

LEXIQUE

pour écrire des mathématiques

... donc par le second lemme,
le suivant l'aura de même,
et partant le suivant encore ;
et ainsi à l'infini.



UNIVERSITÉ
DE LORRAINE



Imprimé par Le Service de Reprographie Centrale de l'Université de Lorraine
Site du Montet - Rue du Doyen Roubault – 54500 VANDOEUVRE-LES-NANCY
Dépôt légal : 2^{ème} trimestre 2013 –N° de la publication : 978-2-85406-185-7
Responsable de la publication : la Directrice de l'IREM, Nicole BARDY-PANSE

Lexique

pour écrire des mathématiques

Le présent lexique traite de ce qu'on peut appeler l'écriture des mathématiques. Or cette dernière est indissociable de l'activité mathématique elle-même. Certains ne peuvent même pas penser les mathématiques sans les écrire. Il arrivera que le lexique déborde donc la rédaction proprement dite. Pour autant ce n'est en aucun cas un traité de mathématiques. Le contenu s'adresse d'abord à des enseignants ou à des candidats aux concours. Il s'adresse également à l'Institution et à tous ceux qui influencent le travail des premiers. Il concerne notamment l'écriture d'un manuel, d'un cours ou de tout ce qui peut en tenir lieu, sachant que les cours servent très souvent de modèle à ceux qui les suivent. Autrement dit, la production des élèves et des étudiants est visée au travers de celle des enseignants.

Il faut bien voir qu'on n'écrit pas les mathématiques de la même façon à tous les stades de l'apprentissage et à tous les niveaux de compétence. Nous pouvons distinguer au moins quatre étapes, sachant que leurs limites sont assez floues et dépendent beaucoup du sujet abordé.

D'abord il y a l'école élémentaire à laquelle on peut joindre aujourd'hui le début du collège,

ensuite la fin du même collège et le lycée, en pensant surtout ici aux filières scientifiques,

puis l'université, avec plus principalement la licence de mathématiques et le master, au moins pour sa première année,

et enfin le monde des mathématiciens professionnels, quand il est confronté, plus précisément, non pas à l'enseignement mais à l'écriture d'articles.

Ce que l'on peut conseiller à un niveau peut se révéler peu indiqué à un autre. Nous visons ici les deux niveaux intermédiaires, en pensant, par exemple, à la terminale et au baccalauréat d'un côté et à la première année universitaire de l'autre.

Il nous arrivera de dire un mot de l'enseignement à l'école élémentaire, d'un côté, ou de la pratique courante des mathématiciens, de l'autre. De cette façon nous espérons que les conseils prodigués n'auront pas une influence néfaste en des lieux pour lesquels ils n'ont pas été conçus. Car, malheureusement, la tendance actuelle est plutôt d'oublier le besoin d'une progression dans les apprentissages. Au moment de la révolution dite des « mathématiques modernes » on a cru que l'on pouvait enseigner, dès l'école maternelle, dans les mêmes termes qu'à l'université. Aujourd'hui on a en principe tourné la page, mais les évolutions récentes des programmes montrent que la doctrine s'enracine au contraire. On parle de plus en plus tôt de fonctions abstraites, on emploie les mots de la théorie des ensembles etc. C'est penser qu'il n'y a qu'une façon d'écrire les mathématiques. Or, s'il y a bien une façon moderne de le faire dans le monde savant, il ne faut pas pour autant dénigrer celle de quelques vieux livres de géométrie du lycée.

Malheureusement le fait d'avoir écarté les niveaux extrêmes ne simplifie pas complètement la tâche que nous nous sommes fixée. En effet la charnière constituée par l'utilisation de termes tirés de la théorie des ensembles ou de la logique formelle traverse les niveaux que nous avons retenus. D'une part le discours naïf commence à trouver ses limites. D'autre part le discours ensembliste n'a encore pas eu le temps d'être digéré; il prend alors une forme abusivement scolaire, loin de sa véritable fonction. Ces constatations débouchent alors sur une interrogation à propos de l'introduction précoce des usages modernes, telle qu'elle est préconisée dans les programmes de ce tout début de 21ème siècle. Le résultat sur l'écriture des mathématiques, celle des sujets du baccalauréat comprise, n'est pas brillant.

Par ailleurs, nous prodiguons quelques conseils. S'il nous arrive d'être parfois bien catégoriques dans l'expression de notre pensée, nous attendons du lecteur qu'il ne prenne pas nos indications comme la définition d'une norme et qu'il tempère éventuellement notre ardeur. Pour ne pas nous placer dans une posture de censeurs, nous ne produirons pas d'exemples de ce qui serait à nos yeux critiquable, nous contentant de fournir des exemples dont on pourra s'inspirer.

En fin de compte, comme le dit très bien Michèle Audin, chaque auteur est responsable de son texte, dont il doit assumer aussi bien le contenu que le style. A certains moments on peut se montrer très précis alors qu'à d'autres on le sera moins. Il faut un peu de variété pour rendre la lecture agréable. Il faut quelques éléments personnels également.

Nous nous efforcerons donc de multiplier les variantes dans les tournures que nous proposerons. Pour autant il nous faut reconnaître à regret que nous ne pourrions pas prendre en exemple bien des manuels, ouvrages ou photocopiés ou même sujets de concours circulant aujourd'hui. Nous avons dit que ce lexique s'adressait à l'Institution qui encadre les pratiques des collègues, de façon souvent étroite aujourd'hui. Pour justifier notre motivation, nous reproduisons ici une réflexion émanant de Jean-Pierre Serre, elle-même tirée d'un texte de conseils rédactionnels, *Some Hints on Mathematical Style*, écrit par David Goss.

"It strikes me that mathematical writing is similar to using a language. To be understood you have to follow some grammatical rules. However, in our case, nobody has taken the trouble of writing down the grammar; we get it as a baby does from parents, by imitation of others. Some mathematicians have a good ear; some not (and some prefer the slangy expressions such as "iff"). That's life."

J'ai été frappé par le fait qu'écrire les mathématiques est semblable à s'exprimer dans une langue. Pour être compris, on doit respecter certaines règles grammaticales. Cependant, dans notre cas, personne n'a fait l'effort d'explicitier la grammaire; nous l'acquérons comme un bébé l'acquiert de ses parents, par imitation. Certains mathématiciens ont une bonne oreille; d'autres non (et certains préfèrent les expressions argotiques comme « ssi ») . C'est la vie.

Cela dit, nous rappelons que notre objectif n'est pas exactement le même. Nous ne cherchons pas à imiter les professionnels. Par ailleurs nous ne nous faisons pas

trop d'illusions. On attribue à Paul Halmos la réflexion suivante.

“ I think I can tell someone how to write but I can't think who would want to listen.”

Je crois pouvoir expliquer à quelqu'un la bonne façon d'écrire, mais je ne vois pas qui voudrait écouter.

Indiquons, pour finir, un point sur lequel nous n'avons pas tranché. Certains considèrent qu'un texte mathématique doit pouvoir être lu à voix haute, comme n'importe quel texte. Il n'est pas certain, cependant, que la lecture d'une expression puisse toujours se faire sans un minimum d'interprétation. Ainsi lira-t-on sans souci « $x = 1$ » comme « x égale 1 » ; mais déjà « $x \leq 1$ » se lit « x est inférieur ou égal à 1 ». Quant à « imposons $x \leq 1$ », on peut le lire « imposons x inférieur ou égal à 1 », mais on préférera « imposons à x d'être inférieur ou égal à 1 ».

Un texte mathématique contient aussi des figures et ces dernières ne peuvent pas être lues. Heureusement, au niveau auquel nous nous plaçons, il n'y aura pas de diagramme commutatif ou autre joyeuseté, donc de figure considérée comme un objet.

Ces réserves faites, en principe tous les exemples que nous proposons peuvent effectivement être lus.

Nous remercions collectivement tous les collègues avec lesquels nous avons beaucoup échangé sur le sujet. Nous remercions également Jacques Choné qui s'est associé, à distance, au travail du groupe. Nous remercions surtout Nicole Bopp qui a fait une lecture minutieuse de notre travail et y a apporté maintes corrections, précisions et additions extrêmement utiles.

NOTA BENE

Les mots étudiés sont indiqués dans le texte en *italique* ou en **gras**. Lorsqu'ils sont suivis du signe ¶, ils renvoient à une entrée du lexique.

Les exemples sont mis en retrait dans le texte, et sont écrits en caractères inclinés comme ceci

Soient D , D' deux droites parallèles (ou perpendiculaires).

Les ensembles de nombres sont indiqués en caractère gras. Voir *Gras* ¶

Adjectifs

La langue française a coutume de transformer certains adjectifs en substantifs. En mathématiques on le fait également, parlant de « droite » au lieu de « ligne droite », sur le modèle de la « courbe ». Cependant il faut résister à la tendance de rendre le procédé systématique. C'est notamment vrai à propos des nombres. On parle ainsi de :

nombres entiers relatifs (nombres entiers rationnels, si l'on est plus savant),
nombres rationnels ou fractionnaires,
nombres réels,
nombres complexes.

Il est sage de respecter cette terminologie en phase d'apprentissage, pour éviter des débordements malheureux¹.

L'usage fait souvent cohabiter l'adjectif dans sa fonction primitive et dans sa forme substantive. C'est le cas pour les mots « parallèle », « perpendiculaire », « tangente », « asymptote » etc. On dira par exemple ceci.

Soient D , D' deux droites parallèles (ou perpendiculaires).

Ici mieux vaut parler de droites. En revanche on dira aussi volontiers cela.

Soit D' la parallèle (ou la perpendiculaire) à D passant par A .

Evidemment on peut encore s'exprimer, de façon plus soignée, ainsi.

Soit D' la droite parallèle (ou perpendiculaire) à D menée par A .

On notera que l'expression utilisée dans le second exemple ci-dessus n'a pas d'analogue quand il s'agit de plans. On parlera encore de « la tangente en M à la courbe » plus volontiers que de « la droite tangente à la courbe en M ». En revanche on ne parle que du « plan tangent » en M à la surface. La transformation de l'adjectif en substantif l'oblige à prendre un genre. En principe il ne prend pas les deux.

Assez curieusement la « dérivée en a » de la fonction f désigne le nombre dérivé en ce point. La raison est que la « fonction dérivée » est aussi désignée comme la « dérivée ».

Le mot « sécante » s'emploie, au singulier, plutôt comme substantif, notamment pour préciser la position d'une droite par rapport à un cercle. Sinon c'est, au pluriel, un adjectif : deux droites sont dites « sécantes » si elles se rencontrent exactement en un point. Plutôt que de dire que « D' est sécante à D », ce qui est laid, mieux vaut dire, plus simplement, que « D' coupe D ».

¹L'adjectif « entier » est utilisé depuis très longtemps comme substantif chez les grands auteurs en mathématiques ; ce n'est pas le cas pour les autres, le mot « complexe » étant utilisé comme substantif dans un autre sens.

Analyse et synthèse (raisonnement par)

Une manière souvent efficace d'établir l'existence et l'unicité pour un problème, est de raisonner par *analyse et synthèse*. On suppose le problème résolu en se donnant une solution ; on accumule des propriétés de cette dernière jusqu'à pouvoir affirmer qu'elle ne peut être que tel objet ; c'est la phase d'analyse. Ensuite on montre que l'objet en question est bien une solution du problème ; c'est la synthèse.

On établit ainsi l'unicité avant l'existence. On trouvera à l'entrée *unicité* ¶ un exemple de raisonnement de ce type. Nous en donnerons un autre ici.

On notera bien que l'analyse consiste à se donner une solution, et non pas à supposer qu'il en existe une. La phase d'analyse relève ainsi d'une *fiction* ¶. En même temps il faut voir qu'on a posé un quantificateur universel implicite.

Voici un exemple très élémentaire.

Etant donnés un nombre entier naturel non nul b et un nombre entier rationnel a , il s'agit de montrer qu'il existe un couple et un seul de nombres entiers rationnels (q, r) tels que

$$a = bq + r \quad \text{et} \quad 0 \leq r < b .$$

Supposons d'abord donnés des nombres q, r vérifiant les propriétés demandées. On aura

$$bq \leq a < b(q + 1) .$$

Par conséquent q est nécessairement le plus grand élément de l'ensemble E des nombres entiers rationnels q' qui vérifient $bq' \leq a$.

Ainsi s'achève la phase d'analyse.

Passons maintenant à la synthèse.

Pour simplifier la discussion, nous allons supposer établie la propriété d'Archimède² fournissant un nombre entier naturel k tel que $-bk \leq a \leq bk$, vu que $b \geq 1$.

Voyons maintenant que le plus grand élément de l'ensemble E existe. D'abord cet ensemble est non vide ; en effet $-k$ en fait partie. Ensuite il est majoré ; en effet, si q' est dans E , nécessairement $bq' \leq bk$, donc $q' \leq k$. L'existence est donc assurée et le plus grand élément q de E convient évidemment.

Ainsi s'achève la synthèse.

Comme souvent, la méthode donne un peu plus que l'existence et l'unicité ; elle donne une caractérisation de la solution.

Voici un autre exemple emprunté à la géométrie.

²Si $a = a' - a''$, où a' et a'' sont positifs ou nuls, alors $k = a' + a''$ convient.

On se donne un point A et deux droites d et d' ne faisant pas entre elles un angle de 60° et ne passant pas par A . Construire un triangle équilatéral dont un sommet est en A et dont les deux autres sommets sont situés respectivement sur les droites d et d' .

Choisissons une orientation du plan, et supposons le problème résolu, c'est-à-dire donnons nous un triangle équilatéral satisfaisant les contraintes imposées. Notons B et C les sommets de ce triangle équilatéral situés respectivement sur d et d' . Si le triangle ABC est de sens direct, le point C se déduit du point B par la rotation de centre A et d'angle $+60^\circ$ de sorte que C ne peut être que le point d'intersection de la droite d' avec la droite image de d par cette rotation et B l'image de C par la rotation inverse. On raisonne de même si le triangle ABC est de sens indirect, en faisant intervenir la rotation de centre A et d'angle -60° .

Ainsi s'achève la phase d'analyse.

Pour la synthèse, il suffit de remarquer que les hypothèses faites sur les droites d et d' garantissent que la droite d' et la droite image de d par une rotation de centre A et d'angle $+60^\circ$ ou -60° se coupent en un point distinct de A et que l'image de ce point par la transformation inverse est bien sur la droite d .

En résumé, il y a exactement deux triangles équilatéraux solutions du problème posé et ce qui précède en donne le mode de construction.

Annoncer la couleur Voir *Pertinence* ¶

Application Voir *Fonction* ¶

Article

En mathématiques plus encore que dans la langue courante, il convient de bien distinguer l'article défini de l'article indéfini.

Au singulier, l'article défini « le/la » s'emploie pour un objet dont on connaît l'existence et l'unicité³. On écrira par exemple ceci.

Notons D la droite joignant les points distincts A et B .

Notons Γ le cercle circonscrit au triangle ABC .

Soit f la primitive de g sur $\mathbf{R}$ qui s'annule en 0.

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ vérifiant l'équation différentielle $f'' + f = 2$ et les conditions initiales $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$.

³Ainsi « établir l'unicité de la solution » est une formule inadéquate, vu que l'emploi de l'article défini présuppose l'existence et l'unicité.

Au pluriel, l'article défini « les » s'applique à l'ensemble de tous les objets spécifiés. On l'emploie sans avoir besoin d'en connaître ni l'existence, ni la pluralité. Par exemple on peut demander ceci.

Trouver les solutions réelles de l'équation $x^2 + x + 1 = 0$.

De même, quand on écrit ce qui suit, on ne présuppose pas qu'il y ait plusieurs positions ; il peut même n'y en avoir aucune.

Déterminer les positions du point M pour lesquelles ces deux tétraèdres sont égaux⁴.

Autrement dit, en mathématiques et contrairement à l'usage courant, le pluriel commence à zéro. Pour autant, l'accord se fera ensuite, quoi qu'il arrive, avec un pluriel.

Maintenant la langue française impose également le pluriel dans des situations où il peut aussi bien y avoir plusieurs réponses qu'une seule ou encore aucune.

Etablir la liste des absents.

Mentionner les enfants à charge, les ascendants handicapés etc.

L'usage du pluriel introduit une forme de neutralité, de la même façon que celui de l'infinitif, qu'on trouve dans les formulaires et recettes. Cela n'épargne pas d'avoir à l'expliquer, même assez tôt dans la formation, en classe de mathématiques.

Au singulier, l'article indéfini « un/une » signifie toujours « un(e) parmi d'autres »⁵.

Employer l'article « un/une » suppose *a priori* l'existence d'un objet, toujours parmi d'autres, même si cela relève d'une fiction locale ; voir comment *introduire* ¶ un objet. On écrira par exemple comme suit.

Considérons une droite D passant par A .

Considérons un cercle passant par les points A et B .

Considérons une primitive f de g .

Considérons une solution f de l'équation différentielle $x'' + x = 2$.

On utilise aussi l'article indéfini dans un cas d'existence et d'unicité, lorsqu'on ne veut pas faire état de cette propriété.

Soit K le sous-corps de $\mathbf{R}$ engendré par $\sqrt{2}$

ou bien

un sous-corps contenant $\sqrt{2}$ et inclus dans tous ceux qui possèdent cette propriété.

⁴Il serait effroyable de devoir écrire « le ou les points, s'il en existe »

⁵Ainsi « établir l'unicité de la solution » est aussi une formule inadéquate, vu que la propriété ne peut s'appliquer à une solution particulière, qu'il en existe ou non d'ailleurs.

Dans le premier cas, on nomme un objet parfaitement défini ; dans le second on ne s'intéresse ni à l'unicité, ni même à l'existence, qui peut aussi bien relever d'une fiction.

Maintenant quand on utilise cet article indéfini pour exprimer une propriété d'existence, « un/une » signifie alors « un(e) au moins ». Cela fait également partie, assez tôt, de l'apprentissage que de s'habituer à cet usage, qui n'est pas celui de la langue commune. Quand on dit, comme Alfred de Vigny :

« *Il est sur ma montagne une épaisse bruyère* »

on fait allusion à une bruyère bien précise. A l'inverse, quand en mathématiques on dit :

« *L'équation admet toujours une solution* »,

on entend qu'elle en admet toujours au moins une. Sinon on dirait « exactement une » ou « une et une seule » ; voir *précisions* ¶.

Au pluriel, l'article indéfini « des » s'applique à certains éléments, parmi d'autres, dont l'existence et la pluralité ne sont pas exigées *a priori*.

Par conséquent on évite en général l'emploi du pluriel pour exprimer une propriété d'existence. Eventuellement on parlera de « plusieurs », voire « d'au moins deux », en ajoutant encore « différent(e)s » ou « distinct(e)s » s'il y a doute.

Articulations

Dans un texte mathématique, entre les assertions ou les calculs qui se suivent, il est absolument indispensable de placer les articulations adéquates. S'il est exclu d'utiliser un connecteur logique, symbole d'implication ou d'équivalence, à cette fin, on n'y répond pas non plus en distribuant au hasard quelques mots convenus.

Une fois posées les hypothèses avec les quantificateurs éventuels, le raisonnement peut démarrer directement. On ne placera

alors

en début de phrase que pour rebondir sur une situation particulièrement remarquable. On utilisera, bien sûr, toutes les transitions propres au récit, notamment celles qui suivent :

d'abord,

puis,

ensuite,

encore,

enfin.

Quand on devra initier un récit parallèle, on le précisera à l'aide d'une expression du genre :

de plus,

en outre,

par ailleurs,

d'un autre côté,
en même temps ;
ou encore, pour marquer une rupture :
au contraire,
en revanche.

Pour passer d'une assertion ou d'un calcul à une ou un autre qui s'en déduit directement, on utilise une locution comme :

donc,
par suite,
par conséquent, en conséquence,
d'où (avec un groupe nominal),
de sorte que,
en particulier (si c'est le cas),
faisant bien sûr suite, directement ou non, à une ponctuation et complétée le cas échéant par une justification du genre
d'après ... ,
par application de ... ,
qu'on place généralement à la suite de la nouvelle assertion.

Souvent on procède en sens inverse, fondant une assertion sur une autre qui la suit ; cette dernière sera en général précédée par

car,
puisque,
sachant que,
en effet,
faisant toujours suite, directement ou non suivant le cas, à une ponctuation.

Lorsque le passage d'une ligne à une autre relève essentiellement du niveau de la réécriture, la transition peut se faire avec :

autrement dit,
c'est-à-dire,
ou, ou encore,
soit, soit aussi,
qui s'écrit.

Dans d'autres cas, pour indiquer un traitement semblable, on placera :

de même,
de façon analogue,
ainsi que.

Lorsque des calculs se déduisent les uns des autres, sans qu'il soit besoin de justification particulière, on peut l'annoncer au début pour éviter la répétition de transitions peu informatives, par exemple comme suit.

Par des calculs simples, on obtient successivement ...

Pour conclure un enchaînement logique et en faire apparaître le résultat, on pourra utiliser

ainsi,
en définitive,
en conclusion.

Enfin on peut toujours se souvenir des formules passe-partout un peu fades, comme :

on obtient,
il vient,

voire à l'extrême rigueur

*on a*⁶,

quand on est absolument à court d'imagination.

Axiomes

Les *axiomes* sont des relations prises comme vraies pour bâtir une théorie. Il y en a de diverses sortes.

Les axiomes de la logique ne sont en général même pas évoqués dans la pratique mathématique. On en trouve exactement cinq, qui sont plutôt des axiomes implicites — des règles produisant des axiomes — dans la présentation de la mathématique formelle de Bourbaki.

On ne parle que rarement des axiomes de la théorie des ensembles, dits de Zermelo-Frenkel, lesquels ont reçu pourtant des noms plus ou moins évocateurs : axiome d'extensionnalité, axiome de l'infini etc. On ne parle pas beaucoup plus des axiomes de la géométrie, comme ceux de David Hilbert.

En réalité on ne parle que des axiomes sur lesquels on peut choisir ou non de s'appuyer. C'est l'axiome du choix général en théorie des ensembles, l'axiome des parallèles — le postulat d'Euclide — en géométrie.

On parle encore d'axiomes pour désigner les ingrédients d'une présentation dite *axiomatique*. On parle ainsi des axiomes des groupes, des espaces vectoriels, des espaces topologiques, des espaces mesurés etc. On pourrait aussi bien parler de propriétés.

Brouillon

Utiliser un brouillon est une pratique qui s'est, hélas, perdue. A tel point qu'on peut aujourd'hui s'interroger : à quoi bon un brouillon ? Or, sans brouillon, il n'est point de rédaction soignée.

En même temps, la disparition de la distinction entre les deux est un appauvrissement dommageable pour les candidats aux concours, comme, à degré moindre, pour les étudiants voire les élèves du lycée ; ou bien les copies sont des brouillons ou les brouillons — alors inutiles — des copies.

Il est vrai que le professeur de lettres doit résoudre un problème analogue, pour expliquer qu'on n'écrit pas comme on parle.

⁶Déjà, si R est une relation, alors « R » et « on a R » ont le même sens ; ensuite « on a que R » serait atroce.

Voici un exemple qui prouve l'utilité du brouillon. Nous sommes en classe de terminale et on nous propose l'exercice que voici. Une rigueur, peut-être un peu excessive, y prévaut.

Soit la suite définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - 2$. Montrer que la suite définie par $v_n = u_n + 3$ est géométrique.

Les élèves savent qu'une suite géométrique est caractérisée par un rapport $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ constant. Ils écriront donc, au brouillon parce que c'est toujours ainsi qu'on commence :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{1}{3}u_n - 2 + 3}{u_n + 3} = \frac{u_n + 3}{3(u_n + 3)} = \frac{1}{3}.$$

Cependant ils savent bien — ce qui ne signifie malheureusement pas qu'ils y pensent nécessairement — qu'on ne peut pas diviser par v_n sans avoir vérifié, au préalable, que sa valeur n'était jamais nulle ; d'ailleurs partir de $u_0 = -3$ aurait posé un problème. Donc, sur la copie, ils partiront de v_{n+1} et essaieront de faire apparaître v_n avec un facteur qu'ils savent déjà être $1/3$. Compte-tenu du brouillon, c'est facile.

Calcul (présenter un)

La présentation d'un calcul est probablement l'exercice le plus courant, mais ce n'est pas nécessairement le plus simple.

Une première option est la présentation dépouillée. C'est celle qu'en général on exige des élèves du lycée et que le professeur écrit au tableau pour corriger l'exercice. Les explications qu'il donne, pour passer d'une ligne à l'autre, sont alors orales.

Cette présentation est adaptée quand les stratégies de calcul font toujours partie d'un même corps de règles codifiées. C'est bien le cas dans les premiers niveaux.

Pour autant, il ne faut pas sous-estimer l'art du calcul. Un calcul bien mené ne multiplie pas à l'infini les intermédiaires inutiles. C'est pourtant ce que l'on trouve sur les copies, par le double jeu de l'absence de *brouillon* ¶ et du manque de dextérité de la part des élèves et étudiants.

Un calcul peut être à la fois très sobre et agréable à lire.

Voici un exemple de calcul pratiqué à l'université pour établir une convergence d'intégrale.

Si a, A sont des nombres réels vérifiant $0 < a \leq A$, une intégration par parties donne successivement :

$$\begin{aligned} \int_a^A \frac{\sin t}{t} dt &= \int_a^A \frac{1}{t} d(1 - \cos t) = \frac{1 - \cos t}{t} \Big|_{t=a}^{t=A} - \int_a^A (1 - \cos t) d\left(\frac{1}{t}\right) \\ &= \frac{1 - \cos t}{t} \Big|_{t=a}^{t=A} + \int_a^A \frac{1 - \cos t}{t^2} dt. \end{aligned}$$

Il n'est pas toujours nécessaire de donner des noms comme u et v à des fonctions auxiliaires pour présenter le calcul. Si on le fait, il convient d'introduire proprement ces dernières. Dans notre exemple cela donnerait ce qui suit.

Opérons une intégration par parties et définissons des fonctions u, v sur $[a, A]$ par

$$u(t) = 1 - \cos t \quad , \quad v(t) = \frac{1}{t} \quad .$$

Il vient

$$\begin{aligned} \int_a^A \frac{\sin t}{t} dt &= \int_a^A u'(t)v(t) dt = u(t)v(t) \Big|_{t=a}^{t=A} - \int_a^A u(t)v'(t) dt \\ &= \frac{1 - \cos t}{t} \Big|_{t=a}^{t=A} + \int_a^A \frac{1 - \cos t}{t^2} dt \quad . \end{aligned}$$

On peut évidemment ajouter le calcul

$$u'(t) = \sin t \quad , \quad v'(t) = -1/t^2 \quad ,$$

mais ce dernier n'ajoute rien. En revanche, commencer par $v'(t) = \dots$ est à laisser sur le brouillon.

Une autre option est la présentation assortie d'explications. On la trouve dans la plupart des ouvrages universitaires sérieux. Elle s'impose quand le calcul fait appel à une très grande variété de propriétés. En même temps elle permet de réduire encore les intermédiaires.

A titre d'exemple, on peut ajouter au calcul que nous venons de présenter ce qui suit.

D'abord, laissant a tendre vers 0 et sachant que les fonctions apparaissant sous l'intégrale et dans le terme tout intégré se prolongent continûment en 0, on établit la relation

$$\int_0^A \frac{\sin t}{t} dt = \frac{1 - \cos A}{A} + \int_0^A \frac{1 - \cos t}{t^2} dt \quad .$$

Ensuite, laissant A tendre vers l'infini, on établit que le second membre a pour limite

$$\int_0^\infty \frac{1 - \cos t}{t^2} dt \quad ;$$

en effet en effet le terme tout intégré tend vers 0 et l'intégrale de droite est absolument convergente, vu que

$$\int_0^\infty \left| \frac{1 - \cos t}{t^2} \right| dt \leq \int_0^1 \frac{1 - \cos t}{t^2} dt + \int_1^\infty \frac{1}{t^2} dt \quad ,$$

où le second membre a une valeur finie. Il en résulte que l'intégrale du premier membre est convergente et donnée par

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^\infty \frac{1 - \cos t}{t^2} dt .$$

A propos de cet exemple, une remarque importante concerne la façon de s'exprimer. Il est conseillé aux étudiants et candidats aux concours de ne pas écrire des expressions avant d'en avoir justifié la validité. On notera que les sujets de concours n'écrivent rien sans avoir justifié qu'il était loisible de le faire, au risque de retirer aux candidats la responsabilité d'une partie très formatrice du travail.

Voici un autre exemple de calcul, qui mêle l'enchaînement simple aux justifications.

Il s'agit d'un calcul d'intégrale, précisément de celui de

$$\int_0^1 \frac{e^x}{1 + e^{-x}} dx .$$

Posons le changement de variable

$$e^x = u$$

où u varie dans l'intervalle $]0, +\infty[$. Alors

$$x = \ln u \quad , \quad dx = \frac{du}{u} ,$$

l'intégrale devenant

$$\int_1^e \frac{u}{1 + u} du = \int_1^e du - \int_1^e \frac{du}{1 + u} = (e - 1) - \ln(1 + u) \Big|_{u=1}^{u=e} .$$

On obtient ainsi

$$(e - 1) - \ln(1 + e) + \ln 2 .$$

Au lycée et même à l'université, une difficulté se présente quand il faut corriger un exercice au tableau en se plaçant dans cette perspective, celle d'assortir le calcul d'explications. La tentation d'utiliser des abréviations est très grande. Cependant, sauf dans le cas où les auditeurs sont des mathématiciens confirmés, il est préférable alors d'écrire la solution en toutes lettres. Elle servira en effet de modèle.

Au lycée, un écueil constaté dans les copies des élèves qui appliquent une formule du cours est la précipitation avec laquelle ils utilisent les notations de ce cours, sans comprendre leur caractère largement arbitraire.

Quand on leur demande de donner l'équation d'une droite passant par deux points du plan, ils sautent sur

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dots$$

sans hésiter. Un conseil facile à suivre consiste à dire ceci.

La pente a de la droite est donnée par ...

A l'université, pour un calcul d'une certaine longueur, on trouve dans les copies des étudiants à la fois trop d'intermédiaires et trop de répétitions. Lorsque seule une petite partie d'une grande formule a besoin de subir une transformation, il n'est pas judicieux de reproduire en permanence l'ensemble. Ou bien on donne un nom à cette partie pour travailler, ou bien on la désigne, s'exprimant par exemple comme suit.

Le second terme du membre de droite se transforme successivement en ...

On ne reprend la grande formule que pour conclure.

En particulier, lorsqu'il s'agit de calculer la longueur d'un segment, il est inutile de traîner de grands signes « $\sqrt{\quad}$ » ; il vaut souvent mieux partir du calcul du carré de cette longueur.

Canonique (cultural)

L'adjectif « canonique » vient du mot grec $\kappaανων$, qui désigne la tige de roseau, la règle en bois et par extension le règlement. Le sens qu'on lui donne en mathématique est dérivé du « droit canon » de l'Eglise, comme pour « l'âge canonique » qui était l'âge minimum de quarante ans pour être la servante d'un ecclésiastique.

On qualifie généralement de canonique un objet dont la construction dépend de règles répertoriées⁷ quelque part dans le corpus mathématique, règles non ambiguës, ne laissant en particulier aucun choix. Etre canonique n'est pas une qualité de l'objet considéré, si ce n'est celle d'avoir été qualifié comme tel.

Si l'on ne définit pas ce qui est canonique en général, chaque fois que le terme apparaît dans une locution $\P$, on doit donner une définition précise de cette dernière. Ainsi, à propos des fonctions $\P$, trouve-t-on l'exemple de l'injection canonique d'une partie F de E dans E , laquelle prend la valeur x en x .

Voici un autre exemple, utilisant le premier et relatif à la donnée d'une application f générale entre deux ensembles E et F . On définit comme suit la *décomposition canonique* de cette application. D'un côté on considère la relation d'équivalence R sur E donnée par $f(x) = f(y)$ et la *projection canonique* p de E sur le quotient E/R . D'autre part on considère l'*injection canonique* i de l'image $f(E)$ dans F . On

⁷Souvent les objets canoniques sont aussi des objets naturels, ce qui signifie qu'ils sont fonctoriels au sens de la théorie des catégories ; la décomposition canonique d'une application est aussi fonctorielle en ce sens.

en déduit *canoniquement* une bijection g entre E/R et $f(E)$. Alors $f = i \circ g \circ p$ fournit la *décomposition canonique* cherchée.

Dans cet exemple il ne s'agit pas seulement de dire que f peut s'écrire comme le produit d'une surjection, d'une bijection et d'une injection, mais qu'on peut le faire suivant une règle précise que l'on a répertoriée.

Par extension, après avoir présenté la construction d'un objet, on dit parfois : « c'est canonique ». Cela veut dire qu'on pourrait en faire un objet canonique, parce que sa construction obéit à une règle que l'on pourrait consigner.

Cela dit, on connaît aussi des exemples plus élémentaires de l'utilisation du qualificatif « canonique ».

Ainsi parle-t-on de l'écriture canonique du trinôme pour désigner la transformation suivante.

$$ax^2 + bx + c = a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right).$$

De façon semblable, on parle de décomposition canonique d'une fonction homographique non dégénérée pour désigner son écriture sous la forme

$$a + \frac{b}{x - c}.$$

En première année universitaire, on introduit la base canonique de l'espace $\mathbf{R}^n$, comme étant

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad e_2 = (0, 1, \dots, 0), \quad \text{etc.}$$

Caractéristique (propriété), caractérisation Voir *Propriété* ¶

Cohérence

Autant que possible, on cherche la cohérence dans les notations. L'ennui est que, pour apprécier cette cohérence, il faut avoir une vision large des mathématiques, laquelle dépasse le plus souvent les capacités d'un individu isolé.

A défaut on essaiera de résister à la tentation assimilationniste, consistant à propager une notation rencontrée.

Par exemple on se gardera d'agir comme suit. Ayant découvert la notation $\mathbf{R}^*$ et l'ayant attribuée à tort à l'ensemble des nombres réels non nuls (alors qu'il s'agit du groupe multiplicatif des nombres réels inversibles), sur le même mode on introduirait inutilement $\mathbf{N}^*$ et de façon erronée $\mathbf{Z}^*$ (qui est en réalité le groupe multiplicatif formé par 1 et -1).

Autre exemple, on définit, entre autres, des intervalles $[a, b]$, $]a, b]$, $[a, b[$ et $]a, b[$ dans un ensemble ordonné⁸. Par exemple, le segment $[a, b]$ de la droite réelle est l'ensemble des nombres x tels que $a \leq x$ et $x \leq b$; ainsi $[1, 0]$ est-il vide. Cependant, si $a \leq b$, le segment $[a, b]$ est aussi le barycentre des points a, b affectés de coefficients

⁸Ces intervalles, dits à la française, ont remplacé la notation (a, b) , plus ancienne et ambiguë; Bourbaki n'utilise pas les crochets ordinaires, mais il semble le seul.

positifs ou nuls. Certains ont étendu cette définition au cas d'un espace vectoriel ou affine réel ; or, en l'appliquant à la droite réelle, elle donne $[1, 0] = [0, 1]$.

Ces contradictions ne sont pas rédhibitoires dès lors qu'on en a pris conscience. Il faut savoir, une fois pour toutes, que l'interprétation des symboles dépend du contexte. Il faut donc éclairer le lecteur chaque fois que nécessaire ; plutôt que de chercher à introduire des différentiations subtiles ; il restera toujours une frange d'ambiguïté.

On remarquerait que la notation $[a, b]$ dont on vient de parler a suscité, dans l'enseignement secondaire, la notation $[AB]$ pour désigner le segment AB , en le distinguant de sa longueur ; voir l'entrée *conventions* ¶ à ce sujet. Cette notation cohabite avec la notation $[a, b]$ qui désigne un intervalle de la droite, n'en différant que par l'absence de virgule. Par ailleurs la même notation $[AB]$ désigne, en géométrie, une longueur chez nos voisins.

A un niveau donné, la prudence suggère de ne pas imaginer une nouvelle notation avant de disposer d'un éventail suffisamment riche de situations pour le faire.

Conclusion

Le verbe *conclure* vient du latin *concludere*, qui signifie *enfermer* ou *clôre*, verbe français construit sur la même racine. On l'employait, à propos d'une phrase, pour dire qu'on lui donnait une fin harmonieuse.

En mathématiques, comme c'était déjà le cas en latin également, conclure veut dire conclure logiquement. Cependant la conclusion doit toujours fournir une fin harmonieuse au discours.

Connecteurs logiques comme abréviations.

Avant tout il faut insister sur un point. En aucune façon il ne faut considérer les connecteurs logiques comme des abréviations pour les articulations du raisonnement. Au point qu'il serait prudent de ne jamais les employer au tableau à cette fin.

C'est malheureusement là qu'on les rencontre le plus souvent, notamment dans les copies d'étudiants.

Ce n'est pas par coquetterie qu'il faut s'opposer à un usage qui relève du contresens grave, du solécisme caractérisé. En effet le symbole « $\Rightarrow$ » n'a pas le sens de « donc » et le symbole « $\Longleftrightarrow$ » n'a pas celui de « ce qui équivaut à ».

En particulier « $A \Rightarrow B$ » ne signifie pas « j'ai A , donc j'ai B », mais « si j'ai A , alors j'ai B ».

Maintenant, de façon plus fondamentale, il faut faire un usage modéré des implications ou équivalences logiques en général. On les trouvera souvent dans un énoncé, dans l'annonce ou la conclusion d'un raisonnement.

En revanche on ne doit pas les rencontrer dans le corps du raisonnement lui-même. Pour raisonner, il convient notamment de *poser* les implications, comme on pose les quantificateurs. Voici un exemple.

Nous allons montrer que A implique B .

Supposons donc A.

...

Nous avons obtenu B. QED.

Connecteurs logiques comme symboles

Comme c'est le cas pour les *quantificateurs*, dans une rédaction soignée, l'usage des connecteurs est plutôt à réserver aux textes consacrés à la logique formelle. La raison est qu'en dehors de ce cadre on ne va pas calculer avec ces signes⁹ ; voir l'entrée *verbe ou symboles ¶*.

Pour autant, dans l'enseignement universitaire, on se sert assez souvent des connecteurs logiques pour présenter schématiquement une démonstration conduisant à l'équivalence logique entre diverses assertions. On écrira par exemple ceci.

La démonstration consistera à établir les implications

$$(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (i) .$$

Il arrive aussi, de façon très exceptionnelle, que l'on mette des connecteurs logiques dans un énoncé pour mettre en évidence une séquence d'implications à retenir.

Cette tolérance commode ne s'étend pas au cœur même du discours démonstratif, à une exception près dont on parlera.

Maintenant si l'on veut exprimer, à un moment quelconque, une implication ou une équivalence logique, on préférera ne pas faire usage des symboles que sont les connecteurs logiques. Surtout lorsqu'il s'agirait d'enchaîner ces symboles. Pourquoi cette intransigeance, alors qu'on se permet évidemment l'écriture d'égalités, et même leur enchaînement ?

D'abord par souci d'homogénéité. L'emploi des symboles logiques ne peut être généralisé sous peine d'appauvrir le discours : rappelons qu'on peut insérer des formules dans le *texte ¶*, mais pas l'inverse. Autant donc ne pas y recourir¹⁰.

Ensuite par risque de confusion. L'égalité relie des termes pour former une relation. Un connecteur logique relie des relations pour en faire une nouvelle. Si $A = B = C$ ne peut être interprété que d'une seule façon, en revanche l'écriture $A \iff B \iff C$ peut se comprendre comme $(A \iff B) \iff C$ ou encore $A \iff (B \iff C)$, qui n'ont pas la même signification, pas plus que celle de $(A \iff B)$ et $(B \iff C)$, qui correspond à l'interprétation courante.

⁹Passer de « $\text{non}(A \Rightarrow B)$ » à « A et nonB » est calculer, comme nier une expression quantifiée ; mais on ne le fait pas au lycée ; plus tard on le réserve au brouillon.

¹⁰Il est intéressant de regarder, dans le cours d'algèbre pour la classe de seconde de C. Lebossé et C. Hemery, l'apparition de quelques symboles entre les éditions de 1947 et 1961 ; ils ne font que retirer à la précision du discours, laquelle était auparavant remarquable.

Comment faire alors lorsque l'on a une équivalence logique à établir ?

Il s'agira, dans certains cas, de constater que les calculs qu'on fait peuvent être remontés. Le mieux est de le dire très simplement.

Dans d'autres cas, l'implication réciproque s'obtient par une simple vérification, à partir du résultat de l'implication directe.

Dans d'autres cas encore, moins fréquents qu'on ne le pense, il peut être nécessaire de procéder « par équivalences successives ». On peut s'exprimer aussi simplement pour le faire. Voici un exemple.

Supposons que l'on veuille résoudre l'équation

$$z^2 = a$$

où le paramètre $a = \alpha + i\beta$ et l'inconnue $z = x + iy$ sont complexes. On suppose $\beta \neq 0$. L'équation se traduit par le système

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = \alpha \\ 2xy = \beta \end{cases}$$

lequel équivaut à

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = \alpha \\ 4x^2(-y^2) = -\beta^2 \\ xy\beta \geq 0 \end{cases}$$

puisque la seconde égalité revient à $2xy = \pm\beta$. Les deux premières lignes du dernier système signifient que x^2 et $-y^2$ sont les racines positive et négative de $X^2 - \alpha X - \beta^2/4 = 0$.

Il équivaut donc à

$$\begin{cases} x = \pm \sqrt{\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}} \\ y = \pm \text{sign}\beta \sqrt{\frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}} \end{cases}$$

où les signes $\pm$ sont appariés.

Pour autant, dès lors que l'on ne s'expose pas aux écueils signalés précédemment, on peut raisonnablement tolérer l'usage d'un connecteur comme « $\Longleftrightarrow$ ».

Cela veut dire d'abord que le passage d'une ligne à l'autre ne nécessitera pas l'appel à un argument quelconque.

Ensuite, pour éviter les confusions dues à des regroupements intempestifs, on ne placera qu'un symbole par ligne et on alignera les symboles les uns sous les autres.

Ainsi, paradoxalement, c'est dans la situation où le raisonnement est remplacé par des automatismes et où la logique est finalement largement absente, qu'on peut tolérer le symbole et qu'on le rencontre assez couramment, du moins au lycée¹¹.

¹¹Mais faire utiliser ce symbole ne peut avoir pour prétexte l'apprentissage du raisonnement.

La pratique présente alors une fonction pédagogique indéniable, celle de forcer l'élève à prendre conscience de ce qu'il fait, en déclarant quel statut il accorde au passage d'une ligne à la suivante ; il travaillera « par équivalences », comme on dit ; si le contrat didactique a été clairement formulé, cela l'obligera à s'assurer de la validité du passage dans les deux sens.

Cet usage, qui se défend parfaitement au *brouillon* ¶, témoigne d'un certain relâchement et n'est certainement pas à prendre pour modèle, mais il n'est pas vraiment gênant pour le lecteur conciliant. En fait on ne le rencontre plus quand le niveau s'élève, d'une part parce qu'on écrit moins d'intermédiaires, d'autre part parce qu'il faut argumenter plus systématiquement.

Voici un premier exemple. Il s'agit de caractériser les nombres complexes z tels que $(z - i)^2(z - 1)^{-2}$ soit imaginaire pur. On souhaite travailler avec les arguments. Le début du raisonnement gagne à être décrit comme suit.

D'abord on a écarté le cas $z = 1$; ensuite $z = i$ convient évidemment ; écartons encore ce cas. La propriété considérée se traduit alors par

$$\arg\left(\frac{z - i}{z - 1}\right)^2 = \pm \frac{\pi}{2} \mod 2\pi .$$

Un premier choix consiste à écrire ceci.

Cette équation se transforme de proche en proche comme suit

...

C'est l'idéal, mais on peut encore tolérer sans grand risque cela.

$$\begin{aligned} \iff 2 \arg\left(\frac{z - i}{z - 1}\right) &= \pm \frac{\pi}{2} \mod 2\pi \\ \iff &etc. \end{aligned}$$

Voici deux autres exemples, où une transformation demande à être justifiée et où l'on ne tire alors pas avantage à l'usage des symboles.

Déjà, pour dire « $x^2 = 24$, d'où $x = 2\sqrt{6}$ sachant $x > 0$ », il ne serait guère probant d'utiliser un connecteur logique affublé d'un commentaire.

Ensuite, considérons la résolution, un peu plus substantielle, de l'équation

$$\sin x = \tan x ,$$

où x est un nombre réel qui n'est pas du type $\pi/2 + k\pi$. On écrira volontiers ce qui suit.

Multiplions les deux membres de l'équation par $\cos x$, sachant qu'il n'est pas nul. Il vient

$$\sin x \cos x = \sin x$$

soit

$$\sin x(1 - \cos x) = 0 .$$

Cette relation équivaut à la nullité de l'un des facteurs. Mais si $\cos x = 1$, alors déjà $\sin x = 0$; l'annulation du second facteur n'apporte donc rien de nouveau par rapport à celle du premier. On résout donc par

$$\sin x = 0 ,$$

c'est-à-dire

$$x = k\pi$$

où k est un nombre entier relatif¹².

Ce qu'on vient de dire pourrait, *a priori*, s'appliquer de la même façon au connecteur $\Rightarrow$. On ferait précéder les lignes de ce signe quand on pourrait écrire en préalable que « de la relation, on tire de proche en proche ce qui suit ».

Cependant la tolérance serait ici sans intérêt, voire dommageable. En effet, on peut toujours supposer vraie la première prémisse et enchaîner par « donc ». D'ailleurs, c'est ce que ceux qui s'accordent la permission d'utiliser le symbole « $\Rightarrow$ » pensent exprimer, tombant sous le coup de la pratique dénoncée des *connecteurs logiques comme abréviations* ¶.

Par ailleurs, on trouvera à l'entrée correspondante des exemples et compléments sur l'équivalence logique ¶. On y explique notamment que, pour résoudre une équation ou un système, l'on ne se place pas toujours mentalement dans le cadre de la logique. On se contente souvent d'opérer des transformations qui respectent l'ensemble des solutions, quand ce n'est pas davantage.

Considérer

Le verbe *considérer*, d'origine latine, signifie au départ *examiner attentivement*. Cependant, dans le cas des mathématiques comme c'est aussi le cas en latin, il peut s'agir d'examiner par la pensée.

Autrement dit, considérer un objet consiste souvent à le créer par la pensée pour l'examiner. Cela nous renvoie à la *fiction* ¶.

En pratique,

« considérons le ... »

consiste à examiner un objet existant. En revanche,

« considérons un ... »

s'emploie pour imaginer un objet.

¹²Ici procéder par équivalences conduira probablement à expliciter les cas où chaque facteur est nul, avant de grouper les réponses; c'est maladroit.

Contexte (expérimental ou pratique)

En principe un texte mathématique traite d'un sujet abstrait, indépendamment de tout contexte. Cependant il arrive, dans l'enseignement du lycée mais pas seulement, que l'on demande d'étudier une question de sciences physiques, naturelles ou économiques, voire de la vie pratique. *A priori* on ne peut que s'en féliciter.

A cette occasion, on utilisera des outils et des méthodes mathématiques. Leur application se fera dans le cadre du discours mathématique usuel. Cependant les hypothèses devront être traduites en termes abstraits, tout en conservant, si possible, des notations suggestives. En général cela se fera tout seul ; en physique, par exemple, les lois sont souvent données comme des formules mathématiques. A l'inverse les résultats devront être formulés, ou plutôt reformulés, dans des termes correspondant au contexte. Là il y a souvent à faire. Le travail d'adaptation n'est pas très facile, car il suppose la familiarité avec deux mondes différents.

Voici juste un exemple, montrant déjà que les mathématiciens ne sont pas tous nécessairement rompus à l'exercice. A propos d'un problème portant sur une tension ou une intensité électriques, ayant constaté que la fonction considérée était la somme d'une fonction périodique et d'une autre tendant vers zéro à l'infini, on dira ceci.

Le signal est composé d'une part établie et d'une part transitoire, données respectivement par

$$s_e = \dots \quad , \quad s_t = \dots \quad .$$

Cet exercice d'aller-retour suppose évidemment que le traitement mathématique ne soit pas nul. Se contenter de traduire une information pour passer du discours abstrait au discours contextualisé ou l'inverse, ne présenterait aucun intérêt. S'il n'y a pas de traitement mathématique, il convient de s'exprimer simplement dans les termes adaptés au contexte. Pourquoi s'imposer un exercice à la fois difficile et non pertinent, dans pareil cas ?

Malheureusement on trouve certains exemples de ce genre dans l'enseignement d'aujourd'hui. C'est le cas lorsqu'on demande de lire un graphique en déterminant des « images » ou des « antécédents », termes qui relèvent de la vision la plus abstraite qui soit de la notion de fonction, au point de ne même pas figurer dans Bourbaki.

Imaginons donné un graphique représentant la pression p en fonction de l'altitude h ; c'est une fonction strictement décroissante. On ne demandera pas « l'antécédent h_1 de p_1 » mais « à quelle altitude h_1 correspond la pression p_1 ».

Apparemment, ce type d'exercice a pour but de familiariser les élèves avec une terminologie abstraite. Or on ne doit pas présenter une théorie pour le plaisir ; on doit attendre pour le faire lorsqu'elle trouve sa place. Lorsqu'au début des « mathématiques modernes », l'on insistait sur les notions d'injection, de surjection, de bijection, quoi qu'on pense par ailleurs de cette stratégie, parler d'image et d'antécédent était concevable. Cela n'est plus aussi pertinent aujourd'hui.

Lorsqu'on travaille avec des grandeurs géométriques, mécaniques ou physiques, en principe il n'est pas nécessaire de fixer tout de suite des unités. Cependant il faudra alors donner un nom aux constantes, posant par exemple

$$C = 1,5\mu\text{F} ,$$

pour assurer l'homogénéité dimensionnelle dans les formules.

Voici un exemple de petit problème rédigé de cette façon.

Un train prend le temps $t_0 = 3\text{s}$ pour défiler devant un panneau et le temps $t_1 = 9\text{s}$ pour traverser complètement un tunnel de longueur $l_1 = 200\text{m}$. Quelle est sa longueur l et sa vitesse v ?

Solution. On écrit les équations $l = vt_0$ et $l_1 + l = vt_1$. On en tire notamment $v = l_1/(t_1 - t_0)$, d'où $v = 33\text{m/s} \dots$

La résolution, qui fournit la réponse dans un cas général, est un peu plus difficile qu'avec des valeurs chiffrées simples. Cependant elle présente trois avantages.

D'abord on bénéficie du contrôle par l'homogénéité dimensionnelle. Ensuite on peut toujours revenir sur le calcul, par exemple pour exprimer le résultat avec d'autres unités, comme la vitesse en km/h, ou pour améliorer sa précision. Surtout on peut effectuer un « calcul d'erreur ». si la longueur du tunnel est appréciée au mètre près et les temps au dixième de seconde, l'incertitude relative sur le dénominateur est $0,2/6$, celle sur le numérateur est $0,1/200$, celle sur le quotient est environ 4% et l'incertitude sur la vitesse de $1,5\text{m/s}$. Dans un problème pratique, la notion de valeur exacte n'existe pas ; d'ailleurs, si l'on avait considéré que les données fournissaient les chiffres significatifs, c'est une incertitude de 17% qu'il aurait fallu admettre.

Continuité, limite (propriété de)

Nous avons vu, à propos de l'usage des *quantificateurs* $\forall$, qu'au moins au niveau des premières années universitaires, pour exprimer une propriété de continuité ou de limite, il était préférable de tenir un discours plus opérationnel que strictement logique. Nous allons préciser ici la manière de s'y prendre.

On souhaite, au niveau du lycée, introduire la définition formalisée d'une limite infinie pour une suite quelconque, alors que rien de semblable n'aura été préalablement tenté. Faisons ici abstraction du fait qu'il vaudrait peut-être mieux commencer avec les suites monotones.

Voici ce qu'on pourrait prendre comme définition pour une suite (x_n) tendant vers $+\infty$.

Etant donné un nombre réel A , on peut trouver un rang n à partir duquel tous les termes de la suite sont supérieurs à A .

Voici des variantes, respectant la même exigence, en version concise ou plus littéraire.

Etant donné un nombre réel A , on peut trouver un nombre entier n tel que $x_k \geq A$ pour $k \geq n$ (pour tout nombre entier k supérieur ou égal à n).

Etant donné un nombre réel A , on peut trouver un nombre entier n tel que $k \geq n$ implique $x_k \geq A$.

Cependant il restera à poser le quantificateur, aussi bien pour établir la propriété que pour l'utiliser. Pour **démontrer** une propriété « universelle », commençant par exemple par $(\forall \varepsilon > 0)$, on « posera » le quantificateur, ou plus précisément, on se donnera ε pour pouvoir s'en servir dans le calcul. Pour **utiliser** une telle propriété, on donnera à ε une valeur particulière liée au contexte de l'utilisation.

Rien n'interdit de discuter en préalable le sens de cette définition, disant par exemple ceci : si A est une valeur quelconque donnée à l'avance, le terme général x_n dépasse A dès que n est assez grand.

Introduire ici des intervalles serait artificiel. On pourra le faire plus tard, bien sûr, en liaison avec la considération d'une topologie sur la droite achevée.

Demander que x_n dépasse A non pas pour n assez grand, mais sauf pour un nombre fini de valeurs de n , est peut-être plus facile à manier ; cependant ce n'est pas conforme à l'idée primitive de limite et à éviter¹³.

Pour une limite finie ℓ en un point a d'une fonction f , on écrirait de même ceci.

Etant donné un nombre réel $\varepsilon > 0$, on peut trouver un nombre réel $\eta > 0$ tel que $|x - a| \leq \eta$ implique $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$.

Cette fois l'idée, à discuter éventuellement au préalable, serait la suivante : si ε est une précision quelconque donnée à l'avance pour les valeurs de f , on peut trouver une précision η pour les valeurs de x de façon qu'un écart d'au plus η entre x et a n'entraîne qu'un écart d'au plus ε entre $f(x)$ et ℓ .

Si l'on se place dans le cas de la continuité en a , cela veut dire qu'une erreur d'au plus α sur a entraîne une erreur d'au plus ε sur $f(a)$. En d'autres termes, la continuité est une propriété de stabilité : « petite cause, petit effet » ; mais c'est à prendre dans le sens : je peux être assuré d'un petit effet en imposant une cause suffisamment petite. L'adjectif « petit » n'a pas de sens tout seul en mathématiques.

Ici encore, la traduction avec des intervalles pourra attendre le besoin d'introduire une topologie sur la droite.

¹³C'est déjà la limite suivant un filtre, celui de Fréchet.

Voici, à titre d'exemple, comment les manuels du lycée définissaient une limite d'une fonction en un point, lorsque la définition formalisée était explicitement au programme.

La fonction $y = f(x)$ admet la limite b lorsque x tend vers a , si à tout nombre (strictement) positif arbitraire ε on peut faire correspondre un nombre (strictement) positif α tel que la relation $|x - a| < \alpha$ entraîne $|f(x) - b| < \varepsilon$ ¹⁴.

Nous avons ajouté « strictement » pour plus de clarté. Sinon l'expression est parfaitement correcte. On a retenu l'idée de faire correspondre α à ε , ce qui est plus facile à comprendre que la succession de deux quantificateurs explicites. Cependant il restera à poser ε , aussi bien pour établir la propriété que pour l'utiliser.

Voici, maintenant, comment le mathématicien Godfrey Harold Hardy présente la notion de limite infinie d'une suite, dans son ouvrage *Pure Mathematics* dont la première édition date de 1908, après une discussion préparatoire longue d'une douzaine de pages. C'est une version complètement opérationnelle qu'il privilégie.

The function $\phi(n)$ is said to tend to $+\infty$ (positive infinity) with n if, when any number Δ , however large, is assigned, we can determine $n_0(\Delta)$ so that $\phi(n) > \Delta$ when $n \geq n_0(\Delta)$; that is to say if, however large Δ may be, $\phi(n) > \Delta$ for sufficiently large values of n .

Ce discours est insurpassable ; on pourra juste en modifier les notations, préférant ϕ_n au lieu de $\phi(n)$ par exemple : voir les *familles* ¶.

On y trouve tous les choix pertinents. On parle de tendre vers $+\infty$ plutôt que d'admettre une limite infinie, ce qui est juste moins pédant. On se donne Δ et on détermine n_0 , donnant bien aux *quantificateurs* ¶ un sens pratique, opérationnel. On ajoute des *précisions* ¶, en théorie superflues mais éclairantes : Δ peut être aussi grand que l'on veut et le choix de n_0 dépend de Δ . Pour finir on se garde bien d'ajouter un quantificateur portant sur n avant l'inégalité finale ; on se contente d'en restreindre *a posteriori* le domaine de validité.

Ce n'est qu'en liaison avec la définition complète qu'on se permet de donner une version moins formalisée.

Hardy avait donné auparavant la définition d'une limite finie. Il avait procédé dans l'autre sens, son objectif des pages d'introduction étant celui d'une formalisation progressive. La formulation est un peu différente, mais de la même qualité.

The function $\phi(n)$ is said to tend to the limit ℓ as n tends to ∞ , if, however small the positive number δ , $\phi(n)$ differs from ℓ by less than

¹⁴C. Lebossé et C. Hemery, algèbre de la classe de première, 1961.

δ for sufficiently large values of n ; that is to say, if, however small be the positive number δ , we can determine a positive number $n(\delta)$ corresponding to δ , such that $\phi(n)$ differs from ℓ by less than δ for all values of n greater than or equal to $n_0(\delta)$.

Indiquons seulement au lecteur français d'aujourd'hui que « *positive* » y veut dire « strictement positif », conformément à la tradition anglo-saxonne.

Conventions

Le verbe français *convenir* est tiré du latin *convenire*, qui veut dire mot à mot venir ensemble, plus précisément *s'adapter*, *s'accorder*. Même si elle y prend un sens un peu particulier, cette idée d'accord est également très présente en mathématiques.

Ainsi, en théorie, chacun peut-il choisir librement ses conventions et définir à sa manière les termes qu'il utilise. Cependant, comme il s'agit d'être compris par le lecteur sans exiger trop d'efforts de sa part, mieux vaut s'en tenir à des usages raisonnablement répandus, sur lesquels un accord a pu se faire.

Certaines conventions ne sont peut-être pas très judicieuses, mais elles ont été consacrées par un usage ancien et adoptées sur tous les continents. En principe on les respectera. On écrira ainsi $g \circ f$ la composée des fonctions f et g , ce qui fait opérer la composition de la droite vers la gauche ; c'est une conséquence de la notation $f(x)$, à laquelle il aurait peut-être fallu préférer xf , mais sur laquelle on ne reviendra pas.

D'autres conventions sont spécifiques à une communauté particulière, souvent géographiquement circonscrite. C'est le cas de certaines conventions qui circulent dans le monde enseignant hexagonal. Il n'y a aucune raison d'y souscrire si l'on en connaît de meilleures, surtout si ces dernières sont mieux partagées.

Comme exemple de convention hexagonale, on peut citer les notations (AB) pour une droite et $[AB]$ pour un segment. On peut très bien s'en passer sans produire de confusion, sachant d'ailleurs que des conventions contradictoires et aussi peu légitimes sont prises chez nos voisins, où $[AB]$ désigne par exemple une longueur. Pour être clair, il suffit de parler de la « droite AB » ou du « segment AB ». On peut également adopter une position intermédiaire évitant les foudres de l'Institution, parlant de la « droite (AB) » ou du « segment $[AB]$ ».

De façon générale, il n'y a aucune honte à expliciter les conventions adoptées. On dira, par exemple, que l'on n'exclut pas les parallélogrammes ou les triangles aplatis, sachant que ce n'est pas l'usage le plus répandu.

On dira qu'on considérera les médianes du triangle comme des segments, ou au contraire comme des droites, en fonction des nécessités du moment, même si l'on pense que ce sont des usages installés.

Pour être complets, il nous faut dire un mot de conventions qui concernent des abréviations courantes et qui ne donnent pas lieu à un débat théorique. Les habitudes françaises ont cédé le pas à l'impérialisme anglo-saxon dans ce domaine. C'est ainsi qu'on a remplacé tg par $\tan$ ou Log par $\ln$.

Courbe représentative

Au lycée notamment, l'usage scolaire a consacré « la courbe représentative d'une fonction dans un repère ». Un puriste verrait deux incongruités dans cette expression. En effet le contexte n'est absolument pas géométrique. Or il vaudrait mieux réserver les mots « courbe » et « repère » à la géométrie. Par exemple, on pourra parler, sans souci comme suit.

Donner l'équation cartésienne de la courbe γ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Il semblerait déjà que l'on préfère parler aujourd'hui, pour une fonction, de *représentation graphique*. Il suffirait, pour être en cohérence avec cette précaution, de s'exprimer alors comme suit.

Donner la représentation graphique de la fonction f , en prenant le cm comme unité (ou bien en prenant comme unité $1cm$ sur l'axe des abscisses et $10cm$ sur celui des ordonnées).

ou

Donner la représentation graphique de la pression p en fonction du volume v , où $1cm$ représentera respectivement $1Pa$ et $1dm^3$.

On retiendra juste qu'il n'est vraiment pas nécessaire de parler, en cette occasion, de repère. D'ailleurs l'écran d'un calculateur graphique n'est pas *a priori* un plan géométrique. C'est une fenêtre dont on règle séparément les paramètres horizontaux et verticaux.

Même si déterminer l'équation d'une droite dans un repère et trouver la représentation graphique d'une fonction affine sont deux problèmes différents, on doit pouvoir dire que la représentation est une droite, comme, dans d'autres cas, ce serait une parabole ou une branche d'hyperbole. En revanche, parler du foyer ou du paramètre de la parabole serait saugrenu pour la représentation d'une fonction.

Contrairement à une idée répandue, la *pente* d'une droite (ou d'une courbe en un point) relève davantage du registre fonctionnel que du registre géométrique¹⁵. Une fonction affine a une pente ; il n'est pas nécessaire que la variable et la fonction aient la même dimension physique. Ainsi la dérivée est-elle une pente, la vitesse en particulier, le coût marginal également.

Maintenant, dans un repère quel qu'il soit, une droite géométrique admet une équation $y = ax + b$ ou $x = b$; dans le premier cas, on peut parler de pente, celle de y en fonction de x ; dans le second on convient que la pente est infinie.

Critère

Dans le sens mathématique moderne, un critère attaché à une *propriété* ¶ est fondamentalement une condition suffisante. Cependant on parle de critère, ou de

¹⁵La pente d'une route ou d'un toit est une pente fonctionnelle.

critère pratique, pour une condition relativement aisée à vérifier. Pour cette raison, on confond souvent les deux. On y pensera donc chaque fois qu'on aura la propriété à établir.

Par exemple, on pourra énoncer ceci à propos des séries.

Proposition (critère d'Alembert) *Soit (u_n) une série à termes strictement positifs. Si le rapport u_n/u_{n+1} a une limite $\ell < 1$, la série est convergente.*

D'abord on ne peut rien conclure si le critère ne s'applique pas. Ensuite c'est un critère parmi d'autres, pas toujours le plus judicieux.

Autrement dit, l'utilisation d'un critère est assortie de deux limitations. D'une part y recourir n'est pas une garantie de succès; d'autre part rien n'oblige à en passer par là. Un critère ouvre une faculté pour l'action; ce n'est pas un principe incontournable d'action.

De façon générale, toute *caractérisation* ¶, à savoir toute condition nécessaire et suffisante, peut être éventuellement transformée en critère. Dans ce cas on ne retiendra que la partie suffisante de la condition.

Voici un exemple. Quand on écrit

un parallélogramme est un rectangle si et seulement s'il possède un angle droit

on pense à la caractérisation. Quand on écrit en revanche

un parallélogramme est un rectangle dès qu'il possède un angle droit

on ne retient que ce qui en fera un éventuel critère.

Pour une caractérisation la première limitation saute. Il reviendra au même, sur le plan logique, de considérer la propriété initiale et celle fournie par la caractérisation. En revanche, passer par cette dernière restera une option parmi d'autres.

Avant l'entrée à l'université, pratiquement tous les critères rencontrés sont des caractérisations. Il en est ainsi des critères de divisibilité : un nombre écrit dans le système décimal est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est divisible par 3; c'est à la fois nécessaire et suffisant.

Un tel critère est, par ailleurs, éminemment pratique. Pour autant, on ne l'utilisera pas pour montrer que $4^{128} - 1$ est divisible par 3.

Déduire

Le verbe *déduire* vient du latin *deducere*; il s'agit, au sens primitif, de faire descendre; par extension, c'est tirer de quelque chose.

En mathématiques on déduit une propriété, égalité ou inégalité par exemple, d'une autre ou d'autres dont on tire la première de la ou des secondes au moyen d'arguments logiques.

En principe, écrire une démonstration consiste à déduire ce qu'on écrit à chaque étape d'une partie de ce qui a été écrit précédemment. Aussi n'a-t-on pas besoin de la préciser en permanence. Lorsque on écrit

« on en déduit ... »,

c'est pour indiquer que ce qu'on affirme se déduit principalement de ce qui a été affirmé juste avant.

Pour ces démonstrations, on dispose, en plus de ce que l'on a établi soi-même, de théorèmes déjà démontrés ou admis. Notons qu'il n'est pas judicieux d'écrire l'énoncé des résultats auxquels on fait appel, énoncés dont les notations sont d'ailleurs rarement adaptées à la situation étudiée. Une bonne rédaction fait apparaître les hypothèses du théorème que l'on ne fait alors qu'évoquer.

Voici un exemple, qui peut s'appliquer dans un *calcul* ¶ portant sur des intégrales.

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[a, b]$. Il vient donc, par intégration par parties ...

Définition

Le verbe *définir* est d'origine latine. Il est formé sur le verbe *finire* qui signifie d'abord *borner* et, par extension, *préciser*, *achever*. Définir est ainsi délimiter.

C'est ce sens originel qu'on trouve en mathématiques. Définir un objet consiste à le cerner de façon précise, en essence ou en existence.

Par exemple on définit en existence l'injection *canonique* ¶ d'une partie dans un ensemble ; on définit en essence les sous-groupes d'un groupe.

Une définition n'est pas l'énoncé d'une équivalence logique. Elle comprend toujours un « défini » et sa « définition » proprement dite. Il convient de faire clairement apparaître le statut particulier de ce genre d'énoncé et la dissymétrie qu'il comporte. En quelque sorte une définition mathématique est une abréviation. La compréhension d'un texte mathématique suppose le remplacement mental du défini par sa définition. Cependant, dans la pratique, une définition s'utilise comme une équivalence logique, ou, ce qui revient au même, une propriété caractéristique.

Voici quelques exemples, auxquels on pourra apporter toutes les variations stylistiques imaginables. Ils sont juste destinés à montrer le format ; il renvoient à des conventions anciennes de l'école élémentaire et du collège, qui n'ont peut-être plus cours.

Définition. *Deux droites du plan sont dites parallèles si elles n'ont aucun point commun.*

Définition. *Deux droites du plan qui n'ont aucun point commun sont dites parallèles.*

Définition. *On appelle parallèles deux droites du plan qui n'ont aucun point commun.*

On dira par exemple ceci, en définition.

Un triangle est dit isocèle s'il possède deux côtés égaux.

Il serait malvenu de remplacer « si » par « si et seulement si » ou bien « un » par « tout » dans ce qui précède. De même la présence du verbe « dire » est-elle utile. Tout cela contribue à affirmer le statut de définition.¹⁶

Cet usage d'un simple « si » n'empêche pas que, dans l'utilisation pratique, ce soit un « si et seulement si » que l'on doit comprendre.

Rappelons que, dans une assertion mathématique et contrairement à l'usage littéraire, le « si » traduit une implication, ou encore une condition suffisante ; il signifie « dès que », « dès lors ».

Démonstration

Dans un texte mathématique, tout doit être démontré ou doit renvoyer à un endroit où la démonstration figure. Evidemment, si plusieurs situations sont voisines, on pourra se limiter à en traiter une. De même, si un cas particulier est suffisamment révélateur et épargne des complications secondaires, on pourra s'en contenter. Eventuellement, si l'on ne peut fournir qu'une démonstration non formalisée — il y a beaucoup de latitude dans ce qu'on doit pouvoir se permettre — on s'en satisfera. A un niveau universitaire déjà avancé, on peut accepter le renvoi à un autre corpus pour une démonstration ou une construction. Cependant il faut être clair là-dessus.

Quelque forme que la démonstration prenne, elle aura pour fonction de persuader l'auditeur. Emporter sa conviction s'oppose ici au recours à toute forme d'argument d'autorité. C'est une exigence de rationalité qui honore la Science.

Evidemment rien n'interdit de dire que l'élève ou l'étudiant trouvera, plus tard dans son cursus, une démonstration plus convaincante, plus propre.

En revanche admettre purement et simplement un résultat, pour fonder une part importante du discours, serait une insulte à la Science. Si, de surcroît, sa démonstration était accessible au niveau où l'on se place, ce ne serait pas du meilleur goût.

En principe, au collège ou au lycée, on ne trouve pas de cercle vicieux vraiment identifiable. Le très petit nombre de démonstrations assumées présente au moins l'avantage de nous en protéger. En même temps, l'absence d'une information claire sur les fondements, comme pour les notions d'angles ou de déplacement en géométrie, enveloppe le discours dans un brouillard également protecteur. Maintenant prétendre déduire du théorème général des valeurs intermédiaires le fait, pour une application continue strictement croissante sur un segment, de définir une bijection sur son image, est au moins aussi discutable qu'utiliser une variante.

L'abus consistant à admettre des résultats en grand nombre est d'autant moins défendable qu'une démonstration rigoureuse serait bien souvent non pertinente au niveau où l'on se place. Le bénéfice attendu, qui est celui d'un discours formellement irréprochable à défaut d'être tout simplement fondé, est en réalité illusoire.

¹⁶On n'emploiera pas le verbe « dire » à l'école élémentaire. C'est justifié, mais il faudrait aussi éviter le mot « définition » pour ce qui est surtout une « description ». Les deux vont absolument de pair.

Par exemple, *au collège*, on n'aurait pas l'idée d'admettre l'existence d'une racine carrée pour un nombre positif. La demande de justification n'existe pas. On sait que 121 en possède, que 1, 21 en possède également ; on ne demandera de racine carrée que dans des cas où l'on peut la trouver. Qu'il y ait des carrés de surface absolument quelconque paraît parfaitement évident par ailleurs ; une construction géométrique le donnerait en cas de besoin. Surtout, n'ayant pas donné de définition précise de ce qu'est un nombre réel, l'énoncé d'existence n'a pas de sens ; on aurait du mal à l'établir. En revanche, plus tard, le jour où l'on saura ce qu'est précisément un nombre réel, capituler devant la démonstration serait infamant. En attendant on ferait mieux d'établir proprement que la racine carrée de 2 n'est pas un nombre décimal.

Au lycée, le programme demande d'admettre que toute suite croissante majorée de nombres réels admet une limite. Plaçons-nous dans la situation de l'école de jadis, où les élèves pratiquaient abondamment la division à la main et avaient, très tôt, une idée claire, à défaut d'être formalisée, d'un développement décimal illimité. On peut donner de cet énoncé une démonstration d'une rigueur adaptée à la situation. Un nombre réel sera considéré comme un développement décimal illimité, l'ambiguïté des suites terminales de 9 ayant été levée. Il est facile d'expliquer, heuristiquement, comment obtenir les décimales successives d'un nombre réel qui sera la limite.

Voici comment on s'y prend, pour une suite (u_n) croissante et majorée, donnée. On commence par considérer le plus petit majorant entier ; ce sera par exemple 3. On commencera alors par écrire

2, ...

Ensuite, parmi les multiples de 0,1 compris entre 2 et 3, on considère de nouveau le plus petit majorant ; ce sera par exemple 2,7. On complètera alors

2,6 ...

De proche en proche on fait apparaître un développement décimal qui construit le nombre ℓ . Il reste à en préciser les propriétés. Là on ira plus ou moins loin en fonction des objectifs. Par exemple, on notera qu'étant donné une troncature de ℓ , comme 2,6348, la construction met en évidence un rang à partir duquel u_n est compris entre 2,6348 et 2,6349. etc.

Dans la foulée de ce qu'on vient de dire, on peut encore expliquer, sans insister, comment construire les opérations sur les nombres réels.

Il y a, dans le corpus enseigné au lycée, un énoncé important, celui appelé en France « théorème des accroissements finis » et à l'étranger « théorème fondamental de l'Analyse ». On a au moins besoin d'en connaître la version suivante : si la dérivée f' est positive ou nulle sur un intervalle, alors la fonction f y est croissante.

Cependant la dérivée n'ayant pas reçu de véritable définition dans le programme de première, cela n'aurait pas de sens d'en faire un résultat admis. Pour autant il

est très important de faire comprendre aux élèves qu'il y a une propriété importante qu'il faudra mettre au clair un jour : en définissant rigoureusement une limite et en établissant quelque chose de non évident, le passage d'une propriété sur des accroissements « infinitésimaux » à une propriété sur des accroissements ordinaires, dits « finis » par opposition.

Faute d'une définition en règle, la dérivée est une vitesse. Et la propriété dit qu'avec une vitesse positive on ne peut qu'avancer. On peut s'exprimer ainsi. On comprendra probablement qu'une version plus mathématique est attendue pour plus tard.

Maintenant la dérivée est aussi une pente géométrique. Etablir la formule des accroissements finis, en faisant descendre parallèlement une droite de pente égale à la pente moyenne jusqu'à toucher la courbe, est acceptable. Plus tard un argument de compacité justifierait la méthode.

Au lycée toujours, la fonction exponentielle est définie à partir de l'équation différentielle, un théorème d'existence étant alors admis. Les remarques précédentes s'appliquent, puisque la dérivée n'a pas eu de définition précise. En fait l'énoncé est établi, même si c'est de façon maladroite et surtout plus troublante qu'utile, en invoquant l'approximation d'Euler. Et, pour le physicien, l'existence va de soi. Avec la définition du logarithme comme intégrale, on s'appuyait sur le concept intuitif de l'aire. Avec la comparaison d'une suite arithmétique ou d'une suite géométrique, on opérait un principe intuitif de prolongement.

En général, on énonce d'abord et on démontre ensuite. Il n'est pas indispensable de faire apparaître le mot « démonstration » en début de ligne. Cependant il doit être clair que l'on va démontrer. Glisser « en effet » est une possibilité parmi d'autres.

Cependant on peut aussi développer et énoncer ensuite. Dans ce cas, on pourra introduire l'énoncé par « en conclusion ». Ou encore, par exemple, ce qui suit.

Ainsi avons-nous établi l'énoncé suivant.

*On peut donc énoncer le théorème final : ...*¹⁷

Cela étant, il est souhaitable de ne pas remplacer le mot « démonstration » par celui de « preuve ». L'utilisation du mot « preuve » dans ce sens relève de l'anglicisme. En Français, on le réserve à certaines vérifications particulières : la « preuve par 9 », la « preuve d'un algorithme ».

Il est important de bien faire apparaître là où s'achève une démonstration. On peut le dire sous une forme comme celle qui suit.

Ainsi s'achève la démonstration,

ou utiliser « QED » ou « CQFD ».

¹⁷C. Lebossé et C. Hemery, Algèbre, classe de seconde, 1947.

Désigner

le verbe *désigner*, d'origine latine, signifie au départ *marquer d'un signe* ; par extension, c'est représenter, dessiner.

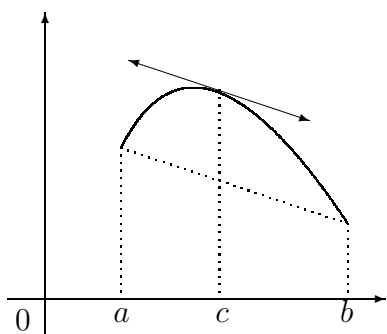
En mathématiques, *désigner* consiste à *représenter* par un symbole, comme A pour un point, f pour une fonction etc ...

Dessin

Les logiciels de traitement de texte, notamment le remarquable programme $\text{\TeX}$ de Donald Knuth, ont rendu accessible au premier venu ce qui était jadis réservé aux ateliers de composition.

Malheureusement, s'il est aujourd'hui facile d'aligner des lignes de texte avec des formules à profusion, il reste un peu moins aisé de produire des dessins. De même que la mode des figures à réaliser soi-même avant de s'attaquer à un exercice a disparu en géométrie, de même le tracé d'un croquis suggestif a été abandonné en analyse.

Or bien des discours touffus gagneraient à être accompagnés par un petit croquis, de façon à laisser au lecteur une image mentale claire. Bien sûr cela n'interdit pas de s'exprimer simplement, d'une façon immédiatement compréhensible.

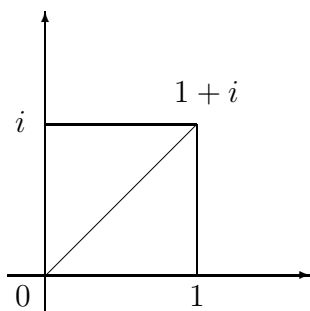


A l'université, accompagner, comme on le fait souvent, la formule des accroissements finis d'une fonction réelle, qui s'écrit

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c) ,$$

par un petit dessin faisant apparaître le point où la dérivée est égale à la pente moyenne, ne peut pas nuire.

Lorsqu'une explication est de nature géométrique, la présence d'une petite figure est presque toujours bienvenue. Or les appels à la géométrie sont plus fréquents qu'on ne le pense parfois.



Au lycée, pour établir l'égalité

$$\arg(1 + i) = \frac{\pi}{4} ,$$

plutôt que de calculer les parties réelle et imaginaire et de reconnaître un cosinus et un sinus, il vaut bien mieux produire un petit croquis comme celui ci-contre, avec, en commentaire, l'indication que les points $0, 1, 1 + i, i$ forment un carré.

Evidemment, à l'université, on pourra se passer d'explication. Mais, au lycée, croire que le passage par les lignes trigonométriques est plus rigoureux serait vite oublier que ces dernières ont été obtenues en calculant la diagonale du carré.

Deux à deux, entre eux Voir *précisions* ¶

Egalité

Commençons, pour une fois, par nous placer au niveau le plus élevé. Le sens qu'on donne à l'égalité est très simple : deux objets sont égaux s'ils ne sont qu'un seul et même objet.

Plus précisément, la théorie des ensembles gouverne les usages savants. Dans cette dernière, tous les objets sont des ensembles. Or, l'axiome d'extensionnalité dit que deux ensembles sont égaux si et seulement s'ils ont les mêmes éléments.

Jusqu'ici tout semble clair. En réalité, ce n'est pas tout à fait le cas, dès lors que de multiples identifications et abus de langage ont été introduits, sans lesquels la pratique des mathématiques serait impossible. Par exemple, il ne doit faire aucun doute pour personne que

$$0,99999\dots = 1.$$

Or il n'est absolument pas évident de décider quels sont ici ces ensembles qui sont égaux parce qu'ils ont les mêmes éléments ; d'autant moins que cela dépend de la manière selon laquelle on a construit le corps des nombres réels. Or, quelle que soit la façon dont ce corps aura été construit, l'égalité aura pourtant bien lieu.

Avant le niveau universitaire, *au collège et au début du lycée* notamment, ce n'est pas par la théorie des ensembles qu'il faut envisager l'égalité des figures en géométrie. Déjà on ne sait pas ce qu'est une figure. Ensuite les termes utilisés en géométrie sont polysémiques. Autant considérer que le sens de l'égalité est précisé à chaque occasion.

Il serait judicieux d'en revenir aux traditions de notre enseignement. Ainsi dirait-on que *deux figures sont égales si elles sont superposables*. En particulier *deux segments sont égaux* s'ils ont même longueur. Qui contesterait le droit de dire qu'un triangle équilatéral a trois côtés égaux ou qu'un rectangle a des côtés opposés égaux ? En revanche deux segments $[a, b]$ et $[c, d]$ sont dits *confondus* s'ils sont déjà superposés.

L'*égalité des triangles* signifie de même que les triangles sont superposables. Ce n'est d'ailleurs pas la définition d'Euclide, pour qui l'égalité est celle des surfaces. On notera que la superposition des figures planes par déplacement (de l'espace) relève de la physique des corps solides.

Parler, à ce sujet, d'isométrie n'est pas satisfaisant. Deux figures sont dites *isométriques* si l'on peut passer de l'une à l'autre par une transformation du groupe des isométries ; groupe des applications affines dont l'application linéaire associée est orthogonale. Pour un triangle, c'est équivalent à l'égalité des côtés homologues¹⁸. Mais

¹⁸Ce qui est déjà moins facile à exprimer.

pour un quadrilatère ? Certainement pas l'égalité des quatre côtés homologues. Celle de toutes les distances entre sommets (des côtés et des diagonales) ? Oui, mais c'est un théorème.

Maintenant une autre question concerne l'emploi du signe $=$ d'égalité dans le discours mathématique.

A l'école élémentaire, le signe est utilisé pour écrire le résultat d'un calcul. Par exemple :

$$3 \times 4, 1 = 12, 3 .$$

Cet usage perdure par la suite.

On notera qu'on peut déjà, à ce stade, enchaîner $3 \times 4 \times 2 = 12 \times 2 = 24$. En revanche, il ne faut surtout pas enchaîner un résultat avec un autre calcul, comme on le fait avec une calculatrice basique.

Cependant il s'ajoute d'autres utilisations. L'égalité, en plus d'être transitive, devient une relation symétrique, qui peut donc se lire dans les deux sens. Ecrire une égalité veut dire qu'on a écrit une relation vraie. Il faut rattacher à cela l'utilisation du signe d'égalité dans une *équation* ¶.

En même temps ou un peu plus tard, on réintroduit une dissymétrie en utilisant le signe d'égalité pour nommer un objet. On s'exprimera par exemple comme suit.

$$\text{posons } \alpha = m - 1/m.$$

Cet usage est à rapprocher de l'instruction d'affectation en algorithmique. Pour cette raison, certains utilisent le symbole $:=$ du langage Pascal. Ce n'est pas proprement à conseiller à l'écrit. Même s'il est difficile d'objecter un quelconque inconvénient, il ne faut pas multiplier les symboles.

On notera qu'en mathématiques, on peut aussi exceptionnellement nommer un objet « à l'envers », comme dans ce qui suit.

$$\text{Le paramètre } k \text{ étant négatif, posons } k = -\omega^2 \text{ où } \omega \text{ est positif.}$$

Enchaînement (d'égalités et inégalités)

Par dérogation au principe suivant lequel l'égalité et l'ordre sont des relations binaires, il est permis d'enchaîner de telles relations en mathématiques, soit sur une même ligne, soit sur plusieurs alignements.

On écrira par exemple

$$A = B = C$$

ou

$$\begin{aligned} A &= B \\ &= C . \end{aligned}$$

Dans les deux cas on pourra en tirer les trois égalités $A = B$, $B = C$ et $C = A$, mais la signification des deux présentations diffère légèrement. La première se comprend

$$A = B \text{ et } B = C, \text{ donc } A = C ;$$

en revanche la seconde se comprend

$$\begin{array}{l} A = B \\ \text{d'où } A = C \\ \text{car } B = C . \end{array}$$

Dans le cas des inégalités, il est impératif de n'associer que des inégalités *allant dans le même sens*.

Si l'on ne considère que des inégalités larges, donc uniquement la relation $\leq$ par exemple, tout ce qu'on a dit pour les égalités reste vrai. Dans le cas des alignements il est cependant souhaitable de prévenir le lecteur par une phrase du genre suivant.

On établit successivement les majorations qui viennent.

En revanche insérer trop librement des inégalités strictes ou des égalités n'est pas conseillé. On peut se le permettre, mais il faut avoir conscience des difficultés que cela comporte. on écrira par exemple

$$A = B \leq C < D = E \leq F$$

ou

$$\begin{array}{l} A = B \\ \leq C \\ < D \\ < E \\ < F . \end{array}$$

Dans le premier cas, on indique au lecteur la relation qui existe entre deux termes consécutifs. Il faut alors lui indiquer aussi ce qu'on peut en tirer, à savoir ici

$$A < F \text{ ou } A \leq F ,$$

suivant que l'on veuille tirer ou non le maximum d'information du travail accompli.

Dans le second cas on indique au lecteur le résultat obtenu en cumulant l'inégalité de la ligne précédente avec une comparaison dont on ne lui précise pas la teneur. Il faut peut-être ajouter qu'on a vérifié que l'inégalité entre C et D était stricte.

Enoncés

Il existe plusieurs termes pour énoncer, qui permettent à la fois personnalisation et hiérarchisation. Ce sont essentiellement les suivants.

Proposition

Théorème

Lemme

Corollaire

D'abord la proposition est la bonne à tout faire. C'est l'équivalent du *Satz* allemand. La proposition, dans son sens étymologique qu'on trouve en latin, est ce qu'on place devant les yeux ; son homologue allemand est ce que l'on pose

Ensuite le théorème est à réserver aux énoncés importants. Conformément à l'étymologie grecque — qui prend un omega — c'est ce que l'on donne à contempler.

Le lemme est un énoncé intermédiaire, servant à la démonstration d'une proposition ou d'un théorème et présentant un intérêt mineur par lui-même.

Enfin le corollaire est une proposition qu'on déduit d'une autre et qui peut présenter éventuellement davantage d'intérêt que cette dernière. C'est ce qui vient avec.

On peut jumeler un énoncé et une définition. Cela donne la présentation suivante. Dans un tel cas, en principe l'énoncé est un théorème ; il faut qu'il soit suffisamment remarquable pour être assorti d'une définition.

Théorème et définition Soit E un ... Les propriétés qui suivent sont équivalentes.

(i) ...

(ii) ...

(iii) ...

Si E vérifie l'une quelconque (ou l'ensemble) des propriétés ci-dessus, on dit qu'il est ...

Il faut éviter de multiplier les énoncés. On ne s'en tirera pas en les groupant artificiellement. Il faut savoir choisir ce qu'on veut mettre en valeur et « faire apprendre ».

Par ailleurs le contenu d'un texte mathématique ne se limite pas à des définitions, des énoncés et des démonstrations. Certaines méthodes s'expliquent mieux sur un exemple que par l'énoncé d'un théorème. Le calcul d'un PGCD par l'algorithme d'Euclide en est un exemple. Il faut se prémunir contre une « dictature de l'énoncé » qui transformerait les mathématiques en une forme de catéchisme. Pour autant il faut veiller à conférer aux énoncés un caractère « percutant ».

A cette fin on ne laissera pas dans un énoncé de notation parasitaire. Par exemple, on peut dire ceci.

Une fonction continue sur un segment non vide atteint ses bornes.

Il est inutile et même contre-productif d'appeler f la fonction, $[a, b]$ le segment ou m, M les bornes.

Cette exigence de concision et de sobriété n'interdit par pour autant de donner différentes présentations d'un même énoncé. A titre d'exemple on peut énoncer le théorème de Pythagore comme suit.

Le carré de l'hypoténuse est la somme des carrés des deux côtés de l'angle droit.

Cependant il est parfaitement judicieux d'y adjoindre un petit dessin avec la relation

$$c^2 = a^2 + b^2 .$$

Ensembles (théorie des)

La théorie des ensembles apporte à l'écriture mathématique une précision incontestable¹⁹. Il n'est pas étonnant que le vocabulaire de cette théorie ait fait intrusion dans l'enseignement de tous les niveaux, mais la légitimité de son adoption reste à démontrer. Elle se limite essentiellement à l'emploi de termes dont le sens ne sera pas nécessairement maîtrisé et dont les contraintes d'utilisation seront laissées dans le vague.

Par ailleurs l'usage de la théorie des ensembles peut entraîner une complexité dont on se passerait volontiers. C'est notamment le cas en géométrie classique. Pour cette raison, on peut raisonnablement défendre l'idée que la théorie doit être renvoyée à l'université, pour y être alors enseignée sans compromis. Pour illustrer notre propos nous prenons l'exemple de la définition du *cercle*.

Voici l'ancienne version, qui reste la meilleure pour le lycée.

*Le cercle est la figure plane constituée par tous les points situés à une même distance donnée, appelée rayon, d'un point donné, appelé centre*²⁰.

Les points ainsi mentionnés sont les *points du cercle* proprement dits, encore appelés points situés *sur* le cercle.

Ici il n'y a pas un ensemble mais une figure²¹ ; les points du cercle y sont accrochés comme des hirondelles sur un fil ; et le centre aussi bien que le rayon font partie de la figure.

Jadis, au lycée, on parlait de *lieu* et non d'ensemble ; la formule était évocatrice et elle n'était pas soumise aux mêmes rigidités théoriques. Cependant elle faisait surtout référence à tout un corpus de problèmes. Ce sont ces problèmes qu'il faudrait d'abord réhabiliter.

¹⁹« Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen, soll uns niemand vertreiben können », disait, en substance, David Hilbert.

²⁰A l'école élémentaire ce serait la figure tracée par un compas dont l'écartement est réglé sur le rayon et la pointe placée au centre.

²¹On peut toujours placer une description ensembliste, mais on ne veut pas rigidifier les choses. Un rectangle est-il quatre points, quatre segments, un corps convexe ? Cela dépend.

Voici maintenant une définition strictement ensembliste, inspirée d'un cours sur les espaces normés ou métriques.

Le cercle de centre O et de rayon R est l'ensemble des points du plan euclidien dont la distance à O est R .

Un cercle sera alors un ensemble pour lequel on peut trouver O et R tels que ce soit le cercle de centre O et de rayon R . Jusqu'ici le cercle n'a pas de centre. Pour parler du centre d'un cercle il faut que la donnée des points du cercle permette d'obtenir sans ambiguïté ce centre ; exercice facile en géométrie euclidienne plane, mais qu'on n'avait pas à traiter, autrement que pour son intérêt, avec la figure du cercle.

Les deux points de vue ont leur place. Et aucun ne correspond d'ailleurs au point de vue « savant » sur le sujet²².

Compte tenu de ce qui précède, il est de bon ton de mettre la pédale douce sur ce qui relève trop explicitement de la théorie des ensembles. Par exemple, pour conclure la résolution d'une équation, on pourra bien sûr écrire ceci.

L'ensemble des solutions de l'équation est $S = \{1, 2\}$.

Cependant il est encore préférable d'écrire cela.

L'équation admet exactement 1 et 2 comme solutions.

L'adverbe *exactement* est souvent utilisé, en mathématiques, dans le sens qu'il doit avoir ici : les valeurs 1 et 2 sont des solutions et ce sont les seules. Il faut mesurer, en pensant aux niveaux précédant l'université, l'implicite de formulation ensembliste : la définition de l'égalité entre ensembles, donc le sens précis de la relation d'appartenance, la définition d'un ensemble en extension, pour laquelle la notation n'est d'ailleurs pas bien codifiée etc. Ne risque-t-on pas de détourner l'attention sur l'écriture de la formule alors qu'elle doit se porter sur le sens ?

C'est encore plus frappant dans le cas d'un système. Voir l'entrée *équation* ¶.

La théorie des ensembles ne permet pas l'à-peu-près, et c'est parfois un handicap. Par exemple si A est le point d'intersection des droites D et D' , on ne pourra pas le confondre avec l'intersection $D \cap D'$ de ces droites, lequel est l'ensemble $\{A\}$ réduit à A , alors que le discours le suggère fortement.

Sinon, il faut travailler sur le sens des opérations ensemblistes, sans aucune concession ; probablement est-ce à l'université qu'il convient de le faire.

Malgré tout, la théorie des probabilités peut donner une occasion de parler des opérations sur les parties d'un ensemble. Dans ce cas il faut maîtriser la traduction complète dans le langage des événements.

²²Le cercle serait plutôt une variété algébrique.

Equation, équation différentielle

Le mot « équation » a deux usages en mathématiques, un usage particulier et un usage général.

L'usage particulier est en relation avec la géométrie. On parle de l'équation d'une droite, d'une courbe dans des coordonnées, qu'on qualifie souvent de *cartésiennes*. Pour une courbe ou une surface, on distingue la ou les équations *implicites*, comme $f(x, y) = 0$, et la ou les équations *paramétriques*, comme $x = f(t)$, $y = g(t)$.

Rappelons, par exemple, qu'un repère du plan étant choisi, on appelle équation cartésienne d'une droite, une relation du type

$$ax + by + c = 0$$

où a, b ne sont pas tous deux nuls, laquelle caractérise par leurs coordonnées les points de la droite.

Venons-en à l'usage général, qui dérive du mot latin *aequatio*, qui signifie très précisément « égalisation » ; il s'agit de réaliser une égalité par le choix convenable d'une inconnue (ou de plusieurs).

Cela étant, on ne définit pas, en mathématiques, le terme « équation ». En revanche on précise éventuellement, au cas par cas, ce que veut dire résoudre une équation d'un type donné.

Par exemple, on résout l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

sur un intervalle I , en déterminant les fonctions dérivables $x = x(t)$ définies sur I qui vérifient la relation ci-dessus.

On notera qu'on parle de solutions sur un intervalle I . Même lorsque f est polynomiale en x et t , une équation différentielle n'a pas toujours de solution sur $\mathbf{R}$.

Pour ce qui est des équations ordinaires, il y a une difficulté dans la façon de présenter les solutions d'une équation en admettant plusieurs. En effet, on dira que x est solution de l'équation

$$(x - 1)(x - 2) = 0$$

si $x = 1$ ou si $x = 2$ et que les solutions sont alors 1 et 2.

Un observateur peu attentif pourrait y voir un échange malencontreux de connecteurs logiques. Or c'est le bon usage de la langue qui l'impose.

La réunion $A \cup B$ des ensembles A , B est l'ensemble des x tels que $x \in A$ ou $x \in B$; dans le langage probabiliste, c'est l'événement « A ou B ». Cependant la réunion s'obtient en ajoutant les éléments de A et ceux de B (qui ne sont pas déjà dans A) ; la réunion est une addition et l'addition se traduit par « et » dans la langue.

Plus prosaïquement, avoir le choix de ceci ou de cela est très exactement avoir le choix entre ceci et cela. « Je m'en vais ou je m'en vas ... L'un et l'autre se dit ... » pour citer Vaugelas.

Dans cette affaire, travailler sur les connecteurs logiques ne servirait à rien. Le mieux est sans doute de ne pas passer par l'intermédiaire « $(x = 1)$ ou $(x = 2)$ », se contentant de collecter les solutions. Sinon, il faut travailler sur le sens des opérations ensemblistes, sans aucune concession ; probablement est-ce à l'université qu'il convient de le faire.

Pour les équations différentielles, certains puristes considèrent qu'on ne doit pas faire apparaître la variable, symbolisée par la lettre x ou t par exemple, lorsqu'on résout une équation différentielle ; voir à ce sujet l'entrée sur les *fonctions* ¶. Ils interdisent encore de nommer y une fonction ou y' sa dérivée. S'ils acceptent d'écrire bien $y' = y$ pour présenter une équation différentielle²³, ils imposent d'utiliser une autre lettre, comme f , g ou même z , pour désigner une solution et choisissent de quantifier en x , à toutes les lignes, des égalités portant sur les valeurs x .

Toutes ces précautions sont ridicules. Déjà l'obligation de ne pas utiliser la lettre figurant dans le libellé de l'équation, revient à résoudre une équation telle que

$$4x + 5 = 2x - 7$$

en commençant par remplacer x par y ou autre chose.

Prenons un petit exemple, pour lequel nous allons présenter la résolution d'une manière simple et naturelle, semblable à ce que l'on fait pour les équations algébriques.

Soit à résoudre l'équation

$$y' + ky = x^2 \tag{1}$$

connaissant une solution particulière y_0 .

Sachant que

$$y'_0 + ky_0 = x^2 ,$$

on écrit l'équation (1) sous la forme

$$y' - y'_0 + ky - ky_0 = 0 ,$$

en retranchant membre à membre. Posant $z = y - y_0$, l'équation s'écrit encore

$$z' + kz = 0 .$$

Maintenant cette dernière équation se résout en

$$z = Ce^{-kx} ,$$

²³Cette précaution est malheureusement inspirée par le livre de maîtrise d'Henri Cartan sur le sujet ; elle est alors justifiée par l'obligation de préciser l'intervalle de définition ainsi qu'une valeur initiale ; elle n'a pas pour objet de servir de modèle.

où C est une constante réelle arbitraire. Il en résulte que

$$y = y_0 + Ce^{-kx}$$

est la forme générale de la solution cherchée.

Maintenant, si l'on veut absolument se protéger, il n'est pas offensant de donner un nom à la fonction qui à x associe x^2 .

Equivalence logique

La question de l'utilisation du symbole d'équivalence logique a été discutée à propos des *connecteurs*.

Ici, indépendamment de l'utilisation de tout symbolisme, nous voulons expliquer pourquoi il ne faut pas abuser de la référence explicite à des équivalences logiques.

D'abord il est complètement improductif de voir une équivalence logique là où il n'y a qu'une simple réécriture. On écrira par exemple ceci.

$$\dots$$

$$\frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} = a ,$$

c'est-à-dire

$$\sin(2x) = a .$$

Dans cette situation, il serait ridicule de présenter la transition entre les deux relations comme la traduction d'une équivalence logique²⁴.

Ensuite, de façon plus essentielle et plus générale, lorsqu'on résout une équation simple comme on le fait pour l'équation du premier degré au collège, il n'est guère utile d'y voir la transformation d'une première équation en des équations logiquement équivalentes. Fondamentalement on travaille toujours sur la même équation, à laquelle on fait subir des opérations connues comme licites.

Pour aller plus loin, nous allons donner des exemples pour lesquels procéder par équivalences successives n'est tout simplement pas indiqué parce qu'il est beaucoup plus difficile de vérifier l'équivalence à chaque étape.

Pour résoudre une équation ou un système simple, notamment sans paramètres, il est souvent préférable de supposer donnée une solution, d'en tirer ce que l'on peut et de trier ensuite parmi les résultats obtenus en reportant. Voici un exemple

Considérons le petit système

$$\begin{cases} x^2 + y = 0 \\ xy^2 = 1 \end{cases} .$$

²⁴C'est ce que font, hélas, Lebossé et Hemery ...

Il est facile mais inutilement pénible d'expliquer pourquoi il équivaut à

$$\begin{cases} y = -x^2 \\ x^5 = 1 \end{cases}.$$

et de continuer de la sorte. Mieux vaut en tirer $x^5 = 1$, d'où $x = 1$ et $y = -1$ et vérifier que cette solution convient.

Dans d'autres cas, la transformation de la relation considérée repose sur des calculs qu'il vaut mieux effectuer en dehors du raisonnement lui-même.

Supposons que l'on veuille simplifier la relation

$$\sum_{i=1}^n \frac{z - a_i}{|z - a_i|^2} = 0$$

portant sur le nombre complexe z .

On a

$$\sum_{i=1}^n \frac{z - a_i}{|z - a_i|^2} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\overline{z - a_i}} = \overline{\sum_{i=1}^n \frac{1}{z - a_i}}.$$

On en déduit que la relation donnée équivaut à

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{z - a_i} = 0$$

puisque'un nombre complexe est nul en même temps que son conjugué.

Existence

Nous discutons ici brièvement du sens du verbe « exister » en mathématiques, indépendamment de ce qu'on peut dire à propos du quantificateur associé.

Il faut comprendre qu'il n'y a pas en mathématiques, d'existence au sens sartrien. On ne se pose jamais la question de savoir si les objets existent. L'existence d'un objet ayant certaines qualités n'est qu'une propriété d'un certain ensemble, dont on dit seulement qu'il n'est pas vide.

En revanche des objets peuvent être donnés, dans un cadre qui sera le cas échéant celui d'une *fiction* ¶, et cela signifie qu'on pourra travailler avec.

Il faut voir que la marge est étroite pour tenir un discours mathématique correct. Comme on l'a dit en parlant d'introduire ¶ un objet, quand on écrit « il existe un élément a » dans le cours d'une démonstration, on sous-entend très souvent qu'on se donne un tel élément dans la foulée. S'obliger à expliciter les choses alourdirait le discours au point de le rendre pénible.

Cependant, dans une hypothèse ou une définition, cette latitude n'est pas permise. Nous en parlons, à l'entrée sur les *quantificateurs* ¶, à propos de l'indépendance d'une famille de vecteurs.

Existentiel (poser un quantificateur) Voir *quantificateurs* ¶

Facteurs et termes, membres

Rappelons qu'une équation ou une inéquation possède deux *membres*, qu'une somme est composée de *termes* et un produit de *facteurs*.

Lorsqu'on veut référer à une partie d'une formule, il est bon de préciser dans quel *membre* elle figure, à quel *terme* ou *facteur* on s'intéresse. Cela évite de reproduire inutilement une expression complexe.

Famille

Une *famille* indexée par I d'éléments de E est exactement une application de I dans E . La seule différence réside dans la notation : on écrit x_i pour une famille au lieu de $x(i)$ pour une *fonction* ¶.

Cependant on parle le plus souvent de famille lorsque l'ensemble de départ est non structuré, perçu comme discret, alors qu'on parle de fonction ou d'application lorsqu'il est par exemple muni d'une structure algébrique ou topologique, par exemple lorsqu'il est perçu comme continu.

Le principal exemple est celui d'une *suite* d'éléments de l'ensemble E , à savoir d'une application de l'ensemble $\mathbf{N}$ ou de l'une de ses parties dans E . On écrira généralement comme dans les exemples qui suivent ; si l'on ne précise pas, l'indice débute à 0 ; on l'a fait débiter à 1 pour changer.

Soit s une suite de terme général x_n débutant à l'indice 1.

Soit $s = (x_n)_{n \geq 1}$ une suite d'éléments de E .

Pour une suite finie, la notation $(x_k)_{k=1}^n$, $(x_k)_{k=1}^{k=n}$, $(x_k)_{1 \leq k \leq n}$ ou $(x_k)_{k \in [1, n]}$ est en concurrence avec la notation

$$x_1, \dots, x_n \quad \text{ou} \quad x_1, x_2, \dots, x_n$$

qui est préférable pour un débutant et parfois aussi pour les autres. Il n'y a pas de hiérarchie de valeur entre les différentes écritures.

Dans le même ordre d'idée la somme d'une suite finie peut aussi bien s'écrire

$$\sum_{k=1}^n x_k \quad \text{ou} \quad \sum_{k=1}^{k=n} x_k \quad \text{ou} \quad \sum_{1 \leq k \leq n} x_k \quad \text{ou} \quad \sum_{k \in [1, n]} x_k$$

que

$$x_1 + \dots + x_n \quad \text{ou} \quad x_1 + x_2 + \dots + x_n .$$

Chaque notation a ses faiblesses. Il faut savoir interpréter les secondes lorsque $n = 1$. Il faut savoir les interpréter toutes lorsque $n = 0$. Ici $[1, n]$ désigne un intervalle, de l'ensemble ordonné $\mathbf{N}$ en l'occurrence, et $[1, 0] = \emptyset$.

« Fiction »

Le discours mathématique prend assez souvent le caractère d'une fiction. C'est le cas lorsqu'on considère un élément dans un ensemble qui n'en possède peut-être aucun, quand on veut établir l'unicité sans supposer l'existence d'une solution, quand on fait une hypothèse dont on ne sait pas si elle peut se rencontrer, voire quand, raisonnant par l'absurde, on considère un objet dont on veut montrer qu'il ne peut pas exister.

L'analogie avec la fable mérite d'être remarquée. Bien sûr on n'écrira pas exactement comme suit.

Il était une fois, en géométrie euclidienne, un triangle dont la somme des angles valait 190 degrés.

Il était une fois une solution réelle de l'équation $x^2 + x + 1 = 0$.

Cependant le discours tenu reviendra au même. Pendant un certain temps, ce qui est peut-être impossible, ou même ce dont ne veut absolument pas, devient réel. Et on travaille avec²⁵

Voir comment *Introduire un objet ¶* ou utiliser *Soit ¶*.

Fonction

En théorie des ensembles, les termes de *fonction* et d'*application* sont synonymes. Ils n'évoquent cependant pas les mêmes situations. On emploie surtout le premier dans certains cas particuliers, parlant de fonctions de variable réelle ou de fonction *numérique* ¶ par exemple. Le second se rencontre notamment en géométrie.

Quel que soit le mot employé, on désigne la donnée f d'un triplet composé d'un *ensemble de départ* ou de *définition* E ,

d'un *ensemble d'arrivée* ou de *valeurs* F — à distinguer de l'image ou ensemble des valeurs,

et d'une partie G de $E \times F$, appelée *graphe*, ayant pour propriété que pour chaque x dans E il existe un unique y dans F tel que (x, y) soit dans G ;

ce dernier est noté $f(x)$: c'est la *valeur prise par f en x* ²⁶.

On introduit usuellement une fonction ainsi :

soit f l'application de E dans F définie par $f(x) = \dots$

soit f la fonction à valeurs dans F définie sur E par $f(x) = \dots$

On évitera flèches²⁷ barrées et quantificateurs.

²⁵C'est ce qu'on appelle l'hypothèse auxiliaire.

²⁶On n'emploie le terme *image* que pour une transformation ; dans l'autre sens, on ne parle jamais d'un « antécédent ».

²⁷Les mathématiciens utilisent volontiers une notation telle que $E \xrightarrow{f} F$; elle n'est cependant pas conseillée aux débutants. D'ailleurs, dans le discours savant, une flèche recouvre souvent plus qu'une simple application.

Revenons, pour finir, sur l'*ensemble de définition*. Suivant la référence en théorie des ensembles, on se le donne en même temps que la fonction. La question de le chercher ne se pose donc pas. Comment le choisit-on ? Prenons le cas des fonctions de variable réelle associées à une expression. On pourra le choisir le plus grand possible, évitant seulement les valeurs pour lesquelles l'expression n'a pas de sens ; on pourra le restreindre à un intervalle, éventuellement maximal ; on pourra tenir compte de l'usage attendu de la fonction ou de propriétés qu'on attend d'elle, n'y plaçant, par exemple, que des valeurs positives.

Cependant, on peut aussi travailler sur les fonctions dans l'enseignement de façon élémentaire, sans avoir utilisé le formalisme ci-dessus avant d'avoir introduit la théorie des ensembles. On étudie en détail des dépendances fonctionnelles élémentaires : proportionnelle ($y = kx$), quadratique ($y = kx^2$), inversement proportionnelle ($y = k/x$), affine, homographique, etc. On s'intéresse, de façon générale, à la dépendance fonctionnelle donnée par une expression liant la variable x à la fonction y . Ce qu'on appelle alors l'*ensemble de définition* est le plus grand possible. C'est celui qui est naturel. Sa recherche donne lieu à des exercices très formateurs ; l'élève apprend à lire l'expression pour laquelle il doit vérifier la validité du calcul. Par exemple, pour la fonction

$$y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

l'ensemble de définition est l'intervalle $] - 1; 1[$.

Gras

L'usage d'utiliser la graisse pour désigner certains objets mathématiques, comme **N**, **Z**, **Q**, **R** ou **C**, est une convention typographique ancienne.

Avec les machines à écrire traditionnelles, on a cherché un moyen simple pour produire un ersatz à moindre frais de ces caractères gras dans les manuscrits. On ajoutait ainsi, à la main, un trait venant doubler l'un des traits existants, produisant un lR par exemple. A la composition, on retrouvait évidemment la lettre grasse conventionnelle.

Si l'on écrit au tableau, la même astuce se révèle très pratique. Repasser tous les traits serait assez fastidieux et l'effet ne serait pas garanti. D'ailleurs Donald Knuth a inclus la police « blackboard bold » dans son logiciel T_EX , en clin d'œil à cet usage.

Lorsque les premiers Macintosh d'Apple sont apparus, avec la facilité d'y modifier le style typographique, quelqu'un a eu l'idée d'utiliser le style dit « éclairé » — où les pleins sont limités à leurs contours, comme par exemple la lettre **C** — pour imiter l'artifice précédent. Le succès a été foudroyant. Beaucoup se sont imaginés faire plus « savant » en adoptant cette pratique, ignorant sa véritable origine.

Maintenant l'origine des symboles éclairés est une chose ; le choix typographique en est une autre, qui appartient à chacun, en fonction de ses goûts et de son public.

Au delà de l'anecdote, cela renvoie à la question de savoir si l'on peut accepter au tableau des usages qu'on s'interdira à l'écrit.

Hypothèse

Comme son nom l'indique, l'hypothèse est le fondement sur lequel s'appuie la thèse. C'est une proposition admise comme vraie et dont on peut déduire une conclusion.

Aujourd'hui, *au collège*, par on ne sait quelle aberration, on a remplacé le terme d' « hypothèse » par celui de « donnée ». Sans doute n'est-ce pas seulement par crainte des mots d'origine grecque. La tendance actuelle réserverait l'hypothèse à la prémisse des énoncés composant la « boîte à outils » de l'élève. La donnée serait l'information donnée par l'énoncé, sous forme graphique assez souvent.

En réalité, le changement dans la terminologie officielle à propos de ce terme est lié à un changement profond dans la façon dont on perçoit le rôle de la discipline.

Autrefois au collège, comme aujourd'hui encore à l'université et toujours largement au lycée, on considérait qu'un exercice de démonstration comportait une ou plusieurs hypothèses et une ou plusieurs conclusions, entre lesquelles il fallait raisonner. On le faisait d'ailleurs en s'appuyant sur un petit nombre d'énoncés auxquels on faisait plus ou moins explicitement référence et qu'en aucun cas on ne donnait en totalité. Dans ce cadre, on demandait aux élèves de bien noter sur leur brouillon hypothèse et conclusion avant de commencer à réfléchir.

Parallèlement, les manuels présentaient des théorèmes comportant également une hypothèse et une conclusion. Le travail demandé à l'élève était de même nature que celui donné en exemple par le manuel. En plus, les élèves devaient pouvoir s'approprier toutes les démonstrations du manuel, lesquelles lui étaient, par exemple, demandées en question de cours dans l'épreuve du premier baccalauréat d'il y a un demi-siècle.

Ainsi l'élève était-il lui-même *auteur* en Mathématiques, tout comme il l'était, en français, dans l'exercice de la rédaction ou de la dissertation.

Depuis quelques années apparemment, la démonstration s'est réduite au simple appel d'un résultat dans une grande « boîte à outils » de théorèmes. Ces derniers seraient toujours composés d'une hypothèse et d'une conclusion. Cependant ce que l'élève aura sous les yeux dans la première partie de l'énoncé d'un exercice sera à distinguer de ce qu'il pourra trouver dans la première partie du théorème de la boîte. Il faut bien qu'il ait quelque chose à faire. Ce sera de trouver l'hypothèse qui correspond à la « donnée » de son exercice.

Bien sûr, quand on pose une hypothèse, on écrit souvent « donnons-nous », « nous savons que ». Cependant parler de « données » est inadéquat.

De nos jours, l'élève n'est plus auteur, mais « utilisateur ».

Une autre raison est apportée de l'abandon du terme d'hypothèse. Les sciences expérimentales l'utiliseraient dans un sens différent et cela gênerait les élèves.

Gêner les élèves ? Voilà qui serait bien surprenant et, pour tout dire, inespéré. En effet cela fait longtemps, hélas, que les élèves cloisonnent leur cerveau entre spécialités.

Cela dit, il y a certainement des nuances, mais le sens donné à l'hypothèse diffère-t-il à ce point d'une discipline à l'autre ? Partout on utilise la méthode dite hypothético-déductive, qui, comme son nom l'indique, part d'une hypothèse pour en déduire autre chose.

La situation des Mathématiques est particulière parce que la méthode est, en principe, utilisée en permanence et très tôt dans l'apprentissage. C'est par les Mathématiques qu'il est le plus facile d'être scientifique. Du coup, l'hypothèse devient une banalité.

En sciences expérimentales, le schéma est, malgré tout, analogue. Prenons un exemple d'école. On veut expliquer par quel processus le son émis par A est reçu par B . On fait l'hypothèse que c'est par l'intermédiaire de l'air, des vibrations de ce dernier. On en déduit, alors, que si on place A ou B dans le vide, alors B n'entendra rien. On fait l'expérience et c'est bien ce qui se passe. On dit que cela valide l'hypothèse.

De façon générale, la méthode expérimentale demande un montage assez lourd et sa pratique est beaucoup moins simple que celle des mathématiques. Il y a aussi deux différences : on expérimente à la fin et on parle de valider une hypothèse, même si une seule petite expérience, comme celle décrite plus haut, n'y suffit pas. Pour autant cela ne change rien au schéma hypothèse/déduction/conclusion.

Revenons aux mathématiques. Certaines hypothèses ont un statut semblable à celui qu'on a pu donner, à une époque, à « l'hypothèse atomique » en Physique. C'est le cas de l'hypothèse de Riemann, dont on a tiré tant que de conséquences intéressantes qu'on la considère comme valide.

L'hypothèse mathématique la plus ancienne est le postulat des parallèles, ou postulat d'Euclide. Ce dernier reste une hypothèse physique pour la description du monde à une certaine échelle intermédiaire.

Identités

On appelle identité une égalité valable quelle que soit la valeur, voire la nature des variables.

Ainsi a-t-on, l'identité

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

dans tout anneau commutatif, et l'identité de Jacobi

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$$

dans un anneau quelconque, si $[a, b] = ab - ba$.

Dans certains cas, on précisera la variable concernée, parlant, par exemple, d'une « identité en x ».

Parler d'identité est largement préférable à l'addition d'un gribouillage de quantificateurs. D'abord l'emploi en est moins contraignant : il n'est pas utile de renvoyer pour cela à la théorie des *ensembles* ¶. Ensuite l'emploi est moins perturbant : on a le droit de faire porter un quantificateur sur l'anneau, mais ce n'est pas dans les habitudes du lycée ou de la première année universitaire ; il faut savoir que les anneaux, commutatifs ou non, ne forment pas un ensemble.

En pratique, dans la plupart des cas, au lieu de parler d'identité, on peut aussi parler de formule.

Implication Voir *connecteurs* ¶

Infini

On rencontre vite l'infinitude dans la scolarité, mais on considère avec réticence l'infini comme une valeur parmi d'autres.

C'est assez tôt à l'université qu'il convient, en Analyse, de donner aux deux infinis (positif et négatif) un statut analogue à celui des nombres réels. Cela se fait en introduisant la *droite achevée*, qui est notée $\overline{\mathbf{R}}$ ou $[-\infty, +\infty]$.

Insertion d'une formule

Les formules mathématiques sont insérées dans le discours dans le respect des règles grammaticales. Pour le faire, on doit savoir qu'elles se classent précisément en deux catégories,

les termes

et les relations.

Les termes sont assimilés à des groupes nominaux et les relations à des propositions. On écrira ainsi

le polynôme $x^2 + 2x$,

et

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$,

où, dans le dernier cas, le signe d'égalité tient lieu de verbe.

Cependant on peut aussi faire des relations des groupes nominaux, en les apposant par exemple. On parlera ainsi de

« *l'égalité* $A = B$ »,

ou de

« *l'équation* $\sin x = x$ ».

Dans d'autres cas, la relation seule sera prise comme groupe nominal. La langue française le permet, qui transforme volontiers en groupe nominal une subordonnée infinitive.

De les voir mortes me fit frémir (Alphonse Daudet).

Souvent la bonne compréhension de la formule nécessite d'en expliciter certains éléments ou de préciser des conditions portant sur ces derniers. On le fera en utilisant le pronom relatif

« où »

ou une locution équivalente, à l'exclusion de la préposition « avec » qu'on rencontre malheureusement. Voici un bon exemple, déjà cité pour un autre propos.

Un carré a pour côté $x + 5$, où x est un nombre réel positif.

Voir aussi *Texte (dans les formules)* ¶ et *Ponctuation* ¶.

Introduire (un objet)

La façon d'introduire un nouvel objet dans le discours mathématique dépend avant tout de l'objectif qui amène à le prendre en compte. Il peut s'agir de poser un quantificateur universel ou existentiel ou tout simplement de mettre en avant un objet particulier dont on a établi l'existence, en décidant de lui donner un nom pour y renvoyer.

Nous verrons que, très souvent, on utilisera l'impératif *soit* ¶ pour ce faire, ce qui est plus ou moins justifié.

Pour donner un nom à un objet dont l'existence est évidente ou a déjà été établie, on pourra se contenter d'indiquer la terminologie choisie dans le cours d'une phrase. On pourra aussi utiliser des formules du type « on note » ou « on appelle » ; on pourra encore utiliser « soit », en employant toujours l'article défini. Voici des exemples.

Les deux droites (supposées sécantes) se coupent en un point A .

On note Ω le centre du cercle.

Soit A le point d'intersection des droites AB et CD .

Pour démontrer une propriété universelle, on emploie souvent des tournures comme les suivantes ; c'est également un cas où l'on utilise à bon escient « soit », mais avec l'article indéfini.

Etant donné (un élément) x vérifiant ...

Supposons donné (un élément) x tel que ...

Considérons (un élément) x tel que ...

Soit x (un élément) tel que ...

dans lesquelles on se permettra souvent d'ajouter la *précision* ¶ du qualificatif « arbitraire » ou « quelconque » à l'élément x , notamment dans les deux dernières variantes.

Ayant posé cet élément, les calculs sont alors possibles et l'enjeu est donc d'établir que la propriété attendue est effectivement vérifiée. L'existence n'a pas à être discutée, parce qu'elle n'est pas de la responsabilité de l'auteur : il faut imaginer

que l'élément x a été donné par un intervenant extérieur, ou qu'on entre ici dans une *fiction* ¶.

Pour utiliser une propriété d'existence, cette dernière ayant été établie en amont, l'introduction se résume au choix d'un élément dans l'ensemble non vide des éléments qui conviennent. Voici des exemples.

Choisissons (un élément) x tel que ...

Prenons (un élément) x tel que ...

Fixons (un élément) x parmi ...

Considérons (un élément) x vérifiant ...

dans lesquelles on se permettra souvent d'ajouter la *précision* du qualificatif « particulier » à l'élément x , notamment dans la dernière variante, pour éviter la confusion avec l'usage précédent.

Il est cependant permis, quand l'expression « il existe x tel que » est utilisée au cours d'une démonstration, de considérer le x en question dans la suite, faisant l'impasse sur le choix. Il n'y a alors rien de plus à faire. Ce petit abus ne gênera pas le lecteur averti, mais n'est peut-être pas à conseiller aux débutants. Voir ce qu'on dit sur le *quantificateur existentiel* ¶.

Il est également assez courant d'utiliser « soit » dans un tel cas, mais ce n'est pas non plus conseillé aux débutants, qui devront se familiariser d'abord avec les diverses façons d'introduire un nouvel objet.

Voici un exemple, mêlant les deux dernières façons d'introduire un objet. Il s'agit de montrer que si B est non vide, l'inclusion $A \times B \subset C \times D$ implique l'inclusion $A \subset C$.

Commençons par exposer la démonstration dans des termes particulièrement tranchés, comme on pourrait le conseiller à des débutants. On a mis entre parenthèses des commentaires réservés à l'oral.

Donnons-nous un élément x de A ; il s'agit de voir qu'il appartient à C (puisque l'inclusion demandée s'exprime ainsi : tout élément de A appartient à C ; et qu'il y a donc un quantificateur à poser). Sachant que B est non vide, choisissons un élément b dans cet ensemble. Alors (x, b) appartient à $A \times B$ (par définition du produit, ensemble des couples formés par les éléments des facteurs). Maintenant l'hypothèse assure qu'il appartient aussi à $C \times D$. Dans ces conditions x appartient à C (toujours par définition du produit). QED.

Voici une version plus concise, pour un public déjà averti.

Soit x un élément de A . Choisissons b dans B qui est non vide. Alors (x, b) est dans $A \times B$, donc aussi dans $C \times D$. Ainsi x appartient à C .

Voici un autre exemple, un peu léger quant au contenu, mais assez délicat dans son traitement : montrer qu'une suite croissante non majorée tend vers l'infini²⁸.

Ici on dit qu'une suite (x_n) tend vers l'infini si elle vérifie la propriété qui suit.

Etant donné n'importe quel²⁹ nombre réel A , on peut trouver un rang n à partir duquel les termes de la suite sont supérieurs à A .

Voici la démonstration.

Considérons une suite (x_n) croissante et non majorée et montrons qu'elle tend vers l'infini.

Pour cela donnons-nous un nombre réel A . Puisque la suite n'est pas majorée, en particulier elle ne l'est pas par A . Choisissons donc un rang n tel que $x_n > A$. Alors, si $k \geq n$,

$$x_k \geq x_n > A$$

puisque la suite est croissante. Ainsi $x_k > A$ à partir du rang $k = n$.

Introduire plusieurs objets

Dans un énoncé, on doit presque toujours introduire plusieurs objets dans les hypothèses. Dans ce cas, il convient de le faire dans un ordre logique. On dira par exemple ceci.

Soient I un intervalle de la droite réelle et f une fonction réelle définie sur I .

Soient p un nombre entier satisfaisant $1 < p < \infty$ et f une fonction de L^p .

ou

Soit f une fonction de L^p , où p est un nombre entier tel que $1 < p < \infty$.

Dans ce dernier exemple, on veut faire comprendre que ce sont p et f qui sont donnés et non pas la seule fonction f supposée, par ailleurs, dans L^p pour un certain p .

Limite (passage à la)

Passer à la limite est une opération fréquemment pratiquée en Analyse. Malheureusement elle exige, bien souvent, quelques précautions.

²⁸Cet exemple a été proposé au baccalauréat au titre de la « restitution organisée de connaissances ».

²⁹Ajouter « n'importe quel » ou « arbitraire » est superflu ; mais savoir s'en passer est tout un entraînement, sous-estimé généralement ; voir ce qu'on dit sur la *continuité* ¶.

En effet, si le symbolisme

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$$

peut être utilisé dans un énoncé, plus généralement pour annoncer ou pour conclure, jamais il ne doit l'être dans un calcul. Ce n'est pas tant que son écriture suppose l'existence de la limite, alors que cette existence est en général à démontrer, mais plutôt qu'aucun calcul ne peut se mener utilement à partir d'une telle écriture.

C'est au point que l'interdire résolument, au bénéfice de l'expression « $f(x)$ tend vers ℓ », n'aurait que des bénéfices pour l'enseignement.

On notera que la relation ci-dessus doit être prise, autant que possible, dans son ensemble, comme une abréviation, et que mieux vaut ne pas y voir l'égalité entre deux nombres.

Voici un exemple.

Montrons que

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A \frac{dx}{(x+1)(x+2)} = 2 .$$

On a

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} ,$$

d'où

$$\int_0^A \frac{dx}{(x+1)(x+2)} = \int_0^A \frac{dx}{x+1} - \int_0^A \frac{dx}{x+2} = \ln \frac{A+1}{A+2} + 2 .$$

En prenant la limite quand $A \rightarrow \infty$, le résultat cherché vient.

Dans cet exemple, tenter de décomposer directement la limite cherchée ferait passer par la forme indéterminée $\infty - \infty$.

En fait notre exemple est simplement un calcul d'intégrale convergente. On aurait pu formuler ainsi la requête.

Calculer l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)(x+2)}$$

en précisant le sens qu'il convient de lui donner.

Les intégrales convergentes sont des cas particuliers de limites. Ce sont même, avec les sommes de séries, les plus fondamentaux. Pour autant, si le symbole $\lim$ ne présente que des inconvénients, le symbolisme des intégrales convergentes est d'une grande utilité. Il possède en effet un réel pouvoir suggestif. De plus certaines opérations, spécifiques aux intégrales, sont licites. C'est le cas d'un changement de variable, tel que celui donnant

$$\int_0^{+\infty} e^{it^2} dt = \int_0^{+\infty} e^{iu} \frac{du}{2\sqrt{u}} ,$$

lequel conserve l'intégrabilité et la convergence en une borne. C'est, à un degré moindre parce qu'il faut établir la limite aux bornes du terme tout intégré, l'intégration par parties. Sachant, malgré tout, qu'il est plus prudent de justifier le calcul en passant par un intermédiaire comme dans l'exemple traité plus haut.

Lorsqu'un passage à la limite met en jeu des limites infinies, il est tentant de les faire apparaître. Les lycéens écrivent volontiers, en laissant x tendre vers $+\infty$, ceci :

$$x^2 + 1 \rightarrow \infty^2 + 1 = \infty .$$

Il est difficile de leur en tenir rigueur. En principe ils n'ont pas le droit d'écrire des opérations portant sur des valeurs infinies. Cela veut dire qu'ils doivent invoquer un théorème portant sur la limite à l'infini des fonctions rationnelles.

C'est un peu dommage. Interdire les « formes indéterminées » est le moins qu'on puisse faire et c'est, en même temps, très instructif³⁰. Mais pourquoi interdire ceci :

$$x^2 - x - 1 = x^2(1 - 1/x - 1/x^2) \rightarrow \infty.(1 + 0 + 0) = \infty ?$$

Celui qui aura fait la différence entre ce qui est permis et ce qui ne l'est pas dans un tel calcul aura compris quelque chose de solide.

Maintenant, dans le cas où établir une limite ne présente aucune difficulté, il y a une façon très simple de s'exprimer. Voici un exemple.

Quand $x \rightarrow +\infty$, d'abord $x + 1 \rightarrow +\infty$ aussi, puis $\ln(x + 1) \rightarrow +\infty$ également.

Il serait difficile de préconiser l'utilisation du symbole $\lim$ et la mention d'une composition de limites dans une situation aussi banale.

A plusieurs occasions, nous avons utilisé le signe $\rightarrow$ à la place de la locution verbale « tend vers ». C'est en général à éviter dans une rédaction soignée. Cependant l'usage s'en impose dans le dernier exemple pour permettre une lisibilité immédiate. D'ailleurs ce n'est pas la seule entorse : on s'y est permis d'exprimer ce qui est une composition de limites d'une façon qui est plus suggestive qu'orthodoxe.

Comme on le sait, l'expression « x tend vers a », prise isolément, n'a pas de sens. Cependant elle possède, dans la langue française, le statut de proposition. Il est donc normal de considérer que « $x \rightarrow a$ » s'insère dans le discours comme ce serait le cas d'une relation, au même titre que $x \in A$ par exemple. Mais ce n'est qu'une tolérance.

Locutions

Dans la langue courante, la composition est un procédé usuel de formation de mots nouveaux. Obtenu en juxtaposant graphiquement avec ou sans espace, ou

³⁰Aux quatre formes liées aux quatre opérations, viennent un jour s'ajouter 1^∞ , 0^0 et ∞^0 ; c'est encore un apprentissage.

par un tiret, des mots déjà existants, le mot composé évoque immédiatement à l'esprit une image unique sur fond d'images distinctes répondant à chacun des mots composants. Penser par exemple à des mots composés tels que *pomme de terre*, *arc-en-ciel*, *contresens*, etc.

En mathématiques, il est souvent fait usage d'assemblages de mots pour désigner un nouvel objet. Tout mot composé nouveau ou toute locution nouvelle doit faire l'objet d'une définition.

Certaines sont naturelles, comme *antidéplacement* dont le sens est directement lié à celui de déplacement ou *sous-groupe* dont le sens est lié à celui de groupe. Pour cette raison, on utilisait autrefois la locution *fonction linéaire affine* plutôt que celle de *fonction affine* qu'on utilise aujourd'hui ; on entendait, de cette façon, une fonction apparentée aux fonctions linéaires.

Même si la locution ne juxtapose que des termes mathématiques précédemment définis, son sens ne se réduit pas toujours à l'addition des sens de chaque terme. Un *corps ordonné* n'est pas seulement un corps muni d'une relation d'ordre.

Beaucoup de locutions sont formées de mots sans définition mathématique propre. Le mot nombre n'est pas défini, mais on dira ce qu'est *un nombre naturel*, un *nombre premier*, un *nombre réel*, un *nombre complexe*, un *nombre imaginaire pur*, etc.

Deux locutions peuvent désigner des notions différentes, tout en étant formées de mots synonymes. Ainsi emploiera-t-on indifféremment les mots suite et série, alors que la locution *série convergente* renvoie à une suite dont la suite associée des sommes partielles converge et n'a donc pas le sens de *suite convergente*.

On résistera à la tentation de penser qu'un mot est défini dès lors qu'il est composant d'une locution que l'on a définie. Dans un plan euclidien, un point a et un nombre réel $\rho > 0$ étant donnés, la définition ensembliste de la locution *cercle de centre a et de rayon ρ* ne définit *a priori* ni le mot *cercle*, ni la locution *centre d'un cercle*.

Nommer (un objet) Voir comment *introduire* ¶ un objet

Normes

A propos des *conventions* ¶, nous avons dit qu'on ne pouvait pas les choisir de façon complètement libre. Pour autant, les conventions servant à l'écriture des mathématiques ne sauraient être enfermées dans des normes, c'est-à-dire dans des textes produits par la législation ou la réglementation.

Il en existe, qui ne sont pas toujours universelles, qui ont tendance à varier suivant les pays et dans le temps. Les unes, qui portent explicitement le nom, sont établies par des organismes dont c'est la spécialité ; elles concernent surtout les symboles et abréviations. Les autres, qui fixent les définitions, sont le fait de l'Inspection. Ceux qui ont la charge de l'élaboration de sujets doivent s'y conformer.

Cependant il est souhaitable que l'activité mathématique dans son ensemble connaisse un peu de liberté et de variété. On ne peut pas changer d'un jour à l'autre

une convention qui a été utilisée dans quantité d'excellents ouvrages. En même temps il faut s'habituer à lire des livres un peu anciens ou étrangers.

Une raison pour laquelle il sera impossible d'adopter des normes légales est la polysémie du symbolisme.

Il est ainsi une notation particulièrement commode, qui est le trait de surlignement, lequel se lit « barre ». En effet on peut aussi bien le faire porter sur une lettre seule ou sur un groupe.

L'usage le plus courant est la conjugaison complexe, dans une formule comme

$$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w} .$$

Mais il sert également pour désigner la fermeture en topologie et le complémentaire en probabilités. Quand on ne le trouve pas dans une limite supérieure.

On noterait que le trait de soulignement n'a pas les mêmes avantages : il est en effet assimilé à un style typographique.

Noter Voir comment *introduire* ¶ un objet ; voir également comment *poser* ¶ une notation

Numériques (fonctions)

Pour désigner les fonctions dont l'ensemble d'arrivée est la droite réelle³¹, on parle de *fonctions numériques réelles*, ou de *fonctions réelles* pour simplifier.

Lorsqu'on veut étendre l'ensemble d'arrivée au-delà de la droite réelle, il y a deux façons, incompatibles entre elles, de le faire.

Selon Bourbaki, les *fonctions numériques* tout court ont pour ensemble d'arrivée la droite achevée $[-\infty, +\infty]$; les fonctions numériques *finies* sont alors les fonctions réelles.

Sinon, lorsque l'ensemble d'arrivée est celui des nombres complexes, on peut parler de *fonctions numériques complexes*. Se passer du qualificatif numérique serait perturbant ici ; le qualificatif complexe seul est à utiliser avec précaution, comme c'est le cas pour *simple* ¶.

Parenthèses et tirets

Chaque fois que possible, on évitera les parenthèses et tirets dans un texte mathématique, sachant que les formules contiennent souvent les premières, ainsi que le signe « moins » qui se confond avec les seconds.

En particulier, on n'abusera pas de l'usage de resp., voire de respresp., que Bourbaki emploie volontiers pour économiser quelques caractères. En revanche on écrira volontiers ceci.

On considère deux droites affines D et D' de directions respectives Δ et Δ' .

³¹C'est un peu plus que demander que les valeurs soient réelles ; les fonctions numériques réelles forment une algèbre sur le corps des nombres réels.

Pertinence

Certaines restrictions peuvent paraître superflues, dans la mesure où le propos resterait théoriquement correct sans leur présence. Cependant il ne faut pas avoir peur d'en formuler, pour placer tout de suite le lecteur dans le bon cadre.

Pour cette raison il faut résister à la tentation de la généralisation lorsque que cette dernière n'est que superficielle.

Au collège, par exemple, on dira de trois droites du plan, ou plus, qu'elles sont concourantes si elles ont un point commun. C'est une propriété que l'on rencontre souvent, notamment à propos des droites remarquables du triangle. Cependant c'est une propriété qui porte une information pertinente : trois droites en position générale ne le sont pas.

Bien évidemment, rien n'interdit *a priori* de décider qu'une famille de droites du plan est concourante dès lors que toutes les droites de la famille passent par un même point ; ainsi deux droites seraient-elles concourantes si elles ne sont pas parallèles (et distinctes) ; une droite le serait toujours, et aucune davantage encore — mais c'est moins évident. Un tel choix n'apporterait rien, puisque d'autres termes plus adaptés existent. Surtout il polluerait le sens qu'on a voulu mettre dans le mot « concourant », lequel s'adresse à des droites du plan dans leur ensemble, au nombre de trois au moins.

Lorsqu'il s'agira, par exemple, de proposer en exercice la démonstration d'une propriété portant sur trois points, propriété qui ne présenterait aucun intérêt lorsque deux ou trois des points sont confondus, on se gardera de laisser cette possibilité ouverte, au prétexte qu'elle ne complique que légèrement le travail.

En revanche, lorsqu'on présente un outil, mieux vaut ne pas prévoir des cas d'exception inutiles ; par exemple, au lycée, on n'aura pas l'idée de définir le barycentre pour des points tous distincts, même s'il est facile de s'y ramener.

Placer tout de suite le lecteur dans le bon cadre peut lui épargner l'effort d'avoir à reconstituer ce qu'on aurait cru bon de retirer.

Ponctuation

La ponctuation n'est pas moins obligatoire pour un texte mathématique que pour un autre. Cela signifie que l'on doit écrire des phrases débutant par une majuscule et terminées par un point. Cependant cela n'est pas suffisant. Il faut également séparer les propositions principales par une virgule ou une conjonction de coordination « et », « ou ». Il faut encore savoir utiliser le point-virgule.

En revanche il ne faut pas abuser des deux points « : ». Ce signe est utilisé pour annoncer une énumération, une citation ou une explication. C'est le dernier cas qu'on rencontre en mathématiques, où il joue un peu le rôle du point-virgule. En tout cas, on ne le fera jamais suivre d'une conjonction de subordination. De la même façon, il n'y a aucune raison de le placer pour annoncer une formule centrée.

La présence de formules centrées n'est pas une excuse pour déroger à ces règles. Une formule est considérée comme une proposition. Elle doit soit être suivie d'une ponctuation, soit être complétée convenablement en début de la ligne suivante.

Même lorsque l'on écrit au tableau et que l'on utilise des signes sténographiques, on devrait faire aussi l'effort de mettre la ponctuation (de même que les articulations en clair). Voici un exemple.

On a $D_1 // D_2$
et $D_2 // D_3 ;$
donc $D_1 // D_3 .$

Par ailleurs, une difficulté spécifique aux textes mathématiques est la gêne que peut présenter la proximité entre un signe de ponctuation grammatical et une formule. En effet les formules peuvent elles-mêmes contenir un point, une virgule ou un point virgule. Aussi convient-il de respecter la règle suivante, dite de Godement : en dehors des listes, aucune formule ne doit suivre immédiatement un signe de ponctuation³². Quand on le peut, on évite également de mettre un signe de ponctuation après la formule, mais ce pari est pratiquement impossible à tenir.

Poser

On emploie très souvent le verbe *poser* en mathématiques, notamment pour *introduire* ¶ un objet. Cependant on n'emploie pas ce verbe de la même façon que les verbes *appeler*, *nommer* ou *désigner par*. Les derniers verbes gouvernent un complément et un attribut de ce dernier, l'objet qui est désigné et le nom par lequel il l'est. Ainsi Nicolas Boileau s'exprimait-il ainsi.

J'appelle un chat un chat, et Rollet un fripon.

En revanche le verbe *poser* admet juste un complément. On pose une relation, comme on le fait pour une équation, un principe. Ce sera la plupart du temps une égalité qui, de fait, va nommer un objet. On écrira ainsi l'une des phrases qui suivent, au choix (α et β étant connus).

Posons $\gamma = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$.

Posons $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \gamma$.

Voir également l'usage de la conjonction *que* ¶.

Par ailleurs, à propos des *quantificateurs* ¶, nous expliquons comment les poser. Cependant, si l'on rencontre le verbe dans cette situation, c'est dans un texte sur le raisonnement ou sur l'écriture. On dit rarement « posons le quantificateur universel ». Pas plus que : « tentons de raisonner sainement ».

³²Dans les manuels du lycée des années 60, cette règle était scrupuleusement observée ; aujourd'hui les documents les plus officiels y attentent des dizaines de fois par page.

Précisions

Le discours mathématique n'a pas toujours la précision absolue que certains lui prêtent. D'abord, pour être simplement lisible, il doit admettre des abus et des ellipses. Ensuite certaines conventions varient suivant les époques, les écoles, voire les individus. Ainsi, autant faut-il savoir être bref à certains moments, autant faut-il ne pas avoir peur de mettre les points sur les i à d'autres.

Lorsque l'usage en mathématiques diffère de l'usage courant, un peu de redondance n'est pas honteux. On dira, suivant le cas, que l'ensemble E contient *au moins* deux éléments ou *exactement* deux éléments. Pour une propriété concernant des éléments de E , on précisera, suivant le cas, qu'ils sont à prendre *deux à deux* ou *dans leur ensemble*.

On prêtera attention à l'utilisation du qualificatif « autre » en mathématiques. Si, après avoir considéré un élément x on en considère un autre y , cela ne veut pas obligatoirement dire que y est différent de x . On voulait dire qu'on considérerait, une nouvelle fois, un élément. Aussi précisera-t-on, si nécessaire, qu'on considère un élément y distinct de x .

Lorsqu'on considère une propriété qui concerne plusieurs éléments, il faut être soigneux dans l'expression. Le qualificatif que l'on emploiera s'appliquera à chacun. Des « nombres réels non nuls » sont des nombres réels qui sont tous non nuls. En revanche, pour des « nombres réels non tous nuls », on demande que l'un au moins ne soit pas nul.

A propos de fonctions réelles, un certain flou existe qu'il convient de lever. La relation d'ordre $f \leq g$ est définie comme : $f(x) \leq g(x)$ pour tout x . Par suite une fonction positive ou nulle est une fonction qui prend partout des valeurs positives ou nulles. Mais, *stricto sensu*, une fonction strictement positive est une fonction positive ou nulle, mais distincte de la constante 0. Si l'on veut imposer $f(x) > 0$ pour tout x , il faut parler d'une fonction à *valeurs* strictement positives ou *partout* strictement positive.

Des adjectifs comme *quelconque*, *arbitraire*, ne doivent en principe pas modifier le sens du discours ; cependant leur usage peut être, dans certains cas, utile à la compréhension.

Propriété, propriété caractéristique

En français, une propriété est une qualité qu'une classe donnée d'objets possède en propre ; mais ce n'est pas une exclusivité : d'autres objets peuvent la partager.

En mathématiques il en est de même. Par exemple « avoir des diagonales se coupant en leur milieu » est une propriété des rectangles. Cela signifie que tout rectangle aura des diagonales se coupant en leur milieu ; en revanche certains quadrilatères qui ne sont pas des rectangles le peuvent également.

Derrière toute propriété, se trouve une implication logique ou une condition nécessaire. Dans le cas de notre exemple, on peut formuler la propriété de l'une ou l'autre façon qui suit.

Si le quadrilatère R est un rectangle, les diagonales de R se coupent en leur milieu.

Pour que le quadrilatère R soit un rectangle, il faut que les diagonales de R se coupent en leur milieu.

Rappelons, à cette occasion, que l'usage en mathématiques de la locution « il faut » n'est pas celle de la langue courante, contrairement à la locution « il suffit », qui en est plus proche.

Lorsqu'il s'agit d'une propriété exclusive, que possèdent les objets de la classe et eux seuls, on parle de *propriété caractéristique*. On parle encore de *caractérisation*. Par exemple « avoir des diagonales se coupant en leur milieu » est une propriété caractéristique des parallélogrammes. Parmi les quadrilatères, seuls les parallélogrammes ont des diagonales se coupant en leur milieu.

Derrière une propriété caractéristique se cache une équivalence logique ou une condition nécessaire et suffisante. On laisse le lecteur compléter les deux assertions ci-dessus lorsqu'il s'agit de rectangles. Par exemple on dira ceci.

Un quadrilatère est un parallélogramme si et seulement si ses diagonales se coupent en leur milieu.

Dans un tel cas, il est fortement déconseillé d'utiliser un « si » simple. C'est ce que suggère l'usage général mais ce n'est pas conforme, pour une fois, à l'usage mathématique. Ce faisant, on autoriserait des quadrilatères qui ne sont pas des parallélogrammes à posséder la propriété. Dans un tel cas, le « si » simple est réservé aux définitions.

Maintenant il arrive que l'on parle aussi de propriété caractéristique pour ce qui est en réalité une propriété de définition. Mise à part la réserve précédente, cela n'engendre pas de difficulté particulière.

Il arrive d'ailleurs que, changeant son fusil d'épaule, on prenne pour définition ce qui était une propriété caractéristique, l'ancienne définition devenant alors une propriété caractéristique.

On peut mentionner des propriétés. A proprement parler on ne les énonce pas. En revanche on peut énoncer une proposition concernant une propriété, comme dans ce qui suit.

Théorème (propriété caractéristique des parallélogrammes). *Un quadrilatère est un parallélogramme si et seulement si ses diagonales se coupent en leur milieu.*

Ici c'est un théorème qu'on énonce ou qu'on formule.

Maintenant on peut utiliser le pluriel « **Propriétés des ...** » pour titrer un paragraphe contenant des énoncés, pour lesquels il n'est pas indispensable non plus de parler de proposition ou de théorème.

Il faut voir que les énoncés expriment presque toujours une propriété d'un objet mathématique, même si ce dernier n'est pas évident, demandant d'élever exagérément le niveau du discours ³³.

QED

Les initiales QED, pour *quod erat demonstrandum*, sont la version internationale du CQFD français. Il n'est absolument pas pédant de les employer.

Quantificateurs

L'usage des quantificateurs doit être modéré. D'abord on évitera les symboles $\forall$, $\exists$ dans le discours, sauf quand il s'agit de logique formelle, pour énoncer un axiome de la théorie des ensembles par exemple. En effet le symbolisme de la logique obéit à une grammaire très précise, en dehors de laquelle il n'est point de salut. Par conséquent l'utilisation de tels symboles comme raccourcis sténographiques est particulièrement mal venue.

Cela étant dit, l'usage des locutions « quel que soit » ou « il existe » doit également être modéré, surtout en ce qui concerne la première. La raison en est que la variable sur laquelle porte le quantificateur est en principe muette. On ne peut pas s'en servir pour manipuler, calculer ou raisonner, sans avoir posé le quantificateur. Voir comment *introduire* ¶ un objet.

Désormais on s'intéresse surtout au *quantificateur universel*, qui hélas fleurit aujourd'hui comme élément décoratif dans les formules.

Le quantificateur universel inutile. Il ne sert à rien de placer systématiquement des quantificateurs universels devant chaque ligne. En logique, les relations $R(x)$ et $(\forall x)R(x)$ sont équivalentes. Par ailleurs, si l'on veut mettre des restrictions, on s'écartera souvent du cadre proprement logique et on les placera plus volontiers après.

Le quantificateur universel nuisible. Dans une relation entre fonctions, un quantificateur universel portant sur la variable fait obstacle. Il faudrait le poser, fixant alors un point x . Mais cela interdirait par exemple de dériver. Voir des exemples à propos des *fonctions* ¶.

Le quantificateur universel implicite. Presque tous les énoncés débutent par un quantificateur universel. Voici un exemple.

Proposition. *Un rectangle a des diagonales égales.*

Démonstration. *Soit ABCD un rectangle ...*

Il y a bien un quantificateur ici. Et il a fallu le poser pour démontrer. Voici un autre exemple, dans lequel il n'y a pas de quantificateur mais une variable libre ; on n'en change pas le sens en plaçant un quantificateur devant cette variable.

³³Ce peut être une classe de figures, une catégorie, un foncteur etc.

On veut démontrer que la suite de vecteurs v_1, v_2, v_3 est libre, autrement dit ceci.

La relation $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$ implique $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Si l'on veut être très explicite, on écrira ceci pour démarrer.

Supposons donnés des scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$

...

Supposer qu'il existe de tels scalaires serait désastreux : il en existe toujours et on ne pourra rien en tirer.

Ce quantificateur que l'on ne voit pas est le plus fréquent et doit le rester. Voir comment *introduire* ¶ un objet.

Les quantificateurs pratiques. La définition formalisée de la limite ou celle de la continuité reposent sur des quantificateurs. Cependant il est conseillé aux non spécialistes de s'exprimer comme suit, ce qui leur simplifiera le travail.

Etant donné $\varepsilon > 0$, on peut trouver $\eta > 0$ vérifiant ...

On saura que, pour établir la propriété, il faudra se donner un nombre $\varepsilon > 0$, puis chercher un nombre $\eta > 0$ convenable. Pour l'utiliser, on attendra de se voir donné un $\varepsilon > 0$ par l'enchaînement naturel de la démonstration en cours, pour choisir un nombre $\eta > 0$ à ce moment-là.

Voir l'entrée sur *continuité, limite* ¶ pour davantage de détails.

Notons bien ceci, qui semble aller contre les recommandations générales. Dès lors qu'on aurait pris la responsabilité d'inclure une telle définition formalisée telle que celle ci-dessus dans les apprentissages, il serait dangereux de camoufler les quantificateurs qu'elle comporte ou de jouer sur leur place naturelle. Comment le débutant pourrait-il se retrouver dans un tel cas ?

Le quantificateur existentiel implicitement déposé. Voici ce que l'on trouve très couramment écrit, dans le courant d'une démonstration.

Par le théorème des valeurs intermédiaires il existe un point a tel que $f(a) = b$. En principe la lettre a est ici muette ; on ajouterait : puisqu'il en existe, choisissons-en un que l'on appellera a . Mais cette exigence est très peu respectée par abus de langage passé dans les usages. Cela dit, on pourra toujours écrire ce qui suit, en prenant le risque d'être un peu lourd.

Puisque le théorème des valeurs intermédiaires le permet, choisissons un point a tel que $f(a) = b$.

En revanche, dans une définition ou plus généralement pour formuler une hypothèse, le caractère muet de la lettre sur laquelle porte le quantificateur doit être absolument respecté³⁴.

³⁴On n'imitera pas certains documents officiels pour le lycée, où l'on trouve : s'il existe un réel ℓ tel que $\lim u_n = \ell$ et $\lim v_n = \ell$ alors $\lim v_n = \ell$.

Pour cette raison, il est des circonstances où il faut éviter d'utiliser un quantificateur. On s'exprimera notamment comme suit à propos de limites.

Soit ℓ un nombre réel ; on dit que la suite (u_n) admet ℓ comme limite . . .

*Soit ℓ un nombre réel ; on dit que la suite (u_n) converge (ou tend) vers ℓ
...*

Voir encore à ce sujet comment *introduire* ¶ un objet.

Que (conjonction de subordination)

En mathématiques, on transforme volontiers les relations, qui sont des propositions, en groupes nominaux. Cela veut dire qu'on omet généralement la conjonction « que ».

Par exemple, on dira :

« *posons $a = \sqrt{2}$* »

quand dans la langue littéraire, on écrira, comme Jacques François Bertrand :

« *... poser que la terre n'ait pas d'autre chaleur que celle qui lui est communiquée par les rayons du soleil* ».

Avec le verbe *supposer*, la règle est la même. On dira :

« *supposons $a = \sqrt{2}$* »

ou bien :

« *supposons que x soit égal à $\sqrt{2}$* ».

En tout cas, on ne fera pas suivre la conjonction de deux points³⁵.

Récurrence (raisonnement, construction par)

Le raisonnement par récurrence fait partie des éléments incontournables du discours mathématique. Nous ne considérerons pas ici les récurrences transfinies, qui portent sur les ordinaux quelconques, mais nous limiterons aux nombres entiers naturels. Le fondement est en partie le même ; c'est la propriété de bon ordre : tout ensemble non vide de nombres entiers naturels possède un plus petit élément.

Cependant certains aspects de la récurrence sur les nombres entiers reposent également sur ceci : un ensemble majoré non vide de nombres entiers possède un plus grand élément.

Plus fondamentalement, dans un cadre ensembliste rigoureux, les aspects en question sont intimement liés à la construction même de l'ensemble $\mathbf{N}$, telle qu'elle ressort par exemple des travaux de Dedekind, lesquels mettent en jeu un ensemble

³⁵En anglais, on utilise plus volontiers la conjonction *that* ; en revanche l'abus des deux points (*colon*) est tout aussi déconseillé.

sur lequel on s'est donné un élément 0 et une fonction « successeur » à valeurs dans lui-même, l'ensemble $\mathbf{N}$ apparaissant comme universel vis-à-vis de ces données ³⁶.

Supposons donc que nous ayons à démontrer une propriété portant sur un nombre entier naturel. Pour simplifier nous supposons qu'elle commence au rang 0 ; dans le cas contraire, on adaptera.

Récurrence simple. Cette variante est la plus commune. On l'utilise quand on sait passer du rang n au rang $n + 1$ sans avoir besoin des autres rangs antécédents. La stratégie de démonstration est présentée comme suit.

Montrons d'abord la propriété au rang 0.

...

Supposons ensuite la propriété à un rang n donné. Etablissons la au rang $n + 1$.

...

Voilà comment on peut justifier la stratégie. Supposons, par l'absurde, que la propriété ne soit pas vraie à tous les rangs. Soit alors n le plus petit rang pour lequel elle soit fausse. Ce ne peut être 0, puisqu'on l'y a démontrée. On peut donc s'intéresser au rang $n - 1$ — le plus grand rang $< n$ — pour lequel elle est vraie. Mais elle est alors également vraie à l'ordre n , comme on l'a montré, d'où la contradiction.

Si l'on se place dans un cadre ensembliste rigoureux et que l'on s'appuie sur la construction de Dedekind, c'est le fait que toute partie de $\mathbf{N}$ contenant 0 et stable par l'application « successeur » est l'ensemble $\mathbf{N}$ tout entier. On l'applique à la partie constituée par les nombres pour lesquels la propriété à démontrer est vraie.

Cependant, en pratique, on présente le raisonnement par récurrence sans donner un quelconque argument à l'appui, sans se ramener à l'application d'un quelconque théorème par exemple. En effet, ce raisonnement apparaît en amont, historiquement et scolairement, de ce qui peut le sous-tendre théoriquement.

Noter qu'il n'est pas besoin de sous-titres pour présenter un raisonnement par récurrence. Le point important de la seconde partie est que le rang n est *donné*. On peut ajouter qu'il est arbitraire ; c'est une *précision* qu'il faut probablement ajouter, par exemple oralement, aux débutants ; mais c'est superflu. Voir comment introduire ¶ un objet.

Récurrence sur l'ensemble des prédécesseurs. Cette variante est utilisée quand on a besoin de plusieurs rangs antécédents pour passer à un rang donné. La stratégie de démonstration est présentée comme suit.

Supposons la propriété à tous les rangs p tels que $p < n$, pour un rang n donné. Etablissons la au rang n .

³⁶Il n'y a besoin pour cela que de l'axiome de l'infini.

Voilà comment on justifie la stratégie. Supposons, par l'absurde, que la propriété ne soit pas vraie à tous les rangs. Soit alors n le plus petit rang pour lequel elle soit fausse. Elle est alors vraie à tous les rangs $p < n$, d'où la contradiction.

Cette variante se ramène sans grande difficulté à ce qui précède, mais on n'effectue pas cette réduction. Par ailleurs elle n'utilise que la propriété de bon ordre et se généralise au cas transfini.

On remarquera que cette dernière forme ne comporte pas d'initialisation. Cependant il faut aussi envisager le cas où $n = 0$, pour lequel rien n'est supposé puisqu'il n'y a aucun rang $p < 0$. Il se peut qu'on ait à faire un raisonnement particulier dans un tel cas. Autrement dit, l'initialisation est bien là.

Voici un exemple. Il s'agit de montrer qu'étant donnés deux polynômes A et B de $\mathbf{Q}[X]$, où B est non nul, on peut trouver un couple (Q, R) de polynômes de $\mathbf{Q}[X]$ et un seul vérifiant

$$A = BQ + R \quad \text{et} \quad \deg R < \deg B .$$

Soit bX^β le terme dominant de B , où $\beta = \deg B$ et $b \neq 0$.

Nous allons faire une récurrence sur le degré α de A . Supposons la propriété établie si $\deg A < \alpha$ et montrons la pour $\deg A = \alpha$.

Si $\alpha < \beta$, alors la propriété cherchée implique $\deg(BQ) < \beta$, de sorte que $Q = 0$, puis $R = A$ nécessairement ; inversement ces valeurs conviennent.

Si $\alpha \geq \beta$, alors A est non nul ; soit aX^α son terme dominant. Posons

$$A' = A - \frac{a}{b} B X^{\alpha-\beta} .$$

La propriété cherchée équivaut à

$$A' = B\left(Q - \frac{a}{b} X^{\alpha-\beta}\right) + R \quad \text{et} \quad \deg R < \deg B .$$

Comme $\deg A' < \alpha$, nous pouvons appliquer l'hypothèse de récurrence.

Définition par récurrence. Nous désignons de cette façon ce qui est en fait une construction, pour faire la distinction avec le genre de construction qui suivra. On présente souvent la construction d'une suite (x_n) de la façon qui suit. Soit la suite de ... définie par récurrence par

$$\begin{cases} x_0 = \dots \\ x_{n+1} = f(x_n) \end{cases} \quad \text{pour } n \geq 0$$

ou

Soit la suite de ... partant de $x_0 = \dots$ et satisfaisant la relation de récurrence $x_{n+1} = f(x_n)$ pour $n \geq 0$.

Ce que nous avons noté $f(x_n)$ ci-dessus désigne une expression dépendant seulement de x_n , sans référence explicite à une fonction f . Souvent le calcul de x_{n+1} à partir de x_n ne pose aucune difficulté et l'on n'insiste alors pas davantage. Cela signifie que la relation de récurrence s'interprète, par exemple, à l'aide d'une vraie fonction f de $\mathbf{R}$ dans lui-même.

Souvent aussi on n'a pas de garantie évidente que ledit calcul sera possible à tous les rangs. Pour cela il faut des conditions dont il s'agit de montrer qu'elles se transmettent d'un rang au suivant.

Cela revient à déterminer un ensemble A contenant x_0 et à interpréter f comme une application (partout définie comme il se doit) de A dans lui-même.

D'un point de vue ensembliste rigoureux, la construction correspond très exactement à la propriété universelle de l'ensemble $\mathbf{N}$. Cependant, en pratique, on fait comme si cela tombait sous le sens et, plutôt que d'expliciter l'ensemble A ci-dessus, on explique pourquoi la construction peut se poursuivre.

Cette construction admet des variantes, où l'on trouve

$$\begin{cases} x_0 = \dots \\ x_{n+1} = f(n, x_n) \quad \text{pour } n \geq 0 \end{cases}$$

ou

$$x_n = f(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) \quad \text{pour } n \geq 0 .$$

On peut les ramener à la situation ci-dessus, mais on ne le fait pas en pratique. *A fortiori*, expliciter, dans l'un de ces cas, un ensemble et une application de cet ensemble dans lui-même ne serait très parlant.

Construction par récurrence. La construction par récurrence ne se ramène pas à ce qui précède.

La différence est qu'on peut avoir un choix à opérer à chaque stade. A l'inverse on peut toujours adopter pour ce qui précède la forme qui suit.

Voici comment présenter la construction par récurrence d'une suite (x_n) dont l'indice démarre à 0, sous une forme intermédiaire entre les deux modèles du raisonnement par récurrence.

Construisons d'abord x_0 .

...

Supposons maintenant la suite construite jusqu'à un rang n donné. Construisons x_{n+1} .

On peut poser la possibilité de procéder comme indiqué en axiome de la théorie des ensembles.

On parle de l'axiome du *choix dépendant* ou du principe de *récurrence à choix multiples*³⁷.

³⁷C'est dire que la limite projective d'une suite d'ensembles non vides, reliés par des applications de transition surjectives, est non vide; c'est une conséquence de l'axiome du choix général, par le théorème de Zorn; mais c'est plus que l'axiome du choix dénombrable.

Simple, simplement

L'adjectif *simple* et l'adverbe *simplement* peuvent avoir un sens spécifique en mathématiques, à côté de celui qu'il a couramment. Par exemple un espace *simplement connexe* n'est pas simplement un espace connexe.

Cependant cela ne devrait pas avoir d'incidence avant l'université.

Soit, soient

En mathématiques, on emploie le subjonctif à valeur impérative « soit » dans deux cas principaux. Voir aussi comment *introduire* ¶ un objet à ce sujet.

Ce peut être, avec l'article indéfini, pour nommer un objet bien défini. Dans ce cas, on peut le remplacer par : « on note », « on nomme », « on appelle ».

Soit α la plus petite racine réelle de l'équation $x^2 + mx - 1 = 0$.

Ce peut être surtout, avec l'article indéfini, l'introduction d'un nouvel objet. On le fait quand on pose un *quantificateur* ¶ universel ou une implication. Dans ce cas, on peut le remplacer par : « on se donne », « on considère » etc.

Soit α une racine réelle de l'équation $x^2 + mx + 1 = 0$.

On n'a pas à vérifier au préalable l'existence d'un tel objet. Cependant, une fois que le « soit » est prononcé, l'objet existe pour le temps d'un raisonnement. On entre en effet momentanément dans une *fiction* ¶. Comme pour l'ordre divin « fiat lux », l'injonction ne saurait être contestée.

Le pluriel « soient » peut être utilisé, de la même façon, pour *introduire plusieurs objets* ¶.

Entre utiliser le pluriel ou répéter le singulier, le choix dépendra du contexte. Veut-on introduire simultanément plusieurs éléments ? Le pluriel est indiqué. Faut-il les introduire l'un après l'autre ? Répéter le singulier est sans doute préférable.

On notera que la grammaire française ne fait que tolérer le pluriel, considérant plutôt « soit » comme invariable. Par conséquent c'est une dérogation qu'on s'accorde en mathématiques, bien commode il est vrai. Avec le pluriel, on s'attend en effet à plusieurs objets nouveaux. Cela facilite la lecture, comme, de façon générale, l'accord.

On se permet la même entorse en accordant la locution « étant donné » placée devant ce qui est donné. Rappelons que la grammaire française veut que l'on n'accorde que lorsque l'information connue au moment d'accorder le permet. Le principe est assez général ; les formes interrogatives ne font même pas exception, puisqu'on accole le pronom au verbe par un tiret. Les mathématiques ont cependant des raisons de demander un traitement spécial. Les phrases y sont souvent plus tourmentées et le besoin de savoir à qui se rapporte quoi y est plus fréquent.

Subsidiarité (principe de)

Invoquer le principe de subsidiarité est une façon pédante de dire qu'on ne prend pas un marteau pilon pour écraser une mouche.

Dans l'écriture des mathématiques, on privilégiera, dans les limites de la clarté du texte, le mode d'expression le plus terre-à-terre, le moins élevé dans la hiérarchie de la formalisation.

Ce principe est très sensible au niveau de culture mathématique auquel l'on se place. Nous avons ainsi dit qu'il fallait éviter d'abuser du symbolisme de la théorie des ensembles, de préférer « x dans A » à « $x \in A$ » par exemple. Cela ne vaut plus une fois que la théorie des ensembles est complètement assimilée.

On écrira par exemple ceci.

Soient a, b, c des coefficients réels non tous nuls.

Bien sûr, il est permis d'écrire $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, mais, au lycée, mieux vaut ne pas le faire. Certes la première écriture exige un petit effort de lecture et d'interprétation³⁸. Au contraire on acceptera la seconde sans sourciller. Cependant on aura probablement compris cette dernière à l'envers. Cela étant, comparer les deux versions est un bon exercice.

C'est toujours le principe de subsidiarité qui veut que l'on limite les recours à la logique formelle, *a fortiori* l'usage du formalisme logique.

Pour conclure la résolution d'une équation du second degré, on dira par exemple ceci.

Les solutions sont $x' = 0$ et $x'' = 4$.

On évitera d'en passer par l'équivalence logique ¶ avec

$$(x = 0) \text{ ou } (x = 4) .$$

Voir l'entrée correspondante.

Symétrie (relation)

Beaucoup de relations binaires sont symétriques. C'est le cas des relations d'équivalence, mais ce n'est pas le seul. On n'explicitera pas la propriété de symétrie, qui est en général évidente, mais on en tiendra compte pour présenter une définition.

Au niveau relativement élémentaire, on commencera par la version symétrique et on complètera par les deux versions asymétriques. Voici deux exemples.

On dira que des droites D et D' sont parallèles (sous-entendu entre elles) si elles n'ont aucun point commun. On dira aussi que D est parallèle à D' ou que D' est parallèle à D ³⁹.

³⁸Il s'agit, malgré tout, d'un ésotérisme mathématique ; on devrait parler de coefficients « qui ne sont pas tous nuls ».

³⁹Il est étonnant de constater que les manuels du collège, s'adressant pourtant à un public non averti, ignorent ce genre de précaution.

On dira que des nombres entiers m et n sont premiers entre eux si (par exemple) leur PGCD est 1. On dira également que m est premier avec n ou encore que n est premier avec m .

A un niveau plus élevé qui resterait à définir, en revanche, on pourra considérer que le pli est pris.

Texte (dans les formules)

En principe on ne doit pas inclure de texte dans les formules. Déjà on a vu les difficultés inhérentes à l'insertion de formules dans le texte, résolues dans le respect des règles grammaticales au prix de précautions contraignantes. Vue la divergence entre la grammaire de la langue et celle des formules mathématiques, il convient, de toute façon, de séparer sans ambiguïté ce qui relève de l'une et ce qui relève de l'autre. En particulier les formules doivent se détacher du texte aussi clairement que possible. C'est ainsi qu'on utilise le style italique pour les variables, qu'on évite les caractères accentués, qu'on place un espace un peu plus grand autour des symboles, qu'on limite leur contact avec les signes de ponctuation, qu'on évite les formules sur plusieurs lignes rompant un interligne qui doit déjà tenir compte des indices, exposants et assimilés et qu'on recourt assez souvent aux formules hors texte, centrées sur une ligne en général.

Placer des mots ou des fragments de phrase dans une formule n'est donc pas indiqué, pour deux raisons tenant à ce qui précède. D'une part la grammaire de la langue ne peut vraiment pas se plier à celle des formules mathématiques. D'autre part le mélange entre la langue et les formules produit un résultat d'une grande laideur.

Maintenant tout principe peut connaître des exceptions. Le tout est de ne pas en faire une règle. Si l'on doit absolument placer une proposition dans une formule, on la mettra entre guillemets et on la prendra comme une relation.

On évitera, autant que possible, le texte qui gravite autour des formules, petite explication entre parenthèses à côté d'une formule centrée, désignation ou précision au-dessus d'une accolade horizontale groupant une partie de formule.

Il est un usage consacré, qui ne relève pas exactement d'un cas de texte dans une formule, mais plutôt d'une typographie bâtarde qui n'est ni celle d'un texte littéraire, ni celle d'une expression mathématique. On écrira par exemple ceci.

La fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} x \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est continue.

Ou encore cela.

La fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} x(1-x) & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est continue.

Au départ ce mode de présentation s'est révélé commode pour un exposé au tableau entre mathématiciens. On peut le mettre dans la même famille que la définition d'une fonction sur deux lignes ou les signes logiques, connecteurs et quantificateurs. Il se trouve que, contrairement à d'autres usages, on l'a consacré dans la rédaction écrite.

Cela étant, une autre façon, plus élégante, de s'exprimer apporterait davantage d'information et introduirait la fonction considérée plus naturellement. On pourrait ainsi écrire ceci.

La fonction f définie pour $x \neq 0$ par $f(x) = x \sin(1/x)$ admet 0 comme limite en 0. En lui attribuant cette valeur en 0, on la prolonge continûment à la droite réelle entière.

Ou bien cela.

La fonction f définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = x(1-x)$ est continue et nulle aux extrémités. En lui attribuant la valeur 0 en dehors de cet intervalle, on en fait une fonction continue sur la droite réelle.

Comme c'est souvent le cas, pratiquer une entorse aux principes est une solution de facilité, qu'on paie par une plus grande sécheresse dans le discours. Cependant si les expressions de $f(x)$ ne sont pas aussi simples que dans nos exemples et si l'on veut que le lecteur les ait bien en vue, alors la présentation avec la grande accolade a ses avantages.

Le principe qui veut que l'on ne place pas de texte dans les formules pousse encore à l'interdiction des symboles logiques d'implication $\P \Rightarrow$ et d'équivalence $\P \iff$ dans le texte. En effet ces symboles transforment tout le passage dans lequel ils se trouvent en formule mathématique. On doit alors laisser les formules sèches, sans la moindre explication, ce qui est réducteur.

En fait on serait même en droit d'exclure cette dernière possibilité. En effet, dès lors qu'une formule mathématique est fermée, elle doit être assimilée à un élément de la langue, groupe nominal ou propositionnel.

Typographiques (effets)

En principe les styles typographiques, tels que l'inclinaison ou la graisse par exemple, ne devraient pas être discriminants pour désigner des objets.

Il y a quelques exceptions. Les caractères gras **N**, **Z**, **Q**, **R** et **C** sont réservés. Cela ne veut pas dire que les lettres majuscules N , Z , Q , R , C soient interdites à l'usage.

De même les majuscules calligraphiées, comme $\mathcal{C}$ ou $\mathcal{L}$, peuvent être employées pour désigner des objets spécifiques.

La plupart des accents apportent un sens particulier : ainsi $\bar{z}$ est le conjugué de z ; la dérivée de f est classiquement notée f' ou $\dot{f}$, sa transformée de Fourier $\hat{f}$; on écrit $\check{f}(x)$ pour $f(-x)$ etc.

En revanche les flèches qu'on place souvent sur les vecteurs sont à considérer comme de simples accessoires décoratifs. Si, pour plus de clarté, on note $\overrightarrow{AB}$ le vecteur d'origine A et d'extrémité B , on évitera de distinguer $\vec{v}$ et v .

Les alphabets autres que l'alphabet romain, notamment les alphabets grec, gothique (Fraktur) et cyrillique, servent évidemment à désigner des objets spécifiques.

On peut assimiler à un style typographique l'utilisation de parenthèses autour du nom d'une variable. L'habitude en a été prise en géométrie pour désigner les objets élaborés, comme des figures : la droite (D), le cercle (C), la conique (Γ) par exemple. L'avantage est la mise en valeur de l'objet considéré ; à ce titre l'usage n'a rien de scandaleux. Mais pour cela il ne faut pas abuser de l'artifice.

Cette notation parenthésée s'accorde mal avec les opérations sur les ensembles $\P$; mais peut-être est-elle là pour nous rappeler qu'il s'agit de figures ?

Dans le même ordre d'idées, faut-il préférer les majuscules ou les minuscules ? En géométrie, on utilise généralement les majuscules pour les points et il est arrivé qu'on utilise les minuscules pour les droites. Mais appeler m la projection de M se fait également.

Quand on travaille avec des ensembles, on utilise en général pour ces derniers des majuscules et pour leurs éléments des minuscules. Pour les ensembles d'ensembles, on a parfois recours aux lettres calligraphiées ou à l'alphabet gothique.

Cependant les matrices sont souvent notées avec une majuscule quand les applications linéaires le sont avec des minuscules. Il n'y a pas de règle absolue.

Unicité

Contrairement à ce qu'on pourrait penser à première vue, l'unicité dans un problème est totalement indépendante de l'existence. Elle signifie : « il existe au plus une solution ».

Très souvent on démontre l'unicité avant l'existence. C'est le cas avec le raisonnement par *analyse et synthèse* $\P$. On examine d'abord un candidat et on conclut qu'il ne peut être qu'untel. On considère alors ce dernier et, avec un peu de chance, on montre qu'il convient. Voici, en exemple, le cas du barycentre.

Etant donnés des points $A_1, \dots, A_n$ du plan et des coefficients $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de somme λ non nulle, montrons qu'il existe un point G et un seul tel que

$$(1) \quad \lambda_1 \overrightarrow{GA_1} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{GA_n} = 0 .$$

Commençons par établir l'unicité. Considérons pour cela un point G vérifiant (1). Alors ... on obtient

$$(2) \quad \overrightarrow{OG} = \frac{\lambda_1}{\lambda} \overrightarrow{OA_1} + \dots + \frac{\lambda_n}{\lambda} \overrightarrow{OA_n}.$$

L'unicité est donc établie. Maintenant si on définit G par (2), alors ... on vérifie (1).

On notera que la formulation est pratiquement imposée. On parlera d'unicité pour un problème, pour une équation. Vouloir attacher cette propriété aux solutions éventuelles conduirait à une impasse⁴⁰. Eventuellement on pourra dire ceci.

Le problème ne peut pas avoir d'autre solution que ...

Par ailleurs supposer d'abord l'existence laisserait un goût d'inachevé. Il convient de considérer un point G sans faire cette hypothèse. Evidemment, dès que le point est considéré, on se trouve, provisoirement, dans un cas, une *fiction* ¶, où une solution existe.

Unités Voir *contexte* ¶

Universel (poser un quantificateur) Voir *introduire* ¶ un objet

Verbe ou symboles

Une idée très répandue veut que le discours mathématique ne mérite d'être qualifié comme tel qu'à la condition d'être largement épuré des formes littéraires au bénéfice de formules agrégeant des symboles. De cette façon, on disposerait d'une expression sans la moindre ambiguïté et indépendante de la langue utilisée. Malheureusement on commet au moins deux contresens.

D'abord c'est oublier qu'il n'y a que rarement un accord général pour le choix des symboles et qu'un même symbole peut avoir diverses significations. On trouvera, dans l'entrée sur la *cohérence* ¶, quelques exemples pouvant réellement prêter à confusion. C'est le cas pour la différence ensembliste $A \setminus B$ qu'on peut confondre, dans un groupe additif, avec l'ensemble $A - B$ des différences entre éléments de A et B , si on la note de la même façon.

Ainsi l'emploi du symbolisme nécessite-t-il l'apprentissage d'un certain nombre de codes. Ici l'abus se heurte à un principe à respecter assez généralement dans l'écriture, qui est l'économie de moyens. Si j'écris :

« l'ensemble des solutions est $\mathbf{R} \setminus \{1\}$ »

je demande plus à mon éventuel lecteur que si j'écris :

« j'obtiens comme solutions tous les nombres réels sauf 1. »

⁴⁰Voir ce qu'on dit, par exemple, à propos de l'*article*. ¶

En effet, dans le premier cas, on fait appel à un symbolisme codé à trois reprises : pour l'ensemble $\mathbf{R}$, pour la différence ensembliste et pour l'ensemble réduit à un élément.

De la même façon, plutôt que d'écrire

$$D \cap D' = \{A\} ,$$

on peut aussi bien dire que les droites D , D' se coupent en A . C'est au nom de l'économie de moyens qu'il faut privilégier la langue courante quand elle rend les mêmes services.

Faut-il en déduire qu'il n'y a plus besoin de symboles en mathématiques ? Bien sûr il en faut et même beaucoup. Cependant la place du symbolisme est dans le calcul, terme à considérer dans une acception très large.

C'est, tout à fait au début, l'écriture des nombres, dont la forme répandue aujourd'hui autorise une concision et une facilité de calcul qui n'a pas toujours existé, notamment dans la Grèce antique.

C'est, plus près de nous, l'algèbre, à commencer par l'écriture polynomiale qu'on apprend dès le collège. Quand on compare la résolution moderne de l'équation du second degré à celle de l'école arabe, on mesure les progrès accomplis.

C'est encore, à un niveau élevé, l'algèbre homologique, avec les suites exactes et diagrammes commutatifs qui y fleurissent.

Tous ces exemples ont en commun la possibilité de calculer sur les symboles. Même si, en géométrie ou en topologie algébrique, le verbe calculer n'a pas exactement le sens qu'il a pour l'algèbre commune.

On peut aussi calculer sur les connecteurs logiques, sur les prédicats. Mais on ne le fait en général pas en mathématiques, en tout cas ni au collège, ni au lycée, ni en licence.

Déjà les symboles ensemblistes ne sont-ils vraiment utiles que pour exprimer le résultat d'une construction déjà un peu compliquée ; c'est d'ailleurs l'image directe ou inverse d'une partie qu'on rencontre le plus souvent, et elle n'est pas au programme du lycée.

Aussi ne devrait-on trouver trace de ces symboles qu'exceptionnellement dans l'écriture. A ce compte-là, un certain nombre de petits symboles, qui font depuis longtemps partie de la culture du collège, n'ont qu'un intérêt marginal. C'est le cas de

$$\begin{array}{l} D//D', \\ D \perp D' \end{array}$$

entre autres.

Il reste un usage très spécifique de certains symboles, qui ne jouent alors qu'un rôle d'abréviation : c'est l'écriture au tableau. Mais qui enseigne que ce qu'on écrit au tableau n'a pas à se retrouver tel quel dans un écrit ?

Vérité

On ne parle en principe jamais de *vérités* en mathématiques. Le terme est laissé aux philosophes et aux théologiens.

Dans la tradition ancienne, celle de la géométrie d'Euclide par exemple, on part de propriétés des objets considérés qui tombent sous le sens ou qui ont été éprouvées expérimentalement, lesquelles vont être énoncées en postulats ou *axiomes* ¶. Partant de là, par le raisonnement hypothético-déductif, on en déduit d'autres propriétés, qui donneront lieu à ce qu'on appelle des théorèmes. Ces derniers peuvent être soumis à l'expérience à leur tour ; c'est une façon de juger du bien-fondé des axiomes.

Si l'on veut utiliser le qualificatif de *vrai*, ce qui n'est en rien obligatoire, on l'attribuera aux théorèmes. Sera vrai ce que l'on aura démontré.

Dans une construction de la mathématique formelle telle qu'on la trouve dans Bourbaki, malgré des différences essentielles, on retrouve un peu la même philosophie. Partant d'axiomes ou de règles les produisant, on bâtit des démonstrations formelles, constituées par une succession de relations, assemblages convenablement formés de quelques symboles de base, succession dans la laquelle chaque relation doit obéir à l'une ou l'autre de deux règles que sont :

- la substitution dans un axiome ou une relation précédente d'une variable libre par un terme,
- l'application du syllogisme à deux relations précédentes.

Bien entendu tout est fait pour que cela corresponde aux modes de raisonnement que l'on pratique usuellement.

Toutes les relations qui figurent dans une démonstration formelle sont les relations de la théorie, encore appelées théorèmes. Si l'on veut utiliser le qualificatif de *vrai*, on l'attribuera à ces derniers.

Ainsi une relation est-elle vraie si elle est démontrable. Il se peut qu'elle ne le soit pas davantage que son contraire, qu'elle soit, comme on dit, indécidable. Cependant la question de la décidabilité ne relève pas des mathématiques au sens strict ; elle relève de la logique. Faire des mathématiques consiste à démontrer ; c'est tout.

En pratique, « affirmer R » ou « affirmer que la relation R est vraie » sont deux manières de dire la même chose. Dans une démonstration par récurrence on pourra aussi bien « supposer la propriété à l'ordre n » ou « supposer la propriété vraie à l'ordre n ». On évitera d'abuser de l'emploi du qualificatif « vrai » cependant.

Bibliographie

Audin (Michèle) .- *Conseils aux auteurs de textes mathématiques*, en ligne à l'adresse

<http://www-irma.u-strasbg.fr/~maudin/newhowto.ps>

Cheney (Ward) .- *Advice for students writing reports, theses and dissertations*, en ligne à l'adresse

<http://ljk.imag.fr/membres/Bernard.Ycart/writing/advice.pdf>

Godement (Roger) .- *Sur la rédaction et la dactylographie des textes de T.P.*, Paris, novembre 1967, introuvable

Goss (David) .- *Some Hints on Mathematical Style*, en ligne à l'adresse

<http://www.math.ohio-state.edu/~goss/hint.ps>

Halmos (Paul) .- *How to write mathematics*, Enseign. Math. **16** (1970), 123-152.

Imprimerie nationale .- *Lexique des règles typographiques en usage à l'Imprimerie nationale*, édité par l'Imprimerie nationale.

The London Mathematical Society .- *Writing Mathematics*, en ligne à l'adresse

<http://www.lms.ac.uk/publications/documents/writing.html>

ENTREES DU LEXIQUE

Adjectifs	Fonction
Analyse et synthèse (raisonnement par)	Gras
Annoncer la couleur	Hypothèse
Application	Identités
Article	Implication
Articulations	Infini
Axiomes	Insertion d'une formule
Brouillon	Introduire (un objet)
Calcul (présenter un)	Introduire plusieurs objets
Canonique	Limite (passage à la)
Caractéristique (propriété), caractérisation	Locutions
Cohérence	Nommer (un objet)
Conclusion	Normes
Connecteurs logiques	Noter
Considérer	Numériques (fonctions)
Contexte (expérimental ou pratique)	Parenthèses et tirets
Continuité, limite (propriété de)	Pertinence
Conventions	Ponctuation
Courbe représentative	Poser
Critère	Précisions
Déduire	Propriété, propriété caractéristique
Définition	QED
Démonstration	Quantificateurs
Désigner	Que (conjonction de subordination)
Dessin	Récurrence (raisonnement, construction par)
Deux à deux, entre eux	Simple, simplement
Egalité	Soit, soient
Enchaînement (d'égalités et inégalités)	Subsidiarité (principe de)
Enoncés	Symétrique (relation)
Ensembles (théorie des)	Texte (dans les formules)
Equation, équation différentielle	Typographiques (effets)
Equivalence logique	Unicité
Existence	Unités
Existentiel (poser un quantificateur)	Universel (poser un quantificateur)
Facteurs et termes, membres	Verbe ou symboles
Famille	Vérité
« Fiction »	

TITRE : Lexique pour écrire des mathématiques

AUTEURS :
Nicole Bardy-Panse
Jean-Marie Didry
Laure Dumoulin
Gérard Eguether
Jean-Pierre Ferrier

PUBLIC VISE :
Professeurs de mathématiques du secondaire
Etudiants en mathématiques

RESUME :
Conseils de rédaction en mathématiques, organisés
alphabétiquement

MOTS CLES :
Rédiger en mathématiques; Raisonnement par analyse et synthèse; Axiomes; Calcul; Canonique; Propriété caractéristique; Connecteurs logiques; Continuité; Conventions; Courbe représentative; Critère; Définition; Démonstration; Egalité; Théorie des ensembles; Equation; Equivalence logique; Existence; Facteurs; Termes; Membres; Famille; Fonction; Hypothèse; Identités; Implication; Infini; Insertion d'une formule; Passage à la limite; Nommer un objet; Parenthèses; Poser; Propriété; QED; Quantificateurs; Réurrence; Soit; Texte dans les formules; Typographie; Unicité; Unités; Symboles

IREM de Lorraine Groupe Université