

Racines, symétries, et applications

Angela Pasquale

Institut Élie Cartan de Lorraine (IECL)

Journée IECL, Metz
Années des Mathématiques

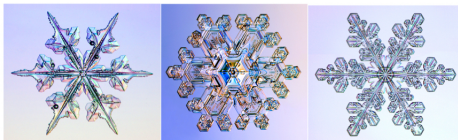
29 janvier 2020

La symétrie

Tout le monde a une idée de ce qu'est la symétrie.
On la trouve



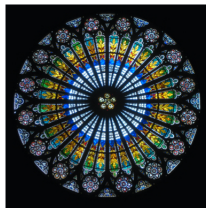
dans la nature,



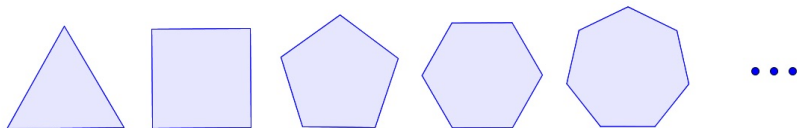
dans les cristaux de neige,



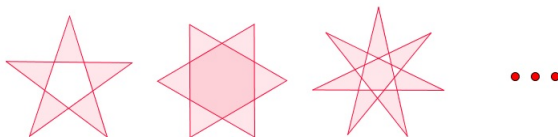
dans l'art



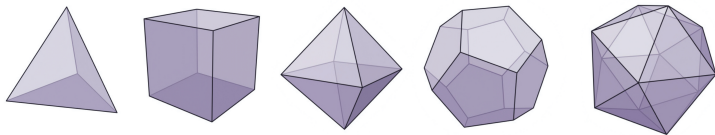
...dans les figures géométriques



Les premiers polygones réguliers convexes



Les premiers polygones réguliers non-convexes



Les solides platoniciens : tétraèdre, cube, octaèdre, dodécaèdre, icosaèdre

Comprendre la symétrie

Certaines formes semblent plus symétriques que d'autres, mais ce n'est pas immédiatement évident comment comprendre et mesurer la symétrie d'un objet.

Comprendre la symétrie des objets a été l'un des moteurs des mathématiques.

La symétrie: points de départ

- Un **espace** E muni d'une structure qui nous permet de mesurer distances et angles.

Par exemple, l'espace Euclidien $\mathbb{R}^d$ à d dimensions:

- $d = 3$: l'espace physique usuel
- $d = 2$: un plan
- $d = 1$: une droite

- Les **transformations** de l'espaces E
(c'est-à-dire des applications $\Phi : E \rightarrow E$ inversibles)
qui préservent les distances entre les points de l'espace (**isométries**).

Pour l'espace euclidien ces isométries sont des rotations, réflexions, translations ou leur combinaisons.

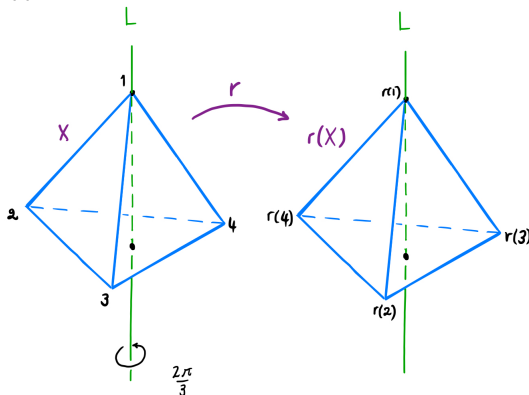
En fait: le théorème de Cartan–Dieudonné (nommé d'après Élie Cartan et Jean Dieudonné) dit que toute isométrie de $\mathbb{R}^n$ qui fixe l'origine peut s'obtenir en appliquant au plus n réflexions.

- Un **objet** X dans l'espace.
- Une **symétrie** de X est une transformation $\Phi : E \rightarrow E$ de E telle que $\Phi(X)$ (le transformé de X sous Φ) ne peut pas être distingué de l'objet X avant la transformation.

Les symétries d'un tétraèdre : rotations

$E = \mathbb{R}^3$ l'espace Euclidien usuel

r = la rotation d'angle $\frac{2}{3}\pi$ autour de l'axe L qui passe par un sommet et le centre de gravité de la face opposée

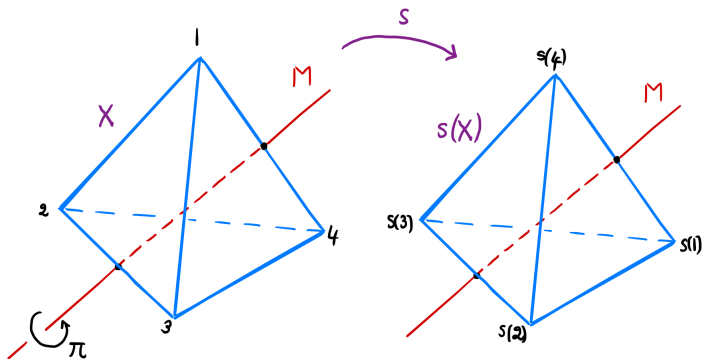


r est une symétrie de du tétraèdre X .

La rotation autour de L d'angle $\frac{4}{3}\pi$ l'est aussi (et c'est la rotation d'angle $-\frac{2}{3}\pi$)

Les symétries d'un tétraèdre : rotations (suite)

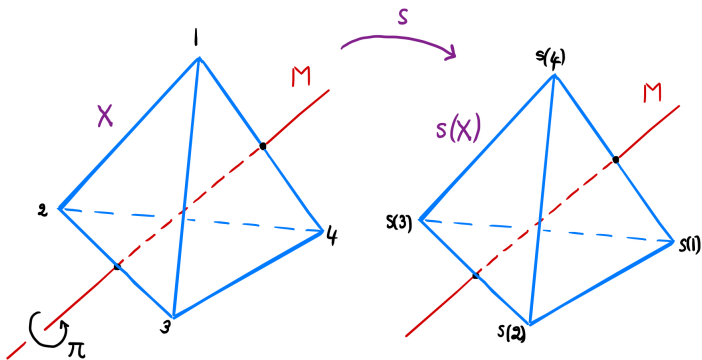
s = la rotation d'angle π autour de l'axe M qui passe par les milieux de deux arêtes opposées



s est une symétrie de du tétraèdre X .

Les symétries d'un tétraèdre : rotations (suite)

s = la rotation d'angle π autour de l'axe M qui passe par les milieux de deux arêtes opposées



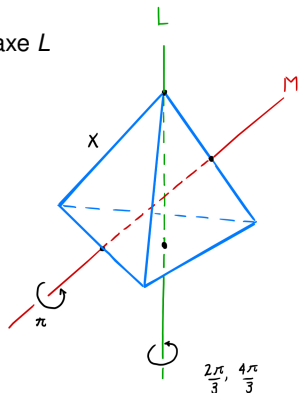
s est une symétrie de du tétraèdre X .

Les symétries d'un tétraèdre (suite)

Combien de symétries rotationnelles possède un tétraèdre ?

On compte :

- Deux rotations (d'angles $\frac{2}{3}\pi$ et $\frac{4}{3}\pi$) autour de l'axe L et quatre axes du type L .
- Une rotation (d'angle π) autour de l'axe M et trois axes du type M .
- La symétrie identité



Total : le tétraèdre X possède 12 symétries rotationnelles.

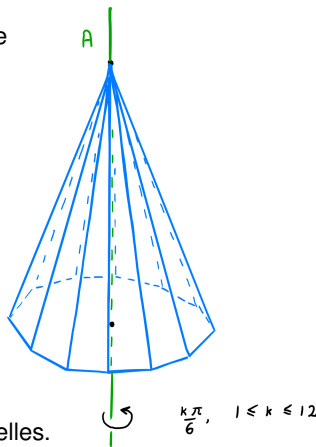
Les symétries rotationnelles d'une pyramide dont la base est un dodécagone

Combien de symétries rotationnelles possède cette pyramide ?

L'axe A par l'apex et le centre de la base est le seul axe de symétrie.

On compte :

- onze rotations différentes R_k (d'angles $\frac{\pi}{6}k$ avec $k = 1, \dots, 11$) autour de l'axe A .
- La symétrie identité (pour $k = 0$ ou 12)



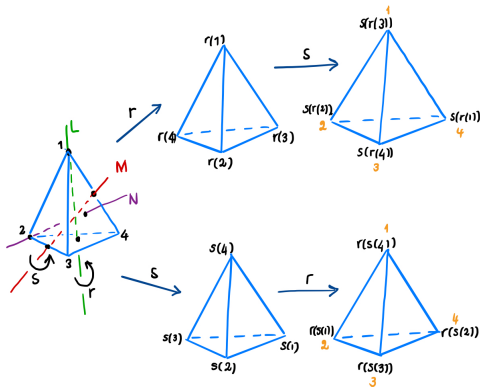
Total : cette pyramide possède 12 symétries rotationnelles.

Comparaison

Douze rotations dans les deux cas, manifestement pas la même symétrie.

Différences :

- La pyramide ne possède qu'un seul axe. De plus, la rotation R_1 d'angle $\frac{\pi}{6}$, lorsqu'elle est répétée, nous donne toutes les autres symétries rotationnelles.
- Pour X : la rotation r suivie par s donne la rotation d'axe N .
On comprend mieux ces symétries par leur action sur les sommets de X .



Notation :

$s(r(1))$ signifie qu'on applique s au sommet $r(1)$.

On écrit $(s \circ r)(1)$ au lieu de $s(r(1))$.

$s \circ r$ est l'opération d'appliquer r et puis s , dite la **composée** de r et s . C'est une symétrie de X .

$$s \circ r = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$s \circ r \neq r \circ s.$$

Le groupe des symétries rotationnelles du tétraèdre X

L'ensemble G des 12 symétries rotationnelles de X est muni de structure algébrique :

- Lorsqu'on compose deux symétries rotationnelles de X on obtient encore une symétrie rotationnelle de X . Ceci donne une loi de composition

$$\circ : G \times G \rightarrow G, \quad (\rho, \sigma) \mapsto \rho \circ \sigma.$$

- Le composition est associative, c'est-à-dire pour tous ρ, σ et τ sont dans G , on a $(\rho \circ \sigma) \circ \tau = \rho \circ (\sigma \circ \tau)$.
- La symétrie identité e a la propriété que $\rho \circ e = \rho = e \circ \rho$.
- Chaque rotation ρ de G possède une inverse, c'est-à-dire un élément ρ^{-1} de G tel que $\rho \circ \rho^{-1} = \rho^{-1} \circ \rho = e$.

Dit autrement, $(G, \circ)$ est un **groupe**.

Comprendre la symétrie rotationnelle de X = comprendre la structure du groupe G .

Groupes commutatifs ou non-commutatifs

On dit qu'un groupe $(G, \circ)$ est **commutatif** si pour tous $x, y \in G$ on a $x \circ y = y \circ x$. Sinon, on dit qu'il est **non-commutatif**.

Exemples

- Les symétries rotationnelles d'une pyramide dont la base est un dodécagone sont les rotations

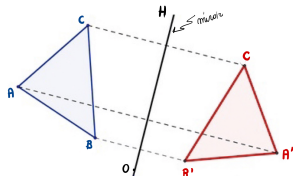
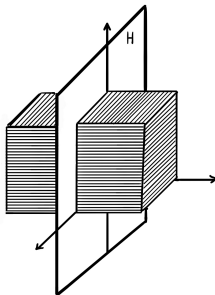
$R_k = \text{rotation d'angle } \frac{\pi}{6}k \text{ autour de l'axe } A, \quad \text{pour } k = 0, 1, \dots, 11.$

Par rapport à la composition, elles forment un groupe commutatif (et même cyclique)

- Le groupe des symétries rotationnelles du tétraèdre est non-commutatif.

Réflexions

Dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$, une réflexion est une symétrie orthogonale par rapport à une droite H qui passe par l'origine.



Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, une réflexion est une symétrie orthogonale par rapport à un plan H qui passe par l'origine.

Plus généralement :
dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$, une **réflexion** est une symétrie orthogonale r par rapport à un hyperplan H , c'est-à-dire à un sous-espace de codimension 1, qui passe par l'origine.

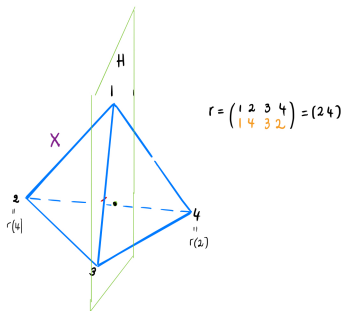
H est le **miroir** de r (=l'ensemble de points fixés par r , c-à-d tels que $r(x) = x$).

On écrira aussi : $r = r_H$.

r est une transformation involutive : $r \circ r = e$.

Le symétries de réflexion du tétraèdre

Les miroirs sont les plans qui passent par une arête et par le milieu de l'arête opposée : il y en a 6.



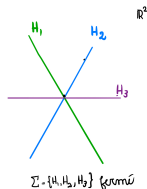
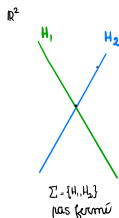
Les symétries de réflexion du tétraèdre ne forment pas un groupe, mais elle engendrent toutes les symétries du tétraèdre.

Le groupe des symétries du tétraèdre est le groupe des permutations de $\{1, 2, 3, 4\}$: le groupe symétrique S_4 .

Systèmes de miroirs

Un **système de miroirs fermé** est une famille Σ d'hyperlanes telle que pour tous H et H' dans Σ , la réflexion de H' dans H appartient à Σ .

Exemples:



On dit qu'une famille S de réflexions un **système de réflexions fermé** s'il existe un système de miroirs fermé Σ tel que $S = \{r_H\}_{H \in \Sigma}$.

Exemple:

Pour $\Sigma = \{H_1, H_2, H_3\}$, la famille $S = \{r_{H_1}, r_{H_2}, r_{H_3}\}$ est un système fermé.

Lemma

Un système de réflexions fermé et fini engendre un groupe d'isométries fini.

Réflexions en coordonnées

Le produit scalaire de $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ est

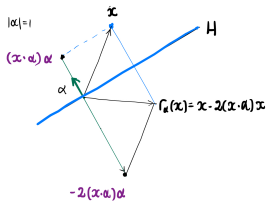
$$x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2.$$



$$x \cdot y = |x| |y| \cos \theta$$

La longueur de x est $|x| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

Si $\alpha \in H^\perp$, alors la réflexion par rapport à H est donnée par $r_\alpha(x) = x - 2 \frac{x \cdot \alpha}{\alpha \cdot \alpha} \alpha$



Plus généralement, pour $\mathbb{R}^n$:

Produit scalaire: $x \cdot y = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$

Longueur de x : $|x| = \sqrt{x \cdot x}$

Même formule pour r_α .

Remarks:

- r_α est une transformation orthogonale car $r_\alpha(x) \cdot r_\alpha(y) = x \cdot y$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$.
- Les isométries de $\mathbb{R}^n$ qui fixent l'origine O sont exactement les transformations orthogonales.

Systèmes de racines

Origines historiques :

Introduits par Wilhelm Killing en 1889 pour la classification des algèbres de Lie simples sur le corps des nombres complexes. La classification de Killing comportait une erreur, qui fut corrigée par Élie Cartan en 1894.



Pourquoi “racines” :

Racines d'un polynôme caractéristique.

Systèmes de racines

Un **système de racines** dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ est un ensemble fini Δ de vecteurs vérifiant les propriétés suivantes :

- Δ engendre l'espace $\mathbb{R}^n$
- Pour tout $\alpha \in \Delta$, les seuls éléments proportionnels de Δ qui sont proportionnels à α sont α et $-\alpha$,
- Pour tout $\alpha \in \Delta$, la réflexion r_α par rapport à l'hyperplan perpendiculaire à α satisfait $r_\alpha(\Delta) \subseteq \Delta$.
- Pour tous $\alpha, \beta \in \Delta$ la projection orthogonale de β sur la droite menée par α est un multiple demi-entier de α .

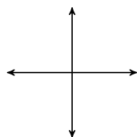
Le **groupe de Weyl** est le groupe fini de symétries de Δ engendré par les réflexions r_α avec $\alpha \in \Delta$.

Classification des systèmes de racines

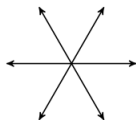
Systèmes irréductibles :

Quatre famille infinies A_n, B_n, C_n, D_n et cinq cas exceptionnels E_6, E_7, E_8, F_4, G_2

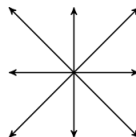
Systèmes de racines de rang 2 :



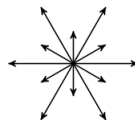
$A_1 \times A_1$



A_2



$B_2 \cong C_2$



G_2

Applications typiques

- Classification de groupes de algèbres de Lie
- Groupes algébriques
- Théorie des représentations
- Analyse harmonique sur les groupes de Lie et leurs espaces homogènes
- Arrangements d'hyperplans
- Etudes de réseaux
- ...

et toutes leurs applications...

Sources utilisées dans cette présentation

Quelques références bibliographiques :

- M. A. Armstrong, *Groups and symmetry*, Springer, 1988.
A. V. Borovik et A. Borovik, *Mirrors and reflections: the geometry of finite reflection groups*, Springer, 2010.
A. J. Coleman, *The greatest mathematical paper of all time*, The Mathematical Intelligencer 11:3 (1989), 29—38.
W. Ebeling, *Lattices and Codes*, Springer, 2013.
M. Hamermesh, *Group theory and its applications to physical problems*, Dover, 1962.
J. Rosen, *Symmetry Rules*, Springer, 2008.
K. Tapp, *Symmetry: a mathematical exploration*, Springer, 2012.

Images :

La symétrie, p. 2 :

Dalia : <https://www.reddit.com/user/MDK78/>

Flower symmetry (Sarah Kim): <https://www.pinterest.fr/pin/349029039861794836/?lp=true>

Nid d'abeille :

<https://theconversation.com/we-discovered-more-about-the-honeybee-wake-up-call-and-it-could-help-save-them-105751>

Flocons de neige : Kenneth Libbrecht, *The Art of the Snowflake: A Photographic Album* Paperback, Voyageur Press, 2014.

<http://www.snowcrystals.com/photos/photos.html>

Mosaico policromo con motivo a nastro ondulato. Mosaici dai Musei Capitolini, Ambasciata d'Italia Tblisi,

https://ambtbilisi.esteri.it/ambasciata_tbilisi/it/ambasciata/news/dall_ambasciata/2019/09/antica-roma-a-colori-mosaici-dai.html

Rosace de la Cathédrale de Strasbourg: https://fr.wikipedia.org/wiki/Fichier:Rosace_cathedrale_strasbourg.jpg

... dans les figures géométriques, p. 3 :

Les solides de Platon : D. Marie Jo, Géométrie sacrée,

<https://www.pinterest.fr/mjodutrieux/g%C3%A9om%C3%A9trie-sacr%C3%A9e/>

Systèmes de racines : origines historiques, p. 18 :

Photo de Wilhelm Karl Joseph Killing : Auteur inconnu, <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Mathematicians/Killing.html>

Photo d'Élie Cartan : Wikipédia, Auteur inconnu [Public domain], <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Elie-Cartan-1904.png>