

UNIVERSITE DE NANCY I

IREM de LORRAINE

**PREPARATION A
L'AGREGATION INTERNE
DE MATHEMATIQUES**

Exemples d'Analyse et Probabilité

TOME 2

UNIVERSITE DE NANCY I

IREM de LORRAINE

**PREPARATION A
L'AGREGATION INTERNE
DE MATHEMATIQUES**

Exemples d'Analyse et Probabilité

TOME 2

TABLE DES MATIERES DU TOME 2

		Pages
18	Exemples d'étude de fonctions définies par une série	144-153
19	Exemples de développements en série entière. Applications ..	154-167
20	Exemples d'emploi de séries entières ou trigonométriques pour le recherche de solutions d'équations différentielles	168-183
21	Exemples de résolution d'équations différentielles ou de systèmes différentiels	184-200
22	Exemples de recherche d'extremums d'une fonction numérique d'une ou deux variables	201-211
23	Exemples d'approximation d'un nombre réel	212-216
24 - 25	Illustrer par des exemples la modélisation probabiliste de situations concrètes. Exemples de situations menant à l'étude de variables aléatoires	217-233
26	Exemples de problèmes de dénombrement	234-251
27	Exemples d'étude de fonctions définies de diverses manières	252-255
28	Exemples de séries de Fourier, et de leurs applications	256-268
29	Exemples d'utilisation de changement de variable en analyse	269-284
Liste d'exercices n° 1 à 5		285-294
Bibliographie		295

Adresser vos remarques et commentaires à

P. RABOIN

IREM de Lorraine

- 18 -

EXEMPLES D'ETUDE DE FONCTIONS DEFINIES PAR UNE SERIE

On commence par puiser quelques exemples dans les leçons suivantes :

[1] : la fonction de BESSEL (d'indice 0) J_0 , à présenter comme la somme de la série entière obtenue dans la leçon [19], exemple [4], et on pourra aller jusqu'au DA des leçons [12], exemple [4] et [29], exemple [7].

[2] : la fonction en dents de scie h , leçon [28], exemple [1], à présenter comme
$$h(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nt)}{n} \dots$$
 jusqu'à la forme explicite, obtenue via le calcul intégral.

[3] : le $n^{\text{ième}}$ polynôme de HERMITE, H_n , ou celui de LEGENDRE, L_n , définis comme $n^{\text{ième}}$ coefficient d'une série entière (fonction génératrice φ), présentés dans les leçons [19], exemple [5] et [5], exemple [1].

On y ajoute 4 autres exemples classiques :

[4] : la fonction Theta θ de Riemann, pour laquelle on établit la relation
$$\theta(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \theta\left(\frac{1}{x}\right);$$

[5] : la fonction Zéta ξ de Dirichlet, qu'on prolonge au delà de son domaine naturel de définition ;

[6] : la fonction de Weierstrass, continue et nulle part dérivable.

[7] : la fonction ψ , dérivée logarithmique de la fonction gamma d'Euler.

Références :

[4] : le problème d'Analyse 92 ;

[5] : Titchmarsh, ch. IX ;

[6] : idem, ch. XI ;

[7] : Bourbaki FVR 2.

$$4) \quad \theta(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 x}.$$

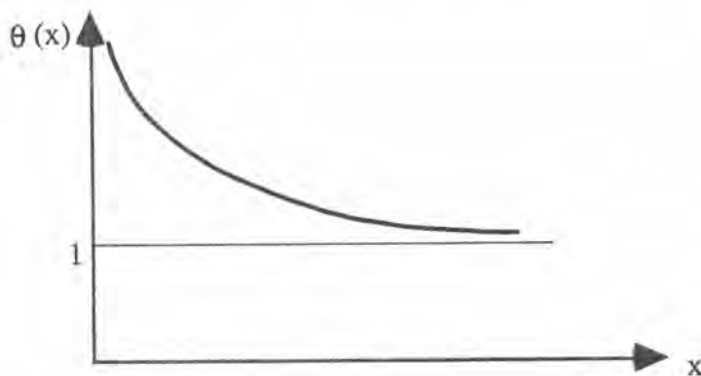
1) La série converge si $x > 0$, et diverge pour $x \leq 0$: la fonction θ est donc définie sur $]0, +\infty[$.

2) Pour $x \geq \varepsilon > 0$, $e^{-\pi n^2 x} \leq e^{-\pi n^2 \varepsilon}$ où la série de t.g. $e^{-\pi n^2 \varepsilon}$ converge : il y a donc convergence normale sur tout intervalle de la forme $[\varepsilon, +\infty[$ avec $\varepsilon > 0$ et θ est donc continue sur $]0, +\infty[$.

3) Comme $\frac{d}{dx}(e^{-\pi n^2 x}) = -\pi n^2 e^{-\pi n^2 x}$ et que la série de t.g. $\pi n^2 e^{-\pi n^2 \varepsilon}$ converge si $\varepsilon > 0$, θ est dérivable sur son domaine de définition (et décroissante) il est d'ailleurs facile de montrer que θ est en fait de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$.

4) Comme $e^{-\pi n^2 x} \leq \frac{1}{\pi n^2 x} \quad \forall n \neq 0, x > 0$, $|\theta(x) - 1| \leq \frac{1}{x} \frac{\pi}{3}$ ce qui montre que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \theta(x) = 1$.

5) Le graphe de θ a donc l'allure suivante



6) "Plus généralement", à $x > 0$ fixé, on considère la fonction

$$\varphi(y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi(n+y)^2 x}$$

φ est une fonction définie sur $\mathbb{R}$, 1-périodique, et de classe $\mathcal{C}^1$: on peut donc la développer en série de Fourier (avec le théorème de Dirichlet)

$$\varphi(y) = \sum_{v=-\infty}^{+\infty} c_v e^{2i\pi v \cdot y}$$

avec
$$c_v = \int_0^1 \varphi(t) e^{-2i\pi vt} dt = \int_0^1 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi(n+t)^2 x - 2i\pi vt} dt$$

soit, comme la série converge normalement en t sur $[0,1]$:

$$c_v = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_0^1 e^{-\pi(n+t)^2 x - 2i\pi vt} dt$$

où
$$\int_0^1 = \int_0^1 e^{-\pi(n+t)^2 x - 2i\pi v(t+n)} dt = \int_n^{n+1} e^{-\pi\theta^2 x - 2i\pi v\theta} d\theta$$

si bien que
$$c_v = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi\theta^2 x - 2i\pi v\theta} d\theta,$$

car l'intégrale est convergente (absolument).

On calcule c_v en regardant l'intégrale dans le paramètre réel v ; il est facile de justifier les opérations suivantes

$$\begin{aligned} \frac{d}{dv} c_v &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi\theta^2 x - 2i\pi v\theta} (-2i\pi\theta) d\theta \\ &= \frac{i}{x} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi v\theta} (e^{-\pi\theta^2 x})' d\theta \\ &= -\frac{i}{x} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi\theta^2 x} (-2i\pi\theta \cdot e^{-2\pi v\theta}) d\theta \\ &= -2\pi \frac{v}{x} c_v \end{aligned}$$

par quadratique, on obtient $c_v = K.e^{\frac{-\pi v^2}{x}}$ et, comme $c_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi \theta^2 x} d\theta = \frac{1}{\sqrt{x}}$, il vient

$$c_v = \frac{1}{\sqrt{x}} . e^{\frac{-\pi v^2}{x}} .$$

Par conséquent

$$\varphi(y) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} . e^{\frac{-\pi v^2}{x} + 2i\pi v y} , \forall y \in \mathbb{R}$$

ce qui donne en particulier, pour $y = 0$

$$\theta(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \theta\left(\frac{1}{x}\right) \quad \forall x > 0.$$

7) Cette formule (dite de Poisson) est à la base du théorème de l'échantillonnage de Shannon ...

$$\boxed{5} \quad \xi(x) = \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^x} .$$

1) Si $x \in \mathbb{R}$, la série converge pour $x > 1$, et diverge sinon.

2) On connaît $\xi(2p)$ pour $p \in \mathbb{N}$ (série de Fourier : formule de Parseval, et nombres de Bernoulli).

3) Pour $x > 1$, avec la décroissance de $t \rightarrow \frac{1}{t^x}$, on obtient facilement l'encadrement

$$\frac{1}{x-1} \leq \xi(x) \leq 1 + \frac{1}{x-1} .$$

$$\text{Ainsi, } \xi(x) \underset{(x \rightarrow 1+)}{\sim} \frac{1}{x-1} .$$

4) Mieux, si $f_n(x) = \frac{1}{n^x} - \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x}$, on a

$$0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x}$$

avec $\frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x} \leq \frac{1}{n(n+1)}$ pour n assez grand.

; la série de fonctions $\sum_1^\infty f_n$ converge donc normalement sur $[1, +\infty[$; sa somme f est continue sur $[1, +\infty[$, et, comme, sur $]1, +\infty[$ elle vaut

$$f(x) = \zeta(x) - \int_1^\infty \frac{dt}{t^x} = \zeta(x) - \frac{1}{x-1}$$

tandis que $f(1) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_1^N f_n(1)$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{N} - \ln(N+1) \right)$$

= C, constante d'Euler.

Il en résulte que

$$\zeta(x) - \frac{1}{x-1} \xrightarrow{(x \rightarrow 1+)} C.$$

5) $x \mapsto \frac{1}{n^x}$ est une fonction dérivable, et de dérivée $\frac{-\ln n}{n^x}$; comme la série de fonctions $\sum_1^\infty \frac{\ln n}{n^x}$ converge pour $x > 1$, et même normalement sur $[1+\varepsilon, +\infty[$ pour tout $\varepsilon > 0$, c'est que ζ est une fonction dérivable sur $]1, +\infty[$. D'ailleurs, comme

$$\frac{(-\ln n)^k}{n^{1+\varepsilon}} = o\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon/2}}\right) \quad \forall \varepsilon > 0,$$

on montrerait que ξ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur le même intervalle.

6) Pour $x = \alpha + i\beta$ complexe, la série $\sum_1^\infty \frac{1}{n^x}$ converge absolument pour $\alpha > 1$ (et même normalement sur tout demi-plan $\{\operatorname{Re}(x) \geq 1 + \varepsilon\}$, avec $\varepsilon > 0$: ξ est donc définie (et continue) sur le $\frac{1}{2}$ -plan complexe $\{\operatorname{Re}(x) > 1\}$.

7) Sur la droite limite $\{x = 1 + i\beta / \beta \in \mathbb{R}\}$, la série diverge. On le montre sur sa partie réelle

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\beta \ln n)}{n}$$

en considérant la fonction $f(t) = \frac{\cos(\beta \ln t)}{t}$, dont l'intégrale impropre $\int_1^\infty f \, dt$ diverge, car

$$\int_1^T f(t) dt = \int_0^{\ln T} \cos(\beta \theta) d\theta$$

oscille quand $T \rightarrow +\infty$.

On étudie maintenant l'écart

$$\sum_{n=1}^N f(n) - \int_1^{N+1} f(t) dt = \sum_{n=1}^N \int_n^{n+1} (f(n) - f(t)) dt$$

$$\text{Comme } |f'(t)| = \frac{-\beta}{t^2} \sin(\beta \ln t) - \frac{1}{t^2} \cos(\beta \ln t) \leq \frac{1+|\beta|}{t^2}$$

avec la formule des accroissements finis, il vient :

$$\left| \int_n^{n+1} (f(n) - f(t)) dt \right| \leq \frac{1+|\beta|}{n^2}$$

: la série de t.g. $\sum_{n=1}^{n+1} (f(n)-f(t))dt$ est absolument convergente, donc convergente et

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_1^N f(n) - \int_1^{N+1} f(t)dt \right) \text{ existe}$$

ce qui permet de conclure.

De la même façon, on montrerait que la série diverge pour $x = \alpha + i\beta$, avec $0 < \alpha < 1$.

8) Pour $x > 1$, on peut écrire que

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{2^{x-1}}\right) \xi(x) &= \left(1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \dots\right) - 2 \left(\frac{1}{2^x} + \frac{1}{4^x} + \dots\right) \\ &= 1 - \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} - \dots \end{aligned}$$

(car la série de droite est **absolument** convergente ...).

Maintenant, la série converge pour $x > 0$ (avec le critère de Leibniz des séries alternées), et on peut même montrer qu'elle converge pour $\text{Re}(x) > 0$: pour $z = \alpha + i\beta$, avec $\alpha > x > 0$, on considère une somme de Cauchy $\sum_{n=M}^{n=N} \frac{(-1)^{n-1}}{n^z}$, en la transformant avec Abel :

$$\begin{aligned} \text{Si } z = x + ih, \quad \frac{(-1)^{n-1}}{n^z} &= \frac{(-1)^{n-1}}{n^x} \cdot \frac{1}{n^{ih}} \\ &= (r_{n-1} - r_n) \cdot \frac{1}{n^h} \end{aligned}$$

$$\text{où } r_n = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p^x}.$$

Ainsi,

$$\sum_{n=M}^{n=N} \frac{(-1)^{n-1}}{n^z} = \sum_{n=M}^{n=N} r_n \left(\frac{1}{(n+1)^h} - \frac{1}{n^h} \right) + \frac{r_{M-1}}{M^h} - \frac{r_N}{(N+1)^h}$$

avec
$$\left| \frac{1}{(n+1)^h} - \frac{1}{n^h} \right| = \left| h \int_n^{n+1} \frac{du}{u^{h+1}} \right| \leq |h| \int_n^{n+1} \frac{du}{u^{\sigma+1}}$$

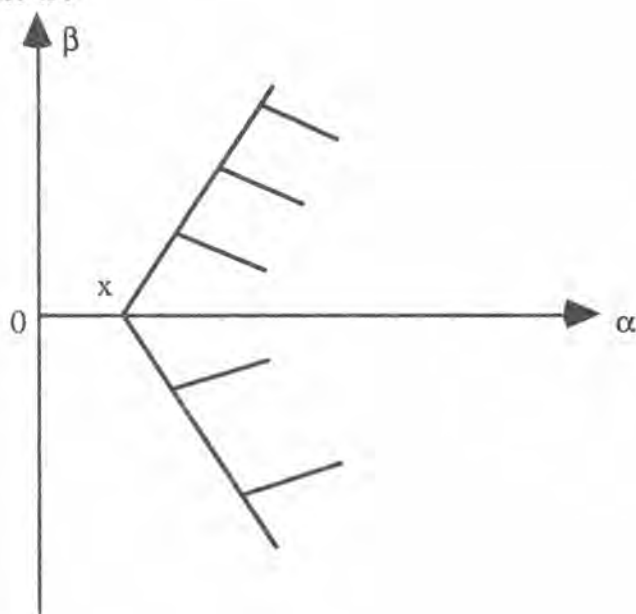
si $h = \sigma + i\beta$
$$\leq \frac{|h|}{\sigma} \left(\frac{1}{n^\sigma} - \frac{1}{(n+1)^\sigma} \right)$$

Maintenant, à $\varepsilon > 0$ donné, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que, si $n \geq N_\varepsilon$, on ait : $|r_n| \leq \varepsilon$.
Pour $M \geq N_\varepsilon$, on a donc

$$\left| \sum_M^N \frac{(-1)^{n-1}}{n^z} \right| \leq \varepsilon \cdot \frac{|h|}{\sigma} \left(\frac{1}{M^\sigma} - \frac{1}{(N+1)^\sigma} \right) + \frac{\varepsilon}{M^\sigma} + \frac{\varepsilon}{(N+1)^\sigma}$$

$$\leq \left(\frac{|h|}{\sigma} + 2 \right) \cdot \varepsilon$$

ce qui permet de montrer qu'en fait la série converge uniformément sur tout secteur de sommet x :



En conclusion, on a réussi à **prolonger** ξ sur le domaine $\{x / \operatorname{Re} x > 0 \text{ et } x \neq 1\}$.

6
$$f(x) = \sum_{n \geq 0} b^n \cos(\pi a^n x).$$

1) Si $|b| < 1$, la série converge normalement sur $\mathbb{R}$ et f est donc continue sur $\mathbb{R}$.

"Comme $\frac{d}{dx} \cos(\pi a^n x) = -\pi a^n \sin(\pi a^n x)$, si $ab > 1$ la série dérivée terme à terme diverge, ce qui peut suggérer que f n'est pas dérivable".

2) Pour $0 < b < 1$, on étudie le taux d'accroissement

$$\frac{1}{h} (f(x+h) - f(x)) = \sum_0^{\infty} b^n \frac{\cos \pi a^n (x+h) - \cos \pi a^n x}{h}$$

où $|\cos \pi a^n (x+h) - \cos \pi a^n x| = \left| -2 \sin \pi a^n \left(x + \frac{h}{2}\right) \cdot \sin \pi a^n \frac{h}{2} \right|$

$$\leq \pi a^n |h|$$

$$R_m = \sum_{n \geq m} (-1)^{\alpha_{m+1}} \frac{b^n}{h} (1 + \cos(a^{n-m} \cdot \pi \cdot \xi_m))$$

donne (comme $1 + \cos(a^{n-m} \cdot \pi \cdot \xi_m) \geq 0 \quad \forall n$)

$$|R_m| \geq \frac{b^m}{h}.$$

Par conséquent, si $ab > 1 + \frac{3}{2} \pi$,

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| &\geq \frac{(ab)^m}{1 - \xi_m} - \pi \frac{(ab)}{ab-1} \\ &\geq \left(\frac{2}{3} - \frac{\pi}{ab-1} \right) (ab)^m \end{aligned}$$

ce qui montre que $\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| \rightarrow +\infty$
 $\left(h = \frac{1 - \xi_n}{a^n} \xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} 0 \right)$

$$\boxed{7} \quad \psi(x) = \sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+x} \right)$$

1) La série converge absolument sur $\mathbb{K} \setminus \mathbb{N}$ et, il est facile de voir qu'il y a convergence normale sur tout domaine de la forme

$$D_{\varepsilon, X} = \{ z \in \mathbb{K} \mid |z| \leq X \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, |z+n| \geq \varepsilon \}$$

avec $0 < \varepsilon < X$: ψ est donc une fonction définie et continue sur $\mathbb{K} \setminus \mathbb{N}$.

2) Comme $\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+x} \right)' = \frac{1}{(n+x)^2}$... ψ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$, et croissante (par morceaux) ; elle est même $\mathcal{C}^\infty$ sur son domaine de définition.

$$3) \quad \psi(x+1) = \psi(x) + \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{n=N} \left(\frac{1}{n+x} - \frac{1}{n+x+1} \right)$$

$$= \psi(x) + \frac{1}{x}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}.$$

4) Si f est une fonction croissante sur $]0; +\infty[$ et telle que $f(x+1) = f(x) + \frac{1}{x}$, $\forall x > 0$ la fonction $h = f - \psi$ est telle que

$$\forall x > 0, h(x+1) = h(x).$$

$$\text{On a } f(x+n) = f(x) + \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{x+m} \text{ et, en particulier}$$

$$f(1+n) = f(1) + H_n, \text{ où } H_n = \sum_{m=1}^n \frac{1}{m}.$$

De plus, pour $x \in]0, 1]$,

$$f(n) \leq f(x+n) \leq f(1+n) \quad s$$

d'après la croissance de f , ce qui entraîne que

$$f(1) - \frac{1}{n} \leq f(x) + \sum_{m=0}^{n-1} \left(\frac{1}{x+m} - \frac{1}{1+m} \right) \leq f(1)$$

et, par conséquent, en faisant $n \rightarrow \infty$

$$f = \psi + C^{te}.$$

- 19 -

EXEMPLES DE DEVELOPPEMENTS EN SERIE ENTIERE. APPLICATIONS

Les séries entières sont un outil d'intégration de certaines équations différentielles (linéaires, d'ordre 2, à coefficients analytiques, dans les exemples cités : **théorème des séries majorantes de Cauchy** [1], **théorème de Fuchs** [2] ; l'exemple classique des fonctions de Bessel est abordé dans [4] ; on trouvera d'autres exemples dans la leçon : Exemples d'emploi de séries entières ou trigonométriques pour la recherche de solutions d'équations différentielles. On citera en retour que certains développements en série entière s'obtiennent via une équation différentielle par cette **technique d'identification**, avec l'exemple classique $(1+z)^\alpha$ de la série du binôme.

Elles peuvent aussi servir à **transformer une intégrale** (qui dépend d'un paramètre, pour en étudier ensuite le comportement) : intégrale elliptique [3], transformée de Laplace de la fonction de Bessel J_0 dans [4].

Avec la **notion de fonction génératrice**, elles servent à définir certaines fonctions spéciales (polynômes orthogonaux, fonctions de Bessel ...), pour en découvrir, par exemple, des propriétés récurrentes. Avec [5], on a choisi la fonction de Hermite ; la leçon Exemples de polynômes orthogonaux en contient d'autres (polynômes de Legendre, Laguerre ...).

Du même point de vue, elles permettent de résoudre le problème initial de certaines **équations aux différences** [6], et on signale comment son usage a été systématisé par les analystes du signal numérique, avec la notion de "transformée en z " [7].

La multiplication des séries entières aidant, la même notion de fonction génératrice permet de résoudre certaines **équations récurrentes non linéaires**, qui tirent leur origine de question de dénombrement, ou de probabilité. On a choisi de présenter l'exemple [8], classique, des nombres de Catalan, en montrant leur lien avec le développement de $\frac{1}{\pi}$ (formule de Ramanujan), dont l'établissement est une autre illustration des manipulations intégrales-séries entières. On cite au passage l'application des séries entières dans l'**approximation des réels**, dont la formule de Ramanujan est un exemple, en renvoyant à la leçon d'Exemples correspondants. [9] est un autre

exemple classique de dénombrement ; on en trouvera d'autres dans la leçon d'exemples du même titre.

Enfin, [10] illustre la notion de **fonction génératrice en probabilité**.

Références

- [1], [2] voir leçon correspondante ;
- [3] Arnold ;
- [4] Polya-Szegő 1 I Ab. Kap 4 n 97 ; Dieudonné ;
- [5] Wittaker ;
- [6] Bakhalov ;
- [8], [9] Polya-Szegő 1 I Ab. Kap 1
- [10] Feller 1, ch. XI.

$$[3] \quad I(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}} .$$

- 1) L'intégrale est définie pour $|k| < 1$; la fonction est paire.
On a rencontré I dans la leçon intégrale dépendant d'un paramètre [4], où son origine physique a été indiquée.

- 2) Comme

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}} = 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{(2n)!}{(2^n \cdot n!)^2} \sin^{2n} \theta k^{2n}$$

et que le rayon de convergence de la série entière du binôme $(1-z)^{-1/2}$ vaut 1, à $k \in [0,1[$ fixé, la série de fonctions en θ converge normalement sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$, ce qui autorise l'intégration terme à terme

$$I(k) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2^{2n}} C_{2n}^n k^{2n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} \theta d\theta$$

qui donne, compte tenu de la valeur de l'intégrale de Wallis

$$J_{2n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} \theta \, d\theta = \frac{1}{2^{2n}} C_{2n}^n \frac{\pi}{2}.$$

3) Le développement en série entière de I

$$I(k) = \frac{\pi}{2} \sum_{n \geq 0} (C_{2n}^n)^2 \left(\frac{k}{2}\right)^{2n} \quad (C_0^0 = 1)$$

de rayon de convergence 1, comme le montre d'Alembert.

4) Il est bien connu que $J_n \underset{(+\infty)}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ ($n J_n = (n-1)J_{n-2}$; $(n+1)J_n J_{n+1} = J_0 J_1 = \frac{\pi}{2}$; $\frac{n+1}{n+2} = \frac{J_{n+2}}{J_n} \leq \frac{J_{n+1}}{J_n} \leq 1$) et, par conséquent $\frac{1}{2^{2n}} (C_{2n}^n)^2 \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{1}{\pi n}$.

En particulier, la série entière diverge en $k = 1$.

On sait alors (exercice 7) que

$$I(k) \underset{(1-)}{\sim} \frac{\pi}{2} \left(1 + \sum_{n \geq 1} \frac{k^{2n}}{\pi^n}\right)$$

$$\underset{(1-)}{\sim} -\frac{1}{2} \ln(1-k^2).$$

5) Pour ce qui concerne le comportement de la série entière aux autres points du bord, comme $\left(\frac{1}{2^{2n}} C_{2n}^n = J_{2n}\right)$ tend vers 0 en décroissant, on sait (exercice 1) que la série converge sur $\partial D(0;1) \setminus \{\pm 1\}$.

6) Interprétons physiquement les résultats obtenus :

$T(k = \sin \frac{\alpha}{2}) = 4 \cdot I(k)$ est la période des oscillations d'un pendule ($\ddot{\theta} + \sin \theta = 0$)

qui obéit à la condition initiale $\theta(0) = \alpha \in]-\pi, +\pi[$, $\dot{\theta}(0) = 0$: pour $|\alpha| \ll 1$, $T(k) \approx 2\pi$ et, lorsque $\alpha \uparrow \pi$, $T(k) \uparrow +\infty$ logarithmiquement.

C'est aussi le comportement du potentiel newtonien d'une circonférence lorsqu'on s'approche du bord.

4) J_0 et $\mathcal{L} J_0$.

1) L'équation différentielle de Bessel d'indice 0

$$(B_0) \quad t\ddot{x} + \dot{x} + tx = 0$$

possède comme solution développable en série entière en 0 la fonction

$$J_0(t) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{\left(\frac{t}{2}\right)^{2n}}{(n!)^2}, \text{ de rayon de convergence } \infty, \text{ appelée fonction}$$

de Bessel d'indice 0.

2) Comme $\frac{1}{2^{2n}} C_{2n}^n \lesssim \frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{(n!)^2} \lesssim \frac{2^{2n}}{(2n)!}$ et, par conséquent

$$|J_0(t)| \lesssim \sum_{n \geq 0} \frac{t^{2n}}{(2n)!} \leq e^t$$

en particulier, l'intégrale $X(p) = \int_0^\infty e^{-pt} J_0(t) dt$ converge absolument si $p > 1$ (plus généralement $\operatorname{Re}(p) > 1$).

3) Comme $J_0(0) = 1, \dot{J}_0(t) \subset p X(p) - 1$ et, comme $\dot{J}_0(0) = 0, \ddot{J}_0(t) \subset p(p X(p) - 1)$ (voir le problème d'Analyse 93).

D'autre part, comme

$$\left| \frac{\partial}{\partial p} (e^{-tp} J_0(t)) = -e^{-tp} t J_0(t) \right| \lesssim t e^{-(p-1)t} \\ \lesssim e^{-\epsilon/2 t}$$

pour $t \geq 0$ et $p \geq 1 + \epsilon$, il est facile de justifier la dérivation sous le signe $\int_0^{+\infty}$, pour

montrer que $-t J_0(t) \subset X'(p)$.

On opère de même pour X'' , et on montre que l'équation différentielle (B_0) se transforme, avec Laplace, en

$$(\mathcal{L} B_0) \quad (p^2+1)X'(p) + p X(p) = 0$$

qui s'intègre en séparant les variables, pour donner

$$J_0(t) \subset X(p) = \frac{1}{\sqrt{p^2+1}}.$$

4) Ce qu'on peut retrouver à l'aide d'une intégration terme à terme

$$\begin{aligned} X(p) &= \int_0^{+\infty} e^{-tp} \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{(t/2)^{2n}}{(n!)^2} dt \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(n!)^2 2^{2n}} \int_0^{\infty} e^{-tp} t^{2n} dt \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(n!)^2 2^{2n}} \cdot \frac{(2n)!}{p^{2n+1}} \\ &= \frac{1}{p} \sum_{n \geq 0} (-1)^n C_{2n}^n \left(\frac{1}{p^2}\right)^n \end{aligned}$$

où l'on reconnaît le résultat précédent. On justifie facilement l'opération par le théorème de convergence dominée.

5) On signale qu'il est possible de reconstituer $J_0(t)$ à partir de $X(p)$ (transformation de Laplace inverse) :

$$J_0(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(t \sin \theta) d\theta.$$

L'intégrale de droite a été étudiée dans la leçon Intégrales dépendant d'un paramètre : une façon de vérifier la formule précédente consiste à utiliser le théorème d'unicité du problème de la condition initiale $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 0$, une autre est de développer $\cos$ en série entière, d'intégrer terme à terme (avec Wallis) ...

Cette formule de représentation intégrale de J_0 est un cas particulier de la représentation de J_n pour $n \in \mathbb{N}$, qui montre tout l'intérêt des fonctions de Bessel en

modulation de fréquence (voir Leçon Séries de Fourier). (formule intégrale de Sommerfeld).

$$\boxed{5} \quad \varphi(t,x) = e^{-t^2+2tx}$$

$$\text{ou} \quad \varphi(t,x) = e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})} \quad \text{ou} \quad \varphi(t,x) = \frac{1}{\sqrt{1-2tx+x^2}}.$$

On traite la première fonction génératrice :

b1) à $x \in \mathbb{R}$ donné, $\varphi(.,x)$ est développable en série entière en 0, comme produit de 2 séries entières de rayon de convergence ∞ :

$$e^{-t^2} e^{2tx} = \sum_0^{\infty} \frac{(-t^2)^n}{n!} \sum_0^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!} t^n$$

On l'écrit

$$\varphi(t,x) = \sum_{n \geq 0} H_n(x) \frac{t^n}{n!}$$

où la règle de multiplication des séries entières donne la forme développée suivante de

$$H_n(x) = (2x)^n - \frac{n(n-1)}{1!} (2x)^{n-1} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!} (2x)^{n-4} - \dots$$

qui montre que $H_n \in \mathbb{R}_n[X]$ ($n^{\text{ième}}$ polynôme de Hermite).

2) On a aussi, par conséquent

$$H_n(x) = \left. \frac{\partial^n}{\partial t^n} \right|_{t=0} \varphi(.,x) = e^{x^2} \left. \frac{\partial^n}{\partial t^n} \right|_{t=0} e^{-(t-x)^2} = e^{x^2} (-1)^n (e^{-x^2})^n$$

(poser $t = x - u$).

3) On peut **découvrir** des relations liant les polynômes H_n grâce à φ .

Par exemple

$$i) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x}(t,x) = 2t \varphi(t,x)$$

se lit
$$\sum_{n \geq 0} \frac{H'_n(x)}{n!} t^n = \sum_{n \geq 0} \frac{H_n(x)}{n!} 2t^{n+1}$$

et donne, par identification $H'_n = 2n H_{n-1}$

ii)
$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, x) = -2(t-x)\varphi(t, x)$$

donne, avec le même procédé

$$H_{n+1}(x) - 2x H_n(x) + 2n H_{n-1}(x) = 0$$

L'opération ii) est facile à justifier, puisqu'il s'agit d'une dérivation terme à terme dans le disque de convergence ; il n'en est pas de même de i), qu'il est plus commode de justifier après coup, car

$$\begin{aligned} H'_n(x) &= (-1)^n (2x e^{x^2})^n + e^{x^2} (e^{x^2})^{n+1} \\ &= 2x H_n(x) - H_{n+1}(x) \end{aligned}$$

donne i), avec ii).

4) On renvoie à la leçon Polynômes orthogonaux pour les applications ; par exemple, le nombre d'involutions d'un ensemble à $2n$ éléments est donné par $2^{-n} H_{2n} \left(\frac{i}{\sqrt{2}} \right)$.

6 Equations aux différences finies ...

1) On commence par une équation linéaire à coefficients constants, avec condition initiale :

$$\begin{cases} x_{n+2} + 2x_{n+1} + x_n = 1 \\ x_0 = 1, x_1 = -1 \end{cases}$$

qu'on sait résoudre par la technique de l'équation résolvante, qui consiste à chercher, pour commencer, une solution particulière de l'équation sans second membre

$$(2) \quad x_{n+2} + 2x_{n+1} + x_n = 0$$

sous la forme $x_n = p^n$, p devant par conséquent être tel que $p^2+2p+1 = 0 : p = -1$ est racine double et la solution générale de (2) s'écrit donc

$$(-1)^n(A+Bn) \text{ avec } A, B \in \mathbb{R}.$$

(raisonner comme dans le phénomène de résonance dans les équations différentielles).

On peut ensuite développer la technique de variation des constantes $A = A_n$, $B = B_n \dots$ ou bien, plus simplement ici, observer que la constante $\frac{1}{4}$ est une solution particulière de l'équation avec second membre ; en posant

$$x_n = \frac{1}{4} + (-1)^n(A+Bn)$$

2) On peut aussi introduire la fonction génératrice

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} x_n z^n$$

qui, pour l'instant, est une série formelle, et constater que

$$(z^2+2z+1)f(z)-2z-(1-z) = \sum_{n=2}^{\infty} z^n \cdot (1+z)$$

en multipliant z^{n+2} l'équation, et en sommant sur n , ce qui donne

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(1-z)(1+z)^2} \\ &= \frac{1/4}{1-z} + \frac{1/2}{(1+z)^2} + \frac{1/4}{1+z} \end{aligned}$$

fonction effectivement développable en série entière de rayon de convergence $R = 1$

$$f(z) = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} z^n + \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n + \frac{1}{2} \left(- \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n z^{n-1} \right)$$

ce qui donne bien

$$x_n = \frac{1}{4} + \frac{(-1)^n}{4} + \frac{(-1)^n}{2} (n+1) = \frac{1}{4} + \frac{(-1)^n}{4} (2n+3).$$

3) On fera le rapprochement avec $\mathcal{L}$ pour les équations différentielles linéaires à coefficients constants ; l'intérêt serait faible, par rapport à la solution 1), si l'usage de ce procédé n'avait été systématisé en théorie du signal numérique, sous le nom de transformée en z : étant donné une suite $x = (x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, on peut associer sous certaines conditions de croissance, la série

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{x_n}{z^n} = Z(x)(z) \dots$$

7 ... suite

1) Le recours aux fonctions entières paraît plus convainquant sur une équation aux différences linéaires à coefficients variables, comme

$$\begin{cases} x_{n+2} = x_{n+1} + (n+1)x_n \\ x_0 = x_1 = 1 \end{cases}$$

où il s'avère plus intéressant d'introduire la "fonction génératrice exponentielle"

$$g(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{x_n}{n!} z^n$$

car, en multipliant par $\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}$, puis en sommant sur $n \geq 0$, on obtient

$$\frac{d}{dz} (g(z)-1-z) = (g(z)-1)+z g(z)$$

soit l'équation différentielle aux variables séparables

$$g'(z) = (1+z)g(z)$$

de solution $g(z) = \exp\left(z + \frac{z^2}{2}\right)$, compte tenu du fait que $g(0) = 0$.

On fera le lien avec la fonction génératrice φ de l'exemple 5 pour montrer que

$$x_n = \left(\frac{-i}{\sqrt{2}}\right)^n H_n \left(\frac{i}{\sqrt{2}}\right)$$

où H_n est le $n^{\text{ième}}$ polynôme de Hermite. On fera le lien avec [5] 3) ii).

2) L'équation récurrente.

$$\begin{aligned} \boxed{8} \quad c_n &= c_1 c_{n-1} + c_2 c_{n-2} + \dots + c_{n-1} c_1, \quad n \geq 2 \\ c_1 &= 1 \end{aligned}$$

se rencontre dans de nombreuses questions de dénombrement (nombre de triangulations d'un polygone convexe à $(n+1)$ sommets, de façon de disposer les parenthèses d'un produit de n termes ...) ou de probabilité (probabilité du premier retour à 0 dans une marche aléatoire ...);

on renvoie aux leçons correspondantes.

3) Si $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n = z + z^2 + \dots$ admet un rayon de convergence > 0 , la relation se lit

$$f^2(z) = f(z) - z$$

si bien que $f(z) = \frac{1}{2} (1 - \sqrt{1-4z})$, $|z| < 4$ convient. La formule du binôme conduit alors à la solution :

$$c_n = \frac{1}{n} C_{2(n-1)}^{n-1}$$

appelé $n^{\text{ième}}$ nombre de Catalan.

4) que des manipulations intégrales-séries entières permettent de relier au nombre π :

$$\int_0^x t \sqrt{1-t^2} dt = \frac{1}{3} (1 - (1-x^2)^{3/2})$$

peut s'obtenir aussi, en développant $\sqrt{1-t^2}$ avec le binôme et en intégrant terme à terme, et pour $0 < x < 1$, comme

$$\frac{x^2}{2} - \sum_{n \geq 1} \frac{C_{2n}^n}{2^{2n}} \frac{x^{2(n+1)}}{(2n-1)(2n+2)}$$

Maintenant, le théorème d'Abel permet de faire $x = 1$ dans la relation obtenue, poser $x = \sin \theta$, et intégrer terme à terme sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ sans difficulté :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3} (1 - \cos^3 \theta) d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta d\theta - \sum_{n \geq 1} \frac{C_{2n}^n}{2^{2n}} \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2(n+1)} \theta d\theta}{(2n-1)(2n+2)}$$

et avec l'éternel Wallis, on obtient la formule de développement de $\frac{1}{\pi}$ de Ramanujan :

$$\frac{1}{\pi} = \frac{3}{16} + \frac{9}{4} \sum_{n \geq 1} \left(\frac{C_{2(n-1)}^{n-1}}{n} \right)^2 \frac{4n^2 - 1}{2^{4n(n+1)^2}} .$$

9 Calcul du nombre de solutions entières de $x+2y+3z = n \in \mathbb{N}$ donné.

1) Si $c_n = \text{card}\{(x,y,z) \in \mathbb{N}^3 / x+2y+3z = n\}$ pour $n \in \mathbb{N}$, et d'après la multiplication des séries entières,

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} c_n z^n = \frac{1}{1-z} \times \frac{1}{1-z^2} \times \frac{1}{1-z^3}, \quad |z| < 1.$$

2) Le développement en série entière de f s'obtient en décomposant en éléments simples dans $\mathbb{K}$

$$f(z) = \frac{1/6}{(1-z)^3} + \frac{1/4}{(1-z)^2} + \frac{17/72}{(1-z)} + \frac{1/8}{(1+z)} + \frac{1/9}{1-jz} + \frac{1/9}{1-j^2z}$$

et en utilisant la série géométrique et ses dérivées :

$$c_n = \frac{(n+3)^2}{12} - \frac{7}{72} + \frac{(-1)^n}{8} + \frac{2}{9} \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right).$$

3) Et comme

$$\left| -\frac{7}{72} + \frac{(-1)^n}{8} + \frac{2}{9} \cos \frac{2n\pi}{3} \right| \leq \frac{32}{72} < \frac{1}{2}$$

c_n n'est autre que l'entier le plus proche de $\frac{(n+3)^2}{12}$.

10 $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$

X_i VA indépendantes : $\Omega \rightarrow \{1, 2, \dots, a\}$ de même loi $P(X = i) = \frac{1}{a}$,
 $i = 1, 2, \dots, a$ détermination de la loi de S_n .

1) On introduit la fonction génératrice

$$G_X(z) = \sum_{j=1}^a P(X = j) z^j = \frac{1}{a} z \frac{1-z^a}{1-z}, \quad |z| < 1$$

le fait que les VA soient indépendantes se traduit par $G_{S_n} = (G_X)^n$

(pour 2 VA X et Y , $\{X+Y=r\} = \bigcup_0^r \{X=j, Y=r-j\}$)

$$\text{et } P(X+Y=r) = \sum_0^r P(X=j).P(Y=r-j)$$

et la règle de multiplication de 2 séries entières permet de conclure).

2) Par conséquent $G_{S_n}(z) = \frac{1}{a^n} z^n \frac{(1-z^a)^n}{(1-z)^n}$ et il s'agit de développer G_{S_n} en série entière :

$$(1-z^a)^n = \sum_{p=0}^n (-1)^p C_n^p z^{pa} \text{ avec Newton}$$

$$\frac{(n-1)!}{(1-z)^n} = \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left(\frac{1}{1-z} \right) = \sum_{p \geq n-1} \frac{p!}{(p-n+1)!} z^{p-n+1}$$

donnent $P(S_n = j) = \frac{1}{a^n} \sum_{v \geq 0} (-1)^v C_n^v C_{j-av-n}^{n-1}.$

En complément à la leçon Série entière

1 Si la suite $(c_n)_{n \geq 0}$ tend vers 0 en décroissant, et si la série $\sum_{n \geq 0} c_n$ diverge, alors $R = 1$ et la série entière converge en tout point de $\partial D(0;1) \setminus \{1\}$.

Réf. : Dieudonné ch. VI.

2 1) Soient $(a_n), (b_n)$ deux suites complexes telles que :

a) la suite $\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{p=1}^n a_p \right)_{n \geq 1}$ est bornée.

b) la série $\sum_{n \geq 0} |b_{n+1} - b_n| \sqrt{n}$ converge.

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} b_n = 0$

alors, la série $\sum_{n \geq 0} a_n b_n$ converge.

2) La série entière $\sum_{n \geq 1} (-1)^{[\sqrt{n}]} \frac{z^n}{n}$ possède $R = 1$ comme rayon de convergence ; elle converge en tout point du cercle de convergence, où elle diverge absolument.

Réf. : Dieudonné ch. VI.

3 Si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ admet $R = 1$ comme rayon de convergence, si $c_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ et

si $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \ell$ existe, alors $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \ell$.

Réf. : Titchmarsh 12.1

[4] Si $f(z) = \sum_0^{\infty} c_n z^n$ pour $|z| < R$ avec $R > 0$, pour tout $r \in [0, R[$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$|c_n| \leq \frac{1}{r^n} \sup_{|z|=r} |f(z)|.$$

Réf. : Titchmarsh 2.5.

[5] $f(x) = \sum_0^{\infty} e^{-n} \cos(n^2 x)$ est $\mathcal{C}^{\infty}$ sur $\mathbb{R}$, et sa série de Taylor en 0 a un rayon de convergence nul.

Réf. : Dieudonné ch. VI.

$$[6] \quad \text{si } f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases},$$

la série de Taylor de f en 0 converge vers 0 sur $\mathbb{R}$.

Réf. : Dieudonné ch. VI.

[7] Si $f(z) = \sum_0^{\infty} a_n z^n$, $g(z) = \sum_0^{\infty} b_n z^n$ pour $|z| < 1$ avec $a_n > 0$, $b_n > 0$ et les séries divergentes en $z = 1$, si $a_n \underset{(+\infty)}{\sim} b_n$, alors $f(x) \underset{(-1)}{\sim} g(x)$.

Réf. : Titchmarsh 7.5.

[8] Si $f(z) = \sum_0^{\infty} c_n z^n$ $|z| < R$, si $c_0 \neq 0$, alors $\frac{1}{f}$ est développable en série entière en 0.

- 20 -

EXEMPLES D'EMPLOI DE SERIES ENTIERES OU TRIGONOMETRIQUES POUR LA RECHERCHE DE SOLUTIONS D'EQUATIONS DIFFERENTIELLES

Le théorème de Cauchy (- Fuchs) explique que la solution du problème de la condition initiale

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}} = \vec{f}(t, \vec{x}) \\ \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n \text{ donné} \end{cases}$$

où le second membre f est développable en série entière en $(t_0, \vec{x}_0)$, est elle-même développable en série entière en t_0 . La démonstration est basée sur la **méthode des séries majorantes**. On se contente d'établir le théorème pour une équation différentielle linéaire sans second membre et d'ordre 2 :

$$(1) \quad y'' + ay' + by = 0$$

où on suppose par conséquent que

$$a(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n \text{ et } b(x) = \sum_{n \geq 0} b_n x^n$$

pour $|x| < R$, avec $R > 0$. Cela permet en effet de rappeler le **principe de la recherche de y** , qui se fait en **deux étapes** :

1) On commence par chercher une solution série formelle $y(x) = \sum_{n \geq 0} c_n x^n$ par la

technique d'identification (de Cauchy), qui conduit ici à la relation récurrente

$$(n+2)(n+1)c_{n+2} = - \sum_{p=0}^{p=n} (p+1)c_{p+1} a_{n-p} - \sum_{p=0}^{p=n} c_p b_{n-p}$$

valable pour tout $n \geq 0$.

2) On montre ensuite que la série obtenue possède un rayon de convergence positif : en pratique, on utilise le critère de d'Alembert, et on cherche à expliciter c_n .

Pour montrer comment conclure en général, on rappelle que, pour tout $r \in]0, R[$, il existe un nombre positif M tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$|a_n|, |b_n| \leq \frac{M}{r^n}$$

(**inégalités de Cauchy**, démontrées dans les exercices de la leçon Série Entière). La relation de récurrence permet alors de montrer que, si $0 < r$ est assez petit, il existe un nombre C positif tel que, pour tout n dans $\mathbb{N}$, on ait

$$|c_n| \leq \frac{C}{r^n}.$$

En effet, en supposant la propriété vraie jusqu'au rang $(n+1)$, il viendra

$$(n+2)(n+1)|c_{n+2}| \leq \frac{MC}{r^{n+1}} \frac{(n+1)(n+2)}{2} + \frac{MC}{r^n} (n+1)$$

d'où

$$|c_{n+2}| \leq \frac{MC}{r^{n+2}} \left(\frac{r}{2} + \frac{r^2}{n+2} \right)$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{C}{r^{n+2}} Mr \\ &\leq \frac{C}{r^{n+2}} \end{aligned}$$

si $0 < r < 1$.

3) Les calculs sont donc justifiés, par le **théorème de dérivation terme à terme dans l'intervalle $] -r, +r[$** .

Remarque : Pour l'équation différentielle

$$(x-1)(2x-1)y'' + 2xy' - 2y = 0$$

on a $R = \frac{1}{2}$; cependant $y(x) = \frac{1}{1-x}$ est une solution pour laquelle $r = 1 > R$.

Le théorème de Cauchy explique pourquoi, en particulier, les équations différentielles linéaires (1) à coefficients polynomiaux ont toutes leurs solutions développables en séries entières. C'est le cas des exemples [1], [2] et [3] (équation d'Airy). On donne, avec [4], un exemple non linéaire.

L'équation différentielle d'Euler d'ordre 2

$$x^2 y'' + axy' + by = 0 \text{ avec } a, b \in \mathbb{R}$$

s'intègre, sur $]0, +\infty[$, par le changement de variable $x = e^t$ qui la transforme dans l'équation différentielle linéaire à coefficients constants

$$\ddot{z} + (a-1)\dot{z} + bz = 0.$$

La résolution de cette dernière va permettre d'appréhender certains des phénomènes qui peuvent se produire lorsque les coefficients $a(x)$ et $b(x)$ de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$ sont développables en série entière sur un disque pointé

$$D^*(0, R) = \{z \in \mathbb{K} / 0 < |z| < R\}.$$

On prend pour cela **quelques cas typiques** :

- si $a = 4$, $b = 2$, on obtient $(p+1)(p+2) = 0$ comme équation caractéristique, ce qui conduit à la solution générale $z(t) = Ae^{-t} + Be^{-2t}$ de l'équation transformée, donc à la solution générale

$$y(x) = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2}, \quad A, B \in \mathbb{R} \text{ sur } \mathbb{R}^* ;$$

- si $a = 3$, $b = 1$, on obtient $y(x) = \frac{1}{x} (A + B \ln(x))$, solution seulement valable sur $]0, +\infty[$;

- si $a = \frac{3}{2}$, $b = \frac{1}{2}$, on est conduit à prendre

$$y(x) = \frac{A}{\sqrt{x}} + \frac{B}{x} \text{ sur }]0, +\infty[.$$

En tous cas, il existe une solution y_1 de la forme $y_1(x) = x^r$ où l'exposant r s'obtient, après substitution dans l'équation d'Euler, comme solution de **l'équation résolvante**

$$r(r-1) + ar + b = 0.$$

Plus généralement, le **théorème de Fuchs (- Frobenius)** affirme que, si $x.a(x)$ et $x^2b(x)$ sont développables en série entière, alors, l'équation différentielle

$$y'' + ay' + by = 0$$

possède un système fondamental de solutions de la forme

$$y_1(x) = x^{r_1}\varphi(x) \text{ et } y_2(x) = x^{r_2}\psi(x)$$

ou
$$y_1(x) = x^r\varphi(x) \text{ et } y_2(x) = y_1(x)(A \ln x + \psi(x))$$

où $A \in \mathbb{K}$, φ et ψ sont développables en série entière.

La recherche pratique de (y_1, y_2) repose, de nouveau, sur une technique d'identification, qu'on expose dans l'exemple [5]. L'exemple [6], très classique, de l'équation de Bessel relève aussi de ce théorème, l'introduction du paramètre ν permettant de mettre en évidence les deux comportements possibles des solutions.

L'équation différentielle

$$4x^3y'' + 6x^2y' + y = 0$$

ne relève pas du théorème de Fuchs ; la solution générale s'écrit $A \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) + B \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ et il est donc exclus de l'atteindre par un développement en série entière !

Dans le cas des hypothèses de Fuchs, on dit que 0 est un **point singulier régulier** ; ici, on parle de **singularité essentielle**.

Une autre remarque : l'équation différentielle :

$$x^2y'' + (1+3x)y' + y = 0$$

possède la solution série formelle $\sum_{n \geq 0} (-1)^n n! x^n$, de rayon de convergence $R = 0$; il

s'agit en fait d'un **développement asymptotique ...**

Un **théorème de Poincaré** affirme qu'il est possible de résoudre le problème de condition initiale sous la forme d'une série entière de la position, ou d'un paramètre dont peut dépendre régulièrement le second membre (étude des petits mouvements ...).

L'exemple [7] illustre un procédé de recherche d'une solution, après introduction d'un paramètre (ce qui revient à résoudre le problème selon la méthode itérative ...).

Les séries de Fourier jouent un rôle analogue à celui des séries entières, dans la recherche de solutions périodiques de certaines équations différentielles.

L'exemple [8] reprend l'étude de la réponse du circuit intégration à un train d'impulsions rectangulaires (: l'exemple [4] de la leçon exemples de résolution d'équations différentielles), pour essayer d'en trouver la solution périodique ; on explique comment modifier le second membre pour éviter les problèmes de réivation terme à terme. L'exemple [9], du même type, permet de mettre en évidence le phénomène de résonance. On se contente d'exemples d'équations différentielles linéaires à coefficients constants, car une équation aussi simple à écrire que l'équation différentielle de Mathieu

$$\ddot{x} + (1 + \cos 2t)x = 0$$

donne lieu à des développements trop difficiles (déterminant d'ordre infini ...). C'est la raison pour laquelle on se permet un exemple illustrant l'utilisation des séries de Fourier dans la résolution d'un problème aux limites pour une équation aux dérivées partielles : avec l'exemple [10], on calcule la température d'une plaque carrée, connaissant ses valeurs aux bords (problème de Dirichlet pour l'opérateur de Laplace).

Références : les théorèmes de Cauchy et Fuchs sont lisibles dans **Valiron** ; les fonctions de Bessel sont traitées, en particulier, dans **Dieudonné** ou **Wittacker**.

$$[1] \quad \begin{cases} y'' - xy' - 2y = 0 \\ y(0) = 0, y'(0) = 1 \end{cases}$$

$$\text{Rep.} \quad x e^{\frac{x^2}{2}}.$$

$$[2] \quad \begin{cases} y'' - xy' + y = 1 \\ y(0) = y'(0) = 1 \end{cases}$$

$$\text{Rep.} \quad \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{(2n+1)!!}{(2n+4)!} x^{2n+4} + \dots, R = +\infty.$$

$$[3] \quad y'' - xy = 0$$

1) La technique d'identification conduit à la relation

$$n(n-1)c_n = c_{n-3}, n \geq 3$$

$$c_2 = 0.$$

2) D'où l'on tire, en s'aidant de la fonction Γ d'Euler

$$c_{3n} = c_0 \frac{\Gamma(\frac{2}{3})}{3^n n! 3^n \Gamma(n + \frac{2}{3})}$$

$$c_{3n+1} = c_1 \frac{\Gamma(\frac{4}{3})}{3^n n! 3^n \Gamma(n + \frac{4}{3})}$$

$$c_{3n+2} = 0.$$

3) Avec d'Alembert, on s'assure que la solution générale est de la forme

$$y(x) = c_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{9^n n! \Gamma(n + \frac{2}{3})} + c_2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{9^n n! \Gamma(n + \frac{4}{3})}$$

avec $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$: en effet, les deux séries entières ont un rayon de convergence infini, et un comportement différent à l'origine, qui assure leur indépendance.

4) Les fonctions d'Airy correspond au choix

$$c_1 = 3^{-\frac{2}{3}}, \quad c_2 = -3^{-\frac{4}{3}}$$

5) (dans la leçon Changement de variable en Analyse), on fera le lien avec l'équation différentielle de Bessel.

6) A l'aide d'une intégration terme à terme, on vérifiera la formule de représentation intégrale suivante

$$\text{Ai}(t^2) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{2}{3}t^3} \int_0^{\infty} e^{-tu} \cos\left(\frac{1}{3}u^2\right) \frac{du}{\sqrt{u}}$$

formule à laquelle on est conduit par la méthode de Laplace complexe.

Référence : Dieudonné IX.

$$\boxed{4} \quad \begin{cases} y' = \frac{y^2}{1-xy} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

1) La technique d'identification conduit à $c_0 = c_1 = 1$ et à la relation de récurrence

$$c_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{p=0}^{p=n} (p+1) c_p c_{n-p}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

2) Si on calcule les premiers termes de la suite $(c_n)_{n \geq 0}$, on trouve

$$c_2 = \frac{3}{2}, \quad c_3 = \frac{4^2}{3!}, \quad c_4 = \frac{5^3}{4!}$$

ce qui conduit à supposer que

$$c_n = \frac{(n+1)^{n-1}}{n!}, \quad n \geq 1$$

et ce qu'on vérifie grâce à la relation de récurrence obtenue en 1).

3) Comme $\frac{c_{n+1}}{c_n} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e$, $R = \frac{1}{e}$

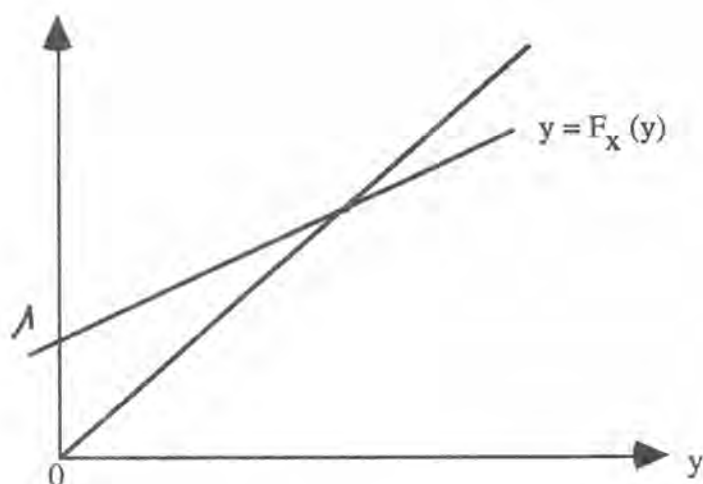
et les calculs ont un sens sur l'intervalle $]-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}[$.

4) La solution $y(x)$ obéit à l'équation fonctionnelle $y = e^{xy}$

(car $\frac{d}{dx} (y - e^{xy}) = 0$ et $(y - e^{xy})(0) = 0$) et, à $x \in \mathbb{R}$ donné, on peut chercher à résoudre l'équation numérique $y = e^{xy}$ selon la technique d'itération, qui consiste à poser

$$\begin{cases} y_0 = 1 \\ y_{n+1} = F_x(y_n) \end{cases} \quad \text{si } F_x(y) = e^{xy}.$$

On suppose, pour commencer, que $x > 0$:



alors, on montre que, si $0 < x < \frac{1}{e}$,

$$1) 1 < y_n < e \Rightarrow 1 < y_{n+1} = e^{xy_n} < e$$

$$2) 0 < F'_x(y) = xe^{xy} < xe \text{ si } 1 < y < e$$

si bien que F_x est une contraction de $[1, e]$: d'après le théorème du point fixe, on sait que la suite $(y_n)_{n \geq 0}$ converge, vers l'unique solution $y(x)$ de l'équation fonctionnelle.

5) On montre que le même procédé permet d'obtenir $y(x)$ pour $x \in]-e, 0[$ (et pas seulement pour $x > -\frac{1}{e}$).

5 $2x^2y'' + (3x - 2x^2)y' - (x+1)y = 0.$

1) On cherche y sous la forme

$$y(x) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad c_0 \neq 0$$

et, en dérivant formellement terme à terme la série de fonctions de terme général $c_n x^{n+r}$ en portant dans l'équation différentielle, en mettant x^r en facteur et en identifiant à 0 le coefficient constant, on est conduit à l'équation résolvante

$$2r(r-1) + 3r - 1 = 0$$

de solutions $\frac{1}{2}$ et -1 .

2) En posant $y_1(x) = \sqrt{x} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ pour $x > 0$, le procédé d'identification donne

$$c_n = \frac{2}{2n+3} c_{n-1}, \quad \forall n \geq 1$$

d'après d'Alembert, le rayon de convergence de la série entière est infini, et on obtient, sur $]0, +\infty[$, la solution particulière

$$y_1(x) = \sqrt{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n+1}(n+1)!}{(2n+3)!} x^n$$

3) Le même procédé donne la solution

$$y_2(x) = \frac{1}{x} e^x, \quad x \neq 0.$$

4) y_1 et y_2 sont indépendantes (comme le montre le comportement à l'origine), et la solution générale prend donc, sur $]0, +\infty[$, la forme $Ay_1 + By_2$, avec $A, B \in \mathbb{R}$.

6 (B_v) $x=2y''+xy'+(x^2-v^2)y=0$
 v paramètre.

On trouvera tous les éléments de correction dans Dieudonné, Valiron, Wittacker

...

7 $\begin{cases} y'' + e^{-x}y = 0 \\ y(0) = y'(0) = 1 \end{cases}$

1) La technique d'identification donne

$$(n+2)(n+1)c_{n+2} = \sum_{p=0}^{p=n} \frac{(-1)^{n-p}}{(n-p)!} c_p, \quad n \geq 0$$

ce qui, avec $c_0 = c_1 = 1$ permet un calcul de proche en proche de la suite $(c_n)_{n \geq 0}$; il ne paraît pas facile d'exprimer c_n , ni de calculer le rayon de convergence (le théorème de Cauchy assure, on le rappelle, qu'il est positif).

2) Le changement de variable $t = e^{-x}$ permet de linéariser l'équation différentielle sous la forme

$$t^2 \ddot{z} - \dot{z} + tz = 0$$

qui fait apparaître l'origine $t = 0$ comme singularité essentielle.

3) On introduit le paramètre ε , en considérant l'équation différentielle

$$y'' + \varepsilon e^{-x} y = 0$$

qu'on va chercher à résoudre sous la forme d'un développement en série entière selon ε

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x) \varepsilon^n.$$

Selon la technique d'identification dans les puissances de ε , on est conduit à résoudre les **équations aux variations**

$$0) \quad y_0'' = 0, \quad y_0(0) = y_0'(0) = 1$$

de solution $y_0(x) = x+1$.

$$1) \quad y_1''(x) = -e^{-x} y_0(x) = -e^{-x}(x+1), \quad y_1(0) = y_1'(0) = 0$$

qui donne $y_1(x)$.

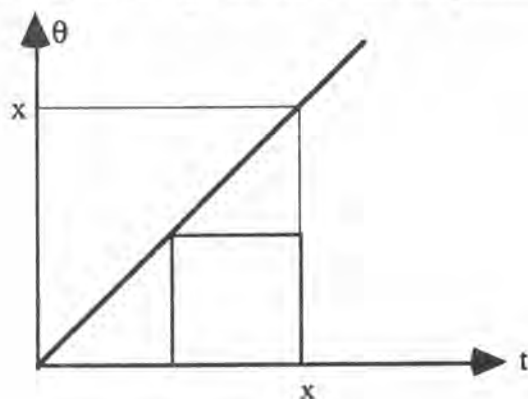
$$n) \quad y_n''(x) = -e^{-x} y_{n-1}(x), \quad y_n(0) = y_n'(0) = 0 \text{ qui donne}$$

$$y_n'(x) = - \int_0^x e^{-t} y_{n-1}(t) dt$$

puis

$$y_n(x) = - \int_0^x \int_0^t e^{-\theta} y_{n-1}(\theta) d\theta dt$$

ou encore, en changeant l'ordre des intégrations



$$y_n(x) = - \int_0^x e^{-\theta} y_{n-1}(\theta)(x-\theta) d\theta.$$

4) Par conséquent

$$|y_1(x)| \leq (1+|x|)e^{|x|} \frac{x^2}{2}$$

et, plus généralement, comme le montre une récurrence sur n

$$|y_n(x)| \leq (1+|x|)e^{|x|} \frac{|x|^{2n}}{(2n)!}, \quad \forall n \geq 0.$$

La série $\sum_{n=0}^{\infty} y_n \varepsilon^n$ converge donc uniformément en x sur tout compact de $\mathbb{R}$,

pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}$.

De plus, il est facile de justifier la dérivation terme à terme

$$\left(|y'_n(x)| \leq e^{|x|} \left(\frac{|x|^n}{n!} + \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \right), \right.$$

$$\left. |y''_n(x)| = |e^{-x} y_{n-1}(x)| \leq (1+|x|) e^{2|x|} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \dots \right)$$

5) De sorte que $y(x) = \sum_{n \geq 0} y_n(x)$ est solution du problème posé.

6) On montre facilement que y_n a la forme

$$y_n(x) = \sum_{p=0}^n e^{-px} (a_{n,p} + b_{n,p} x)$$

où les coefficients sont liés par des relations de récurrence ...

8 $\tau \dot{x} + x = u, x(0) = 0$

$$u(t) = \begin{cases} A & \text{si } t \in [0, \varepsilon] \\ 0 & \text{si } t \in]\varepsilon, T[\end{cases}$$

u T-périodique.

1) Il s'agit de l'exemple 4 de la leçon d'exemples de résolution d'équations différentielles, où on a montré l'existence d'une unique solution T-périodique, donc on a d'ailleurs déterminé le motif.

2) On peut développer le second membre u en série de Fourier, le calcul des coefficients donnant

$$c_0 = \frac{\varepsilon}{T}$$

$$c_n = \frac{i}{2\pi n} (e^{-in\omega\varepsilon} - 1), \quad n \in \mathbb{Z}^*$$

où $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

D'après le théorème de Dirichlet, la série de Fourier $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t}$ converge simplement, à chaque instant, vers u(t) (prolongé par $\frac{A}{2}$ aux points de discontinuité).

3) Supposant l'existence d'une solution particulière T-périodique, on cherche son développement en série de Fourier (formel) selon la technique d'identification, en utilisant le fait que $c_n(\dot{x}) = in c_n(x)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$:

$$(1 + i\tau n) c_n(x) = c_n$$

donne donc

$$c_n(x) = \frac{i(e^{-in\omega\epsilon} - 1)}{2\pi n(1+i\tau n)}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

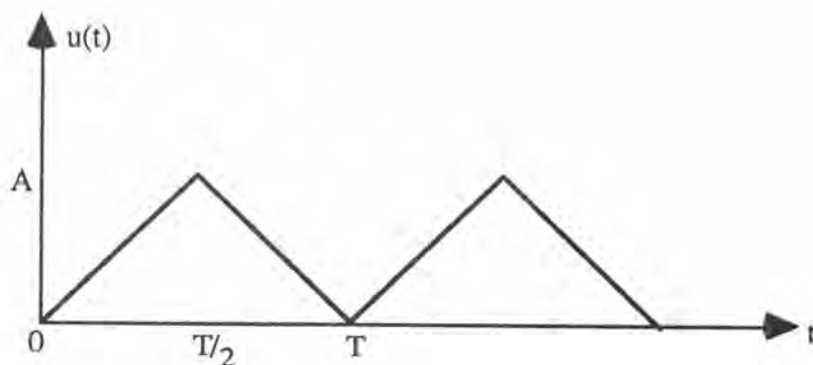
4) Maintenant, la série trigonométrique

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(x) e^{in\omega t}$$

converge normalement sur $\mathbb{R}_t$ ($: |c_n(x)| \underset{(+\infty)}{\leq} \frac{1}{n^2}$), et elle définit donc une fonction x continue sur $\mathbb{R}$.

5) On vérifie que la fonction x_p possède effectivement $c_n(x)$ comme $n^{\text{ème}}$ coefficient de Fourier. Cependant, il est difficile de justifier la dérivation terme à terme sur $]0, \epsilon[\cup]\epsilon, T[\dots$

6) Et c'est pourquoi il est préférable de présenter l'exemple [8], avec un second membre u en dents de scie continu



; on reprendra les calculs, et on justifiera alors complètement la partie formelle.

[9] $\ddot{x} - x = |\sin t|$
solution périodique ?

$$1) \quad |\sin t| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nt}{4n^2-1}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

$$2) \quad x(t) = -\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nt}{16n^4-1}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

s'obtient selon la démarche précédente, et il est facile de justifier ici les dérivations terme à terme.

3) On obtiendra le motif de cette solution π -périodique à l'aide de la méthode de l'application de Poincaré (sur la période π).

4) Le même traitement, appliqué à l'équation différentielle

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = |\sin t|$$

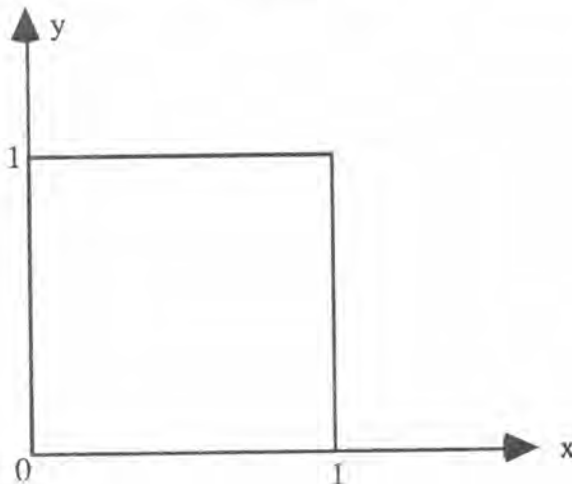
permet de comprendre l'apparition des termes séculaires lorsque $\omega_0 \rightarrow \mathbb{N}^2$.

$$\boxed{10} \quad \Delta u = 0 \text{ dans le carré } [0,1]_x \times [0,1]_y$$

$$u(0,y) = u(1,y) = 0, \quad \forall y \in [0,1]$$

$$u(x,0) = 0, \quad \forall x \in [0,1]$$

$$u(x,1) = 100 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \pi n x}{2^n}, \quad \forall x \in [0,1].$$



1) On commence par chercher les solutions particulières de l'équation $\Delta u = 0$ qui s'écrivent sous la forme

$$u(x,y) = X(x)Y(y), \quad \forall (x,y) \in C$$

et qui satisfont aux conditions

$$u(0,y) = u(1,y) = u(x,0) = 0 ;$$

Comme $\frac{X''}{X}(x) = -\frac{Y''}{Y}(y)$ doit être constant, on obtient les deux EDO

$$X'' - \lambda X = 0 \quad \text{et} \quad Y'' + \lambda Y = 0$$

si on veut que $X(0) = X(1) = 0$ avec $X \neq 0$, il faut prendre $\lambda = (n\pi)^2$ avec n entier, et alors on obtient

$$X(x) = \sin(n\pi x)$$

à un facteur multiplicatif près

$$Y(y) = \text{sh}(n\pi y)$$

2) On cherche donc à résoudre le problème sous la forme

$$u(x,y) = \sum_n c_n \sin(n\pi x) \text{sh}(n\pi y)$$

où on doit par conséquent avoir, avec la condition

$$u(x,1) = F(x) = 100 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi x)}{2^n}$$

$$c_n = \frac{100}{2^n \text{sh}(n\pi)}, \quad n \geq 1.$$

3) La série de fonctions précédente, de terme général

$$\frac{100}{2^n \text{sh}(n\pi)} \sin(n\pi x) \text{sh}(n\pi y)$$

converge normalement sur C , de même que les séries $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2}{\partial y^2}$, si bien que

$$u(x,y) = 100 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi n x) \operatorname{sh}(n \pi y)}{\operatorname{sh}(n \pi)}$$

est solution au problème posé.

4) On montre qu'il s'agit de la solution : cela découle de la remarque faite dans l'Exemple 1 de la leçon : Exemples de recherche d'extremum de fonctions d'une ou deux variables, où il est montré qu'une fonction δ telle que $\Delta \delta = 0$ atteint son maximum au bord du domaine C (si δ est $\mathcal{C}^2$ dans C , et continue sur $\bar{C}$).

5) Il est facile de calculer

$$F(x) = \frac{200 \sin}{5-4 \cos}$$

et l'expression ci-dessus permet de calculer la température de la plaque au centre, par exemple : en prenant seulement deux termes de la série donnant $u(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, on obtient

$$u(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = 9^{\circ}8 \text{ à } \frac{1}{10} \text{ près.}$$

- 21 -

EXEMPLES DE RESOLUTION D'EQUATIONS DIFFERENTIELLES OU DE SYSTEMES DIFFERENTIELS

Il ne faut pas limiter les exemples de résolution au sens où l'on peut exprimer complètement la(les) solution(s) à l'aide des fonctions considérées comme usuelles, comme cela s'avère possible dans les exemples [1], [2], qu'il semble d'ailleurs inévitable de devoir présenter : équations différentielles d'ordre 2 linéaires à coefficients constants, systèmes du même type (en dimension 3), afin de pouvoir exposer la notion d'**équation caractéristique**, et la **méthode d'identification** ; comme le sujet a fait l'objet du problème d'Analyse 93, on pourra même expliquer à ce propos comment résoudre un problème de condition initiale associée, par la **méthode de Laplace**.

Toujours dans ce cadre, l'exemple [3] est intéressant à exposer, car il explique physiquement l'apparition des **termes séculaires** pour le phénomène battements-résonance. On doit signaler que la situation linéaire à coefficients constants surgit naturellement lors de l'étude des petits mouvements d'un système au voisinage d'une position d'équilibre, ou d'un cycle (linéarisation).

L'exemple [4], toujours linéaire, permet d'introduire à propos d'une équation élémentaire, la notion d'application sur une période, ou **application de Poincaré**, si important comme outil de recherche d'une solution périodique (ici, forcée : il s'agit d'étudier la réponse d'un circuit intégration, de constante de temps $\tau = RC$, à un train d'impulsions).

Il paraît également inévitable de présenter un exemple [5] de type **linéaire à coefficients variables**, pour montrer comment la connaissance d'une solution particulière de l'équation sans second membre permet, via 4 quadratures, d'obtenir la solution générale de l'équation complète. On étudiera par ailleurs l'exemple (trop ?) classique de l'équation différentielle de Bessel.

Il faut sans doute aussi montrer sur un exemple [6] comment, à côté du problème de la condition initiale (de Cauchy), on peut être confronté à un **problème de condition limite**.

On termine sur des exemples non linéaires : à côté de l'exemple d'école [7] qui permet de parler de **facteur intégrant**, on a choisi des exemples plus sérieux, issus de problèmes physiques :

l'exemple [8] permet d'exprimer la **méthode du plan de phase**, en montrant (à l'aide de l'application de Poincaré sur une section) l'existence d'un cycle isolé, vers lequel tendent toutes les autres trajectoires (notion de cycle-limite) ; le [9], du même genre, explique comment la perte de stabilité d'un équilibre foyer s'accompagne de la création d'oscillations (**phénomène de Hopf**) ; le [10], enfin, traite d'un exemple conservatif d'ordre 2.

Référence : Arnold, Equations Différentielles Ordinaires.

On ajoute qu'il serait bon de pouvoir expliquer comment on résoud numériquement une équation différentielle, par un tracé de trajectoires de [10], par exemple. On renvoie pour cela à la Leçon : Calcul approché d'une intégrale.

[1] $\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = e^{-t} \cos t$

1) La recherche d'une solution particulière de $\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = 0$ sous la forme $x(t) = e^{p \cdot t}$ avec $p \in \mathbb{K}$ inconnue conduit à considérer l'équation caractéristique $p^2 + 2p + 5 = 0$ donc à la solution complexe $e^{-t}e^{2it}$ et, par conséquent aux 2 solutions réelles indépendantes $e^{-t} \cos 2t$ et $e^{-t} \sin 2t$: (d'après le théorème fondamental) la solution générale s'écrit donc $e^{-t}(A \cos 2t + B \sin 2t)$.

2) On peut chercher une solution particulière de l'équation sous la forme

$$x(t) = e^{-t} (a \cos t + b \sin t)$$

où $a, b \in \mathbb{R}$ peuvent se déterminer par identification...

3) Ce qui permet, par superposition, d'en déduire la solution générale.

4) Le problème de la condition initiale $x(0) = \dot{x}(0) = 1$ peut se résoudre à l'aide de la transformation de Laplace, sachant que si $x(t) \subset X(p)$

$$\dot{x}(t) \subset p \cdot X(p) - 1$$

$$\ddot{x}(t) \subset p(p \cdot X(p) - 1) - 1$$

ce qui conduit à une équation algébrique en X , de coefficient, le polynôme caractéristique...

$$\boxed{2} \quad \begin{cases} \dot{x} = x-y+z \\ \dot{y} = x-y-z \\ \dot{z} = 2x-y \end{cases}, \text{ ou } \begin{cases} \dot{x} = 2x-y-z \\ \dot{y} = 2x-y-2z \\ \dot{z} = -x-y+2z \end{cases}, \text{ ou } \begin{cases} \dot{x} = 2x+y \\ \dot{y} = x+3y-z \\ \dot{z} = x+2y+3z \end{cases}$$

Partir sur $\vec{x}(t) = e^{pt} \vec{v}$ $p \in \mathbb{K}$, $\vec{v} \in \mathbb{K}^3$...

Faire le lien avec la réduction de la matrice du système ...

Tracer l'allure des trajectoires dans $\mathbb{R}^3$.

$$\boxed{3} \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = A \cos \omega t, \quad \omega_0, \omega > 0 \text{ paramètres.}$$

1) x peut être la charge du condensateur d'un circuit LC soumis à l'action de la tension extérieure $A \cos \omega t$ de pulsation ω , $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ est la période propre du circuit.

2) Par changement d'échelle de temps, on se ramène à supposer que $\omega_0 = 1$.

3) $\ddot{x} + x = 0$ est l'équation de l'oscillateur harmonique de solution générale $A \cos t + B \sin t$ ou $R \cos(t-\varphi)$.

4) Si $\omega \neq 1$, il est facile de trouver une solution particulière de la forme $a \cos \omega t$, soit $\frac{A}{1-\omega^2} \cos \omega t$.

Pour $\omega = 1$, on peut expliquer l'apparition d'un terme séculaire de la manière suivante :

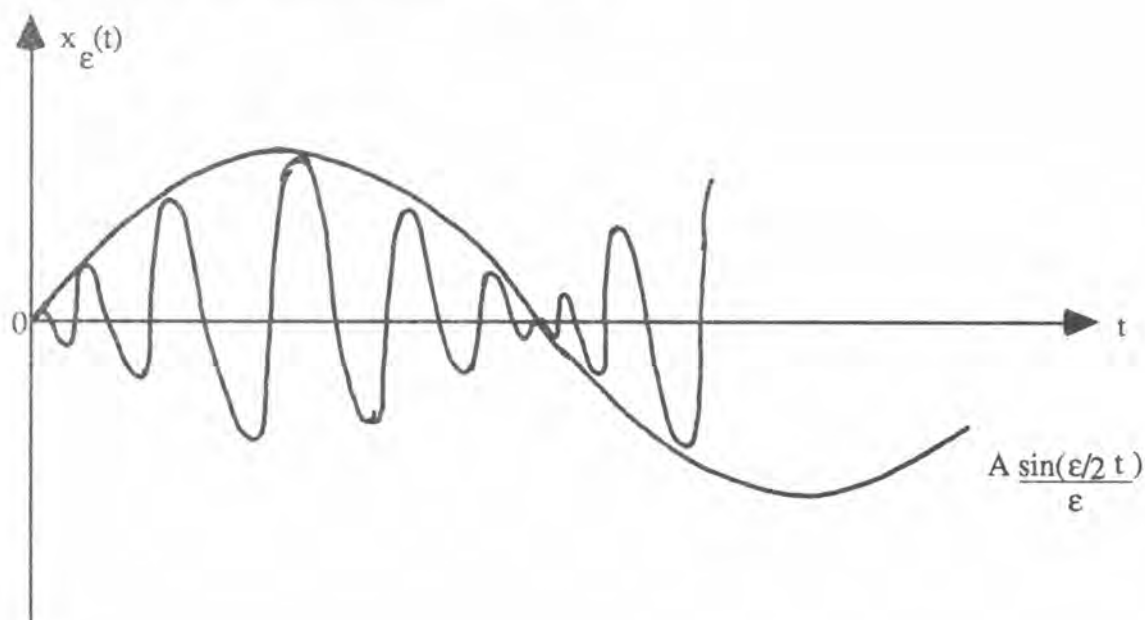
5) Si $\omega = 1+\varepsilon$ avec $\varepsilon \neq 0$,

$$x_\varepsilon(t) = \frac{A}{1-\omega^2} (\cos \omega t - \cos t)$$

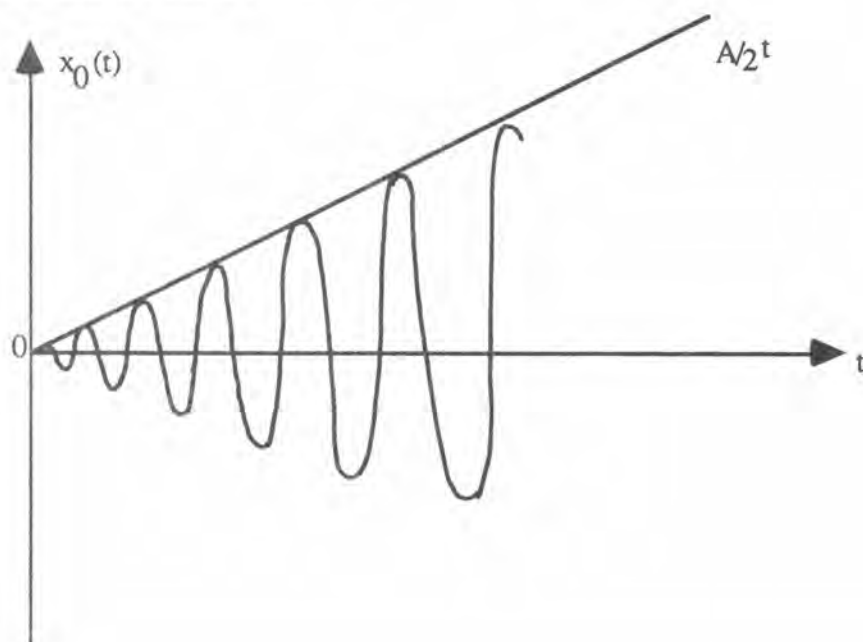
est une solution particulière, qu'il est commode de mettre sous la forme

$$x_\varepsilon(t) = A \frac{\sin(\frac{\varepsilon}{2} t)}{\frac{\varepsilon}{2}} \cdot \frac{\sin(1 + \frac{\varepsilon}{2})t}{2+\varepsilon}$$

afin d'en donner une représentation graphique :



x_ϵ présente des battements qui, lorsque $\epsilon \rightarrow 0+$, se transforment en $\frac{A}{2} t \sin t$, terme séculaire non borné :



: la pulsation extérieure ω tend vers la pulsation propre ω_0 du circuit, il y a résonance !

6) On vérifie qu'effectivement, $A \frac{t}{2} \sin t$ est solution de l'équation différentielle $\ddot{x} + x = A \cos t$. Comme $x_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0+]{u} x_0$ sur tout compact, le passage à la limite dans l'ED est licite.

$$\boxed{4} \quad \tau \dot{x} + x = u, \quad x(0) = 0$$

u T -périodique à droite

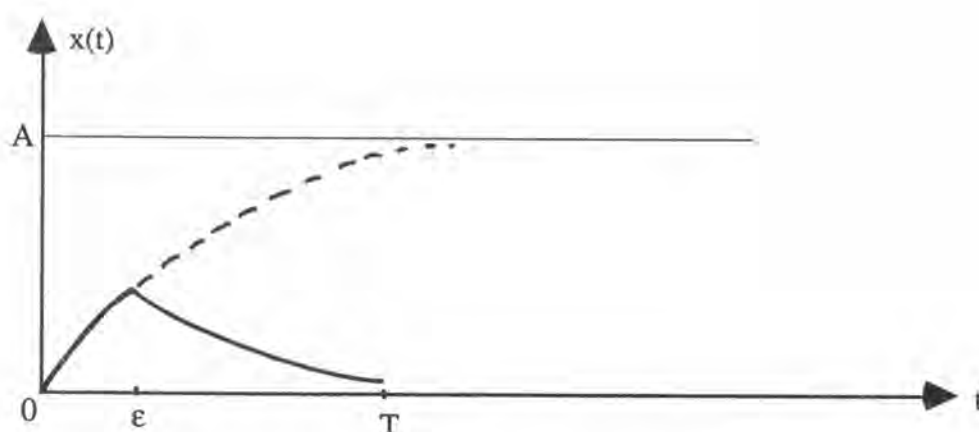
$$u(t) = \begin{cases} A & \text{si } t \in [0, \varepsilon] \\ 0 & \text{si } t \in]\varepsilon, T[\end{cases}$$

1) Comme u n'est pas continu, il faut préciser ce qu'on entend par solution x : il s'agit de trouver une fonction continue sur $[0, +\infty[$, dérivable par morceau, et qui obéisse à

$$\begin{aligned} \tau \dot{x} + x &= A \quad \text{sur } [nT, nT + \varepsilon] \\ &= 0 \quad \text{sur }]nT + \varepsilon, nT + T[\end{aligned} \quad , n \in \mathbb{N}.$$

2) L'étude sur $[0, T]$ explique la difficulté :

$$\begin{aligned} x(t) &= A(1 - e^{-t/\tau}) \quad \text{sur } [0, \varepsilon] \\ x(t) &= k e^{-t/\tau} \quad \text{sur }]\varepsilon, T], \text{ avec } k \in \mathbb{R} \text{ tel que } k e^{-\varepsilon/\tau} = A(1 - e^{-\varepsilon/\tau}) \text{ d'où} \\ k &= A(e^{-\varepsilon/\tau} - 1) \quad (: x(\varepsilon-) = x(\varepsilon+)). \end{aligned}$$



: après l'instant T , on retrouve les mêmes équations, mais avec une condition initiale différente (charge résiduelle...).

3) L'idée est donc de résoudre le problème de condition initiale

$$\begin{cases} \tau \dot{x} + x = u \\ x(0) = x_0 \text{ donné} \end{cases}$$

sur $[0, T]$, et de montrer que l'application de Poincaré

$$\chi : x_0 \rightarrow x(T)$$

possède un point fixe ξ : la solution correspondante x_p sera alors T-périodique.

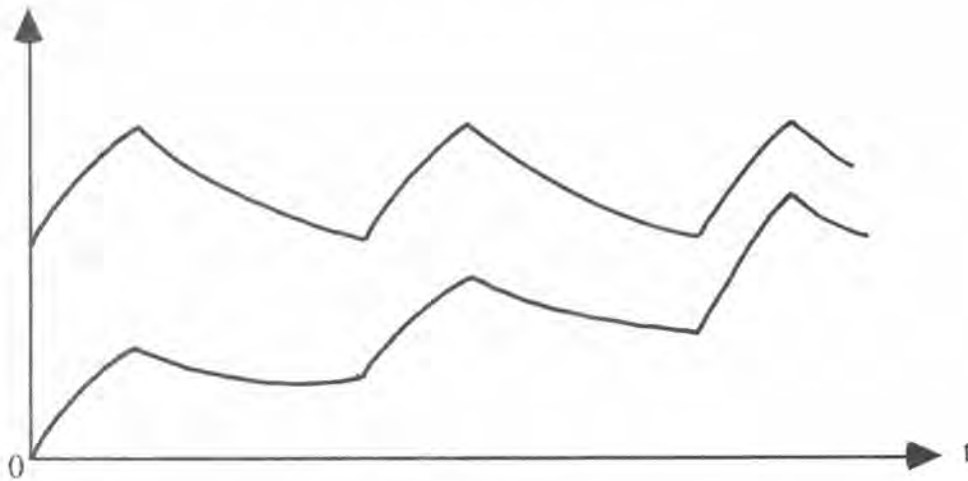
4) Et pour obtenir la solution demandée, on utilisera le fait que

$$x = x_p + x_1$$

où $x_1(t) = Ke^{-t/\tau}$ est la solution générale de l'équation sans second membre associée ; on calculera alors $K \in \mathbb{R}$ pour la condition $x(0) = 0$.

5) La réponse se décompose donc de 2 parties :

$$\begin{cases} x_p \text{ dit régime établi, ou permanent} \\ Ke^{-t/\tau} \text{ dit régime transitoire} \end{cases}$$



6) La décomposition de x_p en série de Fourier s'obtient par identification ...

5 $(t^2-1)\ddot{x}+4t\dot{x}+2x = 6t$ ou $\ddot{x}-t\dot{x}-2x = 0$

Rép. : $x_1 = t$; $x_1 = te^{t^2/2} \dots$

$$\boxed{6} \quad (1) \quad \varepsilon \ddot{x} + (1+\varepsilon)\dot{x} + x = 0, \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 1$$

$$(1)' \quad \varepsilon \ddot{x} - t\dot{x} = 0, \quad x(-1) = 0, \quad x(1) = 1$$

1) (1) se résoud explicitement, pour donner

$$x_\varepsilon(t) = \frac{e^{-t} - e^{-t/\varepsilon}}{e^{-1} - e^{-1/\varepsilon}}, \quad t \in [0,1]$$

$$2) \quad x_\varepsilon(t) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0+} x_0(t) \doteq e^{1-t}$$

x_0 est la solution du problème (dégénéré) :

$$\dot{x}_0 + x_0 = 0, \quad x_0(1) = 1.$$

3) La convergence est uniforme sur tout compact de $]0,1]$ et le terme $\frac{e^{-t/\varepsilon}}{e^{-1} - e^{-1/\varepsilon}}$ n'a d'importance qu'au voisinage de $0+$ (terme de couche-limite).

4) (1)' admet comme unique solution

$$x_\varepsilon(t) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\int_0^t e^{\theta^2/2\varepsilon} d\theta}{\int_0^1 e^{\theta^2/2\varepsilon} d\theta} \right)$$

et il est intéressant d'en étudier le comportement, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0+$.

$$5) \quad \int_0^1 e^{\theta^2/2\varepsilon} d\theta = \sqrt{\varepsilon} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}} e^{\theta^2/2} d\theta \underset{t>0}{\underset{\varepsilon \rightarrow 0+}{\sim}} \sqrt{\varepsilon} \cdot \frac{\sqrt{\varepsilon}}{t} e^{t^2/2\varepsilon}$$

permet de montrer que $x_\varepsilon \xrightarrow{(\varepsilon \rightarrow 0+)} \frac{1}{2}$ sur $[0;1]$ la convergence étant uniforme sur tout compact de $]0,1[$.

$$\boxed{7} \quad t^2(x-t)\dot{x} + (1-t^2x) = 0, \quad x(1) = 0.$$

1) Comme $\frac{\partial}{\partial t} (t^2(x-t)) \neq \frac{\partial}{\partial x} (1-t^2x)$, le champ de composantes $P = t^2(x-t)$, $Q = 1-t^2x$ ne dérive pas d'un potentiel.

2) On commence donc par chercher un facteur intégrant, c'est-à-dire une fonction $\mu(t,x)$ telle que

$$\frac{\partial}{\partial t} (\mu t^2(x-t)) = \frac{\partial}{\partial x} (\mu (1-t^2x))$$

ce qui conduit à considérer l'équation aux dérivées partielles

$$t^2(x-t) \frac{\partial \mu}{\partial t} - (1-t^2x) \frac{\partial \mu}{\partial x} + \mu 2t(x-t) = 0$$

dont on peut facilement voir qu'elle possède une solution particulière de la forme $\varphi(t)$ avec, par conséquent

$$t \dot{\varphi} + 2t\varphi = 0$$

ainsi $\mu(t,x) = \frac{1}{t^2}$ convient-il, pour $t > 0$.

3) (D'après un théorème de Poincaré), il existe un potentiel V au champ $(\mu P, \mu Q)$ dans le demi-plan $\{t > 0\}$:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{1}{t^2} x, \quad \frac{\partial V}{\partial x} = x-t$$

donne facilement $V(t,x) = \frac{x^2}{2} - tx - \frac{1}{t}$ comme solution particulière.

4) La trajectoire partant de $(1,0)$ doit donc être telle que

$$V(t,x(t)) = V(1,0)$$

ce qui conduit à l'équation implicite

$$x(t) = t - \sqrt{t^2 + \frac{2}{t} - 2}, \quad t > 0.$$

8) $\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 Y(\dot{x})$

$$0 < h \ll \omega_0 \quad Y(\dot{x}) = \begin{cases} 1, & \dot{x} \geq 0 \\ 0, & \dot{x} < 0 \end{cases}$$

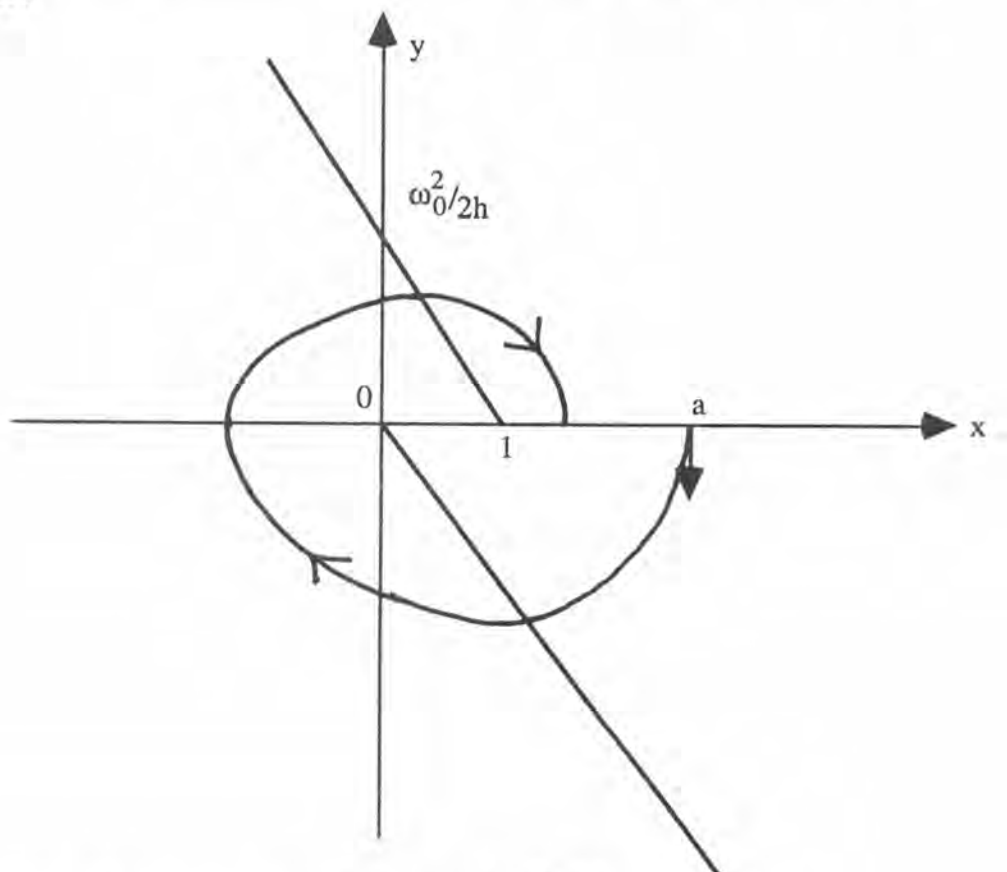
1) En posant $y = \dot{x}$, on peut mettre l'équation différentielle sous la forme du système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega_0^2 x - 2hy + \omega_0^2 Y(y) \end{cases}$$

et l'équation ne rentre pas dans le cadre du théorème classique d'existence et d'unicité, car le champ des vitesses n'est pas continu (traversée de l'axe x des positions).

On dira que (x, y) est une solution du système si x est de classe $\mathcal{C}^1$, et obéit à l'équation différentielle pour $\dot{x} \neq 0$.

2) Le tracé du champ des vitesses dans le plan $\mathbb{R}_{(x,y)}^2$ laisse prévoir le phénomène suivant :



et montre que le mouvement va s'amorcer selon l'EDO

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

de solution générale :

$$e^{-h.t} (A \cos \omega t + B \sin \omega t), \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - h^2}$$

et on trouve, pour la condition initiale $x(0) = a > 0, \dot{x}(0) = a$:

$$x(t) = a e^{-ht} \left(\cos \omega t + \frac{h}{\omega} \sin \omega t \right)$$

expression restant acceptable, tant que $\dot{x}(t) < 0$, c'est-à-dire jusqu'à l'instant $t_1 = \frac{\pi}{\omega}$; à

partir de cet instant $\frac{\pi}{\omega}$, x se met à obéir à la nouvelle équation

$$\ddot{x} + 2h \dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2$$

et les conditions de raccord en $\frac{\pi}{\omega}$, à l'ordre 1, permettent d'obtenir

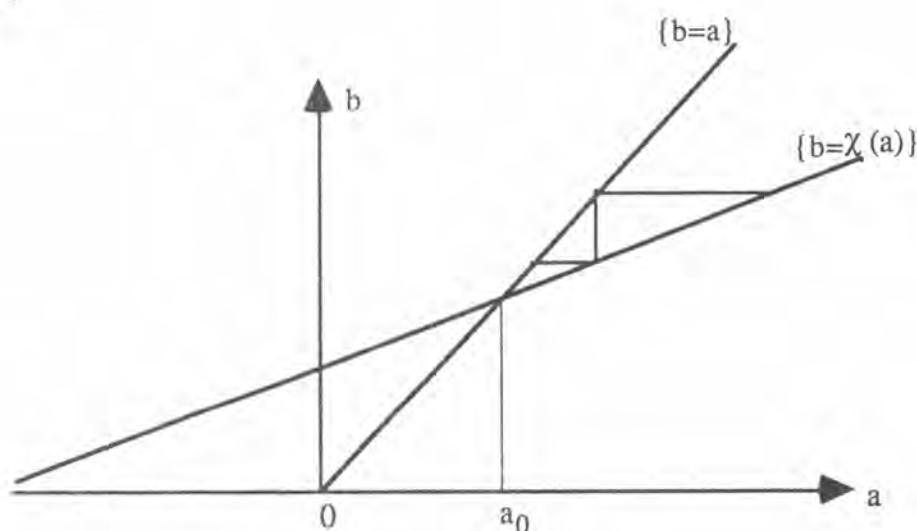
$$x(t) = 1 - \left(1 + a e^{-h\pi/\omega} \right) e^{-h(t-t_1)} \left(\cos \omega(t-t_1) + \frac{h}{\omega} \sin \right)$$

qui reste à son tour valable tant que $\dot{x}(t) > 0$: la trajectoire recoupe l'axe des positions à l'instant $\frac{2\pi}{\omega}$ et on obtient

$$\chi(a) = 1 + e^{-h\pi/\omega} (1 + a e^{-h\pi/\omega})$$

χ est l'application de Poincaré (pour la section $0x$) :

3)



il existe une position de départ privilégiée a_0 qui donne naissance à un cycle, vers lequel tendent toutes les autres trajectoires ...

et le portrait de phase de l'équation a l'allure suivante :

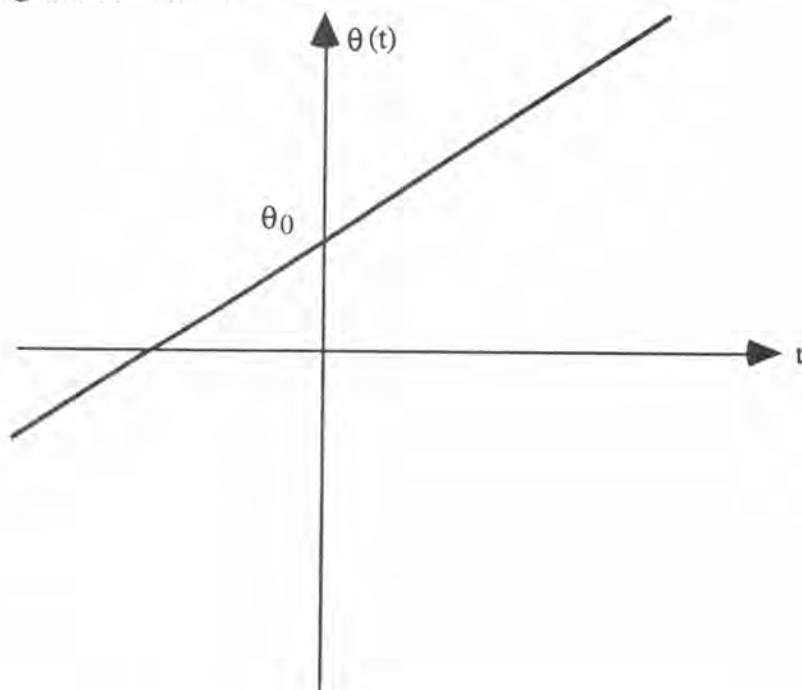


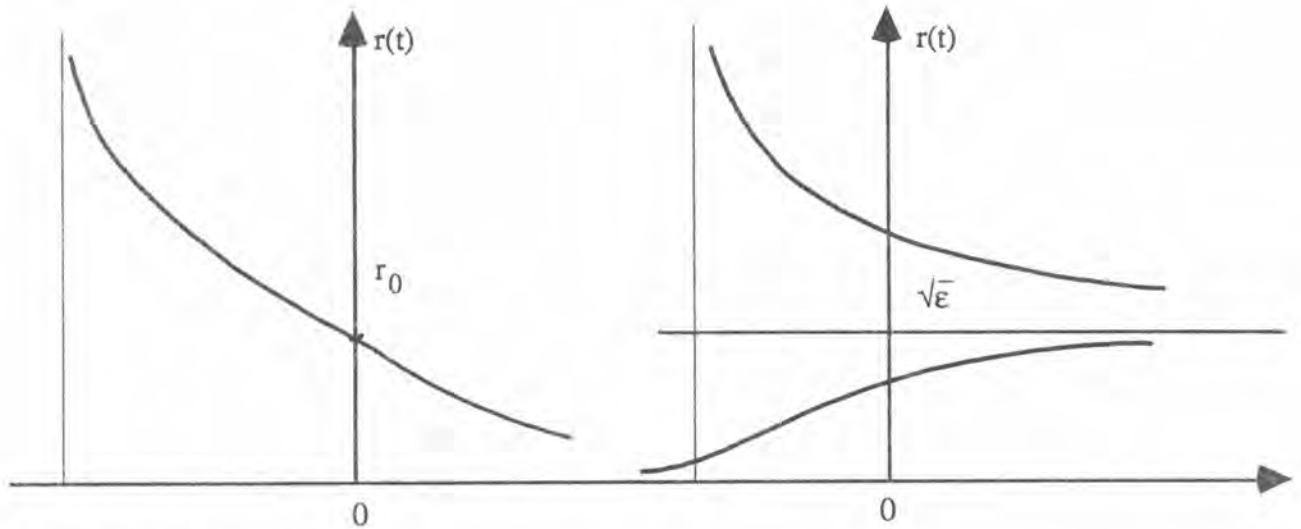
$$\boxed{9} \quad \begin{cases} \dot{x} = \varepsilon x - y - x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = x + \varepsilon y - y(x^2 + y^2) \end{cases} \quad \varepsilon \in \mathbb{R}.$$

1) en coordonnées polaires, le système différentiel s'écrit

$$\begin{cases} \dot{r} = r(\varepsilon - r^2) \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases}$$

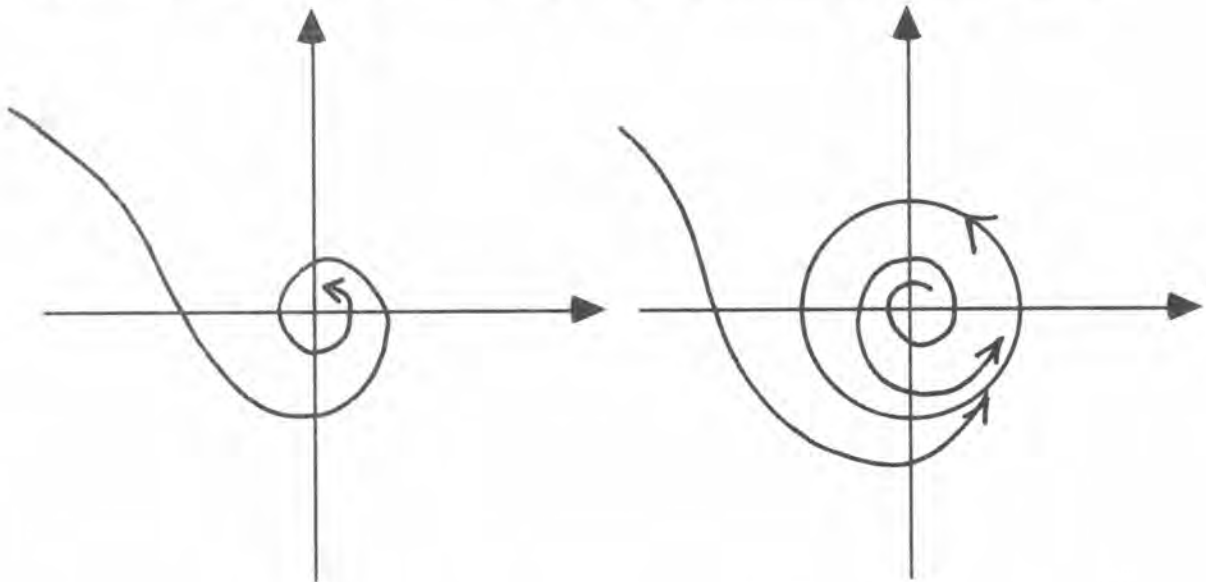
2) et s'intègre facilement par séparation des variables, pour donner les courbes intégrales suivantes :





selon le signe du paramètre ϵ .

3) Si bien que lorsque ϵ traverse la valeur 0, le portrait de phase change d'allure :

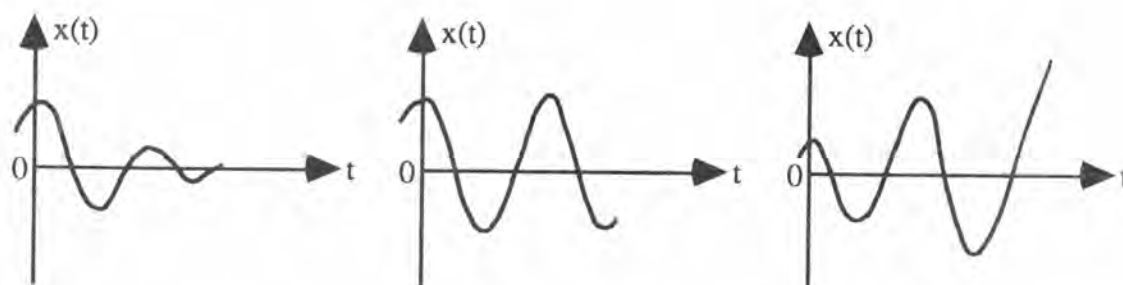
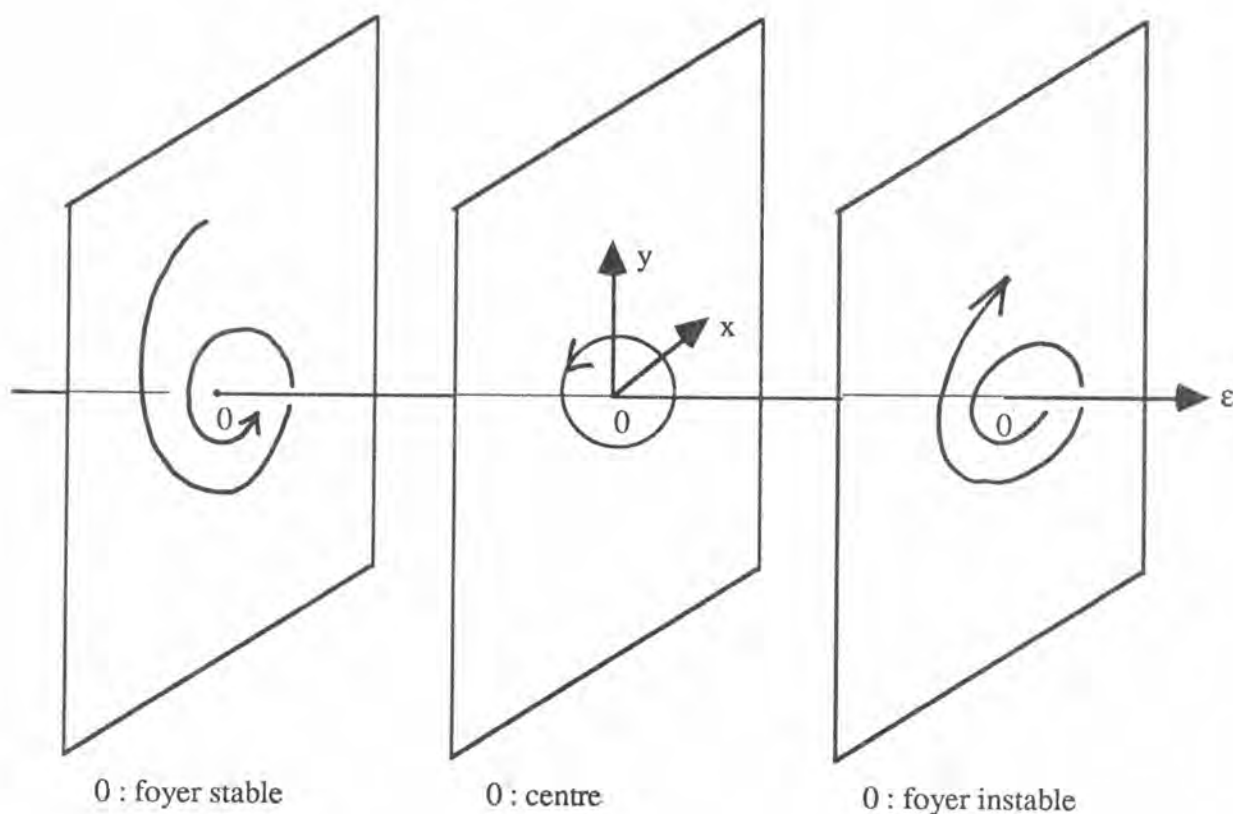


l'équilibre à l'origine perd sa stabilité, et il naît un cycle limite à la distance $\sqrt{\epsilon}$.

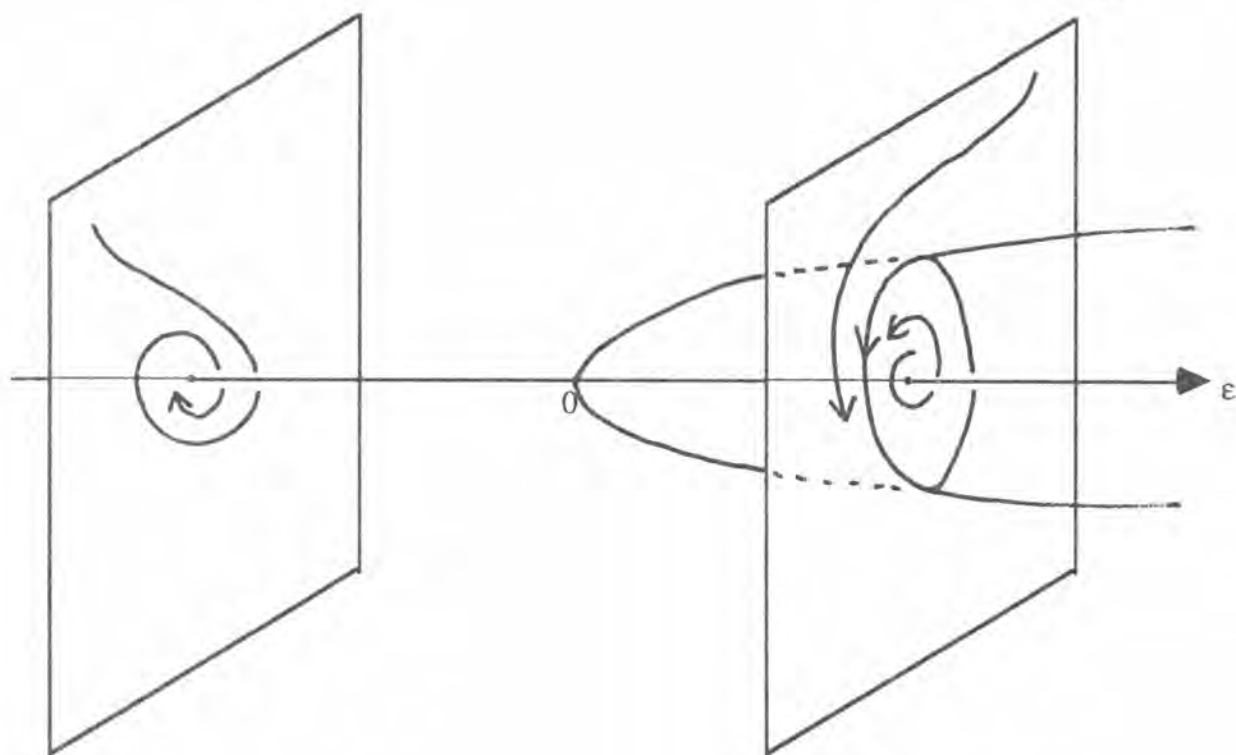
4) l'étude du système linéarisé en 0, c'est-à-dire de

$$\begin{cases} \dot{x} = \epsilon x - y \\ \dot{y} = x + \epsilon y \end{cases}$$

donne l'évolution suivante du portrait de phase, lorsque ϵ traverse la valeur 0 :



et les termes non linéaires ont par conséquent comme effet de tordre le plan des oscillations $\{\varepsilon = 0\}$ (dans l'espace $\mathbb{R}_\varepsilon \times \mathbb{R}_{(x,y)}^2$) selon le paraboloïde de résolution $\{x^2 + y^2 = \varepsilon\}$:



10 $\ddot{x} + \sin x = 0.$

1) En posant $y = \dot{x}$, on écrit l'équation différentielle sous la forme du système

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\sin x \end{cases}$$

2) La fonction $V(x,y) = \frac{y^2}{2} - \cos x$ est une intégrale première du système, c'est-à-dire que toute solution $(x(t), y(t))$ est telle que $V(x(t), y(t)) = V(x(0), y(0))$ à chaque instant t , puisque

$$\frac{\partial V}{\partial x} y + \frac{\partial V}{\partial y} (-\sin x) = 0$$

(V représente l'énergie mécanique totale du pendule de dérivation angulaire x par rapport à la verticale, somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle).

3) On a appris à tracer la surface $z = V(x,y)$ dans la leçon : exemples de recherche d'extrémum, ce qui conduit au portrait de phase de l'équation du pendule.

4) On se donne, en particulier, la condition initiale

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 2 \end{cases}$$

et on montre comment trouver la solution correspondante :

$$\dot{x}^2 = 2 \cos x + 2V(0,2) = 2(\cos x + 1) = 4 \cos^2 \frac{x}{2}$$

donne (avec le fait que $\dot{x}(0) = +2$)

$$\dot{x} = 2 \cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

on a ainsi, grâce à l'intégrale première, obtenu une équation différentielle de degré 1, qui s'intègre par séparation des variables,

$$\int_0^{x(t)} \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)} = \int_0^t dt$$

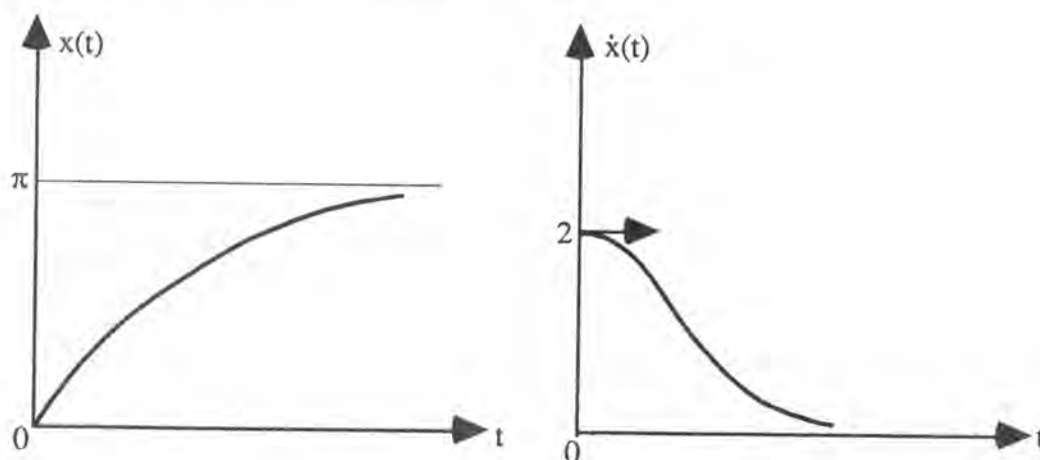
pour donner

$$t = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{x(t)}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

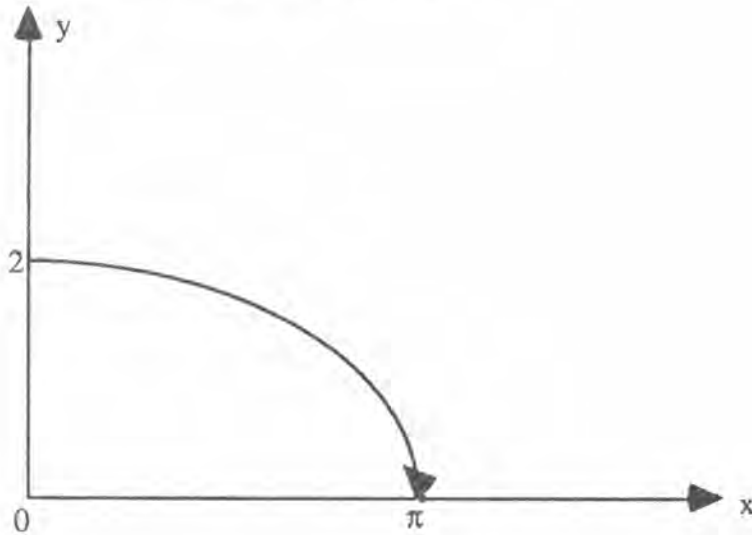
puis

$$x(t) = 4 \operatorname{Arctg}(e^t) - \pi$$

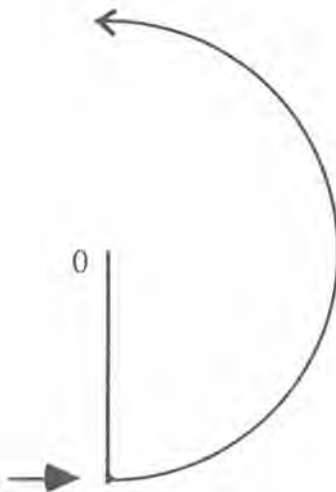
ce qui permet de tracer les courbes intégrales



qu'on pourra commenter sur la trajectoire :



: on a donné au pendule, en équilibre bas, juste l'impulsion qu'il faut pour qu'il n'oscille pas, ni ne rentre en révolution



5) La connaissance de V permet de calculer la période des oscillations du pendule, qui se produisent pour les conditions initiales $x(0) = \alpha \in]-\pi, +\pi[$, $\dot{x}(0) = 0$ par exemple.

On obtient

$$T(\alpha) = 4 \int_0^{\alpha} \frac{dx}{\sqrt{2(\cos x - \cos \alpha)}}$$

soit, par un changement de variable

$$T(\alpha) = 4 \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}$$

avec $k = \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$. Cette intégrale dépendant du paramètre k a été étudiée dans la leçon du même nom. En particulier, il est facile de comprendre que $T(\alpha)$ tend, en croissant, vers $+\infty$ lorsque α tend vers π : le cas limite $\alpha = \pi$ correspond à l'étude faite en 4).

- 22 -

EXEMPLES DE RECHERCHE D'EXTREMUMS D'UNE FONCTION NUMERIQUE D'UNE OU DEUX VARIABLES

1

$$z = x + iy$$

$$f(x, y) = |z^3 + 3z|$$

sup et inf sur $\mathbb{R}^2$, sur $\bar{D}(0; 1)$.

1) $f \geq 0$ et $\{f = 0\} = \{0; (0, \sqrt{3}); (0, -\sqrt{3})\}$.

2) Si $F(z) = z^3 + 3z = P(x, y) + iQ(x, y)$ où

$$\begin{cases} P(x, y) = x^3 - 3xy^2 + 3x \\ Q(x, y) = -y^3 + 3x^2y + 3y \end{cases}$$

$f = \sqrt{P^2 + Q^2}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{f = 0\}$ (théorème de composition). On cherche les points critiques de f , en résolvant le système d'équations

$$\begin{cases} f \frac{\partial f}{\partial x} = P \frac{\partial P}{\partial x} + Q \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \\ f \frac{\partial f}{\partial y} = P \frac{\partial P}{\partial y} + Q \frac{\partial Q}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

On remarque que

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 + 3 = \frac{\partial Q}{\partial y} \\ \frac{\partial P}{\partial y} = -6xy = -\frac{\partial Q}{\partial x} \end{cases}$$

et on se ramène donc à résoudre

$$\begin{cases} P \frac{\partial P}{\partial x} - Q \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \\ P \frac{\partial P}{\partial y} + Q \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

sur $(P^2+Q^2 > 0)$, ce qui donne, par élimination

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 0$$

soit $\begin{cases} x^2-y^2+1 = 0 \\ xy = 0 \end{cases}$, de solutions $(0,1)$ et $(0,-1)$.

3) On étudie la nature du point critique $(0,1)$ (comme f est paire, celle de $(0,-1)$ est identique), en considérant

$$F(i+z) = 2i + 3iz^2 + z^3$$

pour $|z|$ petit :

$$f(x,1+y) = f(0,1) \left| 1 + \frac{3}{2} z^2 - \frac{i}{2} z^3 \right|$$

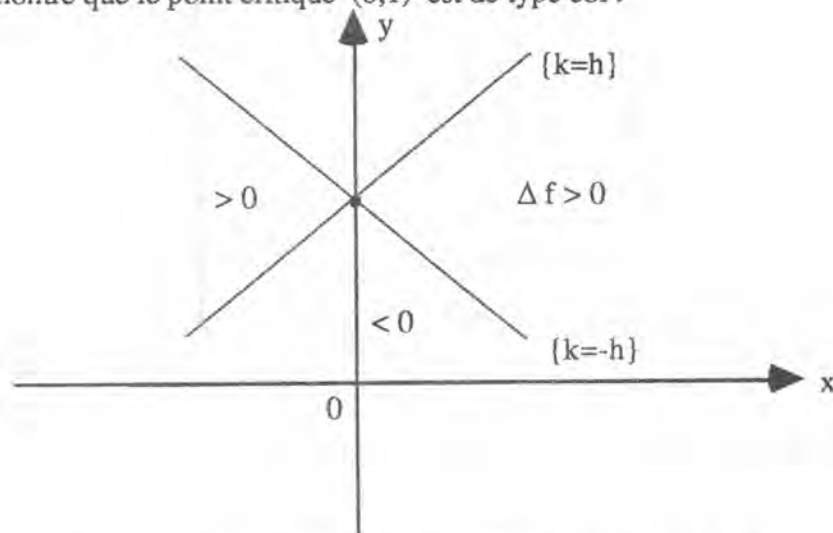
en posant $z = \rho e^{i\theta}$, on a

$$\begin{aligned} \left| 1 + \frac{3}{2} z^2 - \frac{i}{2} z^3 \right|^2 &= \\ &= \left(1 + \frac{3}{2} \rho^2 e^{2i\theta} - \frac{i}{2} \rho^3 e^{3i\theta} \right) \left(1 + \frac{3}{2} \rho^2 e^{-2i\theta} + \frac{i}{2} \rho^3 e^{-3i\theta} \right) \\ &= 1 + 3\rho^2 \cos 2\theta + \mathcal{O}(\rho^3) \end{aligned}$$

si bien que

$$\begin{aligned} f(x,1+y) &= f(0,1) \left(1 + \frac{3}{2} \rho^2 \cos 2\theta + \mathcal{O}(\rho^3) \right) \\ &= f(0,1) + 3\rho^2 \cos 2\theta + \mathcal{O}(\rho^3) \end{aligned}$$

ce qui montre que le point critique $(0,1)$ est de type col :



$\Delta f = f(h,1+k) - f(0,1)$ change de signe au voisinage de $(0,1)$.

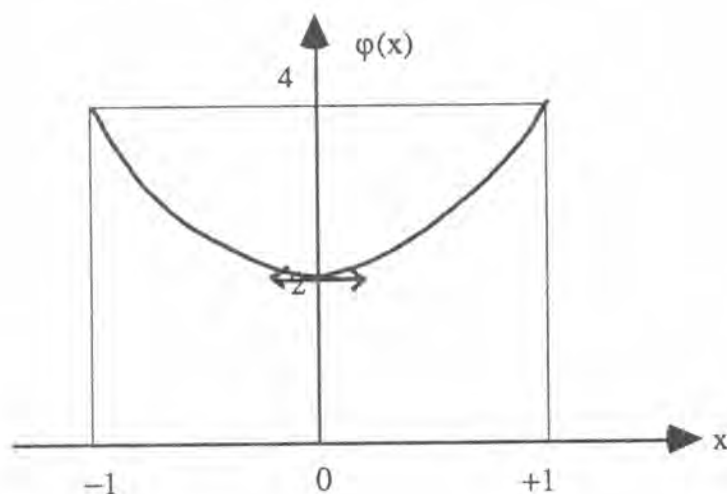
f n'a donc pas de maximum local sur $\mathbb{R}^2$.

4) Sur le compact $\bar{D}(0;1)$ de $\mathbb{R}^2$, la fonction continue f atteint ses bornes. On sait que si une borne est atteinte sur un point de l'ouvert $D(0;1)$, c'est nécessairement en un point critique : l'étude précédente montre donc que

$$\sup_{\bar{D}(0;1)} f = \sup_{\partial D(0;1)} f.$$

On étudie $f|_{\partial D(0;1)}$ en posant $y^2 = 1 - x^2$, ce qui conduit à considérer

$$\varphi(x) = 2\sqrt{1+3x^2} \text{ sur } [-1,+1] :$$



par conséquent : $\sup_{\bar{D}(0;1)} f = 4 = f(1,0)$

$$\inf_{\bar{D}(0;1)} f = 2 = f(0,1).$$

Commentaires

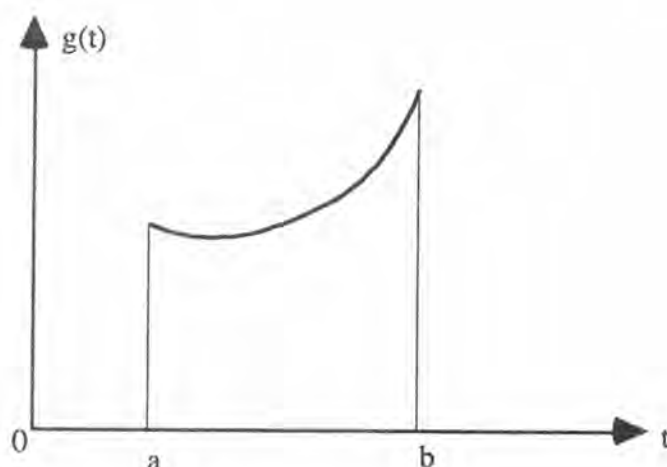
• Les phénomènes observés sont valables pour toute fonction $f = |F|$ avec $F \in \mathbb{K}[z]$ (et, ou F somme d'une série entière de rayon de convergence ≥ 1), ce qui permet de citer d'autres exemples du type $|e^z|$, $|\cos(z)|$... :

$$i) \quad \text{Si } F = P+iQ, \begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \\ \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x} \end{cases} \quad (\text{"relations de Cauchy-Riemann"})$$

découle de la $\mathbb{K}$ -dérivabilité de F .

ii) En particulier, $\Delta P = \Delta Q = 0$ ("fonctions harmoniques") et $\Delta(f^2) = |\vec{\nabla} P|^2 + |\vec{\nabla} Q|^2 \geq 0$ (f^2 "sous harmonique").

Pour $g \begin{cases} t \rightarrow g(t) \\ I \rightarrow \mathbb{R} \end{cases} \in \mathcal{C}^2$ sur I intervalle borné telle que $g'' > 0$ (g convexe) on sait que $\sup_{\bar{I}} g = \sup_{\partial I} g$.



et la démonstration de ce point s'étend en dimension 2 :

a) Si $g \in \mathcal{C}^2(U)$ avec $\Delta g > 0$, U ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ alors

$$\sup_{\bar{U}} g = \sup_{\partial U} g \quad (g \in \mathcal{C}^0(\bar{U}))$$

(si $M_0 \in U$ est tel que $\sup_{\bar{U}} g = g(M_0)$, alors $g''(M_0) \geq 0$ et, par conséquent $\Delta g(M_0) = \text{tr } g''(M_0) \geq 0$ ce qui contredit l'hypothèse).

b) Même conclusion, si $\Delta g \geq 0$.

(Considérer $g_\varepsilon = g + \varepsilon e^x$, puis faire $\varepsilon \rightarrow 0+$).

Les résultats obtenus peuvent s'interpréter en termes géométriques, puisque $f(x,y) = 0M \times M. M \times M_+ M$ où $M(x,y), M_\pm(0, \pm\sqrt{3})$.

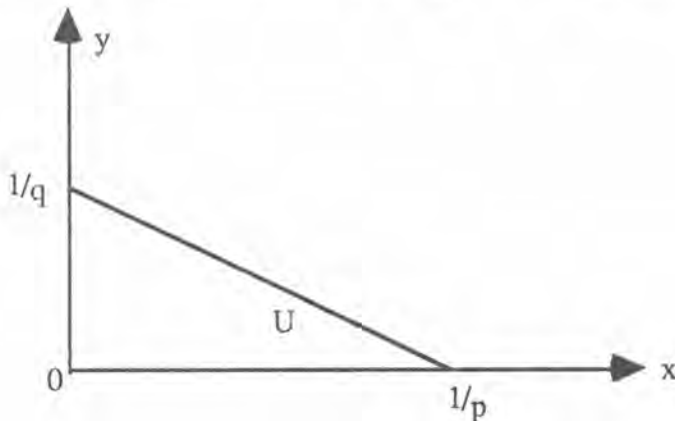
2 Etablir l'inégalité de Hölder

$$x^p y^q z^r \leq px + qy + rz$$

$(x,y,z) \geq 0 \quad p,q,r > 0 \quad p+q+r = 1$

par l'étude des extremums d'une fonction de 2 variables.

soit la fonction $f(x,y) = x^p y^q z^r$ où $z = \frac{1-px-qy}{r}$ définie sur $\bar{U} = \{x \geq 0, y \geq 0, px+qy \leq 1\}$:



1) f est $\mathcal{C}^\infty$ sur l'ouvert $U = \{x > 0, y > 0, px+qy < 1\}$ et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = p x^{p-1} y^q z^r + r x^p y^q z^{r-1} \left(-\frac{p}{r}\right)$$

$$= p(z-x)x^{p-1} y^q z^{r-1}$$

avec l'expression analogue de $\frac{\partial f}{\partial y}$, on en déduit que si $(x,y) \in U$ est un point critique de f

$$x = y = z = \frac{1-px-qy}{r}$$

ce qui conduit au seul point $(1,1)$.

2) Pour étudier la nature de ce point critique, on calcule

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= p(p-1)x^{p-2}y^qz^r + p x^{p-1}y^qz^{r-1}(-p) \\ &\quad - p^2 x^{p-1}y^qz^{r-1} - p(r-1)x^p y^q z^{r-2} \left(-\frac{p}{r}\right) \end{aligned}$$

qui donne, en $(1,1)$ où $z = 1$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) = -p\left(1 + \frac{p}{r}\right)$$

par symétrie, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1) = -q\left(1 + \frac{q}{r}\right)$ et

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) &= pq x^{p-1}y^{q-1}z^r + p x^{p-1}y^q r z^{r-1} \left(-\frac{q}{r}\right) \\ &\quad - pq x^p y^{q-1} z^{r-1} - p x^p y^q (r-1) z^{r-2} \left(-\frac{q}{r}\right) \end{aligned}$$

donne
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1) = -\frac{pq}{r}$$

Ainsi la hessienne en $(1,1)$ s'écrit-elle

$$f''(1,1) = - \begin{pmatrix} p\left(1 + \frac{p}{r}\right) & \frac{pq}{r} \\ \frac{pq}{r} & q\left(1 + \frac{q}{r}\right) \end{pmatrix}$$

Comme $\left(-\frac{pq}{r}\right)^2 - pq\left(1 + \frac{p}{r}\right)\left(1 + \frac{q}{r}\right) = -\frac{pq}{r} < 0$ on en déduit que $(1,1)$ est un maximum local sur U .

(Expliquer l'argument en détail. Remarquer qu'ici le recours aux DL_0 (après avoir posé $x = 1+h, y = 1+k$) allonge les calculs).

3) La fonction continue f atteint son maximum sur le compact $\bar{U}$. Comme $f \equiv 0$ sur ∂U et $f(1,1) = 1 > 0$, il découle de 2) que $\sup_{\bar{U}} f = 1$ ce qui conduit à l'inégalité de Hölder.

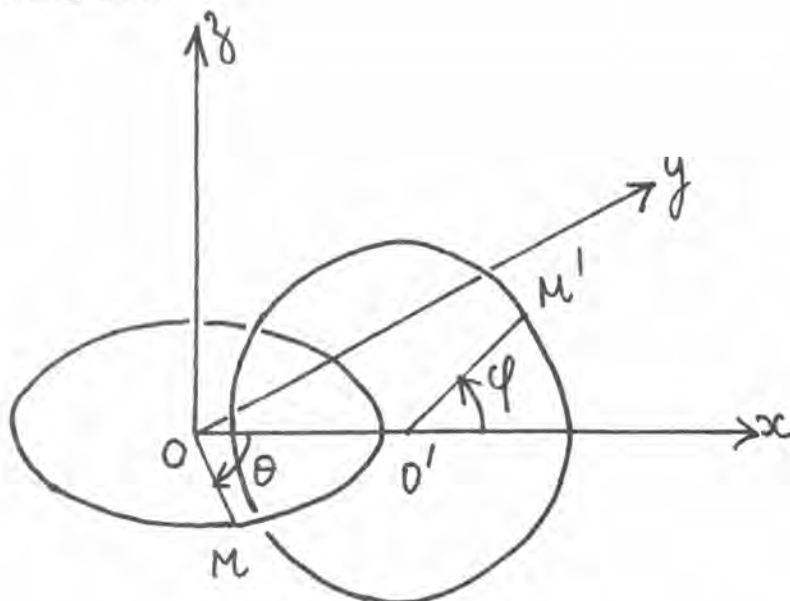
4) Etant donnés $x, y, z \geq 0$ on pose $A = px + qy + rz$ alors

$$\begin{aligned} x^p y^q z^r &= x^p y^q \left(\frac{A - px - qy}{r} \right)^r \\ &= A X^p Y^q Z^r \end{aligned}$$

par le changement de variables $x = AX, y = AY$ et avec $Z = \frac{1 - pX - qY}{r}$: avec 3) on en déduit que

$$x^p y^q z^r \leq A = px + qy + rz.$$

4) sup et inf de la distance entre 2 points qui décrivent 2 cercles de l'espace inscrits dans des plans orthogonaux :



On met le problème en équations, en choisissant comme paramètres les angles polaires θ et φ :

$$OM = R < OO' = d \quad O'M' = R' < d$$

$$\theta = (\vec{i}, \vec{OM}) \quad \varphi = (\vec{i}, \vec{O'M'})$$

de sorte que

$$M(R \cos \theta, R \sin \theta, 0)$$

$$M'(d + R' \cos \varphi, 0, R' \sin \varphi)$$

et il s'agit donc d'étudier la fonction

$$\begin{aligned} f(\theta, \varphi) &= (MM')^2 \\ &= (d + R' \cos \varphi - R \cos \theta)^2 + R^2 \sin^2 \theta + R'^2 \sin^2 \varphi \\ &= d^2 + R^2 + R'^2 - 2Rd \cos \theta + 2R'd \cos \varphi - 2RR' \cos \varphi \cos \theta \end{aligned}$$

sur $\mathbb{R}_\theta \times \mathbb{R}_\varphi$.

1) f est $\mathcal{C}^\infty$ et

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial \theta}(\theta, \varphi) = 2R(d + R' \cos \varphi) \sin \theta \\ \frac{\partial f}{\partial \varphi}(\theta, \varphi) = -2R'(d - R \cos \theta) \sin \varphi \end{cases}$$

Comme $d > R, R'$ les seuls points critiques sont les couples $(n\pi, m\pi)$, $n, m \in \mathbb{Z}$: géométriquement, cela correspond aux 4 cas suivants.

3) $\theta = \varphi = 0$

$$\begin{aligned} f(h, k) &= (d^2 + R^2 + R'^2) - 2Rd\left(1 - \frac{h^2}{2}\right) + 2R'd\left(1 - \frac{\varphi^2}{2}\right) \\ &\quad - 2RR'\left(1 - \frac{h^2}{2}\right)\left(1 - \frac{k^2}{2}\right) + \mathcal{O}(3) \\ &= f(0, 0) + R(d + R')h^2 - R'(d - R)k^2 + \mathcal{O}(3) \end{aligned}$$

développement montrant qu'il s'agit d'un point col.

Il est d'ailleurs facile de s'en rendre compte géométriquement (considérer les cas $(0,k)$ et $(h,0)$; c'est ce qui fait l'intérêt de l'exemple !).

$$\underline{\theta = 0, \varphi = \pi}$$

$$\begin{aligned} f(h, \pi+k) &= d^2 + R^2 + R'^2 - 2Rd \cos h - 2R'd \cos k + 2RR' \cos h \cos k \\ &= d^2 + R^2 + R'^2 - 2Rd \left(1 - \frac{h^2}{2}\right) - 2R'd \left(1 - \frac{k^2}{2}\right) \\ &\quad + 2RR' \left(1 - \frac{h^2}{2}\right) \left(1 - \frac{k^2}{2}\right) + \mathcal{O}(3) \\ &= f(0, \pi) + R(d-R')h^2 + R'(d-R)k^2 + \mathcal{O}(3) \end{aligned}$$

il s'agit donc d'un minimum local.

3) f étant continue et périodique est bornée sur $\mathbb{R}^2$, et atteint ses bornes sur le compact $[-\pi, +\pi]_{\theta} \times [-\pi, +\pi]_{\varphi}$.

En considérant $f_{[-2\pi, +2\pi]_{\theta} \times [-2\pi, +2\pi]_{\varphi}}$, on constate que les bornes sont nécessairement atteintes sur l'un des 4 points critiques étudiés ...

4) Si l'on admet pour R, R' des valeurs $> d$, de nouveaux points critiques apparaissent avec les valeurs $\theta_{\pm} = \pm \operatorname{Arcos}\left(\frac{d}{R}\right)$, $\varphi_{\pm} = \pi \pm \operatorname{Arcos}\left(\frac{d}{R'}\right)$ et le calcul montre qu'il s'agit de cols.

$$\boxed{4} \quad f(x, y) = \frac{1}{2} y^2 - \cos x \text{ sur } \mathbb{R}^2.$$

1) f est $\mathcal{C}^{\infty}$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \sin x \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = y \end{cases}$$

montre que les points critiques sont $(u\pi, 0)$ avec n entier.

Comme $f(x+2\pi, y) = f(x, y)$, il suffit d'étudier les points.

2) $(0, 0)$:

$$f(h, k) = -1 + \frac{1}{2} (h^2 + k^2) + \mathcal{O}(3)$$

montre que l'origine est un minimum.

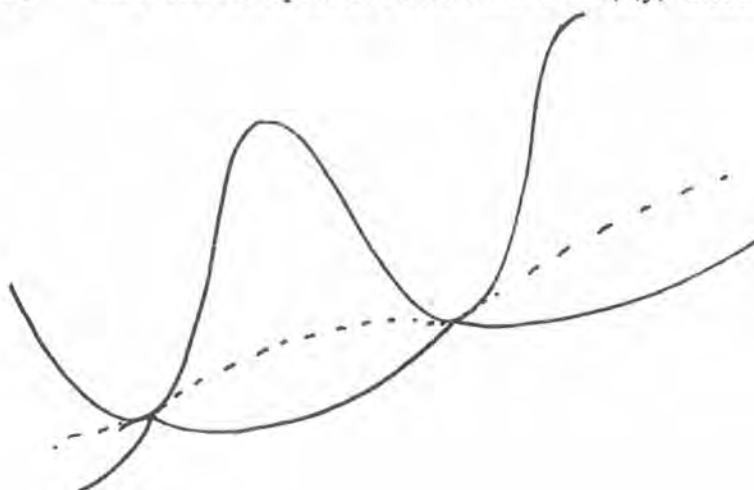
$(\pi, 0)$:

$$f(\pi+h, k) = \frac{1}{2}k^2 + \cos h$$

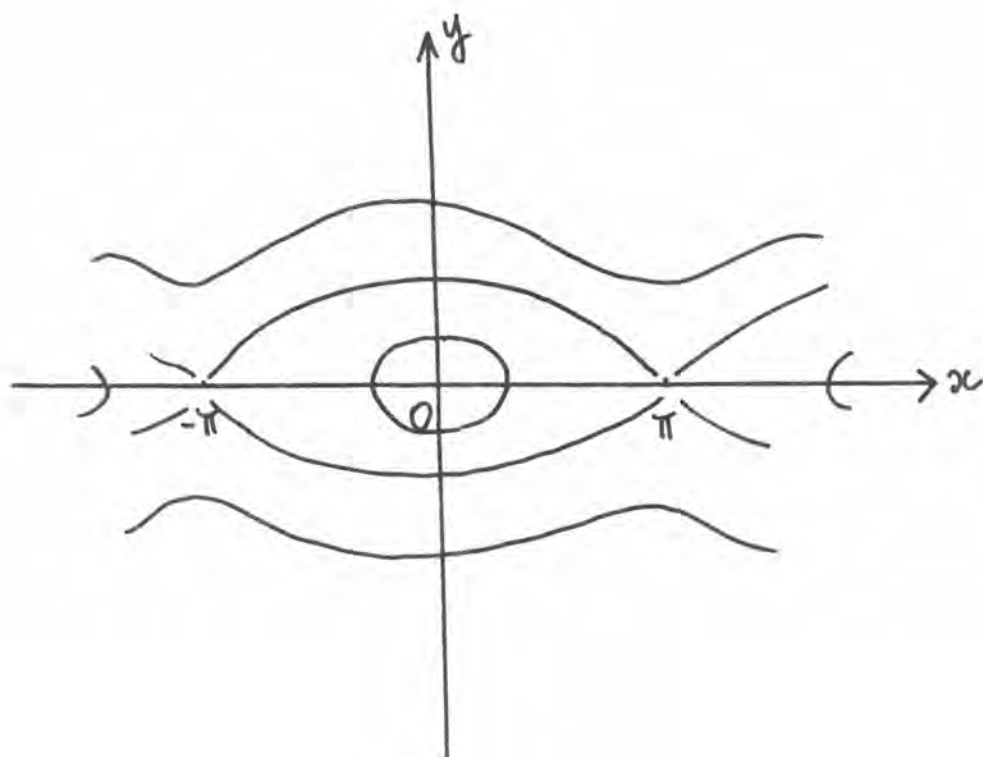
$$= 1 + \frac{1}{2}(-h^2 + k^2) + o(3)$$

montre que $(\pi, 0)$ est un col.

3) La surface d'équation cartésienne $z = -f(x, y)$ a donc l'allure suivante



et on peut représenter le réseau des lignes de niveau



4) L'intérêt de l'exemple réside dans le fait que f est une intégrale première de l'équation différentielle (du pendule) $\ddot{\theta} + \sin \theta = 0$, et que le tracé précédent met en évidence la différence de nature des équilibres $(0,0)$ (centre, oscillations) et $(\pi,0)$ (col, séparatrices des mouvements d'oscillations et de révolution).

- 23 -

EXEMPLES D'APPROXIMATION D'UN NOMBRE REEL

1 Prendre un exemple de calcul de la valeur approchée d'une racine ξ de l'équation $f(x) = 0$ (: Leçon **7**, exemple **1**).

2 Prendre un exemple où le nombre réel ξ est défini comme la somme d'une série numérique, dont on améliore la rapidité de convergence (: Leçon **17**, voir aussi l'exemple **7**).

3 Prendre un exemple où ξ est défini par une intégrale (: Leçon **13**¹).

4 Développement décimal (: Référence : Chambodal-Ovaert tome 1).

5 On va détailler ici l'approximation rationnel d'un nombre réel, et en donner une application.

1) Etant donnée une suite $(a_n)_{n \geq 0}$ dans $\mathbb{N}$, avec $a_n \in \mathbb{N}^* \quad \forall n \geq 1$, on lui associe la suite $(s_n)_{n \geq 0}$ par

$$s_n = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_n}}}, \quad \forall n \geq 0$$

et qu'on note, pour alléger l'écriture :

$$s_n = [a_0 ; a_1, a_2, \dots, a_n], \quad \forall n \geq 0.$$

Chaque s_n est évidemment un nombre rationnel qu'on peut mettre sous la forme $s_n = \frac{P_n}{Q_n}$ avec $P_n, Q_n \in \mathbb{N}$. On précise les suites (P_n) et (Q_n) par la règle suivante :

1) $P_0 = a_0, Q_0 = 1;$

2) Si $s_n = a_0 + \frac{1}{r_1}$ avec $r_1 = [a_1; a_2, \dots, a_n]$ et si $r_1 = \frac{P'}{Q'}$, on pose :

$$P_n = a_0 \cdot Q' + 1, Q_n = P'$$

s_n est appelée **réduite d'ordre n** . En raisonnant par récurrence sur l'ordre n , on établit la

Proposition :

$$\begin{cases} (1) P_n = a_n \cdot P_{n-1} + P_{n-2} \\ (2) Q_n = a_n \cdot Q_{n-1} + Q_{n-2} \end{cases} \quad \forall n \geq 2$$

et, en convenant que $P_{-1} = 1, Q_{-1} = 0$, on observe que la proposition reste vraie si $n = 1$.

Corollaire :

$$(3) Q_n \cdot P_{n-1} - P_n \cdot Q_{n-1} = (-1)^n, \quad \forall n \geq 0$$

$$(4) Q_n \cdot P_{n-2} - P_n \cdot Q_{n-2} = (-1)^{n-1} \cdot a_n, \quad \forall n \geq 1.$$

En particulier, on remarquera que la fonction $\frac{P_n}{Q_n}$ est irréductible.

2) On démontre alors le

Théorème 1 : Les suites (s_{2n}) et (s_{2n+1}) sont adjacentes.

En effet, d'après (4), (s_{2n}) est croissante, tandis que (s_{2n+1}) est décroissante ; d'après (3), $s_{2n} < s_{2n-1} \quad \forall n$, et, pour conclure, il suffit de montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} Q_{n-1} \cdot Q_n = +\infty.$$

Or, $Q_0 = 1, Q_1 = a_1 \geq 1$ et, d'après (2), on a :

$$Q_n = a_n \cdot Q_{n-1} + Q_{n-2}$$

$$\geq Q_{n-1} + Q_{n-2}$$

$$\geq 2Q_{n-2}$$

et, par conséquent

$$Q_{2n} \geq 2^n, Q_{2n+1} \geq 2^n$$

et la conclusion suit.

On désigne par ξ le nombre réel ainsi défini.

Le résultat suivant précise l'approximation de ξ par la suite rationnelle

$$\left(\frac{P_n}{Q_n}\right):$$

Théorème 2 : Pour tout entier n , on a

$$\frac{1}{Q_n \cdot Q_{n+2}} < \left| \xi - \frac{P_n}{Q_n} \right| < \frac{1}{Q_n \cdot Q_{n+1}}$$

Démonstration : C'est une conséquence immédiate du théorème 1, car

$$\begin{array}{c} \xi \\ | \\ \text{-----} \\ s_{2n} \quad s_{2n+2} \quad s_{2n+1} \end{array}$$

$$|\xi - s_n| < |s_n - s_{n+1}| = \frac{1}{Q_n \cdot Q_{n+1}}$$

$$> |s_n - s_{n+2}| = \frac{a_{n+2}}{Q_n \cdot Q_{n+2}} \geq \frac{1}{Q_n \cdot Q_{n+2}}.$$

3) On démontre que tout nombre réel ξ entre dans le cadre du théorème précédent (ξ est une fraction continue).

4) Comme application, on montre que la suite $\left(\frac{\text{tg} n}{n}\right)$ diverge :

a) D'après la relation trigonométrique

$$\frac{\text{tg}(n+1)}{n+1} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{\frac{\text{tg} n}{n} + \frac{\text{tg} 1}{n}}{\frac{1}{n} - \frac{\text{tg} n}{n} \cdot \text{tg} 1}$$

si la limite ℓ existait, elle serait nécessairement nulle.

b) On considère alors deux suites (P_j) et (Q_j) qui tendent vers $+\infty$ en croissant, et qui sont telles que :

$$(1) \quad \left| \frac{\pi}{2} - \frac{P_j}{Q_j} \right| < \frac{1}{Q_j^2}$$

$$(2) \quad P_j \cdot Q_{j-1} - P_{j-1} Q_j = (-1)^{j-1}$$

$$(3) \quad (Q_j) \text{ contient une sous-suite impaire.}$$

Alors, en écrivant que

$$\frac{\pi}{2} Q_j = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{P_j}{Q_j} \right) \cdot Q_j + P_j$$

il vient

$$|\operatorname{tg}(P_j)| = \left| \cotg \left(\frac{\pi}{2} - \frac{P_j}{Q_j} \right) \cdot Q_j \right| > \cotg\left(\frac{1}{Q_j}\right)$$

qui donne

$$\left| \frac{\operatorname{tg}(P_j)}{P_j} \right| > \frac{1}{P_j} \cotg\left(\frac{1}{Q_j}\right) \underset{(j \rightarrow \infty)}{\sim} \frac{Q_j}{P_j} \underset{(j \rightarrow \infty)}{\rightarrow} \frac{2}{\pi}.$$

D'où la contradiction cherchée.

6 (Approximation du nombre π , selon Euler)

1) On montre que, $\forall n, p \in \mathbb{N}^*$

$$\operatorname{Arctg}\left(\frac{1}{n}\right) = \operatorname{Arctg}\left(\frac{1}{n+p}\right) + \operatorname{Arctg}\left(\frac{p}{n^2+np+1}\right)$$

2) En particulier

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{Arctg}\left(\frac{1}{2}\right) + \operatorname{Arctg}\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$= 5 \cdot \operatorname{Arctg}\left(\frac{1}{7}\right) + 2 \operatorname{Arctg}\left(\frac{3}{79}\right).$$

- 3) Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $t = \frac{x^2}{1+x^2}$ (Euler : si $x = \frac{1}{7}$, $t = \frac{1}{50}$), et on établit les développements suivants :

$$\operatorname{Arctg}(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \left(1 + \sum_1^{\infty} \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2^n n! (2n+1)} \left(\frac{x^2}{1+x^2} \right)^n \right)$$

$$\operatorname{Arctg}(x) = \frac{x}{1+x^2} \left(1 + \sum_1^{\infty} \frac{2.4 \dots 2n}{3.5 \dots (2n+1)} \left(\frac{x^2}{1+x^2} \right)^n \right)$$

- 4) D'où des approximations hautement convergentes de π .

- 24 - 25 -

ILLUSTRER PAR DES EXEMPLES LA MODELISATION PROBABILISTE DE SITUATIONS CONCRETES

EXEMPLES DE SITUATIONS MENANT A L'ETUDE DE VARIABLES ALEATOIRES

1 " Une urne contient N boules (indiscernables au toucher), dont M rouges (et $N-M$ blanches).

Selon le mode de tirage de n boules ($n \leq N$ et $n \leq N-M$), déterminer le nombre moyen de boules rouges tirées ".

1) On envisage pour commencer **un tirage successif sans remise**. On propose la **modélisation suivante** :

Si $\mathcal{U} = \{R_1, \dots, R_M, B_{M+1}, \dots, B_N\}$ est l'urne, un événement élémentaire ω est une suite ordonnée de n éléments de $\mathcal{U}$: le cardinal de Ω vaut par conséquent

$$N(N-1) \dots (N-n+1) = \frac{N!}{(N-n)!} = A_N^n$$

Ω est muni de l'algèbre $\mathcal{P}(\Omega)$ de ses parties, et on définit la **probabilité** $\mathbb{P}$ par $\mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{A_N^n}$, $\forall \omega \in \Omega$ et $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{A_N^n} \times \text{Card}(A)$, $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega)$.

On introduit les variables aléatoires $X_j, j \in \{1, \dots, n\}$ définies par

$$X_j(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega_j \in \{R_1, \dots, R_M\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \forall \omega \in \Omega$$

($\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$).

Alors, la **variable aléatoire** $N = \sum_{j=1}^n X_j$ **compte le nombre de boules**

rouges tirées, et le problème posé est celui du calcul de $E(N)$ (et de $\text{Var}(N)$).

On commence par déterminer la loi de X_j :

$$\mathbb{P}(X_1 = 1) = \frac{1}{A_N^n} \cdot M \cdot A_{N-1}^{n-1}$$

car : $\text{card}\{\omega/\omega_1 \in \{R_1, \dots, R_M\}\} = M \times A_{N-1}^{n-1}$ ce qui donne

$$\mathbb{P}(X_1 = 1) = \frac{(N-n)!}{N!} \times M \times \frac{(N-1)!}{(N-n)!} = \frac{M}{N}$$

$$\mathbb{P}(X_2 = 1) = \mathbb{P}(X_2 = 1, X_1 = 1) + \mathbb{P}(X_2 = 1, X_1 = 0)$$

$$= \frac{1}{A_N^n} \cdot M(M-1) \cdot A_{N-2}^{n-2} + \frac{1}{A_N^n} \cdot (N-M) \cdot M \cdot A_{N-2}^{n-2}$$

$$= M(N-1) \cdot \frac{(N-n)!}{N!} \cdot \frac{(N-2)!}{(N-n)!} = \frac{M}{N}$$

ce qui amène à supposer que

$$\mathbb{P}(X_j = 1) = \frac{M}{N} \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

On peut établir cette propriété par récurrence, en faisant l'hypothèse que le résultat est vrai pour tous M et N , jusqu'au rang n (ce qui précède le montre pour M et N quelconque, et $n = 2$), et en le montrant pour le rang $(n+1)$:

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 1) = \mathbb{P}(X_{n+1} = 1, X_1 = 1) + \mathbb{P}(X_{n+1} = 1, X_1 = 0)$$

où $\mathbb{P}(X_{n+1} = 1, X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_{n+1} = 1 / X_1 = 1) \times \mathbb{P}(X_1 = 1)$

$$= \frac{M-1}{N-1} \cdot \frac{M}{N} \quad (*)$$

et $\mathbb{P}(X_{n+1} = 1 / X_1 = 0) = \frac{M}{N-1} \cdot \frac{N-M}{N}$

donnent $\mathbb{P}(X_{n+1} = 1) = \frac{M-1}{N-1} \cdot \frac{M}{N} + \frac{M}{N-1} \cdot \frac{N-M}{N}$

$$= \frac{M}{N}.$$

(*) $\mathbb{P}(X_{n+1} = 1 / X_1 = 1) = \frac{M-1}{N-1}$

d'après l'hypothèse de récurrence (: "sous $(X_1 = 1)$, l'urne contient $(N-1)$ boules, dont $(M-1)$ sont rouges ; on effectue dans cette nouvelle urne un tirage successif, sans remise, de n boules").

Il faut savoir justifier ce raisonnement : $\mathbb{P}(\cdot/X_1 = 1)$ est une probabilité sur Ω , définie par

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A/X_1 = 1) &= \frac{\mathbb{P}(A \cap \{X_1 = 1\})}{\mathbb{P}(X_1 = 1)}, \quad \forall A \subset \Omega \\ &= \frac{1}{\binom{M}{N}} \cdot \frac{1}{A_N^n} \cdot \text{card}\{\omega \in A, \omega_1 \text{ est rouge}\}\end{aligned}$$

en particulier

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{n+1} = 1/X_1 = 1) &= \frac{1}{A_{N-1}^{n-1}} \cdot \frac{1}{M} \cdot \text{card}\{\omega/\omega_1 \text{ et } \omega_{n+1} \text{ sont rouges}\} \\ &= \frac{1}{A_{N-1}^{n-1}} \cdot \frac{1}{M} \cdot M \cdot \text{card}\{\omega' / \omega_{n+1} \text{ est rouge}\}\end{aligned}$$

où on note $\omega \in \Omega = \Omega_{n+1}$ sous la forme (ω_1, ω') avec $\omega' \in \Omega_n$: ω' est une suite ordonnée de n éléments d'une urne $\mathcal{U}'$ qui contient $(N-1)$ boules, dont $(M-1)$ sont rouges. On observe donc que $\mathbb{P}(\cdot/X_1 = 1)$ peut se lire comme la probabilité $\mathbb{P}$, avec N, M et n changés respectivement en $N-1, M-1$ et $n-1$: ce qui permet de justifier (*).

On en déduit immédiatement **l'espérance de N** :

$$E(N) = \sum_{j=1}^n E(X_j) = n \cdot \frac{M}{N} = n.p$$

où $p = \frac{M}{N}$ désigne donc la probabilité de tirer une boule rouge de l'urne.

On calcule maintenant la variance de N , en commençant par $E(X_j X_k)$:

$$\mathbb{P}(X_1 = X_2 = 1) = \mathbb{P}(X_2 = 1 / X_1 = 1) \cdot \mathbb{P}(X_1 = 1)$$

$$= \frac{M-1}{N-1} \cdot \frac{M}{N}$$

$$\mathbb{P}(X_1 = X_3 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = X_2 = X_3 = 1) + \mathbb{P}(X_1 = X_3 = 1, X_2 = 0)$$

$$= \frac{M-2}{N-2} \cdot \frac{M-1}{N-1} \cdot \frac{M}{N} + \frac{M-1}{N-2} \cdot \left(1 - \frac{M-1}{N-1}\right) \cdot \frac{M}{N}$$

$$= \frac{M-1}{N-1} \cdot \frac{M}{N}$$

amène à supposer que $E(X_j \cdot X_k) = \frac{M-1}{N-1} \cdot \frac{M}{N}$ pour tous $j \neq k$:

$$" \mathbb{P}(X_j = X_k = 1) = \mathbb{P}(X_j = 1 / X_k = 1) \cdot \mathbb{P}(X_k = 1), j > K$$

$$= \frac{M-1}{N-1} \cdot \frac{M}{N} "$$

On en déduit la covariance

$$C(X_j, X_k) = E(X_j \cdot X_k) - E(X_j) \cdot E(X_k)$$

$$= \frac{M(M-1)}{N(N-1)} - \left(\frac{M}{N}\right)^2$$

$$= p \cdot \frac{M-N}{N(N-1)}$$

et la variance demandée

$$\text{Var}(N) = E \left(\left(\sum_{j=1}^n X_j - \bar{N} \right)^2 \right)$$

$$= \sum_{j=1}^n E(X_j^2) + 2 \cdot \sum_{1 \leq k < j \leq n} E(X_j \cdot X_k) - \bar{N}^2$$

$$= n \cdot p + 2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{M(M-1)}{N(N-1)} - (n \cdot p)^2$$

$$= np(1-p) \left(1 - \frac{n-1}{N-1} \right)$$

Référence : Rényi Calcul des probabilités ch. 3.

2) On envisage maintenant le cas d'un **tirage simultané** : un événement élémentaire ω est donc la saisie de n boules parmi N , le cardinal de Ω vaut C_N^n , et on posera

$$\mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{C_N^n}$$

définissant sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ une probabilité.

On introduit alors la **variable aléatoire S** définie sur Ω par

$$S(\omega) = \text{nombre de boules rouges dans } \omega, \omega \in \Omega.$$

On détermine facilement la **loi de S** :

$$\mathbb{P}(S = k) = \frac{1}{C_N^n} \times C_M^k \times C_{N-M}^{n-k}$$

(il existe C_M^k façons de choisir les k boules rouges devant être présentes dans ω , et C_{N-M}^{n-k} façons de choisir les boules blanches).

S a donc **une loi hypergéométrique** $\mathcal{H}(n, M, N)$

$$\begin{aligned} E(S) &= \sum_{k=0}^{k=n} k \cdot \frac{1}{C_N^n} \cdot C_M^k \cdot C_{N-M}^{n-k} \\ &= \frac{1}{C_N^n} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{M!}{(k-1)!(M-k)!} \cdot C_{N-M}^{n-k} \\ &= \frac{M}{C_N^n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} C_{M-1}^k \cdot C_{N-M}^{n-k-1} \\ &= \frac{M}{C_N^n} \cdot C_{N-1}^{n-1} \\ &= n \cdot p \quad \text{où } p = \frac{M}{N} . \end{aligned}$$

Le calcul de la variance est analogue, et donne le même résultat qu'en 1).

Références : Rényi

Feller IX.5

3) On considère enfin **un tirage successif, avec remise** : ici, $\text{card}(\Omega) = N^n$ et on pose $\mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{N^n}$ on prend la même variable aléatoire S : pour $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, on a

$$\mathbb{P}(S = k) = \frac{1}{N^n} \cdot C_n^k \cdot M^k (N-M)^{n-k}$$

(pour déterminer $\text{card}\{\omega / \omega \text{ compte } k \text{ boules rouges, on peut commencer par choisir les rangs d'apparition des boules rouges, ce qui offre } C_n^k \text{ possibilités ...}\}$. S suit donc une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ et $E(S) = n.p$ tandis que $\text{Var}(S) = np(1-p)$.

Référence : Feller IX.5

2 "Un message radio transmis est déchiffrable avec la probabilité p . Quelle est la probabilité qu'on doive le transmettre un nombre de fois $\geq k$? "

Soit $(X_i)_{i \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\{0, 1\}$, et de même loi donnée par

$$\mathbb{P}(X = 1) = p.$$

On rappelle que l'existence d'un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ sur lequel une telle suite de Bernoulli existe est assurée par le théorème de Kolmogorov.

Pour $n \geq 1$, l'ensemble

$$\Omega_n = \{X_1 = \dots = X_{n-1} = 0, X_n = 1\}$$

correspond à l'ensemble des messages déchiffrés exactement à la $n^{\text{ième}}$ tentative :

$$\mathbb{P}(\Omega_n) = q^{n-1} \cdot p \text{ où } q = 1-p$$

puisque les V.A. sont indépendantes.

La probabilité demandée est celle de l'ensemble $\bigcup_{n \geq k} \Omega_n$ qui vaut

$$\sum_{n \geq k} q^{n-1} \cdot p = p \cdot q^{k-1} \frac{1}{1-q} = q^{k-1}, \quad k \geq 1.$$

3 "B. possède une boîte d'allumettes dans chacune de ses poches droite et gauche. Chaque fois qu'il désire une allumette, il choisit au hasard une poche. Au début, chaque boîte contient N allumettes. Au moment où B découvre qu'une boîte est vide, combien reste-t-il en moyenne d'allumettes dans l'autre boîte ? "

Un événement élémentaire ω est une suite de $2N$ choix poche gauche - poche droite :

$$\Omega = \{0,1\}^{2N}$$

(on convient que $\omega_i = 1$ correspond au choix de la poche gauche lors de la recherche de la $i^{\text{ème}}$ allumette). On pose $\mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{2^{2N}}$: $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ est un espace de probabilité.

On considère maintenant la suite de variables aléatoires

$$X_i : \omega \rightarrow \omega_i \quad 1 \leq i \leq 2N$$

puis la variable aléatoire

$$X_i : \omega \rightarrow \min\{n / \sum_{i=1}^n X_i(\omega) = N\}$$

$$\Omega \rightarrow \{N, N+1, \dots, 2N\}.$$

La variable aléatoire $Y = N - (X - N) = 2N - X$ indique le nombre d'allumettes qui restent dans la boîte de droite, à l'instant où la boîte gauche se vide.

Si Z est la variable aléatoire qui indique le nombre d'allumettes restantes à l'instant où B. s'aperçoit que la boîte gauche est vide, alors

$$\{Z = 2N - k\} = \left\{ \omega \in \Omega / \sum_{i=1}^{i=k} X_i = N \text{ et } X_{k+1} = 1 \right\}.$$

Par conséquent,

$$\mathbb{P}(Z = 2N - k) = \frac{1}{2^{2N}} \cdot C_k^N \cdot 2^{2N - (k+1)}$$

pour $k = N, N+1, \dots, 2N$.

La variable aléatoire R à étudier a donc comme loi

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(R = h) &= 2 \cdot 2^{h-2N-1} \cdot C_{2N-h}^N \\ &= 2^{h-2N} \cdot C_{2N-h}^N, \quad h = 0, 1, \dots, N \end{aligned}$$

et il s'agit de calculer $E(R)$:

$$E(R) = \sum_{h=0}^N h \cdot 2^{-2N+h} \cdot C_{2N-h}^N$$

Si $p_h = 2^{-2N+h} \cdot C_{2N-h}^N$, on remarque que

$$\begin{aligned} (N-h) \cdot p_h &= 2^{-2N+h} \cdot \frac{(2N-h)!}{N!(N-h-1)!} \\ &= \frac{2N-h}{2} \cdot p_{h+1} \\ &= \frac{1}{2} (2N+1) \cdot p_{h+1} - \frac{1}{2} (h+1) \cdot p_{h+1} \end{aligned}$$

pour $h = 0, 1, \dots, N$ (en convenant que $p_{N+1} = 0$).

Compte tenu du fait que $\sum_{h=0}^N p_h = 1$, il vient donc, en sommant la relation

précédente :

$$N - E(R) = \frac{1}{2} (2N+1) \cdot (1 - p_0) - \frac{1}{2} E(R)$$

d'où $E(R) = (2N+1) \cdot p_0 - 1$

$$= (2N+1) \cdot 2^{-2N} C_{2N}^N - 1.$$

Lorsque $N \rightarrow \infty$, $E(R) \sim 2\sqrt{\frac{N}{\pi}} - 1$ avec la formule de Stirling.

Référence : Feller IX.9

4 "Un groupe de N éprouvettes est soumis à un test sanguin. On suppose que la probabilité p que le test soit positif est la même pour chaque éprouvette. On range les N éprouvettes par groupes de k éléments. On mélange un échantillon de ces k éléments : si le test est positif, on doit alors procéder à l'analyse des k éprouvettes. Cette façon de faire est-elle plus avantageuse que celle qui consiste à analyser chacune des N éprouvettes ? "

On considère N variables aléatoires e_j , $j = 1, \dots, N$ sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{C}, \mathbb{P})$, indépendantes, à valeurs dans $\{0, 1\}$, et de même loi donnée par $\mathbb{P}(e = 1) = p \in]0, 1[$.

L'ensemble $\{e_1, \dots, e_N\}$ est ordonné selon $\{g_1, \dots, g_n\}$, n sous-ensembles de k éléments chacun ($N = n.k$), et on considère les n variables aléatoires X_j , $j = 1, \dots, n$ définies par

$$X_j(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{si } g_j(\omega) = (0, \dots, 0) \\ 1+k, & \text{sinon} \end{cases}$$

Les variables aléatoires $(X_j)_{j=1}^n$ sont indépendantes et de même loi, donnée par

X	1	1+k
$\mathbb{P}$	q^k	$1-q^k$

où $q = 1-p$.

Le nombre d'analyses nécessaires est donné par

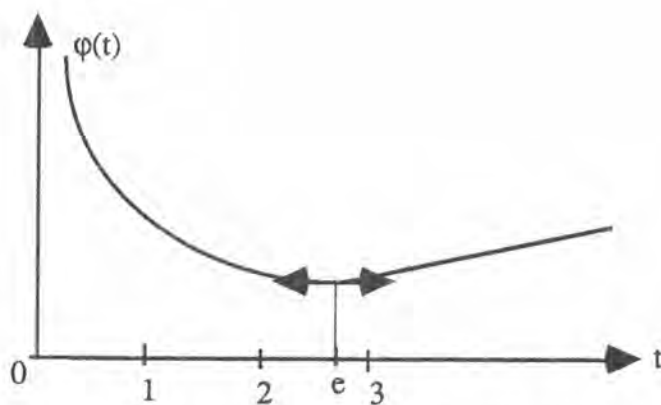
$$X = \sum_{j=1}^n X_j$$

et il s'agit de comparer $E(X)$ à N :

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{N}{k} \cdot (q^k + (1+k) \cdot (1-q^k)) \\ &= N \cdot \left(1 + \frac{1}{k} - q^k \right) \end{aligned}$$

Le procédé est donc, en moyenne, intéressant à condition que $kq^k > 1$.

A p donné, il faut donc qu'il existe un entier k pour lequel $q > \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k}}$. L'étude de la fonction $\varphi(t) = \exp - \frac{\lambda n t}{t}$, $t > 0$:



montre que q doit être supérieure à $\varphi(3) \approx 0,694$.

Maintenant, étant donné $q > 0,694$, on peut se poser la question du choix de k qui minimiserait $E(X)$, c'est-à-dire $\psi(k) = \frac{1}{k} - q^k$:

$$\psi'(k) = -\frac{1}{k^2} - \ln q \cdot q^k, \quad k > 0$$

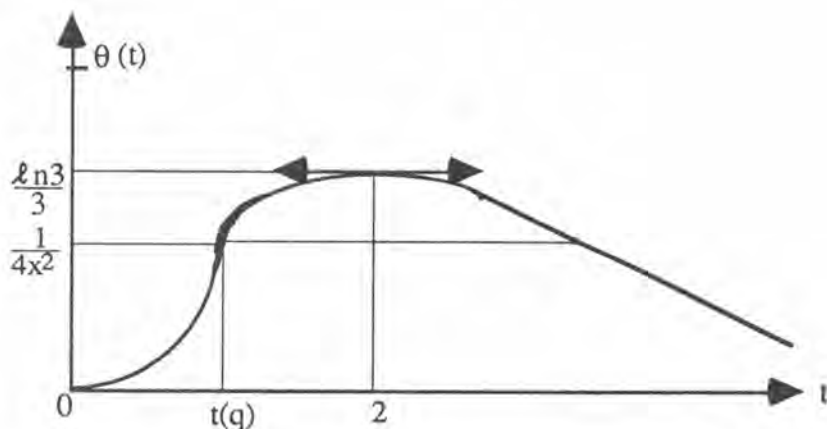
pour résoudre l'équation $\psi'(k) = 0$, soit

$$\frac{1}{k^2} = -\ln q \cdot e^{k \ln q}$$

posons $x = -\ln q$ et $t = k \cdot x$:

$$x = t^2 \cdot e^{-t} = \theta(t)$$

avec



où $0 < x = -\ln q < \frac{1}{3} \ln 3 \approx 0,366$.

En particulier, pour q proche de 1 (x petit) $t(q) \approx \sqrt{x}$ et le k optimal est de l'ordre de $\frac{1}{\sqrt{-\ln q}}$.

Références : Feller IX.9

Ventsel-Ovtcharov IV.

5 " Une population de n éléments est soumise à un tirage avec remise. A r donné, quel est en moyenne le nombre de tirages nécessaires pour obtenir r éléments distincts ? "

Sur l'ensemble $\Omega_N = E^N$ où $E = \{1, 2, \dots, n\}$ et $N \in \mathbb{N}$, on pose

$\mathbb{P}_N(A) = \mathbb{N}(1; n^N, \text{card}(A))$, $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega_N)$, définissant ainsi un **espace de probabilité** $(\Omega_N, \mathcal{P}(\Omega_N), \mathbb{P}_N)$, qui modélise les N -tirages avec remise. Pour modéliser les tirages illimités, il faut faire appel au **théorème de Kolmogorov** qui assure sur $\Omega = E^{\mathbb{N}}$ l'existence d'une σ -algèbre contenant les cylindres et d'une probabilité $\mathbb{P}$ telle que, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega_N)$,

$$\mathcal{P}(\pi_N^{-1}(A)) = \mathcal{P}_N(A)$$

où $\pi_N^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega / \pi_N(\omega) = (\omega_1, \dots, \omega_N) \in A\}$.

On considère alors la **variable aléatoire** S_r définie par

$$S_r(\omega) = \inf\{N / (\omega_1, \dots, \omega_N) \text{ compte } r \text{ éléments distincts}\}$$

pour tout ω tel que $l\{.\}$ soit non vide.

Sinon, on pose $S_r(\omega) = +\infty$:

$$S_r : \Omega \rightarrow \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$$

La question posée est celle du calcul de $E(S_r)$.

On remarque tout d'abord que S_r est presque sûrement finie, c'est-à-dire que $\mathbb{P}(S_r = +\infty) = 0$.

En effet, pour tout entier N positif, l'ensemble :

$$\{S_r > N\} = \{\omega / (\omega_1, \dots, \omega_N) \text{ compte au plus } (r-1) \text{ éléments distincts}\}$$

voit son cardinal contrôlé par $\sum_{j=0}^{r-1} C_n^j j^N$, et, par conséquent

$$\mathbb{P}(S_r > N) = \mathbb{P}_N(S_r > N)$$

$$\leq \sum_{j=0}^{r-1} C_n^j \left(\frac{j}{n}\right)^N$$

où le majorant tend vers 0, lorsque $N \rightarrow +\infty$.

On considère maintenant la variable aléatoire X définie par $S_{r+1} = S_r + X$. Ainsi, $\{X = x\} = \left\{ \omega / (\omega_1, \dots, \omega_{S_r(\omega)}) \text{ compte } r \text{ éléments distincts,} \right.$

$$\omega_{S_r(\omega)+1}, \dots, \omega_{S_r(\omega)+x-1} \in \{\omega_1, \dots, \omega_{S_r(\omega)}\},$$

$$\text{et } \omega_{S_r(\omega)+x} \notin \{\omega_1, \dots, \omega_{S_r(\omega)}\} \}$$

et, comme $\mathbb{P}(S_r < \infty) = 1$, on peut écrire que

$$\mathbb{P}(X = r) = \sum_{s \geq r} \mathbb{P}(S_r = s, X = r).$$

Mais $\mathbb{P}(S_r = s, X = r) = \mathbb{P}_{s+x}(\left\{ \omega / (\omega_1, \dots, \omega_s) \text{ compte } r \text{ éléments distincts,} \right.$

$$\omega_{s+1}, \dots, \omega_{s+x-1} \in \{\omega_1, \dots, \omega_s\}, \text{ et } \omega_{s+x} \notin \{\omega_1, \dots, \omega_s\} \})$$

soit, en revenant à la définition de $\mathbb{P}_{s+x}$:

$$\mathbb{P}(X = x, S_r = s) =$$

$$\left(\frac{1}{n}\right)^{s+x} \cdot \text{card}\{.\} =$$

$$\left(\frac{1}{n}\right)^{s+x} \cdot n^s \mathbb{P}(S_r = s) \cdot r^{x-1} \cdot (n-r) =$$

$$\left(\frac{r}{n}\right)^{x-1} \cdot \left(1 - \frac{r}{n}\right) \cdot \mathbb{P}(S_r = s).$$

Si bien que (*)

$$\mathbb{P}(X = x) = \left(\frac{r}{n}\right)^{x-1} \cdot \left(1 - \frac{r}{n}\right)$$

Par conséquent

$$E(X) = \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot \left(\frac{r}{n}\right)^{x-1} \cdot \left(1 - \frac{r}{n}\right) = \frac{1}{1 - \frac{r}{n}} = \frac{n}{n-r}.$$

Comme $S_1 = 1$, $S_r = 1 + X_1 + \dots + X_r$ et

$$E(S_r) = n \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \dots + \frac{1}{n-r+1} \right)$$

est l'espérance demandée.

(*) Solution directe préconisée par la référence.

Référence : Feller IX.3.

[6] "Un graphologue est soumis au test suivant : on lui présente, pour 10 personnes, un exemplaire de leur écriture, avec une description de leur personnalité (!) : il doit apparier. Il obtient

a) 4 succès

b) 3 succès

est-il compétent ? "

Si $\mathcal{E} = \{e_i\}_{i=1}^{10}$ et $\mathcal{P} = \{p_i\}_{i=1}^{10}$ est l'ensemble des écritures et des personnes, un élément élémentaire ω est une bijection de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{P}$:

$$\text{card}(\Omega) = 10! \text{ et } \mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{10!}.$$

Pour i compris entre 1 et 10, on considère la **variable aléatoire** X_i définie par

$$X_i(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega(e_i) = p_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ainsi la variable aléatoire $X = \sum_{i=1}^{10} X_i$ compte-t-elle le nombre de succès. Si on identifie $\mathcal{E} = \mathcal{P} = \{1, 2, \dots, 10\}$, pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega)$ désigne le nombre de points fixes de la permutation ω .

On détermine la loi de X : pour $0 \leq k \leq 10$,

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{10!} \cdot C_{10}^k \cdot p_{10-k}$$

où $p_{10-k} = p_n$ désigne le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments, sans point fixe. Ce nombre est calculé dans l'exemple 2 de la Leçon 26, où il est montré que

$$p_n = n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots + \frac{(-1)^n}{n!} \right)$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = k) &= \frac{1}{10!} \frac{10!}{k!(10-k)!} \cdot (10-k)! \cdot \left(1 - \frac{1}{1!} + \dots + \frac{(-1)^{10-k}}{(10-k)!} \right) \\ &= \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots + \frac{(-1)^{10-k}}{(10-k)!} \right) \end{aligned}$$

formule dans laquelle on peut remplacer la parenthèse par $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = \frac{1}{e}$, en commettant une erreur inférieure à $\frac{1}{(10-k-1)!}$ (d'après la règle de contrôle du reste d'une série alternée convergente) : pour $k \geq 4$, cette erreur est $\leq 10^{-2}$. L'approximation $\mathbb{P}(X = k) \approx \frac{1}{k!} \cdot \frac{1}{e}$ correspond à une loi de Poisson de paramètre 1.

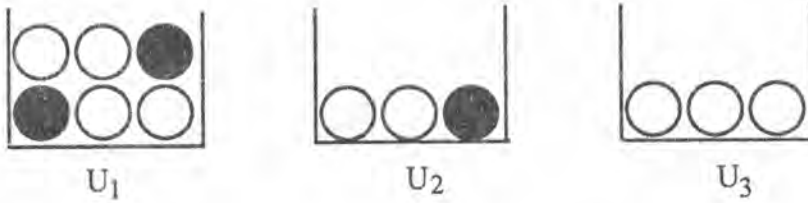
On donne les résultats numériques :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \geq 4) &= 1 - \mathbb{P}(X \leq 3) \\ &\approx 1 - \frac{1}{e} \left(1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \right) \\ &\approx 0,019 \end{aligned}$$

tandis que $\mathbb{P}(X \geq 3) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 2) \approx 0,080$

... on peut donc envisager une certaine compétence dans le premier cas.

7

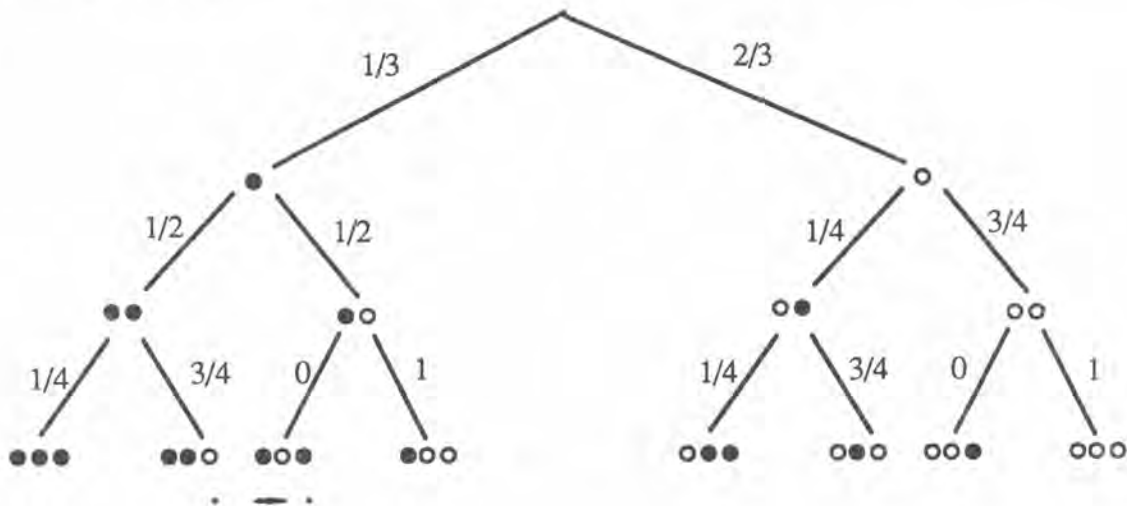


: de l'urne U_1 , on tire une boule et on la met dans l'urne U_2 ; de l'urne U_2 , on tire une boule et on la met dans l'urne U_3 ; si, de l'urne U_3 , on tire une boule noire, on gagne 100 F. Quelle est l'espérance de gain ? "

Un événement élémentaire ω est une suite ordonnée de 3 symboles B ou N : $\text{card}(\Omega) = 9$, mais les événements ne sont pas équiprobables. On considère la variable aléatoire X définie par

$$X(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{si } \omega_3 = N \\ 0, & \text{si } \omega_3 = B \end{cases} : \text{il s'agit de calculer } E(X).$$

Pour déterminer la probabilité de chaque événement ω , on considère l'arbre des chemins aléatoires suivant :



qui permet, en particulier de calculer

$$\mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{2}{3}$$

puis l'espérance de gain, qui vaut

$$120 \times E(X) = 10^F.$$

8 Une urne contient v boules vertes et r boules rouges : on tire une boule, on note sa couleur et on la remet dans l'urne avec b boules de la même couleur. On continue : quelle est, en moyenne, le nombre de boules vertes tirées ? "

On modélise le problème de n tirages : un événement élémentaire ω est une suite ordonnée de n symboles V ou R . Pour $i = 1, 2, \dots, n$, on désigne par X_i la variable aléatoire définie par

$$X_i(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{si } \omega_i = V \\ 0, & \text{si } \omega_i = R \end{cases}.$$

Si on pose $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, il s'agit de calculer $E(S_n)$.

Sur Ω , il est naturel de supposer l'existence d'une probabilité $\mathbb{P}$ telle que :

$$\mathbb{P}(X_1 = 1) = \frac{v}{v+r}, \quad \mathbb{P}(X_1 = 0) = \frac{r}{v+r}$$

puis

$$\mathbb{P}(X_2 = 1 / X_1 = 1) = \frac{v+b}{v+r+b}, \quad \mathbb{P}(X_2 = 1 / X_1 = 0) = \frac{v}{v+r+b}$$

$$\mathbb{P}(X_2 = 0 / X_1 = 1) = \frac{r}{v+r+b}, \quad \mathbb{P}(X_2 = 0 / X_1 = 0) = \frac{r+b}{v+r+b}$$

Comme :

$$1 = \frac{v+b}{v+r+b} \cdot \frac{v}{v+r} + \frac{v}{v+r+b} \cdot \frac{r}{v+r} + \frac{r}{v+r+b} \cdot \frac{v}{v+r} + \frac{r+b}{v+r+b} \cdot \frac{r}{v+r}$$

on est assuré de l'existence de $\mathbb{P}$, pour $n = 2$.

1) Pour déterminer la loi de S_n , on commence par calculer :

$$\mathbb{P}(S_n = k / S_k = k) = \mathbb{P}(\underbrace{\{VV\dots V\}}_k \underbrace{RR\dots R}_{n-k=h}) =$$

$$\frac{v}{v+r} \cdot \frac{v+b}{v+r+b} \cdot \frac{v+2b}{v+r+2b} \cdots \frac{v+(k-1)b}{v+r+(k-1)b} \cdot \frac{r}{v+r+kb} \cdots \frac{r+(h-1)b}{v+r+(n-1)b}$$

...et on se convaincra que

$$\mathbb{P}(S_n = k) = C_n^k \cdot \frac{v(v+b) \dots (v+(k-1)b) \cdot r(r+1) \dots (r+(n-k)b)}{(v+r) \dots (v+r+(n-1)b)}$$

2) Le calcul de $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \frac{v}{v+r}$, puis de

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_2 = 1) &= \mathbb{P}(X_2 = 1 / X_1 = 1) \cdot \mathbb{P}(X_1 = 1) \\ &\quad + \mathbb{P}(X_2 = 1 / X_1 = 0) \cdot \mathbb{P}(X_1 = 0) \\ &= \frac{v}{v+r} \cdot \frac{v+b}{v+r+b} + \frac{r}{v+r} \cdot \frac{v}{v+r+b} \\ &= \frac{v}{v+r} \end{aligned}$$

suggère que, pour tout n , on ait

$$\mathbb{P}(X_1 = 1) = \frac{v}{v+r}.$$

Ce qu'on démontre par récurrence sur n , en supposant la propriété vraie pour tout couple (v, r) , par un raisonnement analogue à celui de l'exemple 1.

On montre de même que, pour tout $n > m > 0$,

$$\mathbb{P}(X_1 = 1, X_m = 1) = \frac{v \cdot (v+b)}{(v+r)(v+r+b)}.$$

3) En particulier, on a

$$\begin{aligned} E(S_n) &= n \cdot \frac{v}{v+r} \\ \text{Var}(S_n) &= \frac{nv}{(v+r)^2} \cdot \frac{v+r+nb}{b+v+r}. \end{aligned}$$

Références : Feller V.2 et IX.

- 26 -

EXEMPLES DE PROBLEMES DE DENOMBREMENT

On commence par quelques **rappels et notations**.

$E_n(E_m)$ est un ensemble à n éléments (m).

Si l'on considère l'ensemble $E_m^{E_n}$ des applications de E_n dans E_m ,

- a) il existe m^n éléments dans $E_m^{E_n}$; on notera

$$|E_m^{E_n}| = m^n$$

(En effet, si $E_n = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, chaque $f(x_j)$ peut prendre m valeurs, $j = 1, 2, \dots, n$).

- b) il existe, si $n \leq m$, $\frac{m!}{(m-n)!} = A_m^n$ injections de E_n dans E_m .

($f(x_1)$ peut prendre m valeurs, il en reste $(m-1)$ pour $f(x_2)$... ce qui offre $m(m-1)\dots(m-n+1)$ possibilités).

Exercice : Démontrer a) et b) par récurrence sur n .

En particulier :

- c) il existe 2^n parties dans E_n : en effet, si on associe à une partie A de E_n sa fonction caractéristique χ_A ($\chi_A(x) = 1$ si $x \in A$, $\chi_A(x) = 0$ sinon), on établit **une bijection** χ de l'ensemble $\mathcal{P}(E_n)$ des parties de E_n sur l'ensemble $\{0,1\}^{E_n}$ et, par conséquent

$$|\mathcal{P}(E_n)| = |\{0,1\}^{E_n}| = 2^n.$$

- d) il existe $n!$ bijections de E_n sur lui-même (**permutations de E_n**), car si $m = n$, toute injection de E_n sur E_n est une bijection.

- e) il existe $\frac{1}{n!} A_m^n = \frac{m!}{n!(m-n)!} = C_m^n$ parties de E_m à n éléments (on suppose $m \geq n$) : en effet, si on désigne par $J_{E_m}^{E_n}$ l'ensemble des injections de E_n dans E_m , et par $\mathcal{P}_n(E_m)$ l'ensemble des parties de E_m à n éléments, alors

$$\left\{ \{f \in J_{E_m}^{E_n} / f(E_n) = A\} / A \in \mathcal{P}_n(E_m) \right\}$$

constitue une **partition** de $J_{E_m}^{E_n}$ et, par conséquent

$$|J_{E_m}^{E_n}| = n! \times |\mathcal{P}_n(E_m)|$$

car, d'après d), si $A \in \mathcal{P}_n(E_m)$, on a :

$$|\{f \in J_{E_m}^{E_n} / f(E_n) = A\}| = n!$$

d'où la conclusion.

On complète cette introduction par l'énoncé, et la démonstration du **principe d'inclusion-exclusion**.

Soient $A_1, \dots, A_p$ p parties de E_n ; il est facile de voir que

$$\prod_{k=1}^{k=p} (1 - \chi_{A_k}) = \chi_{C_{E_n} A_1 \cup \dots \cup A_p}$$

d'où, en développant le produit, et en introduisant les fonctions symétriques

$$\sigma_j = \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_j \leq p} \chi_{A_{k_1} \cap \dots \cap A_{k_j}}$$

la formule
$$\chi_{A_1 \cup \dots \cup A_p} = \sum_{j=1}^{j=p} (-1)^{j-1} \sigma_j .$$

Maintenant, on considère l'application

$$\begin{aligned} I : \quad \mathbb{R}^{E_n} &\rightarrow \mathbb{R} \\ f &\rightarrow \sum_{x \in E_n} f(x) \end{aligned}$$

: elle est évidemment linéaire, et, de plus

$$I(\chi_A) = |A|, \quad \forall A \subset E_n.$$

On en déduit que

$$|A_1 \cup \dots \cup A_p| = \sum_{j=1}^p (-1)^{j-1} \sigma_j \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_j \leq n} |A_{k_1} \cap \dots \cap A_{k_j}|.$$

1 Calcul du nombre S_m^n de surjections de E_n sur E_m ($n \geq m$).

1) On peut partitionner l'ensemble $E_m^{E_n}$ en s'aidant du cardinal des images :

$$E_m^{E_n} = \bigcup_{k=1}^{k=m} F_k$$

où $F_k = \{f \in E_m^{E_n} / |f(E_n)| = k\}, \quad k = 1, 2, \dots, m$

Etant donné $k \in \{1, 2, \dots, m\}$, il existe C_m^k parties distinctes dans E_m , à k éléments ; on partitionne donc à son tour l'ensemble F_k selon

$$F_k = \bigcup_{\substack{A \in \mathcal{P}(E_m) \\ |A|=k}} \{f \in E_m^{E_n} / f(E_n) = A\}$$

Maintenant, à A fixé,

$$|\{f \in E_m^{E_n} / f(E_n) = A\}| = S_k^n$$

si bien que

$$|F_k| = C_m^k \cdot S_k^n.$$

On a donc la relation

$$(1) \quad m^n = \sum_{k=1}^{k=m} C_m^k \cdot S_k^n$$

2) On considère une surjection f de E_n sur E_m ; $f(x_n)$ peut prendre m valeurs, et $f(E_{n-1})$ a alors comme cardinal, soit m , soit $(m-1)$ valeurs (on note $E_n = E_{n-1} \cup \{x_n\}$). Cette **partition de l'ensemble des surjections de E_n sur E_m** montre que :

$$(2) \quad S_m^n = m \left(S_m^{n-1} + S_{m-1}^{n-1} \right)$$

3) Comme $S_1^n = 1$, $S_2^n = 2^n - 2$, $S_3^n = 3^n - 3 \cdot 2^{n-1} + 3$... d'après (1), on peut intuitiver la formule de résolution

$$(3) \quad S_m^n = \sum_{k=1}^{k=m} (-1)^{m-k} C_m^k k^n$$

qu'on peut démontrer en raisonnant par récurrence sur n , à partir de (2), car :

$$\begin{aligned} & m \left(\sum_{k=1}^{k=m} (-1)^{m-k} k^{n-1} C_m^k + \sum_{k=1}^{k=m-1} (-1)^{m-1-k} k^{n-1} C_{m-1}^k \right) = \\ & m \left(m^{n-1} \sum_{k=1}^{k=m-1} (-1)^{m-k} k^{n-1} C_m^k \left(1 - \frac{m-k}{m} \right) \right) = \\ & \sum_{k=1}^{k=m} (-1)^{m-k} k^n C_m^k . \end{aligned}$$

4) En particulier, si $m = n$, on obtient

$$n! = \sum_{k=1}^{k=n} (-1)^{n-k} k^n C_n^k$$

5) On aboutit directement à la formule (3), à l'aide du principe d'inclusion-exclusion, appliqué de la manière suivante : pour $k = 1, 2, \dots, n$, on pose, si $E_m = \{y_1, \dots, y_m\}$

$$A_k = \{f \in E_m^{E_n} / y_k \notin f(E_n)\}$$

le nombre cherché n'est donc autre que :

$$m^n - |A_1 \cup \dots \cup A_m|$$

étant donné $1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_j \leq m$,

$$|A_{k_1} \cap \dots \cap A_{k_j}| = (m-j)^n$$

et, comme il existe C_m^j parties de $\{1, \dots, m\}$ à j éléments, la formule d'inclusion-exclusion permet de conclure :

$$S_m^n = m^n + \sum_{j=1}^{j=m} (-1)^j C_m^j (m-j)^n$$

avec le changement d'indice $m-j = j$.

2 Calcul du nombre p_n de permutations f de E_n telles que $\forall x \in E_n, f(x) \neq x$.

1) On peut partitionner l'ensemble σ_n des permutations de E_n à l'aide du cardinal de l'ensemble des points fixes, en posant

$$A_0^n = \{f \in \sigma_n / \forall x \in E_n, f(x) \neq x\}$$

$$A_k = \{f \in \sigma_n / |\{x \in E_n / f(x) = x\}| = k\}$$

pour $k = 1, 2, \dots, n$.

Ainsi, $p_n = |A_0|$ est le nombre cherché, tandis que, pour $k = 1, 2, \dots, n$, on a :

$$|A_k| = C_n^k p_{n-k}$$

(partitionner A_k à l'aide des parties de E_n de cardinal k), si bien que :

$$(1) \quad n! = \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k p_{n-k}$$

2) Etant donné $f \in A_0^n$, $f(n)$ ne peut prendre que les valeurs $k = 1, 2, \dots, n-1$ de E_{n-1} , et alors la restriction $f|_{E_{n-1}} : \{1, 2, \dots, n-1\} \rightarrow \{1, 2, \dots, \hat{k}, \dots, n\}$ (où $\{1, 2, \dots, \hat{k}, \dots, n\} \doteq E_n \setminus \{k\}$) ; on considère maintenant l'élément $f^{-1}(n) = h$: de deux choses l'une :

- ou bien $h = k$ et

$$f : \{1, \dots, \hat{k}, \dots, n-1\} \rightarrow \{1, \dots, \hat{k}, \dots, n-1\}$$

donc $f \in A_0^{n-2}$;

- ou bien $h \neq k$ et

$$f : \{1, 2, \dots, \hat{h}, \dots, k, \dots, n-1\} \rightarrow \{1, 2, \dots, \eta, \dots, \hat{k}, \dots, n-1\}$$

on peut alors associer à f l'application

$$g : E_{n-1} \rightarrow E_{n-1}$$

en posant $g(h) = k$

$$g(x) = f(x) \text{ si } x \neq h$$

alors $g \in A_0^{n-2}$.

On aboutit ainsi à la relation

$$(2) \quad \boxed{p_n = (n-1)(p_{n-1} + p_{n-2})}$$

3) Le calcul des premières valeurs de p_n suggère la formule de résolution

$$p_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k A_n^k$$

qu'on vérifie, par récurrence sur n , avec (2).

$$(3) \quad \boxed{p_n = n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots + \frac{(-1)^n}{n!} \right)}$$

4) De nouveau, le principe d'inclusion-exclusion conduit directement au résultat, en considérant, pour $k = 1, \dots, n$ les parties

$$B_k = \{f \in \mathcal{S}_n / f(k) = k\}$$

Il s'agit donc de calculer $|B_1 \cup \dots \cup B_n|$. Or,

$$|B_{k_1} \cap \dots \cap B_{k_j}| = |\{f \in \mathcal{G}_n / f(k_1) = k_1, \dots, f(k_j) = k_j\}|$$

vaut $C_n^j \times (n-j)! = A_n^j$

d'où la conclusion.

5) On remarquera que le recours aux séries entières, pour essayer de calculer p_n à partir de la relation (3), en introduisant la série

$$f(z) = \sum_{n=2}^{\infty} p_n z^n \quad (p_0 = p_1 = 0)$$

conduit, formellement, à l'équation différentielle

$$z^2 f'(z) = (1-z)f(z)$$

de solution générale singulière à l'origine

$$f(z) = \frac{C}{z} e^{-\frac{1}{z}}.$$

De fait, d'après le résultat (3),

$$\frac{1}{n!} p_n \xrightarrow{(n \rightarrow +\infty)} \frac{1}{e} : p_n \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{n!}{e}$$

et le rayon de convergence de f est nul.

3 Calcul du nombre i_n d'involutions d'un ensemble à $(2n)$ éléments.

1) On montre que le nombre de points fixes d'une involution f de E_{2n} est nécessairement pair, en associant à tout $x \in E_{2n}$, l'ensemble $\{(x, f(x))\}$ noté $\tilde{x}$:

$$\text{si } \tilde{x} \neq \tilde{y}, \quad \tilde{x} \cap \tilde{y} = \emptyset$$

(car si $x = f(y)$, $f(x) = y$)

Ainsi, $\{\tilde{x} / x \in E_{2n}\}$ constitue une partition de E_{2n} . Ce qui permet de conclure, car

$$|\tilde{x}| = \begin{cases} 1, & \text{si } x \text{ est fixe} \\ 2, & \text{sinon} \end{cases}$$

2) On partitionne l'ensemble J_n des involutions de E_{2n} selon le nombre de points fixes, en posant, pour $p = 0, 1, \dots, n$

$$J_n^p = \{f \in J_n / |\{x \in E_{2n} / f(x) = x\}| = 2p\}.$$

Ainsi a-t-on

$$i_n = |J_n| = \sum_{p=0}^{p=n} C_{2n}^{2p} |J_{n-p}^0|.$$

3) L'application qui à $i \in J_n^0$ fait correspondre l'ensemble $\{\tilde{x} / x \in E_{2n}\}$ est une bijection et, par conséquent

$$|J_n^0| = c_n$$

n'est autre que le cardinal de l'ensemble des partitions de E_{2n} en couples. Mais il est clair que

$$c_n = (2n-1)c_{n-1}$$

(car x_1 peut former $(2n-1)$ couples,...).

D'où l'on obtient facilement que

$$c_1 = 1, \quad c_2 = 3, \dots, c_n = 1.3 \dots (2n-1)$$

$$= \frac{(2n)!}{2^n n!}.$$

4) D'où le nombre cherché :

$$(1) \quad i_n = \sum_{p=0}^{p=n} C_{2n}^{2p} \frac{(2(n-p))!}{2^{n-p} (n-p)!}$$

5) Avec les développements en série entière

$$\operatorname{ch}(x) = \sum_{p \geq 0} \frac{x^{2p}}{(2p)!} \quad \text{et} \quad e^{\frac{x^2}{2}} = \sum_{q \geq 0} \frac{x^{2q}}{2^q q!}$$

de rayon de convergence infini, la règle de multiplication donne

$$e^{\frac{x^2}{2}} \operatorname{ch} x = \sum_{n \geq 0} c_n x^{2n}$$

avec

$$c_n = \sum_{p+q=n} \frac{1}{(2p)!} \cdot \frac{1}{2^q q!} = \frac{i_n}{(2n)!}$$

si bien que

$$i_n = \left(e^{\frac{x^2}{2}} \operatorname{ch} x \right)^{(2n)}_{(0)}$$

Comme

$$\left(e^{\frac{x^2}{2}} \pm x \right)^{(2n)}_{(0)} = \frac{1}{\sqrt{e}} \left(e^{\frac{x^2}{2}} \right)^{(2n)}_{(\pm 1)}$$

on peut exprimer i_n à l'aide des polynômes de Hermite

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} (e^{-x^2})^{(n)}$$

avec le changement de variable $x = i\sqrt{2}y$ (voir leçons [5], exemple [3] et [19], exemple [5]).

On obtient :

$$(2) \quad \boxed{i_n = 2^{-n} H_{2n} \left(\frac{i\sqrt{2}}{2} \right)}$$

Par exemple, $H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12$ donne $i_2 = 10$.

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{p_n}{n!} x^n$$

en posant $c_n = \frac{p_n}{n!}$, la relation (1) s'écrit sous la forme

$$nc_n = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \frac{1}{(n-1-k)!}.$$

En admettant le rayon de convergence de f positif, on aurait donc

$$f'(x) = f(x) \cdot e^x$$

et, comme $p_0 = 1$, cela donnera

$$f(x) = e^{e^x - 1}$$

: f est bien développable en série entière sur $\mathbb{R}$, et on a

$$(2) \quad e^{e^x - 1} = \sum_{n \geq 0} \frac{p_n}{n!} x^n, \quad x \in \mathbb{R}$$

4 Calcul du nombre p_n de partitions de E_n

1) Etant donnée une partition $\{A_1, \dots, A_l\}$ de E_n , il existe exactement un élément, disons A_1 , qui contient le point n de E_n ; maintenant, si

$$\mathcal{P}_k = \{\text{partitions} / |A_1| = k\}$$

pour $k = 1, 2, \dots, n$, $\{\mathcal{P}_k\}_{k=1}^{k=n}$ réalise une partition de l'ensemble à dénombrer.

2) Par conséquent, et en convenant que $p_0 = 1$, on a :

$$p_n = \sum_{k=1}^{k=n} C_{n-1}^{k-1} \cdot p_{n-k}$$

ou encore

$$(1) \quad p_n = \sum_{k=0}^{k=n-1} C_{n-1}^{n-k} \cdot p_{n-k} = \sum_{k=0}^{k=n-1} C_{n-1}^k \cdot p_k$$

3) On considère la fonction génératrice (généralisée : Leçon **20**).

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{p_n}{n!} x^n$$

en posant $c_n = \frac{p_n}{n!}$, la relation (1) s'écrit sous la forme

$$n c_n = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \frac{1}{(n-1-k)!}.$$

En admettant le rayon de convergence de f positif, on aurait donc

$$f'(x) = f(x) \cdot e^x$$

et, comme $p_0 = 1$, cela donnera

$$f(x) = e^{e^x - 1}$$

: f est bien développable en série entière sur $\mathbb{R}$, et on a donc bien

$$(2) \quad \boxed{e^{e^x - 1} = \sum_{n \geq 0} \frac{p_n}{n!} x^n, \quad x \in \mathbb{R}}.$$

4) Par conséquent

$$\begin{aligned} p_n &= \frac{d^n}{dx^n} \Big|_{x=0} e^{e^x - 1} \\ &= \frac{1}{e} \frac{d^n}{dx^n} \Big|_{x=0} \sum_{k \geq 0} \frac{e^{kx}}{k!} \\ &= \frac{1}{e} \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \frac{d^n}{dx^n} \Big|_{x=0} e^{kx} \end{aligned}$$

(la dérivation terme à terme de la série de fonctions $\sum_{k \geq 0} \frac{e^{kx}}{k!}$ est en effet justifié par la

convergence normale de la série $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} k^n \cdot e^{kx}$ sur tout compact).

Ce qui donne

$$(3) \quad p_n = \frac{1}{e} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^n}{k!}$$

5 Calcul du nombre d_n^p de n -uple $(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n$ de longueur $k_1 + \dots + k_n = p$ donné.

1) En distinguant les cas $k_1 = 0, 1, \dots, p$ on montre facilement que

$$(1) \quad d_n^p = d_{n-1}^p + d_{n-1}^{p-1} + \dots + d_{n-1}^1 + d_{n-1}^0$$

où, évidemment, on a : $d_{n-1}^0 = 1$ et $d_{n-1}^1 = n-1$.

2) En calculant les premiers termes :

$$d_1^p = 1$$

$$d_2^p = p+1 \quad (: \text{ d'après (1) })$$

$$d_3^p = (p+1) + (p) + \dots + 1$$

$$= \frac{(p+1)(p+2)}{2}$$

on peut intuitiver que $d_n^p = C_{n+p-1}^{n-1}$ et ce qu'on démontre, par récurrence sur n , à l'aide de (1) à partir de la relation bien connue

$$C_{n+p-1}^{n-1} = C_{n+p-2}^{n-1} = C_{n+p-2}^{n-2} :$$

$$(2) \quad d_n^p = C_{n+p-1}^{n-1}$$

3) Le développement en série entière de $\frac{1}{(1-x)^n}$ peut s'obtenir :

- soit en dérivant $(n-1)$ fois terme à terme, pour $|x| < 1$, celui de

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{j \geq 0} x^j$$

ce qui donne

$$\frac{(n-1)!}{(1-x)^n} = \sum_{j \geq n-1} \frac{j!}{(j-(n-1))!} x^{j-(n-1)}, \quad |x| < 1$$

- soit en élevant le même développement à la puissance n à l'aide de la règle de multiplication des séries entières :

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-x)^n} &= \left(\sum_{j \geq 0} x^j \right)^n \\ &= \sum_{j \geq 0} c_j x^j \end{aligned}$$

où $c_j = |\{(j_1, \dots, j_n) \in \mathbb{N}^n / j_1 + \dots + j_n = j\}|$

$$= d_n^j$$

En comparant, on obtient directement (2).

6 Calcul du nombre de solutions entières de l'équation $x+2y+3z = n$, $n \in \mathbb{N}$ donné.

voir Leçon **19**, exemple **9**.

7 Calcul du nombre c_n de façons de disposer les parenthèses dans un produit de n termes.

1) Dans le produit $x_1 x_2 \dots x_n$, on peut commencer par disposer une parenthèse autour de x_1 et x_2 ou $x_2 x_3 \dots$ ou $x_2 x_3 \dots x_{n-1}$, en écrivant :

$$(x_1)(x_2 \dots x_n) \text{ ou } (x_1 x_2)(x_3 \dots x_n) \dots \text{ ou } (x_1 x_2 \dots x_{n-1})(x_n).$$

On obtient ainsi la relation de récurrence suivante :

$$(1) \quad c_n = c_1 \cdot c_{n-1} + c_2 \cdot c_{n-2} + \dots + c_{n-1} \cdot c_1$$

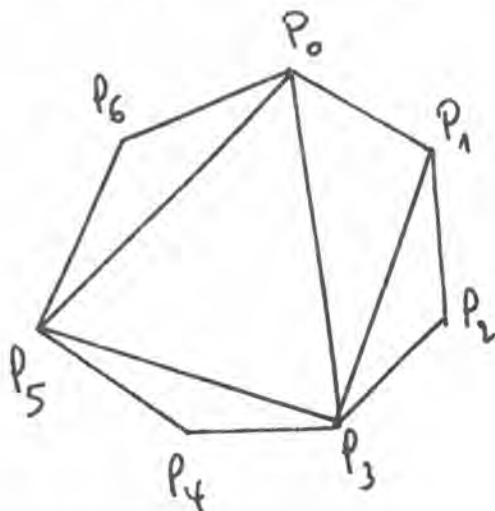
où $c_1 = 1$.

2) Pour en tirer l'expression de c_n à l'aide des séries entières, voir l'exemple **8** de la leçon **19**.

$$(2) \quad c_n = \frac{1}{n} C_{2(n-1)}^{n-1} \text{ est le } n^{\text{ième}} \text{ nombre de Catalan.}$$

3) On peut introduire les nombres c_n à propos du problème "géométrique" suivant : Etant donnés $(n+1)$ points du plan, sommets d'un polygône convexe, de combien de façons peut-on le trianguler, en traçant $(n-2)$ diagonales qui ne se coupent pas ?

On désigne ce nombre par λ_n , par $P_0, P_1, \dots, P_n$ les sommets du polygône. Parmi les triangulations possibles, on isole celles qui contiennent le triangle $P_0P_1P_n$ et qui forment l'ensemble $\mathcal{T}_0$. Les autres triangulations font nécessairement apparaître une diagonale issue de P_0 , et on désigne par $\mathcal{T}_k$ l'ensemble de celles qui font apparaître (P_0P_k) pour la première fois, k prenant les valeurs $2, \dots, n-1$.



: une triangulation qui appartient à $\mathcal{T}_3$.

On réalise ainsi une partition de l'ensemble des triangulations.

De cette manière

$$(1) \quad \lambda_n = \lambda_{n-1} + \lambda_1 \cdot \lambda_{n-1} + \dots + \lambda_2 \cdot \lambda_{n-2}$$

$$\text{car} \quad |\mathcal{T}_k| = \lambda_{k-1} \cdot \lambda_{n-k+1}, \quad k = 2, \dots, n-1$$

$$|\mathcal{T}_0| = \lambda_{n-1}$$

8 100 points du plan sont tels que 3 quelconque d'entre eux ne sont jamais alignés. Parmi les triangles qu'on peut former avec ces points, il en existe au plus 70 % dont les angles sont aigus.

1) On peut former $t_n = C_n^3$ triangles avec n points (3 qcq d'entre eux n'étant jamais alignés). On désigne par s_n le nombre de ceux à angles aigus.

2) On désigne par $P_1, P_2, \dots, P_n$ les points donnés, et par t_{n-1}^i (s_{n-1}^i) le nombre de triangles (à angles aigus) qu'on peut former avec $P_1, P_2, \dots, \hat{P}_i, \dots, P_n$. Alors

$$a) \quad t_n = \frac{1}{n-3} \sum_{i=1}^{i=n} t_{n-1}^i$$

car chaque triangle apparaît ainsi $(n-3)$ fois (on peut d'ailleurs vérifier directement que

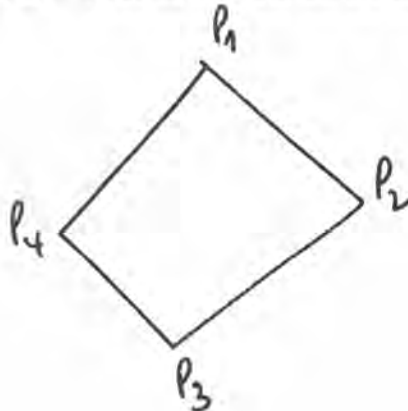
$$C_n^3 = \frac{1}{n-3} C_{n-1}^3 \quad n \geq 4)$$

$$b) \quad s_n = \frac{1}{n-3} \sum_{i=1}^{i=n} s_{n-1}^i.$$

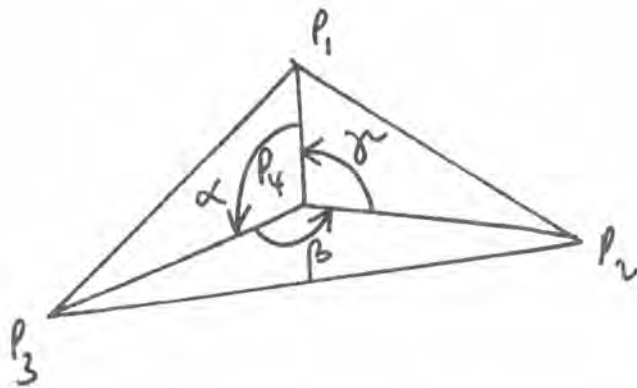
3) Par conséquent, si $\frac{s_{n-1}}{t_{n-1}} \leq k$, il vient $\frac{s_n}{t_n} \leq k$

ainsi le % de triangles à angles aigus n'augmente-t-il pas avec le nombre de points considérés.

4) Pour $n = 4$, $t_4 = 4$, et $s_4 \leq 3$ car on est dans l'un des 2 cas de figures suivant



où $\hat{P}_1 + \hat{P}_2 + \hat{P}_3 + \hat{P}_4 = 2\pi$ montre qu'il existe i tels que $\hat{P}_i \geq \frac{\pi}{2}$.



où $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$ conduit à la même conclusion.

Par conséquent, $\frac{s_4}{t_4} \leq \frac{3}{4}$.

Pour $n = 5$, $\frac{s_5}{t_5} \leq \frac{3}{4}$ avec $t_5 = 10$ donne $s_5 \leq \frac{3}{4} \times 10 = 7,5$, donc $s_5 \leq 7$...
et, par conséquent $s_{100} \leq 0,7 t_{100}$.

9 Calcul du nombre de plus courts chemins dans $\mathbb{N}^2$ qui mènent de l'origine, au point donné $(x, y) \in \mathbb{N}^2$.

1) Les plus courts chemins ont comme longueur $(x+y)$.

2) Si $\varphi(x, y)$ désigne le nombre cherché, il est clair que

$$\varphi(x, 0) = \varphi(0, y) = 1$$

De plus, $\varphi(x+1, y) = \varphi(x, y) + \varphi(x+1, y-1)$.

3) Donc

$$\varphi(x+1, 1) = \varphi(x, 1) + 1$$

donne $\varphi(x, 1) = x + 1 = C_{x+1}^1$

On a ensuite

$$\begin{aligned}\varphi(x+1,2) &= \varphi(x,2)+(x+2) \\ &= 1+2+\dots+(x+2) \\ &= C_{x+2}^2\end{aligned}$$

ce qui suggère que

$$\varphi(x,y) = C_{x+y}^y$$

et ce qu'on démontre par récurrence, à l'aide de la formule

$$C_{x+y}^y = C_{x+y-1}^y + C_{x+y-1}^{y-1}.$$

10 A $x = (x_i)_{1 \leq i \leq 2n} \in \{-1, +1\}^{2n}$, on associe la ligne polygonale du plan, qui joint les points (k, s_k) où, pour $k = 0, 1, \dots, 2n$, on a posé

$$\begin{cases} s_0 = 0 \\ s_k = x_1 + x_2 + \dots + x_k \end{cases}$$

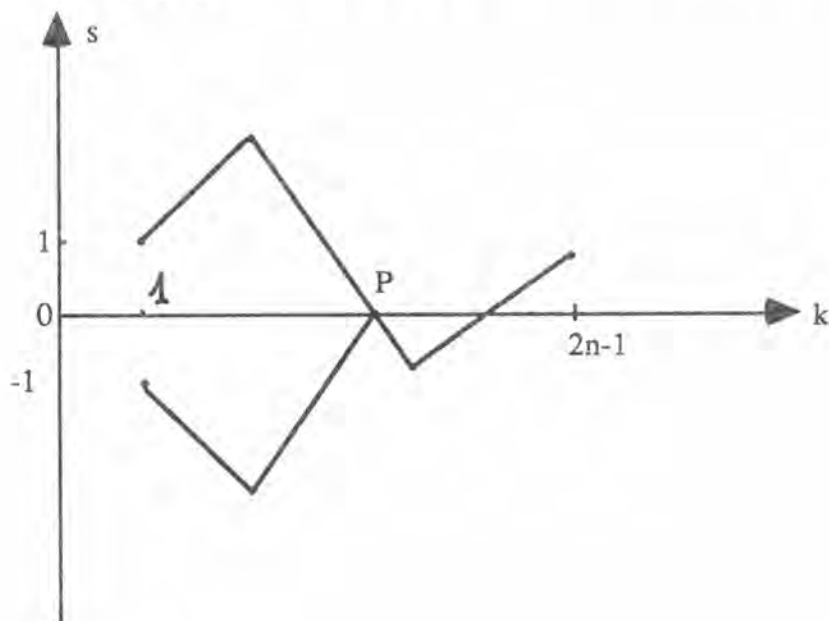
On veut calculer le nombre de lignes qui joignant l'origine au point $(2n, 0)$, en restant au-dessus de l'axe horizontal.

1) Les lignes qui nous intéressent joignent $(1, 1)$ à $(2n-1, 1)$. Il existe $C_{2(n-1)}^{n-1}$ telles lignes.

2) Si une ligne $(x_i)_{1 \leq i \leq 2n-1}$ joint $(1, 1)$ à $(2n-1, 1)$ en touchant l'axe horizontal pour la première fois en $(p, 0)$, c'est-à-dire si

$$s_1, s_2, \dots, s_{p-1} > 0, \quad s_p = 0$$

où $p \in \{2, \dots, 2n-2\}$, on lui associe la ligne $(-x_1, -x_2, \dots, -x_{p-1}, -x_p, x_{p+1}, \dots, x_{2n-1})$, définissant ainsi une **bijection** de l'ensemble des lignes qui touchent l'axe horizontal sur celui des lignes qui joignent $(1, -1)$ à $(2n-1, 1)$:



Il existe donc autant de telles lignes, que de lignes qui joignent $(0,0)$ à $(2n-2,2)$, c'est-à-dire $C_{2(n-1)}^n$.

3) Le nombre cherché vaut donc

$$2 \left(C_{2(n-1)}^{n-1} - C_{2(n-1)}^n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2n-1} \cdot C_{2n}^n \right)$$

soit $\frac{1}{2n-1} \cdot C_{2n}^n$.

Références : Enoncés 1,2,3 dans Lelong Ferrand-Arnadiés 1,
4 traité dans Polya-Szegő 1, ch 4
5,6,7 Polya-Szegő
8,9 dans Feller 1.

- 27 -

EXEMPLES D'ETUDE DE FONCTIONS DEFINIES DE DIVERSES MANIERES

On définit les fonctions définies

- comme solution d'un problème de condition initiale, dans la leçon [20], exemples [1] - [7] ;
- par une série, dans la leçon [18] ;
- par une intégrale, dans la leçon [14] ;
- à partir d'une fonction génératrice, leçons [19] et [5].

On complète ici par 2 exemples de fonctions définies par **une relation implicite**.

Dans l'exemple [1], la relation est simple, mais dépend d'un paramètre : il s'agit en fait de tracer le réseau des lignes de niveau de la surface $\mathcal{S} : z = V(x,y)$, où V est l'énergie du pendule simple.

Dans l'exemple [2], on a choisi une équation non résoluble et on développe l'étude asymptotique de la solution.

Références : [1] Arnold
[2] Dieudonné chap. III § 8.

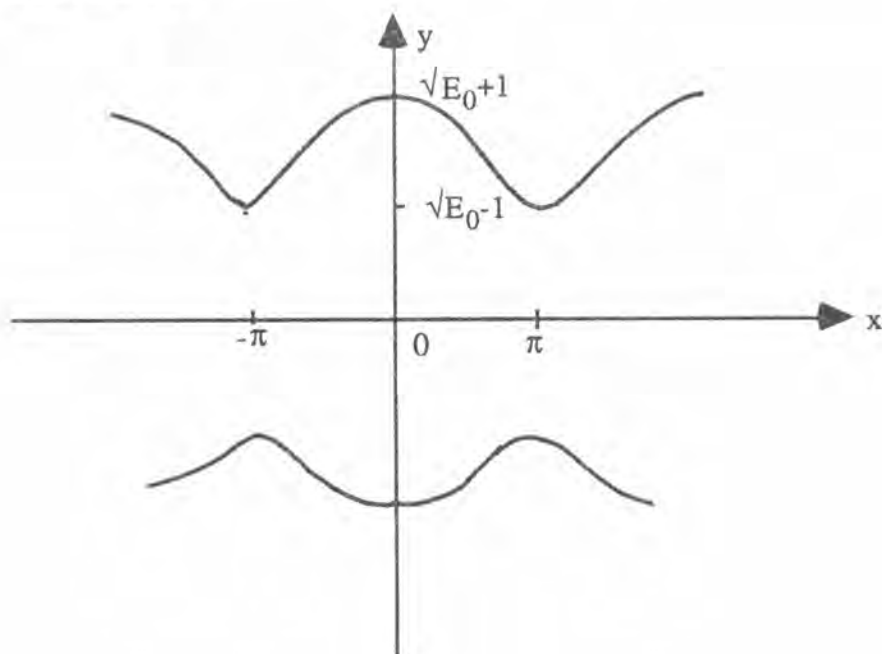
[1] $y^2 - \cos x = E_0$ donné.

Comme $E_0 \geq -\cos x$, E_0 doit être supérieur à -1.

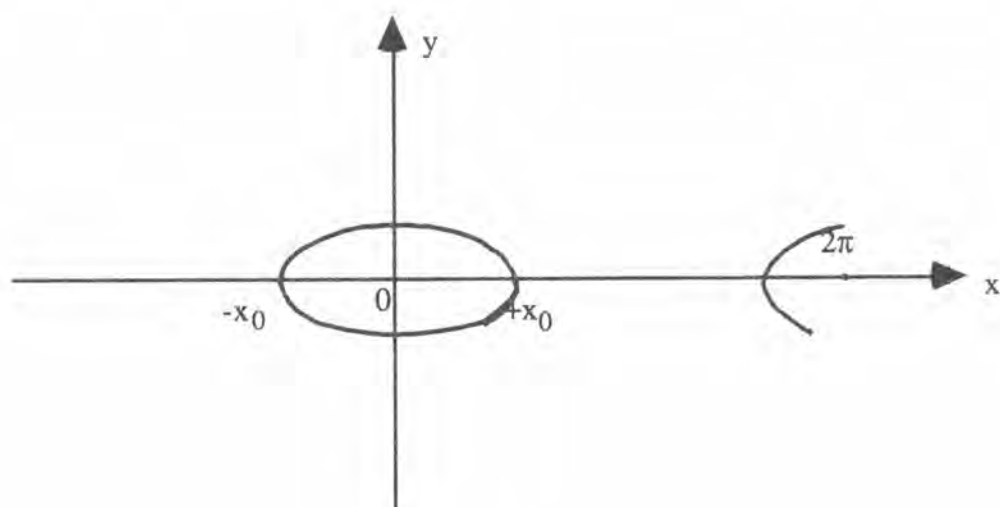
1) Pour $E_0 \geq 1$, $y^2 = E_0 + \cos x \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ et l'ensemble

$$\{(x,y) / y^2 - \cos x = E_0\} = \mathcal{S}_0$$

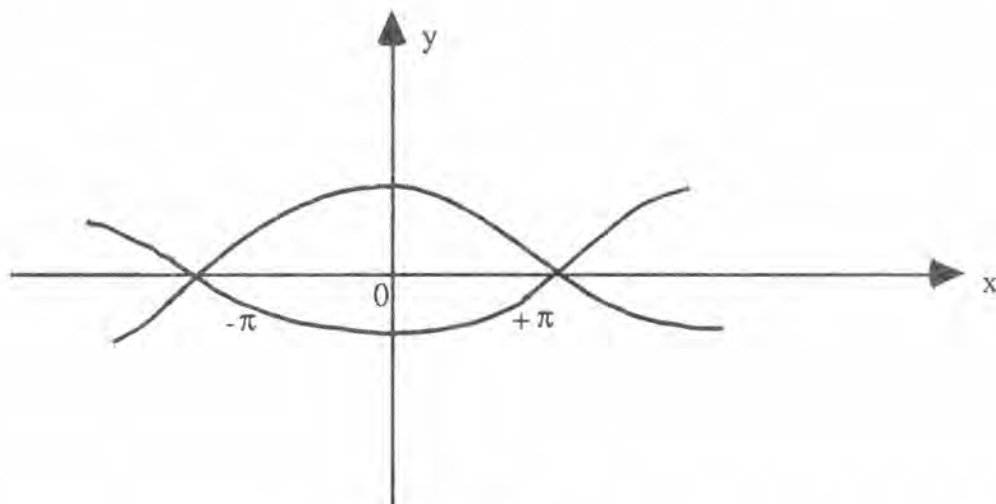
s'obtient en traçant le graphe de la fonction $y(x) = \sqrt{E_0 + \cos x}$ puis en le symétrisant par rapport à l'axe Ox :



2) Pour $-1 < E_0 < 1$, y^2 n'est définie que si x se trouve dans l'intervalle $[-x_0, x_0]$, modulo 2π , ce qui donne comme ensemble $\mathcal{E}_0$:



- 3) Les cas limite $E_0 = 1$, où $\mathcal{S}_0 = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \{2n\pi\}$ et $E_0 = -1$ où $\mathcal{S}_0$:



mettent en évidence la nécessité de l'hypothèse $\frac{\partial F}{\partial x}$ ou $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ dans le théorème de la fonction implicite, appliqué à $F(x, y) = y^2 - \cos x - E_0$.

2 $y^5 + y - x = 0$.

1) Le tracé du graphe de $f(y) = y^5 + y$ montre que l'équation précédente possède, pour tout $x \in \mathbb{R}$, une racine et une seule, $y(x)$, qui tend vers $+\infty$ avec x .
(d'après le théorème de la fonction implicite, y est une fonction dérivable).

2) On se propose d'étudier le comportement de $y(x)$ lorsque $x \rightarrow +\infty$: en posant $z = y^5$, on a $z = x - z^{\frac{1}{5}} \doteq \varphi_x(z)$ et on peut chercher à résoudre l'équation par la technique d'itération qui, comme on va le voir, conduit au DA de $z(x)$ lorsque $x \rightarrow +\infty$:

3) On définit donc la suite $(z_n(x))_{n \geq 0}$, en posant

$$\begin{cases} z_0 = x \\ z_{n+1} = \varphi_x(z_n) \end{cases}$$

$$z(x) - x = -z^{\frac{1}{5}}(x)$$

$$= -x^{\frac{1}{5}} + \frac{1}{5 \cdot \theta^{\frac{4}{5}}(x)} (z(x) - x)$$

où $\theta(x) \in (z(x), x)$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \theta(x) = +\infty$:

par conséquent : $z(x) - x = -x^{\frac{1}{5}} + \sigma(z(x) - x)$

$$\sim -x^{\frac{1}{5}}.$$

De même : $z(x) - z_1(x) = \varphi_x(z(x)) - \varphi_x(x)$

$$= (z(x) - x) \frac{-1}{5 \cdot \theta^{\frac{4}{5}}(x)}$$

où $\theta(x) \in (x, z(x))$ et, par conséquent $\theta(x) \underset{(+\infty)}{\sim} x$:

$$z(x) - z_1(x) \sim -x^{\frac{1}{5}} \left(\frac{-1}{5x^{\frac{4}{5}}} \right) = \frac{1}{5x^{\frac{3}{5}}}$$

d'où $z(x) = x - x^{\frac{1}{5}} + \frac{1}{5x^{\frac{3}{5}}} + \sigma\left(\frac{1}{x^{\frac{3}{5}}}\right)$

et, en revenant à : $y(x) = x^{\frac{1}{5}} - \frac{1}{5}x^{-\frac{3}{5}} - \frac{1}{25}x^{\frac{7}{5}} + \sigma\left(x^{-\frac{7}{5}}\right).$

- 28 -

EXEMPLES DE SERIES DE FOURIER, ET DE LEURS APPLICATIONS

Dans l'exemple [1], on étudie en détail le signal en dents de scie (jusqu'au **phénomène de Gibbs**). Ce signal, et ses primitives, sont utilisées dans les exemples [2] et [4] afin d'**accélérer la convergence** de certaines séries de Fourier. L'exemple [3] a pour but de calculer la somme de t.g. $\frac{\cos nt}{n}$ par deux procédés différents. L'exemple [5] est un calcul de somme de Fourier utilisant **une équation différentielle**, et on termine en citant les exemples [8], [9] et [10] de la Leçon d'**Exemples de résolution d'équations différentielles à l'aide de séries entières ou de Fourier**.

Références : [1] dans Dieudonné, problème 34) p. 331.

[1] Le signal en dents de scie h , 2π -périodique, valant $\frac{\pi-t}{2}$ sur $]0, 2\pi[$.

1) h est à la base de la démonstration donnée du théorème de Dirichlet, en servant à éliminer les sauts de discontinuité.

2) Comme h est impair, $a_n = 0$ pour tout n et, pour $n \geq 1$

$$b_n = 2 \cdot \frac{2}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\pi-t}{2} \sin(nt) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \theta d\left(-\frac{\cos n\theta}{n}\right) = \frac{1}{n}$$

si bien que la série de Fourier de h s'écrit $\sum_1^\infty \frac{\sin(nt)}{n}$.

3) La série précédente converge simplement sur $\mathbb{R}$, comme le montre le critère d'Abel :

la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \geq 1}$ tend vers 0 en décroissant ;

pour tout $N \geq 1$,

$$\Sigma_N(t) = \sum_1^N \sin nt = \operatorname{Im} \left(e^{it} \frac{1 - e^{iNt}}{1 - e^{it}} \right) = \frac{1}{2\sin(\frac{t}{2})} \left(\cos(\frac{t}{2}) - \cos(N + \frac{t}{2})t \right)$$

pour $t \notin 2\pi \mathbb{Z}$ donne $|\Sigma_N(t)| \leq \frac{1}{|\sin(\frac{t}{2})|}$, tandis que $\Sigma_N(2n\pi) = 0$.

L'estimation précédente montre aussi que la série de fonctions $\sum_1^\infty \frac{1}{n} \sin(nt)$ converge uniformément sur tout compact $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$ ($0 < \varepsilon < \pi$) de $]0, 2\pi[$.

4) On donne une démonstration intégrale du point précédent, qui permet de retrouver h :

$$\begin{aligned} \text{Comme} \quad \dot{S}_N(t) &= \frac{d}{dt} \sum_1^N \frac{\sin(nt)}{n} = \sum_1^N \cos(nt) = \\ \operatorname{Re} \left(e^{it} \frac{1 - e^{iNt}}{1 - e^{it}} \right) &= -\frac{1}{2} - \frac{\sin((2N+1)\frac{t}{2})}{2\sin(\frac{t}{2})} \end{aligned}$$

et que $S_N(0) = 0$, on a, pour tout entier $N \geq 1$

$$S_N(t) = -\frac{t}{2} - \int_0^{\frac{t}{2}} \frac{\sin(2N+1)\theta}{\sin \theta} d\theta$$

si toutefois $t \in [0, 2\pi[$.

Comme S_N est impaire, on va supposer dans ce qui suit que $t \in [0, \pi]$: il s'agit d'étudier la suite d'intégrales

$$I_N(t) = \int_0^{\frac{t}{2}} \frac{\sin(2N+1)\theta}{\sin \theta} d\theta$$

en justifiant le passage à la limite formel suivant :

$$I_N(t) = \int_0^{(2N+1)\frac{t}{2}} \frac{\sin u}{(2N+1)\sin(\frac{u}{2N+1})} du$$

$$\xrightarrow{(N \rightarrow \infty)} \int_0^{\infty} \frac{\sin u}{u} du$$

où l'intégrale impropre vaut $\frac{\pi}{2}$ (Leçon : Exemples d'Intégrales dépendant d'un paramètre). A cause du caractère oscillant de $\frac{\sin(2N+1)\theta}{\sin \theta}$ (qui assure la convergence de l'intégrale impropre) la justification ne relève pas du théorème de convergence dominée.

On montre déjà que la suite de fonctions

$$\varphi_N(u) = \frac{\sin(u)}{(2N+1)\sin(\frac{u}{2N+1})}$$

converge vers $\varphi(u \rightarrow \frac{\sin u}{u})$ uniformément sur tout compact de $[0, +\infty[$:

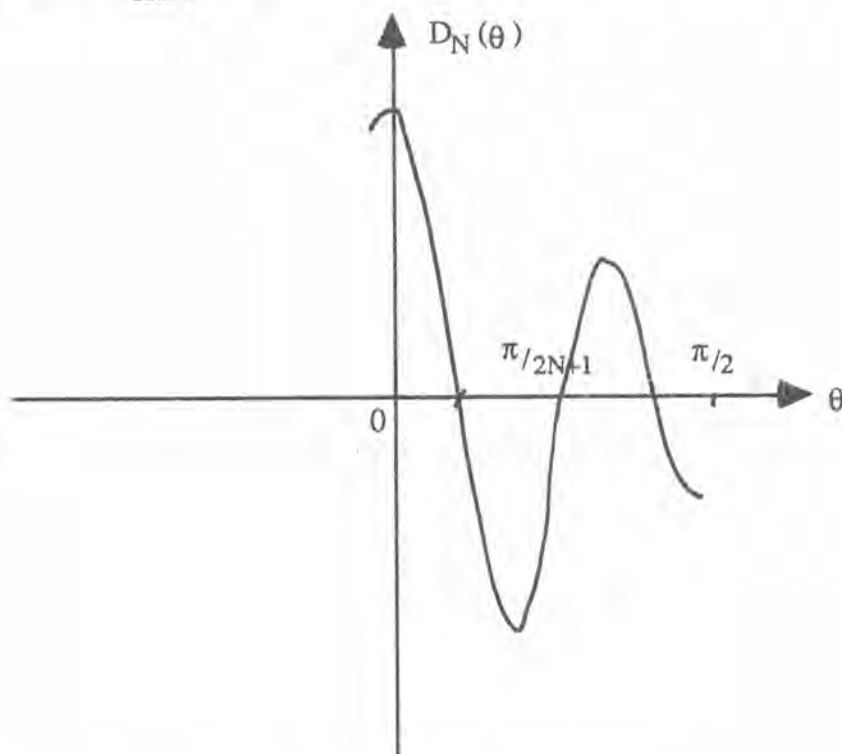
$$|\varphi_N(u) - \varphi(u)| = \left| \frac{\sin u}{u} \right| \cdot \frac{1}{\left| \sin \frac{u}{2N+1} \right|} \cdot \left| \frac{u}{2N+1} - \sin \frac{u}{2N+1} \right|$$

$$\leq 1 \cdot \frac{1}{\frac{2}{\pi} \cdot \frac{u}{2N+1}} \cdot \frac{1}{6} \left(\frac{u}{2N+1} \right)^3$$

à $u > 0$ donné, N assez grand (pour que $\frac{u}{2N+1} \leq \frac{\pi}{2}$) : cette majoration permet de conclure.

5) On va donc exploiter le caractère oscillant assorti du noyau de Dirichlet

$$D_N(\theta) = \frac{\sin(2N+1)\theta}{\sin \theta} :$$



avec $T = \left[\frac{2N+1}{2\pi} t \right]$, on peut décomposer

$$\int_0^{\frac{t}{2}} D_N(\theta) d\theta = \sum_{k=0}^{T-1} \int_{\frac{k\pi}{2N+1}}^{\frac{(k+1)\pi}{2N+1}} + \int_{\frac{T\pi}{2N+1}}^{\frac{t}{2}} D_N(\theta) d\theta$$

où $\int_{\frac{k\pi}{2N+1}}^{\frac{(k+1)\pi}{2N+1}} D_N(\theta) d\theta = (-1)^k u_k$, avec $u_k > 0$, la suite $(u_k)_{k \geq 0}$ étant

décroissante (faire le changement de variable $\theta = \frac{k\pi}{2N+1} + \alpha$, pour s'en convaincre).

(D'après l'argument de Leibniz sur les séries alternées), $I_N(t)$ reste donc compris entre

$$s_P = \sum_{k=0}^P (-1)^k u_k \text{ et } s_{P+1}$$

pour tout entier P donné ; mais, à P fixé,

$$s_P = \int_0^{P\pi} \varphi_N(u) du \xrightarrow{(N \rightarrow \infty)} \int_0^{P\pi} \frac{\sin u}{u} du$$

d'après la convergence uniforme $\varphi_N \rightarrow \varphi$ sur $[0, P\pi]$.

Maintenant, et comme $\lim_{P \rightarrow \infty} \int_0^{P\pi} \frac{\sin u}{u} du = \frac{\pi}{2}$, on peut conclure au fait que

$$\lim_{P \rightarrow \infty} I_N(t) = \frac{\pi}{2}$$

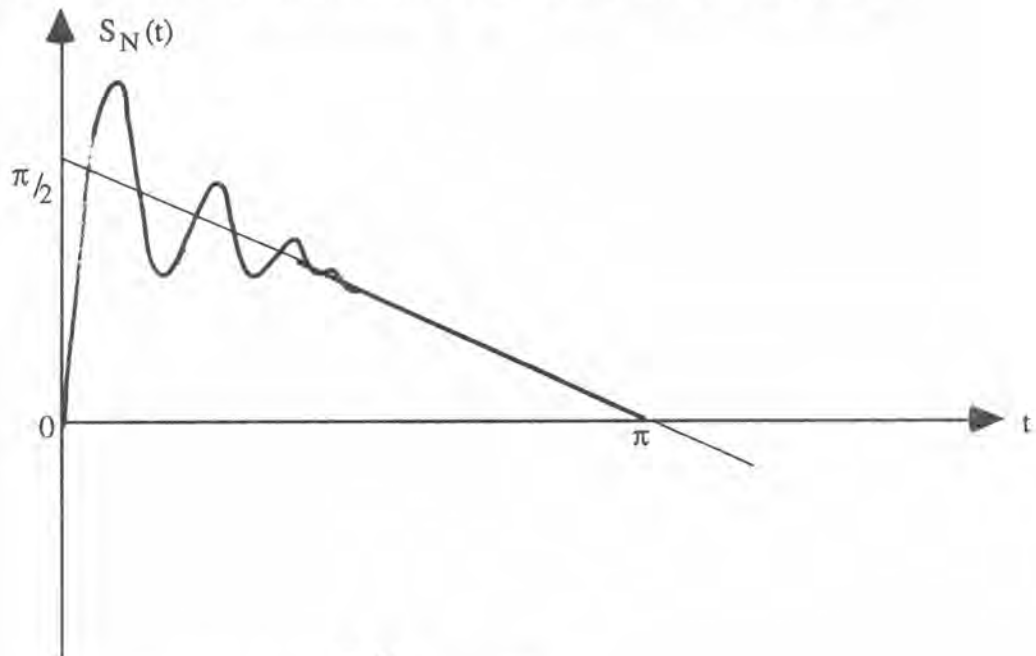
(découper des ε ...).

6) En conclusion, on a montré que $S_N \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{u} h$ sur tout $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$ avec $0 < \varepsilon < \pi$; naturellement, le fait que $S_N(0) = 0 \quad \forall N$ amène à définir $h(0) = 0$.

Comme on connaît

$$\dot{S}_N(t) = \frac{1}{2\sin(\frac{t}{2})} \sin(N\frac{t}{2}) \cos(N+1)\frac{t}{2}$$

on peut dresser le tableau de variations de S_N , et tracer l'allure de son graphe :



où

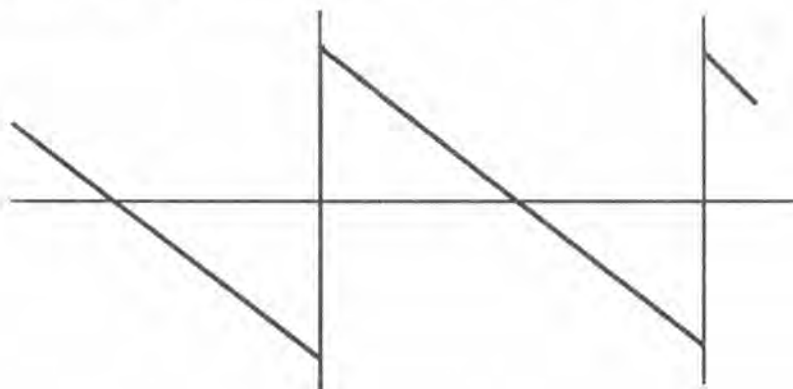
$$S_N\left(\frac{\pi}{N+1}\right) = \sum_{n=1}^{n=N} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{n\pi}{N+1}\right)$$

est une somme de Riemann de l'intégrale $\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt$:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N\left(\frac{\pi}{N+1}\right) = \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt > \frac{\pi}{2}$$

numériquement, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{t} dt = 1,8519...$

Ainsi, la non convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ se traduit-elle par le phénomène de pointes, observées à l'oscilloscope :



C'est le **phénomène de Gibbs**, cher aux Electroniciens ...

7) L'identité de Parseval donne ici

$$\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h^2(t) dy = \frac{\pi^2}{12}$$

d'où $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

8) Par intégration, on en déduit d'autres sommes de Fourier. Ainsi,

$$x(t) = \int_0^t h(\theta) d\theta = \frac{\pi}{2} t - \frac{t^2}{4}, 0 < t < 2\pi$$

prolongé 2π -périodiquement admet-il comme série de Fourier

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n} \int_0^t \sin n\theta d\theta = \sum_1^\infty \frac{1}{n} \left(\frac{1 - \cos nt}{n} \right) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_1^\infty \frac{\cos nt}{n^2} :$$

$$\sum_1^\infty \frac{\cos(nt)}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi}{2} t + \frac{t^2}{4} \quad \forall t \in [0; 2\pi]$$

ce qui donne, pour $t = \pi$ la valeur de $\sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$

tandis que Parseval conduit à la valeur de $\sum_1^\infty \frac{1}{n^4} \dots$

en itérant, on obtient une famille de fonctions qui vont servir à améliorer la vitesse de convergence des séries de Fourier.

$$\boxed{2} \quad \sum_{n=1}^\infty \frac{n}{n^2+1} \sin(nt).$$

1) Avec le critère d'Abel, on constate la convergence simple de la série sur $\mathbb{R}$.

2) En développant $\frac{n}{n^2+1}$ selon les puissances de $\frac{1}{n}$:

$$\frac{n}{n^2+1} = \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)^{-1} = \frac{1}{n} \left(1 + ? \left(\frac{1}{n^2} \right) \right)$$

on obtient pour la somme x de la série

$$x(t) = h(t) + \sum_{n=1}^\infty \epsilon_n \sin(nt)$$

où $\varepsilon_n = \frac{1}{n^2}$: la série $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \sin(nt)$ converge donc normalement sur $\mathbb{R}$,
et la série donnée est donc la série de Fourier de la fonction x .

3) On veut calculer x avec une précision uniforme de 10^{-3} ?

Comme $\varepsilon_n = \frac{n}{n^2+1} - \frac{1}{n} = \frac{-1}{n(n^2+1)}$, il suffira de calculer $\sum_{n=1}^N \varepsilon_n \sin(nt)$
avec N tel que

$$\int_N^{\infty} \frac{dt}{t^3} = \frac{1}{2N^2} \leq 10^{-3}$$

ce qui conduit à $N = 24$.

4) Mais en poussant plus loin le DA de $\frac{n}{n^2+1}$:

$$\frac{n}{n^2+1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^3} + \delta_n$$

où
$$\delta_n = \frac{1}{n^3(n^2+1)}$$

et comme d'autre part

$$\begin{aligned} \sum_1^{\infty} \frac{\sin(nt)}{n^3} &= \int_0^t \left(\frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi}{2} \theta + \frac{\theta^2}{4} \right) d\theta \\ &= \frac{t^3 - 3\pi t^2 + 2\pi^2 t}{12} \text{ pour } t \in [0, 2\pi] \end{aligned}$$

est connu, il suffit maintenant de calculer

$$\sum_{n=1}^N \delta_n \sin(nt)$$

avec N tel que $\int_N^\infty \frac{dt}{t^5} = \frac{1}{4N^4} < 10^{-3} : N = 4$ convient.

$$\boxed{3} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nt)}{n},$$

1) La série converge (uniformément sur $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$) d'après le critère d'Abel.

2) On peut calculer la somme par la méthode utilisée dans l'exemple $\boxed{1}$ (§ 4) : $S_N(t) = S_N(\pi) - \dots$ et $S_N(\pi) \rightarrow -\ln(?)$ avec Abel.

3) On peut aussi l'obtenir par le **procédé (de sommation)** suivant :
pour $0 \leq r < 1$, on a

$$\sum_0^\infty r^n e^{int} = \frac{1}{1 - re^{it}}, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

d'où
$$\sum_1^\infty r^n \cos(nt) = \frac{r(\cos t - r)}{1 - 2r \cos t + r^2}$$

soit
$$\sum_1^\infty r^{n-1} \cos(nt) = \frac{\cos t - r}{1 - 2r \cos t + r^2}$$

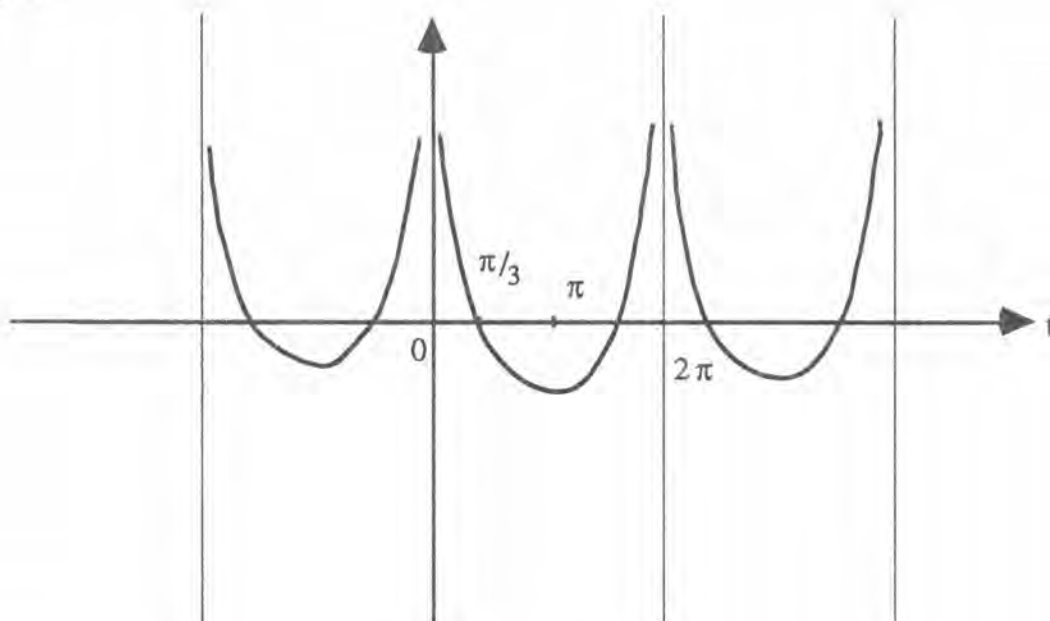
ce qui donne, en $\int_0^r$ pour $0 < r < 1$:

$$\sum_1^\infty \frac{r^n}{n} \cos(nt) = -\frac{1}{2} \ln(1 - 2r \cos t + r^2)$$

maintenant, avec le théorème d'Abel, on peut faire $r = 1$ dans la formule pour obtenir

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nt)}{n} = -\frac{1}{2} \ln\left(2 \sin \frac{t}{2}\right), \quad \forall t \in]0, 2\pi[$$

- 4) La fonction $x(t) = -\frac{1}{2} \ln(2 \sin \frac{t}{2})$ pour $t \in]0, 2\pi[$, et 2π -périodique, de graphe :



n'entre pas dans le cadre de la leçon Série de Fourier ...

- 5) En changeant t en $\pi - t$ on obtient, pour $|t| < \pi$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos(nt)}{n} = -\ln\left(2 \cos \frac{t}{2}\right)$$

d'où, pour $0 < t < \pi$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)t}{2n+1} = \frac{1}{2} \ln \cotg\left(\frac{t}{2}\right).$$

4

$$x(t) = \begin{cases} t^2, & t \in]0, \pi[\\ t^2 + 1, & t \in]-\pi, 0[\end{cases} \quad x \text{ } 2\pi\text{-périodique}$$

- 1) Les calculs de coefficients de Fourier, et le théorème de Dirichlet donnent

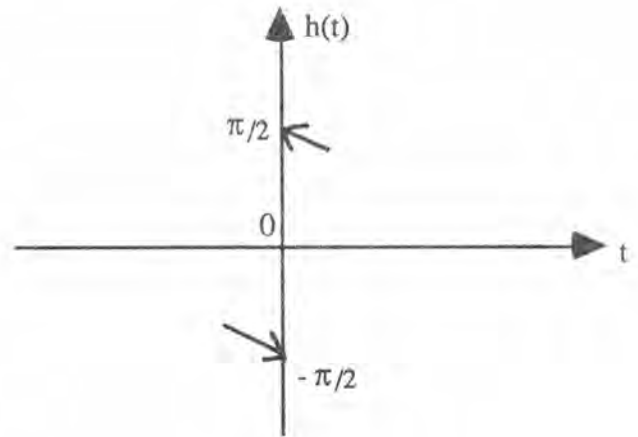
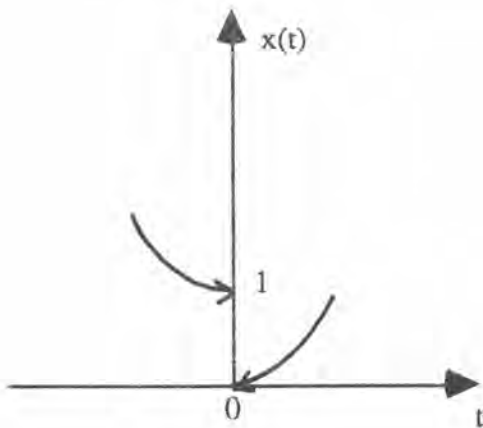
$$x(t) = \frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nt - \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin(2n+1)t$$

valable pour tout $t \in \mathbb{R}$, en posant $x(0) = \frac{1}{2}$ et $x(\pi) = \pi^2 + \frac{1}{2}$.

2) La formule $c_n(\dot{x}) = in.c_n(x)$ explique que, plus x est régulière, plus vite ses coefficients de Fourier tendent vers 0.

3) D'où l'idée, pour améliorer la vitesse de convergence d'une série de Fourier, d'utiliser h et ses primitives pour régulariser x .

On commence par rendre x continue en 0, en considérant $y = x + \frac{h}{\pi}$:



: y est continue en 0.

On élimine ensuite le saut en π , en posant :

$$z(t) = y(t) - \frac{1}{\pi} h(t-\pi)$$

ainsi

$$z(t) = x(t) - \delta(t)$$

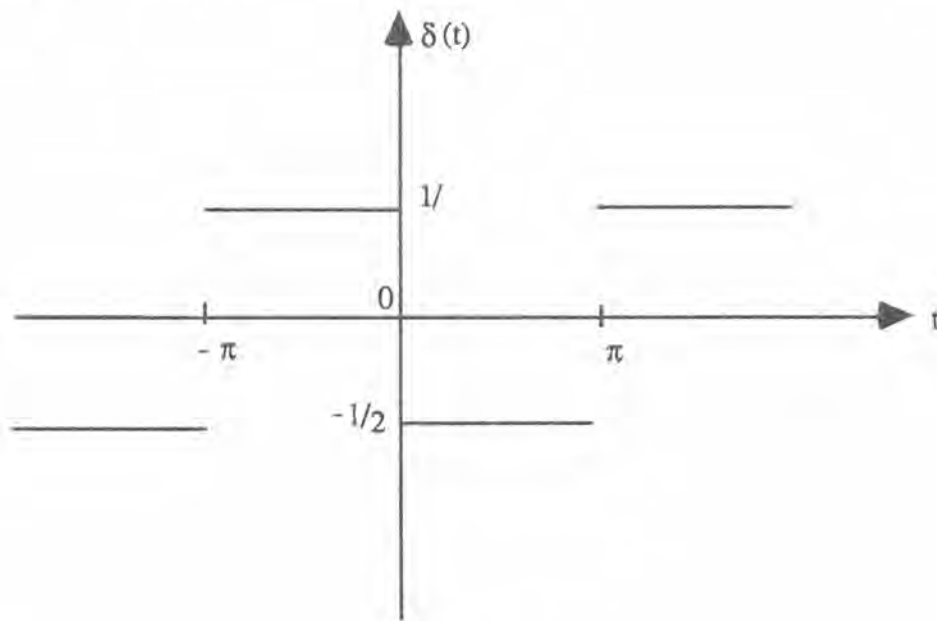
avec

$$\delta(t) = \frac{1}{\pi} (-h(t) + h(t-\pi))$$

soit pour $0 < t < \pi$:

$$\delta(t) = \frac{1}{\pi} \left(-\frac{\pi-t}{2} - \frac{t}{2} \right) = -\frac{1}{2}$$

et $\delta(t) = \frac{1}{2}$ pour $-\pi < t < 0$



4) On a donc

$$x(t) = \delta(t) + \frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nt).$$

5)
$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{int}}{n-\alpha}, \quad \alpha \notin \mathbb{Z}.$$

1) Etant donné $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, on peut développer en série de Fourier la fonction 2π -périodique, qui vaut $\cos(\alpha t)$ pour $|t| \leq \pi$. On obtient, en y faisant $t = 0$, la formule

$$1 + 2\alpha^2 \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 - n^2} = \frac{\pi \alpha}{\sin(\pi \alpha)}.$$

2) La série $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{int}}{n-\alpha}$, pour $\alpha \notin \mathbb{Z}$, converge uniformément sur tout compact $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$ ($0 < \varepsilon < 2\pi$) de $]0, 2\pi[$ (Abel); on désigne sa somme par $F_{\alpha}(t)$.

La fonction $G = F - 2ih$ se trouve définie par

$$\begin{aligned} G(t) &= -\frac{1}{\alpha} + \sum_{n \neq 0} e^{int} \left(\frac{1}{n-\alpha} - \frac{1}{n} \right) \\ &= -\frac{1}{\alpha} + \alpha \sum_{n \neq 0} \frac{e^{int}}{n(n-\alpha)}, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

On peut la dériver sans problème, pour obtenir

$$\dot{G}(t) = i\alpha \sum_{n \neq 0} \frac{e^{int}}{n-\alpha}$$

et l'équation différentielle

$$\dot{G}(t) = i\alpha G(t) + (i - 2\alpha h(t))$$

qu'on intègre en faisant varier la constante, pour obtenir

$$G(t) = -2i h(t) + C e^{i\alpha t}, \quad \text{avec } C \in \mathbb{K}.$$

3) Par conséquent F_α a la forme $F_\alpha(t) = C e^{i\alpha t}$ et on peut déterminer C en faisant $t = \pi$, grâce à 1) :

$$C e^{i\alpha\pi} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n-\alpha} = \frac{-\pi}{\sin(\pi\alpha)}$$

Ainsi a-t-on obtenu, pour $0 < t < 2\pi$

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{int}}{n-\alpha} = \frac{-\pi}{\sin(\pi\alpha)} e^{-i\pi\alpha} e^{i\alpha t}, \quad \alpha \notin \mathbb{Z}.$$

4) A partir de là, on peut, par exemple montrer que

$$\sum_0^\infty \frac{\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{n + \frac{1}{2}} = \ln\left(\cotg \frac{t}{4}\right), \quad \text{si } t \in]0, \pi[.$$

- 29 -

EXEMPLES D'UTILISATION DE CHANGEMENT DE VARIABLE EN ANALYSE

• On commence par illustrer les changements de variable dans le **Calcul Intégral** sur $\mathbb{R}$, en se plaçant dans le cadre de la leçon $\int_a^b f(x)dx$, $[a,b]$ compact, f continue réelle sur $[a,b]$, où on apprend que

1) Si $f = F'$ avec F de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, alors

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a).$$

2) La fonction $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, définie sur $[a,b]$, est de classe $\mathcal{C}^1$, et telle que $F' = f$ sur $[a,b]$.

Maintenant, si φ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[c,d]$, à valeurs dans l'intervalle $[a,b]$, d'après le **théorème de dérivation d'une fonction composée**, on a

$$\begin{aligned} \int_c^d f(\varphi(t))\dot{\varphi}(t)dt &\stackrel{(2)}{=} \int_c^d F'(\varphi(t))\dot{\varphi}(t)dt \\ &= \int_c^d F \circ \varphi (t)dt \\ &\stackrel{(1)}{=} \int_c^d F(\varphi(d)) - F(\varphi(c)) \\ &\stackrel{(2)}{=} \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(x)dx. \end{aligned}$$

En particulier, si ψ est une fonction **strictement croissante** de $[a,b]$ sur $[c,d]$, avec $\varphi = \psi^{-1}$, on aura

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(x)dx = \int_{\psi(a)}^{\psi(b)} f(\varphi(t))\dot{\varphi}(t)dt$$

("on pose $x = \varphi(t)$, $dx = \dot{\varphi}(t)dt$ ").

Comme Exemple 1, on peut exposer $I = \int_{-1}^{+1} x\sqrt{1-x^2} dx$ (qui, par parité, vaut

évidemment 0) :

$$\varphi : t \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \sin t \in [-1, +1]$$

est $\mathcal{C}^1$ croissante et, par conséquent

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sin t \cos t \cos t dt$$

(car $\sqrt{1-x^2} = |\cos t| = \cos t$ pour $|t| \leq \frac{\pi}{2}$)

soit

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \sin t dt = I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} f(\varphi(t))\dot{\varphi}(t)dt$$

avec $f(x) = x^2$ et $\varphi(t) = -\cos t$, ce qui donne, comme $F(x) = \frac{x^3}{3}$

$$I = -\frac{1}{3} \cos^3 t \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} = 0 .$$

Avec l'exemple [2], on a choisi d'exposer un **calcul de primitive**, tandis que l'exemple [3] montre comment établir l'inégalité de Young (et, comme conséquence, celle de Hölder).

- Bien que le calcul intégral en plusieurs variables soit exclu du programme de l'Oral, on cite cependant, avec l'exemple [4] le calcul classique de $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$, et, avec l'exemple [5] un calcul de volume.

- Le changement de variable peut être la base de l'étude du comportement d'une **intégrale dépendant d'un paramètre**. Outre les exemples cités dans la leçon correspondante, on étudie ici en détail l'intégrale qui donne la période des oscillations du pendule [6] et on a choisi d'illustrer la **méthode de Laplace** dans l'étude d'une intégrale qui dépend d'un grand paramètre, sur la fonction de Bessel $J_0(it)$. [7].

- En **Calcul Différentiel**, on rappelle, pour commencer comment un changement de fonction inconnue permet d'éliminer le terme d'ordre 1 dans une équation différentielle linéaire d'ordre 2

$$y'' + py' + qy = 0$$

en posant $y = z \cdot \varphi$, on est amené à choisir

$$\varphi = \exp - \int \frac{p}{2} dx$$

pour obtenir

$$z'' + \left(-\frac{p^2}{4} - \frac{p'}{2} + q \right) z = 0$$

équation différentielle qui se transforme à son tour en une équation d'ordre 1, non linéaire, de Riccati, en posant $w = \frac{z'}{z}$...

On peut illustrer la méthode sur l'équation différentielle $y'' + (\lambda - x^2)y = 0$, qui se ramène à celle de Hermite : $y'' - 2xy' + 2\lambda y = 0$; [8] : prendre une ED d'Euler.

L'exemple [9] illustre l'utilisation du changement de variable dans l'**intégration d'une Equation aux Dérivées Partielles**. Plus intéressant est l'exemple [10] qui explique, dans le cadre d'une EDP d'ordre 1 (de type Hamilton-Jacobi), comment un

changement de coordonnées permet d'intégrer le problème de Cauchy, sous une condition de transversalité.

Enfin, l'exemple [11] explique comment le passage en coordonnées polaires permet, sur un disque, de résoudre le problème de Dirichlet pour l'opérateur Δ .

Références :	[3]	Chambadal-Ovaert 2 p. 465
	[6], [10]	Arnold
	[7]	Dieudonné, ch. 3
	[8]	Dieudonné, ch ?

$$[2] \quad \int \frac{dx}{x\sqrt{3x^2+2x-1}}.$$

1) Comme $3x^2+2x-1 = 3\left(\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{4}{9}\right)$, la fonction est continue en particulier sur $]\frac{1}{3}, +\infty[$, où le changement de variable $x = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3}t$ donne

$$F(x) = \int \frac{\sqrt{3} dt}{(2t-1)\sqrt{t^2-1}}$$

2) Pour $t > 1$, on pose $t = \text{ch}(u)$ avec $u > 0$ pour obtenir

$$F(x) = \int \frac{\sqrt{3} du}{2\text{chu}-1} = \sqrt{3} \int \frac{e^u du}{e^{2u}-e^u+1}.$$

3) En posant $u = \ln(v)$, avec $v > 1$, on a

$$F(x) = \sqrt{3} \int \frac{dv}{v^2-v+1}.$$

4) Et, comme $v^2-v+1 = \left(v - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$, en posant

$$v = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \text{tg } \theta$$

il vient

$$F(x) = 2\theta.$$

5) En exprimant θ en fonction de x , on obtient

$$F(x) = 2\text{Arctg}(x\sqrt{3} + \sqrt{3x^2+2x-1}) + C.$$

6) En posant $x = \frac{1+t^2}{3-t^2}$, on transforme F en $\int \frac{2dt}{1+t^2}$.

3 Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,a]$, avec $f' > 0$, si $g = f^{-1}$, on a

$$a f(a) = \int_0^a f(x)dx + \int_0^{f(a)} g(y)dy.$$

En conséquence, si $\alpha \in [0,a]$, si $\beta \in [0,f(a)]$, on a

$$\alpha.\beta \leq \int_0^\alpha f(x)dx + \int_0^\beta g(y)dy$$

(inégalité d'Young).

1) Par le **changement de variable** $y = f(x)$, on a

$$\int_0^{f(a)} g(y)dy = \int_0^a x f'(x)dx$$

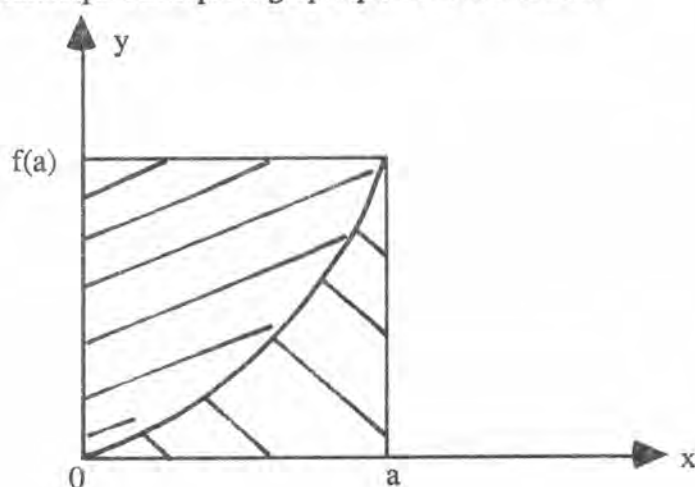
et une intégration par parties permet de conclure :

$$= x f(x) \Big|_{x=0}^{x=a} - \int_0^a f(x)dx$$

donnant

$$\int_0^{f(a)} g(y)dy = a f(a) - \int_0^a f(x)dx$$

relation qui s'interprète graphiquement facilement :



(et qui peut se démontrer sous des hypothèses plus faibles ; voir la référence citée).

2) Si $\alpha \in [0, a]$, $\beta \in [0, f(a)]$, d'après 1), on a :

$$\alpha \cdot \beta \leq \int_0^\alpha f(x) dx + \int_0^{f(\alpha)} g(y) dy + \alpha(\beta - f(\alpha))$$

et si $\beta \geq f(\alpha)$, on a :

$$\begin{aligned} \int_{f(\alpha)}^\beta g(y) dy &\geq g(f(\alpha))(\beta - f(\alpha)) \\ &\geq \alpha(\beta - f(\alpha)) \end{aligned}$$

d'où la conclusion, avec la relation de Chasle ; pour $\beta < f(\alpha)$, il suffit d'échanger f et g .

3) Si $p, q > 1$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, pour $\alpha, \beta > 0$, on a :

$$\alpha \beta \leq \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q} \quad (\text{inégalité de Hölder})$$

pour le voir, prendre $f(x) = x^{p-1}$ (et $g(y) = y^{\frac{q}{p-1}}$).

$$\boxed{4} \quad \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

On introduit les intégrales doubles

$$I_n = \int \int_{0 \triangleleft_n} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

$$J_n = \int \int_{0 \triangleleft_n} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

$$1) \quad I_n = \left(\int_0^n e^{-x^2} dx \right)^2$$

$$J_n = \int_0^n r e^{-r^2} dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \text{ en passant en coordonnées polaires}$$

$$= \frac{\pi}{4} (1 - e^{-n^2})$$

2) Comme $I_n < J_n \sqrt{2}$ et que $\lim_{n \rightarrow \infty} J_n = \frac{\pi}{4}$ on obtient

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\boxed{5} \quad \int \int \int_{\{x^2+y^2+z^2 < x\}} \sqrt{x^2+y^2+z^2} dx dy dz$$

un passage en coordonnées polaires donne

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \int_0^{\cos \theta \cos \varphi} \rho^3 \cos \varphi d\varphi d\theta d\varphi$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\cos \theta \cos \varphi} \rho^3 d\rho \right) d\theta \cos \varphi d\varphi$$

$$= \frac{1}{4} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta d\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^5 \varphi d\varphi$$

$$= \frac{\pi}{10}$$

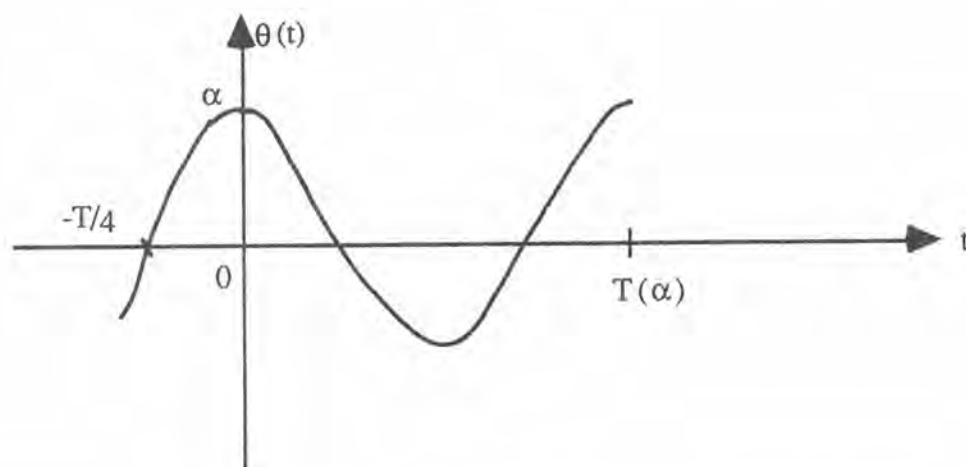
par linéarisation, et changement de variable.

6 Etude de la période du pendule

1) Dans la leçon Equations Différentielles, on a appris que, pour la condition initiale

$$\theta(0) = \alpha \in]-\pi, +\pi[, \dot{\theta}(0) = 0$$

la solution de $\ddot{\theta} + \sin \theta = 0$ était périodique (: le pendule oscille) :



(le champ des vitesses $\begin{cases} P = \dot{\theta} \\ Q = -\sin \theta \end{cases}$ étant symétrique par rapport à l'origine, $\theta(\pm \frac{T}{4}) = 0$).

2) Pour $\varepsilon > 0$, on peut écrire que

$$\frac{T}{4} - \varepsilon = \int_{-\frac{T}{4}}^{-\varepsilon} dt = \int_0^{\alpha(\varepsilon)} r'(\theta) d\theta$$

par le **changement de variable** $t = t(\theta)$ soit

$$\frac{T}{4} - \varepsilon = \int_0^{\alpha(\varepsilon)} \frac{d\theta}{\dot{\theta}} = \int_0^{\alpha(\varepsilon)} \frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos \theta - \cos \alpha)}}$$

et, en faisant $\varepsilon \rightarrow 0+$, on obtient

$$T(\alpha) = 2\sqrt{2} \int_0^{\alpha} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \alpha}}.$$

3) L'étude de T en fonction de α n'est pas élémentaire sur la forme précédente (: voir Bourbaki FVR II, § 3, ex. 5).

4) En posant

$$\sin \frac{\theta}{2} = \sin \frac{\alpha}{2} \sin \varphi \text{ et, en transformant } \cos \theta - \cos \alpha \text{ en } 2\left(\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}\right),$$

il vient

$$T(\alpha) = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \quad \text{où } k = \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

: le changement de variable a fait disparaître le paramètre α de la borne supérieure et, sur cette nouvelle expression de T , il est facile de se rendre compte que T augmente avec α .

5) Dans la leçon Série entières, on a vu que $T(\alpha) \rightarrow +\infty$ quand $\alpha \rightarrow \pi$, et obtenu un équivalent logarithmique de la période. La méthode de Laplace qui suit permet de retrouver ce résultat.

7 $J_0(it) \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{e^t}{\sqrt{2\pi t}}.$

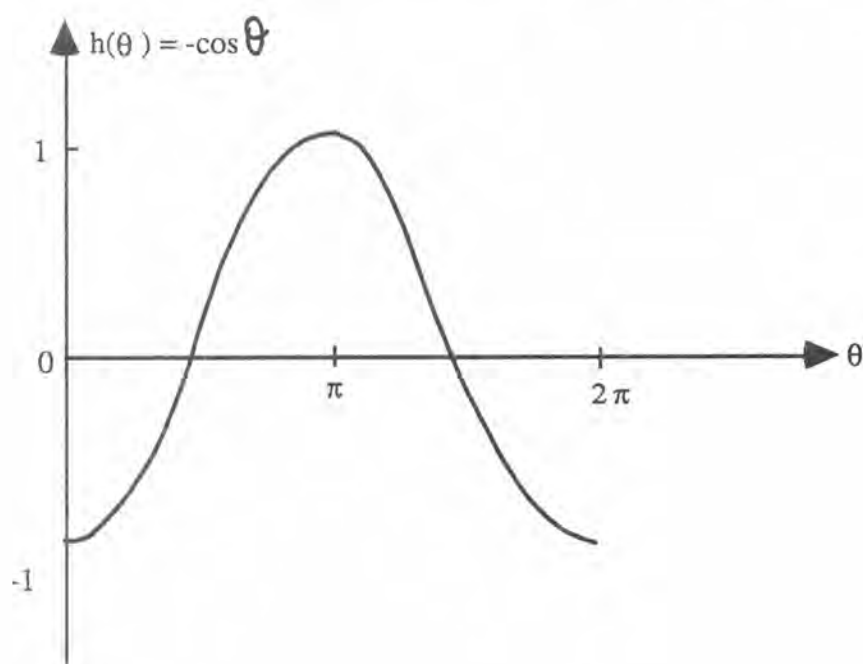
1) On sait que $J_0(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(t \sin \theta) d\theta$ pour $t \in \mathbb{R}$ ce qui conduit à

$$J_0(it) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-t \cos \theta} d\theta \quad (\text{formule de Hansen})$$

($\cos(it \sin \theta) = \text{ch}(t \sin \theta)$), et $\int_0^{2\pi} e^{-t \sin \theta} d\theta = \int_0^{2\pi} e^t \sin \theta d\theta$ par le changement de variable $\theta = -\theta$, on conclut avec $\theta = \frac{\pi}{2} - \theta$).

2) Ce qu'on peut vérifier directement en $\int_0^{2\pi}$ terme à terme le développement en série entière de $e^{-t \cos \theta}$, avec Wallis...

3) On s'intéresse donc au comportement de $\int_0^{2\pi} e^{t \cdot h(\theta)} d\theta$ où



lorsque $t \rightarrow +\infty$. Il s'agit de mettre en forme l'idée selon laquelle la partie prépondérante de l'intégrale va être concentrée autour du point de maximum $\theta = \pi$.

4) Pour $\delta > 0$ petit, si $|\pi - \theta| \leq \delta$, $-\cos \theta \leq \cos \delta$ et

$$\frac{1}{2\pi} \int_{|\pi - \theta| \geq \delta} e^{-t \cos \theta} d\theta \leq e^{t \cos \delta}.$$

5) Pour $|\pi - \theta| \leq \delta$, par le changement de variable $\theta = \pi + \theta$ on a

$$\int_{\pi - \delta}^{\pi + \delta} e^{-t \cos \theta} d\theta = \int_{-\delta}^{+\delta} e^{t \cos \theta} d\theta$$

où, avec la formule de Taylor

$$1 - \frac{\theta^2}{2} \leq \cos \theta \leq 1 - \frac{\theta^2}{2} \cos \delta$$

d'où l'encadrement suivant de l'intégrale

$$e^t \int_{-\delta}^{+\delta} e^{-\frac{\theta^2}{2} t} d\theta \leq \int_{-\delta}^{+\delta} e^{t \cos \theta} d\theta \leq e^t \int_{-\delta}^{+\delta} e^{-\frac{\theta^2}{2} t \cos \delta} d\theta.$$

6) On étudie donc le comportement de

$$\int_{-\delta}^{+\delta} e^{-c \frac{\theta^2}{2}} d\theta \text{ quand } c \rightarrow +\infty$$

en utilisant le **changement de variable**

$$\theta = \frac{\alpha}{\sqrt{c}}$$

qui donne

$$\int_{-\delta}^{+\delta} e^{-c \frac{\theta^2}{2}} d\theta = \frac{1}{\sqrt{c}} \int_{-\delta\sqrt{c}}^{+\delta\sqrt{c}} e^{-\frac{\alpha^2}{2}} d\alpha$$

$$(\underset{c \rightarrow +\infty}{\sim}) \frac{1}{\sqrt{c}} \cdot \sqrt{2\pi}$$

d'après le résultat obtenu dans l'exemple [3] .

7) Il suffit maintenant de rédiger, pour montrer que

$$J_0(it) \underset{(t \rightarrow +\infty)}{\sim} \frac{e^t}{\sqrt{2\pi t}} ;$$

à $\varepsilon > 0$ donné, on choisit $\delta > 0$ de sorte que

$$\frac{1}{\sqrt{\cos \delta}} < 1 + \frac{\varepsilon}{3}$$

et alors, il existe $T_\varepsilon > 0$ tel que, si $t \geq T_\varepsilon$, on ait

$$e^t \sqrt{\frac{2\pi}{t}} (1-\varepsilon) \leq \int_{\pi-\delta}^{\pi+\delta} e^{-t \cos \theta} d\theta \leq e^t \sqrt{\frac{2\pi}{t}} \left(1 + \frac{\varepsilon}{3}\right)^2$$

et, comme $\int_{|\pi-\theta|>\delta} = \sigma\left(\frac{e^t}{\sqrt{t}}\right) \dots$

$$\boxed{8} \quad y'' - 2xy' + 2y = 0 \text{ et } y'' + (\lambda - x^2)y = 0.$$

$$\boxed{9} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

On explique que **le changement de variable**

$$\begin{cases} u = x+y \\ v = x-y \end{cases}$$

et de fonction $w = x.y-z$

ramène l'EDP à la forme

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} = \frac{1}{2}$$

ce qui permet d'écrire la solution générale sous la forme

$$z(x,y) = \frac{1}{4} (x+y)^2 + (x+y)\varphi(x-y) + \psi(x-y)$$

avec φ et ψ de classe $\mathcal{C}^2$.

$$\boxed{10} \quad \begin{cases} \frac{\partial S}{\partial x} = \frac{1}{2}(y^2 + (\frac{\partial S}{\partial y})^2) \\ S(0, \cdot) = \varphi \text{ donné} \end{cases}$$

1) On suppose le problème résolu :

$$F\left(x, y, p = \frac{\partial S}{\partial x}, q = \frac{\partial S}{\partial y}\right) \doteq p - \frac{1}{2}(y^2 + q^2) = 0$$

en supposant S de classe $\mathcal{C}^2$, et en dérivant, on a alors

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} - q \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial y} - q \frac{\partial q}{\partial y} - y = 0 \end{cases}, \text{ où } \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} \text{ d'après Schwarz.}$$

On considère alors le système dynamique

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 \\ \dot{y} = -q \end{cases}$$

si bien que

$$\begin{cases} \dot{p} = \frac{\partial p}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial p}{\partial y} \dot{y} = \frac{\partial p}{\partial x} - q \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ \dot{q} = \frac{\partial q}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial q}{\partial y} \dot{y} = \frac{\partial q}{\partial y} - q \frac{\partial q}{\partial y} = -y \end{cases}$$

et

$$\dot{S} = \frac{\partial S}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial S}{\partial y} \dot{y} = p - q^2$$

2) On considère donc le système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 \\ \dot{y} = -q \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{p} = 0 \\ \dot{q} = +y \end{cases} \quad \dot{S} = p - q^2$$

avec les conditions initiales suivantes

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = s \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \begin{cases} p(0) = \frac{1}{2} (s^2 + (\varphi'(s))^2) \\ q(0) = \varphi'(s) \end{cases}$$

(la condition donnée $S(0,s) = \varphi(s)$ entraîne $q(0) = \varphi'(s)$)

tandis que $p(0) = \frac{1}{2} (s^2 + q^2(0))$
 $S(0) = \varphi(s)$

s étant un paramètre réel.

Il est facile d'intégrer, car

$$\dot{x} = 1, x(0) = 0 \text{ entraîne } x(t) = t$$

$$\dot{y} = -q, \dot{q} = y \text{ donnent } \ddot{y} + y = 0$$

d'où $y(t) = A \cos t + B \sin t$ et, en tenant compte de

$$y(0) = s, \dot{y}(0) = -q(0) = -\varphi'(s) :$$

$$y(t) = s \cos t - \varphi'(s) \sin t$$

d'où $q(t) = -\dot{y}(t) = s \sin t + \varphi'(s) \cos t$

$$\dot{p} = 0, p(0) = \frac{1}{2} (s^2 + (\varphi'(s))^2) \text{ donne } p(t) = p(0) \text{ et enfin}$$

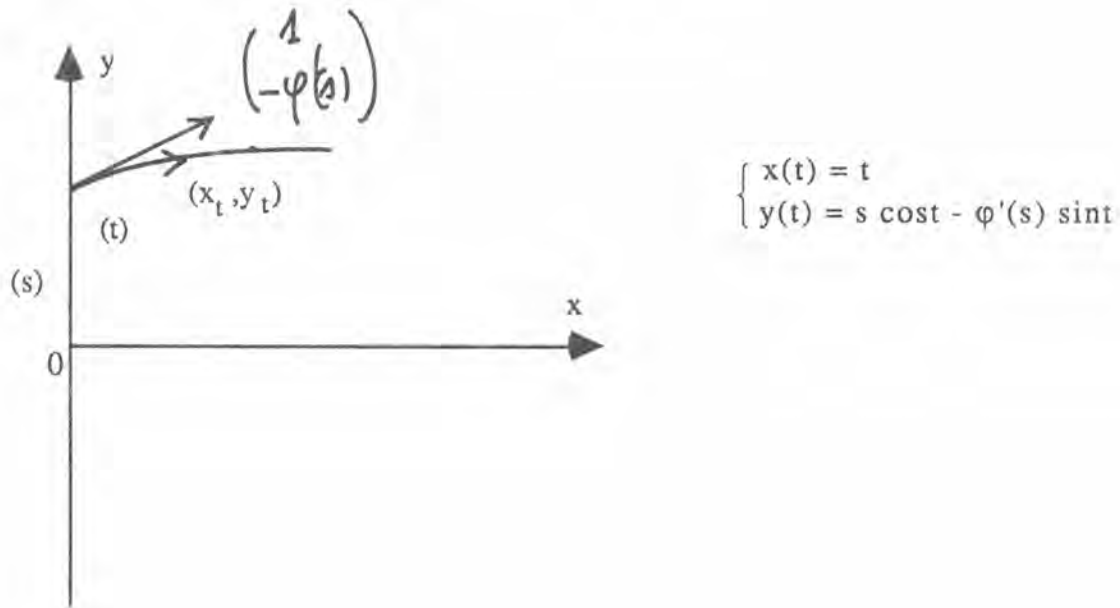
$$\dot{S} = p - q^2 = \frac{1}{2} (s^2 + (\varphi'(s))^2) - (s \sin t + \varphi'(s) \cos t)^2$$

$$= \frac{1}{2} s^2 \cos 2t - \frac{1}{2} (\varphi'(s))^2 \cos 2t - s \varphi'(s) \sin 2t$$

avec $S(0) = \varphi(s)$ donne

$$S(t) = \frac{1}{4} (s^2 - (\varphi'(s))^2) \sin 2t + \frac{1}{2} s \varphi'(s) \cos 2t + (\varphi(s) - \frac{1}{2} s \varphi'(s)).$$

3) En traçant les trajectoires du système dynamique :



pour $\varphi'(s) \neq 0$,

on observe leur transversalité avec l'axe Oy : l'ordonnée s et le temps t peuvent servir de nouvelles coordonnées le long de l'axe Oy , et, par le changement de variable

$$\begin{cases} x = t \\ y = s \cos t - \varphi'(s) \sin t \end{cases} \quad \text{on peut exprimer la solution } S.$$

Remarque :

$$\det \frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}(s,0) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\varphi'(s) \end{vmatrix} \neq 0$$

et le **théorème d'inversion locale** montre bien (sous la condition $\varphi'(0) \neq 0$) que $(s,t) \rightarrow (x,y)$ est un changement de carte (Leçon Théorème du point fixe et applications).

4) Voici un autre exemple intéressant

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \\ u(0, y) = 0 \text{ si } y \leq 0, -y^2 \text{ si } y \geq 0 \end{cases}$$

Le système différentiel s'écrit ici

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 \\ \dot{y} = u \end{cases} \quad \dot{p} = \dot{q} = 0 \quad \dot{u} = 0$$

et, joint aux conditions initiales

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = s \end{cases}$$

donne, selon le signe de s , les trajectoires

$$s \leq 0 : x = t, y = s, u = 0$$

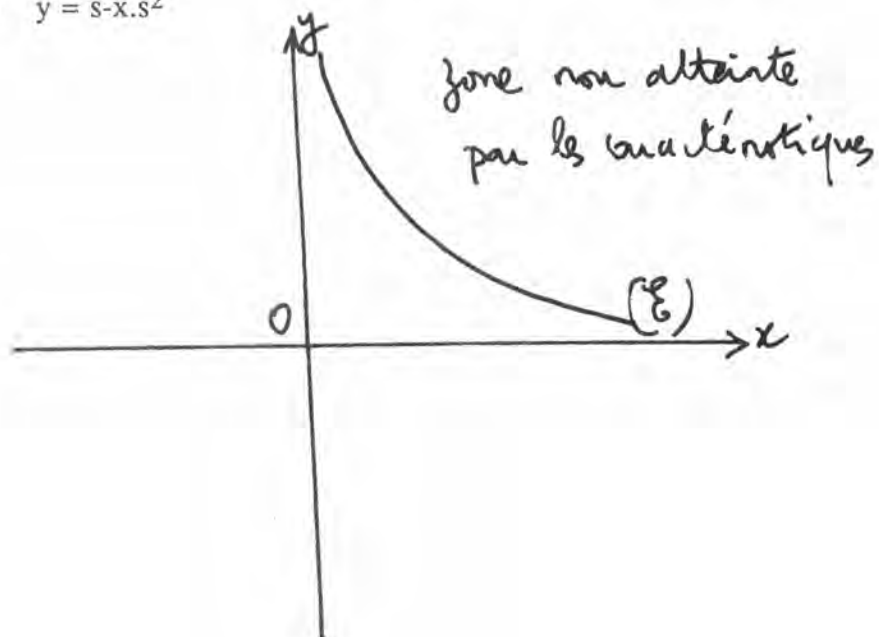
$$s \geq 0 : x = t, y = s - ts^2, u = -s^2$$

en particulier, dans le demi-plan supérieur, on obtient la solution

$$u(x, y) = -\frac{1}{4x^2} (1 - \sqrt{1 - 4xy})^2 \text{ si } xy < \frac{1}{4}.$$

La courbe limite $xy = \frac{1}{4}, y > 0$ sur l'enveloppe de la famille des caractéristiques

$$(D_s) \quad y = s - x \cdot s^2$$



LISTE D'EXERCICES N° 1

$$\boxed{1} \quad \frac{1}{a} - \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+2b} - \frac{1}{a+3b} + \dots = \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b} dt, \quad a, b > 0.$$

$$\boxed{2} \quad \int_0^\infty e^{-t^2} \sin(2xt) \frac{dt}{t} = \sqrt{\pi} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

$$\boxed{3} \quad t \ddot{x} - (2t+1) \dot{x} + 2x = 2t^2 e^{2t}.$$

$$\boxed{4} \quad 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \dots = \frac{1}{3} \left(\ln 2 + \frac{\pi}{\sqrt{3}} \right).$$

$$\boxed{5} \quad \sum_1^\infty \frac{1}{n(4n^2-1)} = 2 \ln 2.$$

$$\boxed{6} \quad f_n(t) = t^{n-1}(1-2t^n)$$

$$\int_0^1 \sum_1^\infty f_n dt \neq \sum_1^\infty \int_0^1 f_n dt$$

$$\boxed{7} \quad 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{9} - \frac{1}{13} + \dots = \frac{1}{4\sqrt{2}} (\pi + 2 \ln(1+\sqrt{2})).$$

$$\boxed{8} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n^x} = \ln 2.$$

$$\boxed{9} \quad \int_0^\infty \frac{e^{-kx}}{1+x^2} dx = \int_k^\infty \sin(t-k) \frac{dt}{t} \underset{(k \rightarrow \infty)}{\sim} \frac{1}{k} - \frac{2!}{k^3} + \frac{4!}{k^5} - \dots$$

$$\begin{aligned}
 \boxed{10} \quad \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2} \frac{1}{2^n} &= \int_0^1 \ln\left(\frac{1}{x}\right) \frac{dx}{2-x} \\
 &= \int_0^1 \ln\left(\frac{1}{1-x}\right) (1-x+x^2-\dots) dx \\
 &= 1 - \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) - \dots \\
 &= \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2} (\ln 2)^2.
 \end{aligned}$$

$$\boxed{11} \quad \int_0^{\infty} \frac{e^{\alpha t}}{e^{\beta t} \sin^2 t + e^{\gamma t} \cos^2 t} dt \text{ avec } \alpha, \beta, \gamma > 0$$

ne converge que si : $\beta + \gamma > 2\alpha$.

$$\boxed{12} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \sum_1^{\infty} \frac{x^n(1-x)}{n(1-x^{2n})} = \frac{\pi^2}{12},$$

$$\boxed{13} \quad \int_x^{\infty} \frac{e^{it}}{\sqrt{t}} dt \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{ie^{ix}}{\sqrt{x}} \left(1 + \frac{1}{2ix} + \frac{1.3}{(2ix)^2} + \dots \right).$$

$$\boxed{14} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^x e^{-t} \frac{t^n}{n!} dt \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x e^{-t} \frac{t^n}{n!} dt$$

LISTE D'EXERCICES N° 2

[1] $\ddot{x} + x - x^5 = 0$

$x(0) = 0, \dot{x}(0) = \sqrt{\frac{2}{3}}.$

[2] $\int_0^{\infty} \frac{\sin(tx)}{t(1+t^2)} dt = \frac{\pi}{2} (1-e^{-x}), x > 0.$

[3] $\sum_1^{\infty} \frac{n}{(4n^2-1)^2} = \frac{1}{8}.$

[4] $\frac{1}{2} \operatorname{Arctg} x \cdot \ln(1+x^2) = S_2 \frac{x^3}{3} - S_4 \frac{x^5}{5} + S_6 \frac{x^7}{7} - \dots$

où $S_{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2n}.$

$\frac{\pi}{2} \ln 2 = \frac{1}{3} S_2 - \frac{1}{5} S_4 + \frac{1}{7} S_6 - \dots$

[5] $\int_0^x \frac{e^t}{\sqrt{t}} dt \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{e^x}{\sqrt{x}} \left(1 + \frac{1}{2x} + \frac{1.3}{2^2 \cdot x^2} + \frac{1.3.5}{2^3 \cdot x^3} + \dots\right).$

[6] $\int_0^{\infty} \frac{\sin(bt)}{e^{at}-1} dt = \frac{b}{b^2+a^2} + \frac{b}{b^2+(2a)^2} + \dots, a > 0.$

[7] $\sum_1^{\infty} \frac{1}{n} \sin(2n\theta) \cdot \sin^2(n\varphi) = \frac{\pi}{4}, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

$\theta < \varphi < \pi - \theta.$

$$\boxed{8} \quad \frac{1}{n^2} = \int_0^{\infty} t e^{-nt} dt = \int_0^1 \ln\left(\frac{1}{1-t}\right) \cdot (1-t)^{n-1} dt$$

donne

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} &= \int_0^1 \frac{1-(1-t)^n}{t} \cdot \ln\left(\frac{1}{1-t}\right) dt \\ &= \int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1}}{k} (1-(1-t)^n) dt \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{(k-1)!}{k(n+1)(n+2)\dots(n+k)} \right) \end{aligned}$$

d'où

$$1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{n+1} - \frac{\frac{1}{2}}{(n+1)(n+2)} - \frac{\frac{2}{3}}{(n+1)(n+2)(n+3)} \dots$$

$$\boxed{9} \quad \int_0^{\infty} (\sin(pt) - \sin(qt))^2 \frac{dt}{t^2} = \frac{\pi}{2} |p-q|.$$

$$\boxed{10} \quad x_n = x_{n+1}(3-x_{n+1}^2), \quad 0 \leq x_n < 1, \quad x_1 = \sqrt{3}$$

$$x_n \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{2\pi}{3^n}.$$

$$\boxed{11} \quad t(t-1)\ddot{x} - (2t-1)\dot{x} + 2x = t^2(2t-3).$$

$$\boxed{12} \quad \sum_0^{\infty} \int_0^1 \sin(t^n) dt.$$

$$\boxed{13} \quad \ddot{x} - 4x = |\cos \pi t|.$$

$$\boxed{14} \quad \{x^3 + y^3 - 2xy = 0\}.$$

LISTE D'EXERCICES N° 3

1 $3tx + x^2 + (t^2+tx)\dot{x} = 0, x(2) = 1,$

2 $\frac{x}{\ln \frac{1}{1-x}} = \int_0^1 (1-x)^t dt = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{12} - \frac{x^3}{24} - \dots$

expression intégrale des coefficients ?

3 $M_0(1,0) \in \{x^3 + xy^2 + y^3 - x^2 + y^2 = 0\}$

tg en M_0 à la courbe ?

4 $\left(\int_0^a \frac{1+t^n}{\sqrt{t} + t^{2n}} dt \right)_n, a > 0.$

5 $\int_0^1 \frac{t^p \ln t}{(1+t)^2} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n+1}{(n+p+1)^2} .$

6 $\int_0^1 \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt.$

7 $(3t+2t^2)\ddot{x} - 6(1+t)x + 6x = 6.$

8 $\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x \cos \theta} \cos(x \sin \theta) d\theta.$

9 $\int_0^\infty \frac{e^{\alpha t^2} - e^{\beta t^2}}{t} dt.$

10 $\{x^2+y^2+z^2=4\} \cap \{z^2+x^2-2z+x=0\}$

plan osculateur en $M_0(0,0,2)$?

11 $\lim_{x \rightarrow 1} \sum_1^\infty (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n(1+x^n)} = \frac{1}{2} \ln 2.$

12 $\ddot{x} + x - x^3 = 0.$

13 $e^x \sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1} \cdot x^n}{n \cdot n!} = \sum_1^\infty \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{x^n}{n!}.$

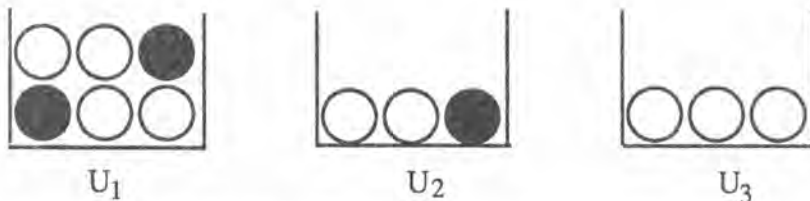
14 $f(x,y) = x^3 + y^3 - 4xy + 5x$: extrema locaux ?

LISTE D'EXERCICES N° 4

1
$$\sum_1^{\infty} \frac{12n^2-1}{n(4n^2-1)^2} .$$

2
$$(3t+2x+x^2)+(t+4tx+5x^2).\dot{x} = 0.$$

3



: on tire une boule de U₁ , on la met dans U₂ ; on tire ensuite une boule de U₂, on la met dans U₃ et enfin, on tire une boule de U₃ : si elle est noire, on gagne 100 F :
 espérance de gain ?

4
$$\int_0^{\infty} e^{-t^2} \cos(\omega t) dt$$

5
$$\sum_1^{\infty} \frac{\cos n\theta}{n^2} .$$

6
$$\{x^4 - 4x^2y^2 - 6x^2 - 4y^2 = 0\}.$$

7
$$\int_0^1 \ln \frac{1+t}{1-t} \cdot \frac{dt}{t} .$$

8
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t) dt, \quad a, b > 0.$$

$$\boxed{9} \quad \ddot{x} + \frac{1+\dot{x}^2}{2+\dot{x}^2} x = 0.$$

$$\begin{aligned} \boxed{10} \quad C &\doteq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \left(1 - \left(1 - \frac{t}{n} \right)^n \right) \frac{dt}{t} - \int_1^n \left(1 - \frac{t}{n} \right)^n \frac{dt}{t} \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{1+t} - e^{-t} \right) \frac{dt}{t}. \end{aligned}$$

$$\boxed{11} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(2 \sin \theta) \cdot \ln(2 \cos \theta) d\theta =$$

$$\begin{aligned} &\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(2 \sin \theta) \cdot \cos(2n\theta) d\theta = \\ &\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2} \cdot \frac{\pi}{4} = ? \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boxed{12} \quad (1+x)^{-n} \ln(1+x) &= x - n(n+1) \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right) \frac{x^2}{2!} \\ &\quad + n(n+1)(n+2) \cdot \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right) \cdot \frac{x^3}{3!} - \dots \end{aligned}$$

$$\boxed{13} \quad \{x(x^2+y^2)-x^2+y^2=0\}$$

$$\boxed{14} \quad \text{lignes de champ de } \vec{E} = \vec{\nabla} V \text{ où } V = \frac{\cos \theta}{r^2} ?$$

LISTE D'EXERCICES N° 5

[1] $(x_n)_{n \geq 1} : x_1 = \frac{1}{2}, x_{n+1} = x_n - x_n^2$
alors $x_n \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{1}{n}$.

[2] $\dot{\vec{x}} = A \cdot \vec{x}$ avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
exemple de trajectoires.

[3] $\sqrt{1+x^2} \cdot \ln(x + \sqrt{1+x^2}) = x + \frac{x^3}{3} - \frac{2}{3 \cdot 5} x^5 + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5 \cdot 7} x^7 - \dots$

[4] $I_n = -2n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2nt) \cdot \ln\left(2 \cos \frac{t}{2}\right) dt$
 $= \frac{\pi}{4} - \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1}\right)$

[5] $\int_0^\infty \frac{\ln(a^2+t^2)}{b^2+t^2} dt$ où $a, b > 0$.

[6] $\sum_0^\infty \frac{x^{2n+1}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1)} = ?$

[7] $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_0^{+\infty} f(x+\varepsilon t) e^{-t^2} dt = ?$

si f est continue bornée sur $\mathbb{R}$.

[8] $\sum_0^\infty \frac{x^{2n}}{1-x^{2n+1}} = \frac{x}{1-x}$ si $|x| < 1$
 $= ?$ si $|x| > 1$.

$$\boxed{9} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{1 + \cos^2(nx)} dx = ?$$

$$\boxed{10} \quad \text{Soit } f \in \mathcal{C}^1([0, T]) \text{ telle que : } \int_0^T f(t) dt = 0$$

$$\text{alors} \quad 1) \quad \int_0^T f^2(t) dt \leq \frac{T^2}{4\pi^2} \int_0^T (\dot{f}(t))^2 dt$$

$$2) \quad (N_{\infty}(f))^2 \leq \frac{T}{12} \cdot \int_0^T (\dot{f}(t))^2 dt$$

$$\boxed{11} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^n \cos(2xt) \cdot dt = 0, \text{ si } |x| \geq \frac{n}{2}.$$

$$\boxed{12} \quad a_n \geq 0 \text{ et } \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \geq \sum_{k=n+1}^{2n} a_k, \forall n \geq 1$$

$$\text{alors} \quad \sum_1^{\infty} a_k \leq 2ea_1.$$

$$\boxed{13} \quad a_0, a_1 > 0$$

$$a_{n+1} = a_n + \frac{2}{n+1} \cdot a_{n-1} \quad \forall n \geq 1$$

$$\text{alors, la suite } \left(\frac{a_n}{n^2} \right)_{n \geq 1} \text{ converge.}$$

$$\boxed{14} \quad \text{Si } S_n = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3$$

$$\sum_1^{\infty} S_n \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{4} x e^x (x^3 + 8x^2 + 14x + 4).$$

BIBLIOGRAPHIE

- | | |
|---------------------------|---|
| * ARNOLD | Equations Différentielles ordinaires. |
| * BAKHALOV | Méthodes numériques. |
| * BOURBAKI | FVR 1-2. |
| * CHAMBADAL-OVAERT | Cours de Mathématiques. |
| COPSON | Asymptotic expansions. |
| COURANT-HILBERT | Methoden der Mathematischen Physik 1,2. |
| CROUZEIX-MIGNOT | Analyse numérique des équations différentielles ordinaires. |
| DEMAILLY | Analyse numérique et équations différentielles. |
| * DIEUDONNE | Calcul infinitésimal. |
| ERDELYI | Asymptotic expansions. |
| * FELLER | An introduction to probability theory and its applications 1. |
| LELONG FERRAND-* | ARNAUDIES , Cours de Mathématiques. |
| * POLYA-SZEGÖ | Problems and theorems in Analysis 1,2. |
| * TITCH MARSH | The theory of functions. |
| * VALIRON | Cours d'Analyse. |
| * WHITTACKER | A course in modern Analysis. |

(*) : figure à la Bibliothèque de l'Agrégation Interne.