

IREM 3029 a

18 F23

FICHES
DE
GEOMETRIE
POUR
L'ELEVE
DE
QUATRIEME

IREM DE LORRAINE

avant - propos

Ce fichier de géométrie destiné aux élèves des classes de quatrième couvre l'intégralité du programme.

Pour une utilisation rationnelle du document, il est recommandé de s'en servir dans l'ordre prévu dans le sommaire. Toutefois, la structure de chaque chapitre laisse une certaine liberté :

- les premières fiches correspondent à des activités qui permettent d'introduire les notions nouvelles,
- une page spéciale (« *ce qu'il faut savoir, ce qu'il faut savoir faire* ») résume ensuite, en les clarifiant, les propriétés mises en évidence,
- les pages suivantes sont consacrées à des exercices d'application et d'approfondissement.

Compte tenu de cette structure, il est clair que tous les exercices d'introduction doivent être traités par l'ensemble des élèves. La page de résumé sert de césure avant d'aborder les exercices simples d'application qui s'adressent, eux aussi, à tous les élèves.

Pour ce qui est des exercices d'approfondissement, le professeur pourra en moduler assez largement l'utilisation en fonction du niveau de la classe. Ne pas les avoir faits n'empêche pas d'aborder le chapitre suivant. Il est possible, dès lors, d'y revenir plus tard à titre de réactualisation des connaissances ou de vérification de leur degré d'acquisition.

sommaire

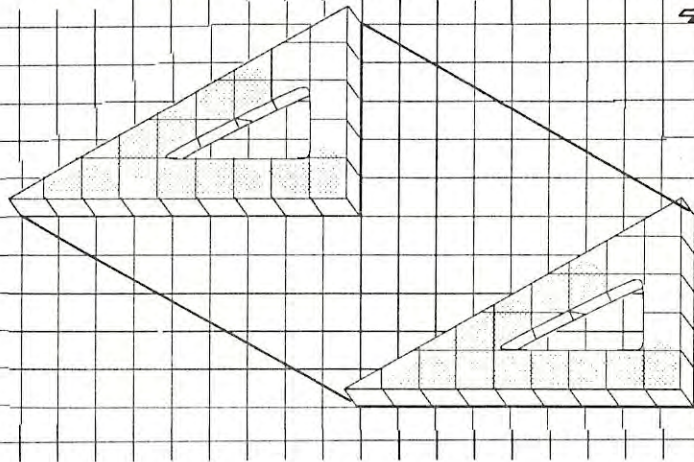
Chapitre 1 : Révisions avant d'aller plus loin	1
Chapitre 2 : Le théorème de Pythagore	13
Chapitre 3 : Les droites $y = ax$	27
— <i>Le secret de Leonhard (1^{re} partie)</i>	40
Chapitre 4 : Le cosinus et la sphère	43
— <i>Le secret de Leonhard (2^{ème} partie)</i>	57
Chapitre 5 : La géométrie du triangle	59
— <i>Le secret de Leonhard (3^{ème} partie)</i>	76
Chapitre 6 : Les transformations géométriques	79
— <i>Le secret de Leonhard (4^{ème} partie)</i>	91



1

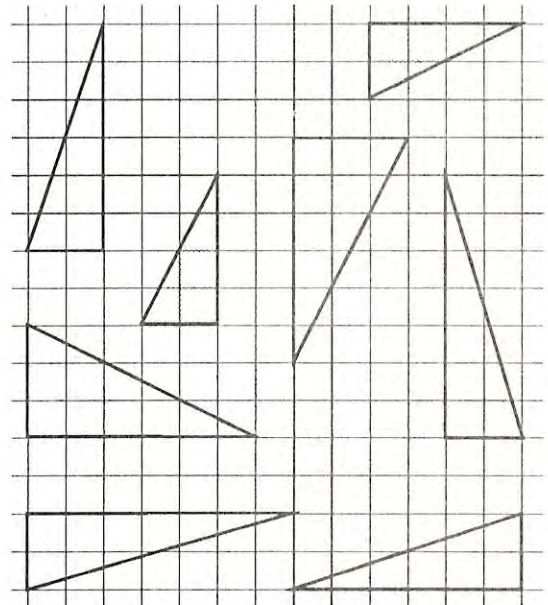
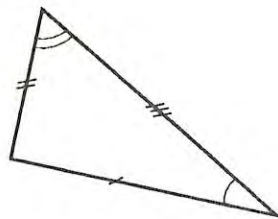
Révisions

avant d'aller
plus loin ...

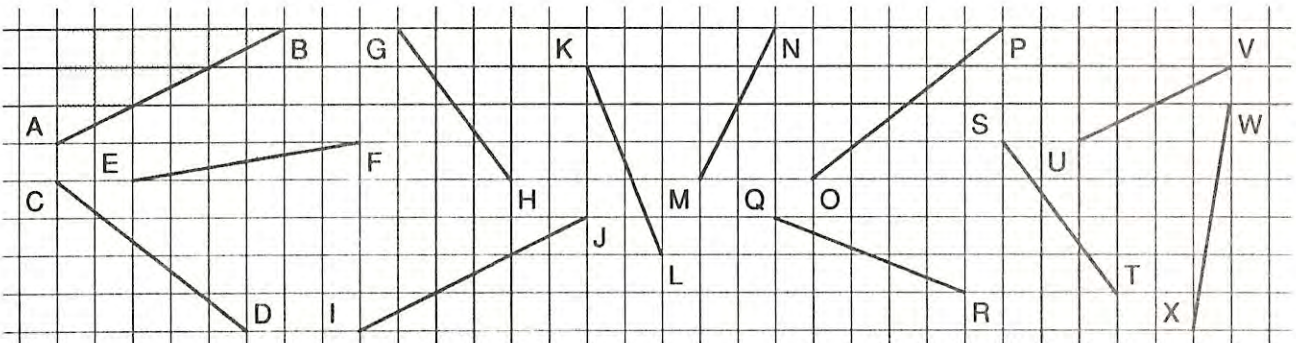


1 Les triangles rectangles dessinés ci-contre ont, deux à deux, les *mêmes côtés de l'angle droit*. Colorie d'une même couleur les triangles qui se correspondent.

Indique ensuite par des signes analogues les angles et les côtés qui sont égaux.



2 Voici 12 segments dont les sommets sont des points du quadrillage. Nous avons colorié un triangle rectangle dont AB est l'hypoténuse. Fais de même avec les autres segments, puis complète les égalités :



..... = = = = = =

1

BIBLIOTHEQUE IREM



107062

3 Nous avons dessiné un triangle ABC dont les sommets sont des points du quadrillage.

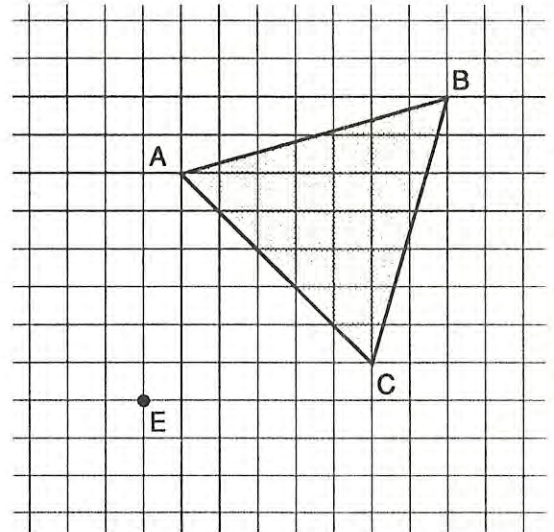
a) colorie des triangles rectangles dont les segments AB et BC sont les hypoténuses. Que peux-tu en déduire sur les côtés AB et BC de ABC ?

les longueurs AB et BC sont

le triangle ABC est

b) en faisant une remarque sur le point E, trace la médiatrice de AC.

c) trouve le point D tel que ABCD soit un losange.



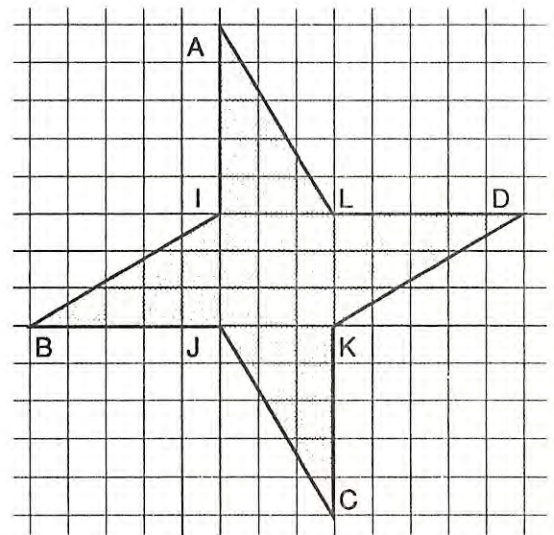
4 En utilisant les points du quadrillage, nous avons tracé la figure ci-contre. Quels sont les segments de même longueur ?

..... = = =
..... = = =

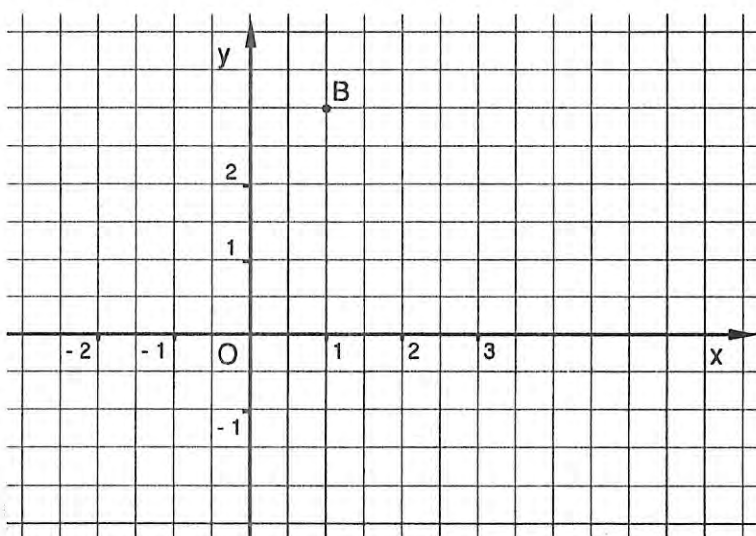
a) trace et mesure soigneusement les segments AB, BC, CD et DA.

b) justifie les égalités précédentes en coloriant des triangles rectangles convenables.

c) mesure les angles de ABCD :
ABCD est un



5 Utilise un repère et des coordonnées



Nous avons placé le point B de coordonnées (1 ; 3). Place les points :

A (6 ; 1), C (-2 ; 1), D (3 ; -1) et dessine le quadrilatère ABCD.

a) en utilisant le quadrillage, compare ses côtés :

..... = ; =

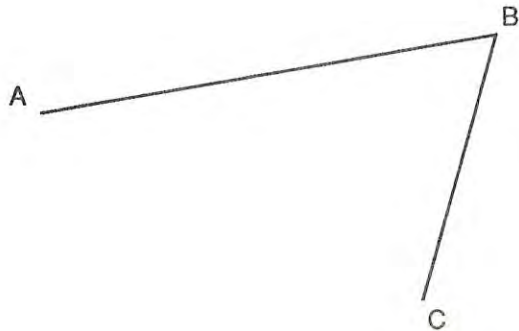
ABCD est un

b) trace les diagonales AC et BD, appelle I leur point d'intersection. Quelles sont les coordonnées de I ?

I (..... ;)

« Dans un parallélogramme les côtés
6 opposés ont même longueur ».

Utilise cette propriété pour compléter, avec ton compas, le parallélogramme ABCD ci-dessous.



« Dans un parallélogramme deux côtés
7 opposés sont parallèles et de même longueur ».

Complète, avec ta règle et ton équerre, le parallélogramme EFGH ci-dessous.

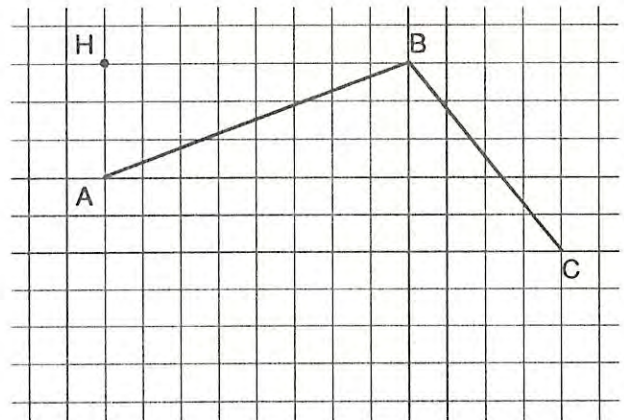


A, B, C sont trois points donnés sur le
8 quadrillage ci-contre. Colorie le triangle rectangle AHB.

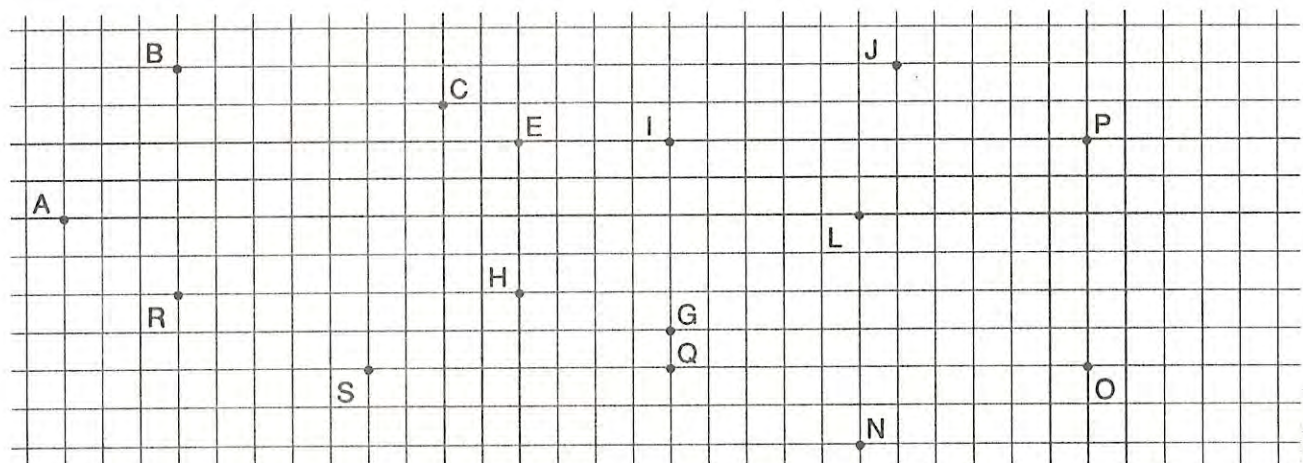
a) trouve un triangle DKC rectangle en K, dont les côtés de l'angle droit sont égaux et parallèles à ceux de AHB.

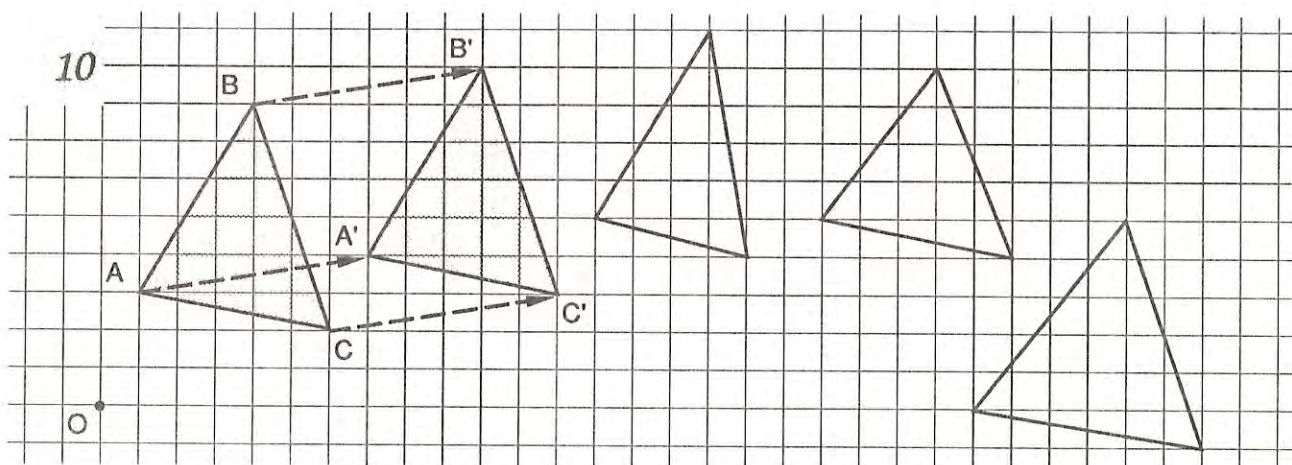
Colorie-le et complète le parallélogramme ABCD.

b) colorie dans une autre couleur des triangles rectangles qui montrent que $BC = AD$.



Complète les parallélogrammes ABCD, EFGH, IJKL, MNOP et QRST. (attention à l'ordre
9 des lettres)





Observe bien la figure ci-dessus. Nous nous sommes donné un triangle ABC , puis nous avons dessiné un triangle $A'B'C'$ en « décalant » les sommets A, B, C de telle façon que les trois segments AA', BB', CC' soient *égaux* et *parallèles* entre eux.

Nous avons voulu faire la même chose avec des « décalages » plus grands, et nous avons obtenu les trois autres triangles. A chaque fois une erreur s'est glissée ... trouve les sommets mal placés et corrige en traçant les triangles que nous aurions dû obtenir.

- 11 Complète la figure précédente en traçant le repère (Ox, Oy) d'origine O et tel que Ox soit horizontal, Oy vertical.

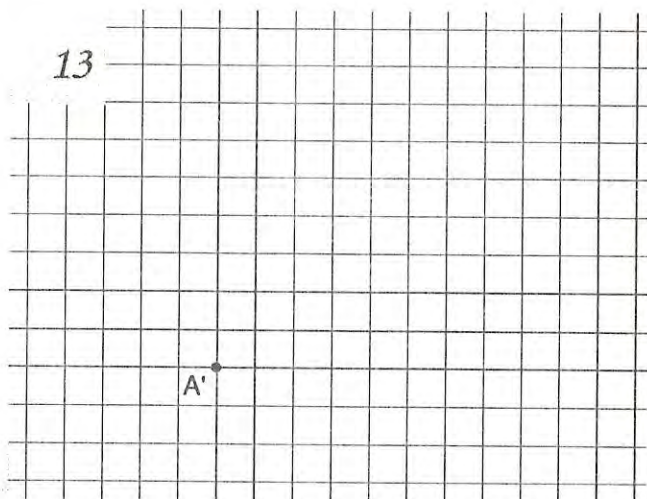
Trouve les coordonnées demandées aux deux premières lignes du tableau ci-contre (l'unité est le carreau).

- 12 On change d'unité dans le repère précédent et, sur chaque axe, on choisit le centimètre (deux carreaux).

Complète les deux dernières lignes du tableau.

unités : 1 carreau		
$A (\dots ; \dots)$	$B (\dots ; \dots)$	$C (\dots ; \dots)$
$A' (\dots ; \dots)$	$B' (\dots ; \dots)$	$C' (\dots ; \dots)$
unités : 1 cm = 2 carreaux		
$A (\dots ; \dots)$	$B (\dots ; \dots)$	$C (\dots ; \dots)$
$A' (\dots ; \dots)$	$B' (\dots ; \dots)$	$C' (\dots ; \dots)$

13



On revient au triangle ABC du haut de cette page, et on veut le « décaler » jusqu'au quadrillage ci-contre, en supposant qu'il n'y ait pas d'interruption et que le quadrillage remplisse toute la page.

On veut que A corresponde au point A' déjà placé et que les segments AA', BB', CC' soient égaux et parallèles entre eux. Dessine le triangle $A'B'C'$ que nous devons obtenir.

Dans le repère de l'exercice 10, les coordonnées de A' seraient $(3 ; -34)$. Quelles seraient celles de B' et C' ?

$B' (\dots ; \dots)$

$C' (\dots ; \dots)$

14 Quelle est la somme des angles d'un triangle ?

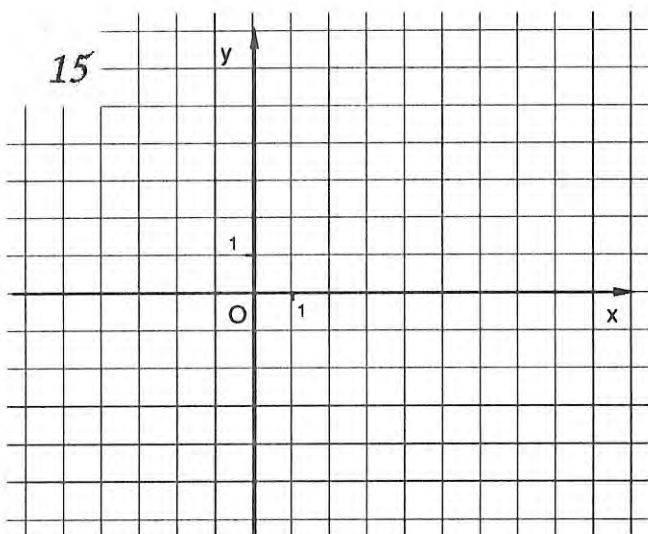
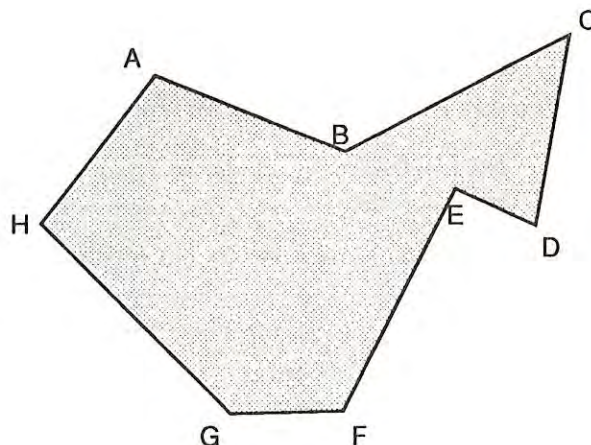
Trace les diagonales BH, BG, BF, BE, CE du polygone ci-contre. Tu as obtenu six triangles, colorie leurs angles.

Quelle est la somme des angles (intérieurs) du polygone ABCDEFGH ?

6 x =

Trace (en rouge) le polygone ACDFGH. Quelle est la somme de ses angles ?

.....
.....



Place les points suivants dans (Ox, Oy) :

A (-3; 4) B (-3; 2) C (1; 2)
D (3; -4) E (9; -2) F (7; 4)
G (7; -2) H (3; -2) I (3; 2)

Colorie légèrement le domaine polygonal ABCDEFGHIA et montre qu'il se décompose en quatre triangles rectangles égaux.

Mesure $\widehat{BAI}$:

Sans faire d'autres mesures, trouve :

$\widehat{AIB}$ = $\widehat{IDC}$ =
 $\widehat{CDE}$ = $\widehat{FED}$ =

CDEF est un

16 Dans la figure ci-contre, les deux triangles rectangles ABC et ADC ont les mêmes côtés de l'angle droit :

AB = CD, BC = DA.

Marque les angles qui se correspondent.

a) Quelle est la nature du triangle AIC ?

AIC est car =

b) AB et CD se coupent en J

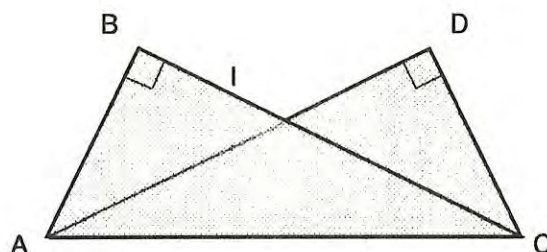
AJC est car =

Mesure $\widehat{AJC}$:

c) Sans mesurer, trouve $\widehat{BAC}$ et $\widehat{AIC}$:

$\widehat{BAC}$ = $\widehat{JAC}$ = =

$\widehat{AIC}$ =



17 On dispose 4 équerres identiques comme sur la figure ci-contre. Les côtés de l'angle droit mesurent 9 cm et 12 cm.

Indique sur la figure les égalités d'angles et complète :

$$\widehat{ABH} + \widehat{BAH} = \dots\dots\dots$$

$$\widehat{DAB} = \widehat{DAH} + \widehat{HAB} = \dots\dots\dots$$

ABCD possède
et
donc c'est un

b) Calcule l'aire de ABCD :

$$\text{aire}(ABCD) = \text{aire}(EFGH) + 4 \times \text{aire}(ABH)$$

$$\text{aire}(ABCD) = \dots\dots\dots + \dots\dots\dots$$

$$\text{aire}(ABCD) = \dots\dots\dots$$

Cherche AB :
.....

18 B a pour coordonnées (6 ; 4), place :
A (- 1 ; 4) C (6 ; - 1) D (- 1 ; - 1) E (1 ; 4)
puis trace ABCD et colorie AED .

Soit M sur BC tel que BM = AE , colorie EBM .

a) Compare les côtés de AED et EBM :

$$\dots\dots\dots = \dots\dots\dots \quad \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

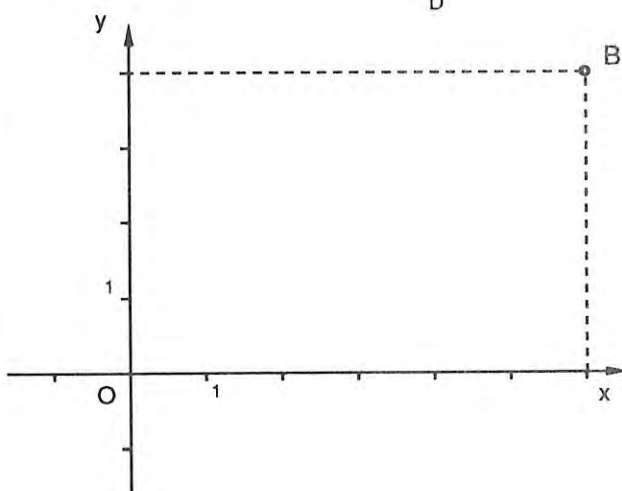
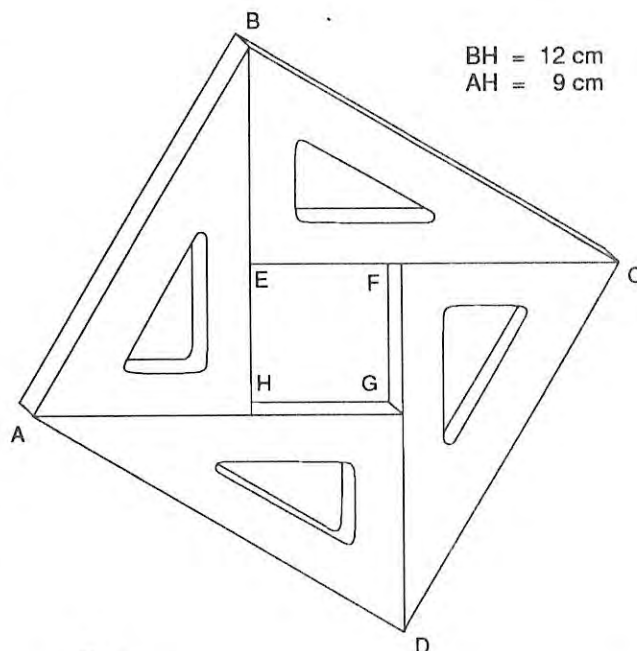
Marque les égalités sur la figure, ainsi que celles des angles qui se correspondent. Dédus-en $\widehat{DEM}$:

$$\widehat{DEM} = 180^\circ - \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

b) Mesure : ED = EM =

Dédus-en : aire (EMD) =

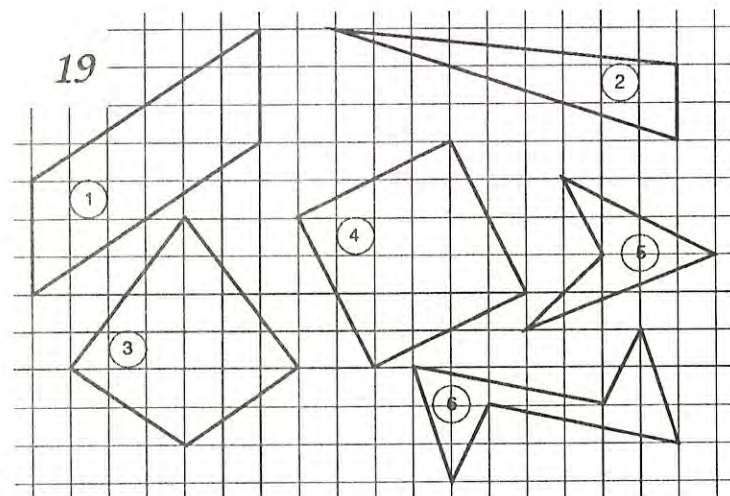
c) Complète le tableau ci-contre. Le résultat est-il normal ?



$$\text{aire}(AED) + \text{aire}(EBM) + \text{aire}(DMC) + \text{aire}(EMD) =$$

$$\dots\dots\dots + \dots\dots\dots + \dots\dots\dots + \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

19



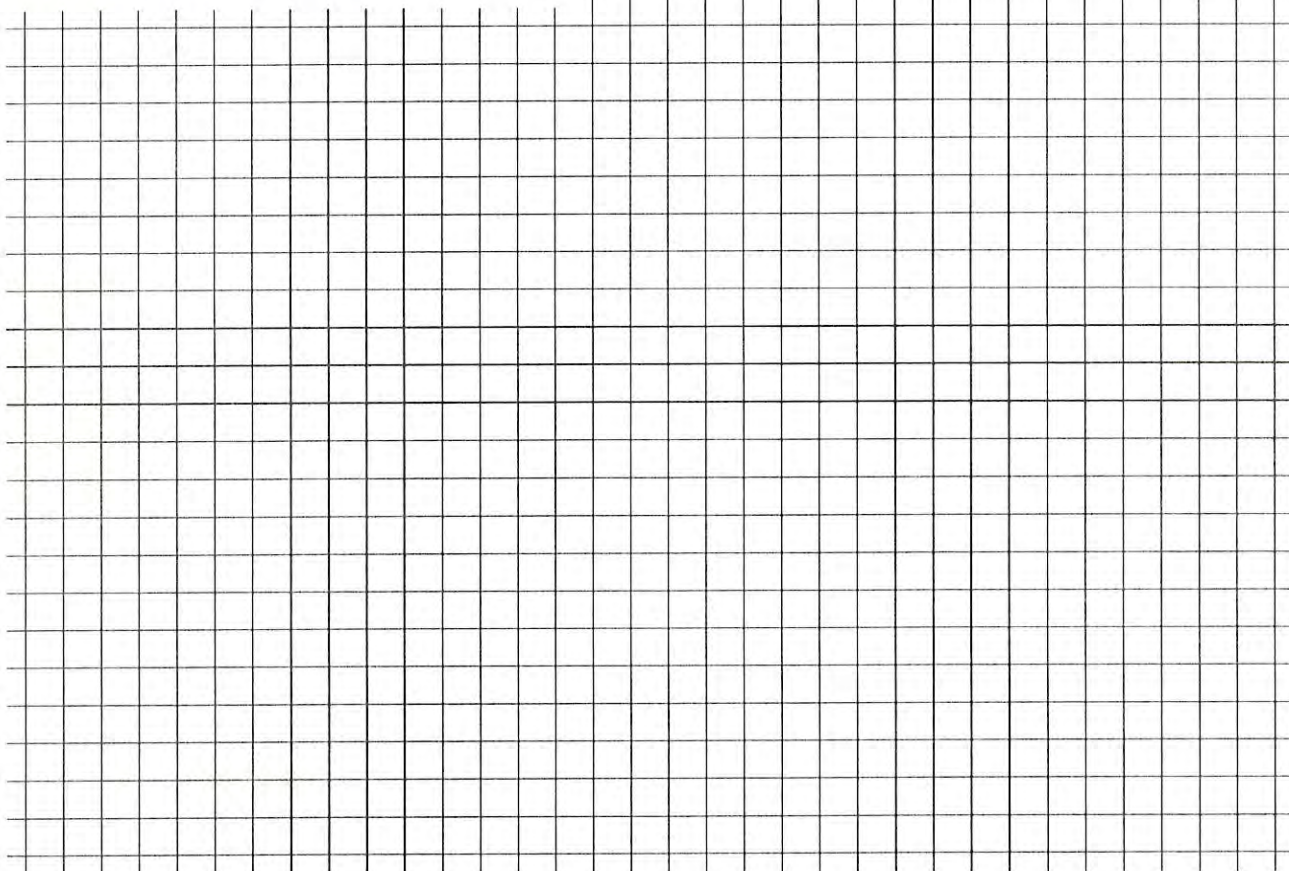
Calcule le plus simplement possible l'aire de chacune des six figures données ci-contre (1 cm² = 4 carreaux).

figure n°	nombre de carreaux	aire en cm ²
1		
2		
3		
4		
5		
6		

20 Quatre carreaux ont une aire de 1 cm^2 . Pour chacune des valeurs ci-dessous, dessine *trois figures* qui ont cette aire.

6 cm^2 9 cm^2 10 cm^2 $0,5 \text{ cm}^2$

(dans chaque cas, trouve un triangle et, si possible, un losange et un carré)



21 Les carrés emboîtés dessinés ci-contre ont pour côtés 1 cm , 2 cm , 3 cm , etc.

Indique leurs aires respectives à gauche de la figure.

Pour chacun des nombres donnés ci-dessous, cherche avec la touche

racine carrée $\sqrt{\quad}$

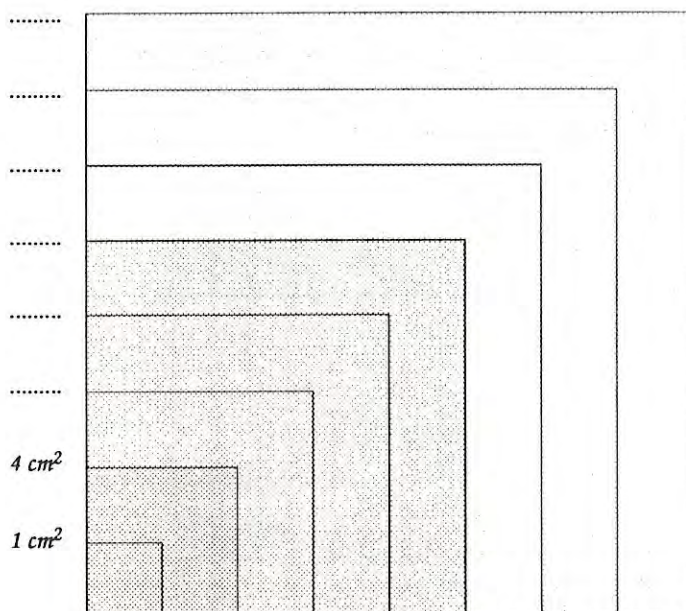
de ta calculatrice le côté du carré qui admet ce nombre pour aire (en cm^2), puis ajoute ces carrés à la figure.

$2,25 \text{ cm}^2$: ; 20 cm^2 :

5 cm^2 : ; 30 cm^2 :

10 cm^2 : ; 42 cm^2 :

15 cm^2 : ; 60 cm^2 :



ce qu'il faut savoir ...

Deux triangles rectangles qui ont les mêmes côtés de l'angle droit sont superposables (on dit aussi qu'ils sont « égaux »).

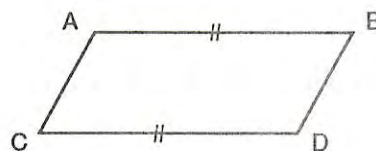
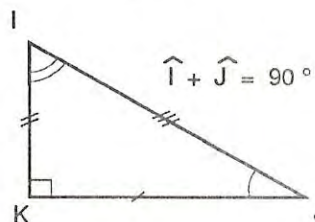
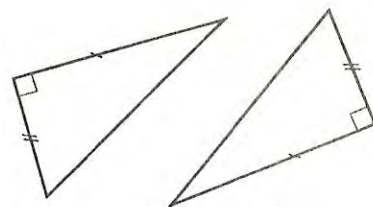
On a alors égalité des hypoténuses et des angles aigus qui se correspondent.

Dans un triangle rectangle, les angles aigus sont complémentaires (leur somme est égale à 90°).

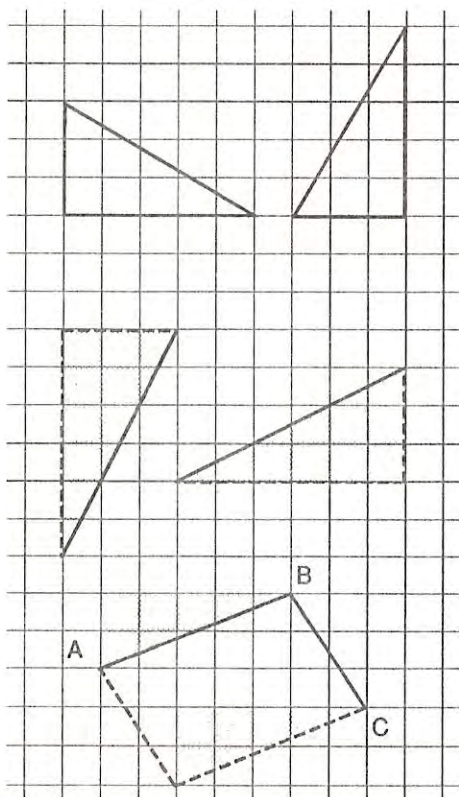
Dans un parallélogramme, les côtés opposés sont égaux et parallèles.

Inversement :

Si AB et CD sont égaux et parallèles, alors ABDC est un parallélogramme. (attention au sens !)



... ce qu'il faut savoir faire

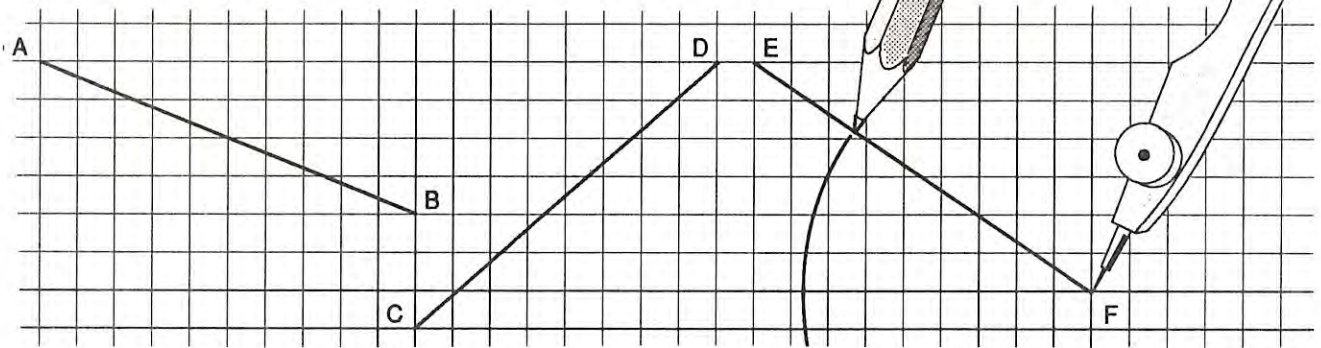


Reconnaître des triangles rectangles égaux lorsqu'ils ont les mêmes côtés de l'angle droit, et en déduire que les hypoténuses et les angles aigus qui se correspondent sont égaux.

Reconnaître que des segments donnés sur un quadrillage sont égaux lorsqu'on peut les faire apparaître comme hypoténuses de triangles rectangles égaux.

Construire le quatrième sommet d'un parallélogramme en trouvant le segment égal et parallèle à l'un des côtés connus. (attention au sens !)

22 Construis soigneusement, sans mesurer (à la règle et au compas), les milieux de AB, CD et EF.



Par rapport au quadrillage, où sont situés les milieux que tu as trouvés ?

23 Cherche le milieu de AB sans mesurer et sans construire :

a) Cas de la figure 1. Complète le raisonnement et marque les égalités sur la figure :

Les triangles rectangles AHI et IKB ont les mêmes

donc : $AI = \dots\dots\dots$ et $\widehat{HAI} = \dots\dots\dots$ Donc : $\widehat{AIB} = \widehat{AIH} + \dots\dots\dots + \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$

En conclusion, le point I du quadrillage est tel que

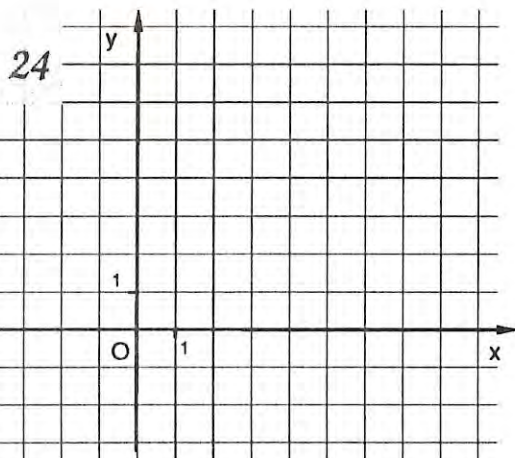
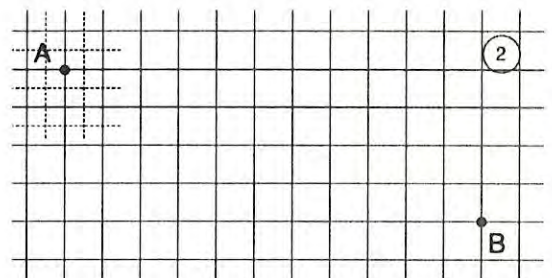
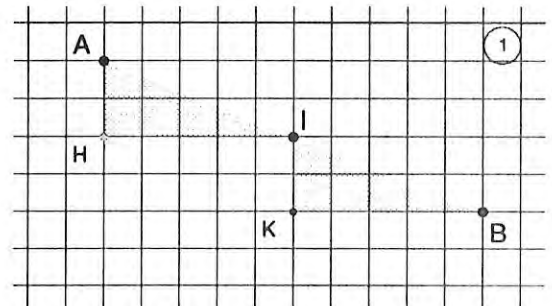
$\dots\dots\dots = \dots\dots\dots$ et $\widehat{AIB} = \dots\dots\dots$

donc I est

b) Cas de la figure 2 : complète le quadrillage pointillé et colorie deux triangles rectangles convenables permettant de trouver I.

Par rapport au nouveau quadrillage, I est

Par rapport au premier quadrillage, I est



Place les points suivants (unités : 1 carreau) :

A(1;6) B(4;6) C(7;4) D(7;1)
E(4;-1) F(1;-1) G(-2;1) H(-2;4)

a) Trace le polygone ABCDEFGHA et les diagonales AE, BF. Elles se coupent en I.

ABEF est un

donc I est

Les coordonnées de I sont (..... ;).

b) Trace de même HD et CG :

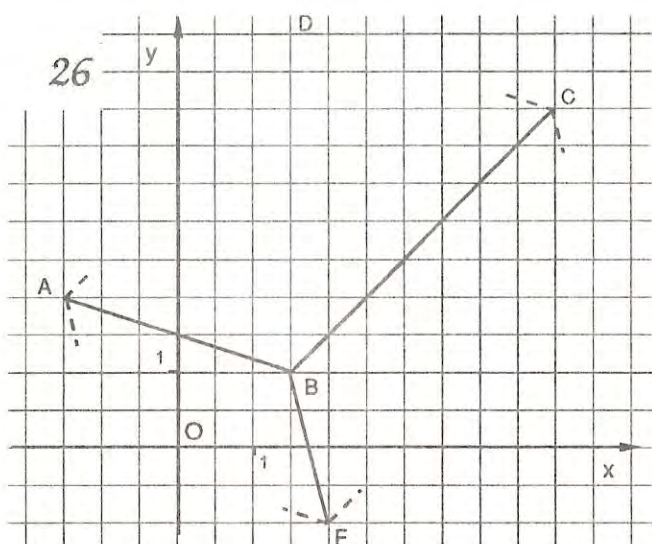
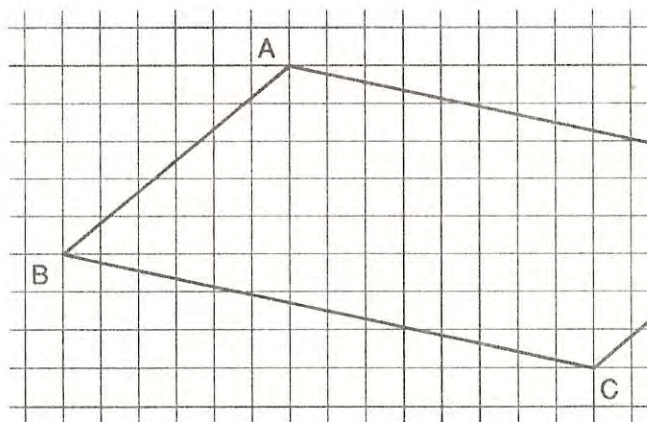
Coordonnées de leur intersection (..... ;).

c) BCFG est un car : 9

25 Nous avons tracé un parallélogramme ABCD sur une feuille quadrillée, mais le sommet D ne tient pas sur la feuille ...

a) En utilisant le quadrillage (et sans prolonger la figure !), trace la partie de la diagonale BD qui est sur le quadrillage.

b) Place ensuite exactement le milieu du côté AD .
(tu dois pouvoir trouver au moins deux méthodes différentes)



Les points A , B , C , F sont quatre sommets d'un parallélépipède rectangle ABCDEFGH dessiné en perspective.

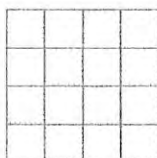
Nous n'avons représenté que les trois arêtes AB , BC et BF .

Complète la figure et trouve les coordonnées des points suivants :

- sommet caché H (..... ;)
- milieu de AD (..... ;)
- centre de ABFE (..... ;)
- centre du parallélépipède (..... ;)

27 Le cube ABCDEFGH ci-contre a été dessiné en perspective sur une feuille quadrillée.

Sur chacune des trois faces visibles, on veut dessiner un damier de seize cases, et ceci sans mesurer, uniquement en utilisant les carreaux ...

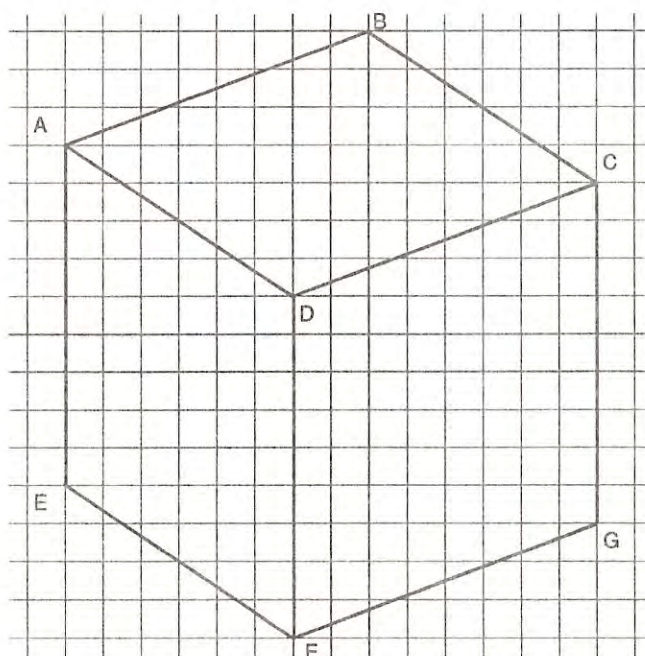


a) Place les points qui découpent AB , BC , CD , AD , EF , FG en quatre parties égales.

b) Utilise ce découpage pour commencer les trois damiers demandés.

c) Comment terminer la figure ?

(commence par tracer au crayon les deux diagonales de la face DCGF, tu les effaceras à la fin)



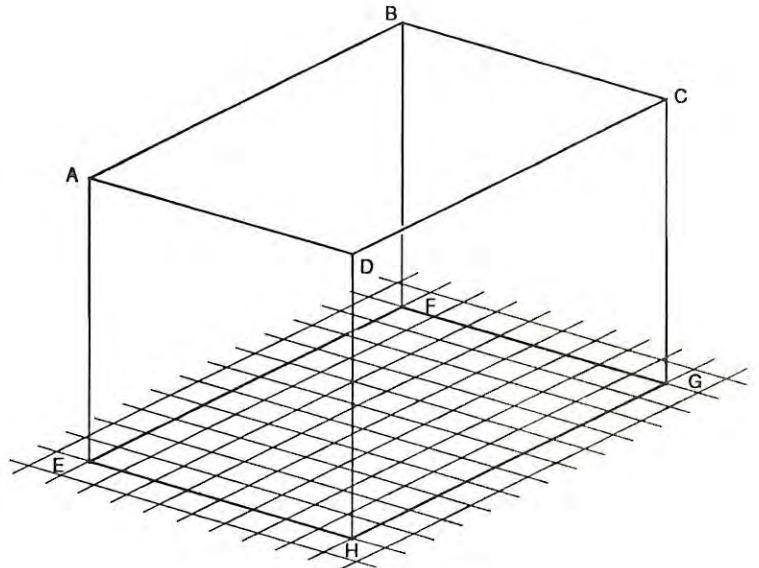
Voici un *parallélépipède rectangle*. Classe les arêtes de longueurs égales :

..... = = =
 = = =
 = = =

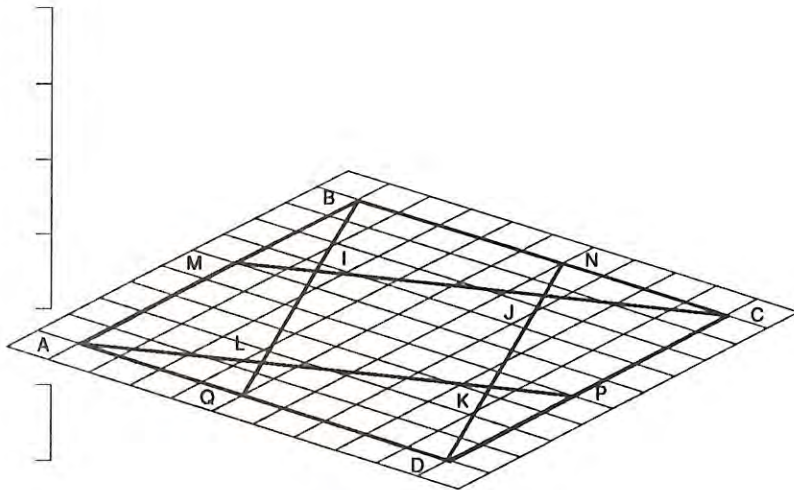
Trace les diagonales de ABCD, puis place les milieux I, J, K, L des arêtes AB, BC, CD et DA.

Les diagonales AC et BD se coupent en P. En utilisant les centres des rectangles IBJP et JCKP, construis les milieux de BI et CK.

Construis de même *sans mesurer* les milieux de AI, BJ, JC.



29



ABCD est la base d'un cube dont les côtés mesurent 4,5 cm.

Complète ce cube en commençant par tracer les quatre arêtes verticales.

Trace ensuite sur la face supérieure du cube une figure identique à celle que nous avons dessinée sur la base ABCD.

Colorie enfin le *prisme droit* de base IJKL et de hauteur égale à celle du cube.

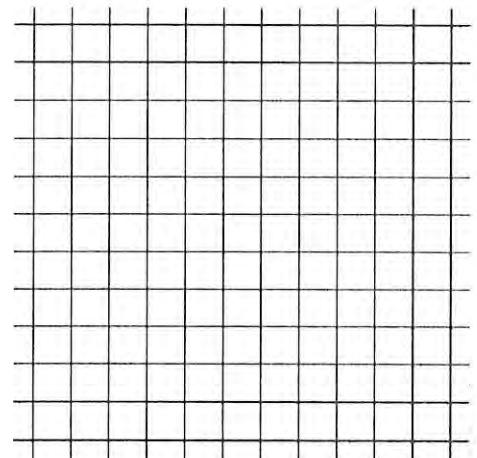
En utilisant le quadrillage ci-contre, construis en vraie grandeur la base ABCD du cube que tu as dessiné à l'exercice précédent, puis reporte soigneusement les quatre segments BQ, CM, DN et AP.
 (les petits carreaux doivent correspondre à ceux de l'exercice 29)

Tu viens de tracer quatre triangles rectangles. Marque les angles égaux.

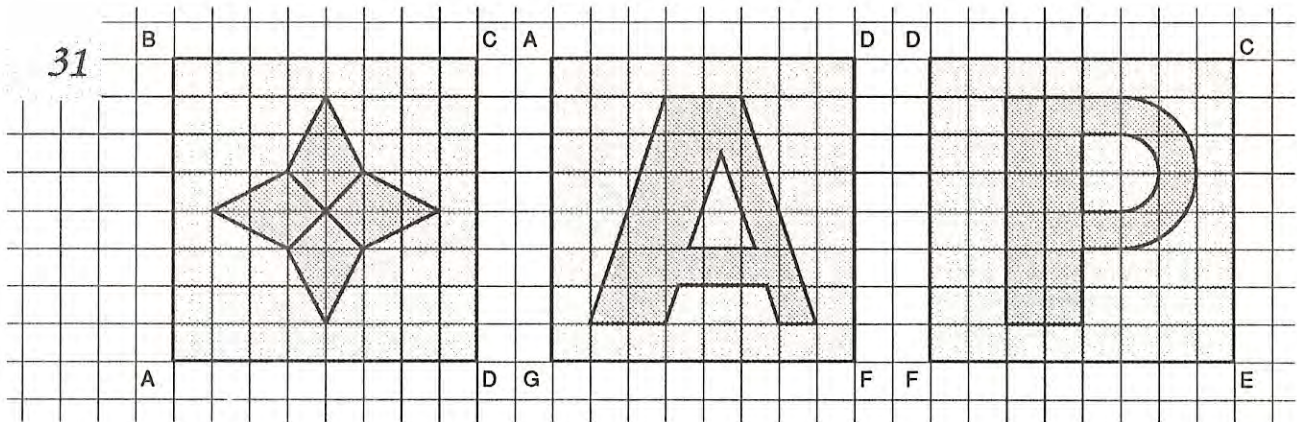
Trouve *sans mesurer* l'angle $\widehat{DJC}$:

$$\widehat{DJC} = 180^\circ - (\dots + \dots) =$$

$$\widehat{DJC} = 180^\circ - \dots = \dots$$

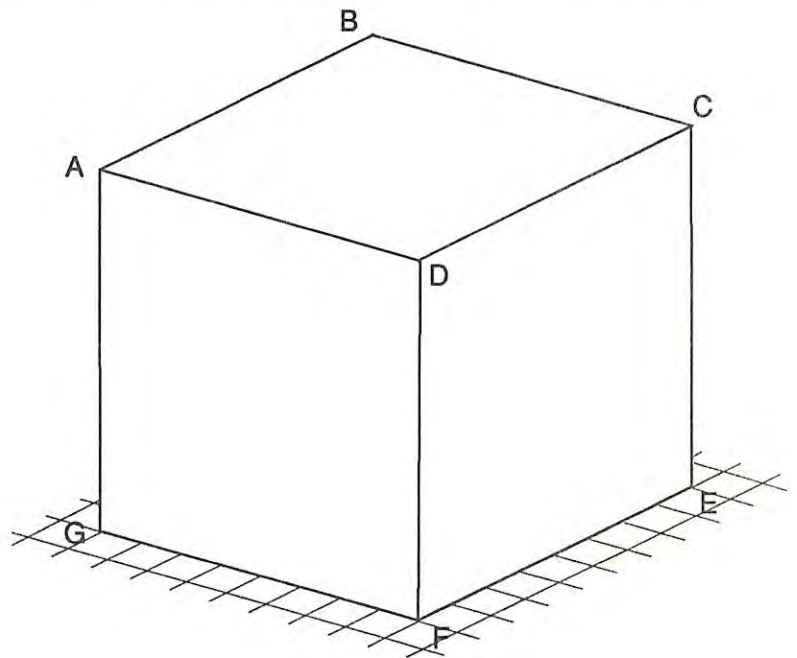


31

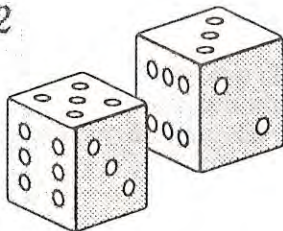


Les trois faces visibles du cube ABCDEFGH sont dessinées ci-dessus.

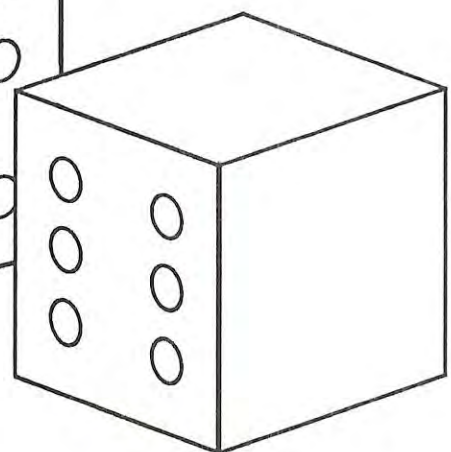
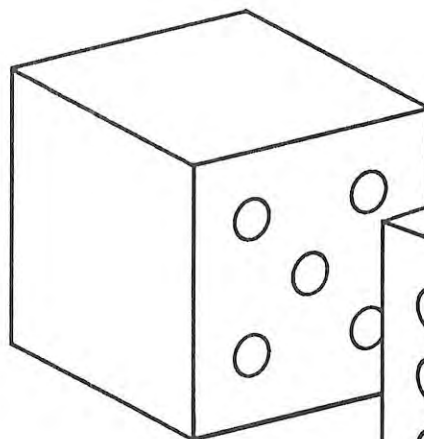
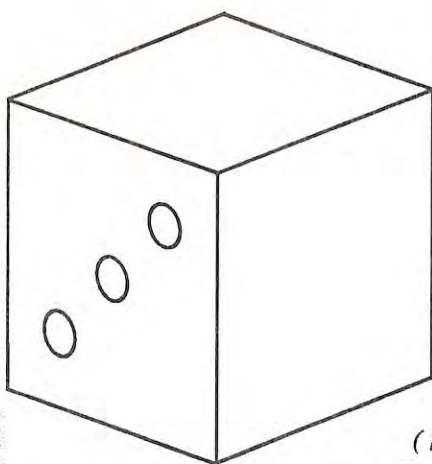
Reporte-les soigneusement sur la figure de droite.
(commence par placer au crayon le quadrillage de chaque face)



32



En lançant trois dés, nous avons obtenu « 4 - 2 - 1 » (dans le désordre). Trouve les faces manquantes et complète soigneusement la figure.

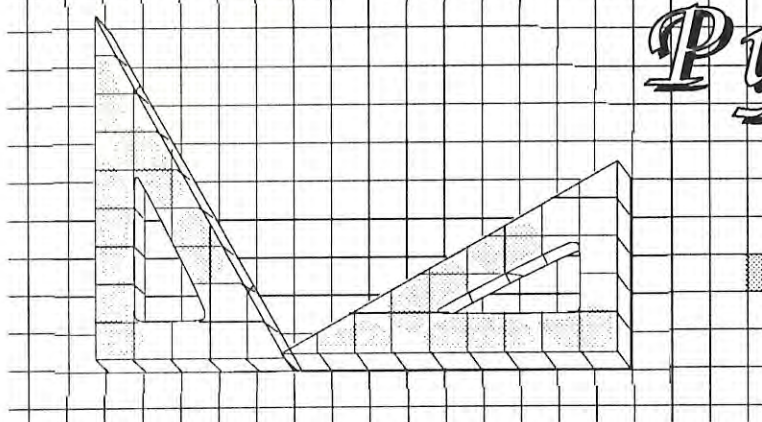


12

(Sur un dé, la somme des faces opposées est toujours égale à 7 ...)

2

le théorème de Pythagore



ABC est un triangle rectangle.

33 Mesure, puis calcule :

$AC = b = \dots\dots\dots$, $BC = a = \dots\dots\dots$, $AB = c = \dots\dots\dots$,

$b^2 = b \times b = \dots\dots\dots$, $a^2 = a \times a = \dots\dots\dots$, $c^2 = c \times c = \dots\dots\dots$.

La mesure de $AB = c$ ne « tombe pas juste ».

34 Nous allons chercher la *valeur exacte* ...

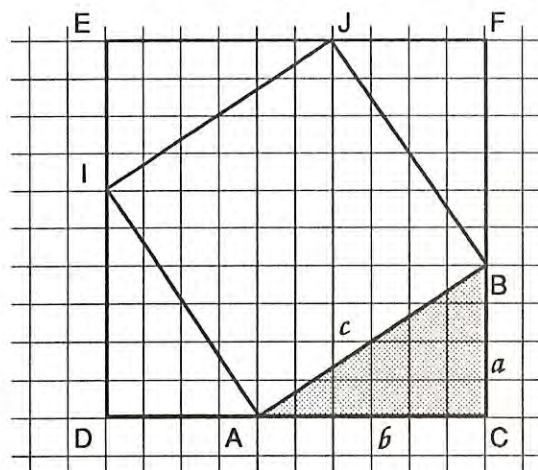
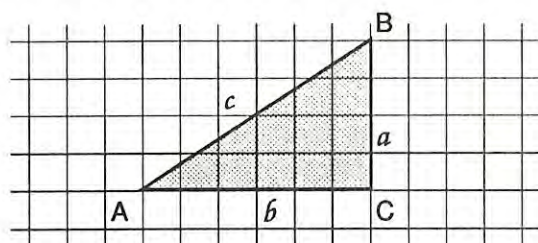
Commence par colorier en bleu les triangles égaux à ABC sur la figure ci-contre, puis en rouge le quadrilatère IJBA. Vérifie (avec ta règle graduée et ton équerre) que IJBA est un *carré*. Etudie les aires :

l'aire de EFCD vaut : $\dots\dots\dots \times \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$,

l'aire bleue vaut : $4 \times \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$,

donc l'aire rouge vaut : $\dots\dots\dots$.

donc $c^2 = \dots\dots\dots$ et $c = \sqrt{\dots\dots\dots} = \dots\dots\dots$.



Recommence l'exercice avec le triangle ABC donné ci-contre (complète d'abord la figure) :

35 $AC = b = \dots\dots\dots$, $BC = a = \dots\dots\dots$,

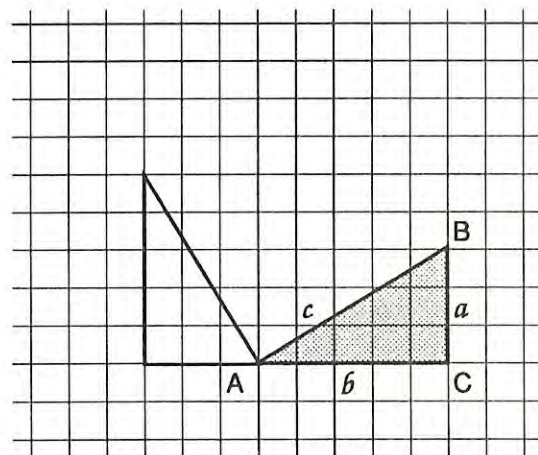
l'aire totale vaut : $\dots\dots\dots \times \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$,

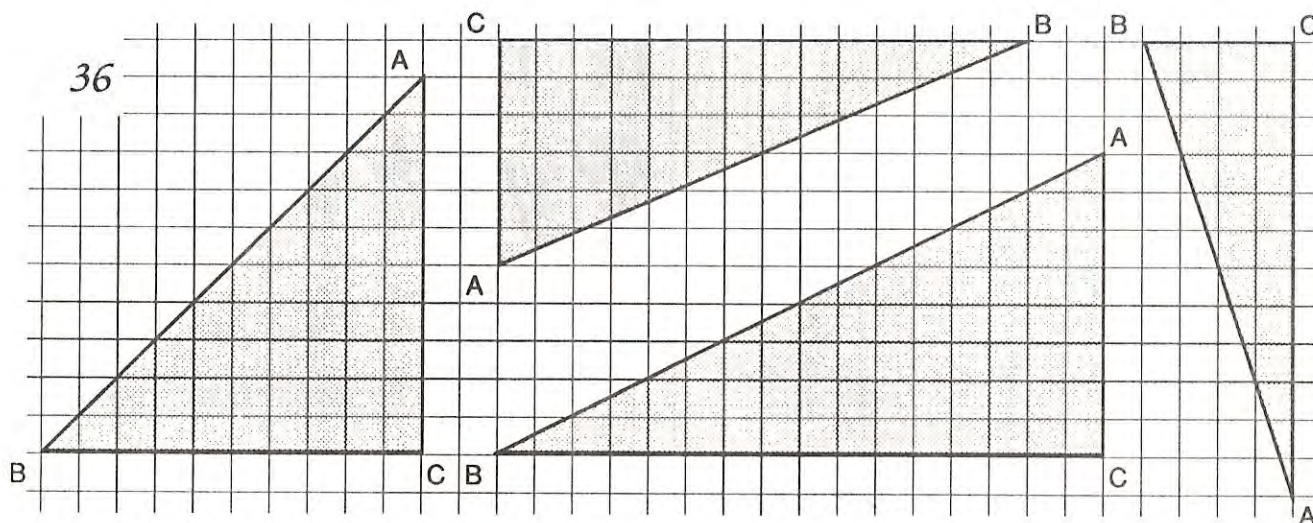
l'aire bleue vaut : $4 \times \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$,

donc l'aire rouge vaut : $\dots\dots\dots$.

donc $c^2 = \dots\dots\dots$ et $c = \sqrt{\dots\dots\dots} = \dots\dots\dots$.

Compare (sans écrire sur cette feuille) la valeur de c à la mesure de AB . Compare aussi c^2 à $a^2 + b^2$.

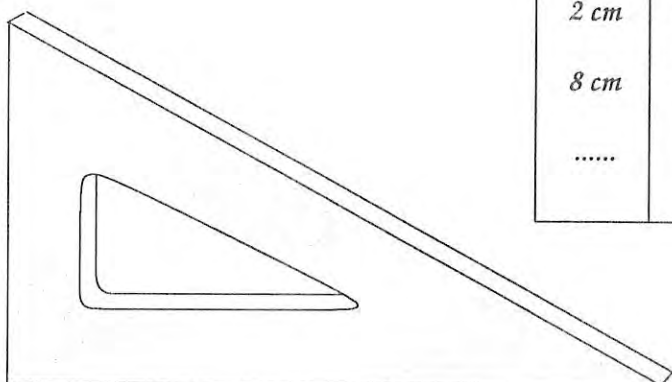




Les quatre triangles rectangles ci-dessus ont des côtés de l'angle droit faciles à mesurer.
(2 carreaux = 1 cm)

Effectue les mesures et les calculs qui sont demandés dans le tableau.

côtés donnés		calcule	calcule	mesure	calcule
BC = a	AC = b	$a^2 + b^2$	$\sqrt{a^2 + b^2}$	AB = c	$AB^2 = c^2$
5 cm	5 cm				
7 cm	3 cm				
2 cm	6 cm				
8 cm	4 cm				
.....					



Complète la dernière ligne du tableau avec les mesures précises, en centimètres, des trois côtés de ton équerre (attention , c doit correspondre à l'hypoténuse).

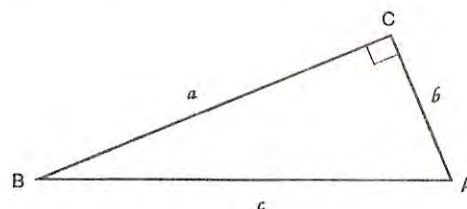
37 le théorème de Pythagore

La propriété que tu as certainement remarquée en complétant le tableau précédent est vraie pour tous les triangles rectangles. On dit que :

Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux côtés de l'angle droit.

Ecris la formule pour le triangle rectangle ABC dessiné ci-contre :

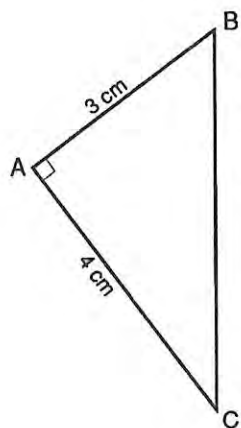
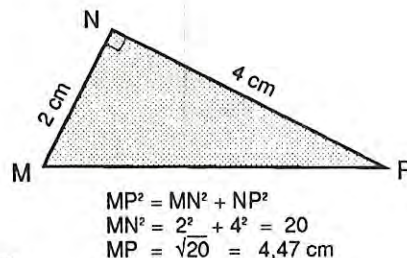
$$AB^2 = \dots + \dots$$



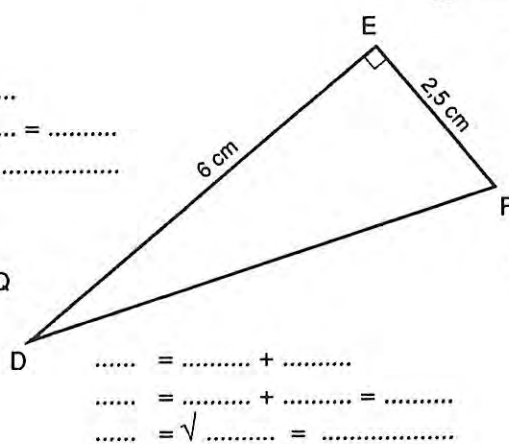
14 Réécris-la ci-contre en désignant les longueurs par a , b , c :

$$\dots = \dots + \dots$$

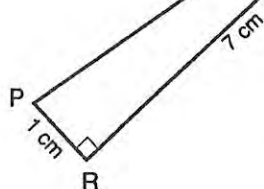
38 Comme dans l'exemple ci-contre, écris pour chaque triangle la relation donnée par le théorème de Pythagore et calcule l'hypoténuse.



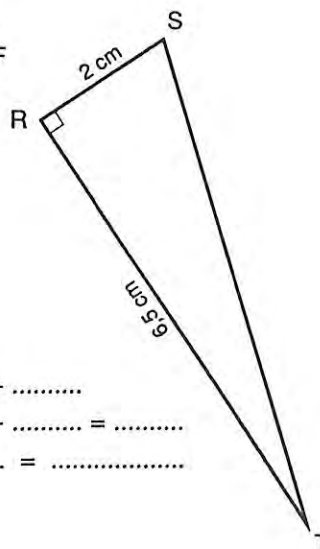
$BC^2 = \dots + \dots$
 $BC^2 = \dots + \dots = \dots$
 $BC = \sqrt{\dots} = \dots$



$\dots = \dots + \dots$
 $\dots = \dots + \dots = \dots$
 $\dots = \sqrt{\dots} = \dots$



$PQ^2 = \dots + \dots$
 $\dots = \dots + \dots = \dots$
 $\dots = \sqrt{\dots} = \dots$



$\dots = \dots + \dots$
 $\dots = \dots + \dots = \dots$
 $\dots = \sqrt{\dots} = \dots$

Le quadrillage est tel que 2 carreaux = 1 cm.

39 a) mesure avec précision les segments :

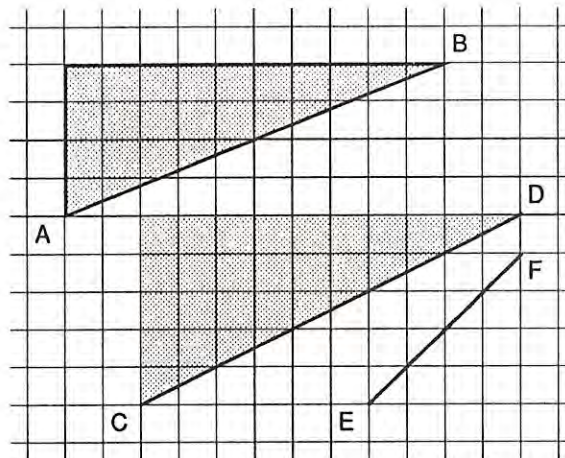
$AB = \dots$, $CD = \dots$, $EF = \dots$.

b) compare avec les valeurs données par le calcul :

$AB^2 = \dots + \dots = \dots$,
 $AB = \sqrt{\dots} = \dots$,

$CD^2 = \dots + \dots = \dots$,
 $CD = \sqrt{\dots} = \dots$,

$EF^2 = \dots + \dots = \dots$,
 $EF = \sqrt{\dots} = \dots$.



40 ABCD est un jardin rectangulaire de longueur L et de largeur l . Trace la diagonale AD et colorie le triangle ABD.

a) On appelle d la mesure de AD. Ecris la relation permettant de calculer d^2 :

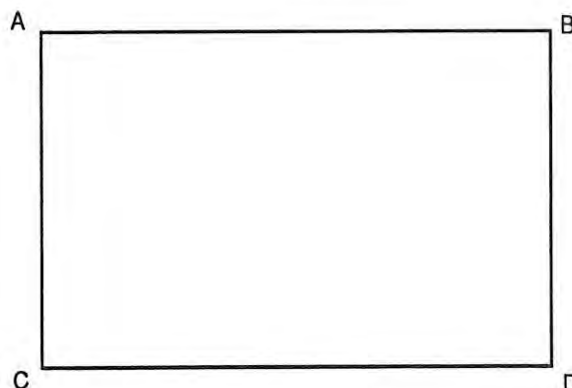
$d^2 = \dots + \dots$

Calcule d si on a $L = 40 \text{ m}$ et $l = 25 \text{ m}$:

$d^2 = \dots + \dots = \dots$, $d = \dots$.

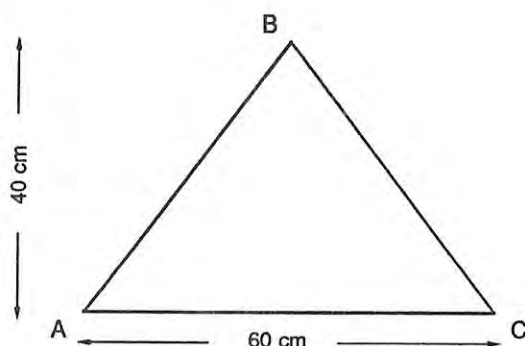
b) Place le point M de DC situé à 10 m de C. Colorie ACM et calcule AM :

$AM^2 = \dots + \dots = \dots$, $AM = \dots$.



41

Une plaque de tôle a la forme d'un *triangle isocèle* de base 60 cm et de hauteur 40 cm.



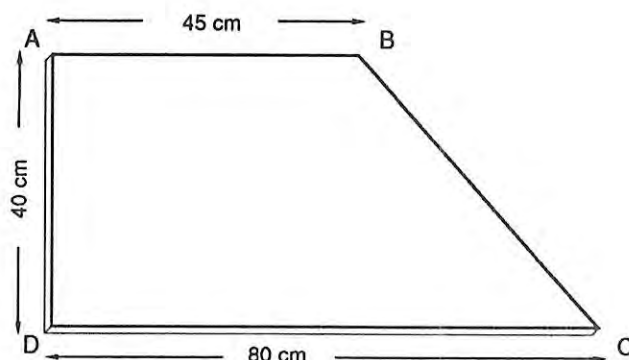
Trace la hauteur BH, puis colorie le triangle ABH.

Calcule les côtés AB et BC du triangle ABC :

.....

42

Une planche a la forme d'un trapèze rectangle de hauteur 40 cm et de bases 45 cm et 80 cm.

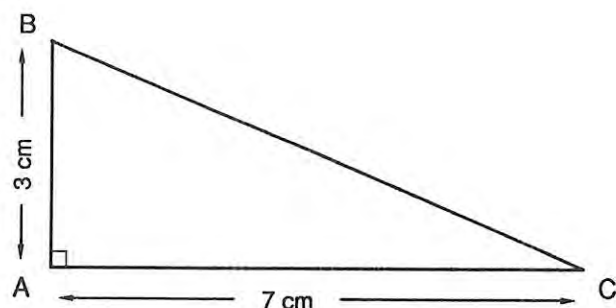


Trace la hauteur BH, puis colorie le triangle CBH.

Calcule la longueur du côté BC :

.....

43



On a construit un triangle rectangle ABC de côtés :

$$AB = 3 \text{ cm}, \quad AC = 7 \text{ cm}.$$

Calcule BC^2 , puis BC :

$$BC^2 = \dots + \dots = \dots,$$

$$BC = \sqrt{\dots} = \dots.$$

Construis soigneusement le point D tel que $BD = 3 \text{ cm}$ et tel que le triangle BDC soit rectangle en B.

$$CD^2 = \dots + \dots = \dots,$$

$$CD = \sqrt{\dots} = \dots.$$

44 On considère le repère $(Ox; Oy)$, avec le *carreau* comme unité sur les axes. Place les points :

$A(11; 0)$, $B(10; 4)$, $C(10; 5)$, $D(9; 6)$, $E(8; 8)$.

En coloriant des triangles rectangles convenables, calcule :

$$OB^2 = \dots + \dots = \dots,$$

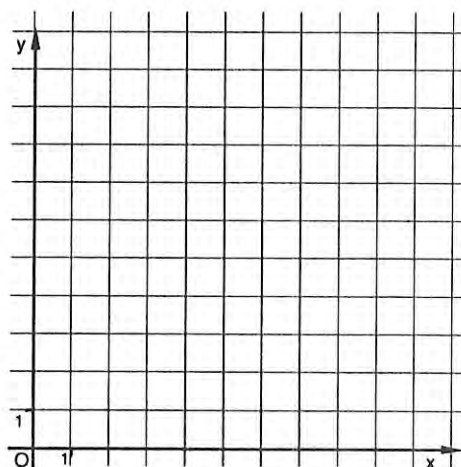
$$OC^2 = \dots + \dots = \dots,$$

$$OD^2 = \dots + \dots = \dots,$$

$$OE^2 = \dots + \dots = \dots,$$

Classe les distances OA, OB, OC, OD, OE :

..... < < < <



ce qu'il faut savoir ...

le Théorème de Pythagore

Dans un triangle rectangle, le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des côtés de l'angle droit.

Si on appelle A, B, C les sommets et si l'angle droit est en C, on a :

$$AB^2 = (BC \times BC) + (CA \times CA)$$

ou encore :

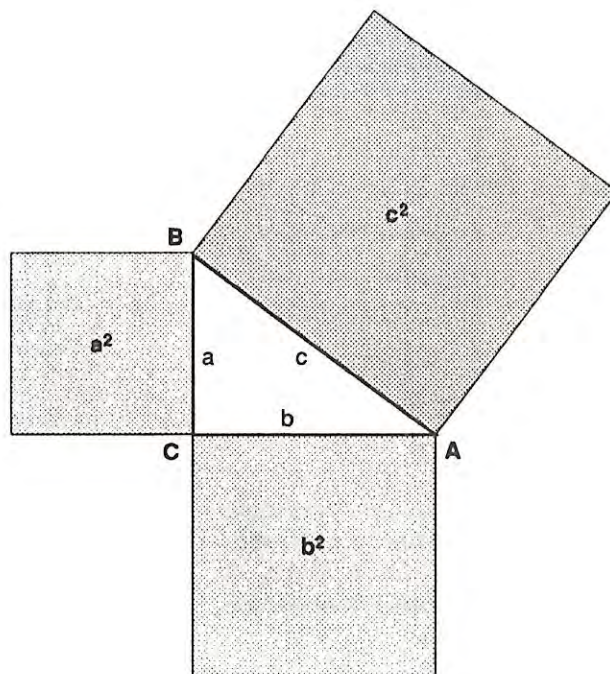
$$AB^2 = BC^2 + CA^2$$

En notant les longueurs des côtés par des lettres,

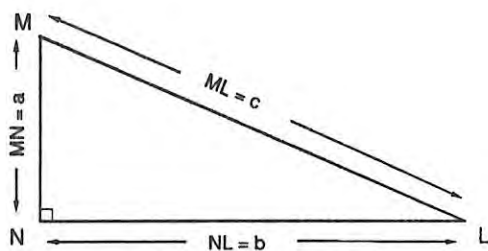
$$AB = c, \quad BC = a, \quad CA = b,$$

on a :

$$c^2 = a^2 + b^2.$$



... ce qu'il faut savoir faire



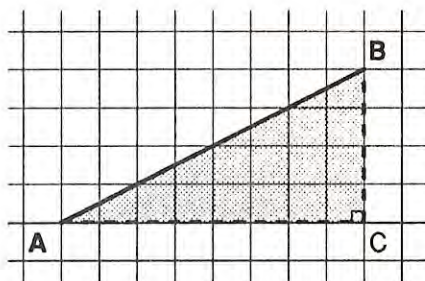
Si on connaît les longueurs des côtés de l'angle droit dans un triangle rectangle, la longueur de l'hypoténuse se calcule à l'aide de la formule :

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Exemple : si $a = 3$ cm et si $b = 2$ cm, on a :

$$c^2 = 3^2 + 2^2 = 13.$$

$$\text{Donc : } c = \sqrt{13} \approx 3,605 \text{ cm.}$$



Si A et B sont deux points d'un quadrillage, on peut calculer leur distance.

Exemple : sur le dessin $AC = 4$ cm, $BC = 2$ cm, donc :

$$AB^2 = 4^2 + 2^2 = 20$$

$$\text{et } AB = \sqrt{20} \approx 4,472 \text{ cm.}$$

La carte ci-contre est dessinée sur du papier millimétré.

a) Relève les coordonnées des villes dans le repère orthonormé.

Exemple: Paris (0 ; 2,7)

Aix (..... ;)
 Brest (..... ;)
 Le Puy (..... ;)
 Lille (..... ;)
 Lyon (..... ;)
 Metz (..... ;)
 Nancy (..... ;)
 Nice (..... ;)
 Nîmes (..... ;)
 Rouen (..... ;)

b) Colorie un triangle rectangle dont l'hypoténuse est le segment joignant O à Metz, et dont les autres côtés sont sur les axes.

c) Utilise le théorème de Pythagore pour calculer la distance entre le point O et le point M représentant Metz :

en centimètres, sur la carte :

$$OM^2 = \dots + \dots = \dots,$$

$$OM = \sqrt{\dots} = \dots$$

en kilomètres, dans la réalité :

$$OM = \dots \times \dots = \dots$$

d) Calcule de la même façon la distance entre le point O et le point B représentant Brest :

en centimètres, sur la carte :

$$OB^2 = \dots + \dots = \dots,$$

$$OB = \sqrt{\dots} = \dots$$

en kilomètres, dans la réalité :

$$OB = \dots \times \dots = \dots$$

e) Trouve un triangle permettant de calculer la distance entre les points L représentant Lille et N représentant Nice :

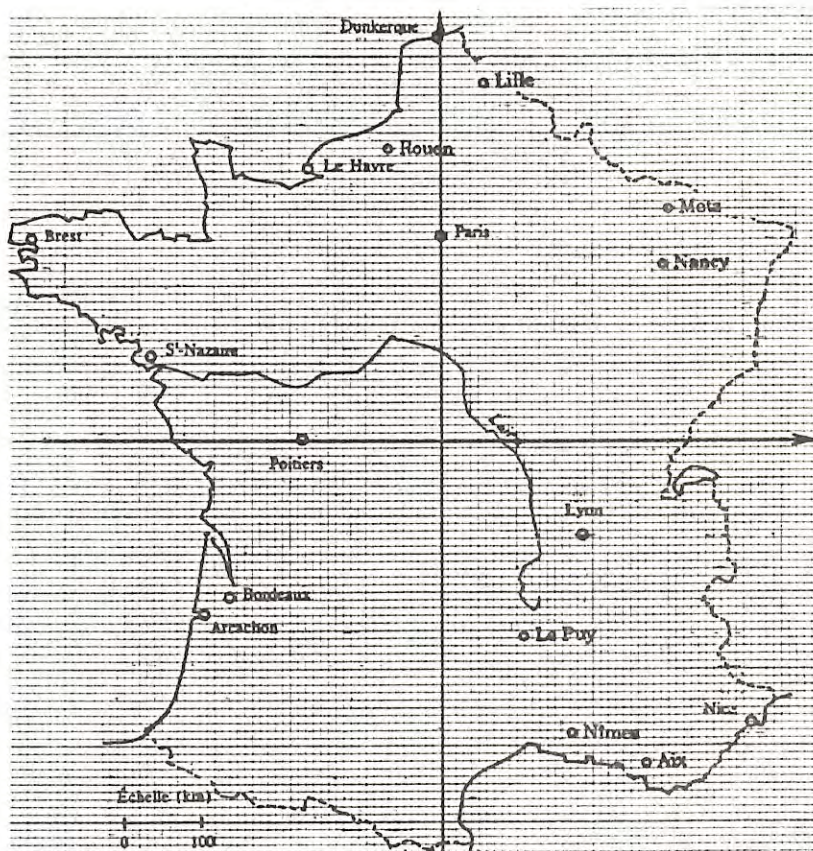
en centimètres, sur la carte :

$$LN^2 = \dots + \dots = \dots,$$

$$LN = \sqrt{\dots} = \dots$$

en kilomètres, dans la réalité :

$$LN = \dots \times \dots = \dots$$

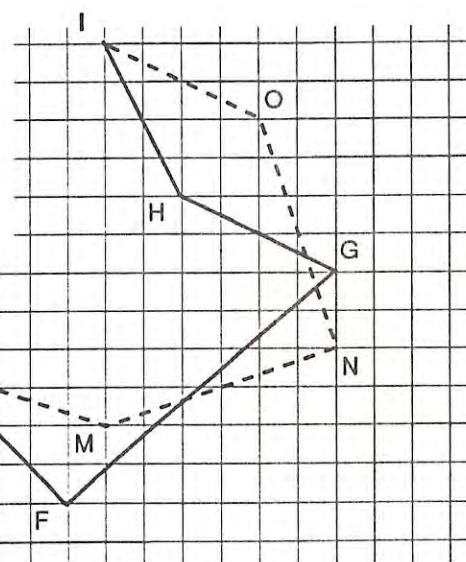


Calcule la longueur (en cm) du chemin ABCDEFGHI :

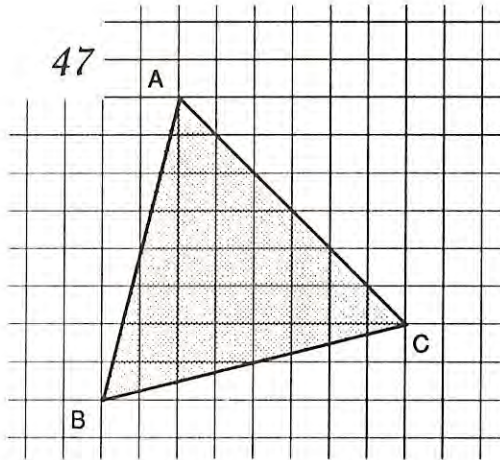
46

Calcule la longueur (en cm) du chemin AJKLMNOI :

Quelle est la distance en ligne droite entre les points A et I ?



47



Colorie deux triangles rectangles égaux montrant que le triangle ABC est un triangle isocèle.

Le triangle ABC est-il équilatéral ? (calcule en prenant le carreau comme unité)

$$AB^2 = \dots + \dots = \dots, \quad AB = \dots,$$

$$CB^2 = \dots + \dots = \dots, \quad CB = \dots,$$

$$AC^2 = \dots + \dots = \dots, \quad AC = \dots,$$

.....

48

Colorie des triangles rectangles permettant de calculer les longueurs des côtés du triangle ci-contre (calcule en prenant le carreau pour unité)

$$AB^2 = \dots + \dots = \dots, \quad AB = \dots,$$

$$BC^2 = \dots + \dots = \dots, \quad BC = \dots,$$

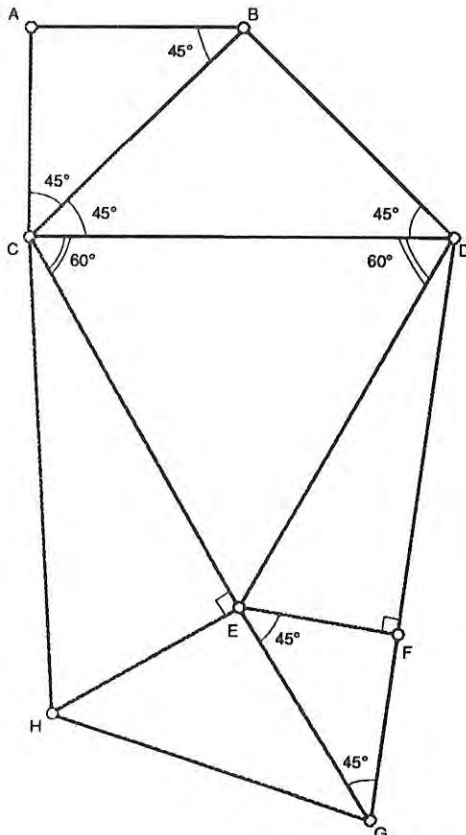
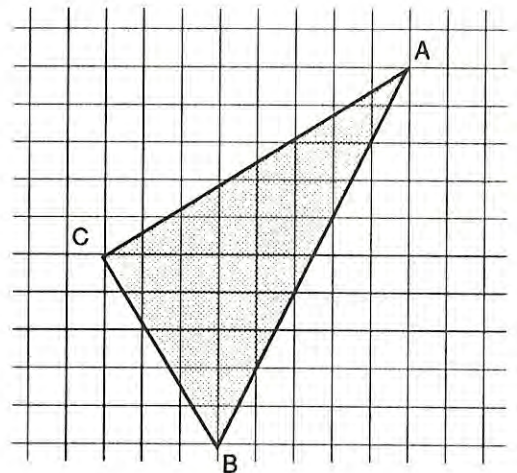
$$CA^2 = \dots + \dots = \dots, \quad CA = \dots$$

Compare AB^2 et $AC^2 + CB^2$:

.....

Le triangle ABC est-il un triangle rectangle ?

.....



Le schéma ci-contre représente approximativement un système de poutrelles.

49

Marque les angles que tu peux calculer.

a) On suppose $AB = 1$ m. Calcule les côtés suivants :

$$BC^2 = \dots + \dots = \dots, \quad BC = \dots,$$

$$CD^2 = \dots + \dots = \dots, \quad CD = \dots,$$

b) On suppose $CH = 2,2$ m. Complète :

$$\dots = EH^2 + \dots, \quad \dots = EH^2 + \dots,$$

$$EH^2 = \dots - \dots = \dots, \quad EH = \dots,$$

c) On suppose $DF = 1,9$ m. Complète :

$$\dots = EF^2 + \dots, \quad \dots = EF^2 + \dots,$$

$$EF^2 = \dots - \dots = \dots, \quad EF = \dots,$$

d) On suppose $HG = 1,2$ m, compare HG^2 et $EH^2 + EG^2$, le triangle EGH est-il un triangle rectangle ?

.....

L'angle en E est-il supérieur ou inférieur à 90° ?

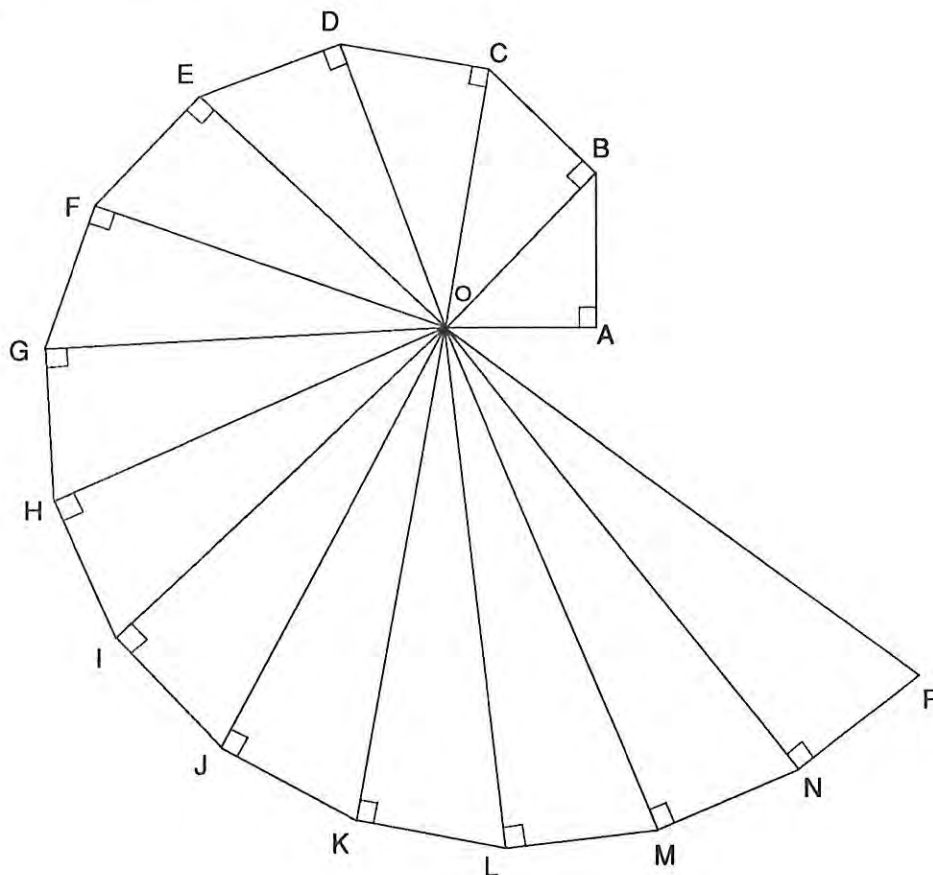
.....

50 Nous avons commencé à dessiner une «spirale» en accolant des triangles rectangles.

$OA = AB = BC = CD = \dots = MN = NP = 2 \text{ cm}$.

Continue soigneusement la figure en construisant les points $Q, R, S, T, \dots$ jusqu'à ce que ta spirale coupe l'arc de cercle placé en haut et à droite.

(ce cercle a pour centre le point O et pour rayon 9 cm)



51 Pour savoir quel est le segment exact de ta construction qui doit couper le cercle, calcule les longueurs des rayons successifs $OB, OC, \dots, ON, OP, OQ, OR, \dots$:

$OB^2 = \dots + \dots = \dots$,
 $OC^2 = \dots + \dots = \dots$,
 $OD^2 = \dots + \dots = \dots$,
 $OE^2 = \dots + \dots = \dots$,
 $OF^2 = \dots + \dots = \dots$,
 $OG^2 = \dots + \dots = \dots$,
 $OH^2 = \dots + \dots = \dots$,
 $OI^2 = \dots + \dots = \dots$,
 $OJ^2 = \dots + \dots = \dots$,
 $OK^2 = \dots + \dots = \dots$,
 $OL^2 = \dots + \dots = \dots$,

$OB = \dots$,
 $OC = \dots$,
 $OD = \dots$,
 $OE = \dots$,
 $OF = \dots$,
 $OG = \dots$,
 $OH = \dots$,
 $OI = \dots$,
 $OJ = \dots$,
 $OK = \dots$,
 $OL = \dots$,

$OM^2 = \dots + \dots = \dots$,
 $ON^2 = \dots + \dots = \dots$,
 $OP^2 = \dots + \dots = \dots$,
 $OQ^2 = \dots + \dots = \dots$,
 $OR^2 = \dots + \dots = \dots$,
 $OS^2 = \dots + \dots = \dots$,
 $OT^2 = \dots + \dots = \dots$,
 $OU^2 = \dots + \dots = \dots$,
 $OV^2 = \dots + \dots = \dots$,
 $OW^2 = \dots + \dots = \dots$,
 $OX^2 = \dots + \dots = \dots$,

$OM = \dots$,
 $ON = \dots$,
 $OP = \dots$,
 $OQ = \dots$,
 $OR = \dots$,
 $OS = \dots$,
 $OT = \dots$,
 $OU = \dots$,
 $OV = \dots$,
 $OW = \dots$,
 $OX = \dots$,

52

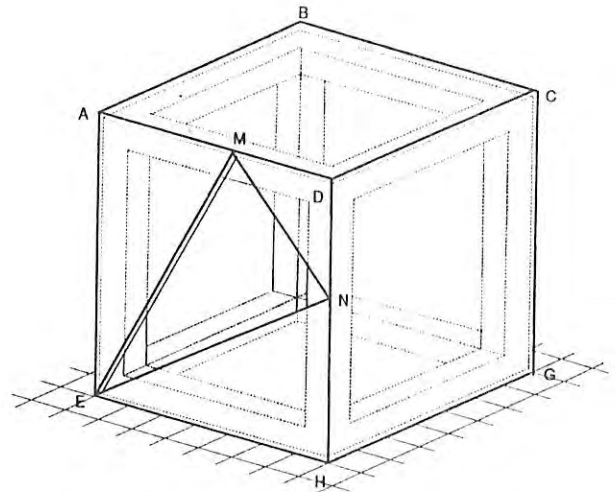
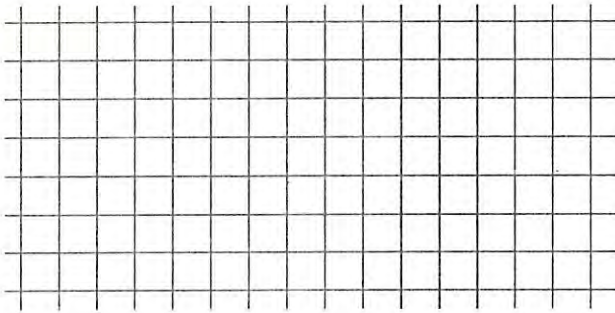
On a découpé sur la face ADHE du cube ci-contre un triangle AMN.

L'arête du cube est $AE = 70 \text{ cm}$, les points M et N sont tels que :

$$\frac{AM}{AD} = \frac{HN}{HD} = \frac{4}{7}$$

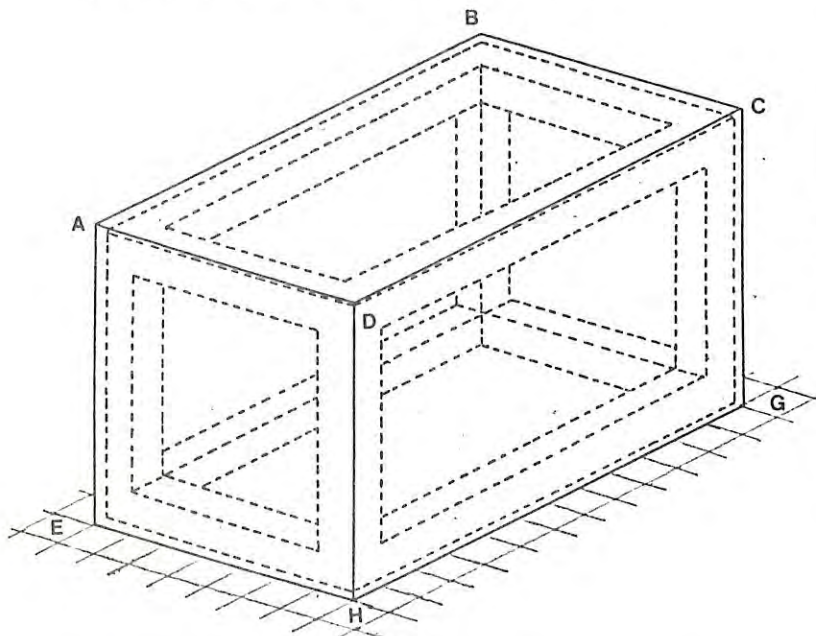
Calcule : $AM = \dots\dots\dots$, $MD = \dots\dots\dots$,
 $HN = \dots\dots\dots$, $ND = \dots\dots\dots$.

Dessine le rectangle ADHE à une échelle convenable sur le quadrillage ci-dessous, puis reporte le triangle EMN.



Calcule les longueurs EM, EN et MN :

.....



Voici un parallélépipède rectangle.

53 $AB = 96 \text{ cm}$, $DH = AD = 56 \text{ cm}$.

Nous avons représenté sur le quadrillage ci-contre un schéma de la face ABCD, et nous avons dessiné sur celle-ci un triangle PQR.

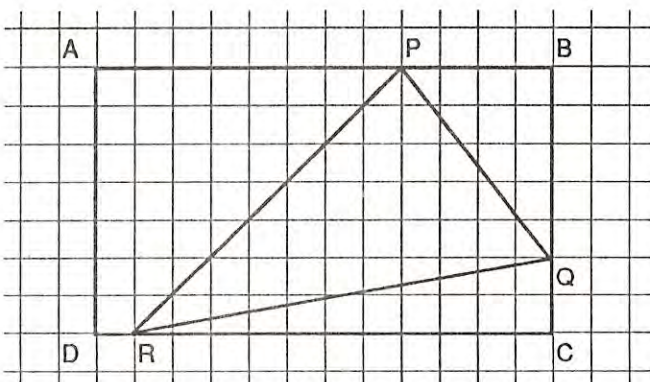
Reporte le triangle PQR sur la figure de l'espace en tenant bien compte des indications données par le quadrillage.

Calcule les longueurs de PQ, QR et RP :

.....

Le triangle PQR est-il un triangle rectangle ?

.....



54 ABCDEFGH est un parallépipède rectangle dont les dimensions sont les suivantes :

$AB = 115 \text{ cm}$, $BC = 65 \text{ cm}$, $AD = 62 \text{ cm}$.

Le quadrillage ci-dessous est à une échelle telle que un carreau représente 10 cm , dessine sur ce quadrillage les faces ABCD, CGHD et ADHE en faisant apparaître, à chaque fois, la diagonale correspondant à celle qui est représentée sur la figure de l'espace.

Calcule les longueurs EG , EB et BG :

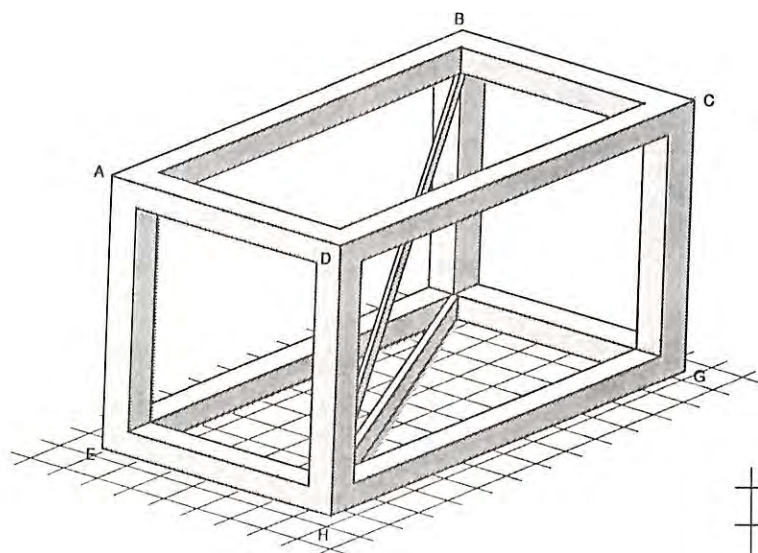
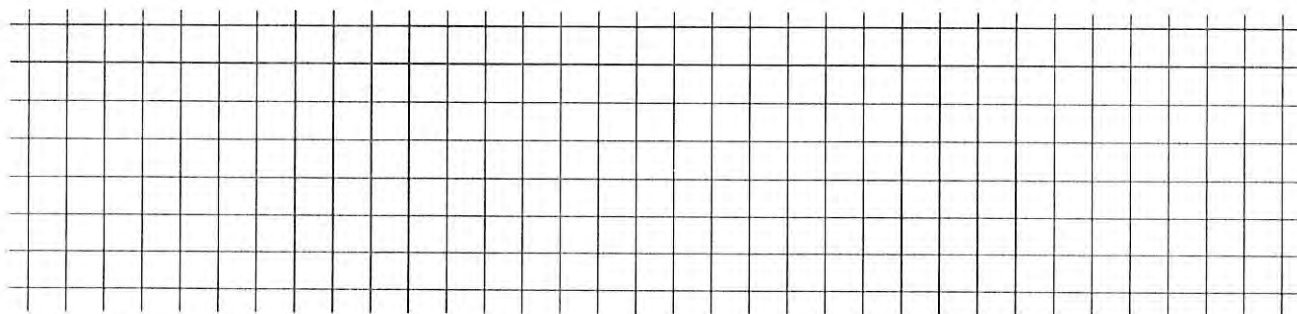
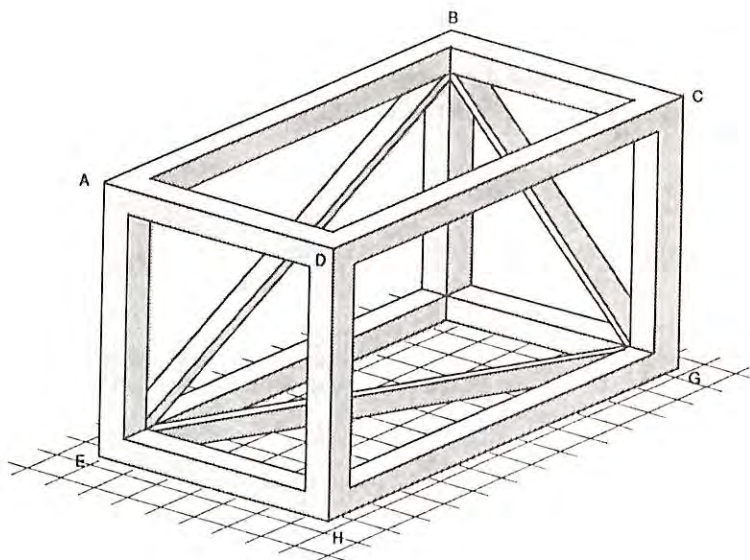
.....

.....

.....

.....

.....



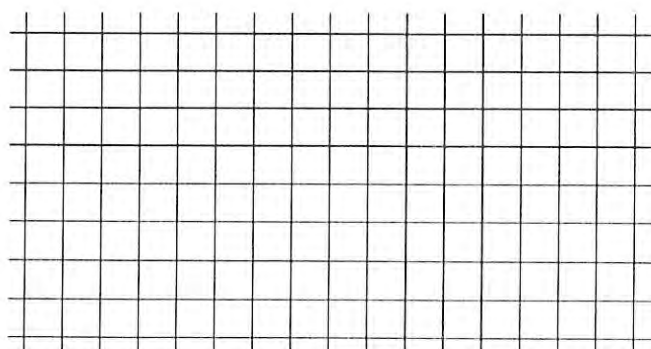
55 On veut calculer la longueur de la diagonale intérieure BH du parallépipède précédent.

Reporte soigneusement sur le quadrillage ci-dessous (un carreau = 10 cm), le rectangle DBFH . (attention, il faut utiliser un résultat de l'exercice précédent !)

Calcule BH :

.....

.....

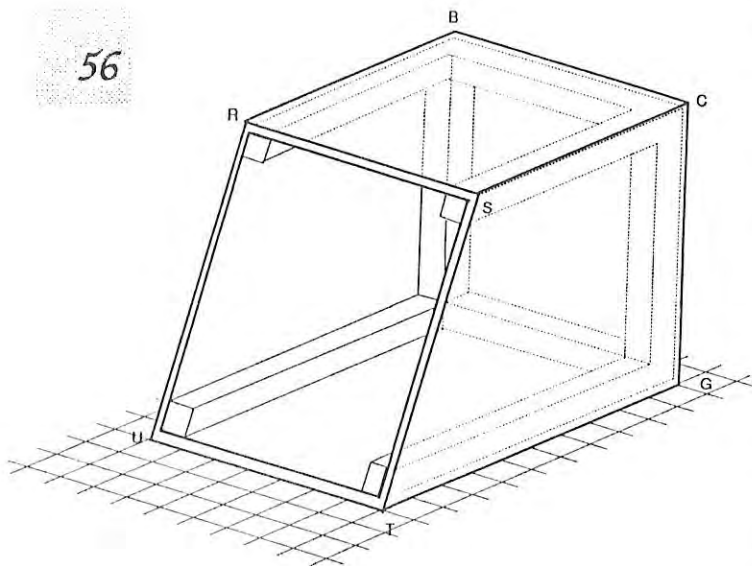


Quelles sont les autres diagonales intérieures du parallépipède ?

22 Quelles sont leurs longueurs ?

.....

56



On a découpé un parallélépipède rectangle ABCDEFGH suivant un plan oblique, parallèle à l'arête BC.

On suppose :

$$BC = CG = 1 \text{ m}, \quad CS = 1 \text{ m}, \quad GT = 1,52 \text{ m}.$$

a) Représente le trapèze SCGT sur le quadrillage, avec une échelle telle que :

$$7 \text{ carreaux} = 1 \text{ m}.$$

b) Calcule TS :

$$TS^2 = \dots + \dots = \dots,$$

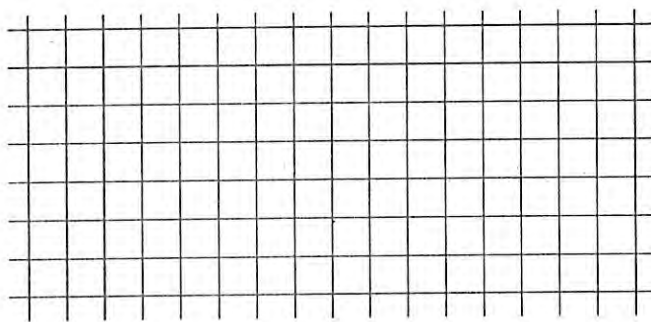
$$TS = \sqrt{\dots} = \dots.$$

c) Quelle est (en m^2) la surface du rectangle RSTU ?

d) Quelle est (en m^2) la surface du trapèze SCGT ?

d) Quel est (en m^3) le volume du prisme RBCSUFGT ?

(attention, commence par bien préciser la base et la hauteur de ce prisme !)



57

Le parallélépipède rectangle ci-contre est tel que :

$$AB = 96 \text{ cm}, \quad AE = 50 \text{ cm}, \quad EH = 56 \text{ cm}.$$

Il a été coupé par un plan parallèle à l'arête AB et on a obtenu une section rectangulaire MNPQ telle que :

$$\frac{AM}{EH} = \frac{1}{2}, \quad \frac{HQ}{EA} = \frac{3}{8}.$$

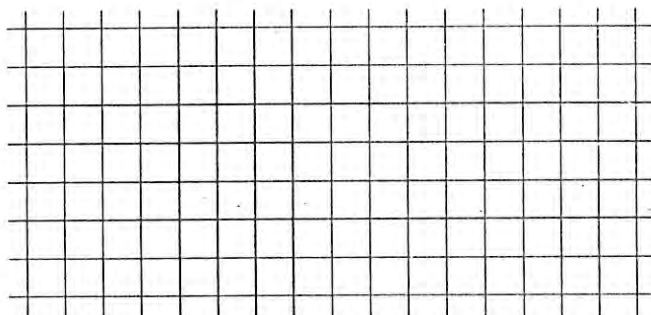
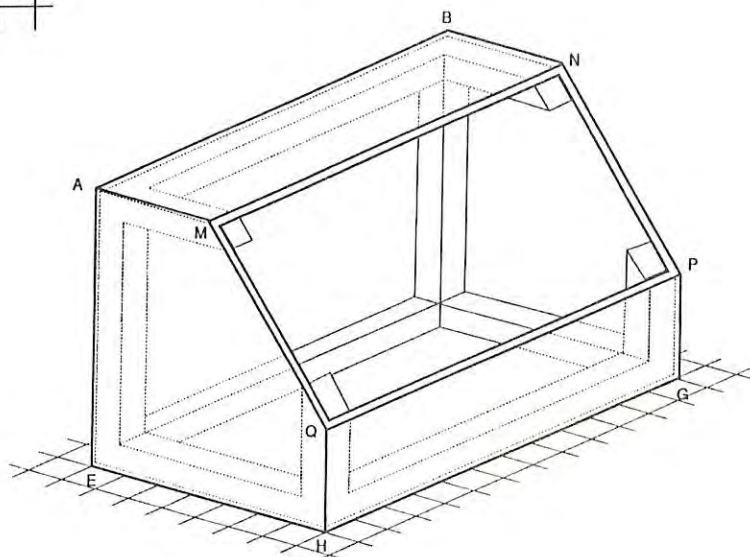
a) Sur la figure de l'espace, prolonge les arêtes de façon à retrouver les sommets D et C qui manquent.

b) Calcule les longueurs MD et QD :

c) Dessine sur le quadrillage la face polygonale AMQHE (un carreau = 8 cm).

d) Calcule la longueur de MQ :

e) Quel est (en cm^3) le volume du prisme MDQNCP ?



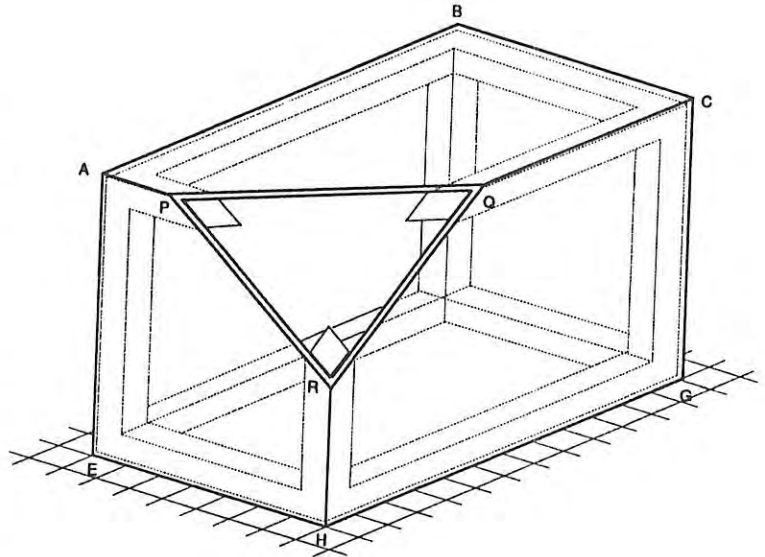
58 Le parallélépipède rectangle ci-contre est tel que :

$AB = 96 \text{ cm}$, $AE = 50 \text{ cm}$, $EH = 56 \text{ cm}$.

Il a été coupé par un plan, et on a obtenu une section triangulaire PQR telle que :

$AP = 16 \text{ cm}$, $CQ = 56 \text{ cm}$, $HR = 25 \text{ cm}$.

Prolonge les arêtes pour construire le sommet D manquant.



Dessine sur le quadrillage ci-contre (à une échelle convenable) les triangles PDR , RDQ et QDP .
Calcule les longueurs PR , RQ et QP :

.....

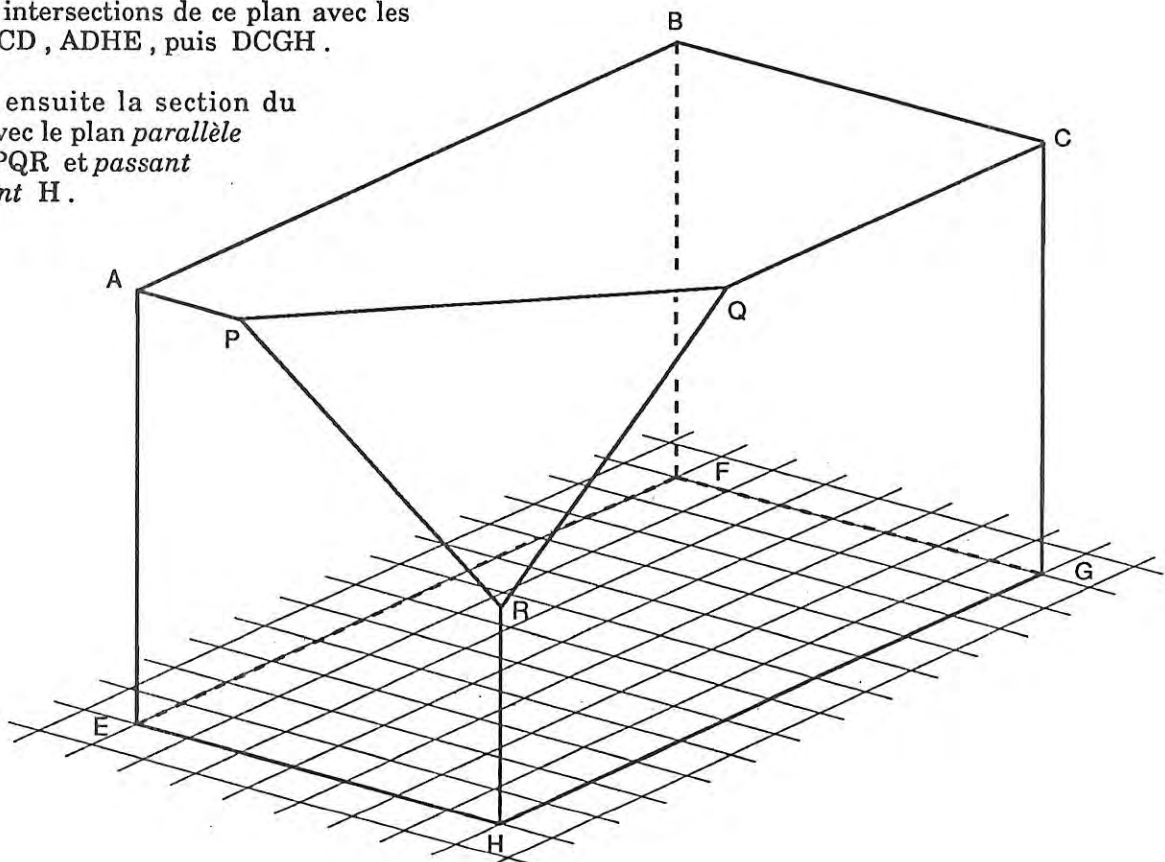
.....

.....

59 On coupe le volume précédent par un nouveau plan *parallèle* au plan PQR et *passant* par le point A .

Trace les intersections de ce plan avec les faces $ABCD$, $ADHE$, puis $DCGH$.

Cherche ensuite la section du volume avec le plan *parallèle* au plan PQR et *passant* par le point H .



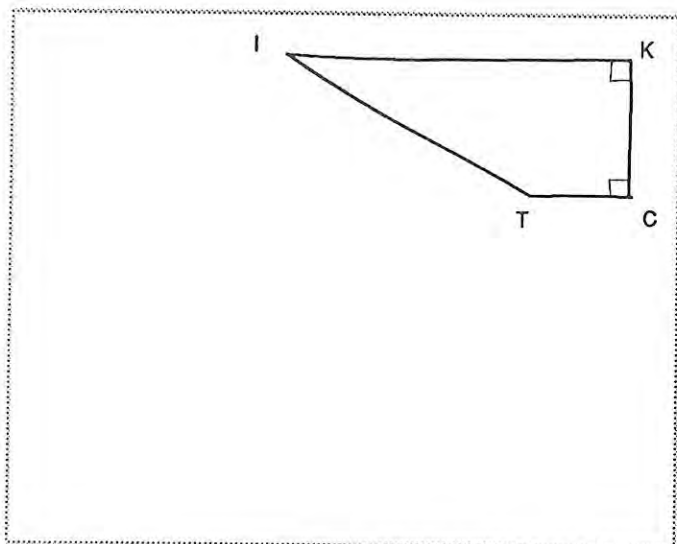
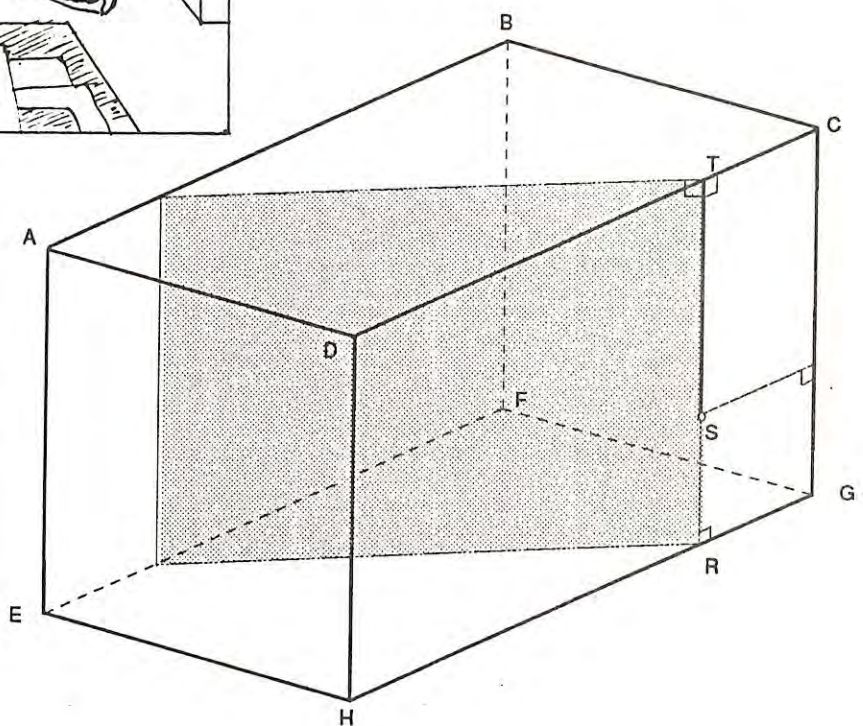
Nous voulons trouver la distance SJ ...

60 Construis (sans mesurer),
le centre I du « plafond »
ABCD.

Le plan vertical P , passant par I et S coupe les arêtes DC et HG en T et R (*nous avons représenté ce plan par des hachures*).

Place le point J correspondant à l'ampoule, puis colorie le trapèze JITS.

Dans le plan $ABCD$, la perpendiculaire à BC passant par le point I coupe cette arête en un point K , dessine IK (*attention, IK est parallèle à AB et DC !*), puis colorie le trapèze $IKCT$.



61 Dans le cadre ci-contre, nous avons dessiné à main levée le trapèze IKCT.

Indique les longueurs réelles de IK, KC et CT sur ce schéma, puis *calcule* la longueur IT :

$$|T|^2 = \dots + \dots = \dots,$$

Dessine à main levée le trapèze $ITSJ$, indique les longueurs réelles de IJ , TS et IT sur ton schéma, puis *calcule* la longueur JS :

$$\dots\dots\dots = \dots\dots\dots + \dots\dots\dots = \dots\dots\dots,$$

62 $AB^2 = \dots + \dots = \dots$.

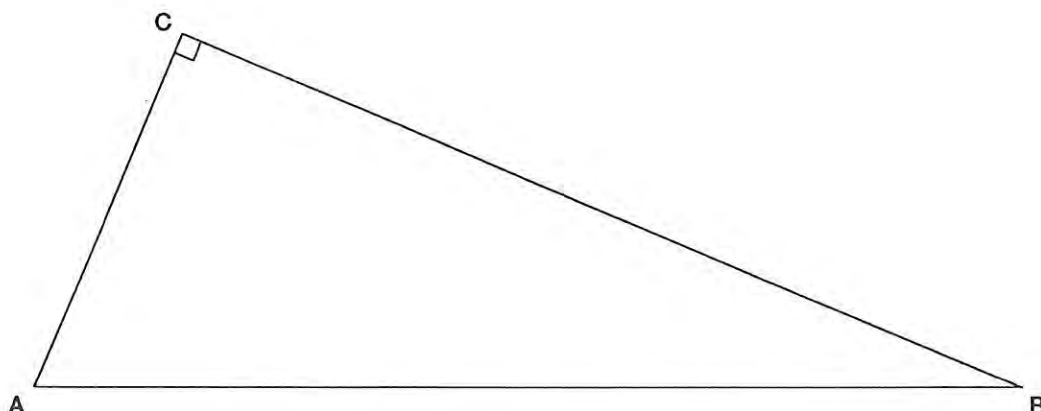
$$CD^2 = \dots\dots\dots + \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$
$$153 = \dots\dots\dots + \dots\dots\dots = \dots\dots\dots^2 + \dots\dots\dots^2.$$

Soit $AB = \sqrt{106}$ cm :
 =
 de la longueur CD :
 =
 le nombre 153 com-
 nombres entiers :
 =² +².
 que $EF = \sqrt{153}$ cm.
 (mesures !)

$$OB^2 = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} = \dots\dots\dots$$

$$OB = \sqrt{\dots\dots\dots}$$

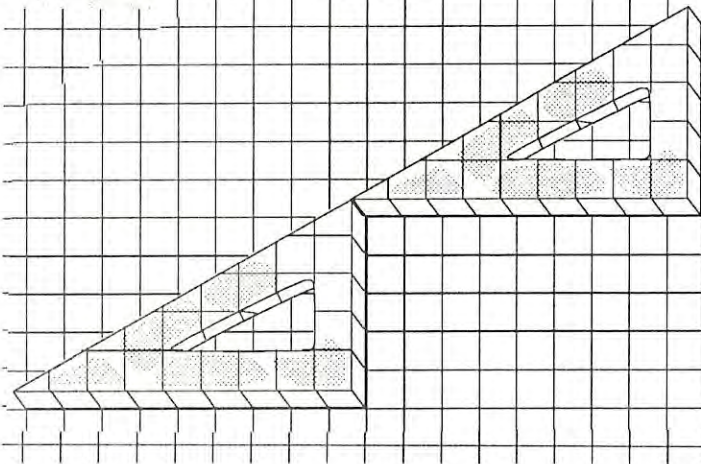
... et OF tel que : $OF = \sqrt{133}$.
 ($OF^2 = 13^2 - 12^2 = 133$)

$$64 \quad CB^2 = \dots - \dots = \dots, \quad CB = \sqrt{\dots} = \dots$$
$$HB = 6 \text{ cm}.$$


3

les droites d'équations

$$y = a \cdot x$$



65 Que peut-on dire des triangles rectangles hachurés ?

Marque sur la figure les égalités d'angles, puis calcule :

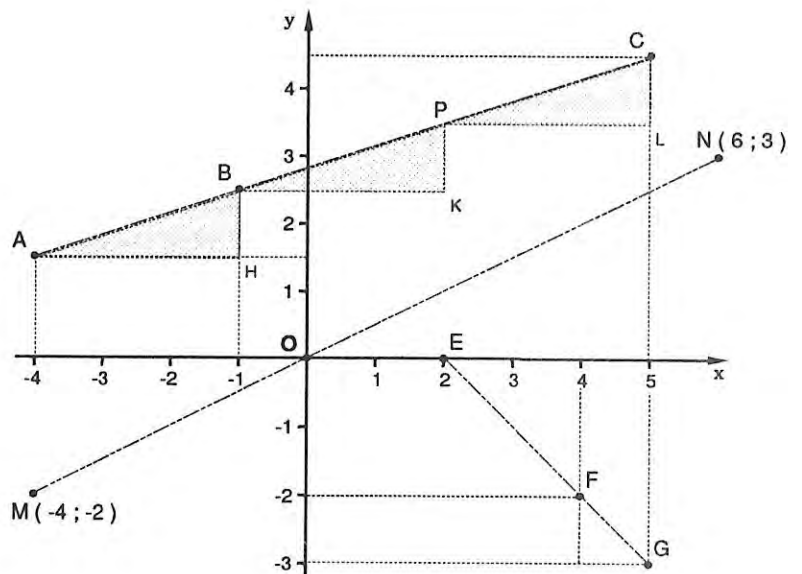
$$\widehat{ABP} = \widehat{HBK} + \widehat{ABH} + \widehat{KBP}$$

$$\widehat{ABP} = \dots + \dots + \dots$$

$$\widehat{ABP} = \dots + \dots = \dots$$

Que peut-on dire des points A, B, C ?

Colorie sur la figure des triangles rectangles égaux qui montrent que E, F, G sont alignés, puis fais de même pour M, O et N (*attention, dans ce cas, il te faut cinq triangles !*).

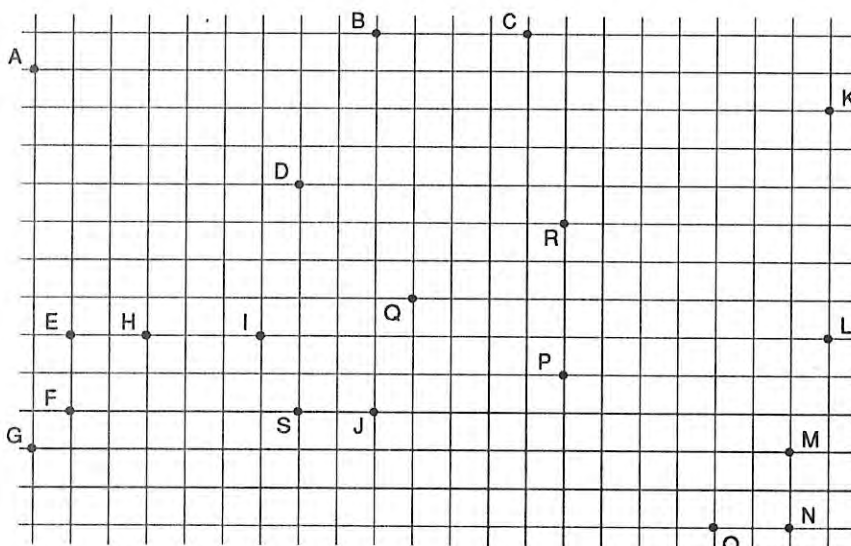


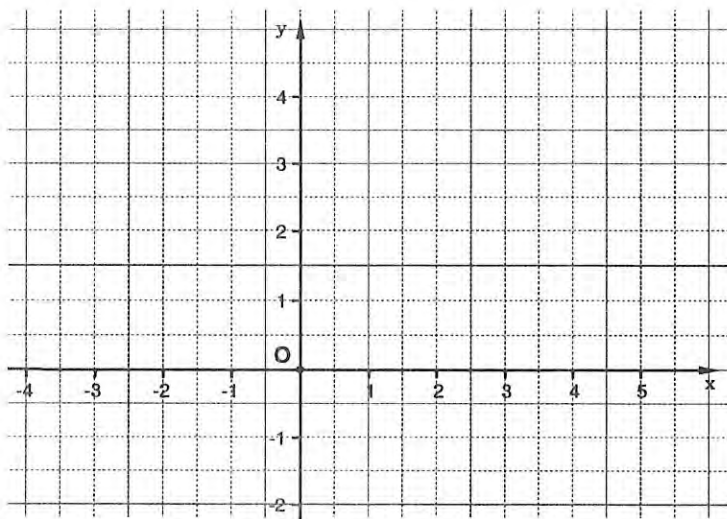
66 Voici 19 points donnés sur le quadrillage.

Cherche toutes les façons possibles de réunir certains de ces points en groupes d'au moins trois points alignés.

(exemple : G, F, H, ...)

Chaque fois que tu auras trouvé une droite, trace-la et colorie des triangles rectangles égaux (comme dans l'exercice précédent) qui montrent que les points sont bien alignés.





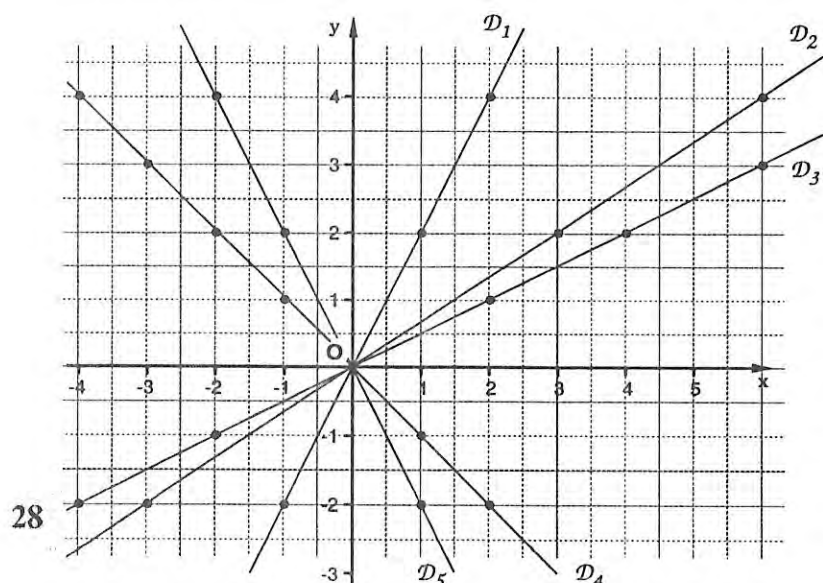
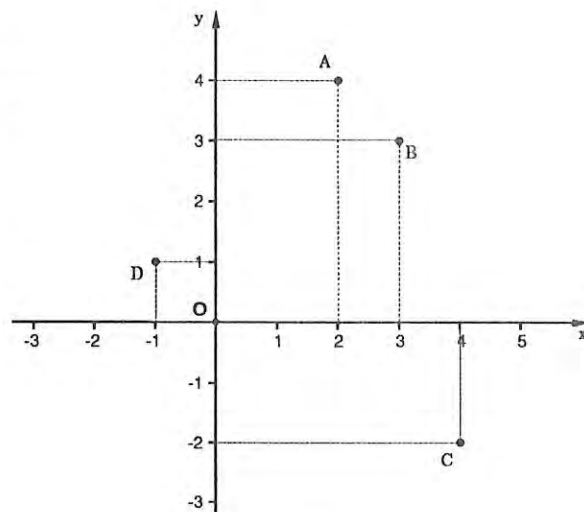
Nous avons placé les points A, B, C et D.

68 Trace les quatre droites OA, OB, OC, OD.

Cherche tous les points dont les coordonnées sont des nombres entiers et qui sont sur l'une ou l'autre de ces droites. (tu peux tracer les parallèles aux axes qui te semblent nécessaires, puis colorier des triangles rectangles convenables)

Pour chacune des quatre droites, complète le tableau ci-dessous en indiquant les coordonnées de tous les points entiers que tu as trouvés :

OA :	x	2	...	...	...	...	...
	y	4	...	...	...	...	...
OB :	x	3	...	...	...	...	...
	y	3	...	...	...	...	...
OC :	x	4	...	...	...	...	...
	y	-2	...	...	...	...	...
OD :	x	-1	...	...	...	...	...
	y	1	...	...	...	...	...



Place les points suivants dans le repère ci-contre :

A(2; 3), B(2,5; 1),

C(-2; 1), D(6; -1,5).

Trace soigneusement les droites OA, OB, OC et OD.

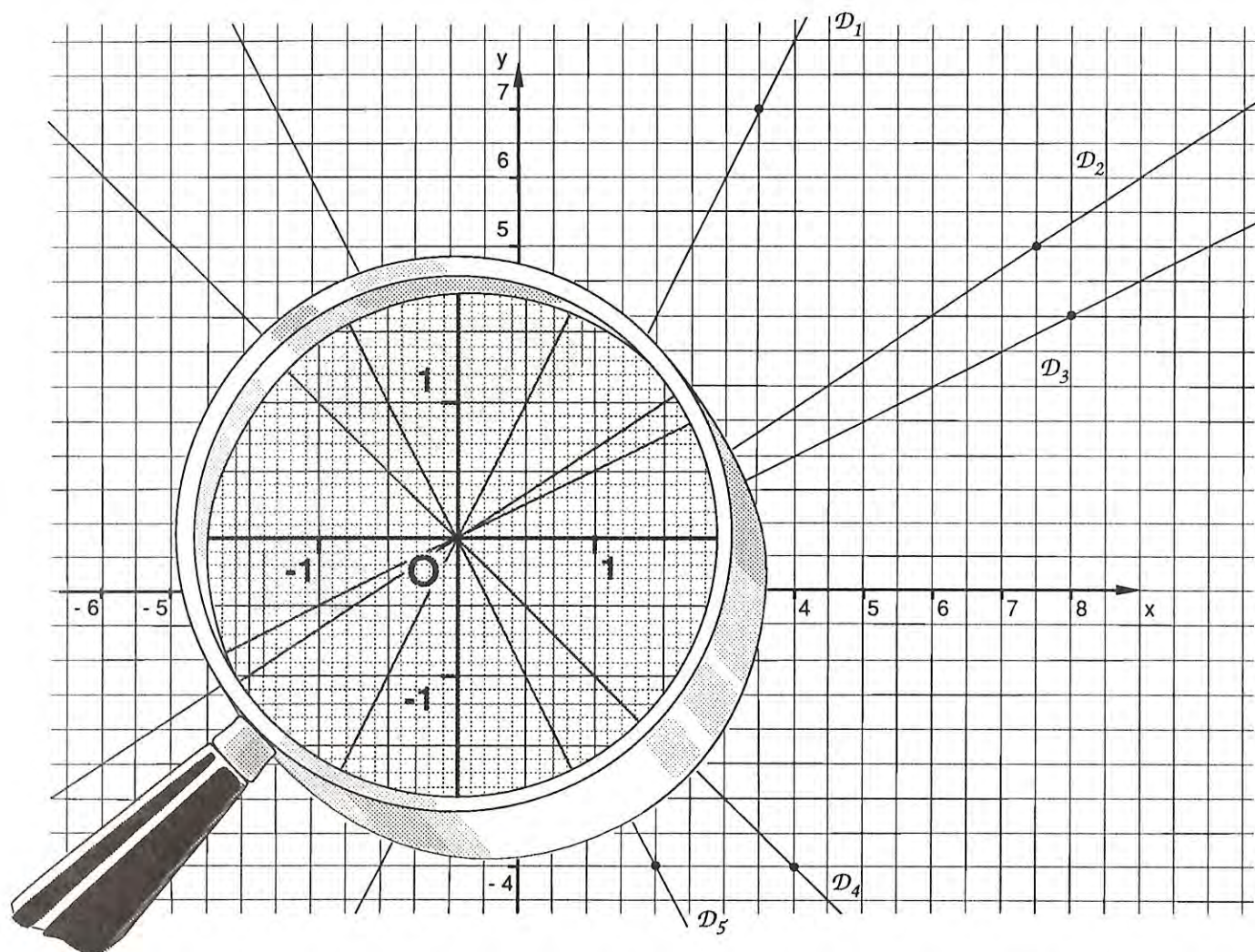
Indique par des points noirs tous les points du quadrillage par lesquels passent ces droites (justifie ta réponse en coloriant légèrement des triangles rectangles convenables).

Indique en rouge les points qui sont des milieux de segments du quadrillage et par lesquels te semblent passer les droites.

Nous avons tracé cinq droites D1, D2, D3, D4 et D5.

69 Parmi les points ci-dessous (donnés par leurs coordonnées), certains sont sur l'une des cinq droites. Indique la droite, si c'est le cas :

(1; 0,5) (1,5; 3) (-1,5; 3)
 (-2,5; 2,5) (-3; -1,5) (-1,5; -1)
 (-0,5; -1) (-3; 1,5) (-3; 3)
 (7; 3,5) (7,5; 5) (3; 5,5)
 (-3; -6) (-5; 5,5) (-5; -2,5)
 (-4,5; -3) (-3; -6) (3; -6,5)
 (10; -10) (8; 4) (9; 6)
 (10; 10) (9; 15) (8; 17)
 (9,5; 19) (-1; 5) (-2; 6)
 (-5; -10) (-8; 16) (-24; -12)



70 Nous avons redessiné ci-dessus les cinq droites de l'exercice 69, et nous avons grossi le voisinage du point origine.

Marque soigneusement sur la figure les points du quadrillage qui sont sur les cinq droites (travaille sur les *petits carreaux* pour les points qui apparaissent à l'intérieur de la loupe).

Pour chacune des droites, relève les coordonnées de 5 points et complète les tableaux ci-dessous (choisis à chaque fois deux points extérieurs à la loupe et trois qui sont à l'intérieur) :

$\mathcal{D}_1$:	$\begin{cases} x \\ y \end{cases}$	...	...	...	...	...
$\mathcal{D}_2$:	$\begin{cases} x \\ y \end{cases}$	...	...	...	...	...
$\mathcal{D}_3$:	$\begin{cases} x \\ y \end{cases}$	...	...	...	...	...
$\mathcal{D}_4$:	$\begin{cases} x \\ y \end{cases}$	...	...	...	...	...
$\mathcal{D}_5$:	$\begin{cases} x \\ y \end{cases}$	...	...	...	...	...

71 Tu as sans doute remarqué que tous les points du premier tableau vérifient :

$$y = 2 \times x.$$

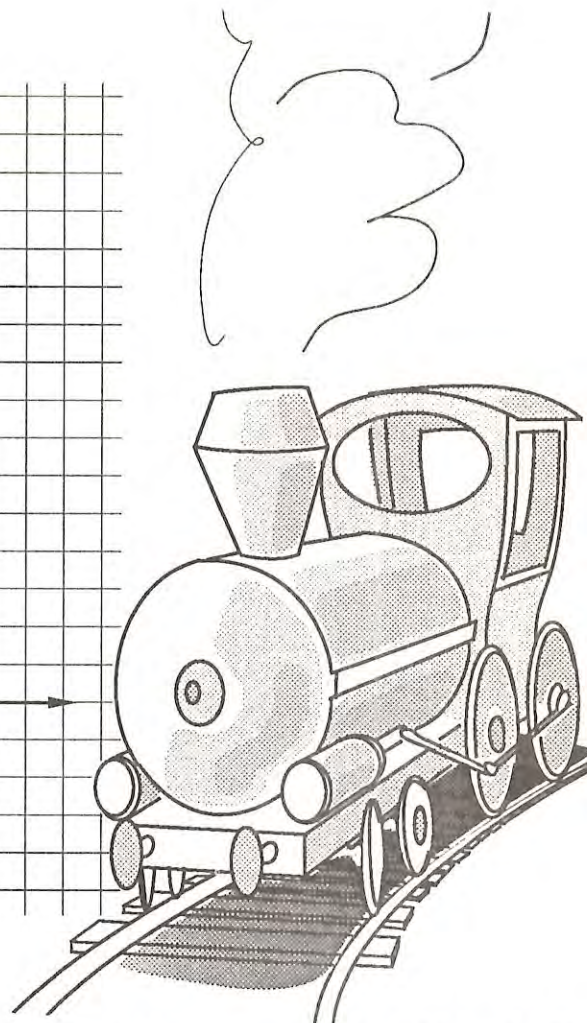
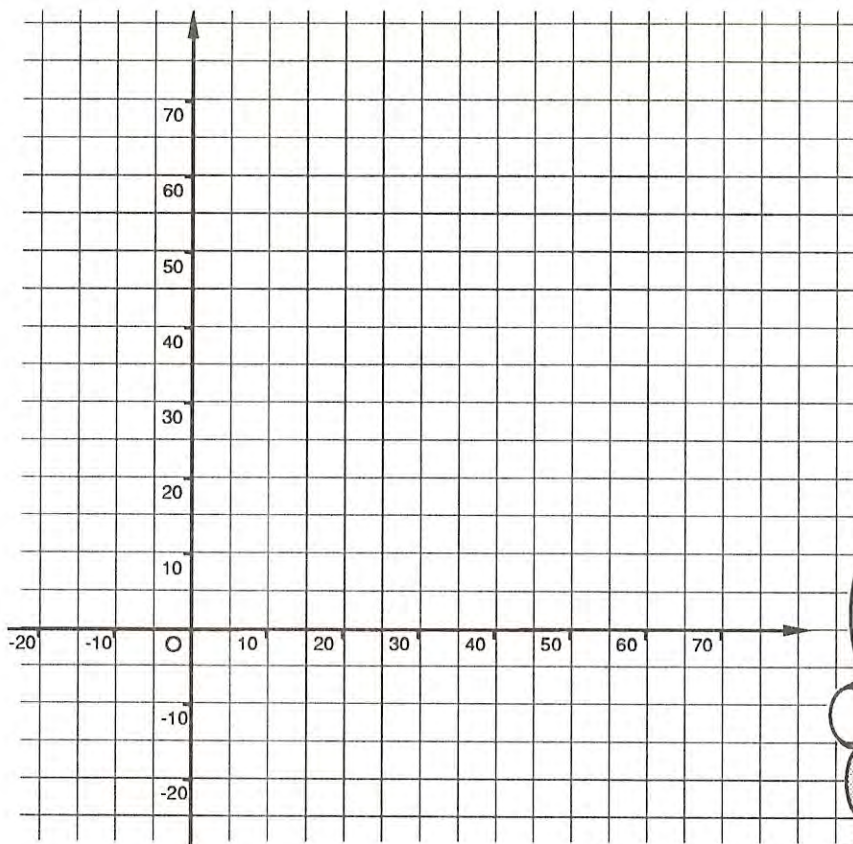
Trouve des relations semblables vérifiées par les nombres des quatre autres tableaux :

$$\mathcal{D}_2: y = \dots \times x, \quad \mathcal{D}_3: y = \dots \times x,$$

$$\mathcal{D}_4: y = \dots \times x, \quad \mathcal{D}_5: y = \dots \times x.$$

En t'aidant de ces relations et de la figure, complète en cherchant les valeurs de y :

$\mathcal{D}_1$:	$\begin{cases} x \\ y \end{cases}$	3	2	-2	-3	-4
$\mathcal{D}_2$:	$\begin{cases} x \\ y \end{cases}$	3	2	-2	-3	-4
$\mathcal{D}_3$:	$\begin{cases} x \\ y \end{cases}$	3	2	-2	-3	-4
$\mathcal{D}_4$:	$\begin{cases} x \\ y \end{cases}$	3	2	-2	-3	-4
$\mathcal{D}_5$:	$\begin{cases} x \\ y \end{cases}$	3	2	-2	-3	-4



Un (petit) train roule à 30 km/h. Il passe à la gare de *Latour de Carol* à midi.

A quelle distance de cette station (en kilomètres) est-il 10 mn plus tard ? 20 mn plus tard ? etc. Complète :

après 10 mn de trajet le train a parcouru : ,
 après 20 mn de trajet le train a parcouru : ,
 après 30 mn de trajet le train a parcouru : ,
 après 40 mn de trajet le train a parcouru :

Dans le tableau ci-dessous x désigne le *temps écoulé* et y désigne la *distance parcourue* , complète ce tableau :

x (mn)	10	20	30	40	50	60
y (km)	...	...	...	...	...	...

Pour toutes les valeurs (x ; y) de ce tableau, place le point correspondant dans le repère du haut, puis trace la droite passant par ces points.

Choisis cinq autres valeurs quelconques du temps écoulé x , et complète :

30

x (mn)	...	...	...	...	...
y (km)	...	...	...	...	...

Le train express roule à 90 km/h. Il passe à *Latour de Carol* à minuit.

A quelle distance de cette station (en kilomètres) est-il 10 mn plus tard ? 20 mn plus tard ? etc. Complète :

après 10 mn de trajet le train a parcouru : ,
 après 20 mn de trajet le train a parcouru : ,
 après 30 mn de trajet le train a parcouru : ,
 après 40 mn de trajet le train a parcouru :

Dans le tableau ci-dessous x désigne le *temps écoulé* et y désigne la *distance parcourue* , complète ce tableau :

x (mn)	10	20	30	40	50	60
y (km)	...	...	...	...	...	...

Lorsque c'est possible, place dans le repère les points correspondant aux (x ; y) de ce tableau, puis trace la droite passant par ces points.

Choisis cinq autres valeurs quelconques du temps écoulé x , et complète :

x (mn)	...	...	...	...	...
y (km)	...	...	...	...	...

ce qu'il faut savoir ...

Dans un repère orthonormé, les points $M(x; y)$ qui sont situés sur une même droite $\mathcal{D}$ passant par l'origine sont les points dont les coordonnées $(x; y)$ vérifient :

$$y = a.x$$

Cette relation s'appelle l'équation de la droite $\mathcal{D}$.

Le nombre a , qui caractérise la droite $\mathcal{D}$, s'appelle la **pente** de la droite.

Exemples :

□ la bissectrice de (Ox) et (Oy) a pour équation : $y = x$,

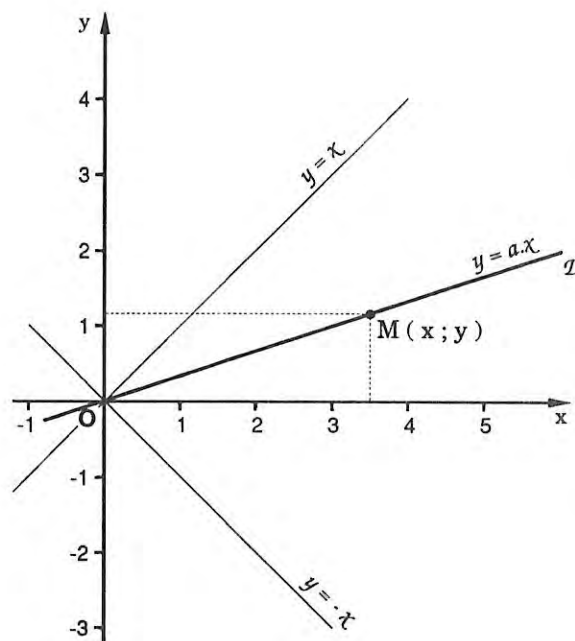
sa pente est $a = 1$.

(car : $y = x = 1.x$)

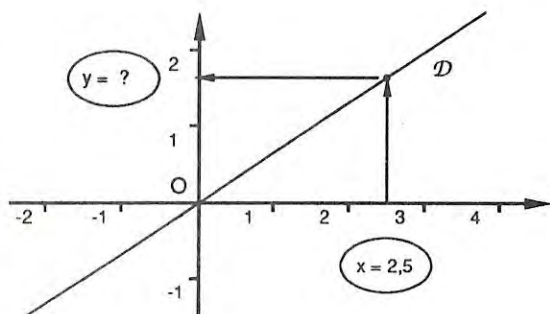
□ la deuxième bissectrice de (Ox) et (Oy) a pour équation : $y = -x$,

sa pente est $a = -1$.

(car : $y = -x = (-1).x$)



... ce qu'il faut savoir faire



Si tu *connais* l'abscisse x d'un point M de la droite $\mathcal{D}$, d'équation $y = a.x$, alors tu peux **calculer** son ordonnée y en **multipliant** x par a .

Exemple : si $x = 2,5$, alors $y = 2,5 \times a$.

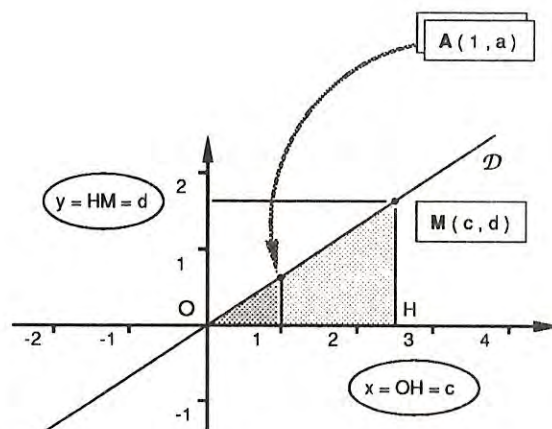
Si tu *connais* l'équation $y = a.x$ d'une droite, tu peux la **tracer**.

(elle passe par O et par le point de coordonnées $x = 1, y = a$)

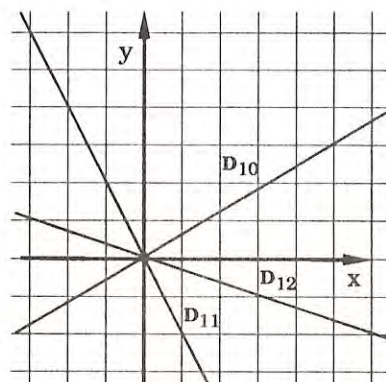
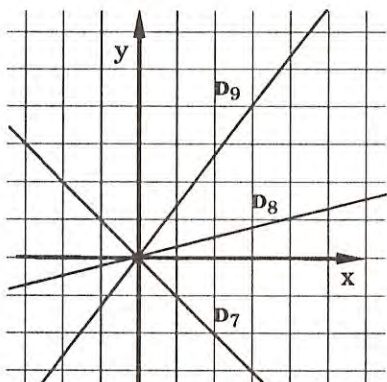
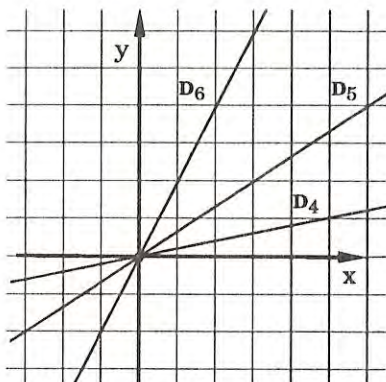
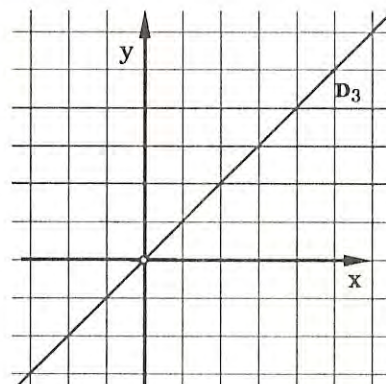
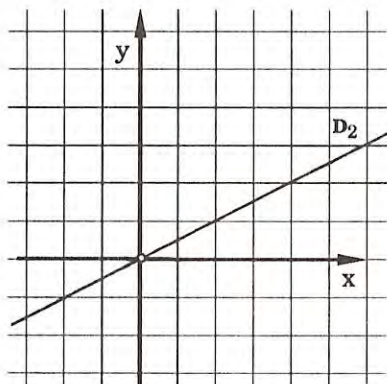
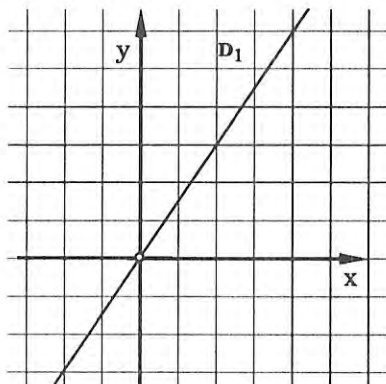
Si tu *connais* un point $M(c; d)$ de la droite $\mathcal{D}$, tu peux **trouver** sa

pente a : $a = \frac{d}{c}$.

($a = \frac{HM}{OH}$, mais attention au signe de a !)



Voici douze droites dessinées dans des repères orthonormés.
 Sur chacun des axes, l'unité choisie est égale à 1 carreau.
 Tous les exercices de cette page et de la page suivante se rapportent à ces droites.



74 Parmi ces douze droites, indique celles qui ont une pente *positive* et celles qui ont une pente *négative* :

- Les droites suivantes ont une pente *positive* :

 — Les droites suivantes ont une pente *négative* :

75 Pour chacune des droites D_1 , D_2 , D_3 , nous avons écrit trois équations.
 Entoure celle qui est la bonne.

- Droite D_1 : $y = \frac{3}{2}x$; $y = 3x$; $y = \frac{2}{3}x$.
 Droite D_2 : $y = -2x$; $y = \frac{1}{2}x$; $y = 3x$.
 Droite D_3 : $y = -x$; $y = 2x$; $y = x$.

76 Pour chacune des droites D_1 , D_2 , D_3 et D_4 , indique *trois* points situés sur celles-ci et dont les coordonnées sont des nombres entiers positifs :

Droite D_1 : ; ;

Droite D_2 : ; ;

Droite D_3 : ; ;

32 Droite D_4 : ; ;

77 Pour chacune des droites D_1 , D_2 , D_3 , indique les valeurs de y correspondant aux valeurs de x données ci-dessous :

$x =$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{10}{3}$	
$y =$			...		...	...			...		D_1
$y =$			...		...	...			...		D_2
$y =$			...		...	...			...		D_3

78 Voici, dans le désordre, les équations des droites n° 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12.

Indique celle qui est la bonne.

$$y = -x : \dots, y = \frac{4}{3}x : \dots, y = \frac{2}{3}x : \dots,$$

$$y = 0,2x : \dots, y = -\frac{1}{3}x : \dots, y = -2x : \dots,$$

$$y = \frac{1}{4}x : \dots, y = \frac{3}{5}x : \dots, y = 2x : \dots.$$

80 Pour chacune des douze droites $D_1, D_2, \dots, D_{12}$, trouve les *ordonnées* y des points d'*abscisses* $x = 1, x = -1, x = -2$.

	$x = 1$	$x = -1$	$x = -2$		$x = 1$	$x = -1$	$x = -2$
D_1				D_7			
D_2				D_8			
D_3				D_9			
D_4				D_{10}			
D_5				D_{11}			
D_6				D_{12}			

82 Pour chacune des douze droites $D_1, D_2, \dots, D_{12}$, trouve les *abscisses* x des points tels que : $y = 1, y = 2, y = 12$.

	$y = 1$	$y = 2$	$y = 12$		$y = 1$	$y = 2$	$y = 12$
D_1				D_7			
D_2				D_8			
D_3				D_9			
D_4				D_{10}			
D_5				D_{11}			
D_6				D_{12}			

79 Pour chacune des neuf droites $D_4, D_5, \dots, D_{12}$, indique un point de celle-ci qui a ses *deux coordonnées entières*.

$$D_4: (.....;); \quad D_5: (.....;); \quad D_6: (.....;);$$

$$D_7: (.....;); \quad D_8: (.....;); \quad D_9: (.....;);$$

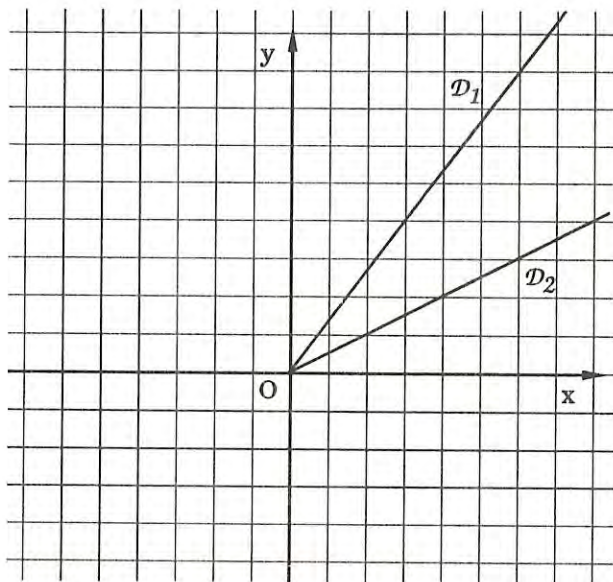
$$D_{10}: (.....;); \quad D_{11}: (.....;); \quad D_{12}: (.....;);$$

81 Pour chacune des douze droites $D_1, D_2, \dots, D_{12}$, trouve les *ordonnées* y des points d'*abscisses* x données ci-dessous.

	$x = 15$	$x = -20$	$x = \frac{2}{3}$		$x = 15$	$x = -20$	$x = \frac{2}{3}$
D_1				D_7			
D_2				D_8			
D_3				D_9			
D_4				D_{10}			
D_5				D_{11}			
D_6				D_{12}			

83 Pour chacune des douze droites $D_1, D_2, \dots, D_{12}$, trouve les *abscisses* x des points tels que : $y = -1, y = -2, y = 1/2$.

	$y = -1$	$y = -2$	$y = \frac{1}{2}$		$y = -1$	$y = -2$	$y = \frac{1}{2}$
D_1				D_7			
D_2				D_8			
D_3				D_9			
D_4				D_{10}			
D_5				D_{11}			
D_6				D_{12}			



85 Nous avons partagé le plan en huit secteurs. Indique le secteur auquel appartient chacun des points ci-dessous.

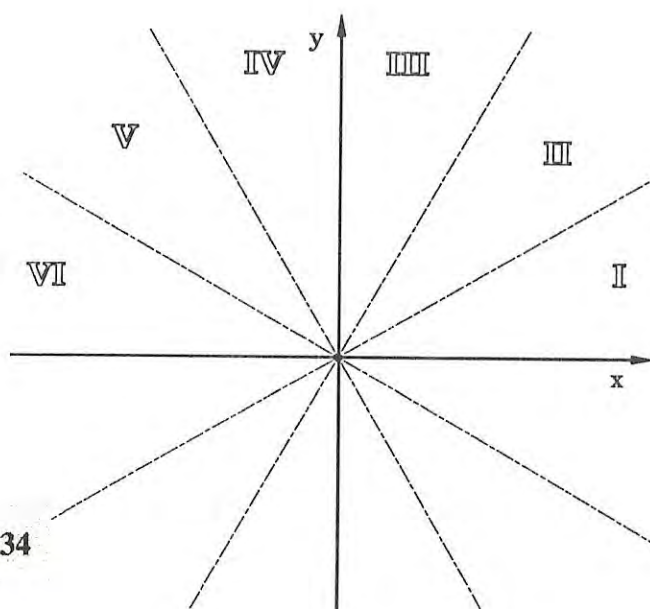
A (3;1): B (1;3): C (2;6):
 D (3;9): E (-3;2): F (-1;-3):
 G (0,5;1,5): H (-3;-1): I (-6;2):
 J (3;-1): K (0,5;-1,5): L (6;-2):

Ces points déterminent-ils des droites particulières ? Si oui, précise leurs équations :

les points sont sur la droite $y =$

les points sont sur la droite $y =$

les points sont sur la droite $y =$



34

84 Nous avons dessiné deux demi-droites D_1 et D_2 , marque les points du quadrillage qui sont situés sur D_1 ou D_2 .

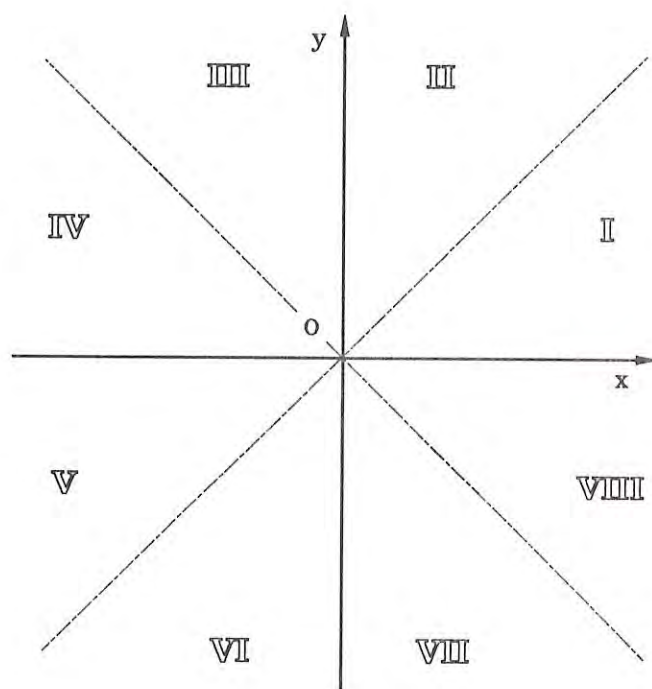
Trace les symétriques de D_1 et D_2 par rapport à l'axe Ox , puis par rapport à l'axe Oy .

Trace les symétriques de D_1 et D_2 par rapport au point O .

Combien obtient-on de droites ?

Trouve les équations de ces droites :

.....



86 Nous avons partagé le demi-plan supérieur en 6 secteurs. Indique le secteur auquel appartient chacun des points :

A (7;8): B (-1;10): C (-6;1):
 D (3,5;4): E (-3;30): F (14;15):
 G (1; $\frac{8}{7}$): H (- $\frac{1}{10}$;1): I (-2; $\frac{1}{3}$):
 J (-3; $\frac{1}{2}$): K (- $\frac{2}{5}$;4): L (-5; $\frac{5}{6}$):

Ces points déterminent-ils des droites particulières ? Si oui, précise leurs équations :

les points sont sur la droite $y =$

les points sont sur la droite $y =$

les points sont sur la droite $y =$

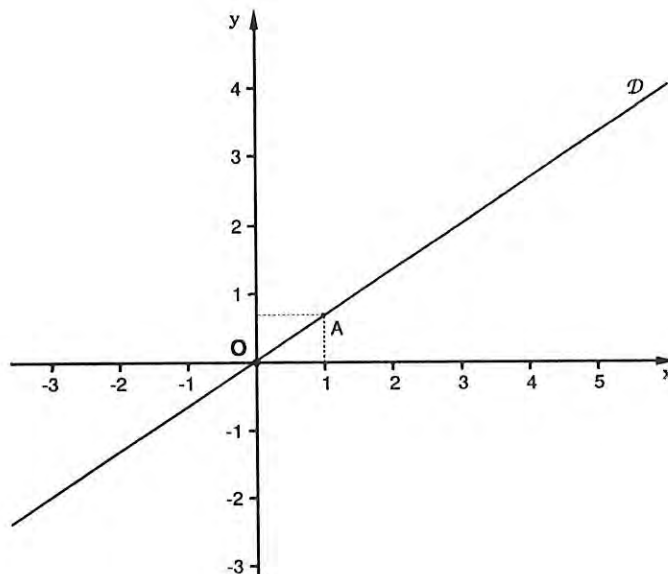
Nous avons dessiné la droite $\mathcal{D}$
87 d'équation : $y = \frac{2}{3}x$.

a) Marque tous les points de $\mathcal{D}$ qui ont des coordonnées entières. Cite deux points de $\mathcal{D}$ à coordonnées entières et qui ne sont pas visibles sur la figure :

(..... ;) (..... ;)

b) Pour chaque équation ci-dessous, indique l'ordonnée du point de la droite qui a pour abscisse $x = 1$; trouve un point à coordonnées entières situé sur cette droite, puis trace-la dans le repère ci-contre.

$\mathcal{D}_1: y = 3x$	$\mathcal{D}_2: y = \frac{4}{5}x$	$\mathcal{D}_3: y = -2x$	$\mathcal{D}_4: y = -\frac{2}{3}x$
(1 ;)	(1 ;)	(1 ;)	(1 ;)
(..... ;)	(..... ;)	(..... ;)	(..... ;)



88 a) Dans le tableau ci-dessous, complète les coordonnées manquantes, puis trace chacune des droites.

$\mathcal{D}_1: y = \frac{5}{6}x$	$\mathcal{D}_2: y = \frac{9}{4}x$	$\mathcal{D}_3: y = -3x$	$\mathcal{D}_4: y = -\frac{4}{3}x$
(1 ;)	(1 ;)	(1 ;)	(1 ;)
(-1 ;)	(-1 ;)	(-2 ;)	(-3 ;)
(3 ;)	(2 ;)	(..... ; 1,5)	(..... ; -4)

b) recommence avec les droites suivantes :

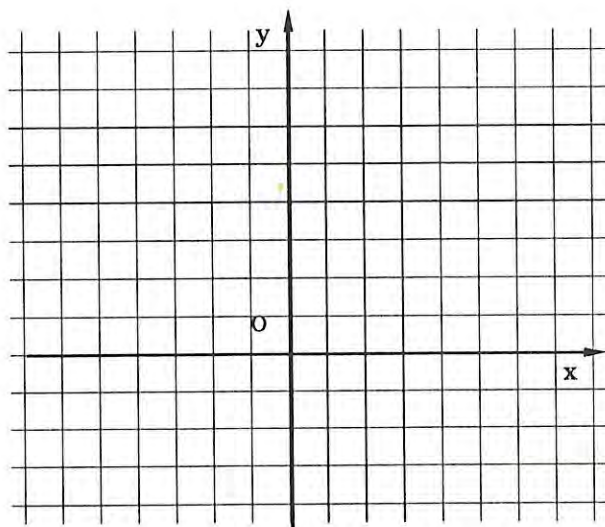
$\mathcal{D}_5: y = -\frac{7}{8}x$	$\mathcal{D}_6: y = \frac{9}{6}x$	$\mathcal{D}_7: y = \sqrt{2}x$	$\mathcal{D}_8: y = \frac{12}{15}x$
(1 ;)	(1 ;)	(1 ;)	(1 ;)
(-1 ;)	(-1 ;)	(-2 ;)	(-3 ;)
(..... ; 7)	(..... ; 8)	(..... ; 2)	(..... ; -4)

89 Voici 4 points A, B, C, D. Nous voulons tracer OA, OB, OC, OD.
(ces points ne sont pas sur la figure, car l'unité est égale à un carreau)

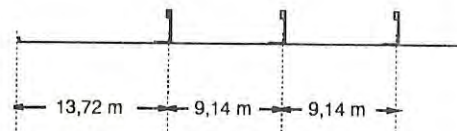
Trouve dans chaque cas l'équation de la droite, ainsi que 2 points de celle-ci appartenant à la figure.

Trace enfin les droites OA, OB, OC, OD.

A (12 ; 24)	B (-56 ; 49)	C (128 ; 192)	D (-81 ; -54)
OA : $y = \dots x$	OB : $y = \dots x$	OC : $y = \dots x$	OD : $y = \dots x$
(..... ;)	(..... ;)	(..... ;)	(..... ;)
(..... ;)	(..... ;)	(..... ;)	(..... ;)

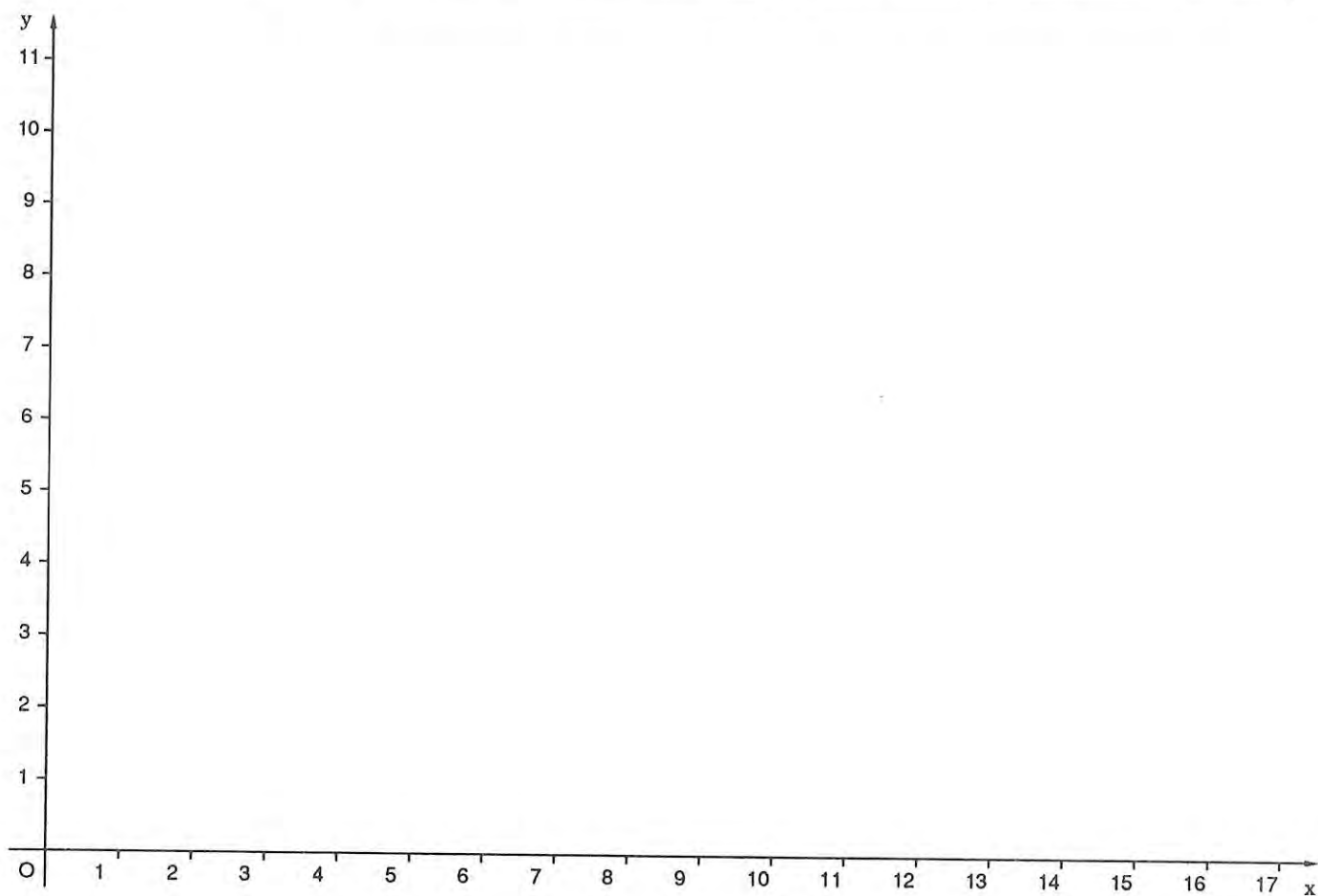


90 Dans un 110 m haies, la première haie est placée à 13,72 mètres du départ, puis chacune des haies est située à 9,14 mètres de la précédente. Il y a 10 haies en tout.



Un coureur effectue un 110 m haies, avec une vitesse que nous supposons constante de 6,7 m/s. Complète le tableau suivant et place les points obtenus sur le graphique (unités : en abscisse, 1 cm pour 1 seconde ; en ordonnée, 1 cm pour 10 m). Trace la droite représentant la course ...

	1 ^{ère} haie	2 ^{ème} haie	3 ^{ème} haie	4 ^{ème} haie	5 ^{ème} haie	6 ^{ème} haie	7 ^{ème} haie	8 ^{ème} haie	9 ^{ème} haie	10 ^{ème} haie
distance parcourue (en m)	13,72	22,86	32	41,14						
temps écoulé	$2 \text{ s } \frac{5}{100}$	$3 \text{ s } \frac{41}{100}$								



91 Lis sur le graphique le temps nécessaire pour parcourir 110 m, puis calcule-le :
je lis sur le graphique : s ,
le temps exact est : — = s .

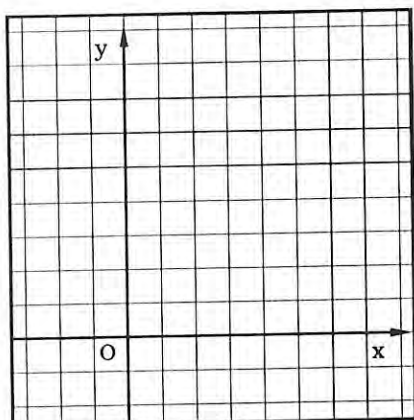
Quelle est la distance parcourue au bout de 6 secondes de course ?

36 je lis sur le graphique : m ,
la distance exacte est : — = m .

92 Quel est le record du monde du 110 m haies ?
record du monde : s ,
vitesse correspondante : — = m/s .

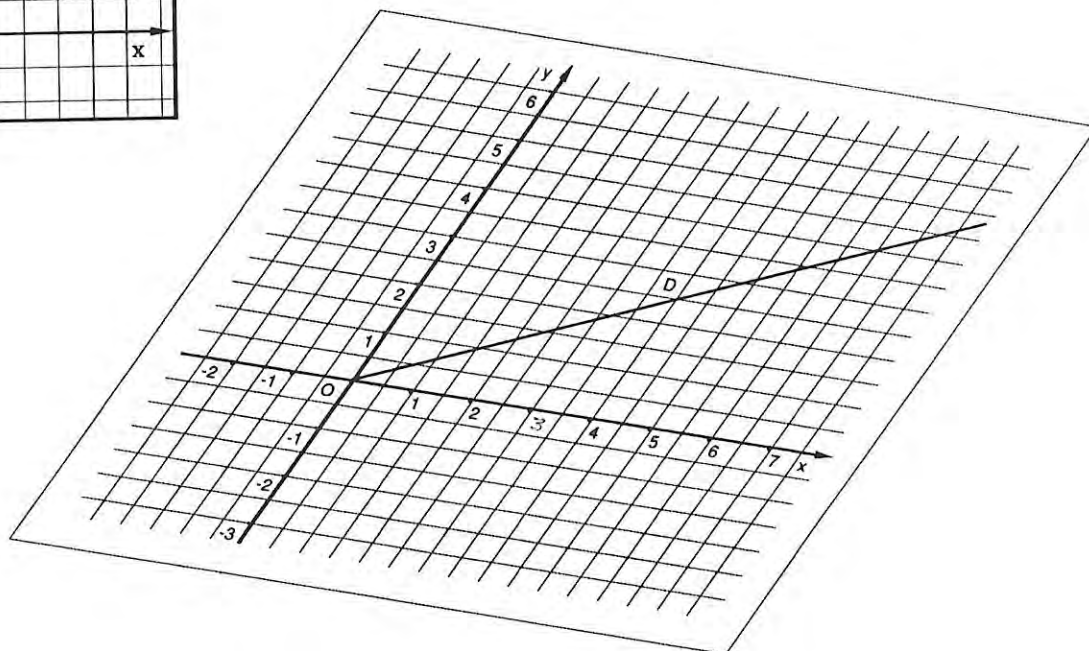
Trace la droite correspondante et cherche la distance parcourue au bout de 6 s de course :

je lis sur le graphique : m ,
la distance exacte est : — = m .



Le repère de gauche est représenté ci-dessous posé sur
93 une table. Nous y avons déjà dessiné une partie de la
 droite d'équation : $y = \frac{8}{13}x$. Complète-la et reporte-
 la dans le repère de gauche.

Dessine de même, dans les deux repères, les droites suivantes :
 $y = 5x$; $y = -2,5x$; $y = \frac{7}{9}x$; $y = -\frac{8}{7}x$.

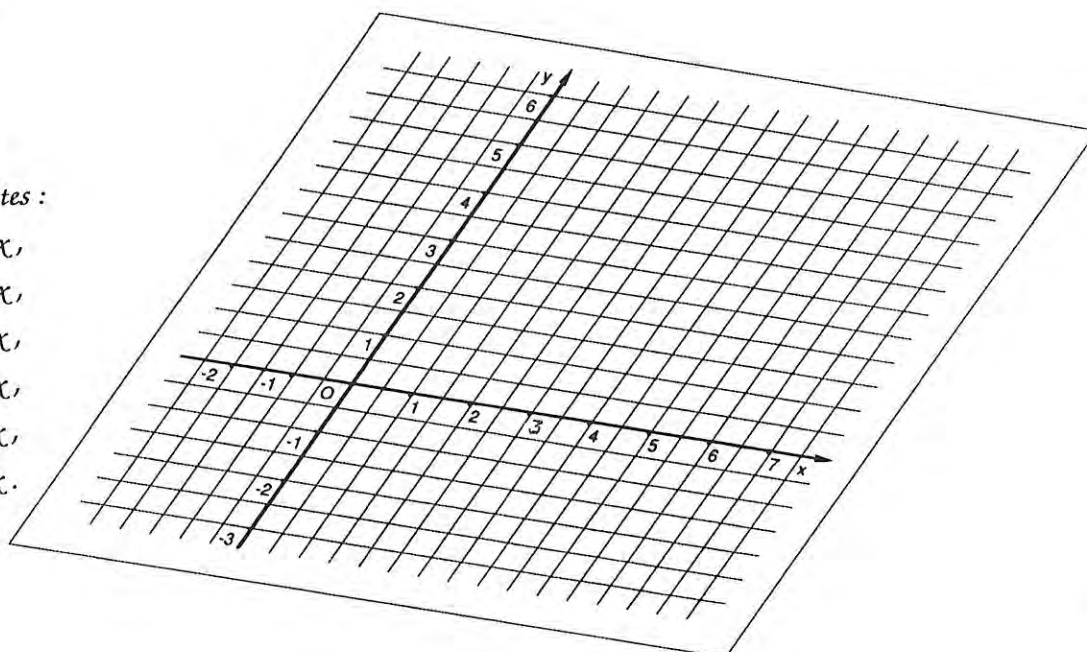


94 Voici des points $A, B, \dots$. Détermine les équations des droites $OA, OB, \dots$ puis trace-les dans
 le repère ci-contre représenté posé sur une table.

- A (20 ; 35)
- B (-36 ; 45)
- C (256 ; 384)
- D (405 ; -324)
- E (5120 ; 1760)
- F (32670 ; 22869)

équations des droites :

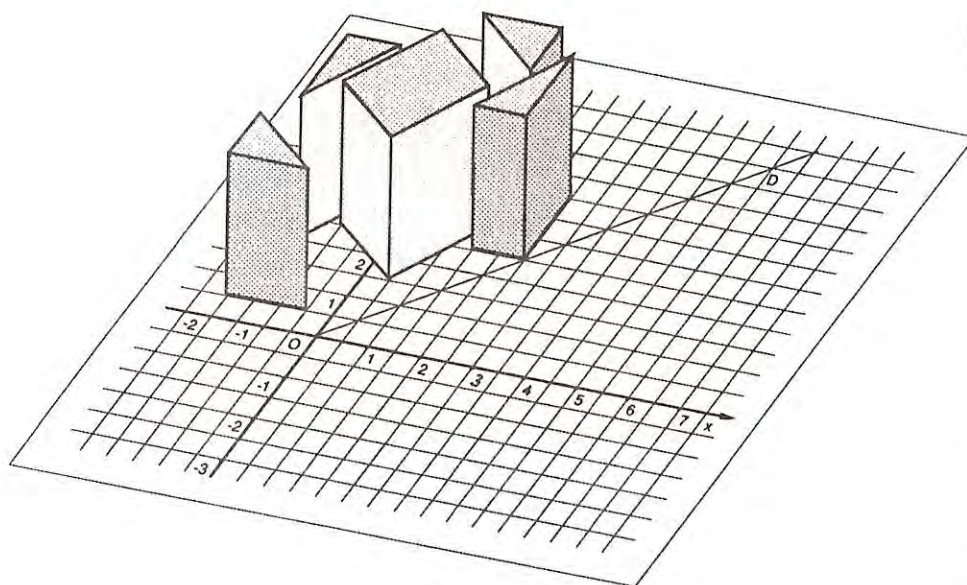
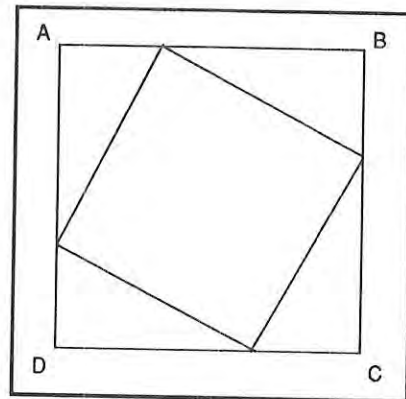
- $OA : y = \dots x,$
- $OB : y = \dots x,$
- $OC : y = \dots x,$
- $OD : y = \dots x,$
- $OE : y = \dots x,$
- $OF : y = \dots x.$



95 Sur la face inférieure ABCD d'un cube, nous avons dessiné la figure ci-contre.

Nous avons ensuite reporté cette figure sur la face supérieure, puis nous avons découpé le cube en cinq parties.

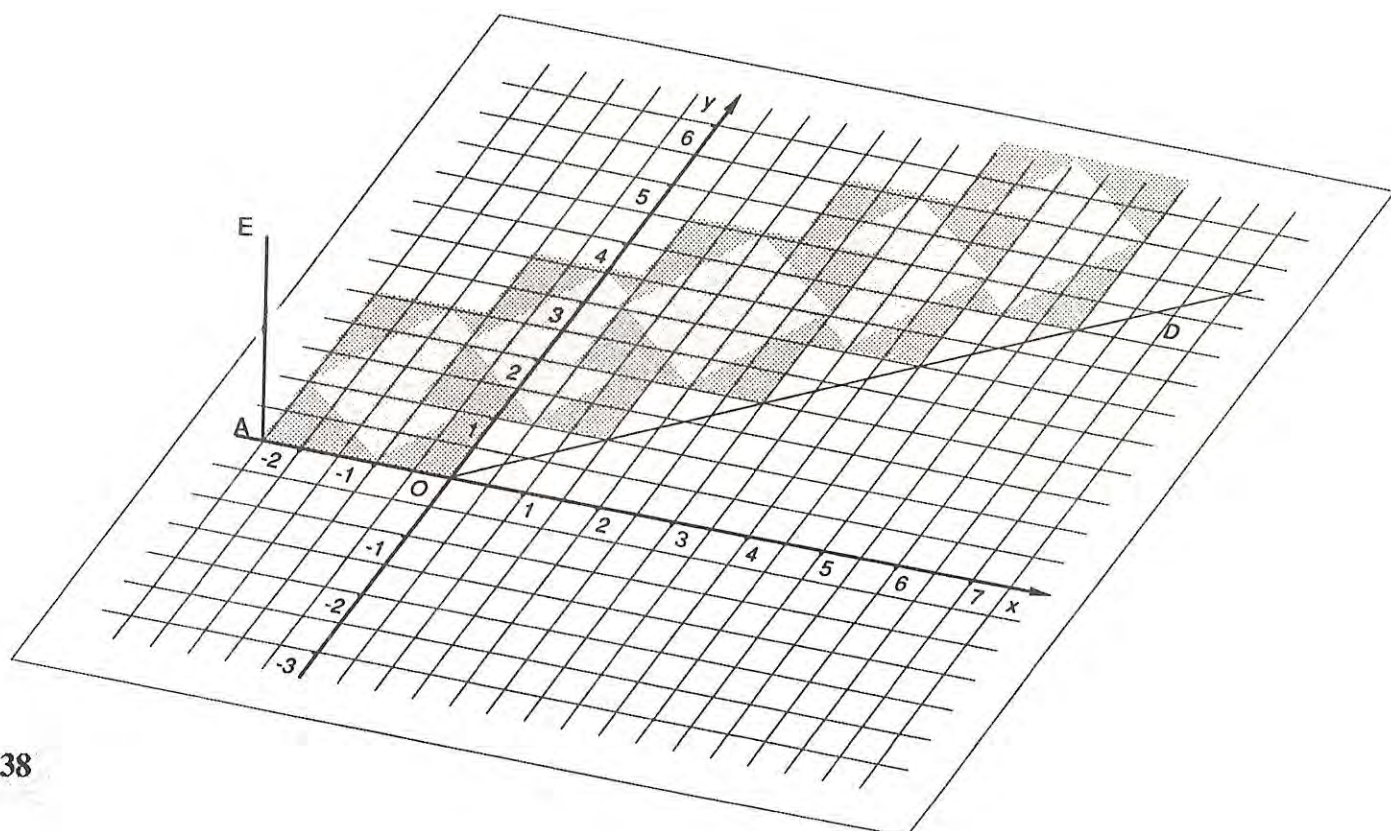
Les cinq prismes obtenus sont représentés ci-dessous. Pour les séparer, nous les avons tous décalés le long de la droite d'équation $y = x$.



Nous avons préparé ci-dessous une figure analogue : nous avons déplacé 5 fois la base découpée du cube le long d'une droite D .

Complète la figure en dressant les arêtes verticales parallèlement à AE , mais **en ne dessinant, à chaque emplacement, qu'un seul des 5 prismes** que l'on doit obtenir.

Quelle est la nature du prisme central ?

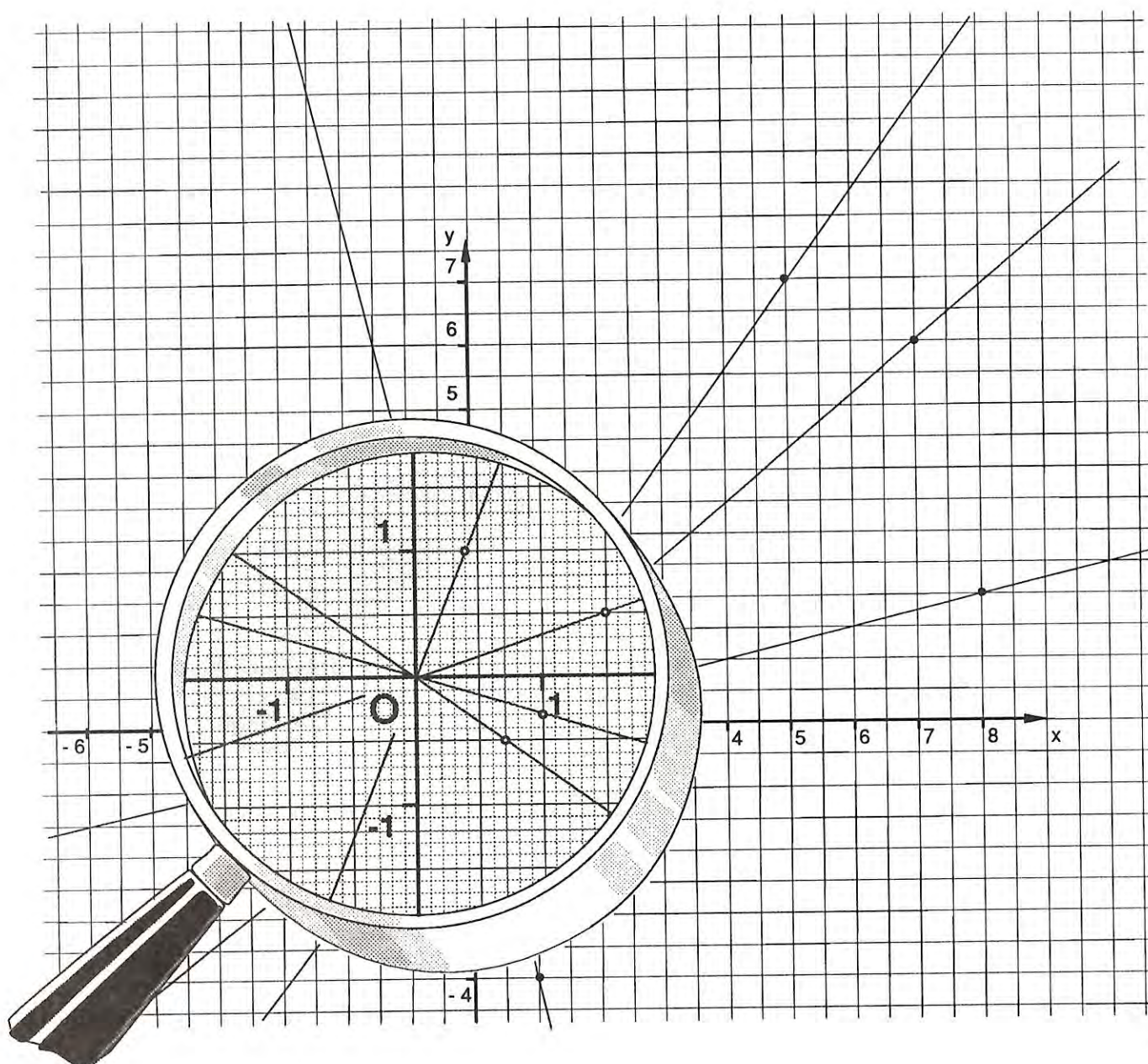


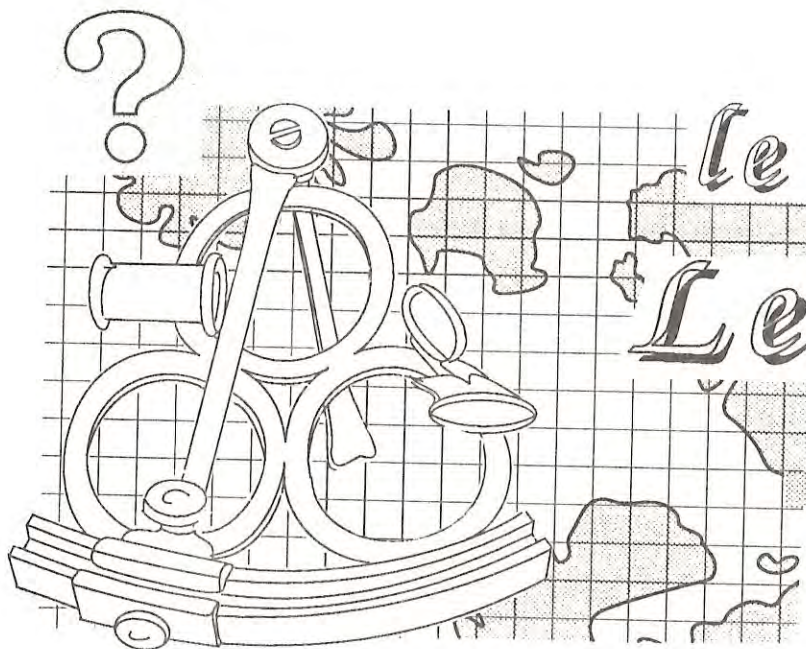
96 La figure ci-dessous est incomplète : les droites visibles en dehors de la loupe n'apparaissent pas à l'intérieur de celle-ci ; inversement, la loupe fait apercevoir des droites qui ne sont pas prolongées au reste du repère ...

Complète le dessin en traçant en *bleu* les segments qui manquent dans la loupe et en traçant en *rouge* les prolongements des droites visibles dans la loupe.

Dans chaque cas, donne un nom aux droites que tu considères et détermine leur équation :

.....	
.....	
.....	
.....	





le secret de Leonhard

Par 48° 40' Sud et 173° 48' Ouest, perdue au fond des mers australes, une poussière d'îlots oubliés de tous recèle un fabuleux trésor.

De tous temps en effet, l'archipel des *Rascasses* servit de repaire à tous les forbans des mers du Sud. Mais c'est surtout au XVIII^{ème} siècle que la *baie de San Miguel*, bien à l'abri de ses récifs, devint le centre de la piraterie universelle.

Le *Capitaine Harckoss* — qui domine l'histoire de l'époque par l'ampleur de ses forfaits — y avait installé son quartier général et il avait même fait édifier une forteresse imprenable surplombant la rade.

En 1781, pendant la campagne de pacification des mers du Sud, le *Capitaine Harckoss* décida de soustraire son trésor aux convoitises et l'immergea par cent quarante pieds de fond, en un point de la *baie de San Miguel* qu'il serait le seul à pouvoir retrouver ...

Bien lui en prit.

Le 22 août 1785, l'archipel fut investi par les Marines royales. Le *village de San Miguel* tomba le 8 septembre, les pirates furent tous décimés et le fort presque entièrement détruit après un siège qui dura plus de trente cinq jours.

Emporté par un boulet, le *Capitaine Harckoss* mourut sans avoir révélé à quiconque l'emplacement du trésor.

Pour être sûr que personne ne trahirait son secret, il avait même fait emprisonner son pilote *Eulerus*, celui qui l'avait aidé à jeter le coffre au milieu de la baie.

Plus d'un siècle durant, les occupants de l'archipel des *Rascasses* fouillèrent la *baie de San Miguel* à la recherche du trésor.

En vain. Car personne, jusqu'alors, ne réussit à percer le mystérieux secret du *Capitaine Harckoss* ...

En 1895, à peine élu Président de la République, *Félix Faure* fut mis au courant de l'existence du trésor par son Ministre de l'Instruction.

Il décida d'envoyer sur le champ une mission compétente, capable de trouver enfin le mot de l'énigme.

Et c'est ainsi que le *Général Bourbaki*, accompagné de son fidèle aide de camp *Leonhard*, arriva le 23 septembre 1895 en rade de *San Miguel*, à l'extrême Est de l'archipel des *Rascasses*, par 48° 40' de latitude Sud et 173° 48' de longitude Ouest, au fond des mers australes ...

A peine débarqués, le Général et son aide de camp allèrent s'installer au petit village de *San Miguel*. Le lendemain, *Bourbaki* chargea *Leonhard* de relever soigneusement la carte de la baie laissée dans l'église par le *Capitaine Harkoss* ; puis il s'en alla explorer lui-même le vieux fort, là où avait été jadis emprisonné le pilote *Eulerus*.

O n peut dire aujourd'hui que c'est ce jour-là qu'ils firent, chacun de leur côté, des découvertes livrant la clé de l'énigme ...

— regarde *Leonhard*, dit *Bourbaki* en revenant de son expédition, regarde ce que j'ai trouvé gravé sur une pierre, dans ce qui devait être la cellule du pilote *Eulerus* ...

— « De mêmes distances du phare, de *San Miguel* et de la maison du pêcheur, ... Va à mêmes distances du fort, de l'ancienne tour et du récif rouge ... Tu auras fait trois fois la moitié du chemin qui mène au trésor d'*Harkoss* ... Aligne toi pour cela ... » Formidable !

— c'est clair : il faut partir du point situé à égale distance du phare, de l'église de *San Miguel* et de la maison du pêcheur ; et aller vers le point situé à égale distance du fort, de l'ancienne tour et du récif rouge ...

— dommage que le message soit inachevé ! constata *Leonhard*. Mais regardez Mon Général, ces six endroits sont précisément les six points importants de ma carte ! Et vérifiez vous-même ce que je venais justement de découvrir : les trois points que j'ai appelés *a*, *b* et *c* sont ...

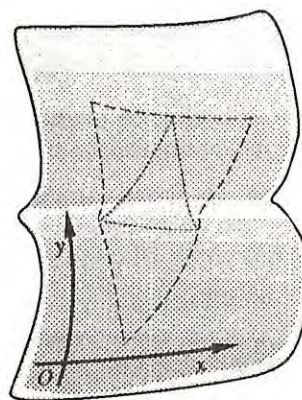
ci-dessous : le texte incomplet gravé dans la cellule du pilote *Eulerus*.

De mêmes distances du phare, de *San Miguel* et de la maison du pêcheur, ...

Va à mêmes distances du fort, de l'ancienne tour et du récif rouge

Tu auras fait trois fois la moitié du chemin qui mène au trésor d'*Harkoss*

Aligne toi pour cela



Construis ta propre carte de la baie. Elle t'aidera pour comprendre ... Et, peut-être, pour faire mieux que le Général et son ami ...

Prends une grande feuille double à petits carreaux et place un repère en bas à gauche (*unités* : 1 carreau). Place soigneusement les points découverts par *Bourbaki* et *Leonhard* :

A	le phare	(3 ; 56)
B	l'église de <i>San Miguel</i>	(45 ; 50)
C	la maison du pêcheur	(21 ; 2)
a	le fort	(33 ; 26)
b	le récif rouge	(12 ; 29)
c	l'ancienne tour	(24 ; 53)

Quelle est la découverte faite par le fidèle aide de camp *Leonhard* ?

Les points *a*, *b*, *c* sont les



A l'extrême ouest de l'archipel des Rascasses : la baie de *San Miguel*, où a été caché le trésor du *Capitaine Harkoss*. Au fond, l'église dédiée à *San Miguel* (St Michel), le phare signalant l'entrée de la rade et les ruines de la vieille tour ... Plus près : le fort de *Santa Anna* (Ste Anne) où fut enfermé *Eulerus* et, fermant la baie, le récif rouge. Au premier plan : la maison du pêcheur (note qu'elle n'est pas visible de la mer ...)

« Il faut partir du point situé à égale distance du phare, de l'église et de la maison du pêcheur ; c'est-à-dire du point **équidistant** des points **A, B et C** ... »

Nous appellerons ce point **H**. Tu as étudié ses propriétés en cinquième :

Le point équidistant des sommets d'un triangle s'appelle le

..... à ce triangle.

C'est le point d'intersection des

Construis le point **H** avec ta règle et ton compas sur la figure ci-contre.

Tu vas construire le point **H** sur ta carte sans compas ... Auparavant, observe le quadrillage ci-contre. Indique sur la figure les égalités qui existent entre les côtés et les angles des triangles **BDC** et **KHB**.

— Calculons $\widehat{CBK}$:

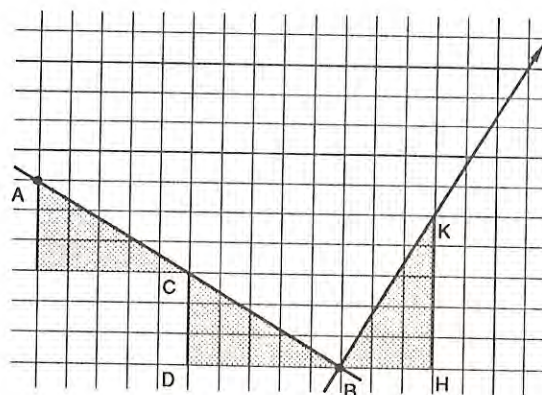
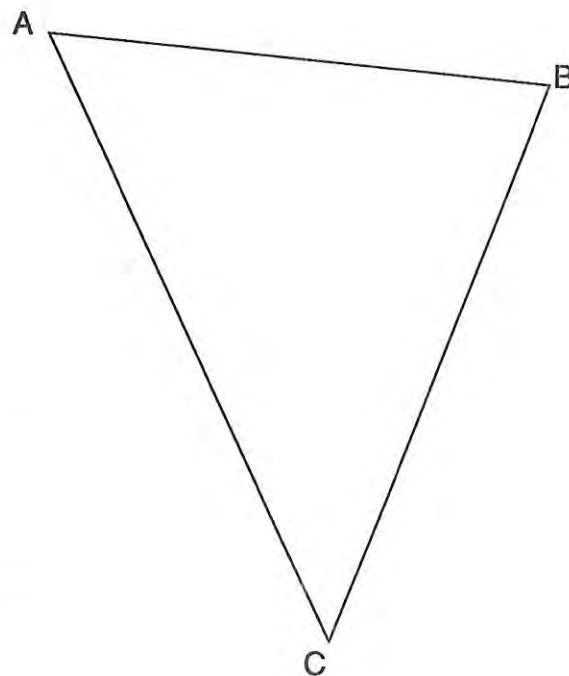
$$\widehat{CBK} = 180^\circ - (\widehat{DBC} + \widehat{KBH}) = 180^\circ - \dots = \dots$$

— Utilise la propriété précédente pour trouver les perpendiculaires à **AB** aux points **C** et **A**.

— Toujours en utilisant la propriété précédente, trace soigneusement sur ta carte les médiatrices des côtés du triangle **ABC**.

— Observe sur ta construction les triangles rectangles correspondant à **aH** et à **bc**. Ces droites sont

— Vérifie aussi sur **bH** et **ac**, puis sur **cH** et **ab**. Dans le triangle **abc**, les droites **aH**, **bH** et **cH** sont les



Une fois en mer, pour savoir si nous sommes bien au point **H**, dit *Bourbaki*, il nous faut pouvoir viser des points de repère ... Nous allons chercher les angles sous lesquels on voit, depuis le point **H**, le fort, le récif rouge et l'ancienne tour ...

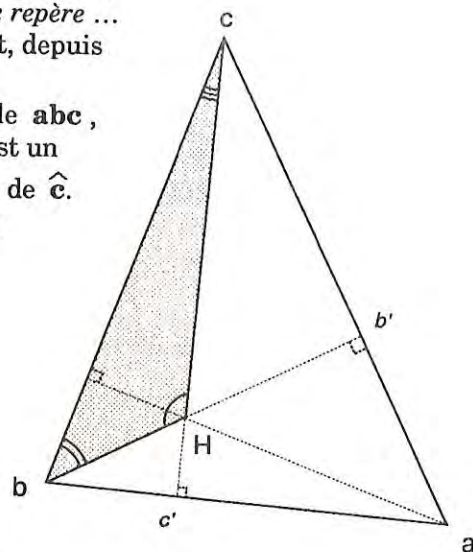
— c'est très facile si on connaît les angles $\widehat{a}$, $\widehat{b}$ et $\widehat{c}$ du triangle **abc**, répondit *Leonhard* ! Regardez Mon Général : le triangle **bb'c** est un triangle rectangle, je peux donc calculer l'angle $\widehat{cbb'}$ en fonction de $\widehat{c}$. Je ferai de même avec le triangle **bcc'**, j'en déduirai l'angle $\widehat{bcc'}$ en fonction de $\widehat{b}$... Je pourrai alors calculer $\widehat{bHc}$!

Trouve, toi aussi ces angles en fonction de **a, b, c** :

$$\widehat{bHc} = \dots$$

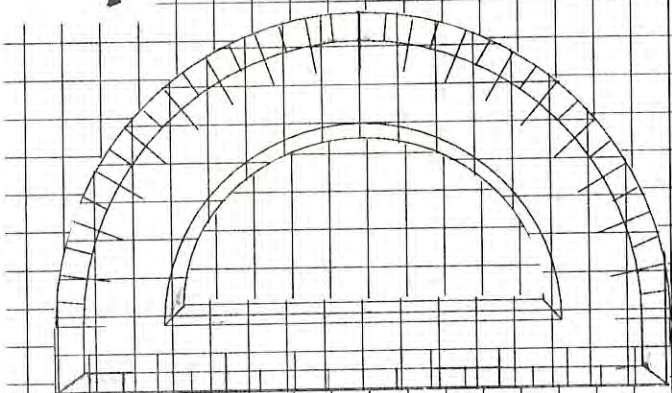
$$\widehat{aHb} = \dots$$

$$\widehat{cHa} = \dots$$



... à suivre

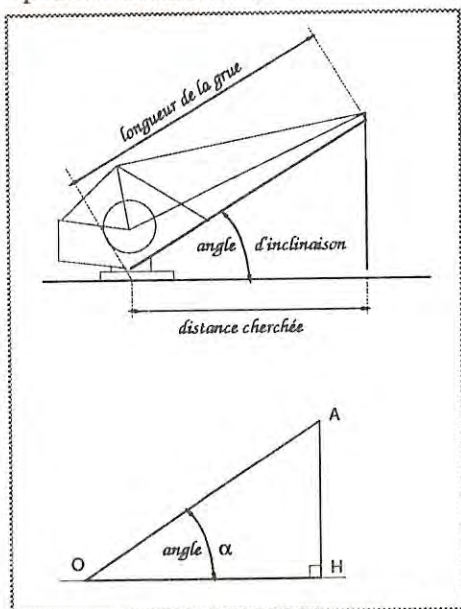
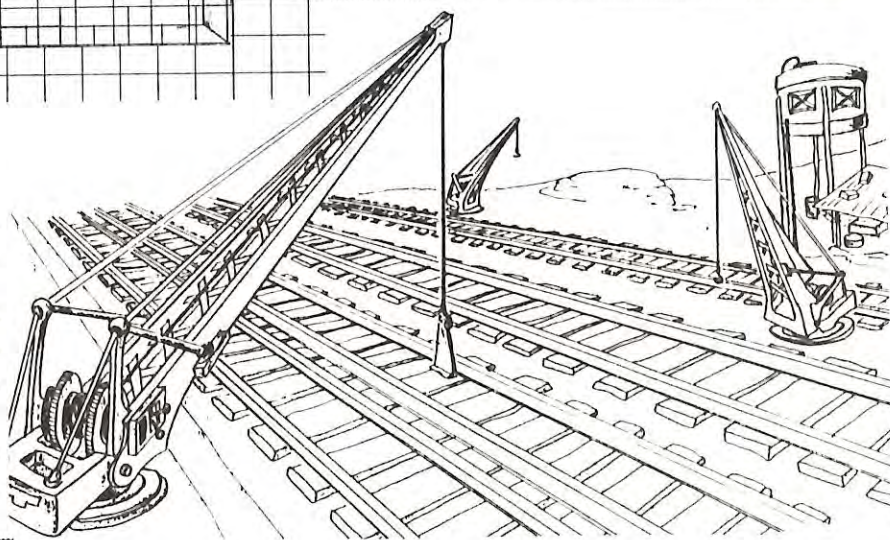
Cosinus



Sur un chantier, trois
97 grues identiques ont un
« bras » qui mesure 4 m.

Ces trois grues sont inclinées dif-
féremment par rapport à l'hor-
izontale : les trois angles sont de
 20° , 40° et 60° .

Pour chacune des ces grues, on
veut connaître, la distance qu'elle
peut atteindre au sol ...



On considère pour cela le triangle
rectangle OAH déterminé par le
sol, le « bras » et le fil de la grue.

La longueur OA vaut 4 m ; on
cherche OH dans chaque cas.
Fais les 3 figures correspon-
dantes (échelle 1 cm pour 1 m) et
trouve les vraies valeurs de OH.

— Cas de l'angle $\alpha = 20^\circ$:
mesure de OH sur la figure :

.....
distance OH réelle :
.....



— Cas de l'angle $\alpha = 40^\circ$:
mesure de OH sur la figure :

.....
distance OH réelle :
.....



— Cas de l'angle $\alpha = 60^\circ$:
mesure de OH sur la figure :

.....
distance OH réelle :
.....

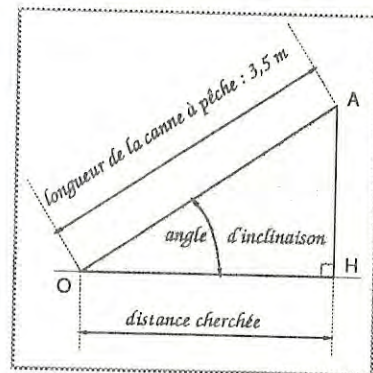




Un pêcheur possède une canne de 3,5 m de long. Il peut pêcher à une distance qui dépend de l'angle d'inclinaison de la canne.

Nous appellerons OA le segment représentant la canne, AH le segment représentant le fil vertical et α l'angle d'inclinaison de la canne.

Nous voulons connaître la distance OH correspondant à certaines valeurs de l'angle α ...



Pour les valeurs de α données, construis 98 ci-dessous le triangle OAH à l'échelle : 1cm pour 1m . Déduis-en OH en mètres.

Pour les valeurs de α données, construis 99 ci-dessous le triangle OAH à l'échelle : 2cm pour 1m . Déduis-en OH en mètres.

O Cas où l'angle $\alpha = 45^\circ$:
OH sur la figure : , OH réel :

O Cas où l'angle $\alpha = 45^\circ$:
OH sur la figure : , OH réel :

O Cas où l'angle $\alpha = 30^\circ$:
OH sur la figure : , OH réel :

O Cas où l'angle $\alpha = 30^\circ$:
OH sur la figure : , OH réel :

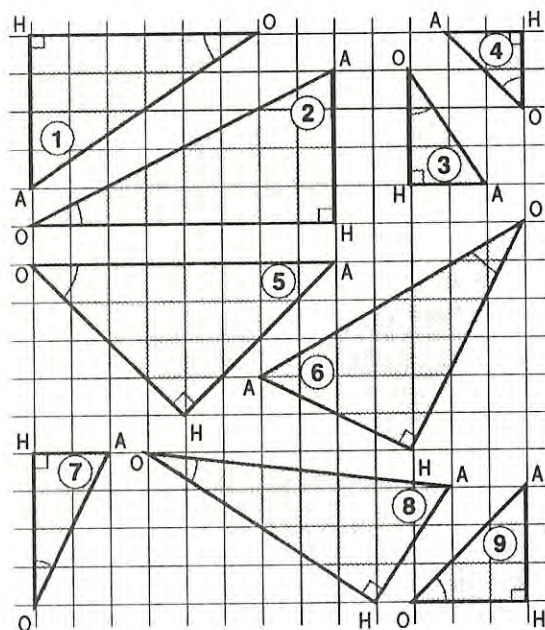
Pour chacune des quatre figures construites ci-dessus, calcule la valeur du rapport $c = \frac{OH}{OA}$:

100 angle $\alpha = 45^\circ$
échelle 1cm pour 1m : $c = \frac{\quad}{\quad} = \dots\dots\dots$,
échelle 2cm pour 1m : $c = \frac{\quad}{\quad} = \dots\dots\dots$

angle $\alpha = 30^\circ$
échelle 1cm pour 1m : $c = \frac{\quad}{\quad} = \dots\dots\dots$,
échelle 2cm pour 1m : $c = \frac{\quad}{\quad} = \dots\dots\dots$

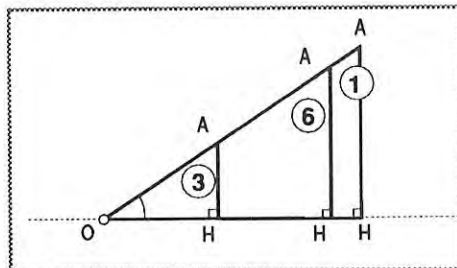
Avec des constructions très précises, on obtiendrait $c \approx 0,707$ pour $\alpha = 45^\circ$ et $c \approx 0,866$ pour $\alpha = 30^\circ$. Quels sont, avec ces valeurs, les résultats que l'on obtiendrait pour la distance OH (en mètres) ? :

44 — $\alpha = 45^\circ$: OH = 3,5 x = | — $\alpha = 30^\circ$: OH = 3,5 x =



Voici 9 triangles rectangles sur lesquels nous avons marqué un des deux angles aigus.

101 Parmi ces 9 triangles, les triangles n° 3, 6, 1 ont le même angle marqué ; nous les avons redessinés ci-dessous en superposant l'angle commun :



Les 6 autres triangles peuvent aussi se regrouper par 3 en superposant les angles marqués qui sont égaux. Trouve ces regroupements, et dessine soigneusement ces triangles en les superposant convenablement.



Tu as construis ci-dessus trois triangles superposés. Sur chacun, mesure OA, OH, puis complète :

triangle n° : $c = \frac{OH}{OA} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} = \dots\dots\dots$,
(vérifie : $OH = OA \times c = \dots\dots\dots \times \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$)

triangle n° : $c = \frac{OH}{OA} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} = \dots\dots\dots$,
(vérifie : $OH = OA \times c = \dots\dots\dots \times \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$)

triangle n° : $c = \frac{OH}{OA} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} = \dots\dots\dots$,
(vérifie : $OH = OA \times c = \dots\dots\dots \times \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$)

104 Sur le quadrillage du haut, un carreau mesure 0,5 cm. Complète le tableau ci-dessous (pense au th. de Pythagore...) :

	triangle n°	triangle n°	triangle n°
côté OH			
côté OA			
$c = \frac{OH}{OA}$			



Tu as construis ci-dessus trois triangles superposés. Sur chacun, mesure OA, OH, puis complète :

triangle n° : $c = \frac{OH}{OA} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} = \dots\dots\dots$,
(vérifie : $OH = OA \times c = \dots\dots\dots \times \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$)

triangle n° : $c = \frac{OH}{OA} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} = \dots\dots\dots$,
(vérifie : $OH = OA \times c = \dots\dots\dots \times \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$)

triangle n° : $c = \frac{OH}{OA} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} = \dots\dots\dots$,
(vérifie : $OH = OA \times c = \dots\dots\dots \times \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$)

105 Sur le quadrillage du haut, un carreau mesure 0,5 cm. Complète le tableau ci-dessous (pense au th. de Pythagore...) :

	triangle n°	triangle n°	triangle n°
côté OH			
côté OA			
$c = \frac{OH}{OA}$			

106 Pour calculer le rapport c associé à un angle α donné **dans un triangle rectangle**, on procède toujours de la façon suivante (exemples ci-contre) :

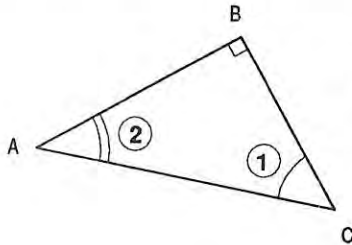
$$c = \frac{\text{côté de l'angle droit adjacent à } \alpha}{\text{longueur de l'hypoténuse}}$$

Calcule le rapport c pour les dix angles donnés ci-dessous.

$$c_2 = \frac{AB}{AC}$$

$$c_2 \approx \frac{\dots}{\dots}$$

$$c_2 \approx \dots$$



$$c_1 = \frac{CB}{CA}$$

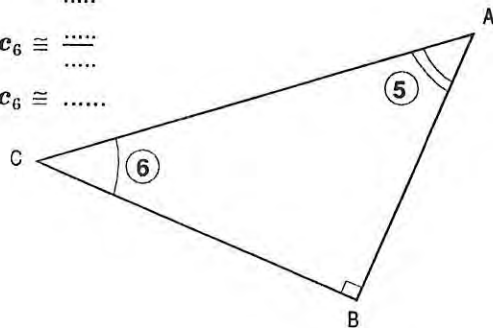
$$c_1 \approx \frac{\dots}{\dots}$$

$$c_1 \approx \dots$$

$$c_6 = \frac{CB}{AC}$$

$$c_6 \approx \frac{\dots}{\dots}$$

$$c_6 \approx \dots$$



$$c_5 = \frac{AB}{AC}$$

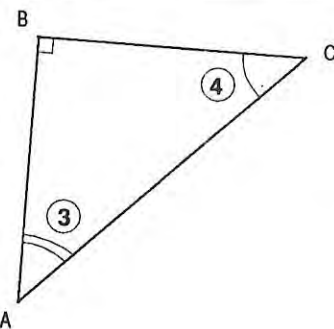
$$c_5 \approx \frac{\dots}{\dots}$$

$$c_5 \approx \dots$$

$$c_3 = \frac{AB}{AC}$$

$$c_3 \approx \frac{\dots}{\dots}$$

$$c_3 \approx \dots$$



$$c_4 = \frac{CB}{CA}$$

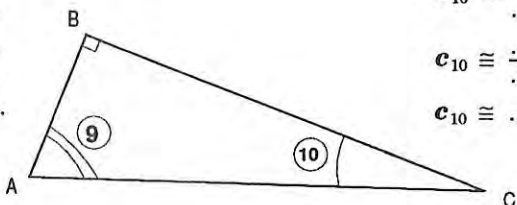
$$c_4 \approx \frac{\dots}{\dots}$$

$$c_4 \approx \dots$$

$$c_9 = \frac{\dots}{\dots}$$

$$c_9 \approx \frac{\dots}{\dots}$$

$$c_9 \approx \dots$$



$$c_{10} = \frac{\dots}{\dots}$$

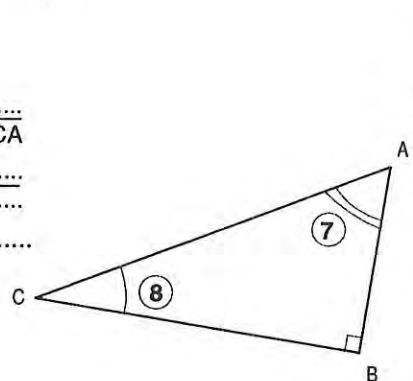
$$c_{10} \approx \frac{\dots}{\dots}$$

$$c_{10} \approx \dots$$

$$c_8 = \frac{\dots}{CA}$$

$$c_8 \approx \frac{\dots}{\dots}$$

$$c_8 \approx \dots$$



$$c_7 = \frac{\dots}{AC}$$

$$c_7 \approx \frac{\dots}{\dots}$$

$$c_7 \approx \dots$$

107 Voici un tableau donnant des valeurs assez précises du rapport c pour diverses valeurs de l'angle α .

angle	rapport
$\alpha = 5^\circ$	$c = 0,996$
$\alpha = 10^\circ$	$c = 0,985$
$\alpha = 15^\circ$	$c = 0,966$
$\alpha = 20^\circ$	$c = 0,940$
$\alpha = 25^\circ$	$c = 0,906$
$\alpha = 30^\circ$	$c = 0,866$
$\alpha = 35^\circ$	$c = 0,819$
$\alpha = 40^\circ$	$c = 0,766$

angle	rapport
$\alpha = 45^\circ$	$c = 0,707$
$\alpha = 50^\circ$	$c = 0,643$
$\alpha = 55^\circ$	$c = 0,574$
$\alpha = 60^\circ$	$c = 0,5$
$\alpha = 65^\circ$	$c = 0,423$
$\alpha = 70^\circ$	$c = 0,342$
$\alpha = 75^\circ$	$c = 0,259$
$\alpha = 80^\circ$	$c = 0,174$

En comparant les rapports que tu as obtenus ci-dessus avec ceux du tableau, donne une valeur approchée de chaque angle :

angle n° 1 :	angle n° 2 :	angle n° 3 :
angle n° 4 :	angle n° 5 :	angle n° 6 :
angle n° 7 :	angle n° 8 :	angle n° 9 :
angle n° 10 :	angle n° 11 :	angle n° 12 :

Obtiens-tu bien des valeurs complémentaires quand il s'agit des angles aigus d'un même triangle rectangle ?

Compare ces résultats avec les valeurs que tu mesureras sur les figures.

ce qu'il faut savoir ...

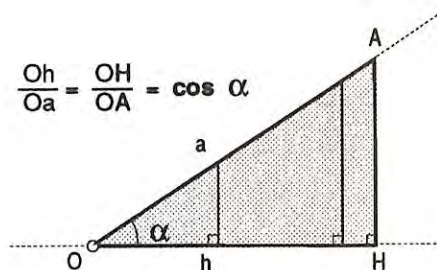
Dans un triangle rectangle, le rapport :

$$c = \frac{\text{côté de l'angle droit adjacent à } \alpha}{\text{longueur de l'hypoténuse}}$$

ne dépend que de l'angle α formé par l'hypoténuse et le côté de l'angle droit considéré. Ce rapport s'appelle le **cosinus** de l'angle α . On le note : $c = \cos \alpha$.

Exemple sur la figure ci-contre :

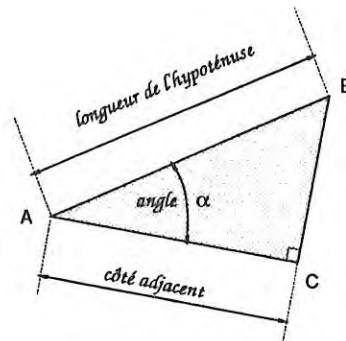
$$\cos \alpha = \frac{OH}{OA}, \quad OH = OA \times \cos \alpha$$



... ce qu'il faut savoir faire

Si ABC est un triangle rectangle, et si tu connais le **cosinus** de l'un de ses angles aigus α , alors tu connais le rapport :

$$\cos \alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}$$



Si ABC est un triangle rectangle, tu peux **calculer** le **cosinus** de l'un de ses angles aigus :

$$\cos \alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}$$

IL TE SUFFIT DONC DE CALCULER OU DE MESURER LES DEUX LONGUEURS AC ET AB.

TU PEUX DONC CALCULER L'UNE DES DEUX LONGUEURS AC OU AB SI TU CONNAIS L'AUTRE :

$$AC = AB \times \cos \alpha$$

$$AB = \frac{AC}{\cos \alpha}$$

Si tu connais la **mesure** d'un angle α , tu peux **trouver** son **cosinus** en utilisant une **table des cosinus**.

Sur certaines calculatrices, tu peux obtenir le cosinus à partir de l'angle ; tape par exemple :

45 COS

angle α	cosinus
$\alpha = 0^\circ$	$c = 1,000$
$\alpha = 1^\circ$	$c = 0,999$
$\alpha = 2^\circ$	$c = 0,999$
$\alpha = 10^\circ$	$c = 0,985$
$\alpha = 20^\circ$	$c = 0,940$
$\alpha = 25^\circ$	$c = 0,906$
$\alpha = 30^\circ$	$c = 0,866$
$\alpha = 35^\circ$	$c = 0,819$
$\alpha = 40^\circ$	$c = 0,766$
$\alpha = 45^\circ$	$c = 0,707$
$\alpha = 50^\circ$	$c = 0,643$
$\alpha = 55^\circ$	$c = 0,574$
$\alpha = 60^\circ$	$c = 0,5$
$\alpha = 65^\circ$	$c = 0,423$
$\alpha = 70^\circ$	$c = 0,342$
$\alpha = 75^\circ$	$c = 0,259$
$\alpha = 80^\circ$	$c = 0,174$
$\alpha = 85^\circ$	$c = 0,087$

Si tu connais le **cosinus** d'un angle α , tu peux **trouver** une valeur approchée de la mesure de cet angle en utilisant une **table des cosinus**.

Sur certaines calculatrices, tu peux obtenir l'angle à partir de son cosinus ; tape par exemple :

0,940 INV COS

108 ABC est un triangle *isocèle* de base AB. AC et BC mesurent 1 m. On veut calculer AB et CH.

a) on suppose que l'angle à la base α mesure 70° :

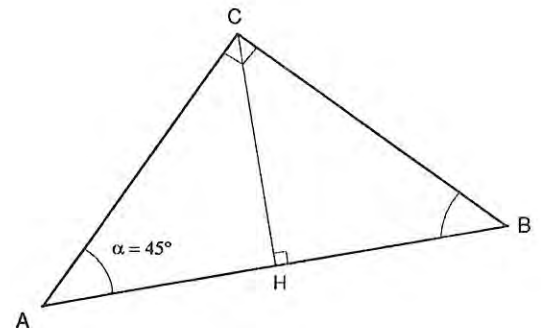
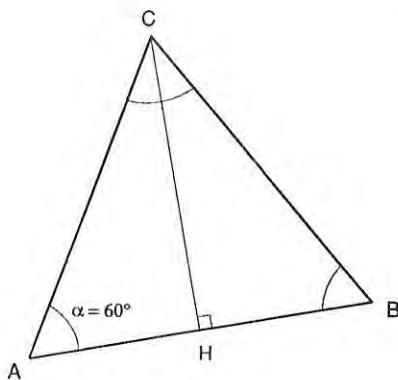
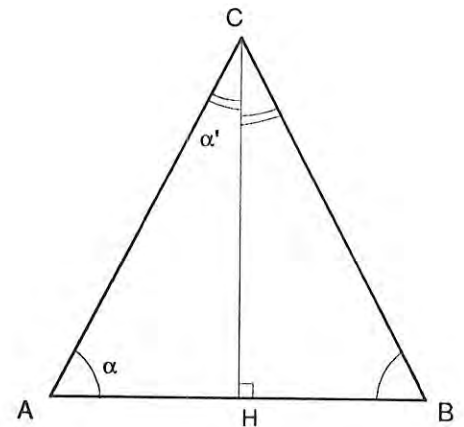
Quelle est la mesure de l'angle α' ? :

Complète les égalités suivantes :

$$\begin{array}{ll} AH = AC \times \cos \dots, & CH = AC \times \cos \dots, \\ AH = \dots, & CH = \dots, \\ AB = \dots, & CH = \dots. \end{array}$$

b) même question si l'angle à la base α mesure 50° :

$$\begin{array}{ll} AH = AC \times \cos \dots, & CH = AC \times \cos \dots, \\ AH = \dots, & CH = \dots, \\ AB = \dots, & CH = \dots. \end{array}$$



109 Le triangle ABC ci-dessus est un triangle *équilateral* de côté 4,5 cm.

Quelle est la mesure de AH ?

— calcule CH en utilisant le th. de Pythagore :

$$CH^2 = \dots - \dots = \dots$$

$$CH = \dots$$

— déduis-en les valeurs suivantes :

$$\cos 60^\circ = \frac{\dots}{\dots} = \dots, \quad \cos 30^\circ = \frac{\dots}{\dots} = \dots$$

(compare tes résultats à une table ...)

110 Le triangle ABC ci-dessus est un triangle *isocèle rectangle*. Le côté AC mesure 4,5 cm. Calcule AB, puis AH :

$$AB^2 = \dots + \dots = \dots$$

$$AB = \dots, \quad AH = \dots$$

— déduis-en : $\cos 45^\circ = \frac{\dots}{\dots} = \dots$,

— écris $\cos 45^\circ$ de six façons différentes à partir de la figure :

$$\cos 45^\circ = \frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots}$$

ABCD est un *trapèze rectangle*.

111 On suppose que $AB = 8$ cm, $BC = 7$ cm et que l'angle α mesure 40° .

— quelle est la mesure de α' ? : $\alpha' = \dots$

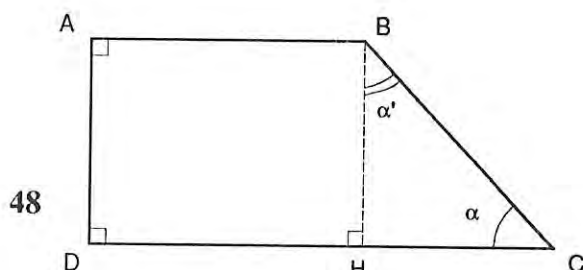
$$CH = \dots \times \cos \dots = \dots,$$

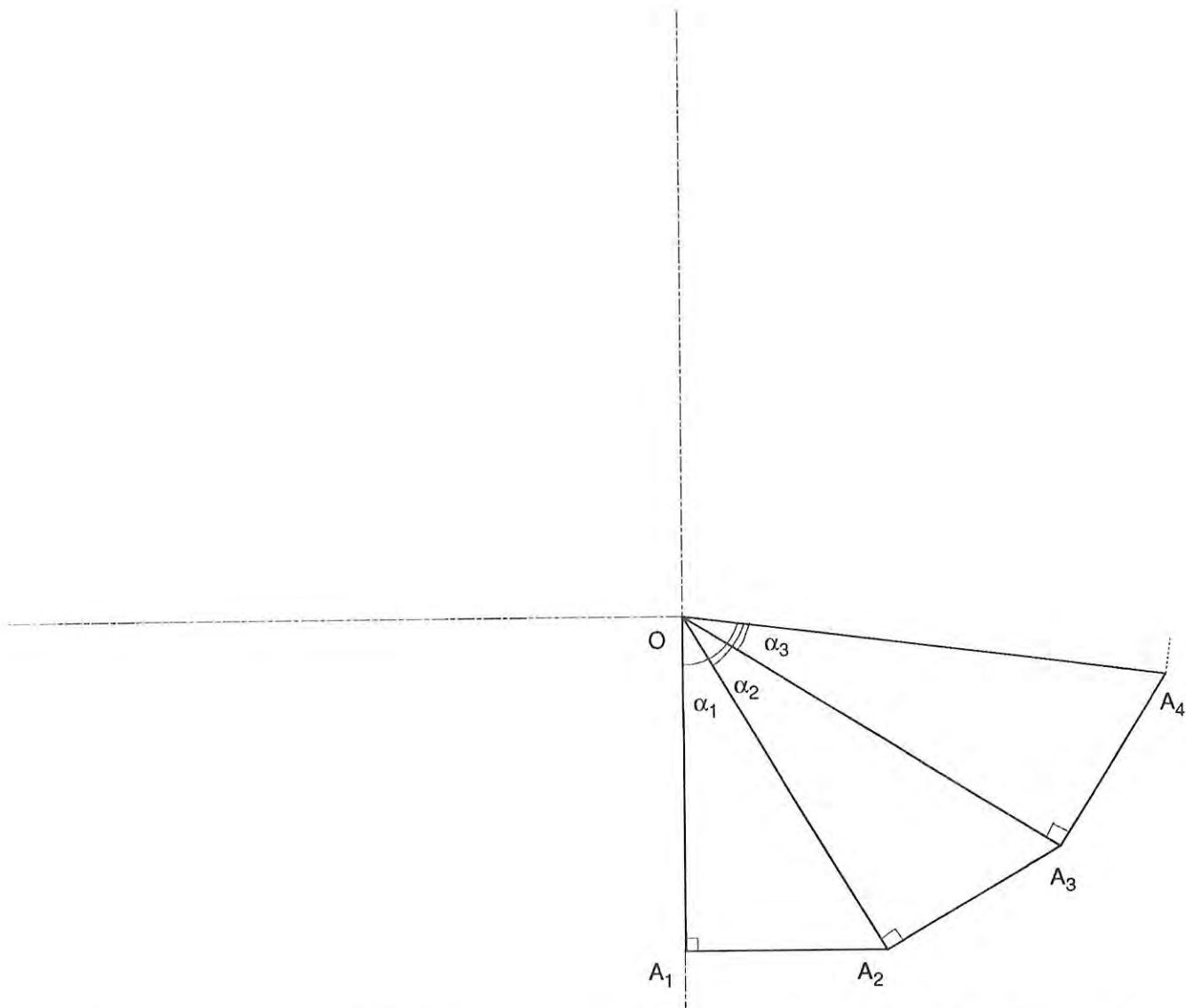
$$BH = \dots \times \cos \dots = \dots$$

— trace l'intersection E de AD et BC, et calcule les angles en B et E du triangle ABE.

$$\text{— complète : } BE = \frac{AB}{\cos \dots} = \dots,$$

$$AE = BE \times \cos \dots = \dots$$





Nous avons commencé à dessiner une « spirale » $A_1A_2A_3 \dots$ en construisant A_2 tel que A_1A_2 soit
 112 perpendiculaire à OA_1 et $A_1A_2 = 3\text{cm}$; A_3 tel que A_2A_3 soit perpendiculaire à OA_2 et $A_2A_3 = 3\text{cm}$
 etc., etc. Continue la construction ... , puis calcule les angles $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ ($OA_1 = 5\text{ cm}$) :

$(OA_2)^2 = \dots + \dots = \dots$,	$OA_2 = \dots$,	$(OA_6)^2 = \dots + \dots = \dots$,	$OA_6 = \dots$,
$\cos \alpha_1 = \frac{\dots}{\dots} = \dots$,	$\alpha_1 = \dots$.	$\cos \alpha_5 = \frac{\dots}{\dots} = \dots$,	$\alpha_5 = \dots$.
$(OA_3)^2 = \dots + \dots = \dots$,	$OA_3 = \dots$,	$(OA_7)^2 = \dots + \dots = \dots$,	$OA_7 = \dots$,
$\cos \alpha_2 = \frac{\dots}{\dots} = \dots$,	$\alpha_2 = \dots$.	$\cos \alpha_6 = \frac{\dots}{\dots} = \dots$,	$\alpha_6 = \dots$.
$(OA_4)^2 = \dots + \dots = \dots$,	$OA_4 = \dots$,	$(OA_8)^2 = \dots + \dots = \dots$,	$OA_8 = \dots$,
$\cos \alpha_3 = \frac{\dots}{\dots} = \dots$,	$\alpha_3 = \dots$.	$\cos \alpha_7 = \frac{\dots}{\dots} = \dots$,	$\alpha_7 = \dots$.
$(OA_5)^2 = \dots + \dots = \dots$,	$OA_5 = \dots$,	A partir de quels points a-t-on effectué plus d'un demi-tour ? plus de trois quarts de tour ?	
$\cos \alpha_4 = \frac{\dots}{\dots} = \dots$,	$\alpha_4 = \dots$.		

Le repère (Ox, Oy) dessiné ci-contre est un repère orthonormé. L'unité est 1cm.

Place les points A, B et C suivants, puis leurs projections orthogonales A', B' et C' sur Ox :

A(3;4) B(6;2,5) C(7;5)

Calcule :

$$OA^2 = \dots + \dots = \dots$$

$$OA = \dots$$

$$OB^2 = \dots + \dots = \dots$$

$$OB = \dots$$

$$OC^2 = \dots + \dots = \dots$$

$$OC = \dots$$

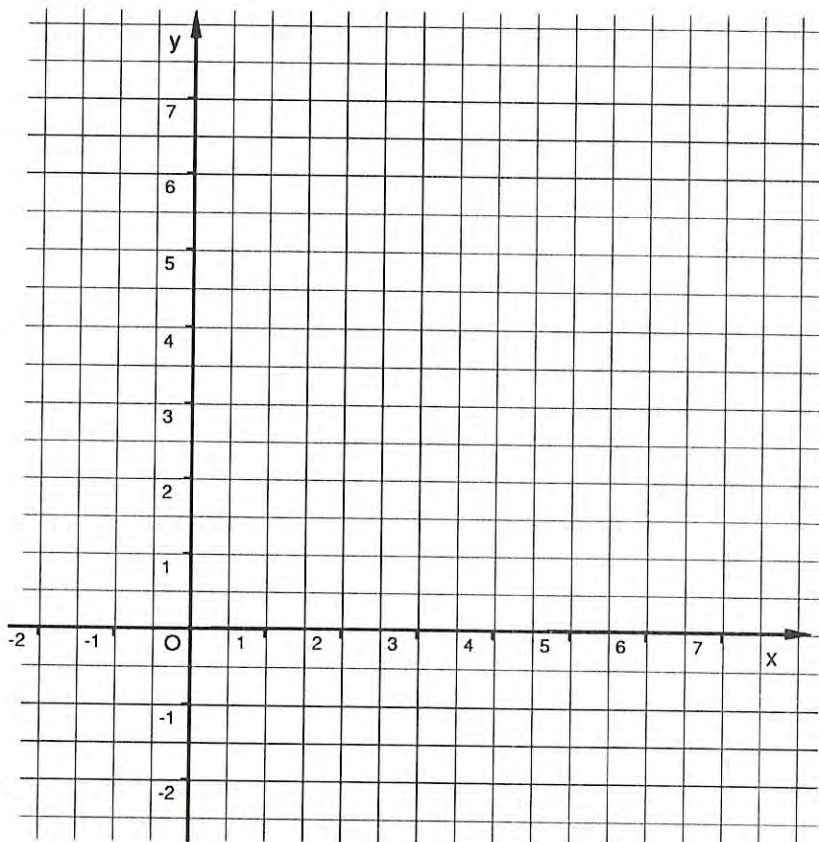
Quels sont les angles entre Ox et les trois segments OA, OB, OC ? :

$$\cos \widehat{AOA'} = \dots = \dots = \dots$$

$$\cos \widehat{BOB'} = \dots = \dots = \dots$$

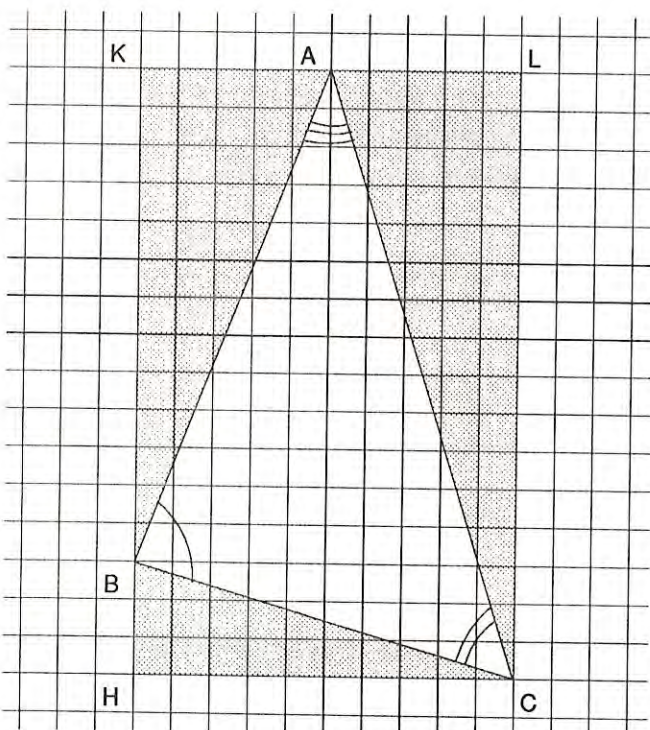
$$\cos \widehat{COC'} = \dots = \dots = \dots$$

$$\widehat{AOA'} = \dots, \widehat{BOB'} = \dots, \widehat{COC'} = \dots$$



Mesure les angles avec ta calculatrice ...

50



Les sommets du triangle ABC sont des points du quadrillage.

114 Calcule les longueurs AB, BC et CA :

$$AB^2 = \dots + \dots = \dots ; AB = \dots$$

$$BC^2 = \dots + \dots = \dots ; BC = \dots$$

$$CA^2 = \dots + \dots = \dots ; CA = \dots$$

Calcule les cosinus suivants :

$$\cos \widehat{ACL} = \dots = \dots = \dots$$

$$\cos \widehat{KAB} = \dots = \dots = \dots$$

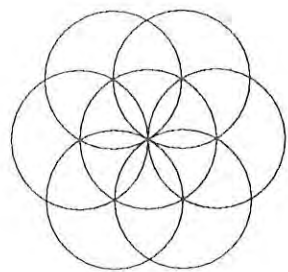
$$\cos \widehat{HBC} = \dots = \dots = \dots$$

Déduis-en les angles de la figure :

$$\widehat{ACL} = \dots \quad \widehat{KAB} = \dots \quad \widehat{HBC} = \dots$$

$$\widehat{CAL} = \dots \quad \widehat{ABK} = \dots \quad \widehat{BCH} = \dots$$

$$\widehat{BAC} = \dots \quad \widehat{ACB} = \dots \quad \widehat{CBA} = \dots$$



L'hexagone régulier

Les sommets de ABCDEF sont sur le cercle
115 de centre O de rayon R. Les côtés sont égaux.
 En utilisant le fait que le cercle est partagé
 en parties égales, calcule les six angles au centre :

..... = = = = = =°

En utilisant le fait que le triangle OAB est isocèle,
 calcule ses angles en A et B, déduis-en AB :

$\widehat{OAB} = \dots\dots\dots$; $\widehat{OBA} = \dots\dots\dots$; $AB = \dots\dots\dots$

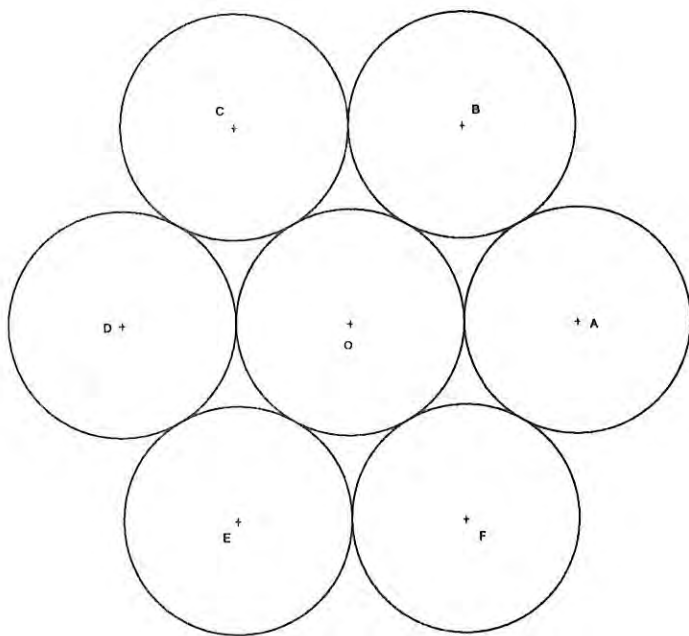
Que peut-on dire du côté BC ?

Trace AC et appelle H son intersection avec OB.

la droite AC est la de OB.

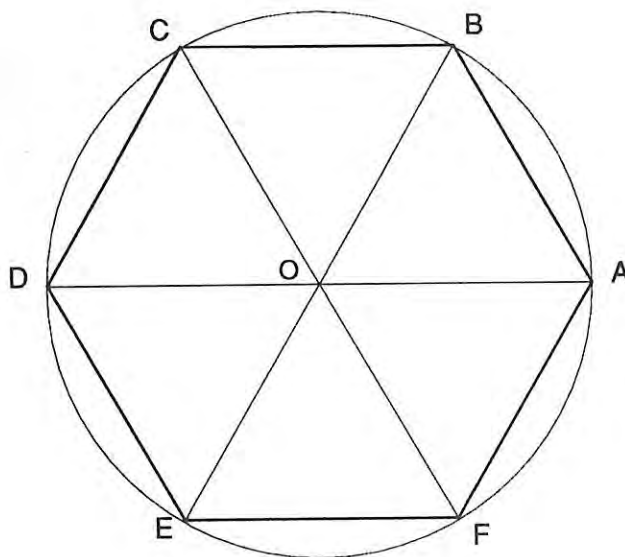
Calcule : $CH = CB \times \cos \dots\dots\dots^\circ = \dots \times \dots\dots\dots$; $AH = \dots \times \dots\dots\dots$

Complète la figure en trouvant deux triangles équi-
 latéraux de côté égal à $1,732 \times R$



Complète la figure ci-contre
117 de façon à retrouver tout le
 dessin formé par les sept
 cercles précédents.

(commence par tracer le cercle de
 centre O qui passe par le point A)



Nous avons dessiné ci-contre sept
116 cercles tangents et égaux, dont le
 rayon est $R = 1,5 \text{ cm}$.

Trace l'hexagone ABCDEF, ainsi que les
 segments OA, OB, OC, OD, OE, OF.

Calcule les longueurs OA, AB, BO :

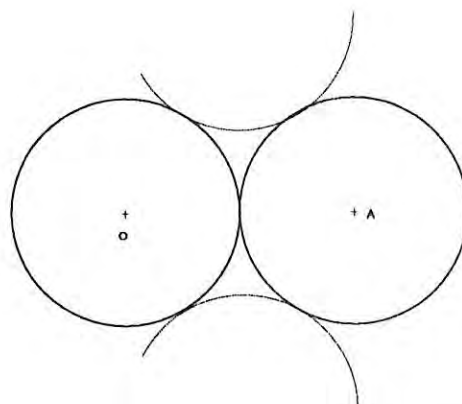
$OA = \dots\dots\dots$; $AB = \dots\dots\dots$; $BO = \dots\dots\dots$

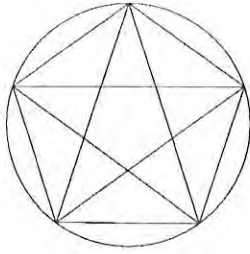
Le triangle OAB est

Trace le cercle de centre O et de rayon 3cm.

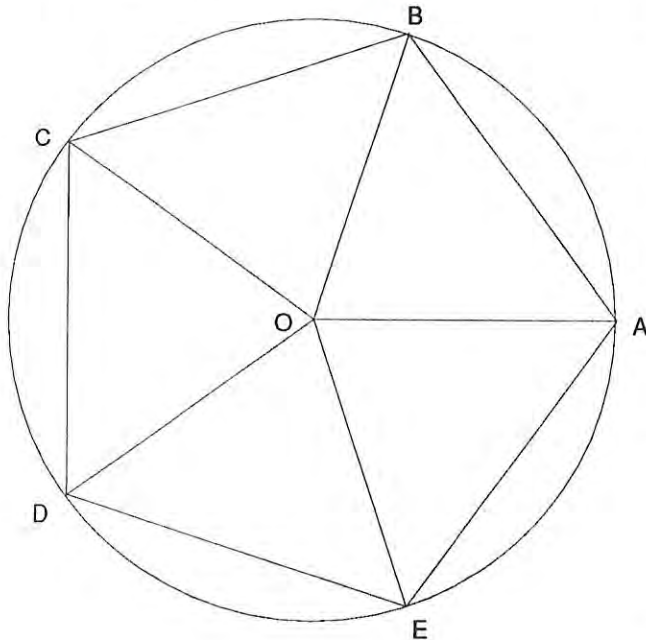
Que peux-tu dire des angles et des côtés de
 l'hexagone ABCDEF ?

.....





Le pentagone régulier



119 Complète la figure ci-contre en observant bien les consignes suivantes :

— Trace le diamètre CD perpendiculaire à AB (place C à gauche),
— Trace les cercles de diamètres CO et OD (appelle I et J leurs centres respectifs),

— Dans les deux cercles de centres I et J, trace les rayons IK et JL perpendiculaires à CD et situés du même côté que A par rapport à la droite CD,

— Trace en rouge le segment BL, prolonge-le jusqu'à son 2^{ème} point d'intersection E avec le grand cercle,

— Trace en rouge EI et prolonge-le jusqu'à son 2^{ème} point d'intersection F avec le grand cercle,

— Dans le grand cercle, trace en rouge la corde FG parallèle à CD,

— Trace en rouge les symétriques BH et GH des segments BE et EF par rapport à la droite AB.

52 — Trace la projection orthogonale M de L sur la droite AB, puis colorie légèrement en bleu le triangle BLM.

Les sommets de ABCDE sont sur le cercle de centre O de rayon R. Les côtés sont égaux.

118 En utilisant le fait que le cercle est partagé en parties égales, calcule les cinq angles au centre :

$$\dots\dots\dots = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots^\circ$$

En utilisant le fait que le triangle OAB est isocèle, calcule ses angles en A et B :

$$\widehat{OAB} = \dots\dots\dots ; \widehat{OBA} = \dots\dots\dots$$

Trace la hauteur OH du triangle AOB. Calcule :

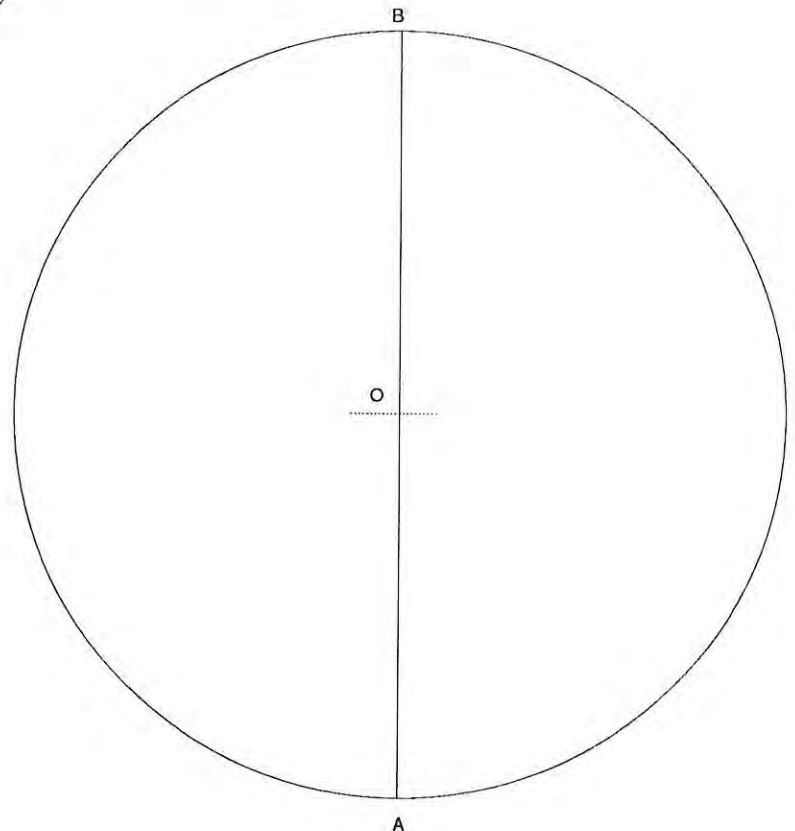
$$AH = OA \times \cos \dots\dots\dots^\circ = \dots \times \dots\dots\dots ; AB = \dots \times \dots\dots\dots$$

Trace le segment AC, il coupe OB en K.

la droite OB est la de AC, car

Marque les angles égaux et calcule $\widehat{OAC}$, puis AK :

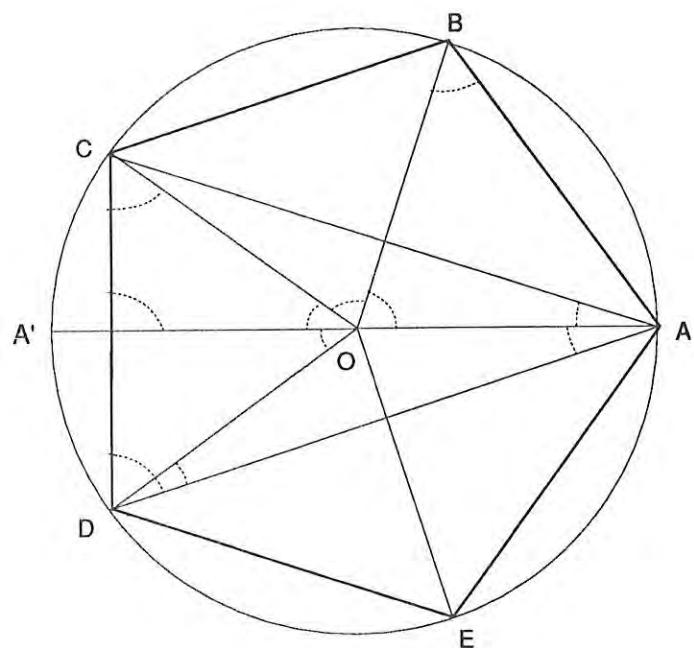
Complète la figure en traçant l'étoile ACEBDA.



On suppose que le rayon OB du cercle ci-dessus mesure 1m, 120 Calcule : LM = et BM =, déduis-en :

$$BL^2 = \dots\dots\dots + \dots\dots\dots = \dots\dots\dots ; BL = \dots\dots\dots ; \cos \widehat{EBA} = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

Compare $\widehat{EBA}$ à l'angle $\widehat{OAC}$ de l'ex. 118 : $\widehat{EBA} = \dots\dots\dots^\circ$, $\widehat{OAC} = \dots\dots\dots^\circ$
L'étoile BEFGHB est-elle régulière ?



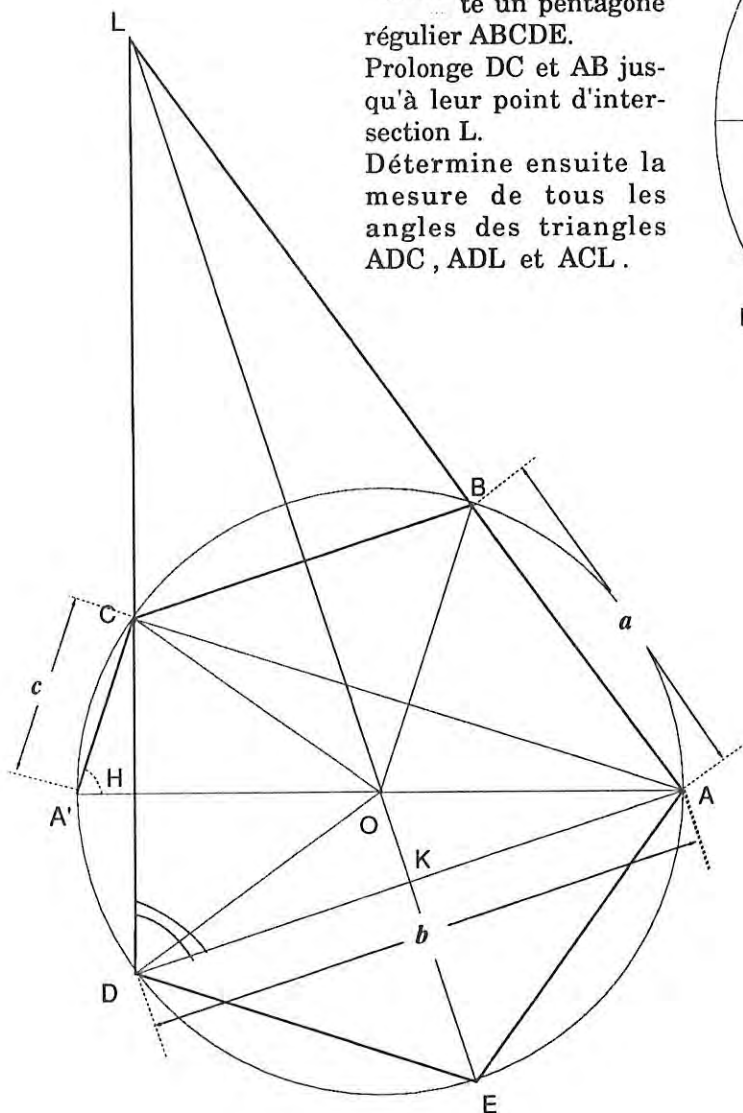
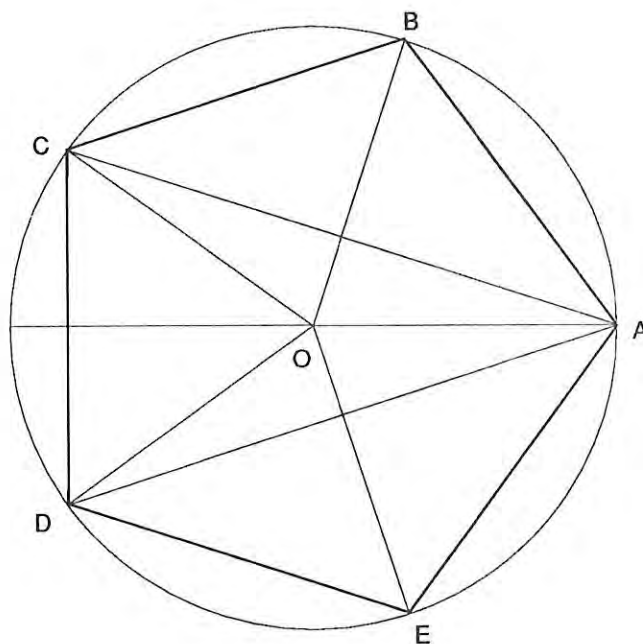
La figure ci-contre
121 représente un pentagone régulier ABCDE.

Nous avons prolongé le rayon OA et obtenu le diamètre AA'. En commençant par les angles au centre, indique la mesure de chacun des angles marqués.

La figure de
122 droite représente un pentagone régulier ABCDE.

Prolonge DC et AB jusqu'à leur point d'intersection L.

Détermine ensuite la mesure de tous les angles des triangles ADC, ADL et ACL.



Nous avons dessiné ci-contre la figure complète que tu as obtenue à l'exercice 122. Nous avons posé :

$AB = a$; $AD = b$; $A'C = c$; $AO = r$.

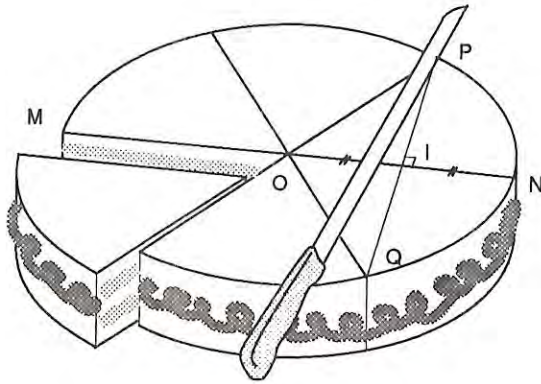
Indique sur la figure les longueurs de DH, CA, CL, DL, DK.

Voici trois valeurs de $\cos 72^\circ$ que l'on peut déduire de la figure :

$\frac{a}{2b}$	$\frac{b}{2(a+b)}$	$\frac{c}{2r}$
----------------	--------------------	----------------

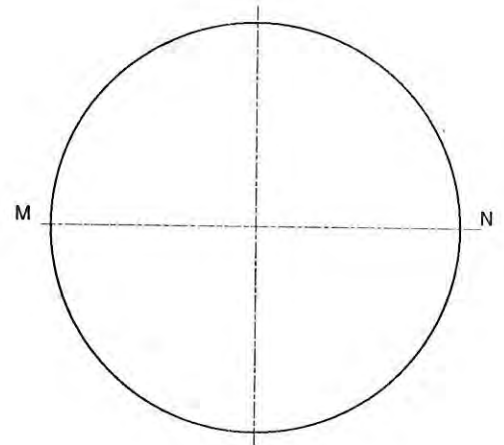
Indique sous chacune le triangle rectangle qu'il faut considérer :

.....

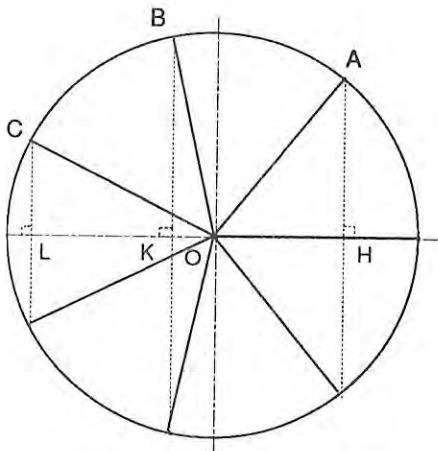


124 Pour découper un gâteau circulaire en six parties égales, on trace un diamètre MN et on cherche les points P et Q du cercle qui se projettent au milieu I du rayon ON.

Effectue le « découpage » en six sur le schéma prévu ci-contre, marque les angles de 60°, puis explique (à l'aide de $\cos 60^\circ$) pourquoi les premiers points cherchés se projettent bien en I.



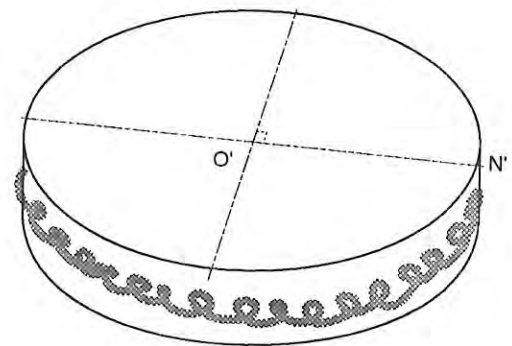
.....
.....
.....



$$\frac{OH}{R} = \cos \dots^\circ = \dots$$

$$\frac{OK}{R} = \cos \dots^\circ = \dots$$

$$\frac{OL}{R} = \cos \dots^\circ = \dots$$



Nouveau rayon O'N' :

Le point H correspond au point H' tel que :

$$\frac{O'H'}{O'N'} = \frac{OH}{R} = \dots, \text{ donc } O'H' = \dots$$

Le point K correspond au point K' tel que :

$$\frac{O'K'}{O'N'} = \frac{OK}{R} = \dots, \text{ donc } O'K' = \dots$$

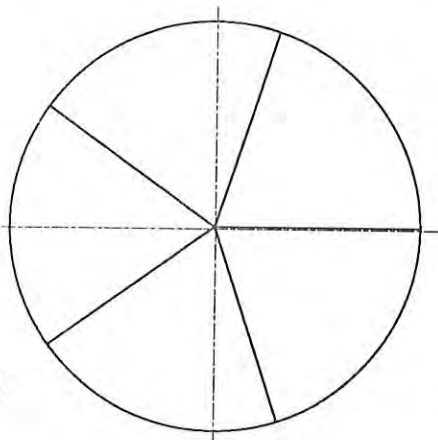
Le point L correspond au point L' tel que :

$$\frac{O'L'}{O'N'} = \frac{OL}{R} = \dots, \text{ donc } O'L' = \dots$$

125 Nous voulons découper le gâteau ci-dessus, à droite, en sept parts égales, comme sur la figure de gauche.

Indique la valeur des angles au centre, puis exprime les rapports de OH, OK, OL au rayon R en utilisant des cosinus convenables.

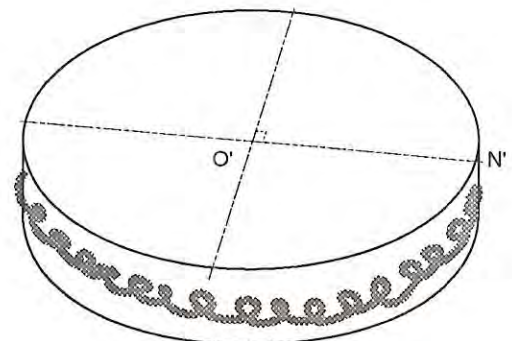
Sers toi ensuite de ces valeurs pour reporter le partage sur la figure de droite (attention, mesure bien le rayon O'N' ! ...)



126 Voici, à gauche, un découpage en cinq parts égales.

Utilise une méthode analogue pour reporter ce découpage sur le gâteau dessiné ci-contre, à droite.

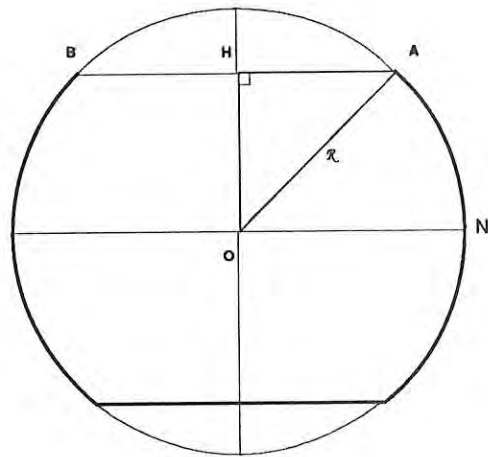
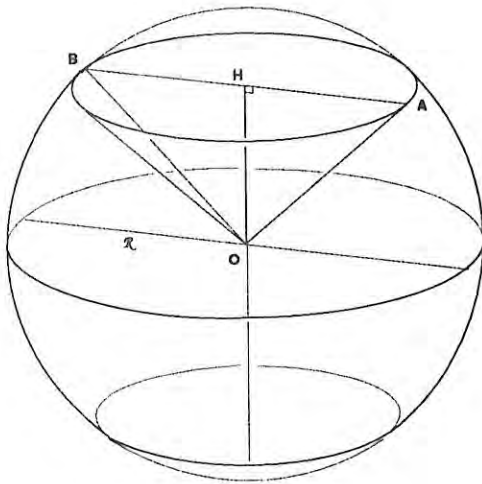
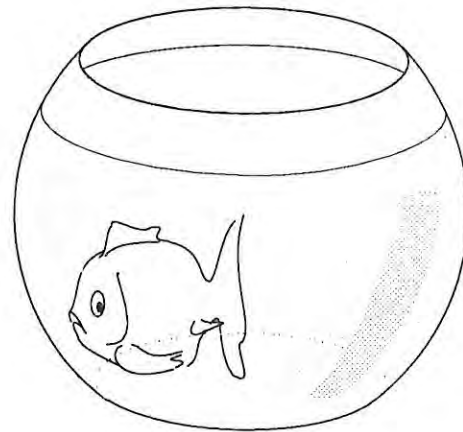
(Fais bien attention, le rayon O'N' du gâteau n'a pas la même mesure que celui du disque de gauche)



Un aquarium a la forme d'une **sphère** de **diamètre**
127 $2R = 40$ cm . Pour l'ouverture, dans la partie supé-
 rieure, cette sphère est découpée par un plan hori-
 zontal situé à 14 cm au-dessus de son *centre* . Le fond est
 aplati, à 15 cm en dessous du centre.

(nous avons dessiné ci-dessous l'aquarium en perspective et, à droi-
 te, une coupe verticale dans le plan passant par le centre O et par le
 diamètre AB de l'ouverture supérieure)

Colorie légèrement, sur chacune des deux figures, le triangle
 rectangle OAH. Effectue ensuite les calculs demandés.



Calcule le rayon de l'ouverture :

$$HA^2 = \dots + \dots = \dots,$$

$$HA = \dots.$$

Marque l'angle $\widehat{NOA}$ sur la figure,

$$\cos \widehat{NOA} = \dots = \dots, \quad \widehat{NOA} = \dots^\circ$$

Quel est le périmètre de l'ouverture ?

128 $L = \dots \times \dots = \dots$

Son aire ? $S = \dots \times \dots = \dots$

Quels seraient le volume V et l'aire S de l'aquarium si
 celui-ci était égal à la sphère complète ?

$$V = \dots \times \dots = \dots, \quad S = \dots \times \dots = \dots$$

Nous avons redessiné ci-contre la coupe verti-
129 cale de l'aquarium sphérique, en indiquant le
 diamètre AB de l'ouverture.

Représente sur la figure :

— le fond B'A' de l'aquarium (tu peux te servir de la
 figure précédente),

— le niveau B''A'' de l'eau, sachant que celui-ci est
 situé à 4 cm de l'ouverture supérieure.

Calcule (au brouillon) :

rayon du disque représentant
 le fond :

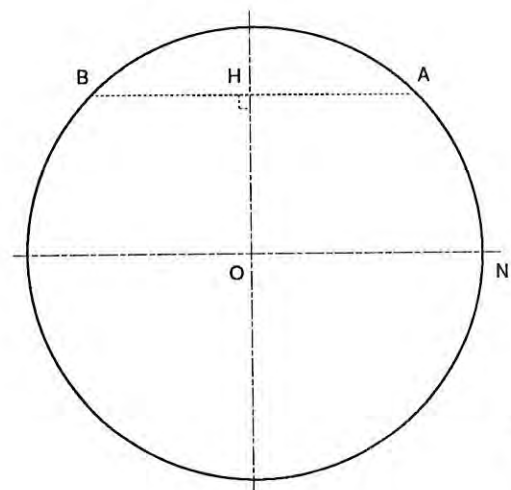
$$\cos \widehat{NOA'} = \dots,$$

$$\widehat{NOA'} = \dots^\circ$$

rayon du disque représentant
 la surface d'eau :

$$\cos \widehat{NOA''} = \dots,$$

$$\widehat{NOA''} = \dots^\circ$$





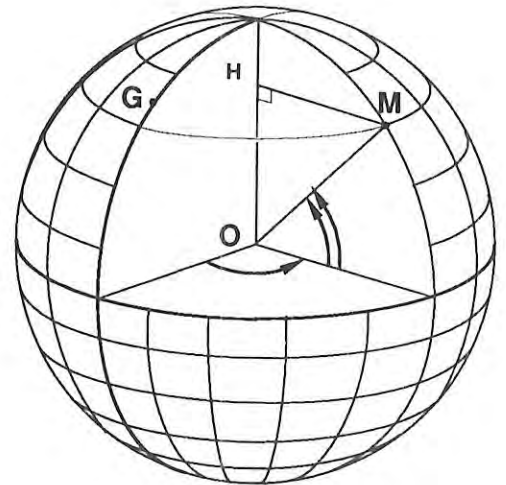
Sur la figure de droite, le point O est le centre de la terre, le point G représente la ville de *Greenwich*.

Indique sur la figure :

- les pôles,
- l'équateur,
- les méridiens,
- les parallèles.

Quel est l'angle qui correspond à la *longitude* du point M ?

Quel est l'angle qui correspond à la *latitude* du point M ?



La longueur de l'équateur est égale à :
130 $40,007\,864 \times 10^6 \text{ m}$.

Quel est le rayon R de la terre ? :

$$R = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} = \dots\dots\dots \text{ m},$$

$$\text{soit : } R = \dots\dots\dots \text{ km}.$$

Quel est le volume V de la terre ?

$$V = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots \text{ m}^3,$$

$$\text{soit : } V = \dots\dots\dots \text{ km}^3.$$

Quel est la surface S de la terre ?

$$S = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots \text{ m}^2,$$

$$\text{soit : } S = \dots\dots\dots \text{ km}^2.$$

Indique la latitude et la longitude des points situés aux *antipodes* de chacune de ces villes :

Paris :	long. 2° E, lat. 49° N,		
New York :	long. 74° O, lat. 41° N,		
Sidney :	long. 152° E, lat. 35° S,		
Moscou :	long. 37° E, lat. 56° N,		

Indique, en *degrés* et *minutes*, la latitude et la longitude du point situé aux *antipodes* de l'Archipel des Rascasses (cf. p. 40) :

latitude :°,

longitude :°

Place approximativement ce point sur le globe terrestre situé en haut à gauche de la page.

Le point M de la figure du haut de la page est situé à la *latitude* de 50° N. Le point H est sa *projection orthogonale* sur la droite passant O et par les pôles.

Colorie légèrement le triangle rectangle OMH et indique, dans celui-ci l'angle qui mesure 50°.

On suppose que le rayon R de la terre mesure 6 367 km. Calcule la distance MH en utilisant ta table des cosinus :

$$MH = \dots\dots\dots \times \dots\dots\dots = \dots\dots\dots \text{ km}.$$

Quelle est la longueur L du *parallèle* passant par M ?

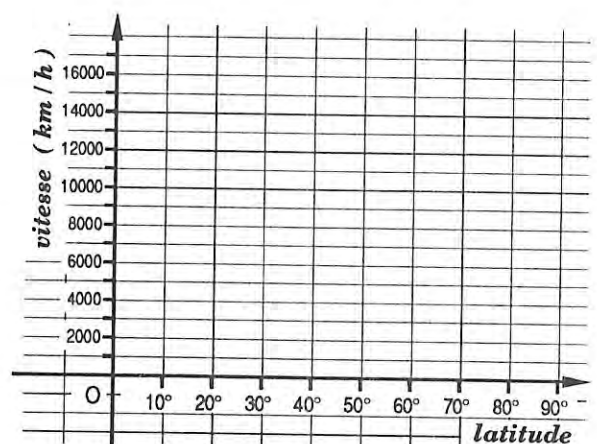
$$L = \dots\dots\dots \times \dots\dots\dots = \dots\dots\dots \text{ km}$$

Sachant que la terre fait un tour sur elle-même en 24 h, quelle est la distance v parcourue par M en une heure ?

$$v = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots \text{ km / h}.$$

Quelle est, en km / h, la vitesse d'un point situé sur l'équateur ?

$$v' = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots \text{ km / h}.$$



Reprends l'exercice 132 en supposant que M est à une latitude de 10°, puis de 20°, 30°, 40°, etc.

Calcule à chaque fois la vitesse de M et reporte tes résultats sur le graphique ci-dessus.



Résumé : Partis à la recherche du trésor immergé dans la baie de *San Miguel*, *Bourbaki* et *Leonhard* ont trouvé la carte laissée par le *Capitaine Harkoss* permettant de remarquer que le fort (a), le récif rouge (b) et l'ancienne tour (c) sont les milieux des côtés du triangle formé par le phare (A), l'église (B) et la maison du pêcheur (C).

Ils ont trouvé aussi le message inachevé d'*Eulerus* :

de mêmes distances du phare, de San Miguel et de la maison du pêcheur, va à mêmes distances du fort, de l'ancienne tour et du récif rouge, tu auras fait trois fois la moitié du chemin qui mène au trésor d'Harkoss. Aligne toi pour cela ...

Ils ont donc décidé de partir du point **H** équidistant de **A**, **B**, **C** et de se diriger vers le point équidistant de **a**, **b**, **c** ...

Tu as toi-même placé sur ta carte le point **H** et — pour pouvoir se repérer sur des points visibles de la mer — tu as commencé à calculer les angles sous lesquels on voit, depuis le point **H**, les points **a**, **b** et **c**.

Tu as dû trouver :

$$\widehat{bHc} = \widehat{b} + \widehat{c}, \quad \widehat{aHb} = \widehat{a} + \widehat{b}, \quad \widehat{cHa} = \widehat{c} + \widehat{a}.$$

Nous avons reporté sur le schéma ci-contre la partie de ta carte qui correspond au point **b** et au début des côtés **bc** et **ba** du triangle **abc**.

Utilise cette figure pour calculer l'angle $\widehat{b}$ à partir des deux angles $\widehat{Sbd}$ et $\widehat{Tbe}$:

$$bd^2 = \dots + \dots = \dots \quad \left| \quad be^2 = \dots + \dots = \dots$$

$$bd = \dots$$

$$be = \dots$$

$$\cos \widehat{Sbd} = \frac{\dots}{\dots} = \dots \quad \left| \quad \cos \widehat{Tbe} = \frac{\dots}{\dots} = \dots$$

$$\widehat{Sbd} = \dots$$

$$\widehat{Tbe} = \dots$$

Je peux donc calculer : $\widehat{b} = \dots = \dots$

Reporte soigneusement sur le schéma ci-contre la partie de ta carte qui correspond au point **a** et au début des côtés **ab** et **ac** du triangle **abc**.

Marque sur ta figure des triangles rectangles convenables et utilise-les pour calculer l'angle $\widehat{a}$:

.....	
.....	
.....	
.....	

Je peux donc calculer : $\widehat{a} = \dots = \dots$

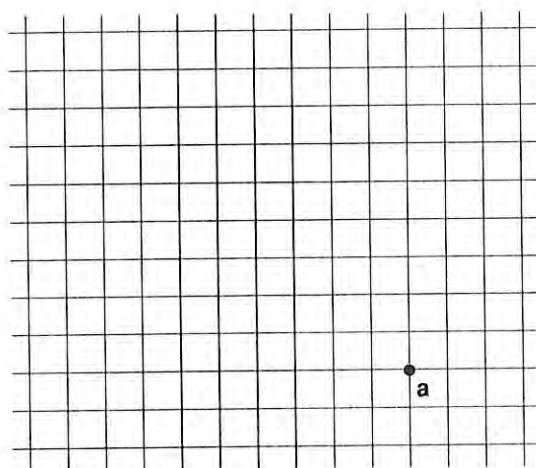
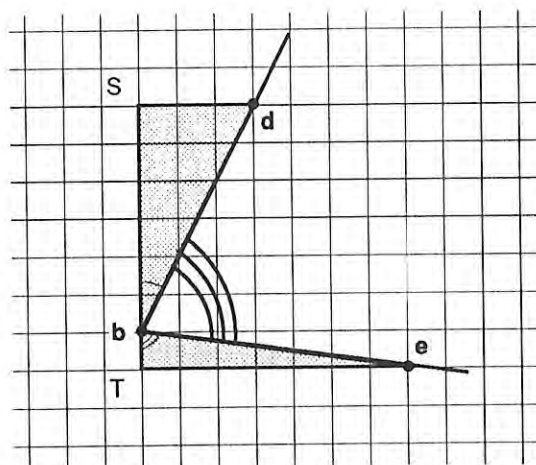
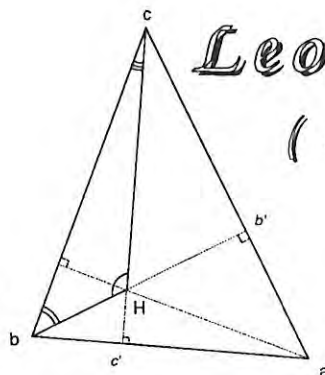
En résumé ; les trois angles de **abc** sont :

$$\widehat{a} = \dots \quad \widehat{b} = \dots \quad \widehat{c} = \dots$$

Du point **H**, on voit **a**, **b**, **c** sous les angles :

$$\widehat{bHc} = \dots \quad \widehat{aHb} = \dots \quad \widehat{cHa} = \dots$$

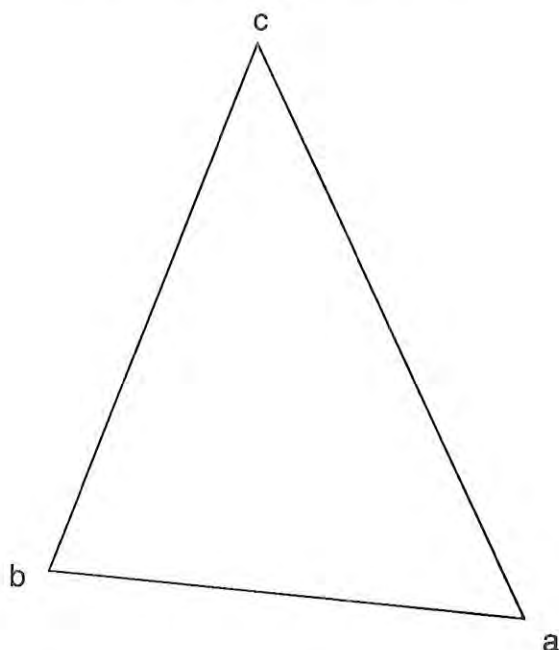
le secret de Leonhard (... suite)



Trace sur ta carte (à la règle et au compas) le point **O** équidistant de **a**, **b** et **c**.

C'est un point du quadrillage. Vérifie ta construction en calculant les distances **Oa**, **Ob** et **Oc** (unité : 1 carreau).

Construis à la règle et au compas le centre **O** du cercle circonscrit au triangle ci-dessous. Trace à l'encre les segments **aO**, **bO** et **cO** ; puis gomme les tracés inutiles.

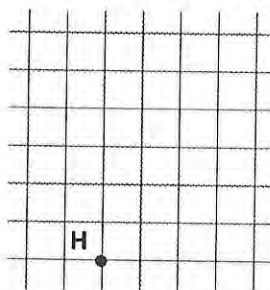


En allant du point **H** au point **O** ...

tu auras fait trois fois la moitié du chemin qui mène au trésor ...

Tiens bien compte du quadrillage et reporte sur le schéma ci-contre le point **O** que tu as trouvé. Trace le segment **OH**.

Détermine le point **P** du segment **OH** où est situé le trésor ... (explique ta solution dans la partie droite de ce cadre)



P est le point de coordonnées :

Dès qu'ils eurent trouvé la clé de l'énigme, **Bourbaki** et **Leonhard** affrêtèrent un bateau et partirent à la recherche du point **P** ...

Déterminant leur position par rapport à l'ancienne tour, au récif rouge et au fort de Santa Anna, ils se placèrent au point **H**. De là ils se dirigèrent vers le point **O** dans le but de s'arrêter juste au-dessus du point **P** ...

Malheureusement, ni les calculs d'angles, ni les coordonnées du point **P** ne leur furent d'un grand secours lorsqu'ils se trouvèrent confrontés à l'imprécision des mesures et aux caprices du vent ...

Jamais ils ne déterminèrent avec suffisamment de certitude les positions de **O** et de **H**.
Jamais ils ne purent estimer exactement le tiers du chemin. Jamais ils ne trouvèrent le trésor.

Cinq mois durant, ils sillonnèrent en vain la Baie de San Miguel. Puis ils rentrèrent en France dépités, épuisés et taciturnes ; persuadés que le trésor n'existait que dans la légende des mers australes ...

Pour nous repérer depuis la mer, il ne nous reste plus qu'à trouver les angles qui nous permettront de viser le fort (**a**), le récif rouge (**b**) et l'ancienne tour (**c**) ... »

— Mououi !! ... grommela **Leonhard**, seulement ça m'a l'air bigrement plus compliqué pour **O** que pour le point **H** !

— Mais non ! répondit **Bourbaki**. Regarde, j'appelle α l'angle **Oba**, j'utilise les triangles isocèles pour exprimer tous les autres angles en fonction de α , et j'en déduis l'équation donnant α ...

— ... la clâaasse !!!, s'exclama **Leonhard** ébloui.

— tss !! allons **Leonhard** ! le reprit modestement le général ...

Place l'angle α sur la figure de gauche et marque toutes les égalités d'angles ou de segments que tu connais ; puis en te servant des valeurs que tu as trouvées pour les angles de **abc**, exprime les autres angles de la figure en fonction de α :

$$\begin{array}{lll} \widehat{baO} = \dots\dots & \widehat{cbO} = \dots\dots & \widehat{bcO} = \dots\dots \\ \widehat{acO} = \dots\dots & & \widehat{caO} = \dots\dots \end{array}$$

Lesquels de ces angles doivent-ils être égaux ? déduis-en l'équation donnant α , puis détermine α :

.....
.....

Un mois après leur départ, à midi, au moment où ils franchirent l'équateur, **Leonhard** (qui n'avait plus rien dit jusque là) s'écria :

— j'ai trouvé Mon Général ! j'ai compris la fin incomplète du message d'**Eulerus** ! :

Aligne-toi pour cela ...

Pour trouver le point **P**, il nous suffisait effectivement de placer le bateau au croisement de deux droites déterminées très simplement par des points de la carte ! ...

Regardez Mon Général, poursuivit **Leonhard** qui ramassa trois ou quatre baguettes de bois et se mit à exposer sa démonstration à même le pont du bateau, en plein soleil ...

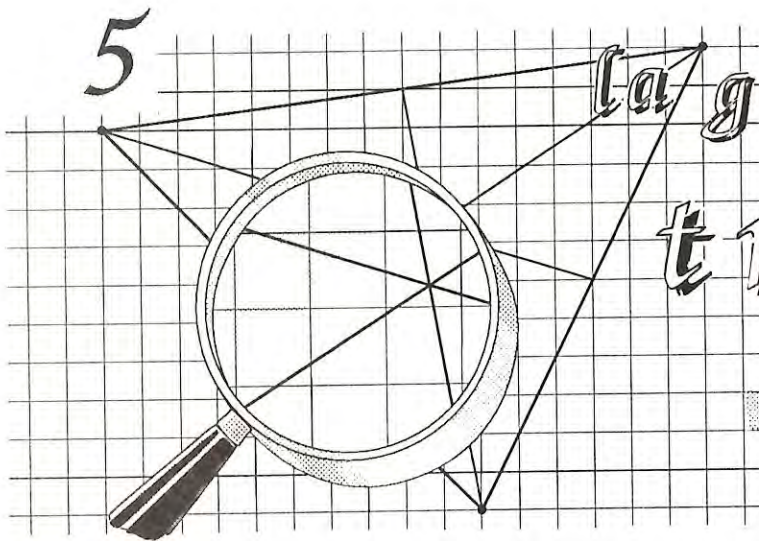
— ... la clâa ... ! faillit bien s'exclamer **Bourbaki** ébloui.

« Quel dommage qu'une aussi belle démonstration ne soit pas au programme des collèges ! » pensa-t-il. « Si seulement les élèves de quatrième savaient assez de géométrie du triangle ... »

(... à suivre)

5

La géométrie du triangle

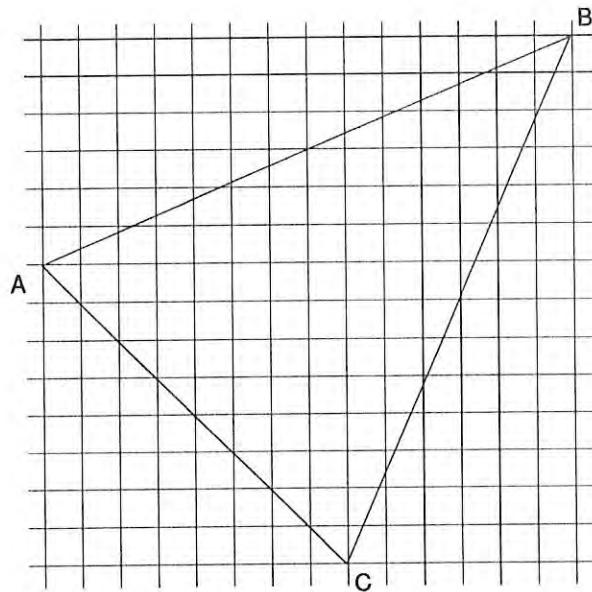


Nous avons dessiné ci-contre un triangle **134** ABC dont les sommets sont des points du quadrillage.

Utilise ce quadrillage pour placer les milieux **b** et **c** des côtés respectifs AC et AB , puis trace le segment bc .

Colorie légèrement un triangle rectangle bch dont le sommet de l'angle droit **h** est situé sur le quadrillage.

Trouve deux triangles égaux à bch qui sous-tendent le troisième côté BC du triangle ABC ; colorie-les légèrement.



Place le milieu **a** de BC . Trace ab et colorie **135** trois triangles rectangles qui montrent que ab est lié de façon analogue au côté AB .

Fais de même pour les segments ac et AC ...

Les sommets de ABC sont des points du quadrillage. **136**

Place le milieu **c** du côté AB .

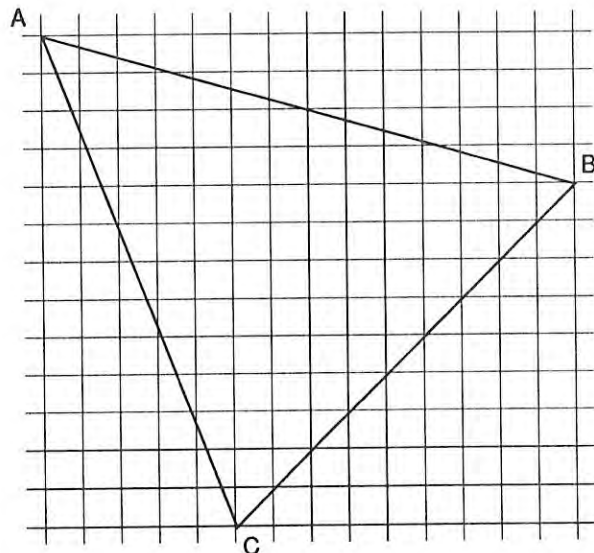
Trace la parallèle au côté BC issue du point **c** (utilise le quadrillage...).

Cette parallèle coupe le côté AC en un point **J** qui n'est pas un point du quadrillage. Vérifie que l'on peut trouver deux triangles rectangles égaux qui sous-tendent le côté AC et dont les côtés de l'angle droit sont égaux à 6,5 et 2,5 carreaux...

Que penses-tu du point **J**?

J est le

En utilisant au besoin des *demi-carreaux*, trouve trois triangles rectangles montrant que cJ est lié à BC de la même façon que dans l'exercice 134...



On suppose que ABC est tel que :

137 $AC = 10 \text{ cm}$, $CB = 8 \text{ cm}$.

Place le milieu I de AC ; trace D parallèle à AB passant par I . Elle coupe BC en un point J . Trace la hauteur CH issue de C dans le triangle ABC . Elle coupe D en K .

(marque les angles droits)

On suppose que $\widehat{ACH}$ mesure 40° , déduis-en :

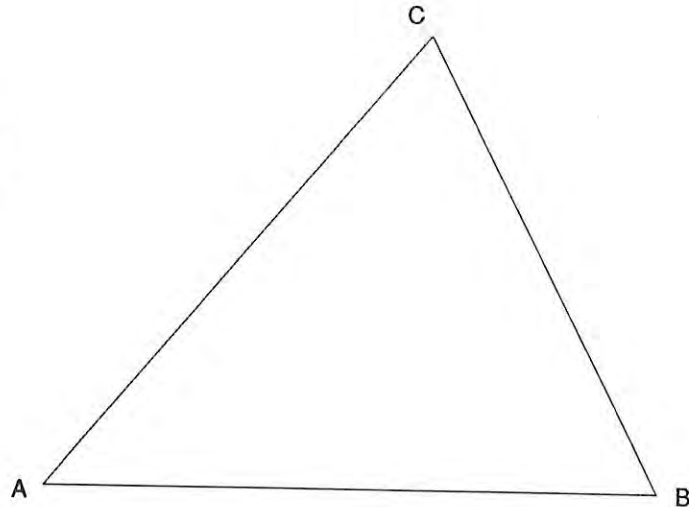
$$CK = \dots \times \cos \dots = \dots \times \cos \dots = \dots$$

$$CH = \dots \times \cos \dots = \dots \times \cos \dots = \dots$$

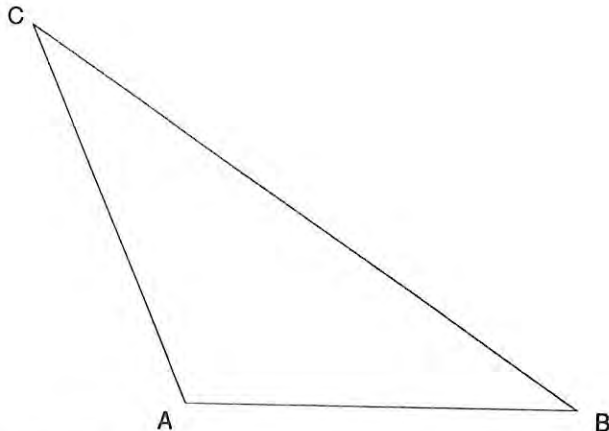
On suppose que $\widehat{HCB}$ mesure 30° , déduis-en :

$$CJ = \frac{\dots}{\cos \dots} = \frac{\dots}{\dots} = \dots$$

$$CB = \frac{\dots}{\cos \dots} = \frac{\dots}{\dots} = \dots$$



J est le du côté CB .



J est le

On suppose que ABC est tel que :

138 $AC = 6 \text{ cm}$, $CB = 10 \text{ cm}$.

Place le milieu I de AC ; trace D parallèle à AB passant par I . Elle coupe BC en un point J . Trace la hauteur CH du triangle ABC issue de C (elle est extérieure au triangle) ; elle coupe D en K .

On suppose que $\widehat{ACH}$ mesure α° , déduis-en :

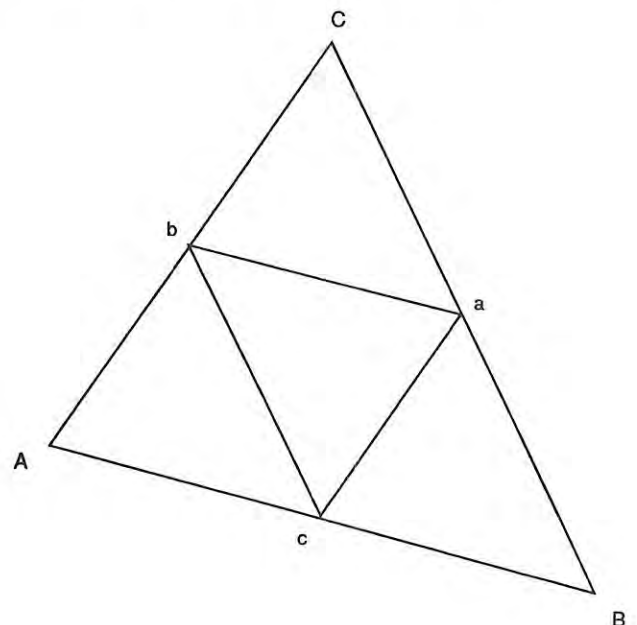
$$CK = \dots \times \cos \dots, \quad CH = \dots \times \cos \dots$$

Le point K est le de CH .

On suppose que $\widehat{HCB}$ mesure α'° , déduis-en :

$$CJ = \frac{\dots}{\cos \dots}, \quad CB = \frac{\dots}{\cos \dots}$$

Je remarque que l'on a : $CB = \dots \times CJ$.



Sur le triangle ABC ci-contre, nous **139** avons placé les milieux a , b et c des côtés BC , CA et AB .

Marque les égalités de segments que tu connais. (attention les côtés de ABC sont inégaux !)

En utilisant les constatations que tu as pu faire au cours des exercices précédents, précise les parallélismes que l'on peut remarquer entre des segments du schéma ; puis trouve trois parallélogrammes contenus dans la figure.

(colorie-les légèrement de couleurs différentes)

Marque toutes les nouvelles égalités de segments que tu peux en déduire.

On suppose $AC = 7 \text{ cm}$, $CB = 9 \text{ cm}$, $AB = 8 \text{ cm}$ trouve :

$$ac = \dots \text{ cm}, \quad cb = \dots \text{ cm}, \quad ab = \dots \text{ cm}.$$

Nous avons dessiné ci-contre un triangle **ABC**, mais le sommet **C** et les extrémités des côtés **AC** et **BC** ne tiennent pas sur la feuille ...

1°) Place le milieu **c** du côté **AB**.

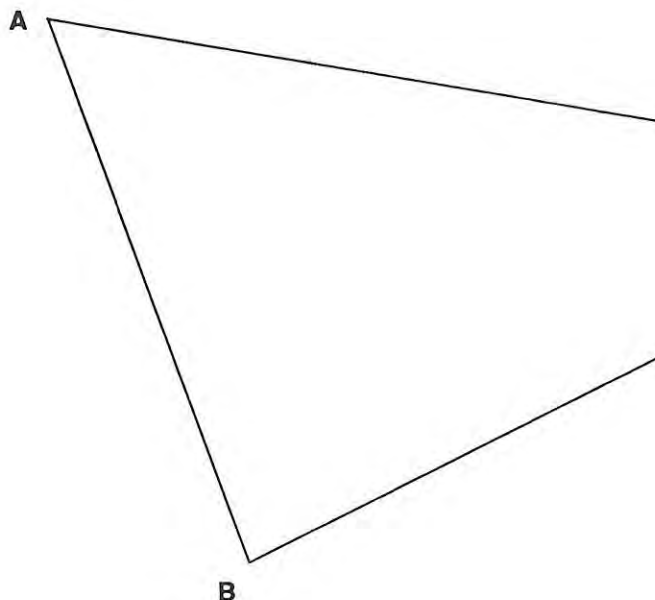
2°) Utilise les propriétés rencontrées précédemment pour construire exactement le milieu **b** du côté **AC**, sans prolonger la figure dans la marge de droite.

3°) Trouve de même le milieu **a** du côté **BC**.

4°) Toujours sans prolonger la figure, mesure ou calcule les longueurs suivantes :

ab = , **bc** = , **ca** = ,

AB = , **BC** = , **CA** =



Place soigneusement les milieux **a**, **b** et **c** des côtés respectifs **BC**, **CA** et **AB** du triangle **ABC** dessiné ci-contre. Puis trace le « triangle des milieux » **abc**.

Quelle est la nature du quadrilatère **Acab** ?

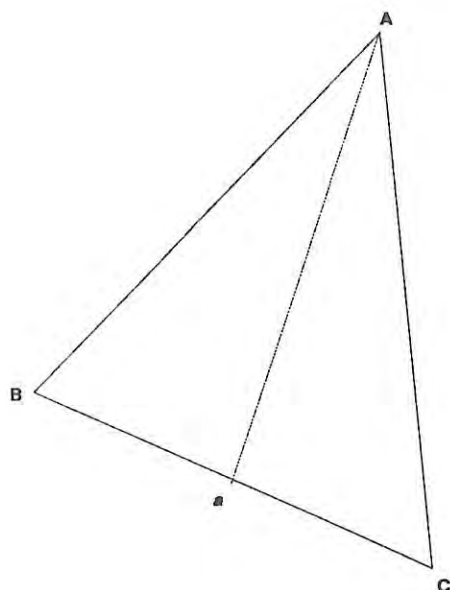
Acab est un

On appelle **médianes** d'un triangle les droites joignant un sommet au milieu du côté opposé. (nous avons tracé la médiane du triangle **ABC** issue du sommet **A**)

Trace les deux autres médianes du triangle **ABC**.

Quelles sont les médianes du triangle **abc** ? (utilise une propriété bien connue des quadrilatères tels que **Acab** ...)

Les médianes de **abc** sont les droites



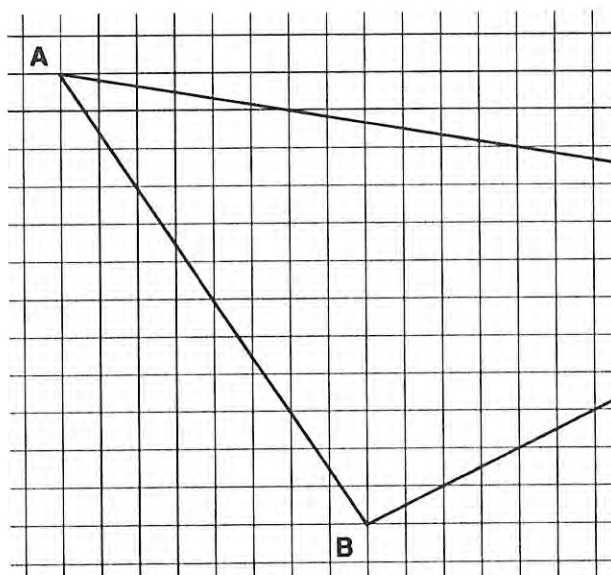
Nous avons dessiné ci-contre un triangle **ABC**, mais le sommet **C** ne tient pas sur la feuille et tu n'as pas le droit de prolonger la figure dans la marge de droite ...

1°) Place le milieu **I** du côté **AB**.

2°) En opérant comme dans l'exercice 140 et en utilisant le quadrillage pour faire tes tracés, construis exactement le milieu **J** du côté **AC** et les droites qui joignent **I** et **J** au milieu **K** du côté **BC**. (ce point n'est pas sur la figure)

3°) Trouve le milieu de **IJ**, puis détermine le milieu de **JK** en appliquant la méthode précédente dans le triangle **IJK**.

4°) Trace en rouge la médiane issue du sommet **C** dans le triangle **ABC**. (utilise la figure de l'exercice 141)



Nous avons dessiné ci-contre un
143 quadrilatère $ABCD$. Trace au crayon
 ses deux diagonales AC et BD .

Construis avec ta règle graduée les milieux
 I, J, K, L des côtés AB, BC, CD et DA ;
 puis trace en bleu le quadrilatère $IJKL$.

Colorie légèrement le triangle ABC . Que
 peut-on dire des segments IJ et AC ?

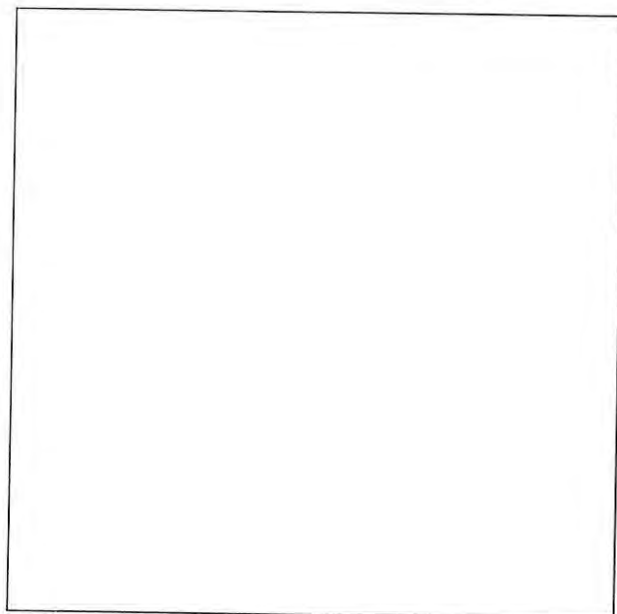
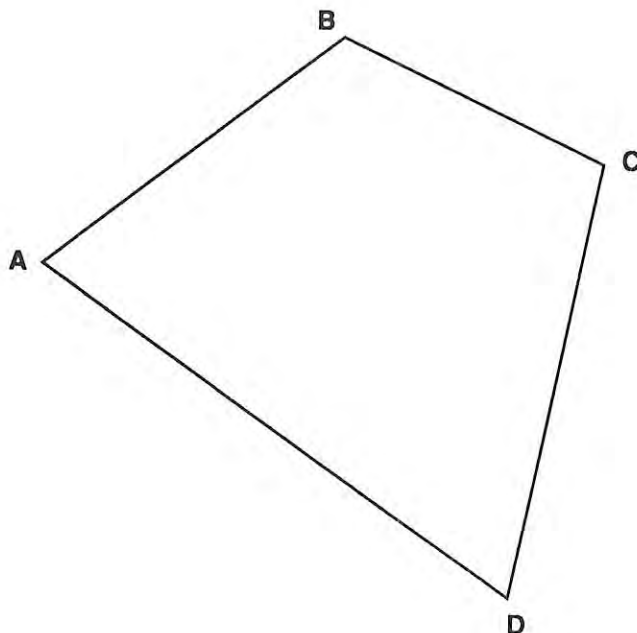
Les segments IJ et AC sont

Colorie légèrement le triangle ACD ...

Les segments AC et KL sont

En utilisant les deux triangles ABD et BCD
 achève de démontrer que $IJKL$ est un
 parallélogramme :

.....



Dessine dans le cadre de gauche un
144 quadrilatère quelconque $ABCD$.

Construis les milieux I, J, K et L des côtés.
 Trace le quadrilatère $IJKL$.

Quelle est sa nature ?

.....

Explique pourquoi en te servant des triangles
 ABC, CDA, BCD et DAB :

.....

.....

.....

.....

.....

.....

145 ABC est un triangle rectangle
 d'hypoténuse BC . On suppose que la
 longueur de BC est 12 cm.

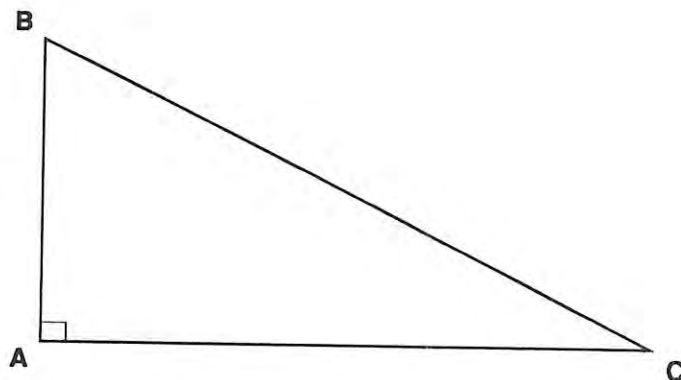
Dessine le « triangle des milieux » abc de
 ABC (a milieu de BC , b milieu de CA , c
 milieu de AB). Colorie-le légèrement et, en
 tenant compte des parallélismes, indique les
 angles droits.

Trace la médiane issue de A dans le triangle
 ABC . Trouve la longueur de Aa :

Les segments Aa et bc sont,

62 car $Acab$ est un

bc est la moitié de, donc $Aa =$



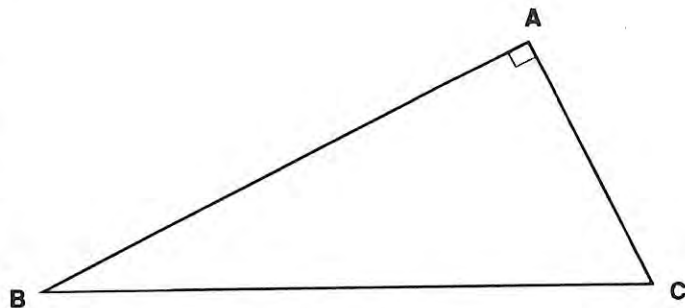
Le triangle **ABC** est rectangle en **A**.
146 Trace la droite qui joint les milieux **O** et **I** des côtés **BC** et **AB**.

En utilisant la propriété de parallélisme que tu as observée dans les exercices précédents, montre que la droite **OI** est *perpendiculaire* au côté **AB** :

Pourquoi la droite **OI** est-elle la médiatrice de **BA** ?

Trace la *médiane* issue du sommet **A**. Que peut-on dire de **BO** et **OA** ?

Trouve le point équidistant de **A**, **B** et **C** puis trace le **cercle circonscrit** au triangle **ABC**.



Nous avons tracé un demi-cercle de diamètre **BC** ; puis nous avons choisi un point **A** sur ce demi-cercle. **I** est le milieu du diamètre **BC**.

Trace la médiane issue du sommet **A**. Marque les égalités de segments que tu connais, puis marque les *égalités d'angles* qui correspondent aux triangles *isocèles*.

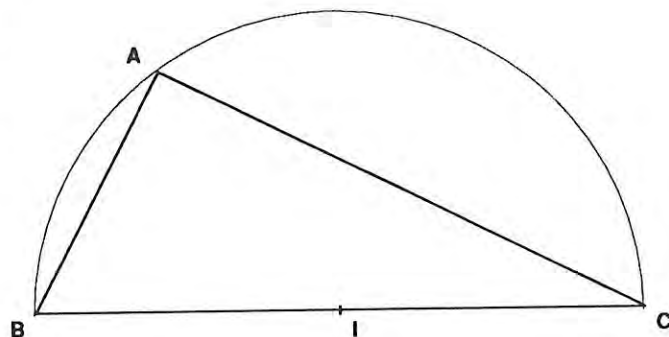
En écrivant que $\widehat{BAC}$ est égal à la somme de $\widehat{BAI}$ et $\widehat{IAC}$, montre que $2 \times \widehat{BAC} = 180^\circ$:

$2 \times \widehat{BAC} =$

..... =

..... =

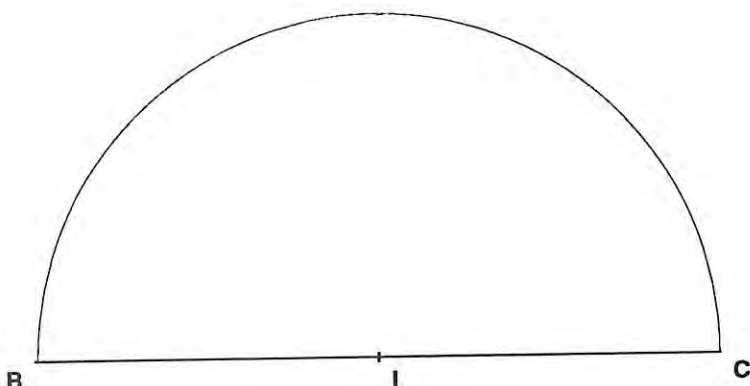
Déduis-en $\widehat{BAC}$:



Le demi-cercle tracé ci-contre
148 a pour centre **I** et pour diamètre **BC**.

Utilise les remarques précédentes pour construire, *uniquement avec ton compas*, un triangle **ABC** rectangle en **A** et dont le côté **BA** mesure 5 cm. (*vérifie ta construction avec ton équerre*)

Sers-toi du même raisonnement pour construire des triangles rectangles d'*hypoténuse* **BC** et dont un côté de l'angle droit mesure 2 cm, puis 3 cm, 63 puis 4 cm, ... 6 cm, etc.



Vrai ou Faux... ? Vrai ou Faux... ? Vrai ou Faux... ?

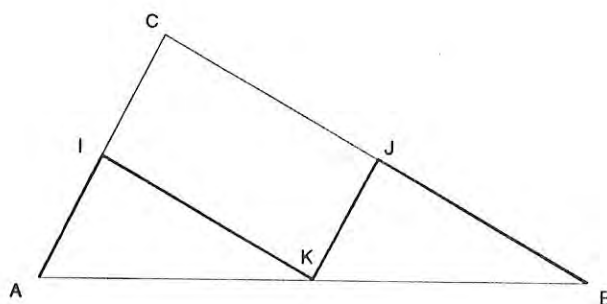
Les points I, J et K sont les milieux
149 respectifs de AC, CB et AB.

Le chemin AIKJB allant de A à B est
plus court que le chemin ACB ...

vrai ou faux ?

.....
.....
.....

(utilise un parallélogramme ...)



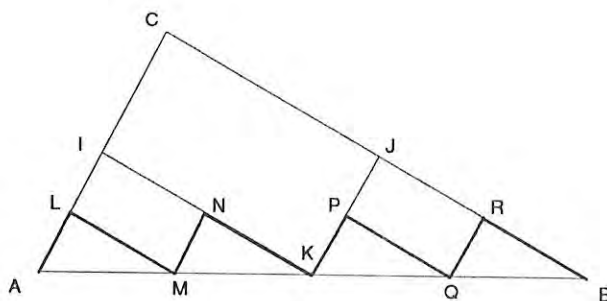
I, J, K, L, M, N, P, Q, R sont les milieux
150 de AC, CB, AB, AI, AK, IK, KJ, KB, JB.

Le chemin ALMNKPQRB allant de A à B est égal au chemin ACB ...

vrai ou faux ?

.....
.....
.....

(utilise des parallélogrammes ...)



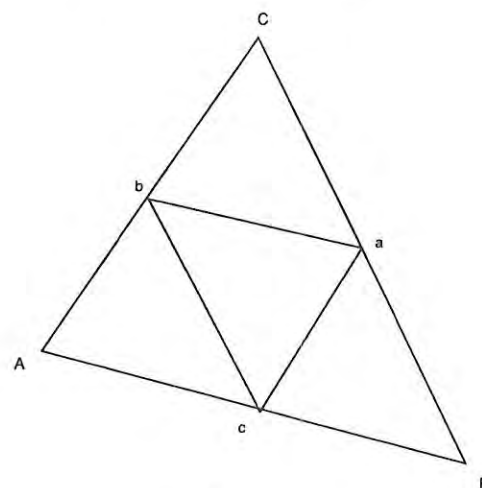
On a choisi a, b, c sur les côtés de
151 ABC. Et on suppose :

$ab \parallel AC$, $bc \parallel AB$, $ca \parallel BC$.

Les points a, b, c sont nécessairement les
milieux des côtés de ABC. *vrai ou faux ?*

.....
.....
.....

(utilise des parallélogrammes ...)



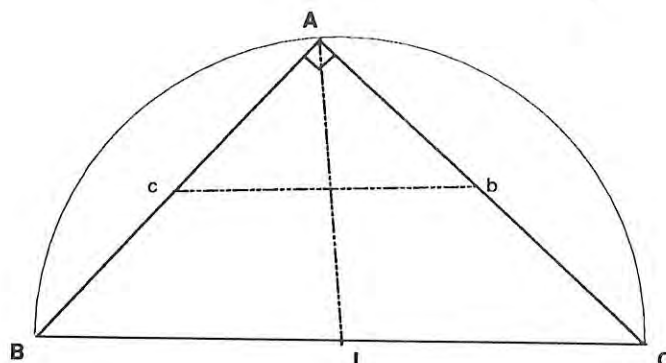
ABC est un triangle rectangle en A.

152

La médiane issue du sommet de
l'angle droit est toujours égale et
perpendiculaire au segment joignant les
milieux des deux côtés de l'angle droit.

vrai ou faux ?

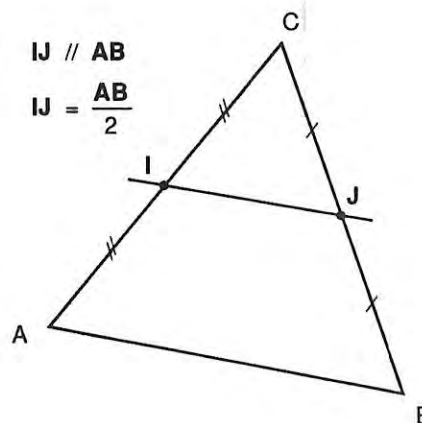
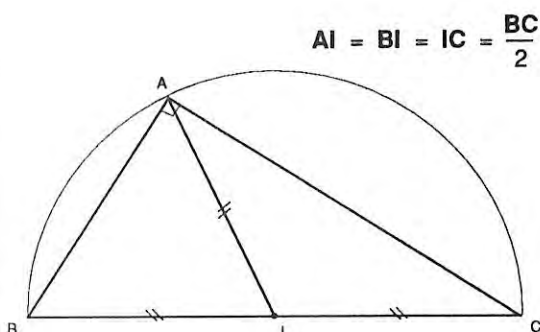
.....
.....
.....



ce qu'il faut savoir ...

Dans un triangle quelconque :

- la droite qui joint les *milieux* de deux côtés est **parallèle** au 3^{ème} côté,
- le segment qui joint les *milieux* de deux côtés est **égal** à la **moitié** du 3^{ème} côté.



Dans un triangle *rectangle*, le *milieu* de l'*hypoténuse* est à **égale distance** des trois sommets

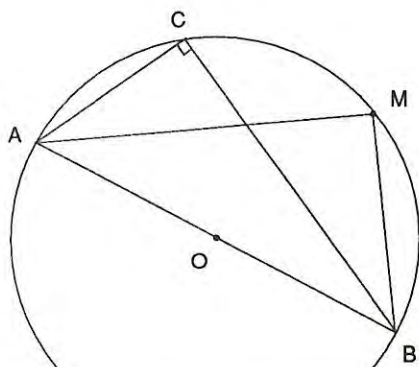
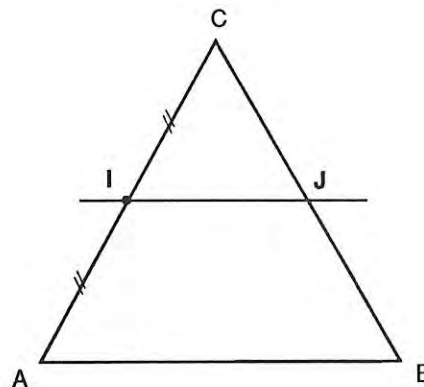
... ce qu'il faut savoir faire

Si tu sais que I et J sont les **milieux** de AC et CB, tu peux en *déduire* :

- que IJ est **parallèle** à AB,
- que $IJ = \frac{AB}{2}$

Si tu sais que I est le **milieu** de AC et que IJ est **parallèle** à AB, tu peux en *déduire* :

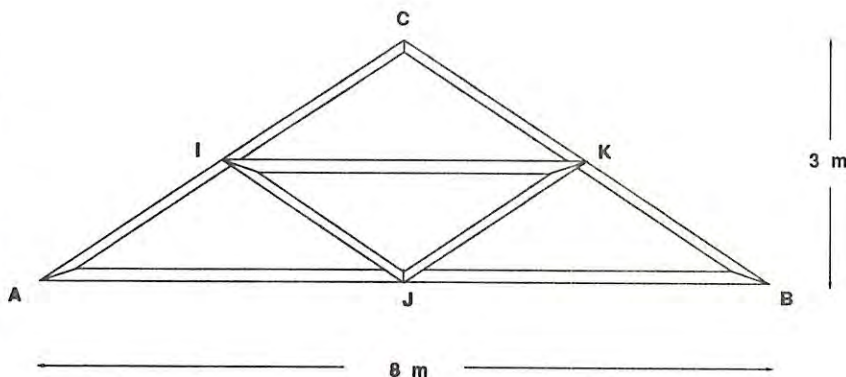
- que J est le **milieu** de BC,
- que $IJ = \frac{1}{2} AB$.



Si tu sais que ABC est **rectangle** en C, tu peux en *déduire* que C est sur le **cercle de diamètre AB**.

Si tu sais que M est **sur le cercle de diamètre AB**, tu peux en *déduire* que AMB est **rectangle** en M.

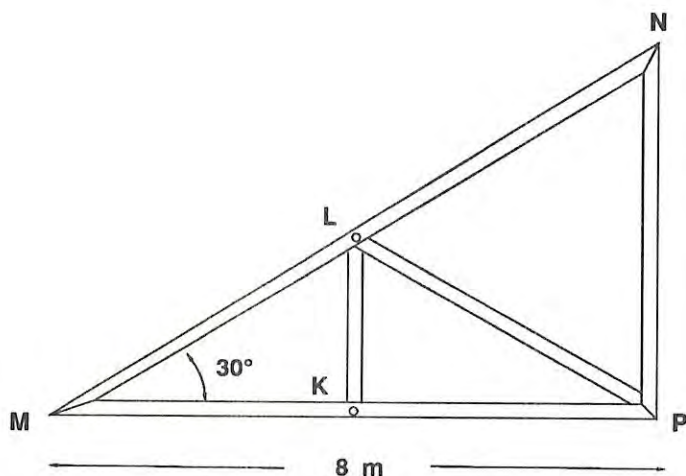
Un élément de charpente a la forme d'un triangle isocèle **ABC** de hauteur égale à 3 m et dont la base mesure 8 m. Ce triangle est renforcé par un second triangle **IJK** dont les sommets sont situés aux milieux des côtés de **ABC**. On veut calculer la longueur totale des poutres constituant cette charpente ... Complète :



1°) je calcule AC :
 AJC est un triangle , donc :
 $AC^2 = \dots + \dots = \dots$ et $AC = \dots$
 2°) je calcule le périmètre de ABC :

 3°) je peux calculer le périmètre de IJK :

dans le triangle ABC, IK joint , donc : $IK = \dots = \dots$
 de même :
 $IJ = \dots = \dots$ et $KJ = \dots = \dots$
 le périmètre de IJK est donc :
 4°) la longueur totale est :



Un système de poutrelles est formé d'un triangle **MNP** rectangle en **P**, renforcé par deux barres **PL** et **LK**.

Les points d'attache **L** et **K** sont les milieux respectifs de **MN** et **MP** ; le côté **MP** mesure 8 m et forme avec le côté **MN** un angle de 30° . Calcule la longueur de chaque poutrelle :

$$MN = \frac{\dots}{\cos \dots} = \frac{\dots}{\dots} = \dots$$

$$NP^2 = \dots = \dots$$

$$\text{donc } NP = \sqrt{\dots} = \dots$$

KL joint les
 donc $KL = \dots = \dots$

LP est la
 donc $LP = \dots = \dots$

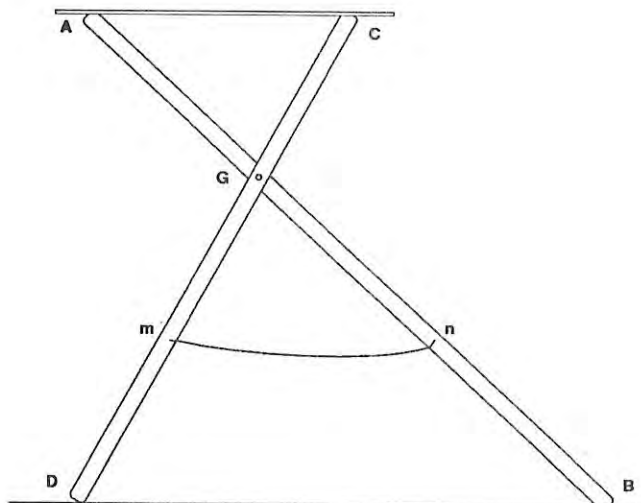
Un présentoir est formé de deux montants **AB** et **CD** articulés en un point **G** situé au tiers de leur longueur (voir fig.).

De plus, les deux montants sont reliés l'un à l'autre par une chaînette **nm** de 50 cm, fixée elle aussi au tiers de la longueur de **AB** et **CD**.

Quel est l'écartement maximum entre les points **D** et **B**, lorsque la chaînette **nm** est tendue ?

Pourquoi **ACnm** est-il un parallélogramme ?

Que peut-on en déduire sur **AC** et **mn**, puis sur **AC** et **DB** ?



156

On suppose (fig. de droite) que m, n, p, q sont les milieux des segments BC, AC, BD et AD .

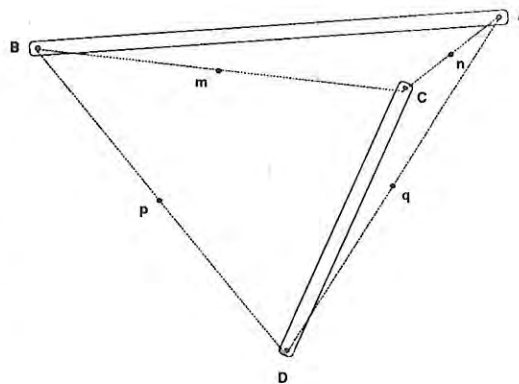
Trace mn . Que peut-on dire de ce segment en considérant le triangle ABC ?

Trace pq . Que peut-on dire de pq en considérant le triangle ABD ?

Trace mp . Que peut-on dire de mp en considérant le triangle BCD ?

Trace qn . Que peut-on dire de qn en considérant le triangle ACD ?

Donne une raison prouvant que $mnpq$ est un parallélogramme :



157

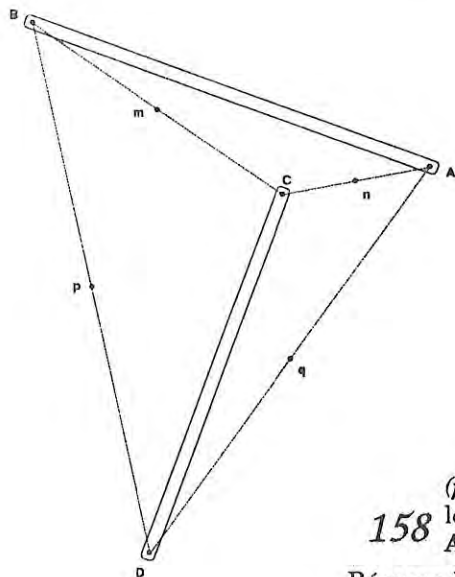
(fig. de gauche) m, n, p, q sont les milieux de BC, AC, BD et AD . On suppose en plus AB et CD perpendiculaires.

Résume ci-dessous les propriétés des segments mn, pq, mp et nq en indiquant les triangles que tu considères :

segment :	triangle :	propriétés :
mn		
pq		
mp		
nq		

Que peut-on dire de plus de mn et mp ?

Quelle est la nature de $mnpq$?



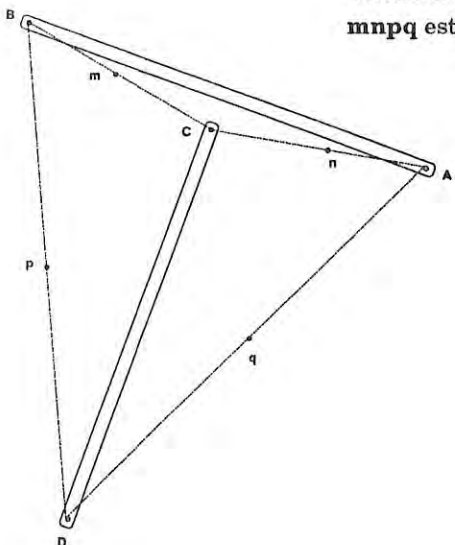
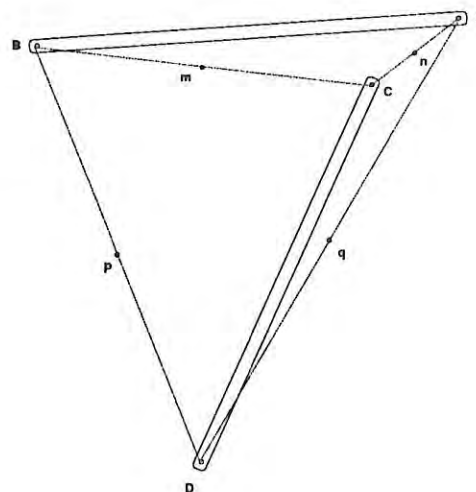
158

(fig. de droite) m, n, p, q sont les milieux de BC, AC, BD et AD . On suppose que $AB = CD$.

Résume les propriétés des segments mn, pq, mp et nq qui sont les mêmes que précédemment et indique ce que tu peux dire de plus de mn et mp :

.....

$mnpq$ est un :



159

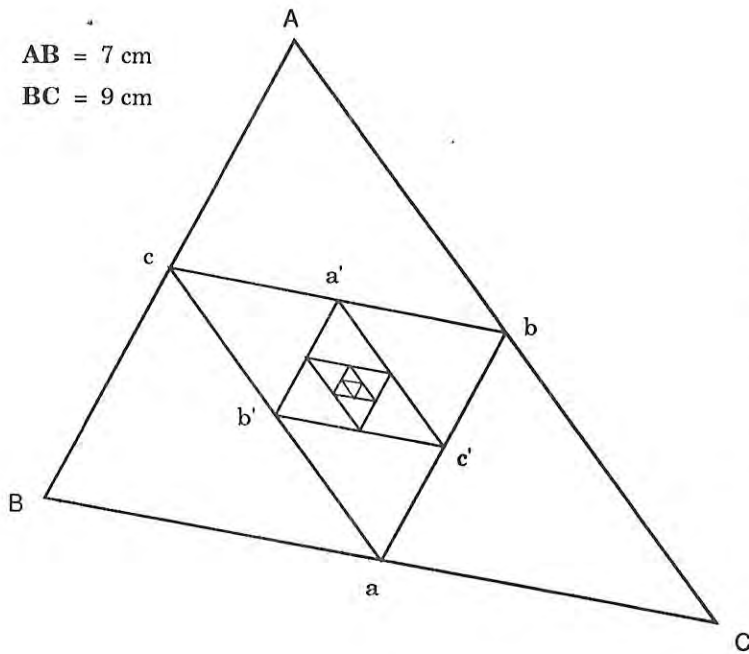
(fig. de gauche) m, n, p, q sont les milieux de BC, AC, BD et AD . On suppose que $AB = CD$ et que AB et CD sont perpendiculaires.

Résume toutes les propriétés des segments mn, pq, mp et nq que tu peux déduire des hypothèses :

.....

$mnpq$ est un :

AB = 7 cm
BC = 9 cm



160 Explique pourquoi la surface du triangle ABC donné ci-contre est *plus petite* que 32 cm^2 :

On a tracé le « triangle des milieux » abc de ABC, puis le « triangle des milieux » a'b'c' de abc, puis le « triangle des milieux » de a'b'c', etc., etc. Sans effectuer de mesures, explique pourquoi la surface du triangle abc est *plus petite* que 8 cm^2 :

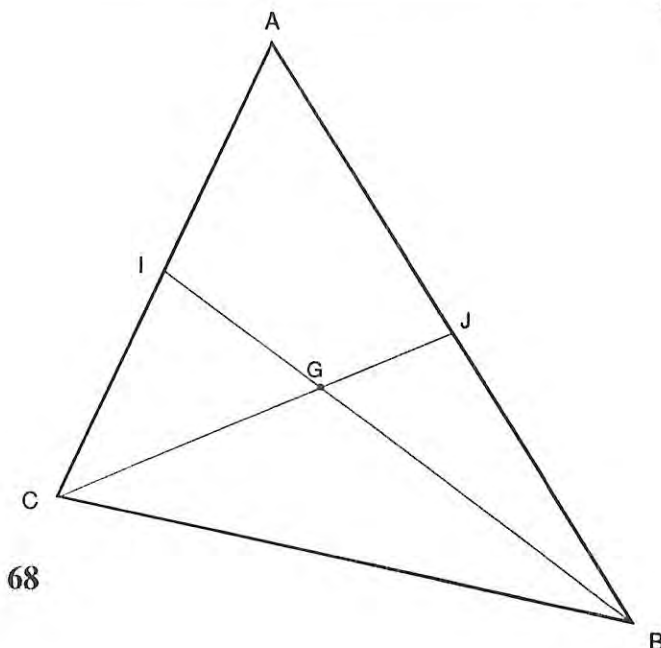
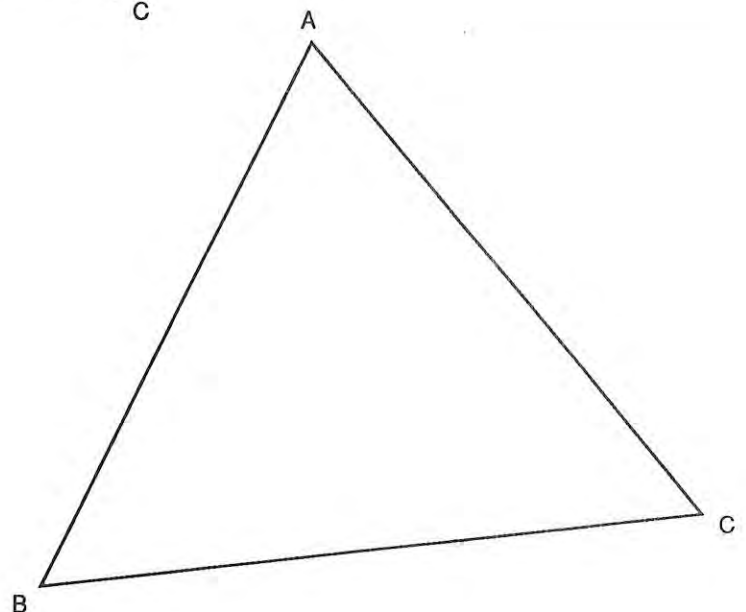
La surface du dernier triangle tracé est-elle *plus petite* que $3,5 \text{ mm}^2$:

161 Trace soigneusement les **médianes** du triangle donné ci-contre, puis efface tes constructions intermédiaires.

Construis le « triangle des milieux » abc de ABC. Explique pourquoi les segments Aa, Bb, Cc coupent les côtés de abc en leurs milieux : (utilise une propriété des diagonales du parallélogramme)

Utilise cette remarque pour construire le « triangle des milieux » a'b'c' de abc, puis le « triangle des milieux » de a'b'c', etc., etc. de façon à retrouver la figure de l'exercice 160 ...

Que penses-tu des médianes d'un triangle ?



162 Comme tu as dû le remarquer dans l'exercice 161, les **médianes** d'un triangle sont **concurrentes**. Leur point commun s'appelle le **centre de gravité** du triangle. On le désigne souvent par G.

Sur la figure de gauche, nous avons placé deux médianes BI et CJ de ABC. Trace IJ, puis le segment I'J' joignant les milieux de BG et CG.

Compare IJ à CB dans ABC : $IJ \parallel \dots$, $IJ = \dots$

Compare I'J' à CB dans GBC : $I'J' \parallel \dots$, $I'J' = \dots$

Conclusion : les segments IJ et I'J' sont et Donc le quadrilatère IJ'I'J est un

Marque toutes les égalités de segments que tu peux trouver entre les trois parties de BI, puis de CJ.

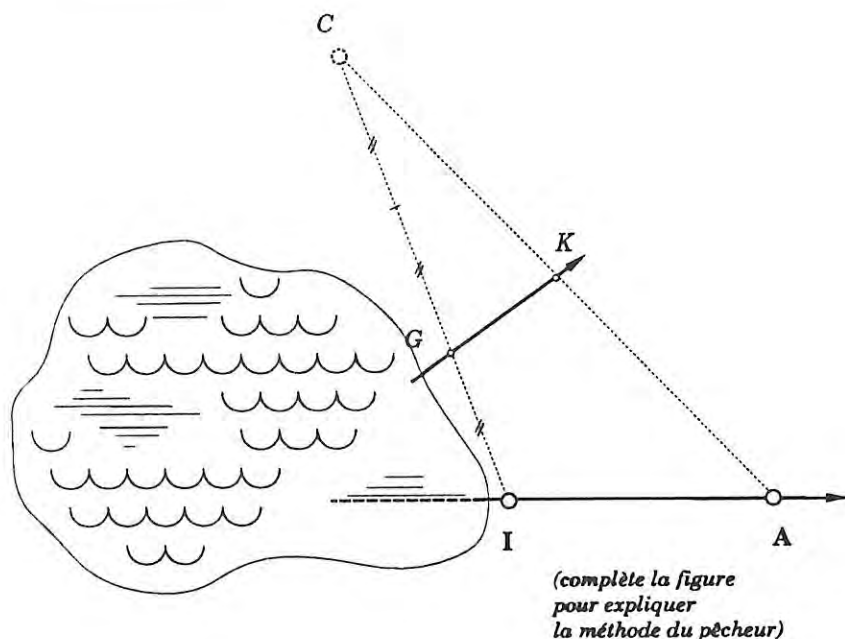
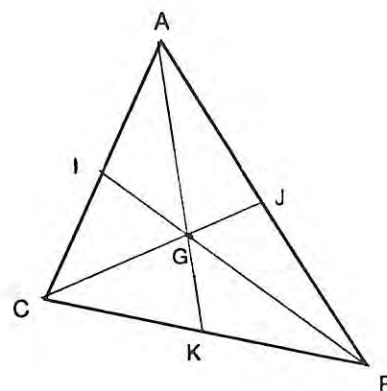
En partant des sommets, le centre de gravité G est situé aux de chaque médiane.

163 Les médianes de ABC se coupent au centre de gravité G . Ce point est situé au tiers de chacune des médianes en partant des milieux des côtés.

Trace le triangle IJK , et explique pourquoi le point G est aussi le centre de gravité de IJK :

Sachant que G est au tiers de AK , retrouve le fait que G est bien au tiers de la médiane du triangle IJK : (appelle a le milieu de IJ et calcule GK / Ka)

Trace par A la parallèle à BC , puis par B et C les parallèles à CA et AB . En prolongeant ces droites tu obtiens un triangle $A'B'C'$. Quel est le centre de gravité de $A'B'C'$? (utilise des parallélogrammes qui montrent que ABC est le triangle des milieux de $A'B'C'$)



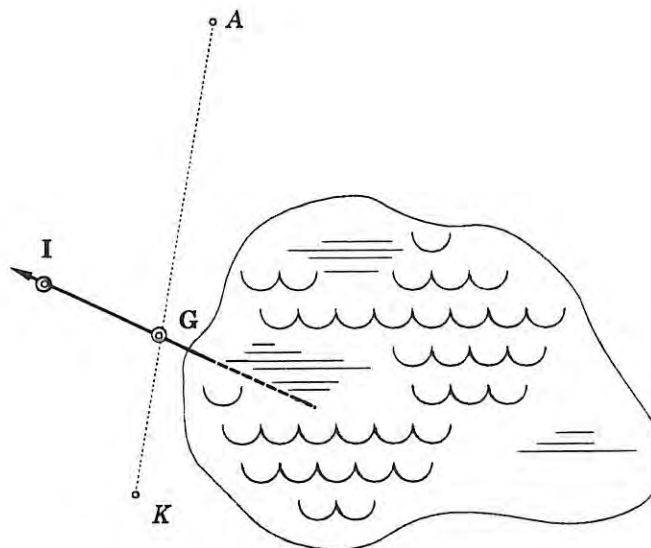
164 Un pêcheur, sur l'étang, veut placer sa barque exactement au point symétrique de A par rapport au point I . (rappelle la définition de ce point :

Le pêcheur décide de se placer dans l'alignement de deux repères situés en A et I ; et aussi dans l'alignement de deux autres points de repère G et K qu'il construit lui-même sur la rive ... Pour cela, il a choisi un point quelconque C et il a placé G au tiers de IC en partant de I ; puis il a fixé le point K sur AC ... Où doit-il placer K ?

165 Un pêcheur, sur l'étang, veut placer sa barque exactement au point C situé sur la droite IG et tel que : $CG = 2 \times GI$.

Pour cela, il décide de se placer dans l'alignement de deux repères situés en G et I ; et aussi dans l'alignement de deux autres points de repère ...

Aide-le à choisir ses deux autres points et explique ta construction :



Trace les trois hauteurs **AK**, **BL**, **CM** du triangle donné ci-contre (utilise ton équerre ou, mieux, sers-toi du quadrillage et de la méthode de la page 42).

Mesure soigneusement avec ton rapporteur l'angle en **A** du triangle **ABC** :

Calcule la longueur de **AC** sachant que chaque carreau mesure 0,5 cm :

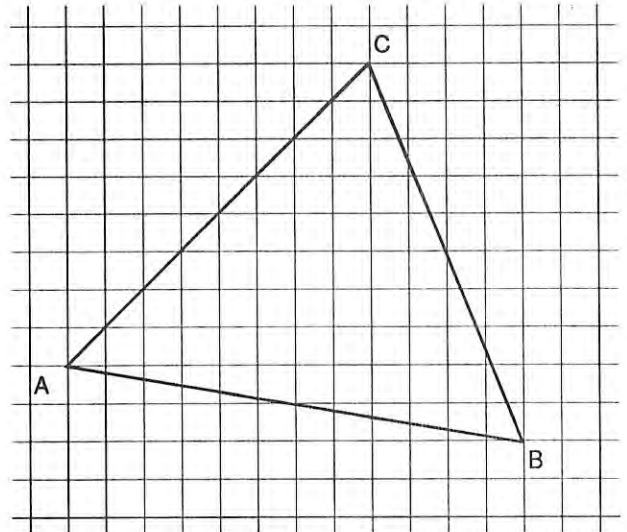
$$AC^2 = \dots + \dots = \dots$$

$$AC = \dots$$

Déduis-en la longueur du segment **AM** :

$$AM = \dots \times \cos \dots = \dots \times \dots = \dots$$

Vérifie ton résultat en mesurant sur la figure.



Nous avons tracé un triangle **167 ABC**, puis nous avons construit le cercle de diamètre **AB**.

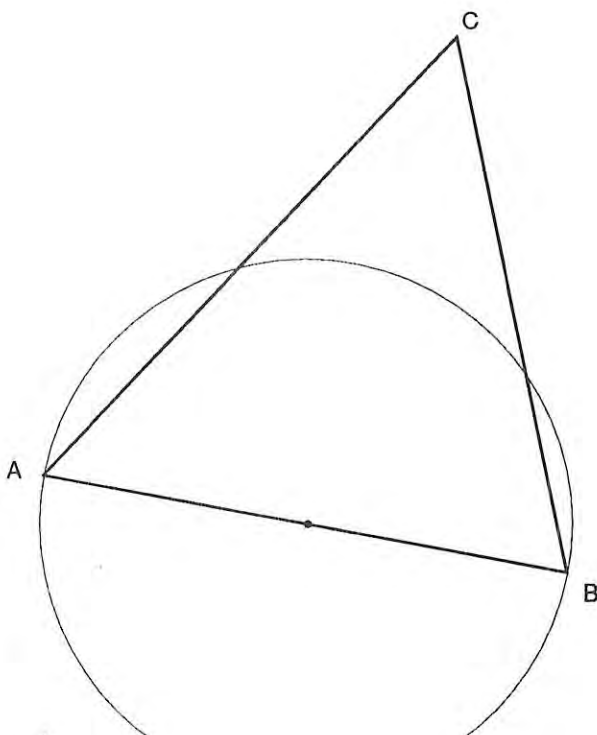
Ce cercle recoupe les côtés **AC** et **BC** en des points **L** et **K**, trace **AK** et **BL**.

Que peux-tu dire de $\widehat{AKB}$ et $\widehat{ALB}$?

(relis au besoin la page 65)

Les segments **AK** et **BL** sont deux du triangle **ABC**.

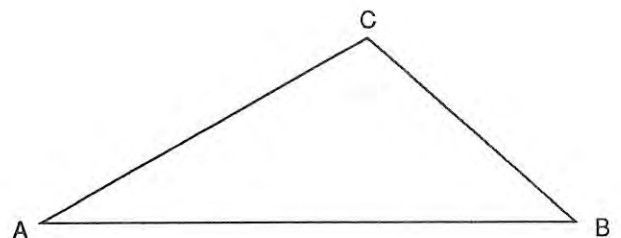
Construis les cercles de diamètres **AC** et **BC**. Comment recoupent-ils les côtés du triangle **ABC** ? Quelle est la troisième hauteur du triangle ?

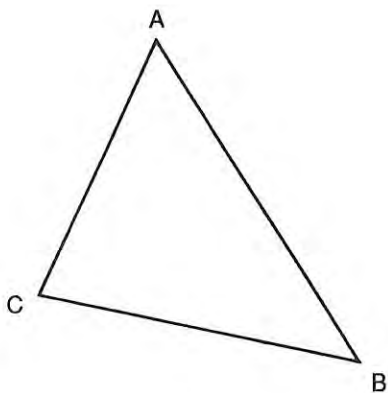


Trace les trois hauteurs du triangle **168 ABC** donné ci-contre en te servant de la méthode précédente, c'est-à-dire en utilisant les cercles ayant pour diamètres les côtés du triangle.

Attention ! l'angle en **C** est un angle obtus, certaines des hauteurs sont extérieures au triangle et tu devras donc prolonger deux des côtés ...

De plus, trace bien les trois cercles pour vérifier qu'ils se recoupent correctement sur les côtés du triangle **ABC**.





Trace soigneusement les trois hauteurs
169 **AK, BL et CM** du triangle **ABC** (*efface tes constructions intermédiaires*).

Mène par **A** la *parallèle* à **BC** ; puis par **B** et **C** les *parallèles* à **AC** et **AB**. Tu obtiens ainsi les côtés d'un triangle **A'B'C'**. Place ces points de façon à ce que **B** soit sur **A'C'** ; **A** sur **B'C'** et **C** sur **A'B'**.

Pourquoi **A** est-il le *milieu* de **B'C'** ?

Pourquoi **AK** est-elle la *médiatrice* de **B'C'** ?

Conclusion : les hauteurs du triangle **ABC** sont les du triangle **A'B'C'**.
 Ces droites sont donc

(Le point commun à **AK, BL et CM** s'appelle l'**orthocentre** du triangle **ABC**)

Nous avons tracé ci-contre un triangle **ABC**,
170 mais le sommet **C** et les extrémités des côtés **AC** et **BC** ne tiennent pas sur la feuille ...

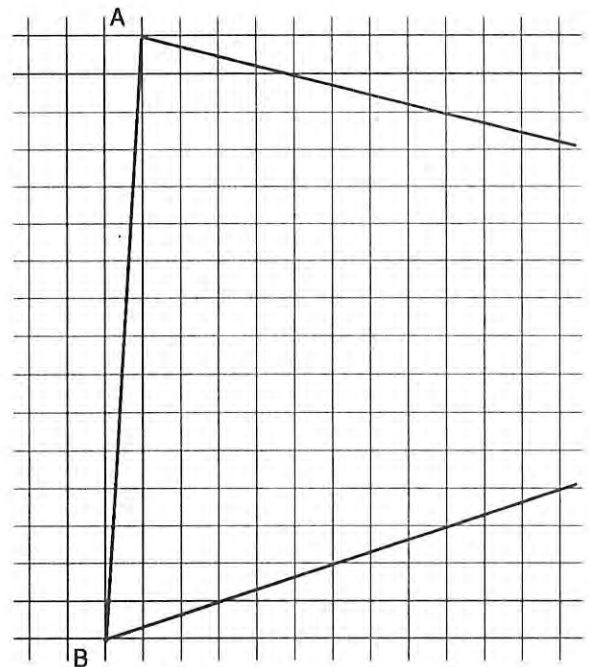
Trouve l'**orthocentre H** de ce triangle en te servant des hauteurs que tu peux construire (*effectue soigneusement tes tracés au compas par la méthode des exercices 167 et 168, ou sers-toi du quadrillage*).

On désigne par **CM** la hauteur issue du sommet **C** ; trace la partie de cette droite qui est visible sur la figure.

Mesure soigneusement l'angle en **A** du triangle **ABC** ; ainsi que le segment **AM** :

Déduis-en la longueur du côté incomplet **AC** :

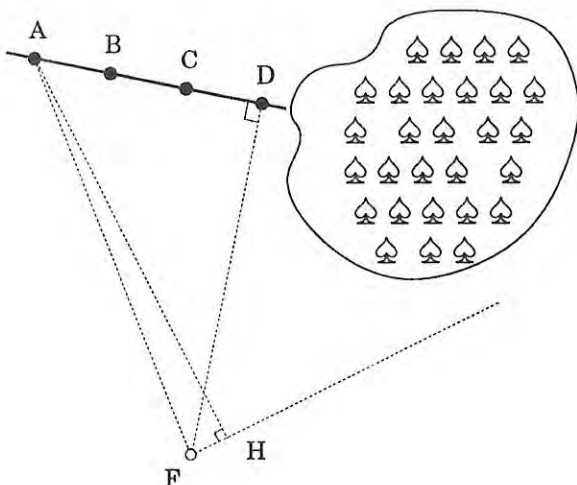
$$AC = \frac{\dots\dots\dots}{\cos \dots\dots\dots} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} = \dots\dots\dots$$



Un éleveur doit clôturer un champ par
171 une barrière rectiligne. Il a posé le début de celle-ci (représentée par des piquets **A, B, C, D**), mais la clôture doit se poursuivre en ligne droite au-delà d'un bosquet qui ne permet pas à l'éleveur de voir son alignement.

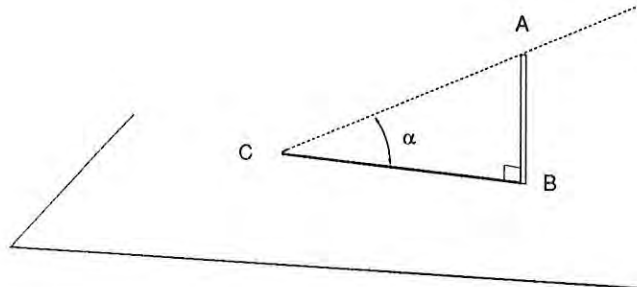
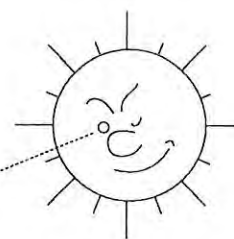
Pour retrouver de l'autre côté du bosquet un point **E** aligné avec **A, B, C, D** il a mené la *perpendiculaire* en **D** à la droite **AD** et choisi sur celle-ci un point **F** ; il a ensuite tracé des droites orthogonales **AH** et **FH** comme sur le schéma ci-contre.

En utilisant les propriétés de l'**orthocentre**, **71** termine sa construction du point **E** ...



On considère un piquet vertical **AB** de 1 m de hauteur et on s'intéresse à l'ombre de ce piquet sur le sol horizontal.

On suppose que l'ombre portée est un segment **CB** de 2,50 m de longueur. On cherche à déterminer l'angle α entre le sol et les rayons du soleil.

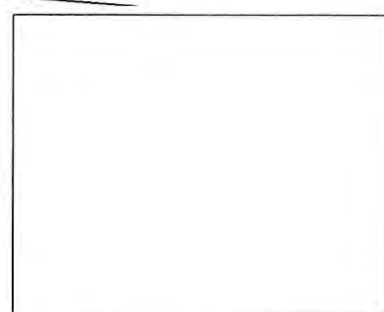
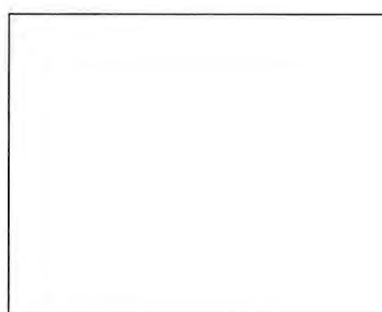
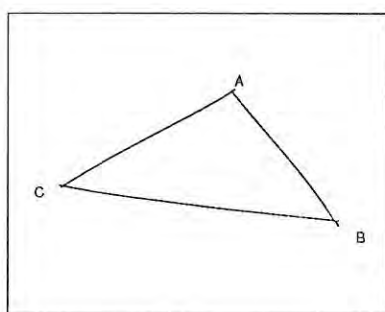
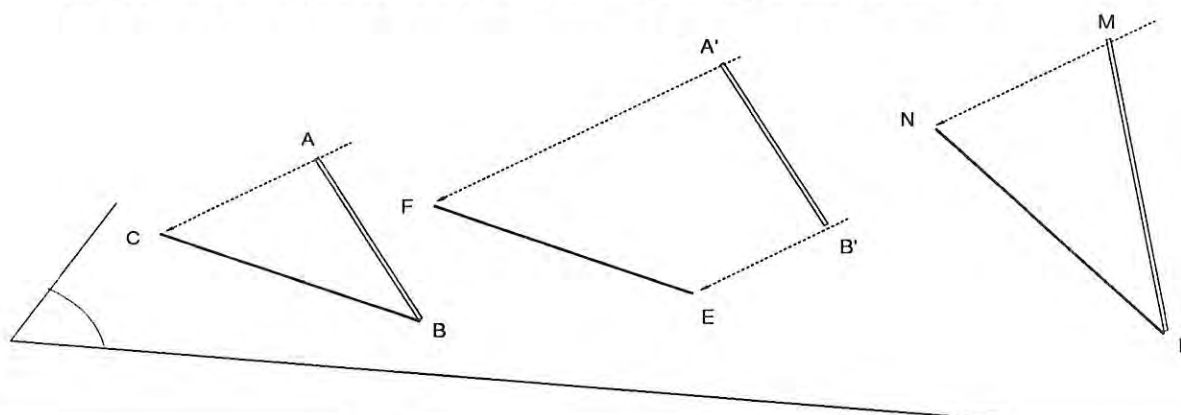


172 Quelle est la nature du triangle **ABC** formé par le piquet, son ombre et le rayon lumineux passant par **A** et **C** ?

.....
Calcule la longueur de **AC** :
.....

.....
Calcule $\cos \alpha$, puis cherche α :
.....

Dans les trois exercices suivants, on s'intéresse à l'ombre de bâtons **AB**, **A'B'** et **ML** qui ne sont pas plantés verticalement dans le sol. Dans chaque cas, tu devras considérer la figure formée par le bâton, son ombre et les rayons lumineux passant par ses extrémités.



— Le bâton **AB** est oblique.

173 Nous avons dessiné à main levée dans le cadre ci-dessus le triangle formé par **AB** et son ombre **BC**. Sachant que les rayons du soleil sont parallèles, complète le schéma pour trouver l'ombre du milieu **I** du segment **AB**. Quel est ce point sur **CB** ?

72

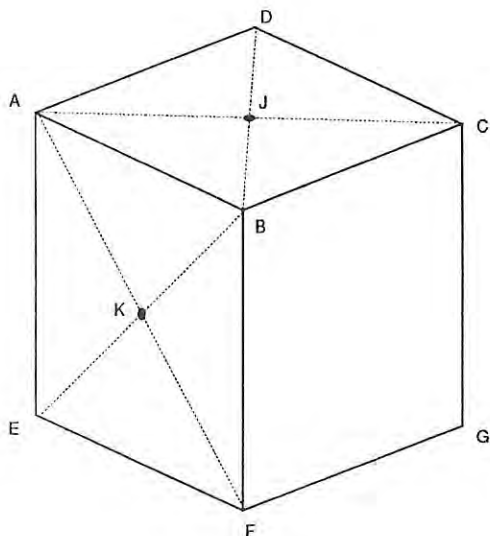
— Le bâton **A'B'** est oblique mais n'est pas posé sur le sol.

174 Dessine à main levée dans le cadre ci-dessus la figure formée par **A'B'** et son ombre **EF**. Complète le schéma en traçant la parallèle à **A'B'** passant par **E**, puis trouve l'ombre du milieu **J** du segment **A'B'**. Quel est ce point sur **EF** ?

— Le bâton **ML** est oblique.

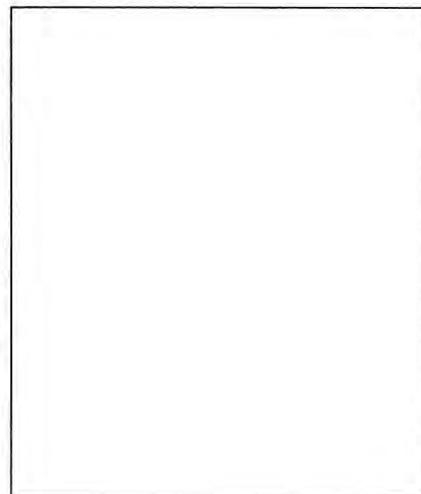
175 Dessine dans le cadre ci-dessus la figure formée par **ML** et son ombre **LN**. Place les points **H** et **K** de **ML** qui découpent ce segment en trois parties égales. Trouve l'ombre de ces deux points :

.....
.....



L'arête du cube **ABC-
176** **DEFGH** mesure 3,5 cm.
Calcule les longueurs
des diagonales **AC**, **AF** et **FC** :

Trace dans le cadre ci-contre
un triangle égal au triangle
ACF. Place ensuite sur cette
figure les points **J** et **K** corres-
pondant à ceux que nous avons
placés sur le cube de gauche.
Quelle est la longueur de **JK** ?



Nous avons dessiné ci-dessous un cube
177 posé sur un plan horizontal. Ce cube est
éclairé par le soleil et l'ombre de l'arête
verticale **GC** sur le plan horizontal est donnée
par le segment **GC'** (*c'est-à-dire que le point C'
est l'ombre du sommet C*).

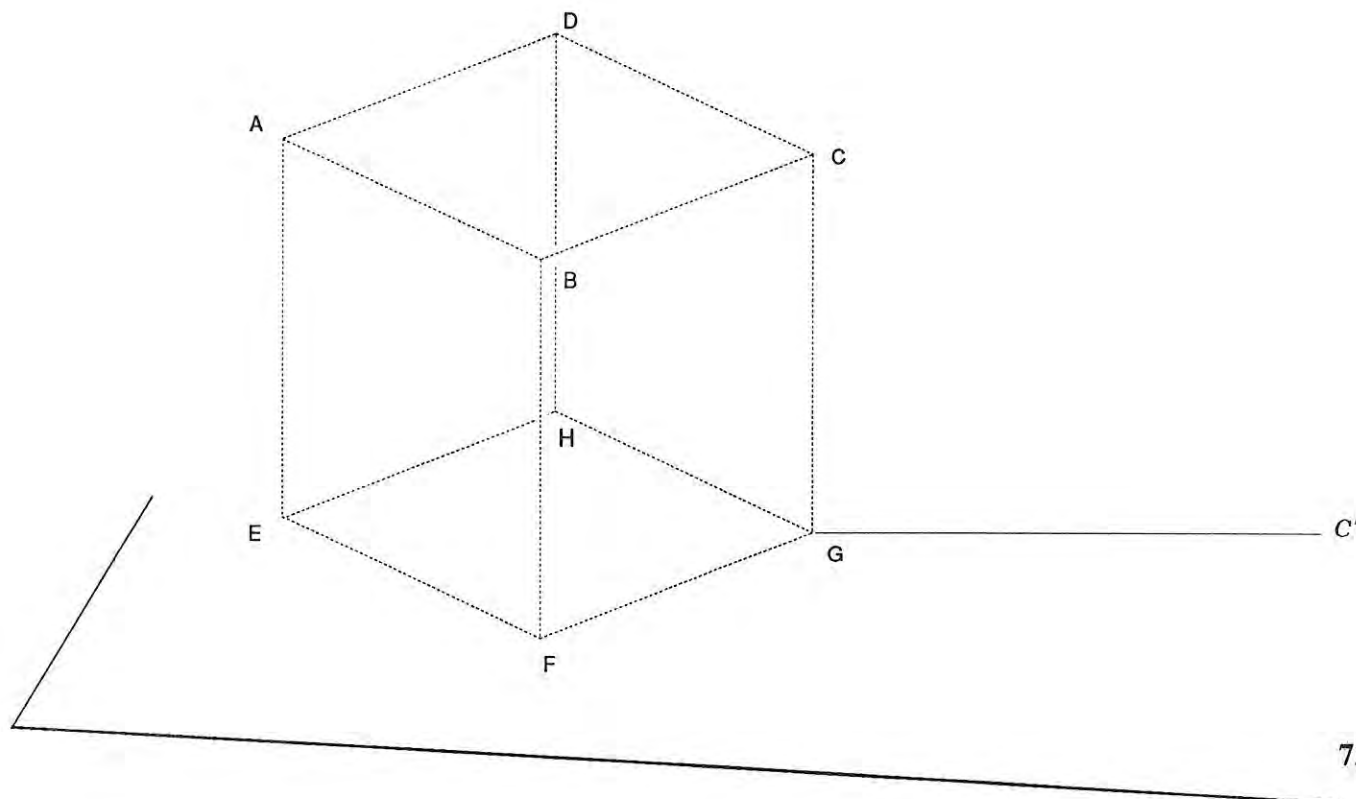
En considérant les quatre arêtes **GC**, **FB**, **EA**
et **HD** comme des piquets verticaux égaux (qui
ont donc des ombres égales et parallèles), dessi-
ne l'ombre de ces arêtes.

Déduis-en l'ombre des autres arêtes, puis celle
du cube. (*fais tous tes tracés au crayon !*)

On appelle **J** le centre de la face **ABCD**
178 et **K** le centre de la face **ABFE**. Trace
(*au crayon !*) les points **J** et **K** sur le
cube, cherche ensuite l'ombre de ces points en
utilisant l'ombre des diagonales des faces.

Place de même les centres des quatre autres
faces du cube et détermine l'ombre de chacun de
ces points.

On considère le solide dont les *sommets* sont
exactement les six centres des faces du cube que
tu as placés. Trace les *arêtes* de ce solide (il y en
a douze), puis cherche son ombre ...



La figure ci-contre représente un quadrilatère $ABCD$ dont les angles en A et C sont des angles droits.

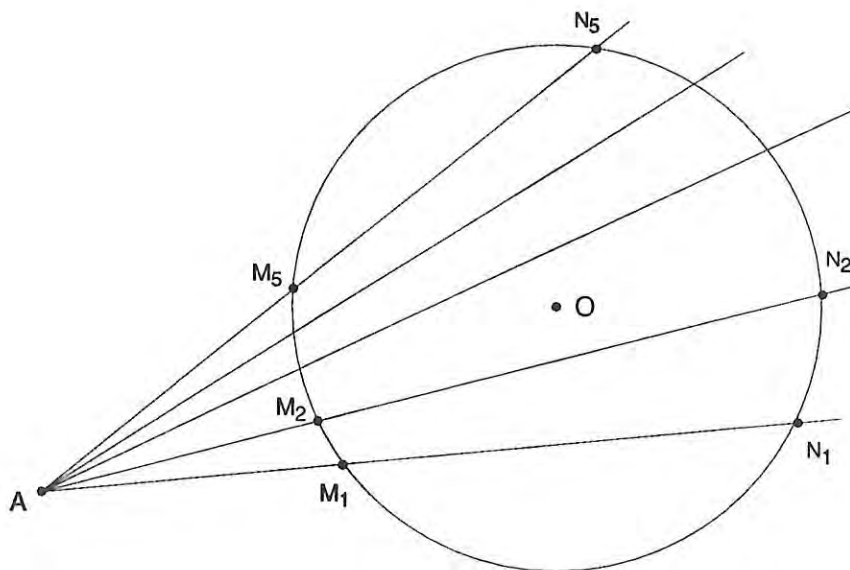
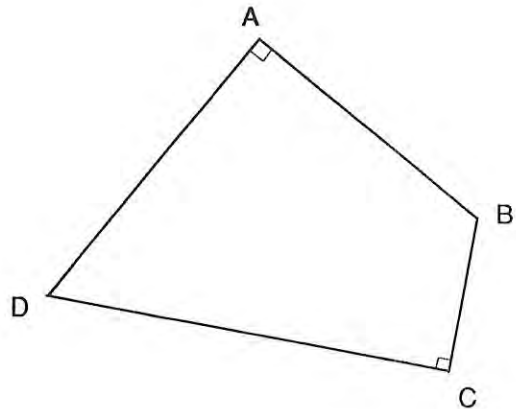
Démontre que les quatre sommets de ce quadrilatère sont sur un même cercle :

Le triangle ABD est rectangle en A , donc le point A est sur

Le triangle BCD est rectangle en C , donc
.....

Les points A, B, C, D sont donc tous les quatre sur

Trace ce cercle à la règle et au compas.



La figure ci-dessus représente un cercle de centre O , et nous avons choisi un point A quelconque, extérieur à ce cercle.

Nous avons ensuite tracé des droites passant par A qui coupent le cercle et déterminent des cordes $M_1N_1, M_2N_2, \dots, M_5N_5$.

Marque les milieux de chacune des cordes $M_1N_1, M_2N_2, \dots, M_5N_5$.

Ces points semblent situés sur un même cercle.

Lequel ?

J'appelle I_1 le milieu de la corde M_1N_1 . Le triangle OM_1N_1 est isocèle, donc la médiane OI_1 est aussi de ce triangle.

Le triangle OI_1A est donc un triangle

Comme l'angle $\widehat{AI_1O}$ est, le point I_1 est sur

J'appelle I_2 le milieu de la corde M_2N_2 . Le même raisonnement montre que

Conclusion :
.....

74 Démontre-le en complétant le texte ci-contre ...

On considère le triangle **ABC** représenté
181 ci-contre.

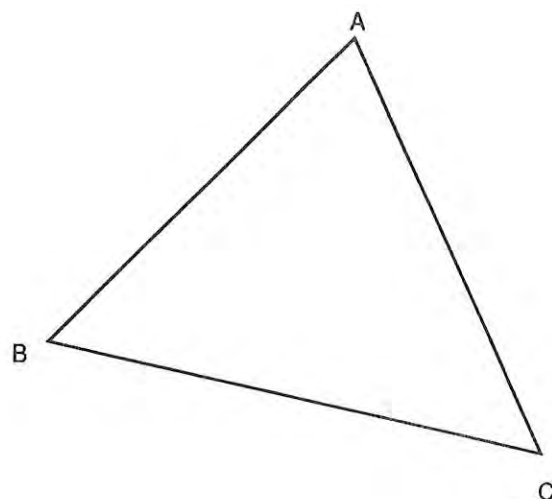
1°) Trace la *perpendiculaire* au côté **AB** passant par le sommet **B** ; puis la *perpendiculaire* au côté **AC** passant par le sommet **C**. Ces deux droites se coupent en un point **A'**. (*efface tes constructions intermédiaires et ne garde que les segments **BA'** et **CA'**, ainsi que les signes marquant les angles droits*)

2°) Trace de même les *perpendiculaires* aux côtés **BC** et **AB** passant respectivement par les sommets **C** et **A** ; elles se coupent en un point **B'**. (*efface tes constructions intermédiaires ...*)

Vérifie sur ta figure que les segments **AA'** et **BB'** sont égaux et se coupent en leurs milieux.

Démontre-le en complétant le raisonnement suivant :

— Le triangle **ABA'** est rectangle en **B**, donc **B** est situé sur
— Le triangle **ACA'** est , donc
— Les trois points **A** , **B** , **C** sont donc sur le cercle



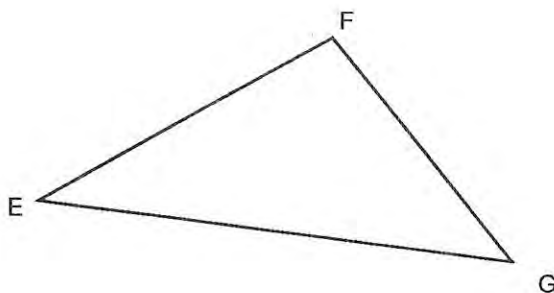
— Le triangle **BCB'** est rectangle
— Le triangle **BAB'** est
— Les trois points **A** , **B** , **C** sont donc sur le cercle

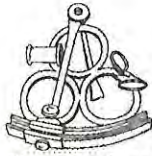
Conclusion : les segments **AA'** et **BB'** sont tous des du cercle
donc ces segments

Trouve une méthode permettant de
182 construire le centre du cercle circonscrit au triangle **EFG** donné ci-contre en te servant seulement de ton équerre.

(Utilise les constructions de l'exercice précédent pour trouver deux diamètres du cercle circonscrit ... Attention, le triangle donné possède un angle obtus, le centre que tu cherches est donc situé à l'extérieur du triangle !)

Pour terminer, trace le cercle circonscrit à **EFG** avec ton compas.





Résumé : Bourbaki et Leonhard ont fini par trouver l'emplacement du trésor immergé par le Capitaine Harchoss dans la baie de San Miguel ...

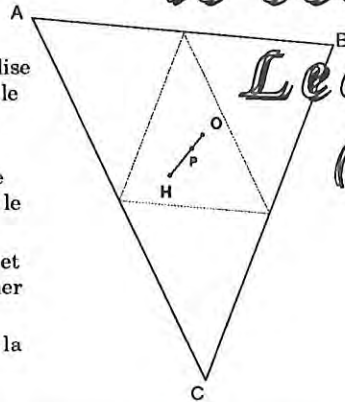
Considérant le triangle ABC formé, sur la carte, par le phare (A), l'église (B) et la maison du pêcheur (C), ils ont commencé par remarquer que le fort (a), le récif rouge (b) et l'ancienne tour (c) forment le triangle des milieux du triangle ABC .

Puis, aidés par le message inachevé d'Eulerus, ils ont découvert que le trésor se trouvait au point P situé aux deux tiers du segment joignant le point H équidistant de A, B, C, au point O équidistant de a, b, c.

Malheureusement, une fois en mer, leur méthode pour se placer en H et se diriger vers O était trop imprécise pour leur permettre de déterminer exactement l'emplacement du point P.

Ce n'est que sur le bateau du retour que Leonhard comprit le sens de la fin énigmatique du message d'Eulerus ...

le secret de Leonhard (... suite)



Rappelle-toi le message laissé par Eulerus :

de mêmes distances du phare, de San Miguel et de la maison du pêcheur,

(autrement dit : pars du point équidistant de A, B et C ...)

va à mêmes distances du fort, de l'ancienne tour et du récif rouge,

(c'est-à-dire : va au point équidistant de a, b et c ...)

tu auras fait trois fois la moitié du chemin qui mène au trésor d'Harchoss.

(... le trésor est aux deux tiers du chemin)

Aligne toi pour cela ...

La dernière phrase, inachevée, pouvait effectivement laisser deviner un autre moyen de parvenir au point P.

Observe bien ta carte, tu dois pouvoir vérifier que **trois droites** particulières — passant par des points importants de la Baie — sont **concurrentes** au point P.

(attention, justifie bien les alignements que tu auras trouvés en indiquant les triangles rectangles qui sous-tendent tes droites !)

Indique les alignements trouvés sur ta carte en reportant les trois droites sur la figure prévue ci-contre.

Ces droites sont les du triangle ABC .

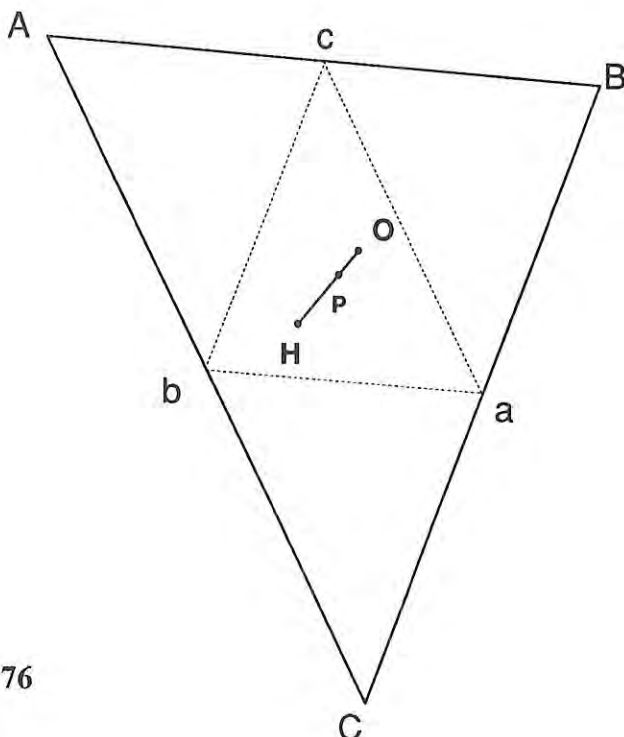
Explique aussi pourquoi Aa passe par le milieu du segment bc :

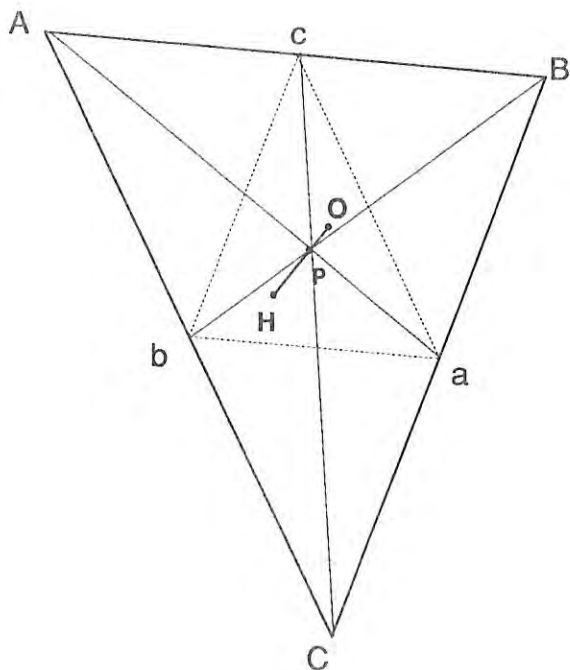
Le quadrilatère Acab a ses côtés ; c'est un

Donc ses diagonales

(de la même façon on voit que Babc et Cbca sont des, et donc que Bb et Cc passent respectivement par les milieux de)

En résumé : le point P est le point d'intersection des du triangle ABC et du triangle abc . C'est le de chacun de ces deux triangles.





La propriété géométrique dont s'est servi le pilote Eulerus est vraie **dans tous les triangles**.

Cette découverte est généralement attribuée à un très grand mathématicien suisse du XVIII^{ème} siècle.

... ce mathématicien s'appelait :

Leonhard EULER (1707 - 1783)

Effectue toutes les constructions sur la figure ci-contre :

1°) trace les *médiatrices* de **ABC**, déduis-en les *milieux* **a** , **b** et **c** des côtés et le *centre H* du *cercle circonscrit* au triangle **ABC**.

(remarque : le point **H** est aussi l' du *triangle des milieux abc*)

2°) Trace le *centre de gravité* **P** du triangle **ABC**.

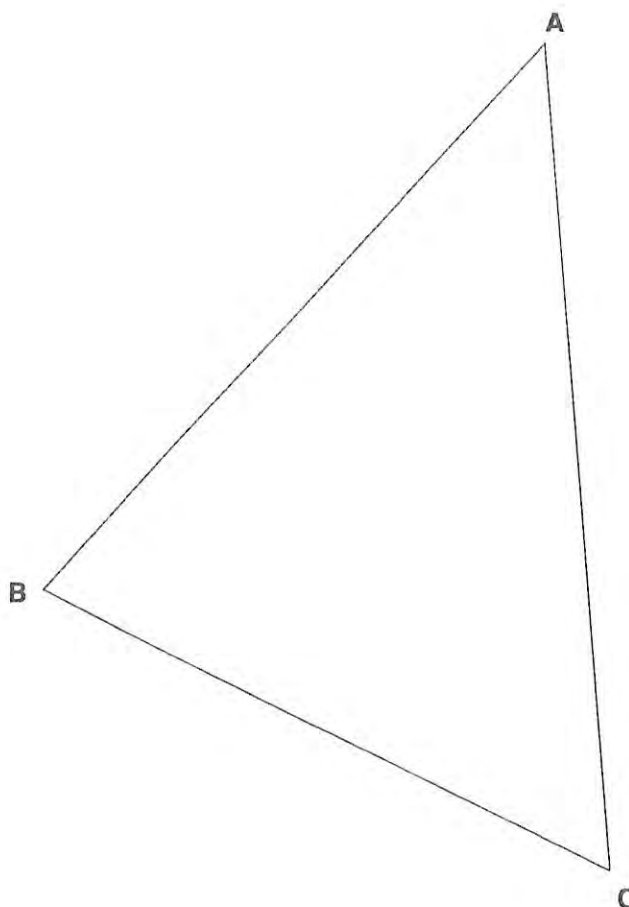
(remarque : le point **P** est aussi le du *triangle des milieux abc*)

3°) Trace les *médiatrices* du triangle **abc**, déduis-en le *centre O* du *cercle circonscrit* au triangle **abc**.

4°) Vérifie que les points **H** , **P** et **O** sont alignés et mesure les deux segments **HP** et **PO** :

HP = PO =

HP = x HO



Essaye d'énoncer le théorème qui résume la propriété :

« Dans un triangle **ABC** quelconque, »

.....
.....
..... »

Comme nous l'avons dit à la page 58, Bourbaki trouvait que la démonstration donnée par Leonhard n'était pas vraiment au programme des collèges ...

Après avoir longtemps cherché, le Général trouva une démonstration adaptée au niveau de la classe de quatrième. La voici.

(attention ! il s'agit d'un général, donc une démonstration de Bourbaki demande beaucoup de rigueur de rédaction ...)

RAPPEL : quelle est la définition de la symétrie par rapport à un point ?

Le symétrique d'un point M par rapport à un point S est le point N tel que

.....
.....
.....

Sur la figure de droite a , b et c sont les milieux de BC , CA et AB ; effectue les constructions suivantes :

— trace en traits bleus le triangle abc ,

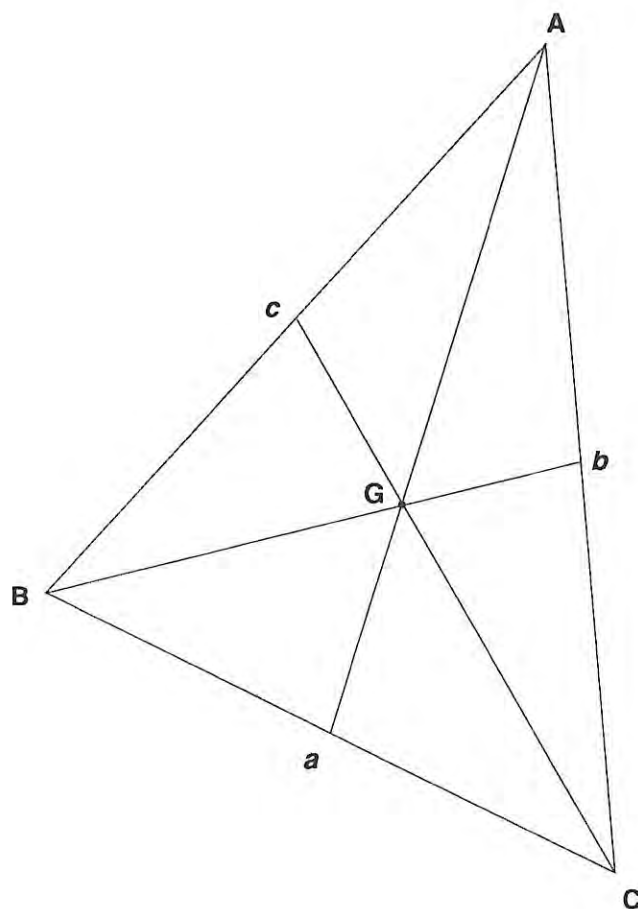
— trace les symétriques a' , b' et c' de a , b et c par rapport au point G , puis trace en traits rouges le symétrique de abc par rapport à G ,

— construis au crayon le centre O du cercle circonscrit au triangle abc ; gomme tes constructions et trace en bleu les segments Oa , Ob et Oc ,

— trace en rouge le symétrique H' de O par rapport à G et les symétriques des trois segments Oa , Ob et Oc ,

— trace au crayon le symétrique H de G par rapport à H' ,

— colorie légèrement (si possible dans trois couleurs différentes) les triangles AGH , CGH et BGH .



Sachant que G est au tiers de la médiane aA en partant du point a , marque les égalités que tu connais sur les parties du segment aA : a' est le de GA .

- Considère le triangle GAH (que tu as colorié) :
 - le point a' est le milieu de GA ,
 - comme G et H sont symétriques par rapport à H' , le point H' est le de GH ,
 - $a'H'$ est le segment qui joint les , donc on a : = $2 \times$

- En faisant le même raisonnement dans les triangles GBH et GCH , on a finalement:

$$AH = \dots\dots\dots, \quad BH = \dots\dots\dots, \quad CH = \dots\dots\dots$$

- Mais les segments $a'H'$, aO , $b'H'$, bO , $c'H'$ et cO sont deux à deux symétriques par rapport à G , donc :

$$a'H' = \dots\dots\dots, \quad b'H' = \dots\dots\dots, \quad c'H' = \dots\dots\dots$$

- Et le point O est équidistant de a , b et c , donc :

$$aO = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

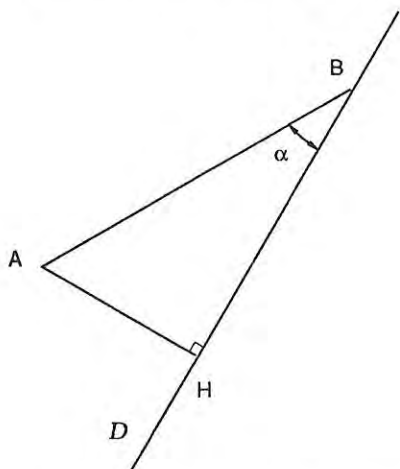
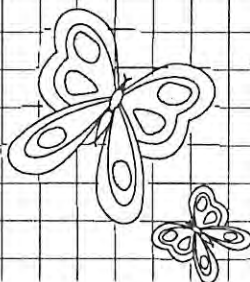
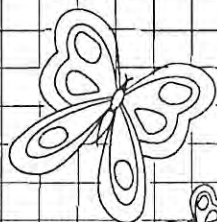
- Finalement : $AH = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$

H est donc le au triangle ABC .

- Marque les égalités que tu connais sur les parties de OH :
 H' est situé au de HO en partant de H .

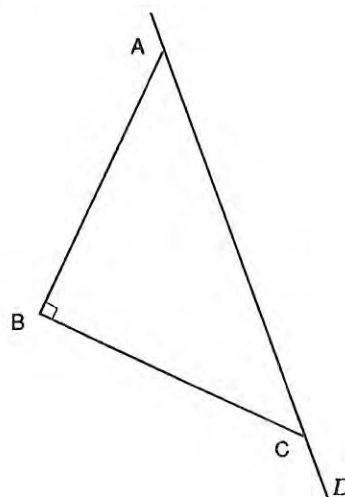
6

les transformations géométriques



183 Construis le *symétrique* par rapport à la droite *D* du triangle *BAH* donné ci-dessus.

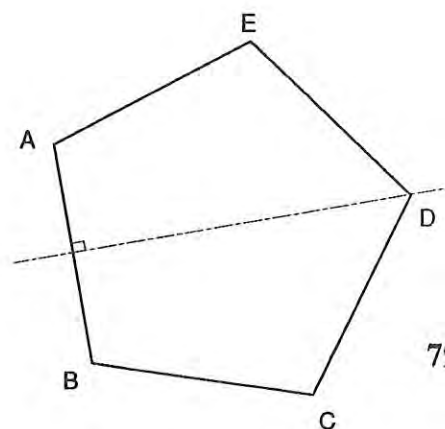
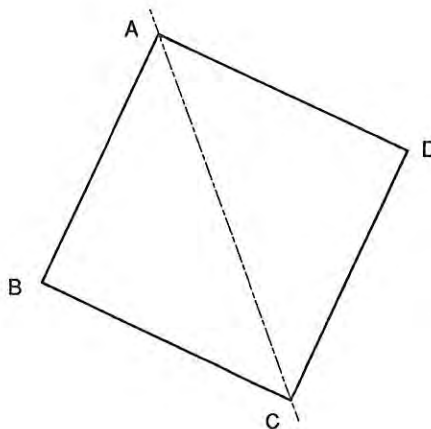
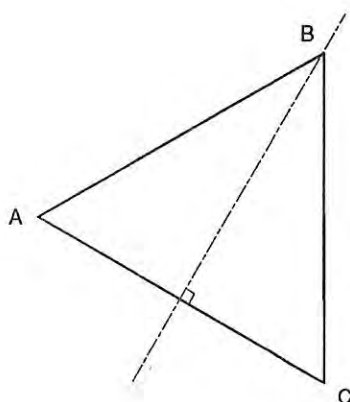
On suppose que l'angle α mesure 30° , quelle est la nature de la figure que tu obtiens ?

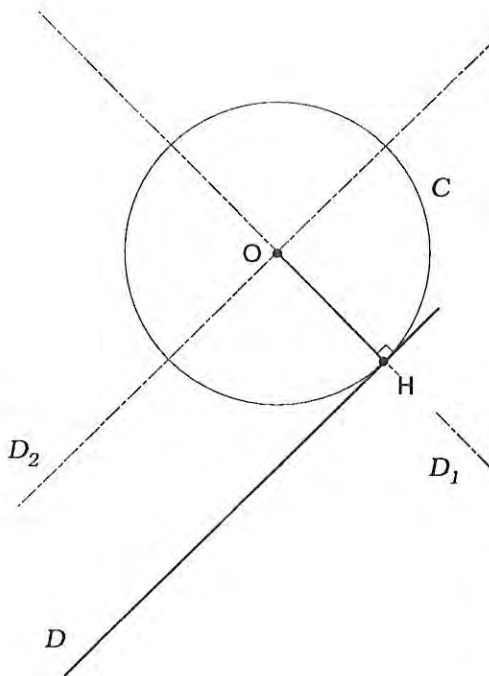


184 Construis le *symétrique* par rapport à la droite *D* du triangle *ABC* donné ci-dessus.

On suppose que les segments *AB* et *BC* sont égaux, quelle est la nature de la figure obtenue ?

185 Pour chacune des trois figures régulières représentées ci-dessous, nous avons déjà indiqué un des axes de symétrie. Cherche tous les autres et trace-les sur les différents schémas.





186 On considère la figure de gauche, formée du cercle C , de la droite D et du rayon OH .

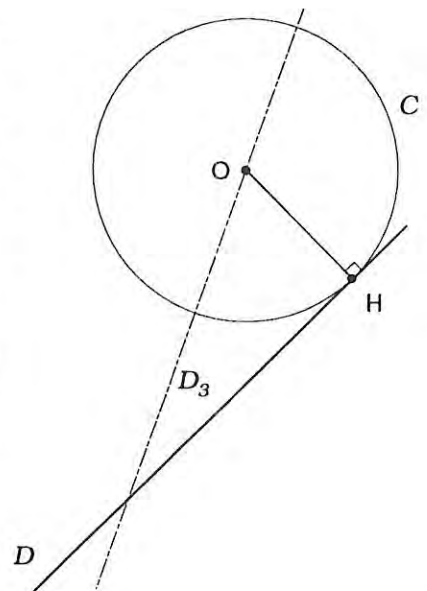
Quelle est la figure symétrique de celle-ci par rapport à l'axe D_1 ?

Construis ensuite la figure symétrique de la première par rapport à l'axe D_2 .

187 La figure de droite est la même que celle de l'exercice 186.

Dessine le symétrique de celle-ci par rapport à l'axe D_3 .

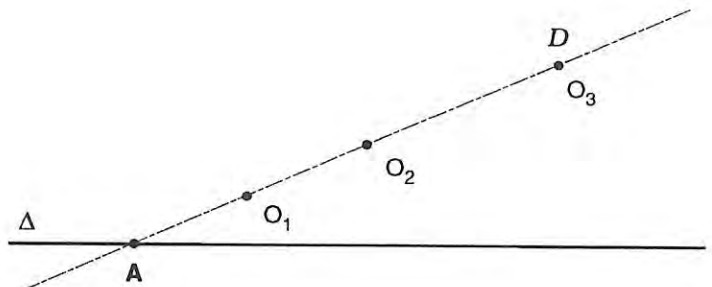
Que représente la droite D_3 pour l'angle formé par la droite D et sa symétrique ?
.....



188 Nous nous sommes donné deux droites Δ et D . Puis nous avons choisi des points O_1, O_2, O_3 de D .

1°) Construis les projections orthogonales H_1, H_2 et H_3 des points O_1, O_2, O_3 sur la droite Δ . Trace le cercle de centre O_3 passant par H_3 , le cercle de centre O_2 passant par H_2 , et le cercle de centre O_1 passant par H_1 .

2°) Détermine la figure symétrique de ta figure par rapport à l'axe D . (c'est-à-dire les symétriques de Δ , des cercles, et des rayons O_1H_1, O_2H_2 et O_3H_3)



189 La figure ci-contre représente un triangle ABC ; nous avons tracé les bissectrices des angles en A et B .

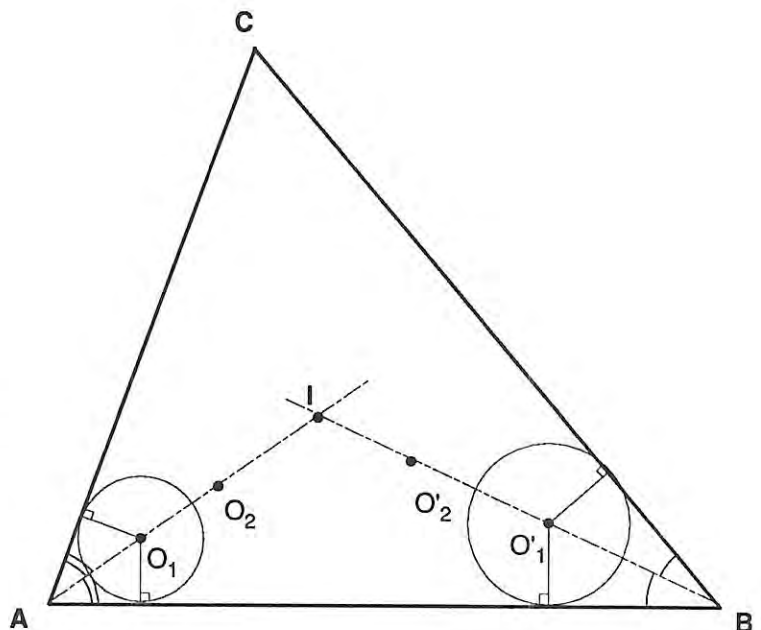
Nous avons ensuite tracé deux cercles centrés en O_1, O'_1 sur les bissectrices et tangents aux côtés de ABC .

Construis toi-même les projections orthogonales de O_2 sur AB et AC , puis les projections orthogonales de O'_2 sur AB et BC .

Trace le cercle centré en O_2 et tangent à AB et AC . Trace ensuite le cercle centré en O'_2 et tangent à AB et BC . Quel point faut-il choisir pour centre si l'on veut construire un cercle tangent aux trois côtés à la fois ?

..... (effectue la construction).

80 Quelle est la bissectrice de l'angle en C ?
.....



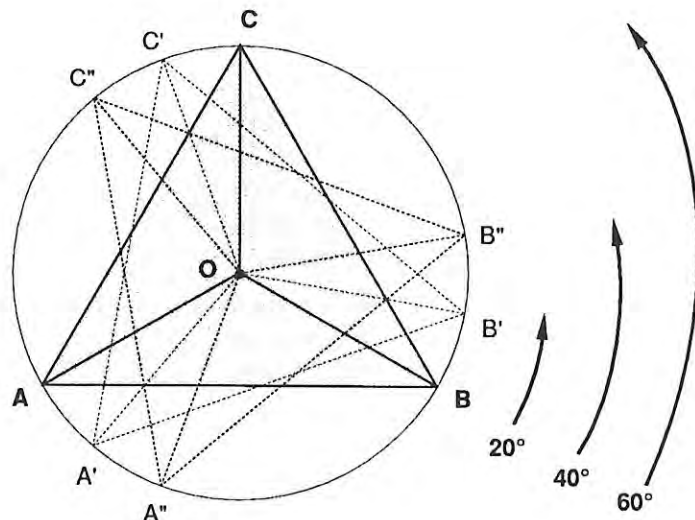
Nous nous sommes donné un **triangle équilatéral ABC** de centre **O**, et nous l'avons fait tourner d'un angle de 20° autour du point **O**. Nous avons obtenu le triangle **A'B'C'**. (On dit que **A'B'C'** est l'image de **ABC** par la **rotation** de centre **O**, d'angle 20° . Colorie-le)

De même, nous avons fait tourner **ABC** d'un angle de 40° autour du point **O**. Nous avons obtenu le triangle **A''B''C''**.

(On dit que **A''B''C''** est l'image de **ABC** par la **rotation** de centre **O** et d'angle 40° .)

Construis toi-même l'image de **ABC** par la **rotation** de centre **O** et d'angle 60° .

(cherche l'image de chacun des points **A**, **B**, **C** sur le cercle de centre **O** ...)



Nous nous sommes donné un **carré ABCD** de centre **O**, et nous l'avons fait tourner d'un angle de 15° autour du point **O**. Nous avons obtenu le carré **A'B'C'D'**.

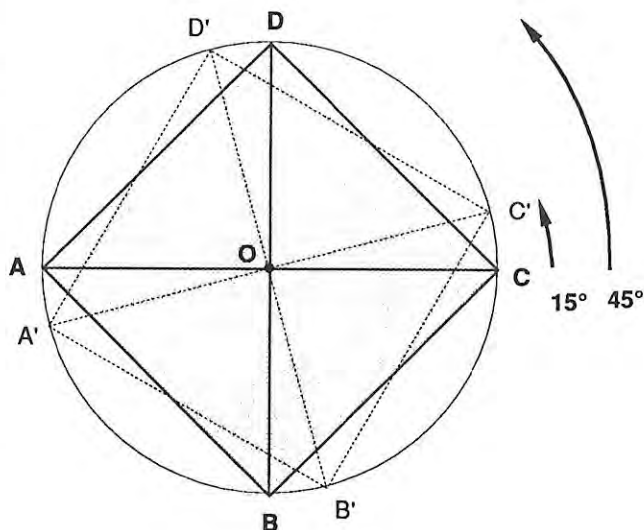
(**A'B'C'D'** est l'image de **ABCD** par la **rotation** de centre **O** et d'angle 15° .)

Construis toi-même l'image de **ABCD** par la **rotation** de centre **O** et d'angle 45° .

(cherche l'image de chacun des points **A**, **B**, **C**, **D** sur le cercle de centre **O** ...)

Appelle **A''B''C''D''** le carré que tu obtiens, colorie-le en bleu.

Quelle est la nature de la figure globale que tu as ainsi obtenue ?

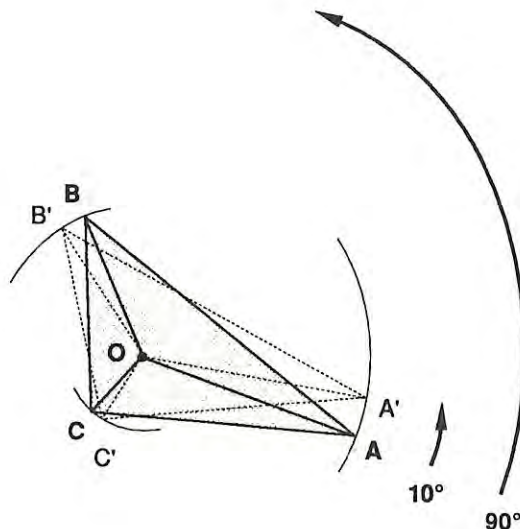


Nous nous sommes donné un **triangle quelconque ABC** et un point **O**. Nous avons fait tourner le triangle d'un angle de 10° autour du point **O**. Nous avons obtenu le triangle **A'B'C'**.

(**A'B'C'** est l'image de **ABC** par la **rotation** de centre **O** et d'angle 10° . Remarque bien que chacun des points **A**, **B**, **C** se déplace en restant à la même distance du point **O**.)

Construis toi-même l'image de **ABC** par la **rotation** de centre **O** et d'angle 90° .

(cherche séparément l'image de chacun des points **A**, **B**, **C** sur les cercles de centre **O** qui passent par **A**, **B** et **C** ; puis termine l'image du triangle ...)



193 Le quadrilatère **OABC** ci-contre est tel que **OA = OC** et l'angle en **O** mesure 60° .

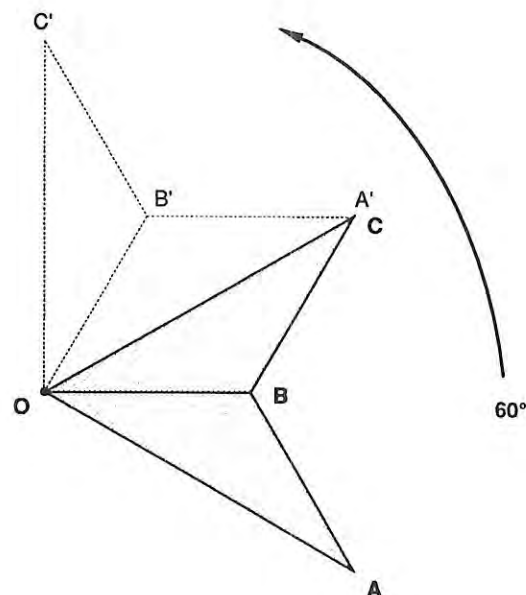
Nous lui avons appliqué une *rotation* de centre **O** et d'angle 60° . Nous avons obtenu le quadrilatère **OA'B'C'** dessiné en pointillés.

Trace les deux cercles de centre **O** sur lesquels se sont déplacés **A**, **B** et **C**, puis colorie légèrement l'image **OA'B'C'** de **OABC**.

Construis toi-même les images du quadrilatère **OABC** par les *rotations* de centre **O** et d'angles 120° , 180° , 240° et 300° .

Parmi ces *rotations*, l'une correspond à la *symétrie de centre O* appliquée au quadrilatère **OABC**.

Laquelle ?



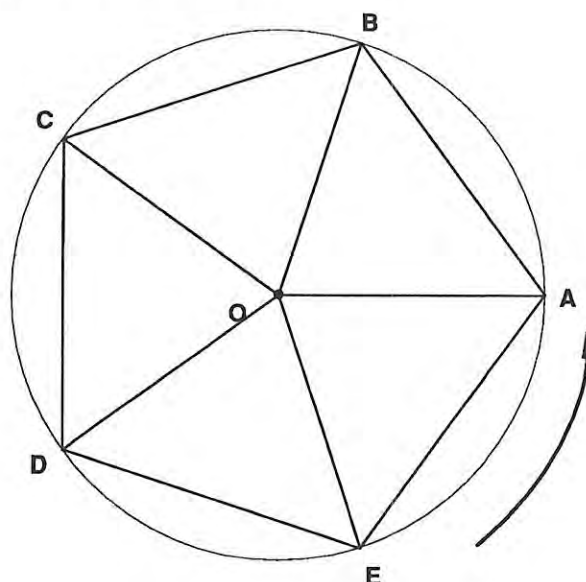
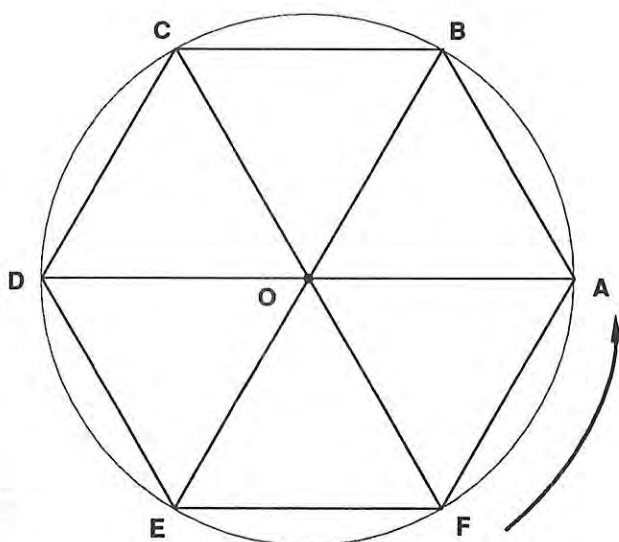
194 Nous nous sommes donné un *hexagone régulier* **ABCDEF** (figure ci-dessous). Cherche toutes les *rotations* de centre **O** qui envoient cet hexagone sur lui-même ; précise dans chaque cas l'image des sommets :

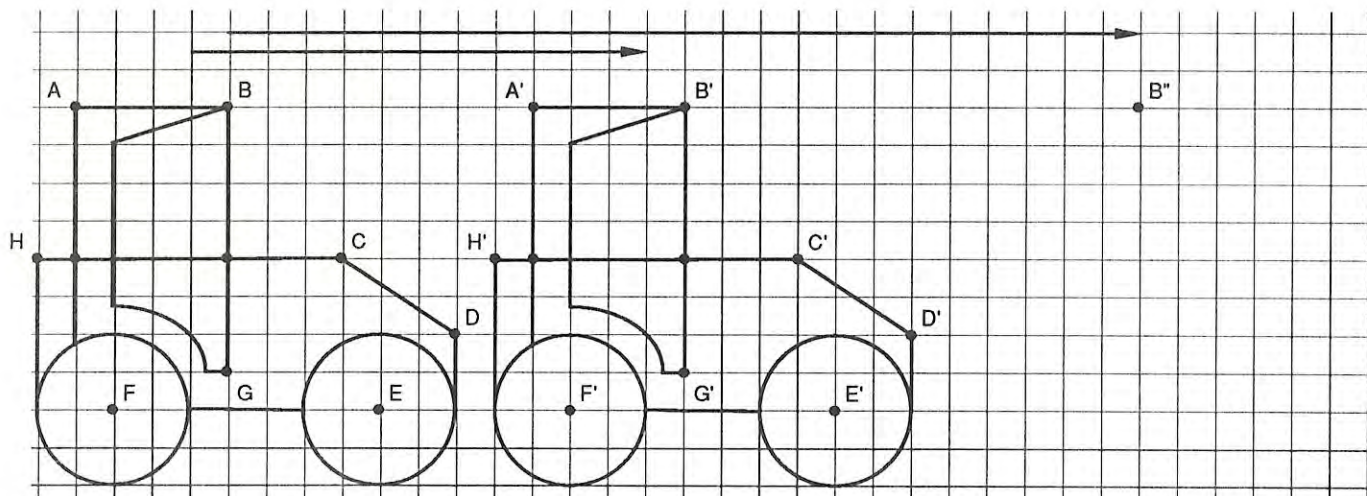
angle	A	B	C	D	E	F
.....	...	...	...	...	...	...
.....	...	...	...	...	...	...
.....	...	...	...	...	...	...
.....	...	...	...	...	...	...
.....	...	...	...	...	...	...

195 Nous nous sommes donné un *pentagone régulier* **ABCDE** (figure ci-dessous). Cherche les *rotations* de centre **O** qui envoient ce pentagone sur lui-même ; précise l'image des sommets :

angle	A	B	C	D	E
.....	...	...	...	...	...
.....	...	...	...	...	...
.....	...	...	...	...	...
.....	...	...	...	...	...

La *symétrie de centre O* convient-elle ?





Nous avons dessiné une voiture **ABCD** ...
196 puis nous l'avons déplacée horizontalement de 6 cm vers la droite.

Nous avons obtenu le dessin **A'B'C'D'** ...

Construis toi-même la figure que l'on obtient en déplaçant horizontalement la voiture **ABCD** ... de 12 cm vers la droite.

(Le point **B** vient en **B''**. Commence par chercher les images des points **A**, **C**, **D**, etc.)

On dit que la figure déplacée est l'image de la première par une **translation**.

Chaque point **M** a une image **M'** telle que le segment **MM'** soit de même direction, de même longueur et de même sens que les segments **AA'**, **BB'**, **CC'**, ... , **HH'**.

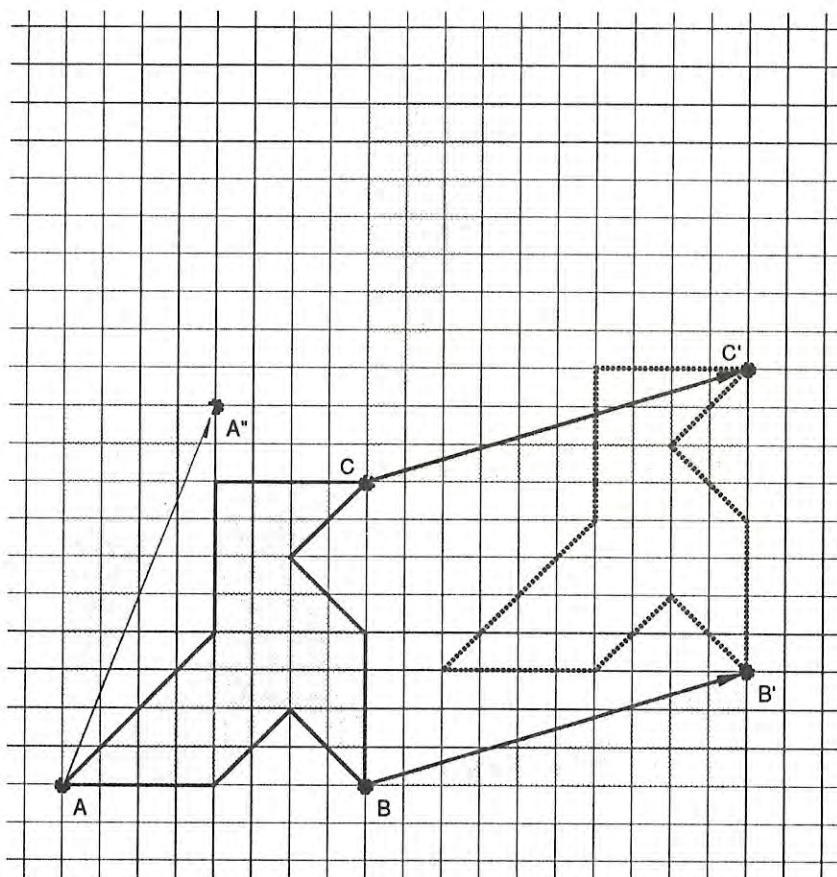
Pour préciser la direction, la longueur et le sens de la **translation** considérée, il suffit de se donner l'image d'un point particulier de la figure de départ.

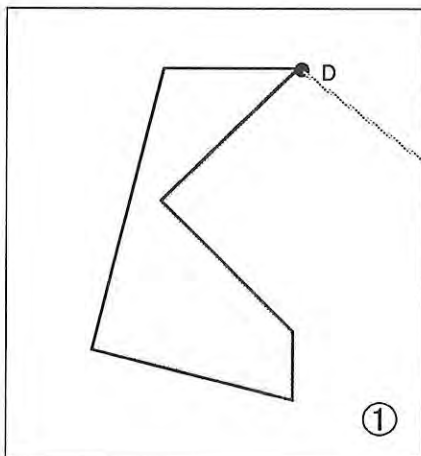
Nous avons dessiné
197 une figure sur laquelle nous avons marqué trois points particuliers **A**, **B**, **C**. Puis nous l'avons déplacée de façon à obtenir la figure de droite, où les points **B'** et **C'** correspondent à **B** et **C**.

Déplace la figure initiale parallèlement à elle-même de façon à ce que le point **A** vienne en **A''**. (commence par chercher les images de **B** et **C**)

La figure de droite est l'image de la première par une **translation** qui est caractérisée par la direction, la longueur et le sens des segments **BB'** ou **CC'**.

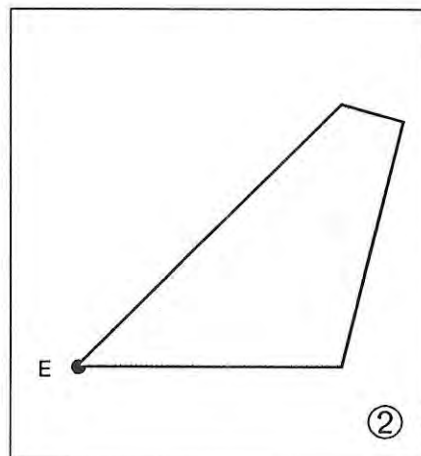
La figure du haut (que tu dois construire) est l'image de la première par la **translation** correspondant à la direction, à la longueur et au sens du segment donné **AA''**.





198 Applique au polygone donné dans le cadre 1 (*figure de gauche*) la **translation** qui envoie le point **D** sur le point **C** du cadre central.

(A partir des sommets de la fig. 1 construis des segments **parallèles** et **égaux** à **DC**.)

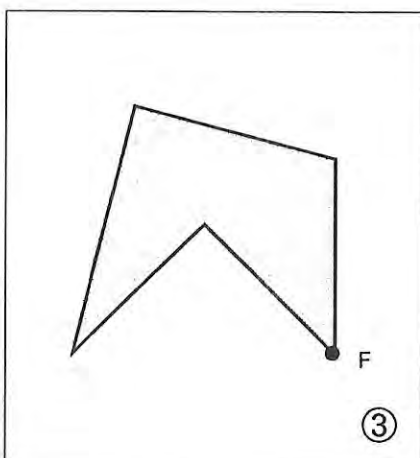
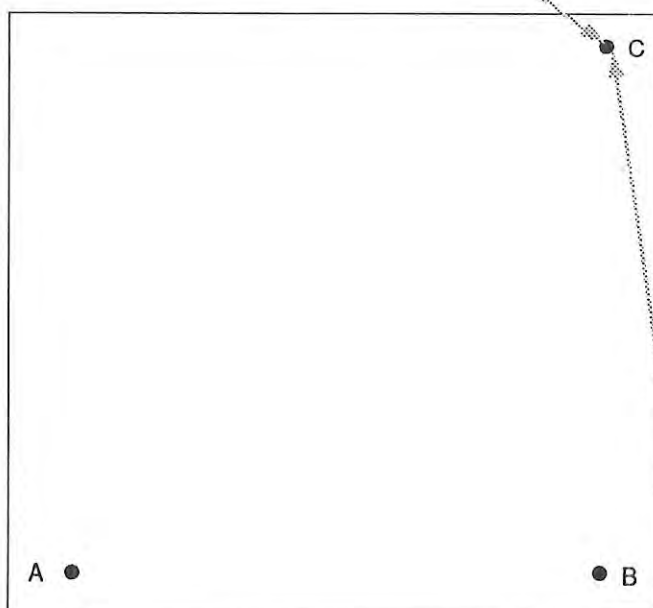


199 Applique au polygone donné dans le cadre 2 (*fig. en haut à droite*) la **translation** qui envoie le point **E** sur le point **A** du cadre central.

(A partir de chaque sommet du polygone 2, construis un segment **parallèle** et **égal** à **EA**.)

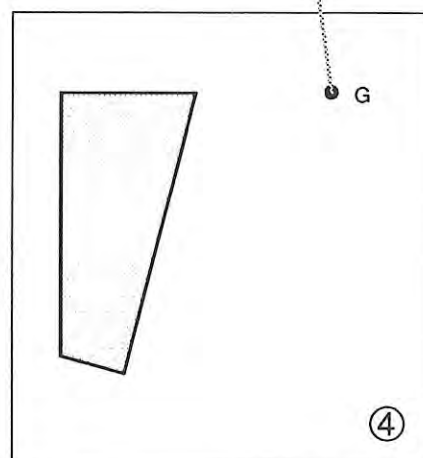
200 Applique au polygone donné dans le cadre 3 (*fig. en bas à gauche*) la **translation** qui envoie le point **F** sur le point **B** du cadre central.

(Même méthode à partir de **FB**.)



201 Pour terminer la figure centrale, applique au polygone donné dans le cadre 4 (*ci-contre à droite*) la **translation** qui envoie le point **G** sur le point **C** du cadre central ...

(A partir de chaque sommet du polygone 4, construis un segment **parallèle** et **égal** au segment orienté **GC**.)

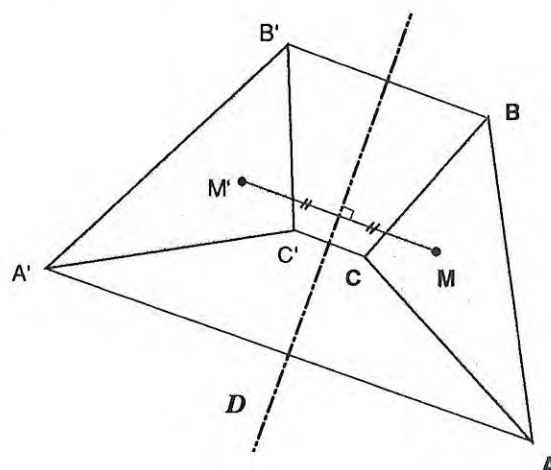


ce qu'il faut savoir ...

Appliquer à une figure la **symétrie par rapport à la droite D** , c'est associer à chaque point M de cette figure le point *image* M' tel que la droite D soit *médiatrice* de MM' .

(on dit alors que les deux points M, M' sont *symétriques* par rapport à la droite D)

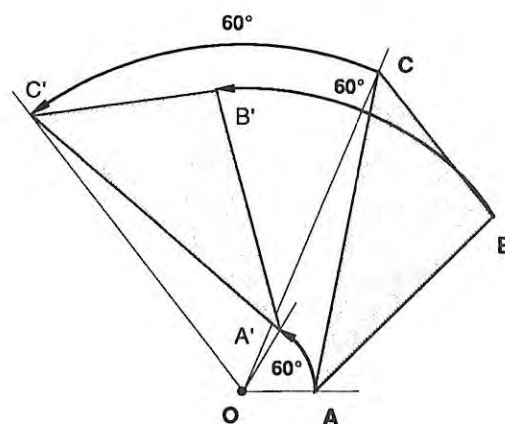
Remarque : si la figure d'arrivée est superposée à la figure de départ, on dit que celle-ci admet D comme *axe de symétrie*.



Appliquer à une figure la **rotation de centre O et d'angle α** , c'est faire tourner cette figure d'un angle α autour du point O .

Exemple : l'image du point A dans la rotation de centre O et d'angle $\alpha = 60^\circ$ (dans le sens de la flèche), est le point A' situé sur le cercle de centre O de rayon OA , et tel que l'angle $\widehat{AOA'}$ soit égal à 60° .

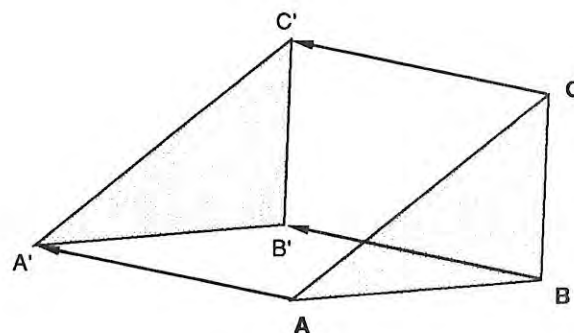
Remarque : la rotation de centre O et d'angle $\alpha = 180^\circ$ n'est autre que la **symétrie centrale** de centre O .



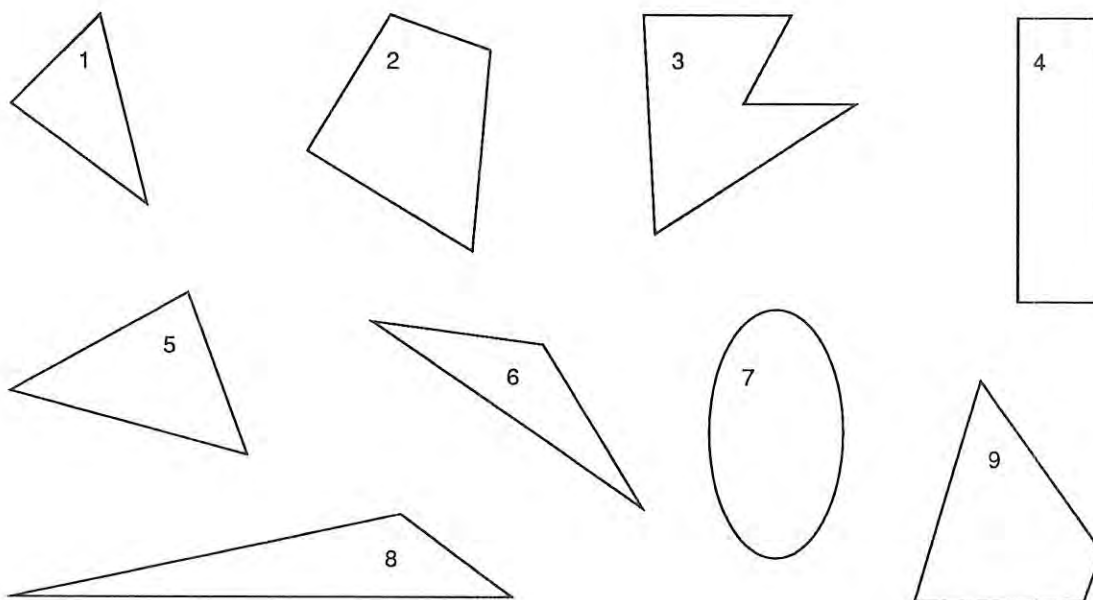
Appliquer une **translation** à une figure, c'est associer à chaque point M de celle-ci un point image M' tel que le segment MM' ait toujours une *direction*, un *sens* et une *longueur* donnés.

Se donner une translation, c'est se donner un **vecteur** : c'est un segment orienté d'origine quelconque qui indique la *direction*, le *sens* et la *longueur* des segments joignant les points à leurs images.

Exemple : on note le vecteur $\vec{AA'}$ (ou $\vec{BB'}$, ou $\vec{CC'}$, ...) en mettant d'abord l'origine.



... ce qu'il faut savoir

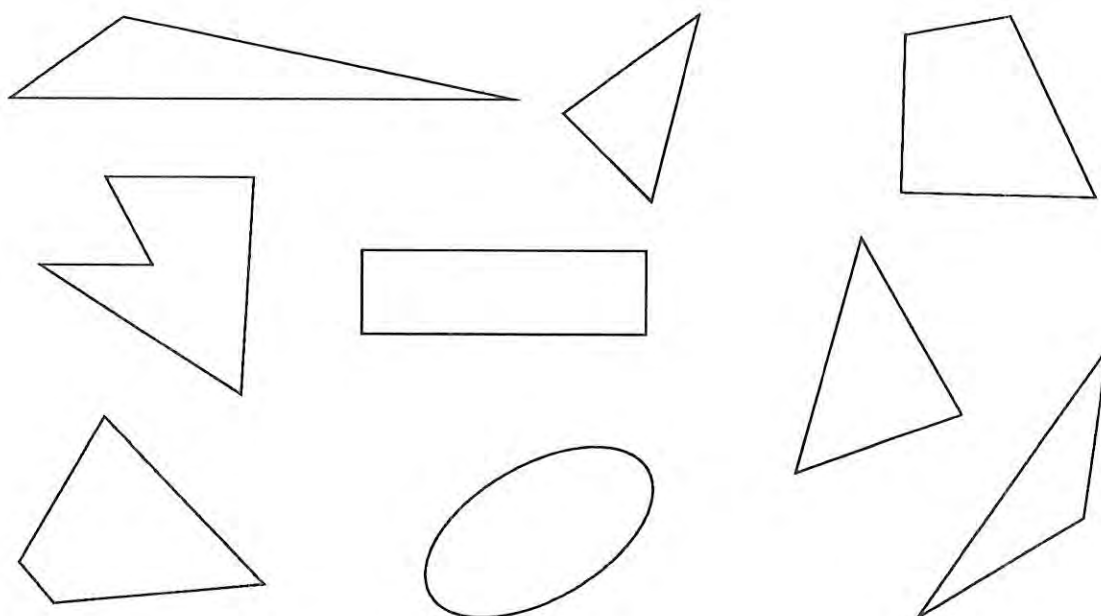


Les neuf figures du haut de la page ont été déplacées indépendamment les unes des autres. On a appliqué à certaines une *symétrie axiale*, à d'autres une *rotation*. Les figures obtenues sont représentées ci-dessous.

Associe chacune de celles-ci à celle dont elle provient et précise dans le tableau prévu à droite le type de la transformation qui a été appliquée.

Marque sur chacune des figures du bas le n° de celle dont elle provient, puis indique ci-dessous si l'on a appliqué une *symétrie* ou une *rotation*. (Dans le cas d'une *rotation*, essaie de préciser l'angle, dans le cas d'une *symétrie* essaie de trouver la direction de l'axe et de l'indiquer sur la figure)

n° :		n° :	
n° :		n° :	
n° :		n° :	
n° :		n° :	
n° :			

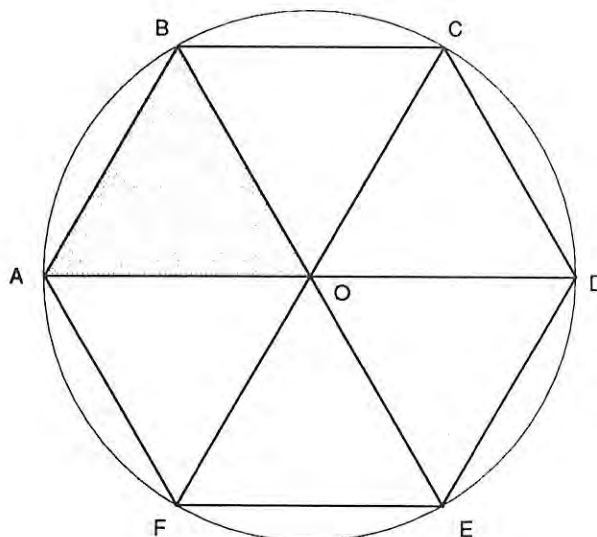


203 L'hexagone **ABCDEF** est **régulier**. (marque les égalités de segments que tu connais, ainsi que la mesure des angles de la figure.)

Nous avons tracé le triangle **ABO**. Cherche les autres triangles de la figure qui peuvent s'obtenir en appliquant une **symétrie axiale** au triangle **ABO** :

Cherche les triangles de la figure qui peuvent s'obtenir en appliquant une **rotation** au triangle **ABO** :

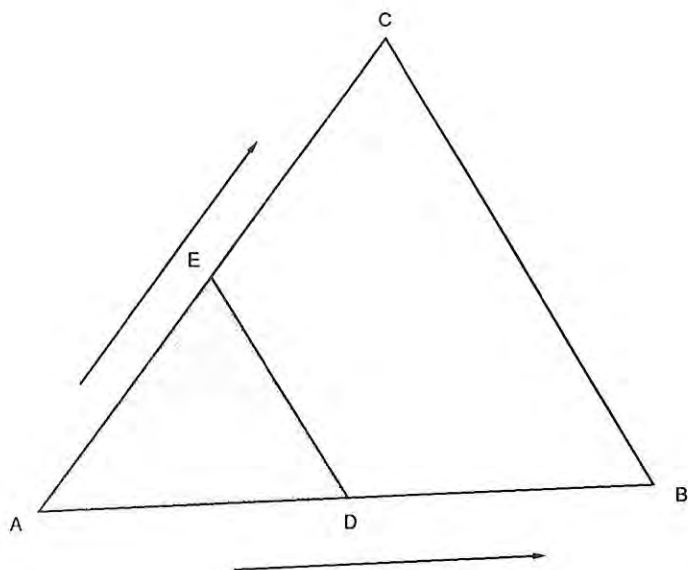
Cherche les triangles de la figure qui peuvent s'obtenir en appliquant une **translation** au triangle **ABO** :



204 **ABC** est un triangle quelconque. Les points **D** et **E** sont les milieux des côtés **AB** et **AC**.

Applique au triangle **ADE** la **translation** correspondant au **vecteur $\vec{AD}$** (commence par préciser les images des points **A** et **D**, puis cherche celle du point **E**) :

Applique au triangle **ADE** la **translation** correspondant au **vecteur $\vec{AE}$** (commence par préciser les images des points **A** et **E**, puis cherche celle du point **D**) :

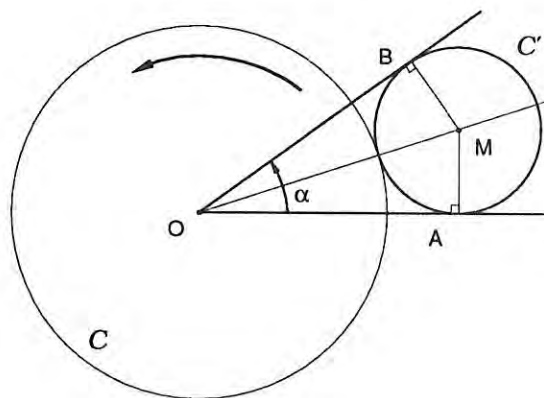


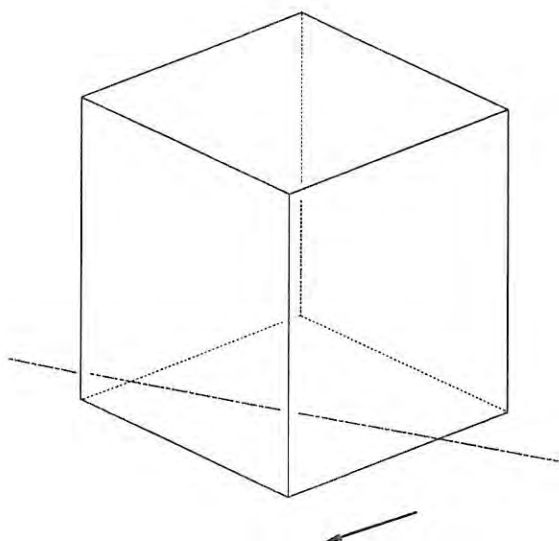
205 Nous nous sommes donné un cercle **C'** de centre **M** tangent à un cercle **C** de centre **O**.

Les tangentes **OA** et **OB** menées de **O** au cercle **C'** forment entre elles un angle α mesurant 36° . Que représente la droite **OM** pour cet angle ?

On veut appliquer au cercle **C'** la **rotation** de centre **O** et d'angle 36° (dans le sens de la flèche). Trace le cercle sur lequel est située l'image du point **M** ; puis place cette image à l'aide de ton rapporteur (ou de ton compas ...). Dessine enfin l'image du cercle **C'** par la rotation considérée.

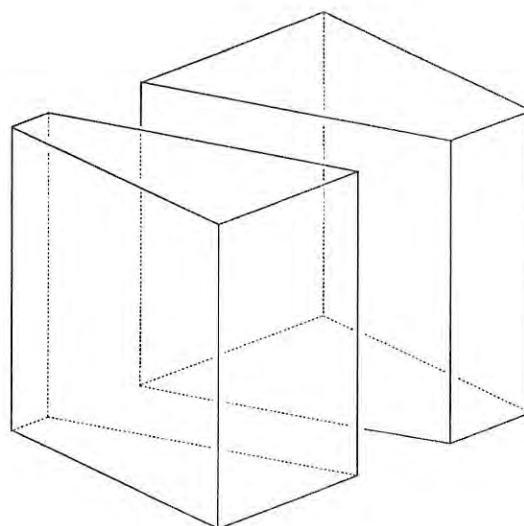
Complète ta figure en traçant les images du cercle **C'** par les rotations de centre **O** et d'angles 72° , 108° , 144° , 180° , 216° , 252° , 288° et 324° (dans le sens de la flèche).





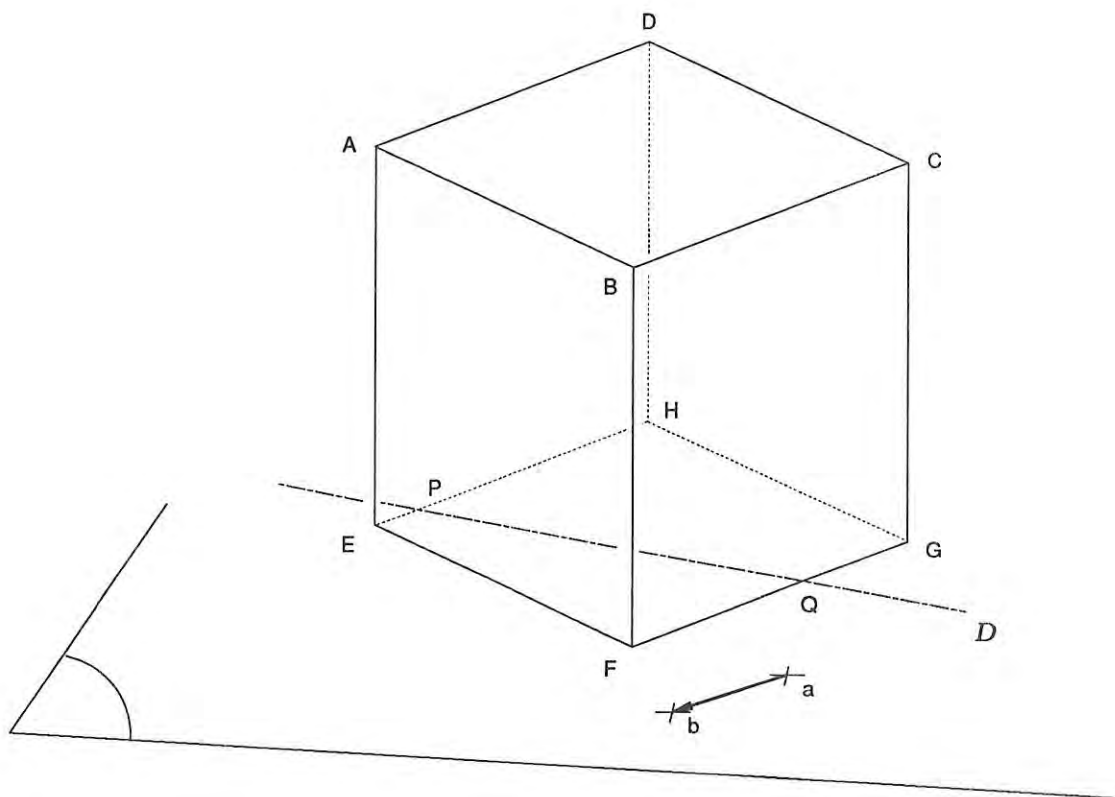
206 Nous nous sommes donné un cube posé sur un plan horizontal (*fig. ci-dessus*).

Une droite étant donnée dans ce plan, nous avons tracé le plan vertical situé au-dessus de celle-ci, de façon à couper le cube en deux morceaux ; puis nous avons appliqué à la partie avant une translation suivant le vecteur représenté sur la figure. Le résultat obtenu correspond à la figure de droite. Colorie ce schéma en deux couleurs, l'une pour les zones qui proviennent des *faces*, l'autre pour la zone qui provient de l'*intérieur* du cube.



207 Réalise toi-même une figure semblable à la précédente à partir du schéma donné ci-dessous.

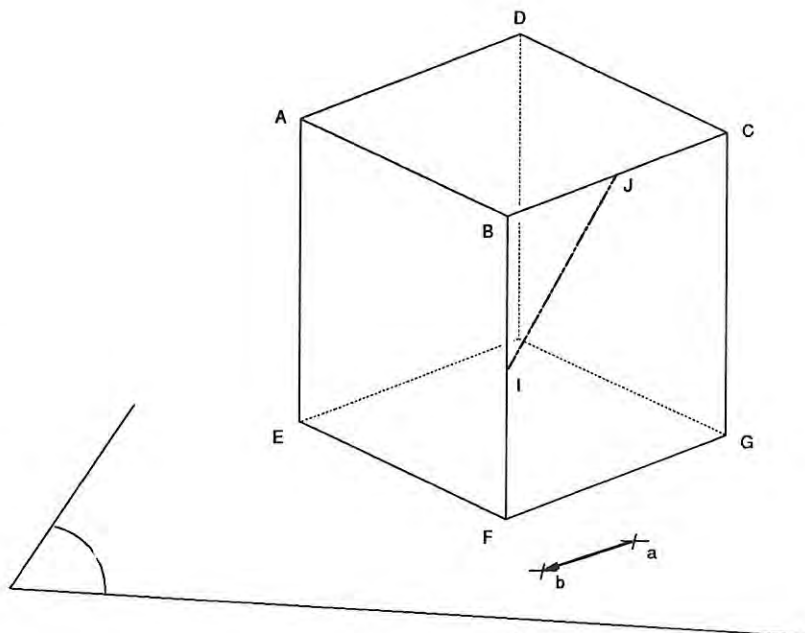
Le cube **ABCDEFGH** est posé sur le plan horizontal, et ce plan contient la droite **D**. Commence par tracer les intersections des faces **BCGF** et **ADHE** avec le plan vertical contenant la droite **D**. Déduis-en l'intersection de ce plan avec la face **ABCD**. Tu obtiens un découpage du cube en deux parties situées en avant et en arrière du plan vertical qui contient **D**. Applique la translation de vecteur **ab** à la partie avant.



Le cube **ABCDEFGH** est
208 posé sur un plan horizontal ; les points **I** et **J** sont les milieux des arêtes **BF** et **BC**.

On considère le plan contenant le segment **IJ** et *parallèle* à l'arête **AB**. Trace son intersection avec le cube en commençant par chercher son intersection avec les faces **ABCD** et **ABFE**. (*le plan est parallèle à AB ...*)

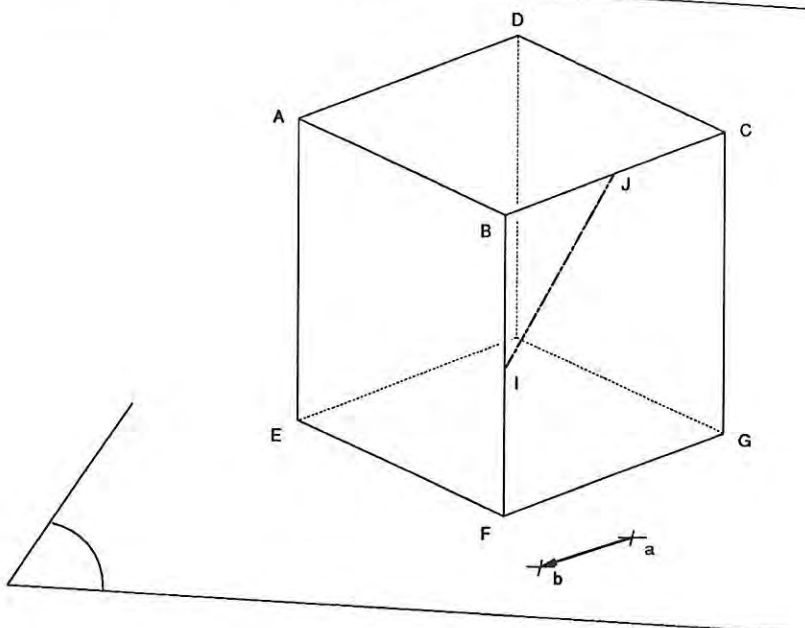
Le cube est ainsi découpé en deux parties ; applique à la partie contenant **AB** la translation de vecteur $\vec{ab}$.



Les points **I** et **J** sont les
209 milieux des arêtes **BF** et **BC** du cube **ABCDEFGH**.

On considère le plan contenant l'arête **EF** et *parallèle* au segment **IJ**. Trace l'intersection de ce plan avec la face **BCGF** ; déduis-en son intersection avec le cube. (*le plan est parallèle à IJ, qui sont les milieux des arêtes ...*)

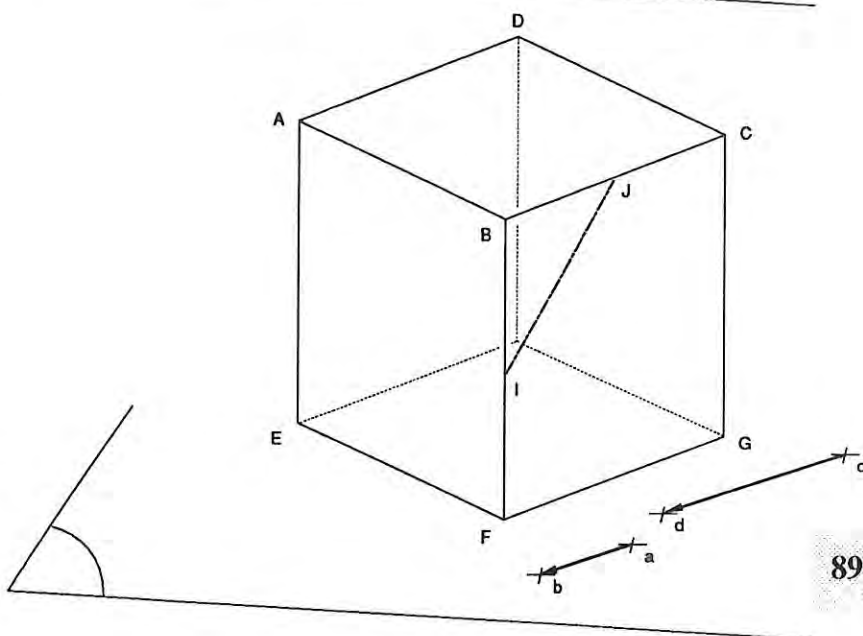
Le cube est ainsi découpé en deux parties ; applique à la partie contenant **AB** la translation de vecteur $\vec{ab}$.



La figure est la même
210 que dans les exercices précédents.

On considère le plan contenant le segment **IJ** et *parallèle* à l'arête **AB**. Et le plan parallèle à celui-ci, qui contient l'arête **EF**. Trace l'intersection de ces deux plans avec le cube. (*utilise les résultats des exercices précédents ...*)

Le cube est ainsi découpé en trois parties ; applique à la partie contenant **AB** la translation de vecteur $\vec{cd}$; et à la partie contenant **JC** la translation de vecteur $\vec{ab}$.



Place **H** (4 ; 0) et **K** (-3 ; 0) ; puis

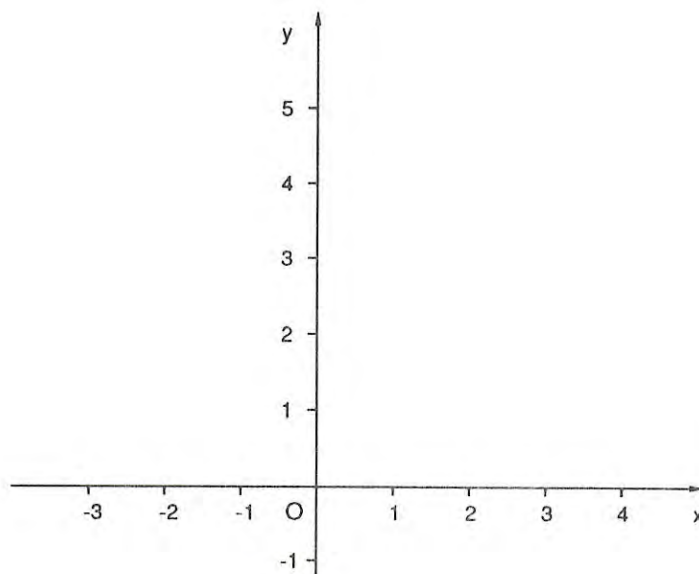
211 la droite **D** d'équation : $y = \frac{3}{4}x$.

On désigne par **A** le point de **D** qui a pour *abscisse* $x = 4$. Explique pourquoi l'angle en **O** du triangle **OHA** mesure $36,87^\circ$:

.....

On considère la **rotation** de centre **O** et d'angle 90° (*dans le sens inverse des aiguilles d'une montre*). Construis l'image **A'** du point **A** par cette rotation, puis trace l'image **D'** de la droite **D**. Quelle est l'image du triangle **OHA** ?

Quelle est l'équation de la droite **D'** ?



211 Effectue toutes les constructions demandées sur la figure ci-dessous en observant bien les consignes :

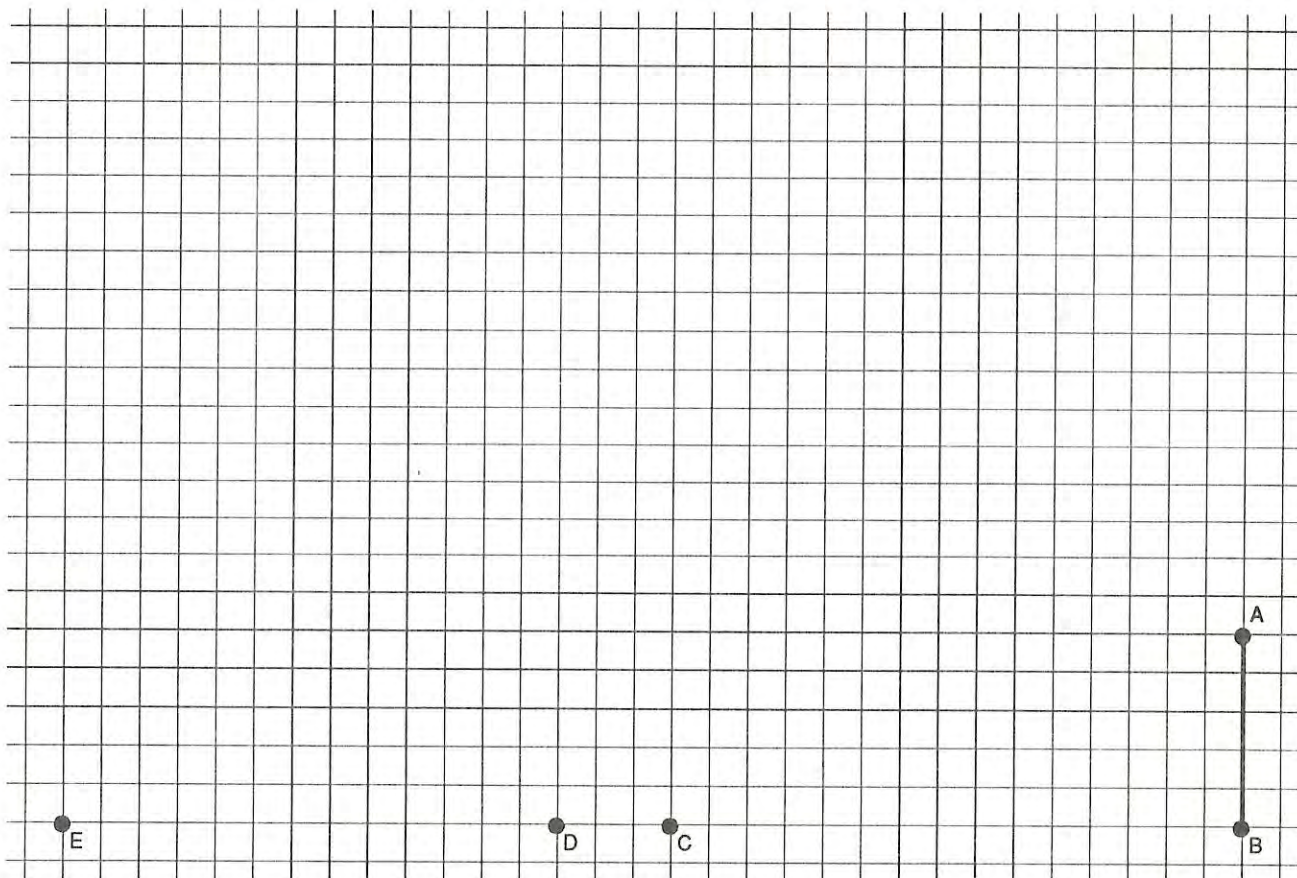
- **AF** est symétrique de **AB** par rapport à **A**,
- **CG**, **DH** et **EI** sont les images de **BF** par les translations de vecteurs $\vec{BC}$, $\vec{BD}$ et $\vec{BE}$,
- **IJ**, **HK**, **GL**, **FM** sont symétriques de **IE**, **HD**, **GC** et **FB** par rapport à la droite **IF**,
- **BN** et **BO** sont les images de **BA** et **BM** par la

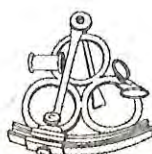
rotation de centre **B** et d'angle $\alpha = 36,87^\circ$ (*sens inverse des aiguilles d'une montre*),

— $\vec{OX}$ est l'image de $\vec{BN}$ par la translation de vecteur $\vec{BO}$,

— **Q** est le milieu de **EI** ; **IR** est l'image de **IQ** par la rotation de centre **I** et d'angle 90° (*sens inverse des aiguilles d'une montre*),

— **JS** et **YT** sont les images de **IR** par les translations de vecteurs $\vec{IJ}$ et $\vec{IS}$.



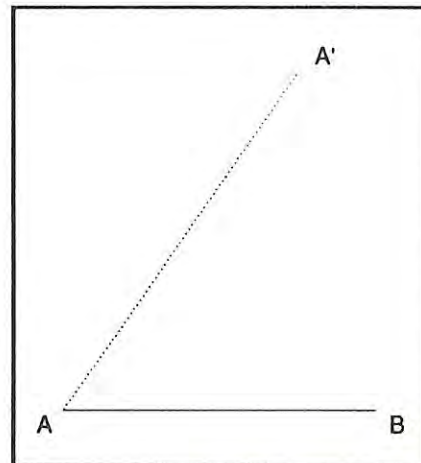
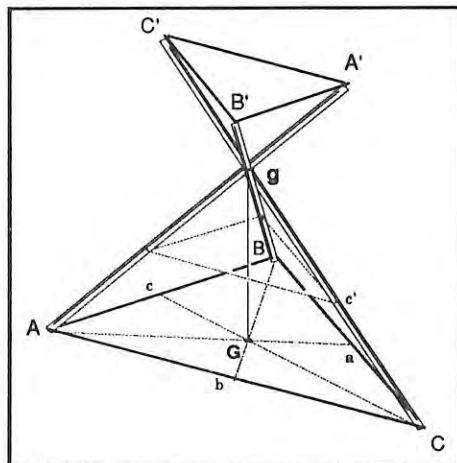


Résumé : C'est seulement sur le bateau les ramenant en France que nos héros ont découvert le moyen de parvenir au trésor d'Harcoss caché dans l'Archipel des Rascasses.

Il suffisait de comprendre, en effet, que le point **P** où *Eulerus* avait immergé le trésor n'est autre que le **centre de gravité** des triangles **ABC** et **abc**. Tu as dû trouver dans les pages précédentes une démonstration de cette propriété. Voici, pour terminer, la démonstration qui fut inventée par Leonhard, sur le pont même du bateau, le 21 mars 1896 à midi, alors qu'ils franchissaient l'équateur ...



Leonhard commença par dessiner sur le sol le triangle **ABC** et ses médianes **Aa**, **Bb**, **Cc**. Puis il prit trois baguettes de bois et les plaça de façon à former une sorte de trépied s'appuyant sur les points **A**, **B**, **C**, dont les branches se croisaient chacune **aux deux tiers** de leur longueur, en un point **g** situé exactement à la verticale du point d'intersection **G** des médianes ...



Pour bien comprendre la figure construite par Leonhard, complète le cadre de droite. Nous avons placé le côté **AB** du triangle inférieur, ainsi que la baguette qui joint le sommet **A** au sommet **A'** du tri-

angle supérieur. Commence par découper **AA'** en trois parties égales, puis place le point **g**.

Complète ensuite ta figure en plaçant tous les éléments de celle de gauche qui appartiennent au plan **ABA'** (commence

par tracer la baguette **BgB'**, de manière que **g** soit aux deux tiers de **BB'**...). Place les milieux **c**, **a'**, **b'** des segments **AB**, **Ag** et **Bg**; marque toutes les égalités entre segments. Reporte enfin **a'** et **b'** sur la figure de gauche.

Vous voyez, Mon Général, poursuivit le fidèle Leonhard. Les plans de **ABC**, de **A'B'C'** et de **a'b'c'** sont **parallèles**. Et le triangle **A'B'C'** est le **symétrique** du triangle **a'b'c'** par rapport au point **g** ...

— Bien sûr ! nota *Bourbaki*, puisque **g** est le milieu des trois segments **A'a'**, **B'b'** et **C'c'** !

Leonhard continua son raisonnement : — Je considère maintenant le point **H**, équidistant de **ABC**, et je place la quatrième baguette partant de **H** et passant par le point **g** ...

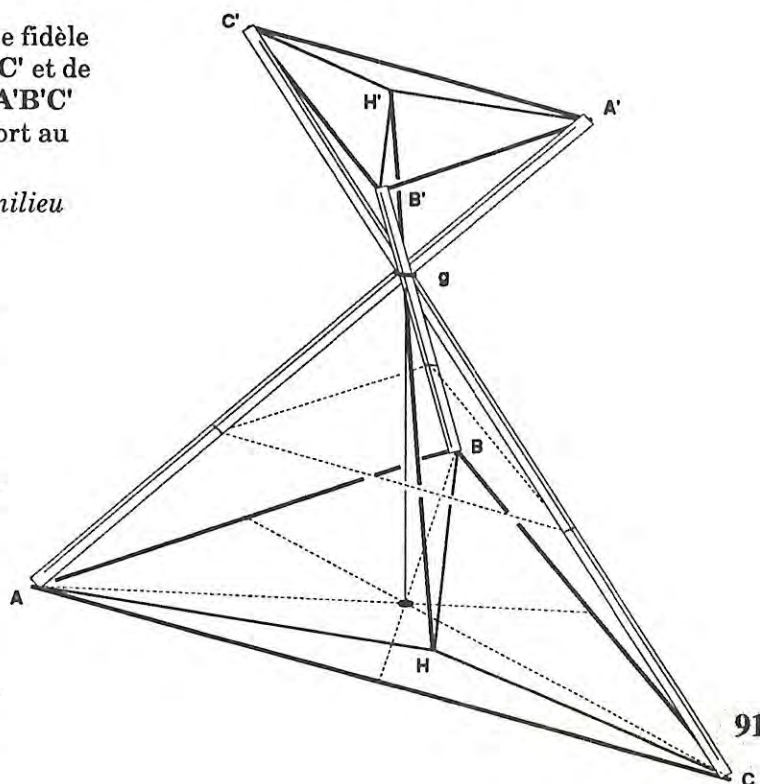
J'appelle **H'** l'extrémité de cette baguette et je suppose encore une fois que **g** est aux deux tiers de **HH'**.

En regardant dans chacun des trois plans **AHH'**, **BHH'** et **CHH'**, je peux montrer, exactement comme tout à l'heure, que :

AH = 2 A'H', **BH = 2 B'H'**, **CH = 2 C'H'**.

— Donc **H'** est équidistant de **A'**, **B'** et **C'** !

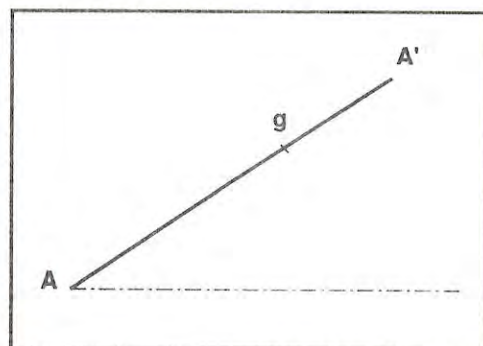
Conclut *Bourbaki* ...



C'est très bien *Leonhard*, dit *Bourbaki*, le point *g* est donc aux deux tiers du segment *HH'* joignant le point *H* équidistant de *A*, *B*, *C* et le point *H'* équidistant de *A'*, *B'*, *C'* ... Seulement ce n'est pas *H'* qui nous intéresse ! puisque c'est le point *O*, équidistant (dans le triangle inférieur) des points *a*, *b* et *c* !

Bien sûr ! Mon Général, répliqua *Leonhard* enchanté par cette remarque. Mais regardez, ajouta-t-il triomphant, regardez ... l'ombre du triangle *A'B'C'* et de *H'* sur le pont, c'est-à-dire sur le plan de *ABC* ! ...

Leonhard avait raison ... Et *Bourbaki* se demanda longtemps encore après leur retour en France, comment son fidèle aide de camp avait bien pu trouver la solution du problème légué par *Eulerus*. Longtemps il se demanda ce qu'aurait fait ce diable de *Leonhard* ... si, ce jour-là, le soleil n'avait pas été précisément ... à la verticale du bateau ! ...



Pourquoi le soleil est-il à la verticale du bateau ?

Trace l'ombre de tous les éléments sur le plan *ABC* et tu comprendras la démonstration de *Leonhard* ... (commence par utiliser le cadre ci-dessus pour t'entraîner à tracer l'ombre du segment *AA'*, puis fais de même pour les segments de la figure ci-dessous)

