t-A| \leq \delta} |f(t) - f(A)|$$

sachant que, d'après le théorème de HEINE $\omega(\delta) \rightarrow 0$:
 $\delta \rightarrow 0+$

$$|f(z) - B_n f(z)| \leq \sum_{k=0}^n C_n^k \left(\left| \frac{k}{n} - z \right| \sqrt{n+1} \right) z^k (1-z)^{n-k} \cdot \omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

avec la formule du binôme de NEWTON et le fait que

$$|f(z) - f\left(\frac{k}{n}\right)| \leq \omega\left(\left|z - \frac{k}{n}\right|\right) \leq \left(\left|z - \frac{k}{n}\right| \sqrt{n+1}\right) \omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

(car, en général $\omega(\lambda \cdot \delta) \leq (\lambda+1) \omega(\delta)$ si $\lambda > 0$) :

avec l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ, on en déduit que

$$\sup_{[0,1]} |f - B_n(f)| = \|f - B_n(f)\|_{\infty} \leq \frac{3}{2} \omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

2) On examine les effets du remplacement de f par $B_n(f)$ sur l'intégration et la dérivation. Ainsi

$$\int_0^1 B_n f(z) dz = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k \cdot B(k+1, n-k+1)$$

apparaît comme $\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$, une somme de

RIEMANN de f , et conduit-elle au calcul approché de $\int_0^1 f dz$

avec la méthode des rectangles. Si autre part, en supposant f

de $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$, on montre que

$$\|B_n(f)' - f'\|_\infty \leq \omega_{f'}\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{3}{2} \omega_{f'}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \leq \frac{5}{2} \omega_{f'}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

en effet,

$$B_n(f)'(z) = n \sum_{k=0}^{n-1} \left(f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right) C_{n-1}^k z^k (1-z)^{n-1-k}$$

et on conclut avec le théorème des accroissements finis.

3) Si f est une fonction entière, un théorème de KANTOROVITCH

affirme que $(B_n(f))$ converge vers f uniformément sur tout

compact de $\mathbb{C}$: si $f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m z^m$, comme

$$\begin{aligned} B_n(f)(z) &= \sum_{k=0}^n \sum_{m \geq 0} C_m \left(\frac{k}{n}\right)^m \cdot C_n^k z^k (1-z)^{n-k} \\ &= \sum_{m \geq 0} C_m B_n(z^m)(z) \end{aligned}$$

où $B_n(z^m)$ désigne le n -ième polynôme de BERNSTEIN de z^m ,

il s'agit de remarquer tout d'abord que $B_n(z^m) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{u.c.} z^m$.

Pour cela, on montre que $B_n(z^m)$ est de degré m si $n \geq m$

puis d'utiliser le fait que dans l'espace vectoriel des divendine
 free $\mathbb{R}_n[X]$, la norme de la convergence uniforme sur $[0,1]$
 est équivalente à celle de la convergence uniforme sur le compact $[-X, X]$.

Ensuite, il faut justifier le passage à la limite, lorsque $n \rightarrow \infty$,
 sous le signe $\sum_{m \geq 0} C_m \|B_n(x^m) - x^m\|_{\infty, X}$ en montrant qu'étant donnée $X > 0$

il existe $A > 0$ avec $|B_n(x^m)(x)| \leq A^m$ si $|x| \leq X$

et pour tout n et m : on conclut alors avec le théorème de
 convergence dominée (puisque $\sum_{m=0}^{\infty} \|C_m (B_n(x^m) - x^m)\|_{\infty, X} < \infty$)

$$\sum_{m=0}^{\infty} |C_m| \cdot (A^m + X^m) < +\infty.$$

L'opérateur de BERNSTEIN $B_n: f \mapsto B_n(f)$ est évidemment
 continu de $\mathcal{C}^0([0,1])$ sur $\mathbb{R}_n[X]$ muni de
 la norme uniforme sur $[0,1]$, de norme 1 et surjectif.

4) Étant donné un espace normé Φ et une famille libre $\{\varphi_j\}_j$
 de Φ , tout élément f de Φ possède un meilleur
approximant linéaire $\sum_{j=1}^n c_j \cdot \varphi_j$, dans le sens où

$$E_n(f) = \inf_{\lambda \in \mathbb{K}^n} \left\| f - \sum_{j=1}^n \lambda_j \varphi_j \right\| \quad \text{et atteint :}$$

la fonction $\lambda \mapsto \left\| \sum_{j=1}^n \lambda_j \varphi_j \right\|$ étant continue atteint sa borne inférieure sur la sphère unité et comme la feuille est libre, ce minimum n'est strictement positif. Alors la fonction $F(\lambda)$ à étudier est minorée par $n \|\lambda\|_{\mathbb{K}^n} - \|f\|$ qui tend vers $+\infty$ avec $\|\lambda\|_{\mathbb{K}^n}$: ainsi, une suite minimisante est-elle bornée et on conclut par un argument de compacité.

$E_n(f)$ s'appelle l'erreur d'approximation.

Par exemple, prenant pour Φ l'espace $L^2(-1,1)$ pour la mesure de LEBESGUE, et pour $\varphi_j(x)$ le monôme x^j , il existe pour f un polynôme de meilleure approximation quadratique de degré n donné, qui est d'ailleurs fourni par le théorème de projection de HILBERT $\sum_{j=0}^n g_j L_j$ où L_j désigne le $j^{\text{ème}}$ polynôme de LEGENDRE, $g_j = \int_{-1}^1 f L_j dx$ et λ_j le $j^{\text{ème}}$ coefficient de FOURIER-LEGENDRE.

Dans l'exemple précédent, il y a unicité du meilleur approximant comme plus généralement dans tout espace Φ strictement normé (c'est-à-dire tel que $\|f+g\| = \|f\| + \|g\|$ entraîne f et g proportionnels).

5) Considérant à nouveau l'espace $\mathcal{C}([a,b])$ de fonctions continues sur le segment $[a,b]$, muni de la norme uniforme. Soit ainsi pour toute f , à n donné, un polynôme de meilleure approximation uniforme : par exemple, il existe un polynôme $x^{n+1} - \sum_0^n g_j x^j$ réalisant

$$\inf_C \sup_{|x| \leq 1} \left| x^{n+1} - \sum_0^n g_j x^j \right|.$$

Il est facile de noter que si $E_n(f) = \|f - P\|_\infty$ alors $(f - P)$ prend nécessairement les valeurs $E_n(f)$ et $-E_n(f)$, et que si $Q \in \mathcal{P}_n[X]$ est tel qu'il existe $(n+1)$ points

$$a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1} \leq b$$

avec $(f - Q)(x_j)$ du signe de $(-1)^j$, alors

$$E_n(f) \geq \|f - Q\|_\infty$$

celui de la VALEUR - POISSON, mais la démonstration du
théorème de TCHEBYTCHEV disant que pour que P soit
 un meilleur approximant de degré n , il faut et il suffit que
 le segment $[a, b]$ contienne $(n+2)$ points avec

$$(f - P_n)(x_j) = \varepsilon (-1)^j \|f - P_n\|_\infty$$

où $\varepsilon = +1$ ou -1 dépend de $j = 0, 1, \dots, n+1$, et
 plus délicate à exposer. Du même coup, il y a unicité du
 meilleur approximant.

En se contentant de chercher, à titre d'exemple, le polynôme
 $P = z^{n+1} - \sum_{j=0}^n C_j z^j$ qui s'écarte le moins de 0 sur le
 segment $[-1, 1]$: si $M = E_n(z^{n+1})$, il existe par consé-
 quent $(n+2)$ points x_j de $[-1, 1]$ en lesquels P prend
 la valeur $\pm M$: si $|x_j| < 1$, cela entraîne $P'(x_j) = 0$
 et comme P' est de degré n , et non nul, il existe n points
 intérieurs au segment $[-1, 1]$, et $x_0 = -1$, $x_{n+1} = 1$ par
 conséquent. Ainsi, les polynômes $M^2 - P^2$ et $(1-z^2)P'^2$
 sont-ils proportionnels, et on aboutit à la relation

différentielle

$$M^2 - P'(x) = \frac{1}{(n+1)^2} (1-x^2) (P'(x))^2$$

qui s'intègre pour donner la forme de

$$P(x) = M \cos((n+1) \arccos x + C)$$

Comme $T_n(x) = \cos(n \arccos x) \in \mathbb{R}_n[X]$, on obtient finalement $P(x) = L^{-1} \cdot T_{n+1}(x)$ où T_n désigne le n ème polynôme de TCHERBYTCHEV.

6) En travaillant avec les fonctions continues 2π -périodiques ($f \in \mathcal{C}_{2\pi}^0$) on peut préciser $E_n(f)$ (dont une estimation a été obtenue en 1)) en aidant des séries de FOURIER.

Si $D_n(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\sin(n+1)t/2}{\sin(t/2)}$ désigne le n ème noyau de

DIRICHLET, on note $A_n(f) = D_n * f$, et le noyau

de CÉSARO $\sigma_n(f) = \frac{1}{n} (A_0(f) + \dots + A_{n-1}(f))$ s'écrit donc

sous la forme $K_n * f$ où $K_n(t) = \frac{1}{2\pi n} \left(\frac{\sin nt/2}{\sin t/2} \right)^2$ et

le n ème noyau de FEJER.

La suite (K_n) étant une V.A., $K_n * f \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f$, donnant ainsi une approximation de $f \in \mathcal{C}_{2\pi}^0$ par une suite de polynômes trigonométriques.

Si f est K -lipschitzienne, on montre que

$$\|\sigma_n(f) - f\|_{\infty} \leq K C_f \frac{\ln n}{n}, \quad n \geq 1$$

où $C_f > 0$ ne dépend que de f (théorème de BERNSTEIN):

en effet, $\sigma_n(f)(t) \doteq \frac{1}{2\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-\theta) \left(\frac{\sin n\theta/2}{\sin \theta/2} \right)^2 d\theta$ vaut encore

$$\frac{1}{\pi n} \int_0^{\pi/2} (f(t+\theta) + f(t-\theta)) \left(\frac{\sin n\theta}{\sin \theta} \right)^2 d\theta \quad \text{de sorte que}$$

$$|\sigma_n(f) - f|(t) \leq \frac{1}{n\pi} \int_0^{\pi/2} |f(t+\theta) + f(t-\theta) - 2f(t)| \left(\frac{\sin n\theta}{\sin \theta} \right)^2 d\theta$$

$$\leq \frac{4K}{\pi n} \int_0^{\pi/2} \theta \left(\frac{\sin n\theta}{\sin \theta} \right)^2 d\theta$$

$$\leq \frac{4K}{\pi n} \cdot \frac{\pi^2}{4} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 n\theta}{\theta} d\theta$$

avec

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 n\theta}{\theta} d\theta = \int_0^{n\pi/2} \frac{\sin^2 t}{t} dt \leq \int_0^{\pi/2} t dt + \int_{\pi/2}^{n\pi/2} \frac{dt}{t} \leq 2 \ln n$$

pour n assez grand, ce qui permet de conclure.

En utilisant la constante de LEBESGUE

$$\| \sigma_n \|_{\mathcal{L}(\mathcal{C}_{2\pi}^0)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\sin((n+1)t/2)}{\sin t/2} \right| dt \sim \frac{4}{\pi^2} \ln n \quad (n \rightarrow \infty)$$

on obtient $\| A_n(f) - f \|_{\infty} \leq (3 + \ln n) \cdot E_n(f)$ car $n \in T_n$

donne un meilleur approximant de f de degré n , on a

$$\| A_n(f) - f \|_{\infty} \leq \| A_n(f) - A_n(T_n) \|_{\infty} + \| T_n - f \|_{\infty}$$

en utilisant le fait que $A_n(T_n) = T_n$, ce qui donne le majorant $(\| A_n \| + 1) \cdot E_n(f)$ recherché.

Le noyau de la VALEE-POUSSIN

$$V_n = \frac{1}{n} (D_n + \dots + D_{2n-1})$$

$$= 2 \cdot K_{2n} - K_n$$

explique les avantages de D_n et de K_n , à savoir :

• $V_n(\mathcal{C}_{2n-1}) \subset \mathcal{C}_{2n-1}$ espace des polynômes trigonométriques de degré au plus $(2n-1)$

• $V_n * f \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f$

$$\|V_n^* f\| \leq 3$$

et il en résulte que

$$\|V_n^* f - f\|_{\infty} \leq 4 \cdot E_n(f)$$

Par exemple, l'étude du développement de $|\cos t|$ montre que

$$V_n^* f(\mathbb{R}) \geq \frac{C}{\sqrt{n}}$$

et on en déduit que $E_n(|x|) \geq \frac{C}{\sqrt{n}}$ tandis que

$$|A_n(f) - f| = \frac{4}{\pi} \sum_{k > \lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \frac{\cos 2kt}{4k^2 - 1} \leq \frac{C}{n}$$

qui entraîne par $|x|$ une approximation par les polynômes de TCHEBYTCHEV d'ordre $\frac{C}{n}$.

7) Le noyau de JACKSON $J_n(t) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\sin nt/2}{\sin t/2} \right)^4$ car

$$J_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\sin nt/2}{\sin t/2} \right)^4 dt = \frac{1}{3} n(2n+1) \text{ est une U.A. telle}$$

que

$$|J_n^* f - f|(x) \leq (1 + 3\pi) \cdot \omega\left(\frac{1}{n}\right)$$

et il en résulte que $E_n(f) \leq 12 \cdot \omega(\frac{1}{n})$.

8) Ainsi, pour venir à $f \in C^0([a, b])$, a-t-on

$$E_n(f) \leq C \omega(\frac{b-a}{n})$$

et, pour diminuer l'erreur, on peut soit augmenter le degré, soit commencer par subdiviser le segment $[a, b]$, cette dernière solution conduisant à l'approximation polynomiale par morceaux.

Ainsi, une vieille méthode de tracé de belles courbes consistait-elle à forer une latte de bois de poutre par des plots fixes, et selon le thème de l'élasticité, on résolvait pratiquement le problème d'élasticité

$$\inf_{\substack{f(x_j) = y_j \\ 0 \leq j \leq n}} \int_a^b \frac{(f''(x))^2}{(1 + (f'(x))^2)^{5/2}} dx.$$

Pour simplifier, on étudie ici le problème simplifié

$$\inf_{\substack{f(x_j) = y_j \\ 0 \leq j \leq n}} \int_a^b (f''(x))^2 dx$$

ce qui va introduire la notion d'approximation spline cubique par morceaux.

Le problème $\inf_{\substack{f(0)=y_0 \\ f(1)=y_1 \\ f \in \mathcal{C}^2([0,1])}} \int_0^1 (f''(x))^2 dx$ admet la solution évidente

f affine, et on présente sa résolution par le Calcul des variations qui prouve au cas général :

il s'agit donc de minimiser la fonctionnelle

$$J(f) = \int_0^1 (f''(x))^2 dx$$

où f est soumise aux contraintes indiquées et, si $\varphi \in \mathcal{C}^2([0,1])$

s'annule en 0 et 1, on doit avoir

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} J(f + \varepsilon \varphi) \right|_{\varepsilon=0} = 0$$

soit $\int_0^1 f'' \varphi'' dx = 0$. On écrit alors à la forme de

f par le lemme de du Bois-REYMOND dont la version

élémentaire s'écrive ainsi :

$$\text{si } \int_0^1 f' \varphi' dx = 0 \quad \text{pour toute fonction } \varphi \text{ de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [0, 1]$$

avec $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, f est alors constante.

$$\text{en effet, en posant } \varphi(x) = \int_0^x (f - \bar{f}) dt \quad \text{où } \bar{f} = \int_0^1 f dx$$

dérive la valeur moyenne de f , on obtient $\int_0^1 (f - \bar{f})^2 dx = 0$

et le conclure suit.

Pour le cas qui nous intéresse, on introduit la fonction d'essai

$$\varphi(x) = \int_0^x \left(\int_0^u (f''(\xi) - (a + b\xi)) d\xi \right) du$$

qui est bien de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, 1]$, et où on impose

par un peu $\varphi(1) = 0$ soit la condition

$$\int_0^1 \int_0^u (f''(\xi) - (a + b\xi)) d\xi du = 0. \quad \text{On a ainsi}$$

$$\int_0^1 f''(x) \cdot (f''(x) - (a + bx)) dx = 0, \quad \text{de sorte qu'en intégrant}$$

en outre $\int_0^1 (a+bx) (f''(x) - (a+bx)) dx = 0$, on peut écrire

Ainsi une extrémale f doit-elle être cubique sur $[0,1]$: dès lors une intégration par parties est possible qui donne

$$\int_0^1 f'' \varphi'' dx = f'' \varphi' \Big|_0^1 - f''' \int_0^1 \varphi' dx$$

donc

$$f''(1) \cdot \varphi'(1) - f''(0) \cdot \varphi'(0) = 0$$

relation devant être valable pour toute fonction d'essai, et entraînant naturellement $f''(0) = f''(1) = 0$ donc $f'' = 0$

g) On étudie maintenant le problème d'extremum

$$\inf_{\substack{f(x_j) = y_j \\ 0 \leq j \leq n \\ f \in C^2([0,1])}} \int_0^1 (f''(x))^2 dx$$

La méthode d'Euler précédente montre que si f réalise le minimum, on doit avoir en particulier

$$\int_0^1 f'' \varphi'' dx = 0 \quad \text{si } \varphi \in \mathcal{C}^2([0,1]) \text{ avec } \varphi(y_j) = \varphi(y_{j+1}) = 0$$

et $\varphi = 0$ en dehors de $[y_j, y_{j+1}]$, de sorte que f doit être cubique sur $[y_j, y_{j+1}]$, $j=0, 1, \dots, n-1$. Alors, on a

$$\begin{aligned} \int_0^1 f'' \varphi'' dx &= \sum_{j=0}^{n-1} \int_{y_j}^{y_{j+1}} f'' \varphi'' dx \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} (f'' \varphi' - f''' \varphi) \Big|_{y_j}^{y_{j+1}} \end{aligned}$$

où $\varphi(y_j) = 0$ pour tout j , qui conduit à la relation

$$f''(1) \cdot \varphi'(1) - f''(0) \cdot \varphi'(0) = 0$$

entraînant la condition limite naturelle

$$f''(0) = f''(1) = 0.$$

Comme on a $J(f + \varepsilon \varphi) = J(f) + 2\varepsilon \int_0^1 f'' \varphi'' dx + \varepsilon^2 J(\varphi)$

il est facile de voir que f cubique par morceaux, et vérifiant cette condition limite est bien extrémale.

La détermination de f nécessite la connaissance de $4n$ coefficients, les contraintes imposant

. $3 \cdot (n-1)$ conditions de raccordement à l'ordre 2 en $x_1, \dots, x_{n-1}$

. $(n+1)$ conditions d'interpolation

et les 2 conditions limite naturelles, qui donne un système de $4n$ équations linéaires qui se résout par balayage

lectures:

1) à 8) NATANSON Konstruktive Funktionentheorie
Akademie Verlag 1971

5) et 8) BAKHVALOV Elements d'Analyse Numérique
Ed. MIR

5 à 7) LORENTZ Approximation of functions

AHLBERG-NIELSEN-WALSCH The theory of splines and their

8) application

CIARLET Introduction à l'Analyse Numérique matricielle

et à l'optimisation (§ 3.7)

ROMBALDI Problèmes corrigés d'Analyse Numérique (PL n° 3)

