

~~30 F~~

IREM de Lorraine



IREM 3028 a



...?? 1 ..6 ???
3 6 ..!!...4 ??? ...

PROBABILITÉS

AU LYCÉE

Edition 1993

INTRODUCTION

Depuis deux ans, un nouveau programme de probabilités a fait son apparition au Lycée.

"Nouveau, me dites-vous ?" Encore une de ces modifications dont on commence (hélas ?) à être coutumier...

Eh bien, non !

Il s'agit cette fois d'un changement beaucoup plus "radical" : l'enseignement des probabilités ne s'appuie plus - comme naguère en Terminale D - sur l'analyse combinatoire et les dénombrements, ni sur la systématisation du "nombre de cas favorables/nombre de cas possibles".

L'approche est désormais "fréquentiste", c'est-à-dire que la définition de la probabilité s'appuie sur la "limite" de la fréquence d'apparition d'un événement lorsqu'on répète une expérience aléatoire un grand nombre de fois.

Voilà une démarche qui devrait permettre une approche beaucoup plus intuitive et "naturelle" - et cependant beaucoup plus générale - du concept de probabilité par les élèves, mais qui nous demande - à nous, professeurs - de revoir radicalement la façon que nous avons d'enseigner cette partie des mathématiques (voire, pour certains, la façon dont nous l'avons apprise en faculté).

Nous avons conçu cette brochure pour vous aider dans cette tâche : vous y trouverez à la fois des apports théoriques et didactiques, et des exemples d'activités et d'exercices directement utilisables dans vos classes.

En retour, vous nous aideriez beaucoup en nous faisant part de vos remarques et suggestions, voire même en participant aux travaux de notre équipe. Merci d'avance.

Pour le groupe de recherche
sur l'enseignement des probabilités au lycée,
Jacques VERDIER

BIBLIOTHEQUE IREM



107061

Sommaire

I	- Enseigner les probabilités en première	7
II	- Quelques aspects théoriques	19
III	- Les "représentations" que les élèves ont des concepts utilisés en probabilités	29
IV	- Calculatrices et informatique	39
V	- Activités et exercices en classe de première	47
VI	- Enseigner les probabilités en terminale	55
VII	- Activités et exercices en classe de terminale	69

CHAPITRE I

ENSEIGNER LES PROBABILITÉS EN PREMIÈRE

Bernard PARZYSZ

ENSEIGNER LES PROBABILITÉS EN PREMIÈRE

Les probabilités sont d'introduction relativement récente dans l'enseignement secondaire, et cette partie des programmes a subi d'assez nombreuses fluctuations en quelques années, passant des classes de Première à celles de Terminale et vice-versa, incluant ou rejetant certaines notions, et adoptant successivement divers points de vue (sans toutefois jamais disparaître totalement). Les nouveaux programmes (enseignés en Première depuis 1991 et en Terminale depuis 1992) ne font pas exception à la règle, et il n'est peut-être pas superflu, à cette occasion, de faire le point sur la question, d'autant plus que les Probabilités passent, auprès des élèves concernés, pour être l'une des parties du programme les moins aimées (et les plus difficiles ?).

1 - Les Probabilités dans l'enseignement secondaire, hier et aujourd'hui :

Les probabilités - et les statistiques - sont apparues dans les programmes de l'enseignement secondaire il y a une vingtaine d'années, au cours de la période dite des "mathématiques modernes". Elles ont en effet été introduites à la rentrée de 1974 dans les classes de Première scientifique. On peut y voir un exemple de *transposition didactique*, au sens où l'a définie Yves Chevallard [2] : en effet, comme le dit, dans l'avant-propos d'un manuel de Première de cette époque [5], un directeur de collection¹ : "*la réforme du programme des classes de Première C, D, E est la suite logique de celle abordée en classes de Seconde scientifique C et T, mais elle marque une innovation importante : l'introduction d'une initiation à l'étude des "Statistiques et Probabilités" qui ne peut plus être ignorée, à la fin du vingtième siècle, de la plus grande partie de nos élèves du second cycle long*". La raison invoquée ici pour cette innovation est la nécessité de suivre l'évolution des connaissances scientifiques (d'adapter le "savoir enseigné" au "savoir savant" [2]). Ceci est très net en ce qui concerne les Probabilités, qui n'ont été axiomatisées, par Kolmogorov, qu'en 1933².

L'optique dans laquelle est alors traitée cette partie du programme est dans le droit fil de celle qui gouverne l'ensemble des programmes de mathématiques de cette époque ; on y trouve (en classe de Première scientifique) les notions d'espace probabilisable et d'espace probabilisé (finis), de probabilité conditionnelle, d'événements indépendants, de variable aléatoire, de loi binomiale. Ce simple énoncé des notions traitées met en évidence une autre raison (qui est peut-être la plus profonde) de cette introduction des Probabilités dans les programmes des lycées : elles apparaissent comme une illustration de l'intérêt des notions ensemblistes dans les sciences, l'industrie, et même la vie courante. Les élèves vont pouvoir y réinvestir pratiquement toutes leurs

1 - Maurice Durrande

2 - Voir par exemple [4]

connaissances relatives aux ensembles (intersection, réunion, complémentaire, partition, etc.), ainsi que celles relatives aux correspondances entre ensembles (relation, application, image réciproque...). La présentation choisie pour enseigner les Probabilités est donc "tout naturellement" de type axiomatique (ce qui présente en outre l'avantage de leur permettre de s'intégrer facilement dans le type d'enseignement alors en vigueur). Il s'agit en fait de modéliser l'équiprobabilité des événements élémentaires, en se fondant sur une observation des symétries de la situation étudiée (c'est ce qu'A. et M. Henry [6] appellent l'approche "pascalienne" des Probabilités). Pour résumer, disons que les Probabilités-Statistiques ont, à l'époque, plusieurs bonnes raisons d'être incorporées dans l'enseignement secondaire des mathématiques, et notamment leur place rapidement croissante dans la recherche scientifique (fondamentale et appliquée), leur intervention dans des situations simples de la vie courante³, la possibilité d'une présentation axiomatique, la possibilité d'un réinvestissement, à cette occasion, des connaissances ensemblistes.

Comme on le voit, l'enseignement des Probabilités n'apparaît pas comme lié à celui des Statistiques figurant au programme de la même classe, ce qui permettrait de lier la notion de probabilité à celle de fréquence (c'est l'approche "fréquentiste" d'A. et M. Henry). Quelques années plus tard, de nouveaux programmes officialisent d'ailleurs cet état de fait en séparant les deux enseignements : les Statistiques sont enseignées en Seconde et en Première⁴, tandis que les Probabilités ne figurent plus qu'au programme de Terminale⁵ (le programme le plus développé étant celui de Terminale D). L'approche reste du même type que dans les précédents programmes (c'est-à-dire pascalienne), et s'appuie sur une étude préalable des dénombrements.

Un changement s'amorce avec les programmes de 1986⁶, qui introduisent un enseignement de Statistiques dès la classe de Sixième, enseignement qui se poursuit durant toute la scolarité secondaire. Par contre, peu de changement en ce qui concerne les Probabilités, où les programmes restent pratiquement les mêmes que précédemment. Il faut attendre 1991 pour qu'un changement radical s'amorce : en effet, le nouveau programme⁷ des classes de Première A₁, B, S, E, F réintroduit les Probabilités à ce niveau, mais en imposant cette fois une approche fréquentiste : *"Pour introduire la notion de probabilité, on s'appuiera sur l'étude de séries statistiques obtenues par répétition d'une expérience aléatoire, en soulignant les propriétés des fréquences et la relative stabilité de la fréquence d'un événement donné lorsque cette expérience est répétée un grand nombre de fois"*. On ne saurait être plus clair : il s'agit cette fois de fonder l'enseignement sur la

3 - Qui de plus rejoint, avec l'étude des jeux de hasard, la genèse historique des concepts probabilistes au 17^{ème} siècle (Pascal, Fermat, Huygens, etc).

4 - Il est vrai que des Statistiques figurent alors au programme de Terminale (régression linéaire), mais elles ne figurent pas au programme du Baccalauréat. On imagine sans peine le sort que leur ont réservé les enseignants de Terminale.

5 - Publié au BOEN du 22 avril 1982.

6 - Publiés au BOEN du 12 décembre 1985.

7 - Publié au BOEN du 2 mai 1991.

notion de fréquence (connue depuis le collège), et de faire apparaître, dans une suite d'épreuves répétées - et de façon forcément intuitive - la convergence (en probabilité, ou "stochastique") de la moyenne des fréquences d'obtention d'un résultat donné vers une limite, qui est la probabilité de ce résultat (*loi faible des grands nombres*, voir ci-après). En outre, les nouveaux programmes étendent à la Terminale C l'ancien programme de Terminale D (avec notamment les notions de variable aléatoire, de probabilité conditionnelle et d'indépendance d'événements). Il résulte de cette nouvelle approche que la combinatoire joue désormais un rôle moins fondamental qu'auparavant.

2 - Le programme actuel de Première :

De même que l'approche pascalienne était tout à fait cohérente avec l'esprit des programmes des années 70, l'approche fréquentiste correspond bien à l'esprit des programmes actuels de mathématiques, privilégiant les activités des élèves par rapport au cours magistral. Il s'agit maintenant de forger des *outils* qui permettent d'étudier des situations concrètes à propos desquelles sont recueillies et organisées des données statistiques, et non plus d'appliquer des outils généraux, définis *a priori*, à des situations diverses. Une difficulté théorique apparaît cependant : la loi des grands nombres (qui permet, rappelons-le, de relier la notion de probabilité à celle de fréquence) fait elle-même usage de notions probabilistes. Donnons-en une formulation dans un cas simple :

Soit une suite (X_n) de variables aléatoires indépendantes et de même loi (d'espérance mathématique m). Alors la variable aléatoire $Y_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$ converge en probabilité vers m .

On constate qu'interviennent ici les notions de variable aléatoire, d'espérance mathématique, de loi de probabilité, d'indépendance (sans parler de la convergence stochastique)... Mais l'existence de ce cercle vicieux, pour réelle qu'elle soit en théorie, n'est guère gênante dans la pratique, pour peu que l'on se contente de s'appuyer sur l'intuition.

Par exemple, si l'on prend comme expérience aléatoire étudiée le lancer d'une pièce, on peut s'intéresser à la fréquence f_n du nombre de "faces" obtenus au cours de n lancers, pour $n = 100, 200, 500, 1000$, etc. On s'apercevra alors (éventuellement en utilisant une représentation graphique de f_n en fonction de n) que, plus n devient grand, moins la variation de f_n devient irrégulière (c'est la "relative stabilité" dont parle le programme). Cependant il n'y a, *a priori*, aucune nécessité "logique" que la suite (f_n) ait pour limite $1/2$: sans même parler de pièce truquée, cette pièce n'est pas strictement un cylindre homogène (les deux bases présentent des creux et des bosses, dus aux motifs moulés). Le phénomène observé, ainsi que d'autres du même type⁸,

8 - cf l'article d'A. et M. Henry (loc. cit.)

qui permettront aux élèves de se persuader de cette stabilité relative, autorise simplement à conjecturer l'*existence* d'une telle limite. Mais on n'est pas, pour autant, en mesure de la déterminer. En effet, bien que l'on puisse penser - ce qui est d'ailleurs le cas - que la fréquence observée sur l'ensemble des lancers réalisés constitue une "bonne" estimation de cette limite, on peut constater que deux séries de lancers ne donnent pas le même résultat (même si les résultats obtenus sont "assez" voisins). Pour passer de la fréquence à la probabilité, il est donc nécessaire d'effectuer un nouveau saut conceptuel, en l'occurrence en *modélisant* la situation. C'est-à-dire que l'on va maintenant *décider* de la valeur de la limite, en justifiant le choix fait par des raisons extra-mathématiques. Par exemple, supposons que 1000 lancers d'une pièce de monnaie aient permis d'obtenir 511 "faces" et 489 "piles". On pourra penser que le faible écart observé entre les deux résultats est dû à des fluctuations "normales" dans ce genre de situation, et que ces résultats ne permettent pas de récuser le fait que la pièce est "bien équilibrée"⁹ (en fait, il y a pratiquement une chance sur deux d'observer un écart au moins égal à celui-ci, au terme d'une suite de 1000 lancers). On excipera alors de raisons de vraisemblance et de symétrie pour justifier cette hypothèse, et attribuer la probabilité $1/2$ à la réalisation de "face", comme à celle de "pile". Les raisons données seront du genre :

- la pièce ne tombe pratiquement jamais sur la tranche (fait d'observation).
- étant donné la forme de la pièce (assimilée à un cylindre homogène), on a autant de chances d'obtenir "pile" que d'obtenir "face".

Il existe cependant d'autres modélisations possibles. Supposons par exemple que l'observation de 1000 lancers de la pièce ait donné 532 "faces" et 468 "piles" : le modèle précédent ne semble plus convenir à la situation présente, du fait de l'écart relativement important constaté entre les deux résultats (en fait, la probabilité que le lancer d'une pièce "bien équilibrée" conduise à observer un écart aussi grand est inférieure à 5%¹⁰). On conclura par conséquent que la pièce considérée n'est pas bien équilibrée, ceci conduisant à rejeter le modèle¹¹ d'équirépartition, et à affecter à la réalisation de "face" une probabilité supérieure à $1/2$. L'omniprésence de la combinatoire dans les exercices de Probabilités se trouve donc remise en question, et la "géométrie du hasard"¹², pourtant historiquement située à l'origine de cette branche des mathématiques, n'apparaît plus comme un préalable incontournable à son enseignement : le modèle équiréparti devient un modèle parmi d'autres, commode certes, mais en aucune façon plus vraisemblable. Au contraire, on peut même dire que ce cas "idéal" n'a, intuitivement, que peu de chances de se rencontrer dans la réalité.

9 - Notons ici l'existence de "codages linguistiques", destinés à indiquer (imposer) le choix du modèle équiréparti.

10 - ... mais elle n'est pas nulle !

11 - Le mot "modèle" est utilisé ici dans le sens de *modèle mathématique*, c'est-à-dire de "représentation mathématique d'un phénomène physique, économique, humain, etc., réalisée afin de pouvoir mieux étudier celui-ci" (Petit Larousse illustré, éd. 1990), et non de *modèle d'une théorie* : "structure qui réalise les axiomes de cette théorie" (Dictionnaire des mathématiques, sous la dir. de Fr. Le Lionnais. Ed. PUF 1979).

12 - L'expression est de Blaise Pascal lui-même (1654).

L'approche fréquentiste qui vient d'être décrite n'est autre que celle de Jacques Bernoulli : dans son *Ars conjecturandi* (1713) [1], il se pose explicitement le problème de déterminer la probabilité d'obtenir "face" avec une pièce mal équilibrée, et montre que si on lance cette pièce un grand nombre de fois, la fréquence d'apparition de "face" se rapproche d'une quantité p , que l'on peut appeler *probabilité* d'obtenir "face" avec la pièce considérée. La démarche fréquentiste est donc, elle aussi, attestée dans l'histoire des Probabilités, mais à un moment différent - un peu postérieur - de la démarche pascalienne.

3 - Le problème de la modélisation :

La première difficulté qui vient à l'esprit lorsque l'on évoque l'enseignement des Probabilités au lycée est bien entendu celle de la *modélisation* d'un phénomène aléatoire. Souvent des élèves posent la question de savoir pourquoi on a choisi tel modèle plutôt que tel autre, et ils ont l'impression que le choix du modèle est lui-même de nature aléatoire. L'idée sous-jacente est que la probabilité que l'on attribue à un événement donné "*dépend de l'interprétation par le sujet des informations qu'il possède et n'est pas en soi une donnée objective*" [6]. L'histoire même des Probabilités nous fournit des indications sur les questions qui peuvent surgir. Il est bien sûr séduisant de se placer dans un espace probabilisé où les événements élémentaires sont équiprobables : la probabilité d'un événement quelconque peut alors se calculer simplement grâce à la formule :

$$\frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

Pour Laplace, c'est là un des fondements des Probabilités : "*la théorie des hasards, écrit-il, consiste à réduire tous les événements du même genre à un certain nombre de cas également possibles*" [7]. Et Condorcet se montre encore plus radical : "*il est absolument nécessaire de remonter [aux événements] auxquels il est permis de supposer cette égale probabilité, sans quoi le calcul deviendrait absolument hypothétique*" [3].

Malheureusement, les événements qui se présentent spontanément à l'esprit lors de l'étude d'un phénomène aléatoire ne correspondent pas toujours à cette situation idéale. Prenons l'exemple classique du lancer simultané de deux pièces de monnaies, que l'on suppose bien équilibrées. Il s'agit de déterminer la probabilité que les deux pièces amènent le même résultat (c'est-à-dire deux "piles" ou deux "faces"). On peut *a priori* rendre compte de cette situation de plusieurs manières différentes. Par exemple :

Première manière : trois cas peuvent se présenter :

- soit on obtient deux "piles"

- soit on obtient deux "faces"
- soit on obtient une "pile" et une "face"

Deuxième manière : deux cas peuvent se présenter :

- ou bien les deux pièces présentent le même côté (deux "piles" ou deux "faces")
- ou bien elles présentent deux côtés différents (une "pile" et une "face").

Troisième manière : quatre cas peuvent se présenter, si les pièces sont discernables (par exemple une pièce de 5 F et une pièce de 10 F) :

- les deux pièces indiquent "pile"
- les deux pièces indiquent "face"
- la pièce de 5 F indique "pile" et celle de 10 F "face"
- la pièce de 5 F indique "face" et celle de 10 F "pile".

(N.B. : on notera que le mot "cas", utilisé dans les trois descriptions ci-dessus, a une signification beaucoup plus floue que le mot "événement". En effet, il n'appartient pas au vocabulaire des Probabilités, même s'il y est d'un emploi fréquent, et désigne souvent, dans le discours usuel, un événement élémentaire d'un ensemble équiréparti. Il en va d'ailleurs de même du mot "façon" (Cf [8]).

Supposons maintenant qu'un élève choisisse l'un de ces trois univers et y suppose l'équiprobabilité. Le premier de ces trois modèles lui fournira la réponse $2/3$, tandis que les deux autres lui donneront $1/2$ (qui est la réponse attendue).

S'il a choisi le premier modèle, sa réponse sera considérée comme fausse, sans appel. Il pourra d'ailleurs s'en persuader, car une expérimentation statistique - réelle ou simulée - lui donnera tort.

(N.B. : ceci met en évidence, au passage, un autre intérêt du recours au point de vue fréquentiste : le point de vue pascalien a tendance à faire considérer comme équiprobables les différents événements que l'on a pu distinguer, alors qu'ils n'ont *a priori* aucune raison de l'être ; le recours à une approche fréquentiste de la situation aléatoire permet alors un *contrôle* de la situation).

Si l'élève a choisi le deuxième modèle, il aura la bonne réponse, mais le professeur lui dira que l'équiprobabilité reste à prouver (avec trois pièces, l'événement "toutes les pièces amènent le même résultat" et l'événement contraire n'ont plus la même probabilité). Le "bon" modèle - lui

dira-t-il - est le troisième. Et il développera des arguments (de symétrie, notamment) tendant à corroborer ce point de vue.

En fait, ce qui légitime le choix du troisième modèle est d'ordre théorique : il existe un modèle général (le schéma de Bernoulli) correspondant à ce type d'épreuve, et c'est à lui que se réfère implicitement l'enseignant pour déterminer l'univers qu'il va choisir. Mais l'élève ne voit que la "partie émergée" de cette démarche, et on comprend qu'il ait du mal à distinguer pourquoi le troisième modèle est meilleur que le deuxième.

Ainsi, comme on vient de le voir, la question est d'abord celle du *choix du modèle probabiliste*, c'est-à-dire d'un univers Ω (muni ici de la tribu de ses parties) et d'une probabilité. Il existe un certain nombre de modèles "classiques" qui servent de référence dans la plupart des cas usuels (les divers schémas d'urne, par exemple) : si l'on arrive à identifier - d'une façon qu'il faudra préciser - la situation étudiée à l'un de ces modèles (on parle d'"isomorphisme" des situations), on pourra appliquer les résultats correspondants, et la résolution du problème s'en trouvera grandement facilitée. L'un des objectifs de l'enseignement des Probabilités en Première est donc que les élèves apprennent à *connaître* quelques grands modèles de référence, et qu'ils soient à même de les *reconnaître* au travers de situations diverses, c'est-à-dire en fait d'argumenter le choix de tel ou tel modèle¹³. Ceci demande bien évidemment que l'on consacre du temps à ces activités ; comme le précise le programme : "il est important que les élèves puissent se familiariser avec les probabilités pendant une durée suffisante".

4 - Une confusion... fréquente :

Revenons sur le rapport entre fréquence et probabilité, et citons d'abord Hélène Ventsel, in "Théorie des probabilités" (Ed. Mir, Moscou, 1973) :

"Le lien existant entre la fréquence d'un événement et sa probabilité est très profond. En effet, lorsqu'on estime la probabilité d'un événement, on se base forcément sur la fréquence des événements analogues dans la pratique.

En caractérisant la probabilité d'un événement par un nombre quelconque on ne peut attribuer à ce nombre une autre valeur réelle et une autre signification que la fréquence relative d'apparition de l'événement en question dans un grand nombre d'expériences".

En fait, la fréquence est *observée dans la réalité*, tandis que la probabilité (quelle que soit la façon dont elle est déterminée) est *définie dans le modèle mathématique*.

¹³ - en restant très modeste cependant : il ne s'agit évidemment pas d'enseigner en Première les modèles de Bernoulli, binominal, géométrique, de Poisson ou que sais-je encore, mais de dégager par exemple l'analogie entre telle situation étudiée dans certains problèmes et tel problème d'urne.

Prenons le cas élémentaire d'un caractère que peuvent ou non présenter les individus d'une population donnée. Soient N l'effectif de la population et n celui des individus présentant le caractère considéré. La *fréquence* du caractère dans la population est $\frac{n}{N}$.

Si maintenant on prend un individu au hasard dans cette population, la formule de Pascal : $\left(\frac{\text{Nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}\right)$ indique que la *probabilité* que présente le caractère est égale à $\frac{n}{N}$.

Il y a donc identité numérique des valeurs, ce qui explique que l'on a souvent tendance à confondre les deux notions. Cependant, dans le second cas on se trouve bien dans le modèle, même si celui-ci se montre très discret (sa présence n'est attestée que par l'expression "au hasard"). Ceci signifie en effet que l'on se place dans l'espace probabilisé canoniquement associé à la population, considérée du point de vue du caractère étudié (donc avec équiprobabilité, ce qui permet justement d'utiliser la formule de Pascal). Il est rare que cette distinction soit clairement explicitée par l'énoncé, comme c'est pourtant le cas dans l'exemple suivant posé au Baccalauréat D (Maroc juin 1991) :

"Des sondages permettent de constater que 10% de la population est constituée de gauchers. On considérera dans cet exercice que la probabilité pour qu'un individu pris au hasard soit gaucher est égale à 0,1..."

Une conséquence pratique de cette confusion de fait est qu'une même situation pourra être présentée par l'énoncé, soit comme un problème de détermination de proportion (cadre statistique), soit comme un problème de détermination de probabilité (cadre probabiliste). On pourra même trouver successivement les deux cadres dans le même énoncé, comme par exemple dans cet autre exercice de Baccalauréat (séries A₁ et B, Paris, juin 1990) :

"Une usine d'horlogerie fabrique une série de montres. La fabrication comporte deux phases. La première phase fait apparaître un défaut "a" dans 2 % des cas, la seconde phase un défaut "b" dans 10 % des cas.

1 - Une montre est tirée au hasard (...). Calculer la probabilité des événements suivants..."

On voit qu'ici la présentation se situe dans le cadre statistique (il s'agit de défauts constatés dans la population), tandis que les réponses sont données dans le cadre probabiliste. L'articulation entre les deux cadres est réalisée par la phrase (à l'apparence anodine) "une montre est tirée au hasard", qui fait basculer dans le modèle théorique.

Il peut même arriver que ce "basculement" soit complètement implicite, et laissé à la charge de l'élève, comme dans ce troisième exercice de Baccalauréat (A₁, Skieurs de haut niveau, Albertville, juin 1990) :

"En sortie de fabrication, on a constaté qu'une pièce présente deux sortes de défauts (et deux seulement) :

8 % des pièces présentent le défaut D_1 au moins,

15 % des pièces présentent le défaut D_2 au moins,

5 % des pièces présentent à la fois les défauts D_1 et D_2 (...).

1 - Une pièce sort de fabrication. Calculer la probabilité p_1 pour qu'elle présente un seul défaut..."

Il convient donc de se montrer vigilant avec les élèves, surtout dans les premiers temps, et de bien distinguer (et faire distinguer), grâce en particulier au vocabulaire utilisé, dans quel cadre (statistique, ou probabiliste) on se situe. Cette distinction, ainsi que son corollaire : la nécessité de se placer dans le cadre probabiliste (c'est-à-dire dans le modèle mathématique) pour résoudre les problèmes, constitue un enjeu important de l'enseignement des probabilités au lycée.

Bibliographie

- [1] BERNOULLI Jacques (1713) : *Ars conjecturandi*. Réédité par l'IREM de Rouen (1987).
- [2] CHEVALLARD Yves (1990) : *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. Ed. La pensée sauvage, Grenoble.
- [3] CONDORCET Antoine de : *Eléments de calcul des Probabilités*. Réédité par l'IREM de Paris 7 (1986).
- [4] DROESBEKE Jean-Jacques et TASSI Philippe (1990) : *Histoire de la statistique*. Ed. PUF, Paris (coll. Que sais-je ? n° 2527).
- [5] GIRAULT G. et A. THUIZAT (1975) : *Mathématiques. Classes de Première C.D.E.* Coll. Durrande. Ed. Technique et Vulgarisation, Paris.
- [6] HENRY Annie et Michel (1992) : *L'enseignement des probabilités dans le programme de première*, in Repères-IREM n° 6, pp. 27-52.
- [7] LAPLACE Pierre-Simon (1814) : *Essai philosophique sur les Probabilités*. Réédité par Christian Bourgois, Paris (1986).
- [8] PARZYSZ Bernard (1980) : *Un compte à votre façon*. In groupe Français-Mathématiques, volume 2. Ed. IREM de Paris 7.

CHAPITRE II

QUELQUES ASPECTS THEORIQUES...

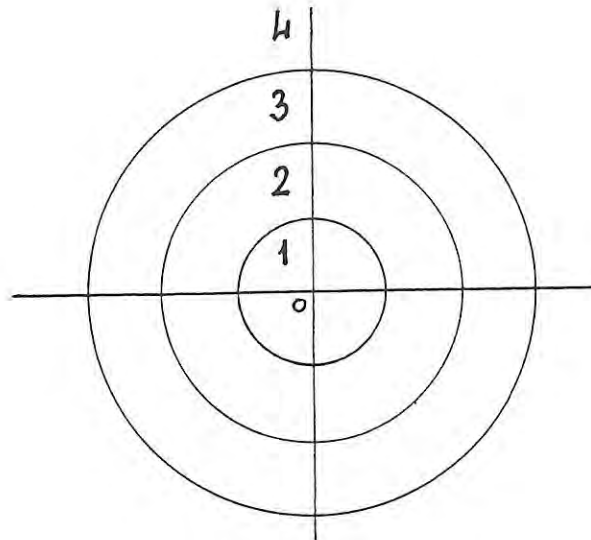
Pierre MARCHAL

QUELQUES ASPECTS THÉORIQUES

I - Définir une probabilité

1 - Bien décrire une expérience E et à partir de E définir avec précision l'univers associé à $E : \Omega$

2 - Exemple : soit une cible



E : on lance la fléchette suffisamment fort pour qu'elle atteigne le plan de la cible ; on peut définir Ω

1 - Un événement est les coordonnées du point d'impact rapporté à un repère centré en o ; Ω est $\mathbb{R}^2$, un ensemble infini non dénombrable.

2 - Un événement est la distance arrondie au cm au centre o ; Ω est $\mathbb{N}$, un ensemble infini dénombrable.

3 - Un événement est la distance au centre o ; Ω est $\mathbb{R}^+$, un ensemble infini.

4 - Un événement est la partie du plan atteinte ; $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$, ensemble fini.

Attention : La donnée de Ω ne préjuge pas de la probabilité :

E : Jet de pièce ou tirage d'une boule dans une urne composée de boules rouges et blanches Ω est toujours composé de deux éléments (pile, face) ou (rouge, blanc) mais la probabilité dépend de l'expérience de départ : Si la pièce est parfaite, alors $\mathbb{P}(P) = \mathbb{P}(F) = 1/2$ plus généralement $\mathbb{P}(P) = p$ et $\mathbb{P}(F) = 1-p$ où p est un élément de $[0,1]$; la remarque est la même pour l'urne, posons n_r = nombre de boules rouges et n_b = nombre de boules blanches, si $n_r = n_b$ alors $\mathbb{P}(R) = \mathbb{P}(B) = 1/2$ mais si n_r est différent de n_b alors les probabilités sont différentes. Le jet d'un dé ou une urne contenant des boules de six couleurs amènent la même remarque.[1]

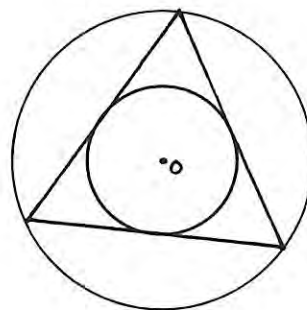
II - Concept de probabilité :

1 - Vision pascalienne : Ω est fini ($\text{Card}(\Omega) = N$) et soit A inclus dans B, posons N_a le nombre d'apparitions de A alors $P(A) = N_a/N$ (cela revient à compter).

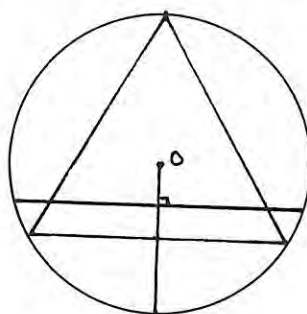
2 - Que signifie "au hasard". Les limites de la vision précédente apparaissent assez bien dans l'exemple suivant :

Considérons un triangle équilatéral et son cercle circonscrit. On tire une corde au hasard. Quelle est la probabilité que sa longueur soit supérieure à celle du côté du triangle ?¹

Première solution : Comme la longueur de la corde est déterminée par la position de son milieu, le choix de la corde peut consister à marquer un point au hasard dans le cercle. La probabilité pour que la corde soit plus longue que le côté est alors égale à la probabilité pour que le milieu soit extérieur au cercle concentrique est de rayon moitié. Si on admet que la répartition de ce point est uniforme dans le cercle, on trouve pour la probabilité demandée $1/4$.



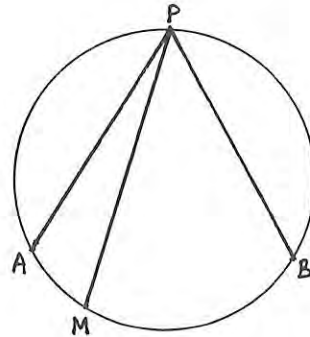
Deuxième solution : La longueur de la corde est déterminée par la distance de son



milieu au centre du cercle. Par raison de symétrie on peut considérer que le milieu est pris sur un rayon donné sur le cercle et supposer que la répartition est uniforme sur le rayon. La corde sera plus longue que le côté si son milieu est à la distance $r/2$ du centre ; la probabilité cherchée est donc $1/2$.

¹ - On trouvera quelques remarques sur ce paradoxe de Bertrand dans un article de Michel Henry et H. Lombardy, Paradoxes et Lois de probabilité, in. Repères-IREM n° 13 (octobre 1993).

Troisième solution : Par raison de symétrie nous pouvons supposer qu'on a fixé une des extrémités de la corde, soit P. L'autre sera choisie au hasard sur la circonférence. Si on admet que la probabilité pour que l'autre extrémité M tombe sur un arc donné de la circonférence est proportionnelle à la longueur de cet arc alors PM sera plus grande que le côté si M se trouve sur l'arc AB dont la longueur est le tiers de la circonférence, la probabilité cherchée est donc $1/3$.



Il est clair que ces trois hypothèses de répartition, sont également réalisables. Cet exemple montre que des conditions expérimentales différentes pour le choix du hasard de la corde conduit à des mesures-probabilités différentes sur la même algèbre d'événements.

Dans le même ordre d'idée :

Dans une salle d'attente il y a trois bancs à deux places, une personne A est assise ; une deuxième personne arrive et s'assoit au hasard.

Quelle est la probabilité que B s'asseye à côté de A ?

3.- Vision fréquentiste

Elle repose sur la loi des grands nombres. Une seule expérience ne suffit pas pour évaluer la probabilité d'un événement ; on va répéter un très grand nombre de fois l'expérience. Ainsi un lancer de dés : la probabilité d'observer 6 est la limite du rapport:

$$\frac{\text{Nombre de 6 obtenus}}{\text{Nombre d'essais}} = f \text{ lorsque le nombre d'expériences augmente indéfiniment.}$$
 La loi des grands nombres assure la convergence de f vers p , probabilité de l'événement.

- Du point de vue pratique cette présentation se heurte à une première impossibilité, en effet il faudrait réaliser un nombre infini d'expériences.
- La critique la plus importante est théorique, en effet la définition des probabilités repose donc sur la loi des grands nombres, or celle-ci suppose défini le concept de probabilités, c'est un cercle vicieux. Cependant, cette vision donne intuitivement une approche des probabilités.

III - Modèle :

Un modèle est une axiomatisation de situations concrètes dont on a retenu les propriétés communes.

On détermine ainsi un isomorphisme entre deux espaces concrets probabilisés $(\Omega_1, B_1, \mathbb{P}_1)$ et $(\Omega_2, B_2, \mathbb{P}_2)$; on peut considérer les modèles comme des classes d'équivalences sur l'ensemble des espaces concrets probabilisés.

Représentation d'un modèle : Chaque classe d'équivalence peut être représentée par un élément que, par commodité nous appellerons "modèle". Dans le cas des ensembles finis on prend souvent le schéma d'urne (dite de POLYA) (mathématicien hongrois).

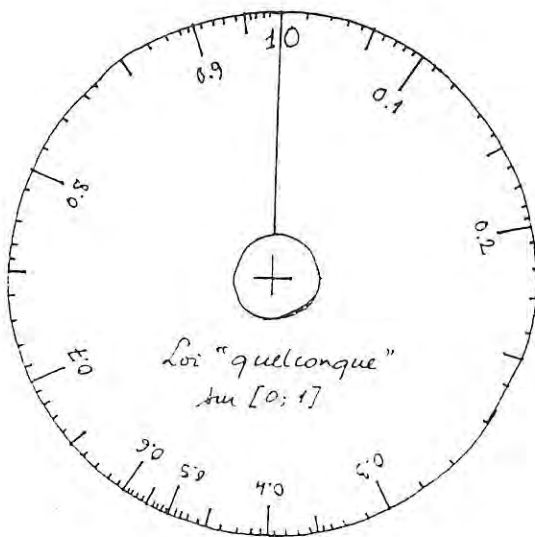
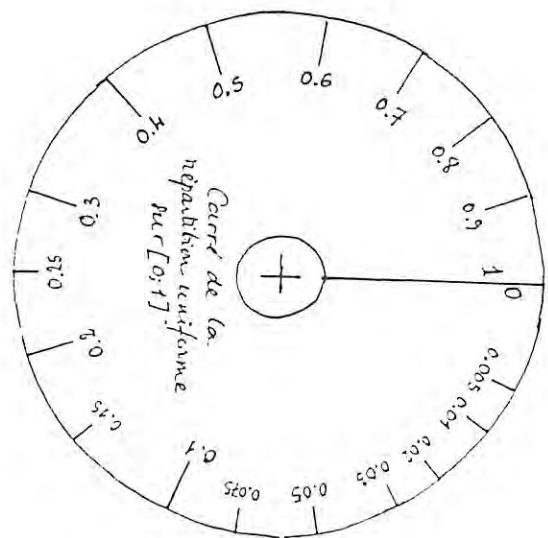
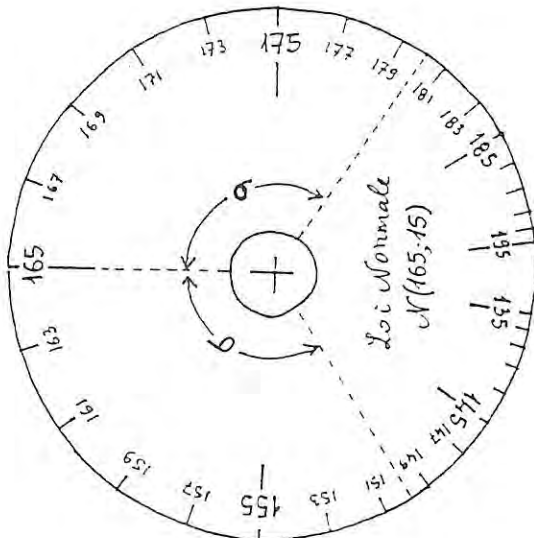
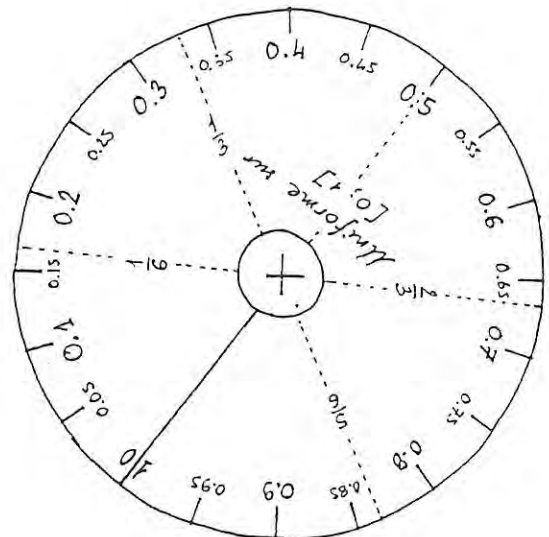
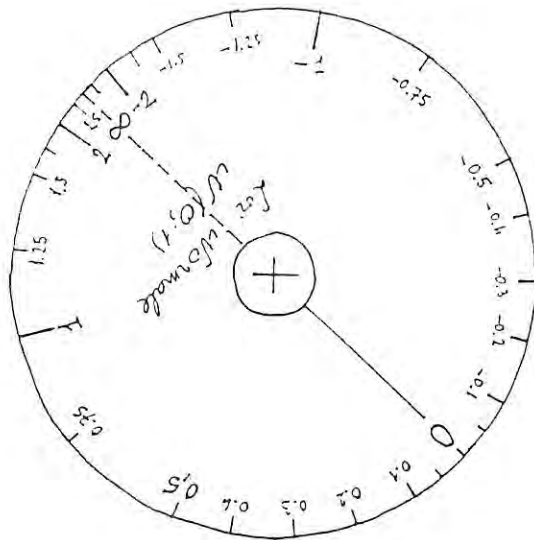
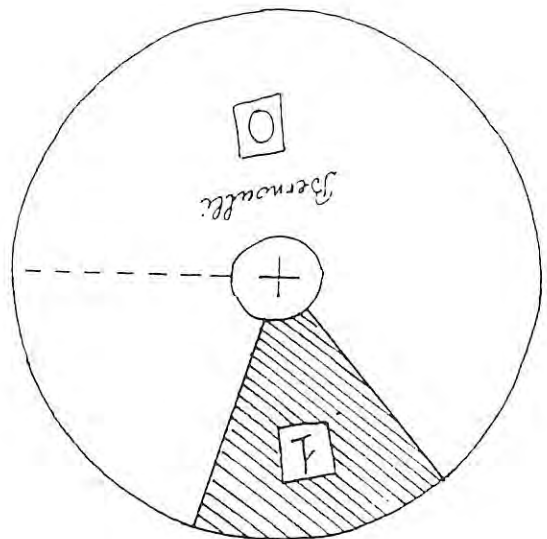
Schéma de Roulette : On considère une roue qui tourne autour d'un de ses points intérieurs (la plupart du temps le centre), la circonférence est munie d'une graduation représentant les probabilités. Sur le support, on fixe un index et on fait tourner la roue. Le choix de la graduation permet de simuler toutes les lois (voir page suivante) :

- Finies : La circonférence est partagée en un nombre fini de parties, dans chaque partie tous les points ont la même probabilité. La probabilité est proportionnelle à la longueur de chaque partie ; elle est en bijection avec $\{1, 2, 3, \dots, n\}$.
- Dénombrable : La circonférence est partagée en un nombre infini (dénombrable) de parties, dans chaque partie tous les points ont la même probabilité. La probabilité est proportionnelle à la longueur de chaque partie, elle est en bijection avec $\mathbb{N}$.
- Continues : La circonférence est considérée comme l'ensemble de ses points ; elle est en bijection avec $\mathbb{R}$.

Schéma d'urne : On considère une urne contenant N boules, indiscernables au toucher, et de k couleurs ($N > k$). Notons $N_1, N_2, \dots, N_k$ le nombre de boules de couleur 1, 2, ... k . Cette urne nous permet de simuler, par tirage, tous les cas finis de Ω , la précaution à prendre est de bien définir le mode de tirage.

- Mode de tirage :

- a) Une à une avec remise. Tirage avec remise (ou non exhaustif).
- b) Tirer n boules simultanément. (Tirage exhaustif).
- c) Tirer une à une sans remise.



On montre que du point de vue probabilité les deux derniers tirages sont identiques.

- Exemples :

a) Le lancer d'une pièce honnête est représenté par un tirage dans une urne à deux couleurs égales.

b) Le lancer d'un dé honnête est représenté par un tirage dans une urne à six couleurs égales.

c) Le lancer d'un dé truqué est représenté par un tirage dans une urne à six couleurs en nombre inégal dans le cas où p est rationnel ; sinon on prend une roulette.

- Simulations des lois de probabilité :

Dans le cas où p est rationnel on peut prendre une urne, sinon on prend une roulette :

a) Bernoulli : un tirage dans deux couleurs, roulette à deux secteurs.

b) Binomiale : n tirages avec remise dans deux couleurs, roulette à deux secteurs.

c) Hypergéométrique : n tirages sans remise dans deux couleurs, roulette à deux secteurs.

d) Poisson : loi limite d'une loi binomiale : on augmente considérablement une couleur (n_b), ou obtient ainsi $np = n_a$ fixe, $p = \frac{n_a}{n}$ ($n = n_a + n_b$) et p tend vers zéro car n_b tend vers l'infini.

e) etc...

- Tirage une à une sans remise égal à tirage de n boules simultanément :

On considère une urne contenant N boules, indiscernables au toucher, et de k couleurs ($N > k$). Notons $N_1, N_2, \dots, N_k$ le nombre de boules de couleur 1, 2, ... k .

Soit $n_1, n_2, n_3, \dots, n_k$ le nombre de boules tirées de couleur respectives 1, 2, 3..., k et notons $n_1 \wedge n_2 \wedge n_3 \wedge \dots \wedge n_k$ l'événement ainsi obtenu ; vérifions que la probabilité de cet événement est la même pour les deux derniers tirages ($n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k = n$).

Dans le cas d'un tirage simultané on a :

$$P(n_1 \wedge n_2 \wedge n_3 \wedge \dots \wedge n_k) = \frac{C_{N_1}^{n_1} C_{N_2}^{n_2} \dots C_{N_k}^{n_k}}{C_N^n}$$

Tirage sans remise d'un n-tuplet de n boules distinctes donc un n-arrangement des N boules donne A_N^n résultats possibles et nous avons $\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$ manières d'ordonner les couleurs au cours du tirage. Pour la couleur 1 et un tirage il existe $A_{N_1}^{n_1}$ manières de tirer n_1 boules parmi les N_1 donc pour un tirage $A_{N_1}^{n_1} A_{N_2}^{n_2} A_{N_3}^{n_3} \dots A_{N_k}^{n_k}$ et donc la probabilité est

$$P(n_1 \wedge n_2 \wedge n_3 \wedge \dots \wedge n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!} * \frac{A_{N_1}^{n_1} A_{N_2}^{n_2} A_{N_3}^{n_3} \dots A_{N_k}^{n_k}}{A_N^n} \text{ ce qui donne le résultat annoncé.}$$

Bibliographie

[1] LEBOEUF Christian ; ROQUE Jean-Louis ; GUEGAND Jean (1987) : Cours de probabilités et de statistiques. Ed. Ellipse Marketing.

[2] SAPORTA Gilbert (1990) : Probabilités analyse de données et statistique. Ed. Technip.

CHAPITRE III

LES "REPRÉSENTATIONS" QUE LES ÉLÈVES ONT DES CONCEPTS UTILISÉS EN PROBABILITÉS

Jacques VERDIER

LES "REPRÉSENTATIONS" QUE LES ÉLÈVES ONT DES CONCEPTS UTILISÉS EN PROBABILITÉS

La notion même de probabilité n'est pas présente chez tous les élèves de première.

J'entends par là que certains ne peuvent même pas s'exprimer par des phrases du type "J'ai une chance sur trois que... [telle chose se produise]).

J'en prends pour exemple les réponses à un test réalisé en première **G avant** d'avoir abordé le chapitre de probabilités :

Question : Que penses-tu de l'affirmation suivante : *"Si je lance simultanément deux pièces de 1 F, j'ai une chance sur trois de voir apparaître une pile et une face"*¹.

Réponses : "oui, cela dépend comment la pièce tombe".
"non, c'est faux : c'est l'effet du hasard".
"oui, si on lance les pièces pour que l'une retombe sur pile et l'autre sur face".
"non, on n'a pas obligatoirement une pile et une face : c'est une question de chance".
"cela se pourrait bien : c'est une question de chance".

On voit tout de suite à quelles difficultés on va se heurter avec ces élèves pour qui les concepts (ou le vocabulaire) des probabilités semblent totalement étrangers.

Mais le fait d'énoncer (en comprenant ce que l'on dit) des phrases du type "J'ai une chance sur trois que...", "... 94 chances sur 100..." (très courant), voire "...5 chances sur 12..." n'est qu'un premier pas. Il y en a un autre à franchir (et c'est un des objectifs de la classe de première) : penser en terme de nombres compris entre 0 et 1 ; la probabilité d'un événement est un nombre (et non pas une "expression" orale ou écrite). Quant à la "nature" de ce nombre, voir plus loin ce même chapitre.

J'avais posé cette question sur le lancer de 2 pièces pour voir combien d'élèves faisaient le raisonnement (implicite) suivant : "Il y a trois issues possibles : "2 piles", "2 faces", "1 de chaque", on a DONC une chance sur trois que cela se produise".

1 - J'ai emprunté à Annie HENRY, avec quelques modifications, le test individuel qu'elle a proposé à ses élèves, publié dans REPERES-IREM n° 6, janvier 1992, p. 38/39, dans un article intitulé : *L'Enseignement des probabilités dans le programme de première*.

Ce raisonnement est proposé par la **très grosse majorité** des élèves. C'est une des premières (et plus tenace !) conception erronée que nous aurons à faire "détruire" par les élèves. Encore faut-il qu'ils prennent conscience eux-mêmes que cette représentation est erronée.

C'est là que l'approche "fréquentiste" du nouveau programme me paraît être pertinente : on réalise l'expérience, c'est-à-dire que l'on jette effectivement les 2 pièces, un très grand nombre de fois (on peut demander aux élèves d'effectuer chez eux au moins 100 lancers chacun, et on se trouve le lendemain avec une statistique de plus de 3700 essais...) ; les données statistiques vont alors permettre aux élèves d'infirmer leur hypothèse " $1/3 - 1/3 - 1/3$ ", et de la remplacer par une autre, plus pertinente, comme " $1/4 - 1/4 - 1/2$ ". C'est à ce moment là, **et à ce moment là seulement**, que l'enseignant pourra apporter une explication (théorique) modélisant la situation.

En réalisant cette expérience (en classe) avec des élèves de B.T.S., je me suis rendu compte que certains faisaient des "échanges" de pièces avec leurs voisins. Questionnés, ils m'ont répondu que "ça ne marcherait pas si les deux pièces n'étaient pas identiques". On voit là un exemple de ce qui peut parasiter une bonne modélisation chez les élèves (et même chez les professeurs) : les deux pièces sont-elles "discernables", et cela va-t-il modifier les probabilités ? Et le résultat serait-il le même si on lançait successivement deux fois la même pièce au lieu d'en lancer deux simultanément ?

Une autre difficulté que rencontrent les élèves est la notion même d'expérience aléatoire, c'est-à-dire dont le résultat est dû uniquement au hasard.

Reprenant une question de Annie HENRY (voir note 1), j'ai posé la question suivante :

Question : Que penses-tu de l'affirmation suivante : *"Il y a une chance sur deux qu'il fasse beau demain ?"*. L'idée était de faire prendre conscience aux élèves, grâce au débat qui allait suivre, de la différence entre un processus aléatoire et un processus déterministe.

Certains élèves ont répondu "c'est faux", avec deux catégories d'arguments :

- on ne sait pas définir correctement ce que veut dire "beau" ; la réponse sera donc "floue" (manque de critères objectifs) ;
- il n'y a pas que deux types de temps ("beau" et "mauvais"), mais par exemple trois ("beau", "moyen" et "mauvais") : on aurait alors une chance sur trois [on retrouve l'erreur fondamentale énoncée plus haut].

Et il y a ceux qui ont répondu "vrai". Alors même qu'on était à un moment de l'année où il faisait un "temps de chien", avec vent, pluie, et une météo qui annonçait que cela allait durer. J'avais obtenu la même réponse l'année précédente, à la veille d'un 1er mai ensoleillé...

Et il a fallu "pousser" les élèves très loin dans leurs derniers retranchements ("Quel temps fera-t-il ce soir ? et dans une heure ?") pour obtenir des réponses du type "On est presque sûr qu'il pleuvra"...

Disons, à la décharge des élèves, que même pour LAPLACE, grand spécialiste des probabilités s'il en est, cela n'était pas si évident :

SEPTIÈME PRINCIPE.

La probabilité d'un événement futur est la somme des produits de la probabilité de chaque cause, tirée de l'événement observé, par la probabilité que, cette cause existant, l'événement futur aura lieu. L'exemple suivant éclaircira ce principe.

Imaginons une urne qui ne renferme que deux boules dont chacune soit ou blanche, ou noire. On extrait une de ces boules, que l'on remet ensuite dans l'urne, pour procéder à un nouveau tirage. Supposons que dans les deux premiers tirages on ait amené des boules blanches ; on demande la probabilité d'amener encore une boule blanche au troisième tirage.

On ne peut faire ici que ces deux hypothèses : ou l'une des boules est blanche, et l'autre noire, ou toutes deux sont blanches. Dans la première hypothèse, la probabilité de l'événement observé est $\frac{1}{2}$; elle est l'unité ou la certitude dans la seconde. Ainsi, en regardant ces hypothèses comme autant de causes, on aura, par le sixième principe, $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$ pour leurs probabilités respectives. Or, si la première hypothèse a lieu, la probabilité

d'extraire une boule blanche au troisième tirage est $\frac{1}{2}$; elle égale l'unité dans la seconde hypothèse ; en multipliant donc ces dernières probabilités, par celles des hypothèses correspondantes, la somme des produits, ou $\frac{1}{4}$, sera la probabilité d'extraire une boule blanche au troisième tirage.

LAPLACE commet là une erreur : en l'absence de toute information, il suppose implicitement que $p(\text{cause 1}) = p(\text{cause 2}) = 1/2$.

En ce qui concerne le "hasard", j'ai posé à mes élèves la question proposée par A. Henry [cf. note 1], en la modifiant légèrement :

boules	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
sorties	132	134	134	132	136	134	140	146	123	122	127	139	119	136	144	154	126
20 tirages	7	1	5	2	5	2	1	4	1	4	3	1	2	4	4	4	3

boules	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
sorties	148	150	146	140	137	133	152	141	144	133	140	129	130	138	132	126
20 tirages	3	3	0	4	2	3	3	2	2	3	1	2	6	3	2	4

boules	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
sorties	150	130	142	152	165	129	154	123	130	134	126	148	131	117	154	150
20 tirages	3	1	4	3	6	4	3	2	1	2	2	4	0	1	3	4

Résultats de 1123 jeux de loto.

Question : Ces informations peuvent-elles t'être utiles pour jouer, et pourquoi ?

Environ la moitié des élèves (sur 3 classes) ont répondu : "Non. C'est du (pur ?) hasard".

Les autres ont répondu "oui". Ces "oui" étaient presque tous assortis de l'argument "je choisirais les numéros qui sortent le plus souvent (ceux qui "ont de la chance" !)".

Même dans un débat en classe, il est très difficile à certains élèves d'admettre que ce qui s'est passé avant n'a absolument aucune incidence sur ce qui va se passer au prochain tirage. Il sera donc difficile de parler d'événements indépendants à ces élèves.

Parmi ceux qui avaient répondu "non", je me suis rendu compte que quelques-uns avaient cependant entouré sur leur feuille les 6 numéros les plus sortis : chassez les fausses représentations, elles reviennent au galop !

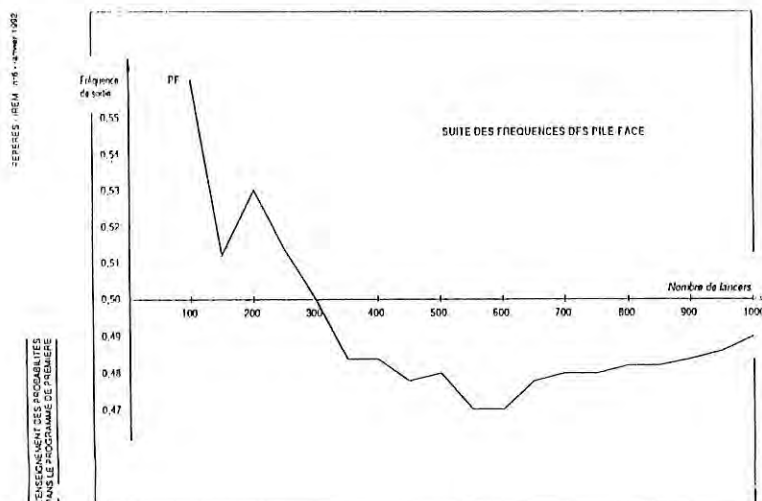
J'ai eu une fois une réaction imprévue d'un de mes élèves de B.T.S. (qui avait "milité" en début d'année pour ce "pur hasard", cette indépendance des tirages) : après avoir travaillé en cours sur la loi des grands nombres, il s'est écrié "Mais ce qu'on avait dit au début de l'année est faux ! il faut jouer les numéros qui sont sortis le moins souvent, car sinon, la loi des grands nombres ne serait pas vraie !".

Un autre exemple de la même erreur se présente lorsque l'on propose aux élèves l'énoncé suivant : "Une femme a déjà eu 4 garçons ; son prochain enfant a-t-il plus de chances d'être une fille ou un garçon ?".

D'ALEMBERT avait fait exactement la même faute² : "Au jeu de pile ou face, après avoir fait face trois fois, face devient moins probable le coup suivant".

Une autre erreur faite très souvent (même par les "spécialistes") est de croire que la convergence de la fréquence d'apparition d'un événement vers sa probabilité est "rapide" et "presque uniforme".

D'abord elle n'est pas rapide du tout. Elle est même d'une lenteur désespérante... Il suffit pour s'en convaincre de réaliser effectivement des tirages aléatoires. Voir par exemple REPERES-IREM n° 6, Janvier 1992, p. 50-51 :



Elle n'est pas non plus "monotone". On peut même dire, au tirage d'une pièce à pile ou face, qu'au coup suivant on aura au moins une chance sur deux de s'éloigner de la limite (qui vaut $1/2$).

Certains élèves peuvent être "perturbés" par des résultats tels que ceux-ci :

Recherche de p ($0,55 \leq X < 0,8$) où X est une variable aléatoire distribuée uniformément sur $[0,1]$: on doit trouver $1/4$.

Simulation avec la touche RAN # de la calculatrice.

Résultat obtenu pour $n = 100\,000$ lancers :

$p_n = 0,24953$;

Résultat obtenu pour $n = 500\,000$ lancers :

$p_n = 0,24940$.

C'est donc "meilleur" avec $100\,000$ qu'avec $500\,000$!!!

(à rapprocher de la réaction de l'élève concernant la loi des grands nombres, citée ci-dessus).

Une autre conception erronée que l'on peut rencontrer parfois : la probabilité doit être un nombre rationnel (c'est-à-dire que l'on peut toujours la traduire en termes de "On a p chances sur q "). Cela est aussi renforcé par la conception que les élèves ont des nombres (il n'est de nombres que les entiers **naturels** - comme leur nom l'indique bien !).

J'en prendrai pour exemple cette situation proposée dans le manuel TERRACHER (Hachette), édition 1991, classe de première S :

VERS LA NOTION DE PROBABILITÉ

La statistique permet une première approche de la notion de probabilité, connue sous le nom de *Principe des fréquences*, que nous explorons dans l'activité 2.

ACTIVITÉ

2

1° L'expérience aléatoire

Elle est réalisée avec une punaise (figure ci-contre) que l'on jette en l'air et dont on observe la position lorsqu'elle s'est immobilisée sur le sol. Cette expérience a deux *issues*, schématisées et codées comme indiqué ci-dessous.



issue 1

issue 0

2° Les données statistiques

En lançant la punaise 200 fois, on obtient la série statistique suivante :

10001 11101 11101 11111 11100 01110
10101 01000 01001 11111 01110 01001
10111 10011 11101 10010 01010 01111
11010 10010 10001 10011 00101 11100
01101 10111 01110 01101 11010 11000
11001 10100 11110 11111 11101 11000
10100 11111 11101 11111

3° La gestion des données statistiques

Compléter le tableau suivant :

nombre de chiffres	5	10	15	20	25	30	...	180	200
fréquence relative du chiffre 1	0,4								

Après 40, on utilisera les données de 20 en 20 : 60, 80, 100, ..., 180, 200.

Effectuer une représentation graphique de ces résultats.

4° L'interprétation

Vers quelle valeur la fréquence relative du chiffre 1 tend-elle à se stabiliser... à la longue ? (On essaiera de donner une réponse sous forme fractionnaire.)

La valeur précise autour de laquelle la fréquence relative du chiffre 1 tend à se concentrer quand on répète l'expérience un grand nombre de fois sera appelée probabilité de l'issue 1.

En donnant à cette probabilité la valeur $\frac{5}{8}$ — c'est raisonnable — nous obtenons le tableau ci-contre, qui appelle quelques commentaires :

issue ω	1	0
probabilité $P(\omega)$	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{8}$

■ *sur la notation* : elle est naturelle ; la probabilité de l'issue ω est notée $P(\omega)$.

■ *sur les valeurs* : comme il n'y a que deux résultats possibles : issue 1 ou issue 0, si l'issue 1 a 5 chances sur 8 de se produire, l'autre issue a donc 3 chances sur 8 de se réaliser ($\frac{5}{8} + \frac{3}{8} = \frac{8}{8} = 1$).

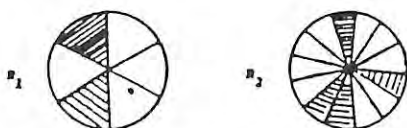
Il n'y a bien sûr aucune raison que la probabilité soit rationnelle (voir en annexe le problème de l'aiguille de Buffon, où la probabilité trouvée est $2/\pi$). Mais nous sommes "conditionnés" par les exemples issus du domaine fini (urnes, loteries, etc.) : c'est dû aussi au fait que le programme ne nous demande de traiter, en probabilité, que le cas des espaces finis. Et il est vrai que la fréquence observée est, elle, toujours rationnelle.

Un dernier point que je voudrais aborder est celui de l'influence de "l'habillage" proposé sur les démarches des élèves.

Sylvette MAURY³ a fait une étude des arguments avancés par des élèves de seconde pour répondre à des questions de ce type :

Exercice 6 : roulettes, vocabulaire courant

Matériel :



Expérience : On choisit la roulette que l'on veut, puis on fait tourner cette roulette et on note la couleur indiquée par l'aiguille.

Question : Quelle roulette choisiriez-vous pour avoir le plus de chances que l'aiguille indique la couleur rouge ?

Exercice 6 : boules, vocabulaire courant

Matériel :



Expérience : On choisit le sac que l'on veut, puis on tire au hasard une boule de ce sac.

Question : Quel sac choisiriez-vous pour avoir le plus de chances de tirer une boule rouge ?

Ses conclusions sont les suivantes :

En ce qui concerne **les roulettes**, 31% des élèves répondent correctement (résultat correct et arguments pertinents), 56% répondent faux, et les autres associent dans leurs réponses des arguments pertinents à des arguments non pertinents. Parmi les réponses correctes, 68 % des élèves utilisent un argument du type "cas favorables/cas possibles", 17% un argument s'appuyant sur les aires des secteurs, et 11% un argument du type "cas favorables/cas défavorables".

3 - Sylvette MAURY, de l'Université des Sciences et Techniques du Languedoc, La quantification des probabilités : analyse des arguments utilisés par les élèves de la classe de seconde, Recherches en Didactiques Mathématiques, Volume 5, n° 2, p. 187-214, 1984.

En ce qui concerne les réponses fausses : 64% des élèves à qui on proposait ces roulettes utilisaient un argument s'appuyant sur la "répartition" des secteurs dans le disque (ils sont "dispersés", "accolés"...)

En ce qui concerne **les boules** dans les sacs, 41% des élèves répondent correctement, 48% faux, et les 11% restant correspondent aux réponses "mixtes".

55% de ceux qui répondent correctement utilisent un argument du type "cas favorables/cas défavorables", 16% un argument du type "cas favorables/cas possibles" et 29% des arguments, pas toujours très explicites, faisant intervenir le nombre de boules et la proportionnalité.

Parmi ceux qui ont répondu faux, 43% utilisent un argument du type "différence entre le nombre de boules de chaque couleur" et 33% un argument du type "nombre de cas favorables uniquement".

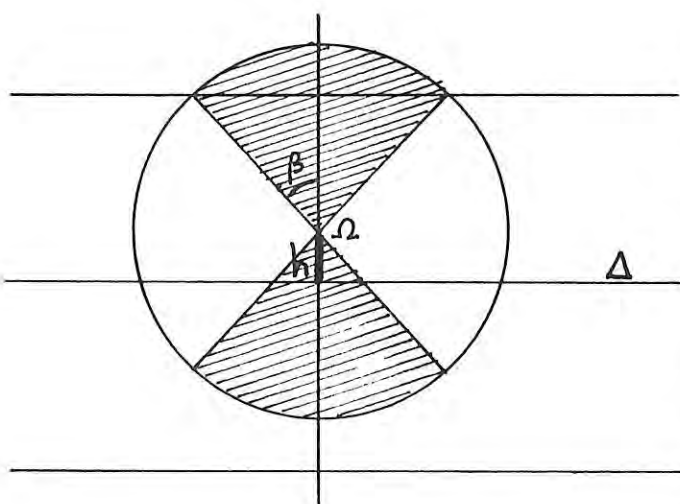
On constate au vu de ces données que d'une part le concept de probabilité (et de proportionnalité) n'est pas acquis à l'entrée en seconde, et que d'autre part "l'habillage" de la situation (roulettes ou urnes) modifie énormément les stratégies des élèves (qu'elles soient pertinentes ou non).

En conclusion, l'introduction des concepts de probabilité proposés par le programme de première ne sera pas si aisée que l'on pourrait le croire a priori.

Il faudra faire preuve d'une grande ingéniosité pour proposer à nos élèves des situations qui leur permettront de "démonter" leurs conceptions erronées, et de construire à la place un nouveau modèle rendant compte correctement des phénomènes observés. Et on s'aperçoit au vu de quelques énoncés, que l'on est quelquefois en train de "marcher sur des oeufs" ! (cf par exemple le problème de la longueur de la corde dans le chapitre II, ou celui du jeu télévisé "la chèvre" dans le chapitre VII, fiche Probabilités conditionnelles n° 2).

Annexe : Problème de l'aiguille de Buffon

Le sol d'une salle est recouvert d'un parquet, dont les lames ont une certaine largeur l . On laisse tomber sur ce parquet une aiguille de longueur L . Quelle est la probabilité que l'aiguille rencontre un joint entre deux lames ?



Prenons comme unité de longueur la moitié de la largeur d'une lame de parquet (et donc la moitié de la longueur de l'aiguille). Appelons Ω le milieu de l'aiguille. On considère la lame sur laquelle se trouve Ω . Soit Δ la ligne médiane de cette lame, et d la distance de Ω à Δ (donc d varie entre 0 et 1). Considérons un réel h compris entre 0 et 1. Soit H l'événement " $h \leq d < h+dh$ ", et R l'événement "l'aiguille rencontre un joint". Sur le dessin ci-contre, le disque représente la zone que peut couvrir l'aiguille, lorsque $d=h$ (fixé). Ce dessin montre que l'on a :

$$p(R|H) = \frac{4\beta}{2\pi} \text{ (aire grisée/aire totale du disque), soit } p(R|H) = \frac{2\beta}{\pi}, \text{ avec } \cos\beta = 1-h, \text{ ou}$$

$$\text{enfin } p(R|H) = \frac{2}{\pi} \text{Arccos}(1-h).$$

D'autre part, on a $p(H) = \frac{dh}{1}$ (largeur de la bande $[h ; h+dh]$ /largeur de la lame). D'où

$$p(R \cap H) = p(R|H) \cdot p(H) = \frac{2}{\pi} \text{Arccos}(1-h) dh. \text{ On en déduit } p(R) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \text{Arccos}(1-h) dh$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^1 \text{Arccos}x dx \text{ (changement de variable), et } p(R) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos t dt \text{ (symétrie par rapport à la première bissectrice).}$$

$$\text{Finalement, on a donc } p(R) = \frac{2}{\pi}.$$

N.B.- Ce résultat montre donc qu'une probabilité peut ne pas être un rationnel. D'autre part, on peut simuler l'expérience sur ordinateur, ce qui conduit à des approximations (rationnelles) de π .

CHAPITRE IV

CALCULATRICES ET INFORMATIQUE

Jacques VERDIER

CALCULATRICES ET INFORMATIQUE

Les programmes prévoient, dans leurs objectifs, l'utilisation des calculatrices :

"L'usage des calculatrices tend à modifier certaines pratiques enseignantes. Il constitue en effet un bon point de départ pour la mise en oeuvre d'une démarche algorithmique, pour émettre des conjectures ou pour vérifier certains résultats. En ce sens, on encouragera et on développera l'utilisation des calculatrices (Programme de 1ère L, 1993)".

ou encore :

"L'emploi des calculatrices en mathématiques a pour objectif de contrôler des résultats, d'alimenter le travail de recherche et de favoriser une bonne approche de l'algorithmique (Programme de 1ère S.T.T., 1993)".

Le chapitre "PROBABILITÉS" est une bonne occasion de permettre aux élèves d'atteindre ces objectifs.

La fonction "RANDOM"

La fonction fondamentale des calculatrices de poche permettant de travailler sur le domaine des probabilités est la fonction "RANDOM" (abrégiée Rand, Ran#, Rn#, etc. suivant les modèles). Cette fonction simule une variable aléatoire continue distribuée uniformément sur $[0 ; 1[$. En réalité, ça n'est pas tout à fait ça : d'une part la variable n'est pas aléatoire, mais seulement "pseudo-aléatoire" (en ce sens qu'elle est générée par un algorithme immuable implanté en mémoire morte), d'autre part la distribution n'est pas continue sur $[0 ; 1[$, puisque la machine ne connaît pas $\mathbb{R}$, mais seulement quelques (!) décimaux.

Prenons par exemple une calculatrice CASIO. Suivant les modèles, la fonction **Ran#** est accessible directement au clavier (ex : 7000G, 6800G...) ou à l'aide d'un menu arborescent (ex : 7800G = menu MATH, sous-menu PRB, fonction Rn#). Cette fonction rend un nombre de 3 décimales de la liste $L = \{0,000 ; 0,001 ; 0,002.... 0,998 ; 0,999\}$. C'est très simple à comprendre ; il y a 1000 valeurs potentielles et chacune à 1 chance sur 1000 d'apparaître quand on exécute la fonction ; les appuis successifs sur la touche sont "pseudo-indépendants"... L'espérance mathématique de cette variable est $\mu = 0,4995$ (et non pas $1/2$, puisqu'il y a 1000 valeurs de 0,000 à 0,999, mais cela n'affecte pas les résultats de manière "visible").

Si nous prenons maintenant une calculatrice TEXAS (comme la T.I. 82), la fonction Rand est accessible grâce à un menu arborescent (menu MATH, sous-menu PRB). La machine rend un nombre de 14 chiffres significatifs, dont elle n'affiche que les 10 premiers (par ex. : 0,6220232897). Cela permet de travailler avec 10^{14} valeurs (chacune ayant la probabilité 10^{-14} d'apparaître), ce qui constitue déjà une excellente approximation de la loi uniforme sur $[0 ; 1[$.

Il en est de même avec la T.I. 85, qui travaille aussi avec 14 chiffres mais en affiche 12 ; mais, le constructeur ne voulant pas donner trop de précisions sur l'algorithme utilisé, nous ne savons pas si la T.I.85 travaille sur $[0 ; 1[$ ou sur $[0 ; 1]$, c'est-à-dire si elle peut fournir 10^{14} ou $10^{14}+1$ nombres différents !

Simulation de PILE ou FACE :

Si on était en présence d'une variable aléatoire X continue distribuée uniformément sur $[0 ; 1[$ ou sur $[0 ; 1]$, on pourrait dire que l'on a PILE lorsque $(X < 1/2)$ ou bien $(X \leq 1/2)$, et FACE pour l'événement contraire.

En effet, $p(X < 1/2) = p(X \leq 1/2) = 1/2$.

En présence d'une variable discrète, il faut y regarder d'un peu plus près (et notamment sur les CASIO qui ne travaillent qu'avec 1000 valeurs possibles) :

On pourra prendre : si $X \in [0,000 ; 0,499]$ alors PILE
si $X \in [0,500 ; 0,999]$ alors FACE
(ou le contraire !).

La première activité de l'élève avec sa machine consistera à faire apparaître le nombre aléatoire à l'écran, et à "traduire" PILE si le nombre lu est inférieur à $1/2$, FACE dans le cas contraire. C'est ce qui est FONDAMENTAL.

Les élèves qui le veulent pourront aller plus loin et "ornementer" l'affichage des résultats, par exemple avec l'instruction suivante :

Si Random < 1/2 alors afficher "PILE" sinon afficher "FACE" (à traduire dans le langage de la machine).

Simulation d'un dé à six faces :

On pourrait, mais c'est fastidieux, comparer la valeur donnée par la fonction Random à chacun des intervalles $[0 ; 1/6[$, $[1/6 ; 1/3[$, ... $[5/6 ; 1[$ et "traduire" le résultat en termes de valeurs du dé : 1, 2... 6.

Mais autant utiliser plus simplement la machine :

si X est une variable aléatoire distribuée uniformément sur $[0 ; 1[$,

alors $6X$ est une variable aléatoire distribuée uniformément sur $[0 ; 6[$,

et $6X+1$ est une variable aléatoire distribuée uniformément sur $[1 ; 7[$.

La variable aléatoire **Ent** ($6X+1$) est donc une variable discrète, qui peut prendre les six valeurs {1, 2, 3, 4, 5, 6,} chacune avec la probabilité $1/6$: c'est la loi de probabilité du dé à six faces. On est donc "en présence d'un dé" !

La fonction de la calculatrice qui simule ce dé est donc :

$$\text{Int} (6 \text{ Rand} + 1)$$

Quand on aura rentré cette instruction sur la calculatrice, les frappes successives de EXE simuleront les lancers d'un dé.

(N.B.- La fonction partie entière, Int, se trouve dans le menu MATH, sous-menu NUM, aussi bien sur la CASIO que sur la TEXAS).

Aller plus loin ?

Avec ces quelques simples notions, on peut simuler à peu près tout ce qu'on veut en probabilités, notamment le tirage d'un nombre au hasard dans une liste {1, 2, 3, ... N} : il suffit en effet, dans l'exemple précédent, de remplacer 6 par N.

Mais, à titre d'exemple, je vais donner un programme un peu plus sophistiqué, nécessitant une instruction conditionnelle, et une boucle avec test d'arrêt (cela n'est exigible au baccalauréat que dans les sections scientifiques).

Le problème est le suivant : sur N lancers (N donné) d'une pièce, compter le nombre P de "PILE" qui sont apparus.

Premier algorithme :

Lire N
 $0 \rightarrow P$ (nombre initial de PILE = 0)
Faire jusqu'à ce que $N = 0$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{Si nb aléatoire} < 1/2 \\ \text{alors ajouter 1 à P ;} \\ \text{Décrémenter N} \end{array} \right.$
Afficher P.

Second algorithme (traduction plus "proche" du langage des calculatrices actuelles) :

Lire N
 $0 \rightarrow P$
(■)
Si Random < 0.5 alors $P+1 \rightarrow P$
Décrémenter N
Si $N \neq 0$, alors boucler à (■)
Afficher P

Traduction en PASCAL :

```
Program PILE ;  
var n, p : integer ;  
begin  
    randomize ;    {"relance" du générateur aléatoire}  
    readln (n) ;  
    p := 0 ;  
    repeat  
        if (random < 0.5) then p := p+1 ;  
        n := n - 1  
    until n = 0 ;  
    writeln (p)  
end.
```

Voici ce que cela donne sur une CASIO fx7700 G :

	<i>Commentaires</i>
?→N	
0→P	
Lb11	
Rn#<0.5 ⇒ P+1→P	Si la condition est vraie, ce qui suit ⇒ est exécuté
DszN	La fonction DszN décrémente la mémoire N, et exécute la
Gtol	ligne suivante (Gtol) tant que N diffère de 0. Dès que N=0,
P	elle "saute" à la ligne d'après, qui fait afficher P.

Et voilà ce que cela donne sur une TEXAS T.I. 82 :

	<i>Commentaires</i>
Input N	
0→P	
For (I, 1, N)	Début de la boucle "faire N fois"
If Rand <0.5	Si la condition est vraie, la ligne suivante est exécutée
P+1→P	
End	Fin de la boucle
Disp P	Disp = "display" (montrer, afficher)

Il est évident que ce qui importe, c'est l'algorithme. La traduction en programme dépendra du modèle de machine utilisé (et nécessite d'en posséder le mode d'emploi !)¹.

On peut, bien sûr, et les élèves qui utilisent souvent leur calculatrice savent très bien le faire, ajouter des "fioritures" à l'affichage, par exemple : LE NOMBRE DE PILES SUR 100 LANCERS EST 54.

Attention :

Lorsque l'on veut simuler la **somme** de deux dés (appelons-la S), l'instruction à exécuter est :

$$\text{Int}(6 \text{ Rand} + 1) + \text{Int}(6 \text{ Rand} + 1) \rightarrow S$$

Certains élèves ont tendance à faire :

$$2 \text{ Int}(6 \text{ Rand} + 1) \rightarrow S$$

¹ - On trouvera d'autres exemples dans T.I.82, Mathématiques au Lycée, de Daniel Vagost et Jacques Verdier, Ed. Dunod-Tech, 1993.

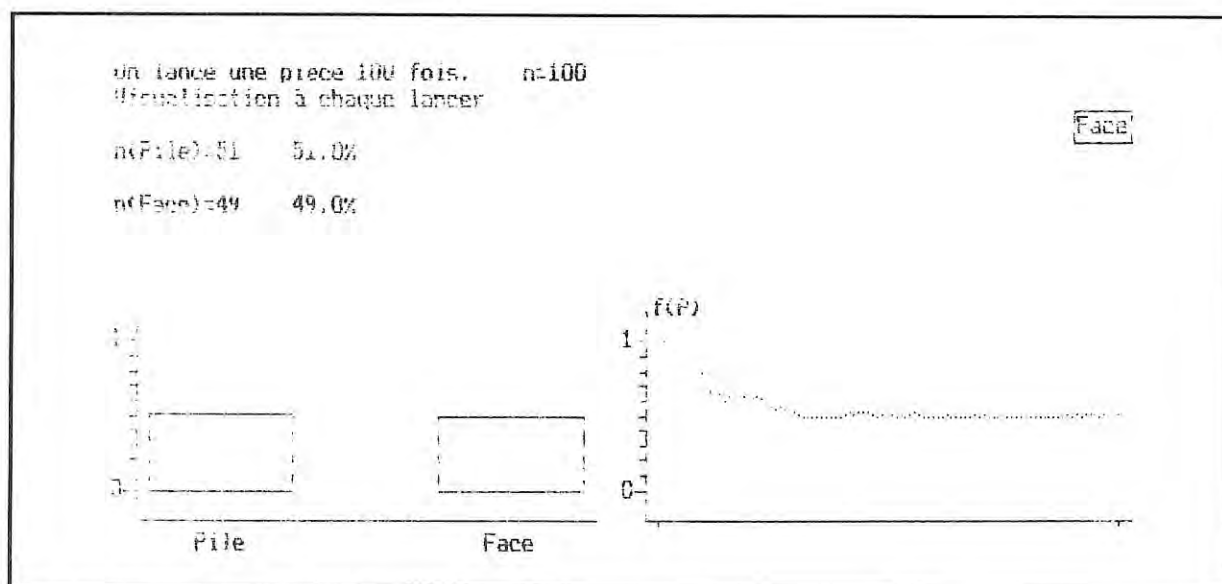
ne se rendant pas compte qu'ils simulent ainsi le double d'un dé.

On retrouve la même ambiguïté pour la notation des variables aléatoires : $X + X$ n'est pas $2X$...

Quelques logiciels informatiques :

Il existe quelques logiciels qui permettent d'utiliser l'ordinateur comme "tableau" devant la classe (avant sortie soit sur télé grand écran, soit sur tablette rétroprojetable), pour **montrer** quelques simulations aux élèves.

En particulier, "**PROBABIL**" (créé par F. Munier, IREM de Lorraine)² permet de visualiser quelques phénomènes de convergence. Par exemple, pour le lancer d'un dé, l'écran affiche simultanément (en temps réel, au fur et à mesure que l'expérience aléatoire se déroule) : la fréquence d'apparition de chacune des six faces (en %), l'histogramme correspondant à ces fréquences, et un diagramme cartésien représentant la fréquence d'apparition d'une des faces, choisie par l'utilisateur, en fonction du nombre de lancers.



Les élèves voient très bien le graphique évoluer et se stabiliser, quand N devient grand, vers l'asymptote $y = 1/6$.

Ce même logiciel permet de simuler le lancer d'une pièce, la somme de deux dés, et la descente d'une bille sur une planche de Galton.

² - Ce logiciel se trouve dans la disquette IMAGIS, qui est désormais éditée. Se renseigner à l'IREM de Lorraine.

Les **imagiciels du CNAM-CREEM**, diffusés par le Ministère de l'Education Nationale dans tous les lycées au début de 1993 permettent également quelques visualisations. Nous y avons retenu en particulier :

- les simulations de lancers de dés et de pièces :

- somme de deux ou de trois dés
- différence de deux dés
- maximum de 2 ou 3 dés
- lancer de 1, 2, 3, 4 ou 5 pièces avec affichage des issues possibles en nombre de PILE et FACE,

- la méthode de Monte-Carlo pour le calcul d'une aire :

Par exemple, pour calculer l'aire sise à l'intérieur du carré unité et sous la parabole $y = x^2$, on prend un point au hasard dans ce carré (c'est-à-dire qu'on tire 2 nombres aléatoires sur $[0 ; 1]$ qui seront ses coordonnées). On répète cette expérience un grand nombre de fois, et on compte la proportion de points qui seront au-dessous de la courbe ; la limite de cette fréquence est l'intégrale de la fonction sur $[0 ; 1]$.

Le logiciel permet de choisir la fonction et le "cadre" dans lequel on choisit les points.

Le gros inconvénient de ces logiciels du CNAM est leur manque de convivialité (le professeur devra avoir bien préparé à l'avance ce qu'il veut faire, pour ne pas se perdre dans les menus et les options), ce qui n'est pas le cas du logiciel développé par l'IREM de Lorraine.

CHAPITRE V

ACTIVITÉS ET EXERCICES EN CLASSE DE PREMIÈRE

*Laure DUMOULIN
Martine FERRY*

Les énoncés destinés aux élèves sont sur les pages de droite, les commentaires destinés aux enseignants sur les pages de gauche.

COMMENTAIRES

- * Occasion d'introduire la probabilité comme limite de la fréquence.
- * Énoncé :
 - Obtenir un total de "1" ou de "7" ne peut se faire que d'une façon (soit 1 dé, soit 2 dés).
 - Obtenir un total de "5" va amener une discussion et pour en savoir plus, en fera l'expérience.
 - Obtenir un total de "6" peut donner lieu à une seconde interprétation de l'expérience, axée sur le 6, ou bien à un travail individuel de l'élève par simulation à la calculatrice.
- * Expérience : elle donne une fréquence et pas encore une probabilité. On obtient alors
$$p(5) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f_n(5)}{n}$$
où n est le nombre de lancers et $f_n(5)$ la fréquence d'apparition du total "5". Les lancers sont à faire à la maison.
- * Autres expériences possibles : (en vrai ou en simulé)
 - lancer de 2 pièces et fréquence d'apparition de "un pile et un face" (occasion de remettre en place une des questions du test préliminaire).
 - lancer d'une punaise et fréquence de "la punaise tombe sur le dos". Cette expérience ne peut pas être simulée à la calculatrice et la probabilité est donc imprévisible. Cette expérience peut aussi avoir sa place après la partie "modélisation" pour montrer que certaines situations ne se résolvent que par les statistiques.
- * Fil rouge :
 - La 1ère fois, le professeur apporte un sac contenant 7 billes : des rouges et des bleues. On tire avec remise 7 billes. Peut-on en déduire la proportion de billes de chaque couleur dans le sac ?
On regarde
 - Les fois suivantes, avec une autre composition du sac, on fait dix tirages à chaque séance et on note les couleurs obtenues. Entre chaque cours, les élèves réfléchissent. A eux de voir au bout de combien de tirages ils peuvent formuler une hypothèse quant à la composition du sac.

EXPÉRIENCE ALÉATOIRE

Un, deux, trois dés

- * Énoncé : Dans un jeu de société, tu dois faire un total de "n" pour commencer à jouer. Tu peux lancer au choix un ou deux dés.

Que choisirais-tu s'il faut obtenir

- un total de "1" ?
- un total de "5" ?
- un total de "6" ?
- un total de "7" ?

- * Expérience :

1) Lance cent fois un dé à 6 faces parfaitement équilibré, et note dans le tableau les résultats obtenus :

Le 5 est apparu fois

Bilan de la classe :

Nombre de lancers	200	400	600	800	1000	1500	2000	2500	3000	3500	
Le 5 est apparu											
Fréquence											

2) Lance cent fois deux dés à 6 faces parfaitement équilibrés, et note dans le tableau les totaux obtenus.

Bilan de l'élève :

Total apparu	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Effectif											
Fréquence											

Bilan de la classe :

Nombre de lancers	200	400	600	800	1000	1500	2000	2500	3000	3500	
Le total 5 est apparu											
Fréquence											

COMMENTAIRES

Les arbres dans la forêt

* occasion d'introduire le vocabulaire ensembliste et probabiliste.

- * a - On peut :
- mettre des papiers numérotés dans un chapeau
 - tourner une roue avec 1000 secteurs identiques
 - simuler à la calculatrice : $\text{int}(1000 \text{ RAN} \# + 1)$

(de 1 à 200 on a les hêtres, de 201 à 230 les chênes...)

c - Événement impossible - Événement certain -

d - Événements contraires

Dans un club et sondage

* introduction des notations $A \cup B$, $A \cap B$, $\bar{A}$

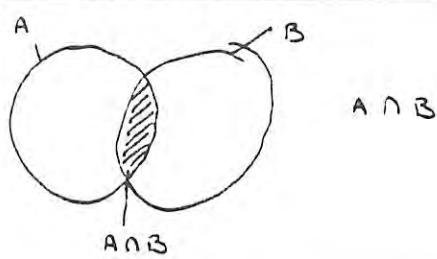
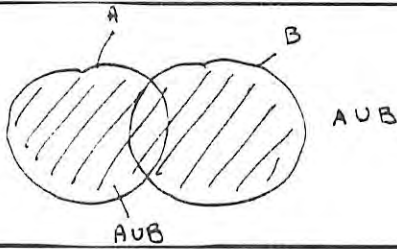
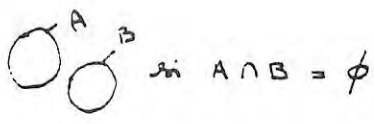
* formules

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

$$p(\bar{A}) = 1 - p(A)$$

$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$ si A et B sont des événements incompatibles.

Le "cours" pourrait commencer ainsi :

Notation ensembliste	Événement	Probabilité
	Les événements A et B ont lieu en même temps	
	L'événement A ou l'événement B (ou les 2) a lieu	$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
	Les événements A et B sont incompatibles	$p(A \cap B) = 0$ $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

ENSEMBLES. ÉVÉNEMENTS. PROBABILITÉS

Les arbres dans la forêt

Une forêt contient 1000 arbres de 6 essences différentes qu'on a dénombrées.

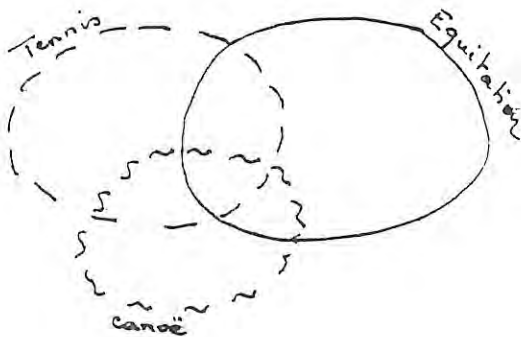
On trouve 200 hêtres, 30 chênes, 10 bouleaux, 50 sapins, 700 épicéas et 10 frênes. On désire tirer "au hasard" un des 1000 arbres.

- Comment procéder pour tirer "au hasard" un arbre ?
- Quelle est la probabilité de l'événement "tirer un hêtre" ou plus simplement probabilité de "hêtre", puis probabilité de "frêne", puis etc ?
- Quelle est la probabilité de l'événement "pin", de l'événement "arbre" ?
- Quelle est la probabilité de l'événement "conifère", de l'événement "tirer un arbre qui n'est pas un conifère" ?

Dans un club

Trois activités sont proposées : tennis, équitation, canoë. Toutes les personnes du club pratiquent au moins un sport.

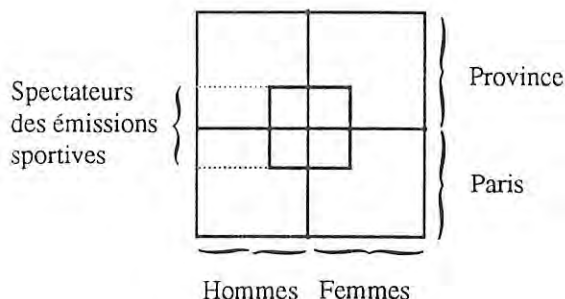
18 personnes pratiquent les trois sports, 25 pratiquent l'équitation et le canoë, 53 pratiquent le tennis et le canoë, 70 pratiquent le canoë, 78 pratiquent le tennis, 35 pratiquent l'équitation dont 23 également le tennis.



- Compléter le diagramme. Combien ce club compte-t-il de personnes ?
- On rencontre une personne du club au hasard.
 - Quelles sont les probabilités des événements suivants :
 - A : "pratique uniquement le tennis"
 - B : "pratique le tennis et le canoë"
 - C : "pratique le tennis, le canoë mais pas l'équitation"
 - D : "pratique l'équitation uniquement"
 - E : "pratique le tennis ou le canoë"
 - Exprimer sans utiliser le mot équitation, l'événement contraire à l'événement D. Quelle est sa probabilité ?

Sondage

Afin de déterminer l'indice d'écoute de certaines émissions télévisées, une population de 500 couples a été interrogée. Des résultats de ce sondage, on extrait les renseignements suivants : 150 de ces couples habitent Paris, 250 hommes et 50 femmes habitant la Province regardent régulièrement les émissions sportives à la télé, 100 hommes et 30 femmes habitant Paris regardent régulièrement les émissions sportives à la télé.



- Compléter le tableau à l'aide des effectifs.
 - On tire au hasard une personne parmi ces 500 couples. Indiquer la probabilité de chacun des événements suivants :
 - H : "tirer un homme" ;
 - P : "tirer un provincial"
 - S : "tirer un spectateur assidu des émissions sportives", H ; $\bar{P}$; $\bar{S}$
- Quelle est la probabilité de $H \cap P \cap S$?
Quel est cet événement ?

COMMENTAIRES

I - L'expérience 1 a montré que $p(N) \simeq \frac{1}{6}$ et comme le dé est symétrique on admet que chaque face

"a autant de chance" de sortir, chaque face est équiprobable.

Si A est un événement composé d'événements élémentaires équiprobables alors

$$p(A) = \frac{\text{nb d'événements élé composants A}}{\text{nb total d'événements élé}} \quad (= \frac{\text{nb de cas favorables}}{\text{nb de cas possibles}})$$

A la suite de cet exercice, on peut revenir sur la sortie d'un total de "5" ou de "6" avec 2 dés : il n'y a pas équiprobabilité. Il faut modéliser le phénomène aléatoire afin d'obtenir la "vraie" probabilité. Dans ce cas, on cherche les événements élémentaires équiprobables $\Rightarrow$ tableau, arbre.

II - a - Il y a 3 éventualités mais $p(PP) \neq \frac{1}{3}$ car il n'y a pas équiprobabilité.

b - Construction de l'arbre facilitée car les pièces sont différenciables.

c - Le fait que les pièces soient ou non identiques ne change pas les probabilités.

ÉQUIPROBABILITÉ - MODÉLISATION

I - On lance un dé à 6 faces parfaitement équilibré et on observe le nombre N inscrit sur la face supérieure.

a - A l'aide des événements élémentaires, décrire les événements suivants et calculer leur probabilité : $(N > 4)$ $(N \text{ est pair})$ $(N^2 > 40)$ $(\sqrt{N} > 2)$

b - Même question avec les événements suivants :

$A = (N^2 < 20) \text{ et } (N > 2)$; $B = (N^3 < 30) \text{ ou } (N > 2)$; $C = (N^2 > 10) \text{ ou } (N < 3)$.

II - Lancer de 2 pièces

a - On simule à la calculatrice le lancer de 2 pièces, et on calcule la fréquence d'apparition de l'événement noté PP : "on voit pile sur les deux pièces".

Faire un nombre important de lancers et en déduire la probabilité de cet événement.

b - On lance une pièce de 1 F. et une pièce de 2 F. Calculer la probabilité de l'événement PP et de l'événement A : "sur une pièce on voit pile et sur l'autre on voit face".

c - Calculer les mêmes probabilités quand on lance deux pièces de 1 F.

III - A la demande du professeur, chaque élève chez lui lance 10 fois une pièce parfaitement équilibrée et note à chaque lancer la figure (pile ou face) qu'il voit ...

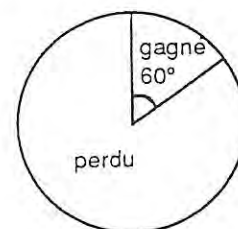
Un élève a trouvé P F P F P F P F P F. Puis-je affirmer sans me tromper qu'il a triché ?

Même question si l'élève lance 100 fois la pièce et obtient 95 piles et 5 faces.

IV - Une roue de loterie simplifiée a la forme ci-contre.

a - Quel est l'ensemble des événements élémentaires ?

b - Quelle est la probabilité de gagner ?



V - On considère les familles de 4 enfants. On en choisit une au hasard.

a - Quelle est la probabilité pour que la famille comporte 2 filles et 2 garçons ?

b - Quelle est la probabilité d'avoir au moins une fille ?

c - Quelle est la probabilité pour que l'aîné soit un garçon ?

d - Quelle est la probabilité pour que l'avant dernier soit une fille ?

VI - Une urne contient 3 boules rouges, 2 noires, 1 blanche, identiques sauf pour la couleur.

1er cas : on tire une boule et sans la remettre dans l'urne, on en tire une seconde. C'est un tirage sans remise.

2ème cas : on tire une boule, on note sa couleur, on la remet dans l'urne et on tire une seconde boule. C'est un tirage avec remise.

Pour les deux cas, répondre aux questions suivantes :

a - Quelle est la probabilité d'avoir 2 boules de la même couleur ?

b - Quelle est la probabilité de tirer la boule blanche ?

c - Quelle est la probabilité de tirer une boule rouge et une noire ?

VII - Tu lances trois pièces : une de 50 centimes, une de 20 centimes, et une de 10 centimes. Si deux des pièces exactement tombent côté pile, je te donne 1 F. sinon, je ramasse les trois pièces.

Peux-tu accepter ce pari sans risque de perdre ? As-tu de "bonnes chances" de gagner ?

Et si les trois pièces sont des pièces de 20 centimes ?

CHAPITRE VI

ENSEIGNER LES PROBABILITÉS EN TERMINALE

Bernard PARZYSZ

ENSEIGNER LES PROBABILITÉS EN TERMINALE

Dans l'actuel programme de probabilités des Terminales scientifiques figurent, par rapport à la classe de Première, deux notions nouvelles : celles de *probabilité conditionnelle* et d'*indépendance* (stochastique) de deux événements (ces deux notions figuraient déjà dans les programmes de 1986, mais uniquement en section D). Or, lorsque l'on a à enseigner un nouveau concept, la question essentielle qui se pose est celle du *sens* que les élèves vont pouvoir lui donner, au travers des activités et de l'institutionnalisation qui sera faite, et c'est ce problème que je voudrais évoquer ici. D'autre part, on trouve également en Terminale de la combinatoire, que l'on utilisera, dit le programme, "pour l'étude de quelques exemples simples, issus notamment du calcul des probabilités"¹.

Etant donné la nouvelle orientation des programmes, la place et le rôle à lui attribuer dans le cadre de l'enseignement des probabilités doivent également être réajustés.

1 - Probabilité conditionnelle :

Cette notion peut être considérée sous deux points de vue complémentaires.

En effet : soit un espace probabilisé (Ω, T, p) , et un élément A de la tribu T , tel que $p(A) \neq 0$.

Premier point de vue :

On définit sur T l'application p_A par $p_A(X) = \frac{p(X \cap A)}{p(A)}$

On vérifie que p_A est bien une probabilité, et donc (Ω, T, p_A) est un espace probabilisé.

p_A apparaît donc ainsi, par rapport à p , comme *une nouvelle probabilité sur le même espace probabilisable* (Ω, T) .

Second point de vue :

Pour tout élément X de T , on définit $X' = X \cap A$ (trace de X selon A).

Ceci permet de définir $T' = \{X' / X \in T\}$. On vérifie que T' est bien une tribu sur A .

D'autre part, on définit sur T' l'application $g : X' \rightarrow g(X') = \frac{p(X')}{p(A)} (= p_A(X))$

On vérifie que g est bien une probabilité, et donc (A, T', g) est un espace probabilisé.

¹ - BOEN spécial n° 2 du 2 mai 1991, p. 50.

g apparaît ainsi, par rapport à p, comme une *probabilité sur le nouvel espace probabilisable* (A, T') .

Exemple :

Lors d'un tour de cartes dans un music-hall, un spectateur X a tiré une carte d'un jeu de 32, sans la montrer au public. Il s'agit, pour les autres spectateurs, de deviner la carte tirée.

- 1 - Un spectateur Y répond au hasard. Quelle est la probabilité qu'il devine juste ?
- 2 - Un spectateur Z, placé non loin de X et très attentif, a pu voir que X avait tiré une figure rouge (valet, dame ou roi). Quelle est la probabilité qu'il devine juste ?

L'univers Ω est ici l'ensemble des 32 cartes, la tribu T est $\mathcal{P}(\Omega)$, et on suppose l'équiprobabilité sur T .

Soit A l'événement : "X a tiré une figure rouge" ; on a $p(A) = 6/32$.

Soit B l'événement : "Y devine juste" ; on a $p(B) = 1/32$.

Soit C l'événement : "Z devine juste". Cherchons à déterminer $p(C)$:

Premier point de vue :

Le fait pour Z d'avoir une information partielle augmente sa probabilité de répondre juste, par rapport à B (on reste dans le même espace, mais la probabilité change). Plus précisément, cette probabilité est multipliée par $1/p(A)$, c'est-à-dire par $32/6$. Et on obtient $p(C) = p(B) \times 32/6 = 1/6$.

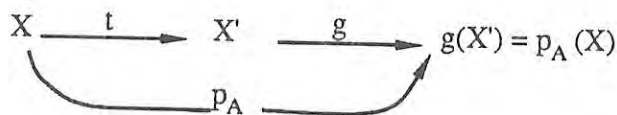
Second point de vue :

Le spectateur Z n'a qu'à choisir entre un nombre réduit de cartes (6, en fait ; donc on change d'espace), donc il a plus de chances de deviner juste. Plus précisément, le choix se faisant dans un espace à 6 éléments avec équiprobabilité, on obtient $p(C) = 1/6$.

Remarques : Revenons au cas général.

- 1 - Pour $A = \Omega$ l'application p_A , comme l'application g, coïncide avec p.
- 2 - Le premier point de vue est le point de vue théorique, dans lequel on reste dans le même espace probabilisable. Le second ne lui est pas tout à fait équivalent puisque, comme on vient de le voir, la probabilité g n'est pas définie sur la tribu initiale. Pour se ramener de

g à p_A , il est donc nécessaire de se replacer au sein du référentiel initial, selon le schéma suivant :



Au niveau de la classe de Terminale, il n'est sans doute pas nécessaire d'explicitier formellement cette composition d'applications : on peut se contenter de la présenter comme un simple jeu d'écriture (la donnée de X définissant X' sans ambiguïté).

Malgré ce (léger) handicap, le second point de vue présente un avantage de taille, en ce qu'il correspond beaucoup mieux que le premier à la notion intuitive que l'on peut avoir de la probabilité conditionnelle : l'événement A étant supposé réalisé (c'est alors une *donnée*), on ne considère plus que les événements élémentaires réalisant A . Ainsi, si l'on s'intéresse à un événement X de T , on considérera $X' = X \cap A$, et non X . Ce point de vue aide donc à conférer du sens au concept visé, lequel apparaît alors comme une *probabilité relative*. En effet l'option fréquentiste adoptée par les programmes actuels des lycées permet de définir la fréquence relative d'apparition d'un événement B sous la condition A :

Supposons l'expérience répétée n fois. On définit, d'après ce qui a été dit plus haut :

$$f_A(B) = \frac{\text{nombre d'occurrences conjointes de A et B}}{\text{nombre d'occurrences de A}}$$

D'où, en divisant numérateur et dénominateur par n :

$$f_A(B) = \frac{\text{fréquence des occurrences conjointes de B et de A}}{\text{fréquence des occurrences de A}},$$

ou encore

$$f_A(B) = \frac{\text{fréquence des occurrences de } B \cap A}{\text{fréquence des occurrences de A}}.$$

$$\text{Enfin, par passage à la limite } (n \rightarrow \infty) : f_A(B) \rightarrow p_A(B) = \frac{p(X \cap A)}{p(A)}$$

Ce point de vue présente en outre l'avantage non négligeable de pouvoir être aisément visualisé sur les aides graphiques (diagramme carrollien, arbre), où il revient à ne prendre en considération qu'une sous-figure.

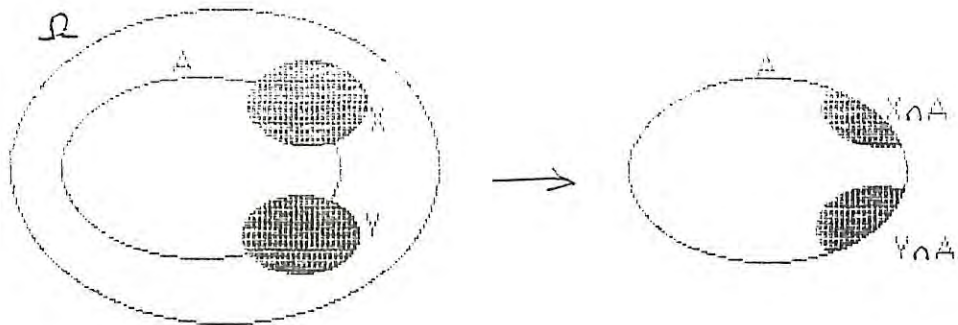
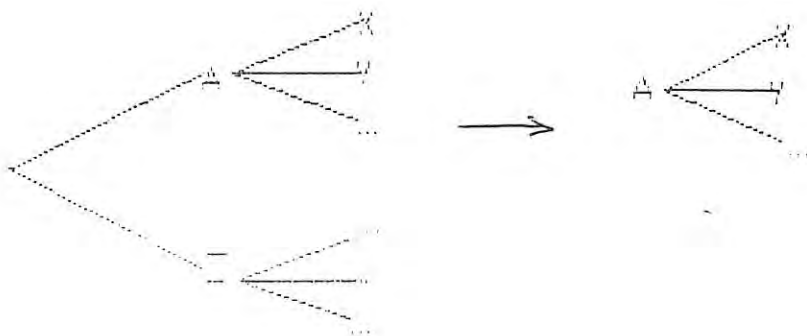


Schéma ensembliste

	A	$\bar{A}$		A
X	$A \cap X$	$\bar{A} \cap X$	X	$A \cap X$
Y	$A \cap Y$	$\bar{A} \cap Y$	Y	$A \cap Y$
...	...	...	...	...

Diagramme carrolien



Arbre probabiliste

2 - Le problème des notations²

On peut juger *a priori* que le choix de telle ou telle notation pour désigner un concept mathématique est un sujet de peu d'importance, et il est vrai que pour un utilisateur familier du concept, seule la commodité d'emploi et/ou l'habitude entrent finalement en ligne de compte. Malheureusement, ceci ne s'applique pas à nos élèves lorsqu'ils abordent une notion nouvelle, et il arrive que la décision de l'enseignant d'utiliser un symbolisme de préférence à un autre (soit parce qu'il est habitué à l'utiliser, soit parce que c'est celui qui est employé dans le manuel de la classe, soit parce qu'il pense que c'est sans importance...) puisse ne pas être sans conséquences sur le rapport de sens que ses élèves vont avoir avec le concept de jeu.

En ce qui concerne la notion de probabilité conditionnelle, il existe classiquement deux notations, que rappelle le programme³ : "*L'étude d'expériences aléatoires (...) amène à définir la probabilité de A sachant que B est réalisé, notée $p_B(A)$ ou encore $p(A/B)$* ". Les auteurs ne prennent donc pas parti, et laissent le libre choix de la notation à l'enseignant concerné.

Il est de fait que la notation $p(A/B)$ est la plus - sinon la seule - utilisée au niveau post-baccalauréat, et on peut *a priori* penser que, si les élèves l'utilisent dès le départ, ils ne seront pas dépaysés plus tard. C'est certes là un argument valable, mais il me semble finalement de peu de poids au regard d'autres que je vais développer, et qui sont de nature plus directement didactique.

Considérée selon le premier des deux points de vue envisagés plus haut, la probabilité conditionnelle possède - entre autres - les deux caractères suivants :

- 1°) il s'agit, comme p , d'une probabilité sur le même espace probabilisable (Ω, T) ;
- 2°) cette probabilité est différente, sauf exception, de la probabilité initiale p .

Ces deux caractéristiques sont bien apparentes dans la notation $p_B(A)$, où elles sont marquées respectivement par la place identique de l'événement A et par l'opposition p_B / p .

En revanche, ce n'est pas du tout le cas avec la notation $p(A/B)$, quel que soit le point de vue considéré. Ici, les deux caractéristiques précédentes paraissent même contredites :

- 1°) la probabilité semble toujours être la même : p ;
- 2°) cette probabilité semble s'appliquer à l'événement A/B .

² - Le début de ce paragraphe fait partie d'un article à paraître dans le bulletin de l'APMEP.

³ - BOEN spécial n° 2 - 2 mai 1991, p. 51.

Bien entendu, ce pseudo "événement conditionnel" n'a aucune réalité mathématique. Mais il n'en reste pas moins que le risque de confusion est réel. Je n'en veux pour preuve que le fait qu'elle a naguère été commise par le (ou les) auteur(s) d'exercices posés au baccalauréat.

Dans le premier⁴, il s'agissait d'une situation concernant la surdité, dans laquelle on considérait les événements D : "être atteint de surdité à l'oreille droite", G : "être atteint de surdité à l'oreille gauche" et S : "être atteint de surdité (sur une oreille au moins)". Et dans le cours de l'énoncé, était posée la question, en apparence innocente mais ô combien énigmatique : "*Les deux événements*" D sachant que S" et "G sachant que S" sont-ils indépendants ?". La relation que l'on demandait de vérifier (ou non) était en fait : $p_s(D) p_s(G) = p_s(D \cap G)$. C'est-à-dire qu'il s'agissait de voir si, pour la probabilité p_s , les événements D et G étaient indépendants⁵. Avec la notation usuelle, la relation précédente s'écrit $p(D/S) \cdot p(G/S) = p(D \cap G/S)$, et ceci explique la confusion faite par les auteurs du sujet. Mais comment un élève aurait-il pu reconnaître de quoi il s'agissait ? Le rapport avec la définition de l'indépendance de deux événements vue en cours est ici loin d'être évident.

La confusion due à la notation apparaît encore plus nettement dans un autre énoncé, proposé l'année suivante dans les mêmes académies⁶, et dans lequel on trouve l'indication suivante : "*si A et B sont deux événements, on pourra noter A/B l'événement "A sachant que B"*". C'est on ne peut plus clair (si l'on peut dire...).

Il s'agit bien ici, incontestablement, d'effets pervers dus à la notation : avec la notation indicielle des probabilités conditionnelles, on conviendra que des énoncés aussi "surréalistes" n'auraient eu aucune chance de voir le jour. Or, si des enseignants se sont laissé piéger, pourquoi pas des élèves ?

On peut également citer un autre aspect positif de la notation indicielle : dans l'écriture $p_B(A)$, les places qu'occupent A et B sont bien différenciées : la notation montre clairement que c'est à l'événement A que s'applique la probabilité, et que c'est l'événement B qui conditionne cette probabilité. Dans la notation $p(A/B)$ au contraire, le fait que A et B soient placés - graphiquement - au même niveau, ne se distinguant que par la latéralisation, tend à favoriser la confusion entre $p(A/B)$, $p(B/A)$ et $p(A \cap B)$.

Cette confusion, fréquente chez les élèves de Terminale, s'explique d'ailleurs en partie par les ambiguïtés que présente la langue naturelle, dès que l'on s'éloigne des formulations stéréotypées utilisant l'expression "sachant que". Dans une phrase telle que "quelle est la

4 - Série D, juin 1989. Académies de Paris, Créteil, Versailles. Voir énoncé p. 98, exercice VIII.

5 - Ce qui, entre parenthèses, aurait pu offrir le mérite de montrer que l'indépendance de deux événements dépend de la probabilité considérée.

6 - Série D, juin 1990. Académies de Paris, Créteil, Versailles (Errare humanum est, perseverare diabolicum).

probabilité qu'un sourd le soit de l'oreille gauche ?", il est en effet assez difficile à un débutant de distinguer s'il s'agit (en reprenant les notations ci-dessus) de déterminer $p(G/S)$, $p(G \cap S)$ ou $p(S/G)$. On comprend alors qu'il faut, autant que faire se peut, éviter que la notation utilisée vienne ajouter à la confusion.

Que retenir de ceci ? De façon générale, on peut dire que c'est par le truchement de nos *sens* que s'élabore en nous le *sens* d'un concept (j'espère que l'on me pardonnera ce jeu sur les sens du mot "sens"). Cette construction du sens implique en particulier toutes les représentations visuelles qui sont associées au concept dans l'apprentissage (constatation sans doute banale, mais qu'il n'est peut-être pas inutile de rappeler). Dans le cas de la probabilité conditionnelle, il peut s'agir des diagrammes de Carroll, des arbres probabilisés..., mais également des notations utilisées pour faire fonctionner la notion : l'exemple cité plus haut démontre la réalité de cette influence, même si le résultat obtenu n'est pas celui qui était souhaité.

Est-ce à dire que, dans l'exemple considéré, il faille complètement abandonner la notation usuelle, au profit de la notation indicielle ? Certes non. Mais s'agissant de l'introduction du concept et des notations associées, le choix exclusif - dans un premier temps - de la notation indicielle me semble nettement préférable à celui de l'autre notation. On pourra bien entendu introduire celle-ci, mais un peu plus tard, seulement lorsqu'on pensera que le concept aura acquis suffisamment de sens (au travers des situations dans lesquelles il sera intervenu) pour que le symbolisme de la notation ne risque pas de lui en substituer un autre. De même, dans les premiers temps, il est sans doute préférable de dire - même si c'est plus lourd - "probabilité sachant B de A" plutôt que "probabilité de A sachant B" ; on suit ainsi au plus près l'écriture $p_B(A)$, et le bloc "probabilité sachant B", correspondant à p_B , jouit de toute son autonomie.

D'autre part, on constate actuellement un regain d'utilisation des aides graphiques pour l'étude des probabilités conditionnelles : arbres, diagrammes ensemblistes, diagrammes de Carroll... Des travaux récents ont montré l'intérêt certain de ces outils dans l'étude de telles situations (cf par exemple [1], [2], [3], et [4]). Mais il faut en connaître les limites, et être conscient des obstacles didactiques qui peuvent en résulter. Ainsi par exemple, l'arbre probabilisé, du fait de sa structure séquentielle, risque d'induire ou de renforcer une conception "chronologiste" ou "causaliste" des probabilités conditionnelles. C'est-à-dire que, si l'on s'intéresse par exemple à $p(A/B)$, l'événement B risque d'être considéré comme précédant nécessairement l'événement A, voire même comme étant une cause de l'événement A. De telles conceptions s'opposeront alors au "retournement" de l'arbre et en définitive, à l'utilisation de la formule de Bayes. De même, les divers types de diagrammes risquent d'induire une conception "cardinaliste", les problèmes de probabilités se ramenant alors à des problèmes de cardinaux d'ensembles, d'où s'ensuivront des difficultés dans la résolution des problèmes où l'on ne peut aisément faire apparaître des effectifs.

En définitive, il apparaît donc judicieux :

- d'une part de varier les outils graphiques qui interviendront dans la résolution des problèmes de probabilités conditionnelles,

- et d'autre part de mettre en évidence, lors de leur utilisation, leur intérêt et leurs limites, en les utilisant concurremment le cas échéant.

3 - Indépendance de deux événements :

Une rapide recension de quelques manuels correspondant aux programmes de 1986⁷ m'a fait apparaître que, dans la plupart des cas, la notion d'indépendance de deux événements A et B était définie par la relation $p(A \cap B) = p(A).p(B)$, le lien avec les probabilités conditionnelles n'étant fait qu'après (et encore, pas toujours !). Or, présenter d'emblée aux élèves une telle définition ne saurait faire sens pour eux : elle apparaît comme tout à fait arbitraire, et même le fait de constater cette relation sur des exemples ne justifierait pas la terminologie (pourquoi "indépendants" ?).

En fait, plus que celle d'indépendance, c'est la notion de *dépendance* qui apparaît comme la plus "naturelle", comme en font foi par exemple les nombreux dictons météorologiques. Dans un autre domaine, considérons la morale de la fable "*Les animaux malades de la peste*", du regretté Jean de la Fontaine : "*Selon que vous serez puissant ou misérable, les jugements de cour vous rendront blanc ou noir*", et essayons de la formaliser dans le langage des probabilités.

Considérons la "population" de référence (ici, c'en est réellement une, au sens habituel), sur laquelle nous supposons l'équiprobabilité, et prenons dans cette population un individu au hasard. Soient alors les événements :

- A : l'individu est puissant
- B : l'individu est blanchi par le jugement

Pour simplifier, supposons qu'il n'y a que deux classes d'individus : les puissants et les misérables. La morale du fabuliste relève à l'évidence de la "vérité statistique" (du type "les Scandinaves sont blonds"), et non de la "vérité logique" (celle qui est mise en défaut par un seul contre-exemple). En l'occurrence, elle exprime le fait que l'on avait à l'époque⁸, plus de chances de sortir blanchi d'un tel procès si l'on était un grand de ce monde que si l'on était un manant. Ce qui peut se représenter par la relation :

7 - Ceux des éditions Belin, Bordas, Delagrave, Didier, Nathan.

8 - Mais les choses ont bien changé depuis.

$p_A(B) < p_{\bar{A}}(B)$. Alors qu'au contraire, l'indépendance de cette justice vis-à-vis de la position sociale du justiciable se traduirait, non pas par :

$p_A(B) < p_{\bar{A}}(B)$ (ce qui serait l'indice d'une autre justice de classe), mais par :

$p_A(B) = p_{\bar{A}}(B)$.

Une option fréquemment prise actuellement par les auteurs de manuels et les enseignants consiste à définir l'indépendance à partir de la relation (non symétrique en A et B) $p_B(A) = p(A)$ (1), dans laquelle, à la différence de la relation $p(A \cap B) = p(A).p(B)$ (2), le lien avec la notion de probabilité conditionnelle est effectivement présent. Les "traductions" les plus courantes de la relation (1) sont du type "la réalisation de A ne dépend pas de celle de B". Cette formulation est celle qui correspond le mieux à la notion intuitive que l'on peut avoir de l'indépendance stochastique d'un événement par rapport à un autre (voir plus haut). Or, à mon avis, en faisant correspondre à cette formulation la relation (1), on opère un glissement de sens, et une traduction plus adéquate de cette relation serait : "la probabilité de réalisation de A est la même, que l'on s'intéresse ou non à la réalisation de B". Ce qui nous éloigne quelque peu de l'intuition, car si l'on évoque l'événement B et sa possible influence sur A, on peut difficilement faire comme si B n'existait pas, et on aura plutôt tendance à comparer :

- d'une part, la probabilité de réalisation de A lorsque B est réalisé
- d'autre part, la probabilité de réalisation de A lorsque B n'est pas réalisé.

Essayons donc de "coller" au mieux à la notion intuitive d'indépendance ; il s'agit d'exprimer, par une relation, le fait que "la réalisation de A est indépendante de celle de B", ou encore "la probabilité de réalisation de A est la même, que B soit réalisé ou non". On reconnaît ici l'égalité des probabilités conditionnelles de A, sachant B et sachant $\bar{B}$ (événement contraire de B), et nous pouvons écrire : $p_B(A) = p_{\bar{B}}(A)$ (3). Evidemment, notre souci du sens présente un (léger) inconvénient : le passage de cette relation à la relation (symétrique) $p(A \cap B) = p(A).p(B)$ nécessite :

- d'une part, que $p(B)$ et $p(\bar{B})$ ne soient pas nulles ;
- d'autre part, un petit calcul. En l'occurrence :

$$\begin{aligned} p_B(A) = p_{\bar{B}}(A) &\Leftrightarrow p(A \cap B).p(\bar{B}) = p(A \cap \bar{B}).p(B) \\ &\Leftrightarrow p(A \cap B).(1 - p(B)) = (p(A) - p(A \cap B)).p(B) \\ &\Leftrightarrow p(A \cap B) = p(A).p(B) \end{aligned}$$

On peut alors prendre cette dernière relation comme nouvelle définition (qui s'étend au cas où $p(B)=0$). On a certes passé un peu de temps en prenant un point de départ situé en amont de cette définition. Mais que pèse ceci en face du gain de sens apporté ? Sans compter que temps *passé* ne signifie pas ici - loin s'en faut - temps *perdu*...

La relation (3) apparaît ici, non plus comme une *définition* de l'indépendance, mais comme une *propriété caractéristique* de celle-ci, qui peut être prise comme *nouvelle définition*, la symétrie de cette propriété en A et B justifiant la substitution de l'expression "A et B sont indépendants" à l'expression initiale "A est indépendant de B".

Toujours à propos de l'indépendance, il est important de faire observer aux élèves que cette notion n'est pas intrinsèque mais qu'elle est liée à l'espace probabilisé considéré. Voyons-le sur un exemple :

On se place dans l'ensemble des familles de 3 enfants : $\Omega_1 = \{G ; F\}^3$, sur lequel on suppose l'équirépartition. On considère dans Ω_1 l'événement A : "il y a des enfants des deux sexes", et l'événement B "il y a au plus une fille". A et B sont-ils indépendants ?

Appelons p_1 la probabilité ainsi définie sur $P(\Omega_1)$. On a $p_1(A) = \frac{3}{4}$, $p_1(B) = \frac{1}{2}$ et $p_1(A \cap B) = \frac{3}{8}$. Il en résulte que A et B sont indépendants.

Considérons maintenant l'ensemble des familles de 2 enfants : $\Omega_2 = \{G ; F\}^2$, sur lequel on suppose également l'équirépartition. Les événements A et B sont définis de la même façon que précédemment (mais dans Ω_2).

En appelant p_2 la probabilité définie sur $P(\Omega_2)$, on a cette fois $p_2(A) = \frac{1}{2}$, $p_2(B) = \frac{3}{4}$ et $p_2(A \cap B) = \frac{1}{2}$, d'où il résulte que A et B ne sont pas indépendants.

4 - Combinatoire :

La combinatoire, et plus généralement les dénombrements, constituaient dans les anciens programmes un préalable à l'étude des Probabilités. Ceci était tout à fait cohérent avec l'approche de type axiomatique alors en vigueur, puisque la formule pascalienne "nombre de cas favorables/nombre de cas possibles", associée à l'équirépartition, constituait l'un des piliers de l'enseignement des Probabilités au lycée. En fait l'équirépartition ramène les problèmes de probabilités à des problèmes de dénombrement, étant donné qu'il s'agit en fait de calculer deux "nombres de cas", c'est-à-dire, à proprement parler, de dénombrer. Une fois l'équipartition assurée, on n'a plus besoin des notions probabilistes : il suffira de calculer des effectifs pour obtenir le résultat demandé.

Parler de Probabilités dans de telles conditions est pour le moins abusif, et on a l'impression que les Probabilités servaient alors principalement d'alibi pour montrer l'intérêt des problèmes de dénombrement, c'est-à-dire en fait pour fournir un champ d'action à la combinatoire.

Ceci est particulièrement clair dans le programme de Terminale D de 1986⁹, qui déclare dans la partie *relative aux probabilités* que l'un des objectifs de l'enseignement dans cette classe est d'"employer les techniques de dénombrement figurant au programme pour calculer des probabilités".

Dans le programme actuel des Terminales scientifiques, le point de vue est radicalement différent : il s'est opéré un véritable basculement des priorités entre dénombrement et probabilités. Le dénombrement (et son aspect technique, la combinatoire) apparaît essentiellement comme un moyen de résolution des problèmes, utile et efficace certes, mais uniquement dans des circonstances particulières : les cas où il y a équirépartition. La partie du programme *relative aux dénombrements* indique qu'"il s'agit d'apprendre aux élèves (...) à exploiter les règles de dénombrement figurant au programme pour l'étude de quelques exemples simples, issus notamment du calcul des probabilités". Dans la partie concernant les probabilités, il indique que l'on "poursuit l'étude de phénomènes aléatoires, en disposant de quelques outils combinatoires..." ; et il insiste même en précisant que l'on évitera les "exemples comportant des difficultés techniques de dénombrement".

Il existe bien des méthodes de dénombrement, utilisant écriture en extension de l'univers Ω , schémas ensemblistes, diagrammes de Carroll, tableaux, arbres, formules combinatoires, etc. La combinatoire n'apparaît plus maintenant comme un pré-requis à l'étude des probabilités, mais comme un moyen bien adapté et "économique", dans certaines situations, de calculer des probabilités. Ainsi, alors que dans les précédents programmes le dénombrement était un *objet* d'enseignement dont les probabilités constituaient un champ d'application, il est maintenant un *outil* de résolution - parmi d'autres - de problèmes probabilistes.

9 - BOEN n° 31 - 11 septembre 1986, p. 2362 -

Bibliographie

- [1] PARZYSZ Bernard (1990) : *Un outil sous-estimé : l'arbre probabiliste*, in Bulletin de l'APMEP n° 372, pp. 47-52.

- [2] PARZYSZ Bernard (1993) : *Des statistiques aux probabilités : exploitons les arbres*, in Repères-IREM n° 10, pp. 91-104.

- [3] TOTOHASINA André (1991) : *Conceptions causaliste et chronologiste de la notion de probabilité conditionnelle*, in Cahier de didactique n° 9, Dépt de Mathématiques de l'Institut Français de Thessalonique, pp. 127-154.

- [4] TOTOHASINA André (1992) : *Méthode implicative en analyse des données et application à l'analyse de conceptions d'étudiants sur la notion de probabilité conditionnelle*, Thèse de doctorat, IRMAR (Université de Rennes I).

CHAPITRE VII

ACTIVITÉS ET EXERCICES EN CLASSE DE TERMINALE

Laure DUMOULIN
Martine FERRY

Volontairement, les activités et exercices abordés ne font pas appel à la combinatoire, ceci afin de respecter l'esprit des programmes.

La plupart des exercices proposés sont assez classiques ; ils sont tirés des annales du baccalauréat ou inspirés de ceux des manuels scolaires de Terminale en vigueur en 1992-1993.

Les énoncés destinés aux élèves sont sur les pages de droite, les commentaires destinés aux enseignants sur les pages de gauche.

COMMENTAIRES

I - II - III - Introduction de la notion de variable aléatoire :

La notion est délicate car le vocabulaire "variable aléatoire X " désigne non pas une variable, mais une application X de l'ensemble des parties de l'univers Ω dans $\mathbb{R}$. (Pour les élèves, il n'y a pas lieu d'insister sur ce problème de langage).

IV - Par l'intermédiaire d'un jeu, on voit l'intérêt de la notion d'espérance de gain sur un grand nombre de parties jouées et donc, par suite de celle d'espérance mathématique.

La notion de variable aléatoire n'est qu'une étape intermédiaire, mais nécessaire et indispensable.

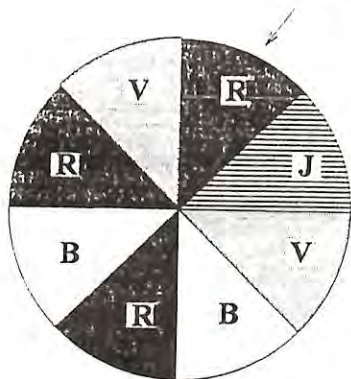
Dans cette question, le professeur rencontrera deux types de réaction :

- celle des élèves qui ont de l'intuition et répondent "80 000 fois la probabilité d'obtenir le jaune"
- celle des élèves qui n'ont pas d'intuition et qui voudront que l'on fasse 80 000 fois l'expérience.

Dans tous les cas, c'est l'occasion pour le professeur de préciser le cours sur la notion d'"espérance".

V - Introduction des notations : $p(G \geq x)$

VARIABLE ALÉATOIRE 1



Une partie de loterie consiste à faire tourner une roue divisée en huit secteurs égaux coloriés en rouge, jaune, vert et bleu, comme indiqué ci-contre. On relève la couleur obtenue lorsque la roue s'arrête.

On suppose que la roue est bien équilibrée.

Si on obtient "Bleu", on gagne 15F.

Si on obtient "Jaune", on gagne 5 F.

Si on obtient "Vert", on perd 5 F.

Si on obtient "Rouge", on perd 10 F.

I - La probabilité d'apparition de chaque secteur est de :

II - La probabilité de l'événement "Jaune" est de :
 La probabilité de l'événement "Bleu" est de :
 La probabilité de l'événement "Vert" est de :
 La probabilité de l'événement "Rouge" est de :
 Quelle vérification peut-on faire ?

III - La fonction G qui, à chaque éventualité, associe le "gain" (positif ou négatif) est appelée "variable aléatoire". Les différentes valeurs prises par G sont :
 Remplir le tableau :

G	- 10			
probabilité				

On écrira :

$p(G = -10) = \dots\dots$

Associer à chaque valeur prise par G sa probabilité, c'est définir la loi de probabilité de G .

VI - Si on lance la roue 80 000 fois, combien de fois peut-on espérer obtenir : le rouge ?
 le vert ?
 le jaune ?
 le bleu ?

Quel gain moyen peut-on espérer ?

Ce nombre est appelé espérance mathématique de la variable aléatoire G .

Comment peut-on retrouver ce résultat à partir du tableau de la question 3 ?

$E(G) = \dots\dots\dots$

Compléter :

V - $p(G \leq 0) = \dots\dots\dots$ $p(G \leq -10) = \dots\dots\dots$ $p(G \leq -10,5) = \dots\dots\dots$ $p(G \leq 15) = \dots\dots\dots$
 $p(G \leq \frac{19}{3}) = \dots\dots\dots$ $p(G > 0) = \dots\dots\dots$ $p(G > -10) = \dots\dots\dots$ $p(G > -10,5) = \dots\dots\dots$
 $p(G > 15) = \dots\dots\dots$ $p(G > \frac{19}{3}) = \dots\dots\dots$ $p(G < 0) = \dots\dots\dots$ $p(G < -10) = \dots\dots\dots$
 $p(G < -10,5) = \dots\dots\dots$ $p(G < 15) = \dots\dots\dots$ $p(G < \frac{19}{3}) = \dots\dots\dots$ $p(0 < G \leq 15) = \dots\dots\dots$
 $p(-10 < G \leq 0) = \dots\dots\dots$ $p(-10 < G \leq 15) = \dots\dots\dots$ $p(-10,5 < G \leq \frac{19}{3}) = \dots\dots\dots$

COMMENTAIRES

VI - La fonction de répartition a peu d'intérêt en Terminale (surtout sur des ensembles finis), mais nous rappelons qu'elle figure au programme.

Cette fonction aura un intérêt et un sens pour les variables aléatoires continues, un exemple étant donné en fin de chapitre : "approche d'une variable aléatoire continue".

VARIABLE ALÉATOIRE 1 (Fin)

VI - Soit la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = p(G \leq x)$ F est appelée "fonction de répartition" de la variable aléatoire G .

a - $F(0) = \dots$, $F(-10) = \dots$, $F(-10,5) = \dots$, $F(15) = \dots$, $F(\frac{19}{3}) = \dots$, $F(-9,25) = \dots$,

$F(1,2) = \dots$

b - Quelle relation a-t-on entre $p(G \leq x)$ et $p(G > x)$?

Si $y \leq x$, que vaut $p(G > y \text{ ou } G \leq x)$?

Exprimer $p(y < G \leq x)$ à l'aide de $F(x)$ et $F(y)$

c - Ecrire une égalité liant $p(G < x)$, $p(G = x)$ et $F(x)$

d - Calculer de deux manières : $p(5 < G \leq 15,2)$

$p(5 \leq G \leq 16,3)$

$p(G < \pi)$

$p(G < \frac{19}{3})$

VII - Quelles sont les différentes valeurs prises par la fonction F ?

- si $x < -10$, alors $F(x) = \dots$

- si $-10 \leq x < \dots$, alors $F(x) = \dots$

- si

- si

- si

VIII - Représenter la fonction de répartition dans un repère orthogonal (unités : 0,5 cm sur l'axe des abscisses et 8 cm sur l'axe des ordonnées).

COMMENTAIRES

I - Occasion de revoir la modélisation d'une situation à l'aide d'un arbre des éventualités qui sera complété, pour chaque branche, par la valeur prise par la variable aléatoire, ce qui facilitera le remplissage du tableau.

Pièce de 10F	1 F	0,50 F	Gain
P	P	P	-3
		F	-1
	F	P	-1
		F	
F			
			
			
			

- Introduction de la notion de jeu équitable
- Le fait de lancer trois pièces de 1F ne change rien à l'arbre, ni aux résultats. On pourra faire remarquer qu'on raisonne avec des pièces identiques comme avec des pièces discernables.

X	-3	-1	1	3
$p(X = k)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	...	

II - Passage de l'arbre des éventualités à l'arbre des effectifs pour arriver à l'arbre (plus simple) des probabilités.

Arbre des éventualités:		
1 ^{er} tirage	2 ^{ème} tirage	S
a_1	a_1	2
	a_2	2
	a_3	1
	c_4	2
a_2	a_1	2
	a_2	2
	a_3	1
	c_4	2
a_3	a_1	2
	a_2	2
	a_3	1
	c_4	2
b_1	a_1	2
	a_2	2
	a_3	1
	c_4	2
b_2	a_1	2
	a_2	2
	a_3	1
	c_4	2
b_3	a_1	2
	a_2	2
	a_3	1
	c_4	2
c_1	a_1	2
	a_2	2
	a_3	1
	c_4	2
c_4	a_1	2
	a_2	2
	a_3	1
	c_4	2

On note a_i les pièces de 1F, b_i celles de 0,50F et c_i celles de 0,20F.

arbre des effectifs:			
1 ^{er} tirage	2 ^{ème} tirage	Nbre d'évts	S
5 1F	4 1F	20	2
	3 0,50 F	15	1,5
	4 0,20 F	20	1
	5 1F	15	1,5
3 0,50F	2 0,50 F	6	1
	4 0,20 F	12	0,5
	5 1F	20	1
	3 0,50 F	12	0,5
4 0,20F	3 0,50 F	12	0,5
	3 0,20 F	12	0
	5 1F	20	1
	3 0,50 F	12	0,5

Nbre total d'événements:
 $12 \times 11 = 132$.

arbre des probabilités:			
1 ^{er} tirage	2 ^{ème} tirage	proba	S
$\frac{5}{12}$ 1F	$\frac{4}{11}$ 1F	$\frac{20}{132}$	2
	$\frac{3}{11}$ 0,50 F	$\frac{15}{132}$	1,5
	$\frac{4}{11}$ 0,20 F	$\frac{20}{132}$	1
	$\frac{5}{11}$ 1F	$\frac{15}{132}$	1,5
$\frac{3}{12}$ 0,50F	$\frac{2}{11}$ 0,50 F	$\frac{6}{132}$	1
	$\frac{4}{11}$ 0,20 F	$\frac{12}{132}$	0,5
	$\frac{5}{11}$ 1F	$\frac{20}{132}$	1
	$\frac{3}{11}$ 0,50 F	$\frac{12}{132}$	0,5
$\frac{4}{12}$ 0,20F	$\frac{3}{11}$ 0,50 F	$\frac{12}{132}$	0,5
	$\frac{3}{11}$ 0,20 F	$\frac{12}{132}$	0
	$\frac{5}{11}$ 1F	$\frac{20}{132}$	1
	$\frac{3}{11}$ 0,50 F	$\frac{12}{132}$	0,5

III - Réinvestissement des méthodes vues au II.

Occasion de revoir les notions de tirages avec et sans remises
(ou simultanés, voir fin du chapitre II).

VARIABLE ALÉATOIRE 2

- I - On considère l'expérience aléatoire suivante. On lance simultanément une pièce de 10 F, une pièce de 1 F et une pièce de 0,50 F ; on note le côté sorti pour chacune des pièces. On gagne 1 F chaque fois que $\mathfrak{F}$ (face) apparaît et on perd 1 F chaque fois que $\mathfrak{P}$ (pile) apparaît.

Soit X la variable aléatoire qui, à chaque issue associe le gain.

Définir la loi de probabilité de X .

Calculer l'espérance mathématique de X . Que peut-on en conclure ?

Répondre aux mêmes questions lorsqu'on lance trois pièces de 1 F.

- II - Devant un parcmètre, un automobiliste pressé fouille dans sa poche et en sort au hasard deux pièces de monnaie. Sa poche contenait très exactement 5 pièces de 1 F, 3 pièces de 0,50 F et 4 pièces de 0,20 F, mais le parcmètre n'accepte pas les pièces de 0,20 F.

On appelle S la somme que cette personne pourra mettre dans le parcmètre en tirant ainsi deux pièces au hasard de sa poche.

- 1) Quelles sont les différentes valeurs que peut prendre S ?
- 2) Définir la loi de probabilité de S .
- 3) Vingt minutes de stationnement coûtent un franc. Quelle est la probabilité pour que l'automobiliste puisse stationner au moins vingt minutes ?
- 4) Quelle somme ce monsieur peut espérer mettre en moyenne dans le parcmètre ?

- III - Un sac contient deux boules rouges et cinq boules vertes. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges du tirage effectué. Etablir la loi de probabilité de X dans chaque cas :

- 1) On tire deux boules successivement sans remettre la boule tirée dans le sac.
- 2) On tire deux boules successivement en remettant la boule à chaque fois dans le sac.
- 3) On tire trois boules simultanément.
- 4) On tire trois boules avec remise.

N.B.- Les tirages 1 et 3 sont des tirages sans remise -

COMMENTAIRES

IV - V - VI - Utilisation de l'espérance mathématique pour voir si un jeu est équitable.

V - Occasion de revoir la modélisation à l'aide d'un tableau cartésien.

VII - Exercice de synthèse (plutôt pour un travail à la maison).

Occasion de réfléchir sur des événements élémentaires non équiprobables (l'arbre des éventualités ne peut plus être utilisé ici).

VARIABLE ALÉATOIRE 2 (Fin)

IV - On lance deux pièces de monnaie bien équilibrées. Le joueur mise m francs. Si le lancer amène deux "face", il gagne 30 F. Si le lancer amène un "face", il gagne 5 F. Sinon, il ne gagne rien.

1) Soit X le montant positif ou nul gagné par le joueur.

a - Dresser la loi de probabilité de X .

b - Calculer l'espérance mathématique de X .

c - Quel doit être le prix de la partie pour que le jeu soit équitable ?

2) Soit Y le gain algébrique du joueur (tenant compte de la mise, donc positif ou négatif).

Répondre aux mêmes questions qu'en 1 avec la variable aléatoire Y .

V - On vous propose moyennant le versement d'une somme de 7 F de jouer au choix à l'un des deux jeux suivants :

Premier jeu : jeter deux dés ordinaires. La somme gagnée s'obtient en additionnant les points indiqués sur chaque dé.

Second jeu : retourner un domino (sur chacune des deux parties d'un domino sont gravés de 0 à 6 points et chaque domino est unique). Le gain, en francs, est donné par la somme des points indiqués sur le domino.

Auxquels de ces jeux accepteriez-vous le plus volontiers de risquer vos 7 F.?

VI - Chacun de nous deux lance un dé. Si le total est un nombre premier (nombre divisible uniquement par 1 et par lui-même), tu marques 10 points. Si le total est une puissance de deux (2^n où $n \in \mathbb{N}$), je marque k points.

Indique la valeur à donner à k pour que :

a - le jeu soit équitable

b - le jeu te favorise

c - le jeu te défavorise

VII - Un dé pipé est tel que : $p(6) = 3 \times p(1) = 2 \times p(2)$ et $p(2) = p(3) = p(4) = p(5)$.

On lance le dé deux fois consécutives. X est la variable aléatoire qui donne la somme des points marqués.

a - Donner la loi de probabilité de X .

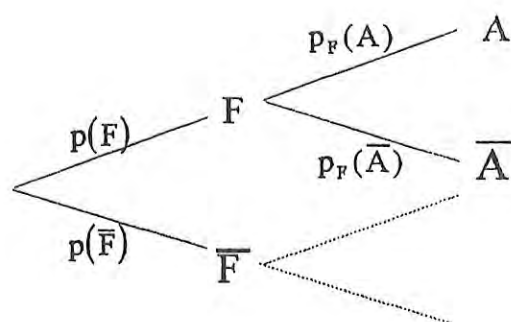
b - Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.

c - Définir la fonction de répartition de X et la représenter.

COMMENTAIRES

On a privilégié la notation $p_F(A)$ plutôt que $p(A/F)$, car les probabilités p et p_F sont différentes (voir chapitre VI).

Dans ce cas, la relation $p_F(A) + p_F(\bar{A}) = 1$ devient naturelle pour l'élève et est mise en évidence sur l'arbre des probabilités :



PROBABILITÉS CONDITIONNELLES 1

On dispose de deux jeux de cartes, l'un de 32 cartes, l'autre de 52 cartes.

On choisit l'un des jeux au hasard et on tire une carte du jeu sélectionné.

On veut chercher la probabilité de tirer l'as de coeur .

1) Quelle manipulation peut-on faire pour choisir chaque jeu avec la même probabilité ?

2) On lance une pièce de monnaie bien équilibrée.

Si Face sort, la carte est tirée du jeu de 32 cartes

Si Pile sort, la carte est tirée du jeu de 52 cartes

- Soit A l'événement "la carte tirée est l'as de coeur"

Soit F l'événement : "la pièce tombe sur Face"

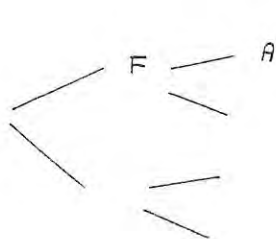
$\bar{F}$ est l'événement : "....."

- La probabilité de tirer l'as de coeur sachant que la pièce est tombée sur Face est la probabilité de tirer l'as de coeur dans un jeu de cartes.

On la note $p_F(A)$. (On lit : "probabilité de A si F").

$$p_F(A) = \dots\dots\dots p_{\bar{F}}(\bar{A}) = \dots\dots\dots p_{\bar{F}}(A) = \dots\dots\dots p_{\bar{F}}(\bar{A}) = \dots\dots\dots$$

- Compléter l'arbre des probabilités



Probabilité	Événement

- L'événement : "la pièce est tombée sur Face et on a tiré l'as de coeur "se note :
donc $\frac{1}{64} = p(\dots\dots\dots)$
- Compléter :

$p(A \cap F) = \dots\dots\dots x \dots\dots\dots$
$p_F(A) = \frac{p(\dots\dots\dots)}{p(\dots\dots\dots)}$

- Calculer : $p(A) = \dots\dots\dots$

On a donc :

$p(A) = p(\dots\dots\dots) + \dots\dots\dots$

3) Dans les mêmes conditions, calculer la probabilité :

- de tirer un cinq de pique : $p(C) = \dots\dots\dots$

- de tirer un roi : $p(R) = \dots\dots\dots$

- de tirer un trois : $p(T) = \dots\dots\dots$

4) Compléter : $p_A(F) = \dots\dots\dots$

Calculer : $p_A(F) = \dots\dots\dots$

$p_{\bar{A}}(\bar{F}) = \dots\dots\dots$

COMMENTAIRES

V - L'intermède permet de revoir la notion de partition et de montrer aux élèves que, si on fait calculs et raisonnement avec les effectifs, en divisant par l'effectif total, on obtient le schéma de Carroll dans lequel interviennent directement les probabilités.

On pourra faire l'analogie entre le calcul des probabilités conditionnelles et celui des fréquences conditionnelles vues en statistiques.

VII - L'idée est de retourner l'arbre des probabilités pour calculer des probabilités conditionnelles. (L'expérience montre que les élèves préfèrent en général le schéma de Carroll).

V - Intermède : Un groupe de 60 personnes est composé d'hommes et de femmes. Certaines portent des lunettes, d'autres non.

PROBABILITÉS CONDITIONNELLES 1 (Fin)

V - Intermède : Un groupe de 60 personnes est composé d'hommes et de femmes. Certaines portent des lunettes, d'autres non.

- Soit H l'ensemble des hommes

$\bar{H}$ est l'ensemble des

- Soit L l'ensemble des porteurs de lunettes

- Compléter le tableau :

	L	$\bar{L}$	Total
H	20		35
$\bar{H}$		12	
Total			

a - Quelle manipulation peut-on faire pour choisir une personne du hasard dans le groupe ?

- Une personne a été choisie au hasard.

b - Quelle est la probabilité de choisir une femme ?

$$p(\dots) = \dots$$

c - Quelle est la probabilité de choisir une personne portant des lunettes ? $p(\dots) = \dots$

d - Quelle est la probabilité de choisir un homme portant des lunettes ? $p(\dots) = \dots$

e - On sait que la personne choisie est un homme, quelle est la probabilité qu'elle porte des lunettes ? $p(\dots) = \dots$

f - On sait que la personne porte des lunettes, quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'un homme ? $p(\dots) = \dots$

g - Quelle est la probabilité de choisir une femme sachant qu'elle porte des lunettes ?
 $p(\dots) = \dots$

VI - Schéma de Carroll :

On reprend le problème du début : A l'aide des résultats de la question (2) compléter le tableau suivant en indiquant dans chaque case la probabilité de l'intersection des événements.

	A	$\bar{A}$	
F			
$\bar{F}$			

a - Retrouver les résultats suivants en utilisant le schéma de Carroll.

$$p(F) = \dots ; p(A) = \dots$$

$$p_F(A) = \dots ; p_A(F) = \dots$$

$$p_{\bar{A}}(\bar{F}) = \dots ; p(\bar{F}) = \dots$$

b - On a tiré l'as de coeur, quelle est la probabilité qu'il provienne du jeu de 32 cartes ?

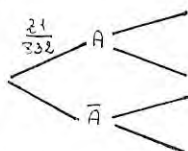
$$p(\dots) = \dots$$

c - Quelle est la probabilité de tirer l'as de coeur sachant que la pièce est tombée sur pile ?
 $\dots = \dots$

d - Quelle est la probabilité de ne pas tirer l'as de coeur ? $\dots = \dots$

e - Quelle est la probabilité que la pièce soit tombée sur face sachant que l'on a pas tiré l'as de coeur ? $\dots = \dots$

VII - Reconstruire l'arbre des probabilités en commençant par A et $\bar{A}$ et le compléter en utilisant les résultats obtenus ci-dessus.



Retrouver avec cet arbre :

$$p(A \cap F) =$$

$$p(F) =$$

$$p(\bar{F}) =$$

VIII - On a tiré un roi, quelle est la probabilité qu'il provienne du jeu de 32 cartes ?
 du jeu de 52 cartes ?
 Et si on tire un trois ?

COMMENTAIRES

Ces exercices permettent de mettre en oeuvre l'utilisation d'arbres ou de schémas de Carroll.

II - Il s'agit là d'un exercice de type Bayésien, à savoir : $p_B(A)$ est connu et on cherche $p_A(B)$.
Cet exercice se traite sans la formule de Bayes qui est hors programme.

III - Un peu plus difficile que les précédents, cet exercice nécessite de travailler en parallèle sur l'arbre des probabilités et le schéma de Carroll.

IV - L'énoncé de cet exercice est dérivé de l'exercice n° 29 p. 140 Dimathème term. A_1B , dont la présentation était ambiguë

Il est dit : "on tire une carte au hasard dans cette urne ; l'une de ses faces est rouge". Ceci sous-entend qu'on a regardé les deux faces de la carte. D'autre part, on propose l'expérimentation "en écartant le cas où c'est une face blanche qui apparaît". Ce qui sous-entend alors qu'on ne regarde qu'une face.

V - Exercice encore réalisable avec un arbre, mais qui se trouvera facilité par les formules de combinaison.

PROBABILITÉS CONDITIONNELLES 2

I - Une usine fabrique des pièces dont 1,8% sont défectueuses. Le contrôle des pièces s'effectue selon les probabilités conditionnelles suivantes :

- sachant qu'une pièce est bonne, elle est acceptée avec une probabilité de 0,97.
 - sachant qu'une pièce est mauvaise, elle est refusée avec une probabilité de 0,99.
- 1) Quelle est la probabilité pour qu'une pièce soit défectueuse ?
 - 2)
 - a - Montrer que la probabilité pour qu'une pièce soit défectueuse et acceptée est 0,00018.
 - b - Calculer la probabilité pour qu'une pièce soit bonne et refusée.
 - c - Calculer la probabilité pour qu'il y ait une erreur dans le contrôle.

II - 1) Dans une entreprise comprenant 70 % d'employés (dont 80% sont mariés) et 30% de cadres (dont 40% sont célibataires), on contacte un salarié pour une enquête.

- a - Quelle est la probabilité pour que ce salarié soit un cadre célibataire ?
- b - Quelle est la probabilité pour que ce salarié soit un célibataire ?
- c - Quelle est la probabilité pour qu'un célibataire soit un cadre ?

2) Dans une entreprise, la répartition des salariés selon leur salaire S et leur sexe est la suivante :

Salaire	$S \leq 8000$	$8000 < S \leq 12000$	$12000 < S$	On choisit au hasard un salarié.
hommes	18 %	20 %	16 %	Quelle est la probabilité pour
femmes	28 %	12 %	6 %	que cet employé :

- a - soit un homme ?
- b - ait un salaire inférieur ou égal à 8000 F ?
- c - soit une femme sachant que son salaire est supérieur à 12000 F ?
- d - ait un salaire supérieur à 12000 F sachant que c'est une femme ?

III - Dans une usine, la fabrication d'une pièce nécessite l'utilisation de deux machines m_1 et m_2 . Pour une période donnée, les probabilités pour que ces machines tombent en panne sont respectivement 5×10^{-3} et 7×10^{-3} . D'autre part, la probabilité que m_2 soit en panne sachant que m_1 est en panne est 0,5.

- 1)
 - a - Calculer la probabilité pour que les deux machines tombent en panne.
 - b - En déduire que la probabilité d'avoir au moins une machine qui fonctionne est 0,9975.
- 2)
 - a - Calculer la probabilité pour que m_1 tombe seule en panne.
 - b - Calculer la probabilité d'avoir une seule machine en panne.
 - c - Calculer la probabilité de n'avoir aucune machine en panne.

IV - Une urne contient trois cartes bien particulières : la première a ses deux faces rouges, la deuxième ses deux faces blanches, la troisième a une face blanche et une face rouge. On tire une carte au hasard dans cette urne et on ne garde qu'une seule de ses faces ; celle-ci est rouge. Quelle est la probabilité que l'autre face soit rouge ?

V - On lance un dé non truqué. Si le résultat du lancer est n , on tire au hasard n cartes simultanément dans un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité :

- a - de tirer le huit de coeur ?
- b - de tirer les autres rois ?
- c - d'avoir obtenu 5 sur le dé sachant qu'on a tiré le huit de coeur ?
- d - d'avoir obtenu 5 sur le dé sachant qu'on a tiré quatre rois ?

COMMENTAIRES

VI - Exercice tiré de la réalité, qui a entraîné des polémiques pendant un an dans les journaux télévisés aux U.S.A. Il est à noter que pour éclairer le débat, des statistiques sur les stratégies des gagnants ont été faites.

Nous proposons la schématisation suivante :

Soit C l'événement "une chèvre se trouve derrière la porte"

Soit V l'événement "la voiture se trouve derrière la porte".

- Si le candidat change d'avis :

1er choix du candidat	Porte ouverte par l'animateur	Choix définitif du candidat	Probabilité
$\frac{2}{3}$ C	1	C	$\frac{2}{3}$
$\frac{1}{3}$ V	1	C	$\frac{1}{3}$

Dans ce cas, la probabilité de gagner du candidat est de $\frac{2}{3}$

- Si le candidat ne change pas d'avis :

1er choix du candidat	Porte ouverte par l'animateur	Choix définitif du candidat	Probabilité
$\frac{2}{3}$ C	1	C	$\frac{2}{3}$
$\frac{1}{3}$ V	1	C	$\frac{1}{3}$

Dans ce cas, la probabilité de gagner du candidat est de $\frac{1}{3}$

Voir commentaire didactique de Michel Henry dans Repères-Irem n° 13 d'octobre 1993.

PROBABILITÉS CONDITIONNELLES 2 (Fin)

- VI - Aux U. S. A., dans un jeu télévisé, un candidat doit choisir une porte parmi trois. Derrière deux de ses portes se trouve une chèvre et derrière l'autre une voiture (que le candidat gagnera s'il choisit la bonne porte).
Après que le candidat a désigné l'une des portes (sans l'ouvrir), l'animateur qui sait ce qui se trouve derrière chaque porte, ouvre une autre porte derrière laquelle il y a une chèvre. A ce moment là, le candidat a le droit de changer d'avis et de choisir la dernière porte restante.
Faut-il conseiller au candidat de changer d'avis ?

COMMENTAIRES

Ex. 1 : On ne dit pas à priori "R et T sont indépendants", mais "T est indépendant de R", car il y a une idée de chronologie. La relation $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$ met en évidence la symétrie de l'indépendance de deux événements. A la suite de cette activité, le professeur pourra introduire le théorème : "les événements A et B sont indépendants si et seulement si $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$ ".

Ex. 2 : Si on change l'univers, on ne peut plus avoir les mêmes événements, d'où le changement des notations R et T en R' et T' ; sinon R devient pour l'élève une abréviation de "la boule tirée est rouge".

ÉVÉNEMENTS INDÉPENDANTS 1

Ex 1 : Une urne contient 5 boules rouges numérotées de 1 à 5,
5 boules blanches numérotées de 1 à 5
5 boules noires numérotées de 1 à 5

On tire une boule dans cette urne.

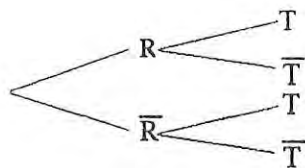
Soit R l'événement "tirer une boule rouge".

Soit T l'événement "tirer une boule portant le numéro trois".

a - La probabilité de tirer un trois dépend-elle de la couleur de la boule ?

b - Quel est l'événement $R \cap T$? Cet événement est-il impossible ? Que peut-on donc dire des événements R et T ? Calculer $p(R \cap T)$.

c - Compléter l'arbre des probabilités :



Retrouver : $p(R \cap T) = \dots\dots\dots$

Calculer : $p(T) = \dots\dots\dots$

$p_R(T) = \dots\dots\dots$

$p_{\bar{R}}(T) = \dots\dots\dots$

Que remarque-t-on ? $\dots\dots\dots$

On dira que l'événement T est indépendant de l'événement R.

Comparer $p(R \cap T)$ et $p(R) \times p(T) : \dots\dots\dots$

d - Compléter $p_T(R) = \dots\dots\dots$

Construire l'arbre des probabilités en commençant par T.

Généralisation :

L'événement A est indépendant de l'événement B si la réalisation ou non de l'événement B ne change pas la probabilité de A. C'est-à-dire si $p_B(A) = p_{\bar{B}}(A)$.

Montrer que cette relation équivaut à $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$

et à $p_B(A) = p(A)$

et à $p_{\bar{B}}(A) = p(A)$

Ex 2 : Dans l'urne de l'ex-1, on ajoute deux boules rouges numérotées 6 et 7 et on tire une boule. Les événements R' : "tirer une boule rouge" et T' : "tirer une boule portant le numéro trois" sont-ils indépendants ?

Ex 3 : On considère l'urne de l'ex-1. On tire successivement deux boules avec remise.

Les événements R_1 : "la 1^{ère} boule tirée est rouge" et T_2 : "la 2^{de} boule tirée porte le numéro trois" sont-ils indépendants ?

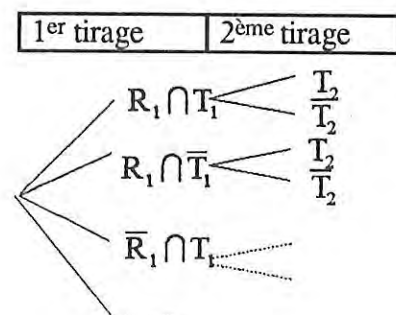
Ex 4 : On considère l'urne de l'ex-2. On tire successivement deux boules avec remise.

Les événements R'_1 : "la 1^{ère} boule tirée est rouge" et T'_2 : "la 2^{de} boule tirée porte le numéro trois" sont-ils indépendants ?

Ex 5 : On considère l'urne de l'ex-1. On tire successivement deux boules sans remise.

a - R_1 et T_2 sont-ils indépendants ? (On pourra s'aider de l'arbre esquissé ci-contre).

b - N_2 est l'événement "la 2^{de} boule tirée est noire". Les événements R_1 et N_2 sont-ils indépendants ?



COMMENTAIRES

I - Occasion de "jongler" avec les différentes manières de démontrer l'indépendance.

(Ex : $p_A(B) = p_{\bar{A}}(B)$ ou $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$ ou $p_B(A) = p_{\bar{B}}(A)$)

II - a - La réponse est naturelle, mais vérifiable par le calcul.

b - Ici, le calcul est indispensable.

III - IV - Ces exercices permettent de rappeler : $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.

V -

2) Interprétation : parmi les célibataires, ou parmi les mariés, ou parmi la totalité des employés, la proportion de ceux qui refusent de changer de lieu de travail est la même.

VI - Toutes les conditions obtenues par les différentes approches du problème se ramènent à $ad = bc$.

VII - Occasion de rappeler les différences entre les notions d'incompatibilité et d'indépendance.

ÉVÉNEMENTS INDÉPENDANTS 2

I - On lance deux pièces successivement. Montrer que les événements "la première pièce donne face" et "les pièces donnent le même résultat" sont indépendants.

II - On lance deux dés cubiques parfaitement équilibrés, l'un rouge, l'autre bleu.

a - Les événements "le dé rouge donne un nombre pair" et "le dé bleu donne un nombre impair" sont-ils indépendants ?

b - Les événements "la somme des points marqués est 11" et "le point marqué par le dé bleu n'est pas 5" sont-ils indépendants ?

III - On donne $p(A) = \frac{3}{8}$, $p(B) = \frac{5}{8}$ et $p(A \cup B) = \frac{3}{4}$

a - Calculer $p_B(A)$ et $p_A(B)$.

b - Les événements A et B sont-ils indépendants ?

IV - On donne $p(A) = 0,3$; $p(B) = 0,5$ et $p(A \cup B) = 0,65$

a - Calculer $p_B(A)$.

b - A et B sont-ils indépendants ? En déduire $p_A(B)$.

V - Dans le cadre d'une prévision de restructuration, la direction d'une entreprise a fait une enquête auprès de ses employés. Le siège social devant être placé en province, il s'agit de prévoir combien d'employés sont susceptibles de changer de lieu de travail.

Complète le tableau suivant :

	Célibataires	Mariés	Total
Refusent de changer de lieu de travail	13 %		
Acceptent de changer de lieu de travail			35 %
Total		80 %	100 %

On choisit au hasard un employé de l'entreprise. On s'intéresse aux événements suivants :
A : "l'employé accepte de changer de travail"
B : "l'employé est célibataire"

a - Calculer la probabilité de A, de B et de $A \cap B$.

b - A et B sont-ils indépendants ? Interpréter ce résultat après analyse du tableau.

c - On choisit au hasard un employé célibataire. Calculer la probabilité qu'il accepte de changer de travail.

VI - Une population se répartit en quatre classes selon deux caractères

A et B. a, b, c et d sont les fréquences de chaque classe. Déterminer

une condition nécessaire et suffisante pour que A et B soient indépendants.

	B	$\bar{B}$
A	a	b
$\bar{A}$	c	d

VII - Un groupe de trente personnes est composé de dix-huit filles et douze garçons.

a - Parmi les filles, dix préfèrent la valse au tango et parmi les garçons huit ont la même préférence. On choisit au hasard une personne parmi les trente. On note F l'événement "choisir une fille" et V l'événement "choisir une personne qui préfère la valse". V et F sont-ils indépendants ? V et F sont-ils incompatibles ?-

b - On note n le nombre de filles qui préfèrent la valse. Peut-on déterminer n pour que V et F soient indépendants ? V et F sont-ils incompatibles ?

Calculer, dans ce cas, la probabilité d'être une fille ou de préférer la valse, puis la probabilité d'être un garçon préférant le tango.

COMMENTAIRES

Tiré du bac professionnel maintenance des systèmes mécaniques automatisés - Académie de Montpellier - session 1991 -

Exercice hors programme, mais qui a pour but de montrer aux élèves une variable aléatoire continue, l'intérêt de l'écart-type et de la fonction de répartition.

Il illustre clairement le lien entre statistiques et probabilités.

2) b - Lorsque la variable aléatoire est continue, on a :

$$p(T < x) = p(T \leq x)$$

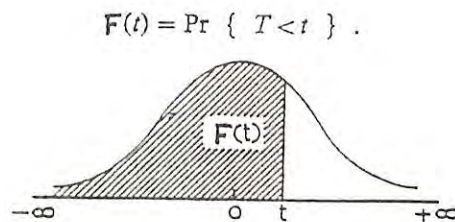


Table pour les grandes valeurs de t

t	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
$F(t)$	0,998 65	0,999 04	0,999 31	0,999 52	0,999 66	0,999 76	0,999 841	0,999 928	0,999 968	0,999 997

APPROCHE D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE CONTINUE

Une entreprise a dressé, pour l'année écoulée, le tableau statistique suivant qui étudie la vie des ventouses (en heures) :

Durée de vie (en h)	[0,10[	[10,15[	[15,20[	[20,25[	[25,30[	[30,35[	[35,40[	[40,45[	[45,50[
Nbre de ventouses	0	2	4	3	7	15	10	6	5

- 1) a - Déterminer la durée de vie moyenne en heures d'une ventouse (on donnera le résultat avec deux décimales).
- b - Déterminer l'écart-type de cette série statistique.
- 2) La durée de vie d'une ventouse est une variable aléatoire X. On estime que X suit une loi de probabilité d'espérance mathématique 33 et d'écart-type 9. On estime que cette loi est d'un type particulier appelé "loi normale" : dans ces conditions, la variable $T = \frac{X-33}{9}$ est une variable appelée "normale réduite" pour laquelle la fonction de répartition F est donnée par la table ci-dessous :

↓

1	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5673	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7290	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7520	0,7561	0,7602	0,7642	0,7683	0,7723	0,7764	0,7804	0,7845	0,7885
0,8	0,7881	0,7920	0,7959	0,7997	0,8036	0,8075	0,8113	0,8152	0,8190	0,8229
0,9	0,8159	0,8196	0,8233	0,8269	0,8306	0,8343	0,8379	0,8415	0,8451	0,8487
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9413	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9779	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

Exemple de lecture : si $t = 1,85$ alors $t = 1,8 + 0,05$

$$F(1,85) = 0,9678 = p(T \leq 1,85)$$

a - En passant par l'intermédiaire de la variable T et en utilisant la table, calculer la probabilité pour que la durée de fonctionnement d'une ventouse soit inférieure ou égale à 36 heures.

b - Peut-on dire que : $p(T \geq \frac{1}{3}) = 1 - p(T \leq \frac{1}{3})$? Pourquoi ?

Calculer $p(\frac{1}{3} \leq T \leq \frac{7}{9})$

Calculer la probabilité pour que la vie d'une ventouse soit comprise entre 36 et 40 heures.

c - Calculer la probabilité pour que la vie d'une ventouse soit supérieure à 42 heures.

COMMENTAIRES

I à IV - Un peu d'humour : exercices extraits du livre

"Exercices ordinaires de probabilité"

Gérard FRUGIER. Ed. Ellipse.

I - Nécessite de faire une hypothèse d'indépendance non écrite dans l'énoncé.

II - Intéressant, car flou ; c'est à l'élève de construire son modèle, à savoir :

- la sorcière a-t-elle pu empoisonner une pomme véreuse ?
- une seule bouchée de la pomme empoisonnée entraîne-t-elle ou non la mort ?
- Blanche-Neige a-t-elle le temps de donner la pomme véreuse et empoisonnée au cochon avant de mourir ?

Exercice en liaison avec le chapitre II.

IV - On peut répondre intuitivement.

EXERCICES DIVERS

- I - Grand-père a trois bérets et une casquette. Quand il descend acheter sa baguette, il saisit un couvre-chef au hasard. Sachant qu'il prend une fois sur trois une baguette moulée et que, deux fois sur cinq, il oublie de chauffer ses souliers, calculer la probabilité de le voir remonter en charentaises, un béret sur la tête et une baguette non moulée sous le bras.
- II - Blanche-Neige passe la serpillière quand la Méchante Reine se présente, grimpée en pauvre vieille, pour lui offrir un panier de cinq pommes golden, dont une empoisonnée et deux véreuses. Blanche-Neige prend les pommes une par une pour les croquer. Si elle tombe sur une pomme véreuse, elle jette le reste au cochon, sinon le conte continue (*vous connaissez la suite, vous l'avez sans doute déjà lu*). Calculer la probabilité pour que :
- a - le porc trépassé
 - b - Blanche-Neige mange toutes les bonnes pommes
- III - Quand on interroge un paysan du Pays d'Auge sur sa production de l'année, on obtient les réponses suivantes :
- A : "ça eût payé, mais ça ne paie plus"* deux fois sur cinq
 - B : "cette année n'est peut-être pas si mauvaise" une fois sur cinq
 - C : "cette année n'est sûrement pas très bonne" une fois sur dix
 - D : "cette année est peut-être bien mauvaise, peut-être bien bonne" dans les autres cas.
- A la foire de Pont-l'Évêque, on interroge quatre agriculteurs de manière indépendante. Calculer les probabilités des événements suivants :
- a - on obtient au moins une fois la réponse A
 - b - on obtient quatre réponses différentes
 - c - on obtient des réponses A ou B
- (*On fait peu de sondages en Normandie*) * cf. Fernand Raynaud.
- IV - Le 14 juillet, à Saint-Troupaize, il fait beau sept fois sur dix. Le comité des fêtes dispose de deux sources de précisions météorologiques indépendantes :
- la météo nationale, qui se trompe deux fois sur cent
 - une grenouille verte, qui se trompe une fois sur vingt*

La météo annonce de la pluie, alors que le comportement de la grenouille laisse prévoir du beau temps. Déterminer le temps le plus probable.

* La météo nationale n'utilise plus de grenouille

COMMENTAIRES

V à VIII - Exercices rencontrés dans la plupart des manuels de terminale ou tirés des annales du baccalauréat.

VI - Peut être traité avec la combinatoire, mais aussi avec les arbres.

VIII - Fait l'objet d'un commentaire au chapitre VI.

EXERCICES DIVERS (Suite)

V - L'huître et les probabilités

"Un jour deux pèlerins sur le sable rencontrent une huître que le flot y venait d'apporter :
Ils l'avalent des yeux, du doigt ils se la montrent.
A l'égard de la dent il fallut contester.
L'un se baissait déjà..."

Les deux compères décident donc de laisser au hasard la désignation de celui qui mangera le mollusque.

Survint Perrin Dandin qui tailla cinq bâtonnets de longueurs différentes (5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 centimètres respectivement) et, après les avoir enfoncés dans le sable de manière à ce qu'ils apparaissent de même longueur, leur tint à peu près ce langage : "Choisissez et tirez, mangera qui tirera le plus court !".

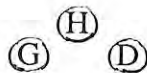
- 1) Le premier protagoniste tire au hasard un bâtonnet ; il mesure 6 cm. Calculer la probabilité de l'événement : "il mangera l'huître".
- 2) Ignorant le résultat de ce tirage, le second refuse de prendre à son tour un des bâtonnets restants : il prétend que son compagnon a été avantagé en tirant le premier.

Confirmer ou infirmer son opinion en calculant la probabilité de l'événement : "Le premier qui tirera, l'huître mangera".

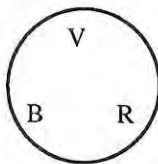
VI - Le Jeu de triboulet.

Pour ce jeu le matériel se compose de :

- trois boules : une bleue B, une rouge R, une verte V ;
- une cuvette comportant trois trous disposés comme sur la figure ci-dessous, appelés : haut (H), gauche (G) et droite (D) :



Le banquier lance les trois boules ; elles s'immobilisent en tombant chacune dans un trou. La configuration dans laquelle la boule verte est tombée dans le trou du haut, la bleue dans le trou gauche et la rouge dans le trou droit est notée :



- 1) a - Écrivez toutes les configurations possibles.
b - On suppose que toutes les configurations sont équiprobables. Quelle est la probabilité de chacune d'elles ?
- 2) Quelle est la probabilité de chacun des événements suivants :
 E_1 : "la boule verte est tombée dans le trou du haut" ;
 E_2 : "la boule bleue est tombée dans le trou droit" ;
 E_3 : "la boule verte est tombée dans le trou du haut et la bleue dans le trou droit" ;
 E_4 : "la boule bleue n'est pas tombée dans le trou du haut".
- 3) Calculez la probabilité conditionnelle de l'événement E_2 par rapport à E_1 .
 E_1 et E_2 sont-ils indépendants ?

EXERCICES DIVERS (Fin)

VII - Yves et Xavier jouent à pile ou face qui fera la vaisselle.

Xavier : "Je soupçonne ta pièce d'être truquée, et de retomber plus souvent d'un côté que de l'autre."

Yves : "Qu'à cela ne tienne ! Nous ferons ainsi : je lance la pièce deux fois. Si j'obtiens deux faces ou deux piles, ça ne compte pas, et je recommence. Si j'obtiens face puis pile, j'ai gagné, si j'obtiens pile puis face, j'ai perdu. D'accord ?"

Cette façon de choisir est-elle équitable ?

VIII - Un même individu peut être atteint de surdité unilatérale ou bilatérale. On admet que dans une population donnée, les deux événements :

D : "être atteint de surdité à l'oreille droite",

G : "être atteint de surdité à l'oreille gauche",

sont indépendants et tous deux de probabilité 0,05, ce que l'on note : $p(D) = p(G) = 0,05$.

On considère les événements :

B : "être atteint de surdité bilatérale",

U : "être atteint de surdité unilatérale",

S : "être atteint de surdité (sur une oreille au moins)".

1) Exprimez les événements B et S à l'aide de G et de D, puis calculez $p(B)$ et $p(S)$.

Déduisez-en $p(U)$.

2) Sachant qu'un sujet pris au hasard dans la population considérée est atteint de surdité, quelle est la probabilité :

a - pour qu'il soit atteint de surdité à droite ?

b - pour qu'il soit atteint de surdité bilatérale ?

Les deux événements "D sachant S" et "G sachant S" sont-ils indépendants ?



