Université de Lorraine 2025/2026

Jean-Sébastien Giet- UL FST Nancy

jean-sebastien.giet@univ-lorraine.fr

Préparation à l'agrégation interne de mathématiques
Exercices d'analyse pour l'été
Suites numériques et fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

I Énoncés

♣♣ Exercice 1 (Bornes supérieure et inférieure)

Soient A et B deux parties bornées non vides de $\mathbb{R}$. Soient f et g deux fonctions réelles, bornées sur une partie E de $\mathbb{R}$.

1. *Montrer que* $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$.
2. *On note* $A + B = \{a + b : \ a \in A, \ b \in B\}$. *Montrer que* $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.
3. *Montrer que* $\sup\{f(x) + g(x) : x \in E\} \leq \sup\{f(x) : x \in E\} + \sup\{g(x) : x \in E\}$.
4. *Donner un contre-exemple à l'égalité.*
5. *Que peut-on déduire de ce qui précède pour* $\sup(f(E) + g(E))$ *?*

♣♣ Exercice 2 (Convexité d'une boule)

Montrer que la boule fermée $\overline{B}(a; r) = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x - a\| \leq r\}$ *est convexe. Idem pour la boule ouverte.*

♣♣♣ Exercice 3 (Distance à un fermé)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit F une partie fermée non vide de $\mathbb{R}^n$.

1. (a) *Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Justifier que l'ensemble $\{\|x - y\|; y \in F\}$ possède une borne inférieure.*
   (b) *On note $d_F(x)$ cette borne inférieure : $d_F(x) = \inf\{\|x - y\|; y \in F\} = \inf\limits_{y \in F} \|x - y\|$.*
   Montrer pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, l'équivalence : $x \in F \iff d_F(x) = 0$.
   (c) *Généraliser à une partie A non vide de $\mathbb{R}^n$: $x \in \bar{A} \iff d_A(x) = 0$.*
2. (a) *Montrer que pour tous $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$, $f \in F$, $d_F(y) \leq \|y - x\| + \|x - f\|$.*
   (b) *En déduire que l'application d_F est 1-lipschitzienne.*
   (c) *Soit K une partie compacte non vide de $\mathbb{R}^n$. Soit U une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$ contenant K. Démontrer l'existence d'un réel r strictement positif tel que $\{x \in \mathbb{R}^n ; d_K(x) < r\} \subset U$; on pourra considérer l'application $x \mapsto d_{\mathbb{R}^n \setminus U}(x)$ définie sur K.*

♣♣ Exercice 4 (Suites réelles explicites)

Étudier les suites définies ci-dessous (domaine de définition, convergence, éventuellement monotonie, *valeurs d'adhérence, etc).*

1. $u_n = \dfrac{2n^2 - n + 1}{n^2 - 2}$	**2**. $u_n = 3n - 2$	**3**. $u_n = \dfrac{n^2 - 1}{n^3}$
4. $u_n = (-0,7)^n + (0,7)^n$	**5**. $u_n = \dfrac{n^2}{n(n-1)} - (0,8)^n$	**6**. $u_n = \dfrac{2n}{n!}$
7. $u_n = \dfrac{n^5}{n!}$	**8**. $u_n = \dfrac{n^2 + (-1)^n}{n^2 + 1}$	**9**. $u_n = \dfrac{-n + \sqrt{n}}{2\sqrt{n}}$
10. $u_n = n^2 \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$	**11**. $u_n = n^2 \sin\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$	**12**. $u_n = \dfrac{n}{(n+1)^2}$
13. $u_n = (-1)^n$	**14**. $u_n = \dfrac{\sin n}{n}$	**15**. $u_n = \sqrt{n^2 - 1} - n$
16. $u_n = \sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n+1}$	**17**. $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$	**18**. $u_n = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$
19. $u_n = \dfrac{1}{n} + \sin\left(\dfrac{n\pi}{4}\right)$	**20**. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2 + 1}$	**21**. $u_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$

♣♣ Exercice 5 (Suites extraites et convergence)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite réelle. Montrer que si* $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ *convergent, alors* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge.*

♣♣ Exercice 6 (Suites arithmético-géométriques)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite réelle arithmético-géométrique, c'est-à-dire telle que*

$$\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + b.$$

On supposera que la suite n'est pas arithmétique, i.e. $a \neq 1$.

1. *Si la suite* u *converge vers une limite finie* l*, préciser cette limite.*
2. *Montrer que la suite* $(u_n - l)_{n\in\mathbb{N}}$ *est géométrique et en déduire une condition suffisante sur le réel* a *pour que la suite* u *converge. Est-ce une condition nécessaire ?*
3. *Exprimer le terme* u_n *en fonction de* a, b, u_0 *et* n.
4. *Préciser quand la suite est croissante, décroissante, non monotone, en fonction de* a *et* $u_0 - l$.
5. *Dans ce qui précède, préciser ce qui peut s'étendre si* u *est à valeurs complexes, où* $a, b, u_0 \in \mathbb{C}$.

♣♣ Exercice 7 (Suite définie par récurrence)
Soit I *un intervalle fermé de* $\mathbb{R}$. *Soit* $f : I \to I$ *une fonction décroissante. Soit une suite* u *définie par* $u_{n+1} = f(u_n)$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.
Montrer que les sous-suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ *sont monotones, de monotonies opposées.*

♣♣ Exercice 8 (Suite de Fibonacci)
On considère la suite de Fibonacci $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ *et* $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ *pour tout entier* $n \geq 1$. *Soit la suite* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{F_{n+1}}{F_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. *Montrer que la suite* a *est convergente et déterminer sa limite. On pourra d'abord identifier la limite possible avant de montrer la convergence.*
2. *Montrer que* $(a_{2n})_n$ *et* $(a_{2n+1})_n$ *sont adjacentes.*
3. *Déterminer un rationnel* r *tel que* $|r - \frac{1+\sqrt{5}}{2}| < 10^{-3}$.

4. *Montrer que le nombre de suites de 0 et de 1 de longueur n ne comportant pas deux 1 consécutifs est égal à F_{n+2} (chercher une relation de récurrence).*

♣ Exercice 9 (Comparaison série/intégrale)

On définit la suite $(u_n)_{n\geq 1}$: $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

On souhaite montrer que cette suite est convergente.

1. *Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,*
$$\frac{1}{(k+1)^2} \leq \int_k^{k+1} \frac{dx}{x^2} \leq \frac{1}{k^2}.$$
2. *Montrer que u est bornée et convergente. On note L sa limite.*
3. *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,*
$$|L - u_n| \leq \int_n^{+\infty} \frac{dx}{x^2};$$
en déduire une valeur approchée de L à 10^{-3} près.

♣ Exercice 10 (La constante γ d'Euler)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ les suites définies par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \qquad v_n = u_n - \frac{1}{n}$$

Montrer que ces deux suites sont convergentes et qu'elles ont même limite. Cette limite est appelée constante γ d'Euler.

♣♣ Exercice 11 (La constante e n'est pas rationnelle)

On considère la suite u somme partielle de la série $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}$:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 1 + \frac{1}{1!} + ... + \frac{1}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

Montrer que la suite u converge ; soit e sa limite.
Montrer que $e \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

♣ Exercice 12 (Moyenne arithmético-géométrique)

Soient a et b deux réels vérifiant $b > a > 0$. On définit deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant $u_0 = a$, $v_0 = b$ et pour $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

Montrer que les deux suites u et v sont adjacentes. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite l, appelée moyenne arithmético-géométrique de a et b.

♣ Exercice 13 (Suite des moyennes)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite monotone de nombre réels.
Montrer que la suite u et la suite de ses moyennes arithmétiques $(\bar{u}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, définie par $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \bar{u}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} u_i$, partagent la même monotonie.

♣♣ Exercice 14 (Lemme de Cesàro)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de nombre réels convergeant vers* $l \in \mathbb{R}$.

Montrer que la suite des moyennes arithmétiques $(\bar{u}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, *définie par* $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \bar{u}_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i$, *converge vers* l.

♣♣ Exercice 15 (Suites de Cauchy)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de Cauchy dans* $\mathbb{R}$.

1. *Montrer que* u *est bornée.*
2. *Montrer que si* u *admet une sous-suite qui converge, alors elle est convergente.*

♣♣ Exercice 16 (Équivalent d'une suite définie par récurrence)

On pose $u_0 = 1$ *et pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

1. *Montrer que la suite* u *tend vers 0.*
2. *En utilisant un développement limité de* $\sin^2$ *au voisinage de* 0, *montrer que*
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} = \frac{1}{3}.$$
3. *En déduire un équivalent de* u_n *(on pourra utiliser le lemme de Cesàro).*

♣♣ Exercice 17 (Série divergente et équivalence des sommes partielles)

1. *Montrer que pour tout* $k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{\sqrt{k+1}} \leq 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \leq \dfrac{1}{\sqrt{k}}$.
2. *En déduire que la somme partielle* S *de la série* $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ *est équivalente à la suite* $(2\sqrt{n})_{n\geq 1}$.
3. *Retrouver le résultat en montrant que* $\left(\dfrac{1}{\sqrt{k}}\right)_{k\geq 1} \sim \left(2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})\right)_{k\geq 0}$ *et en utilisant que les sommes partielles de séries divergentes dont les termes généraux positifs sont équivalents, sont équivalentes.*

♣♣ Exercice 18

Soit la suite u *définie par récurrence :* $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} + \dfrac{1}{n+1}$ *et* $u_0 = 0$.

1. *Montrer que la suite* u *converge vers* 0.
2. *Soit la suite* v *définie par* $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = 2^n u_n$. *Établir que pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k}$.
3. *Montrer l'équivalence* $\dfrac{2^k}{k} \sim \dfrac{2^{k+1}}{k} - \dfrac{2^k}{k-1}$.
4. *Préciser la nature de la série* $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{2^n}{n}$ *puis déduire de la question précédente que la suite* v *est équivalente à la suite* $\left(\dfrac{2^{n+1}}{n}\right)_{n\geq 1}$.
5. *En déduire que la suite* u *est équivalente à la suite* $\left(\dfrac{2}{n}\right)_{n\geq 1}$.
6. *Montrer directement cette dernière proposition.*

♣♣♣ **Exercice 19**

Montrer que $x \mapsto x^2$ *est continue sur* $\mathbb{R}$ *et que* $x \mapsto \sqrt{x}$ *est continue sur* $\mathbb{R}_+$.
Sont-elles uniformément continues ? Lipschitziennes ?

♣ **Exercice 20**

Montrer que l'application $x \mapsto \cos(1/x)$ *n'admet pas de limite en* 0.

♣♣ **Exercice 21**

1. *Déterminer la primitive* F *de la fonction* $f : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ *s'annulant en 0.*
2. *Faire un dessin et retrouver par un calcul élémentaire d'aires la valeur de* $F(\cos\theta)$

♣♣ **Exercice 22**

Montrer que $\displaystyle\int_{C_n} \mathrm{e}^{-(x_1+\ldots+x_n)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n!}$ *où* $C_n = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 < x_1 < \ldots < x_n\}$.

♣♣ **Exercice 23**

1. *Montrer que pour tout* $s \in \mathbb{R}$ *et tout* $x \in \mathbb{R}^*$,
$$\frac{1}{1+\left(s+\frac{x}{2}\right)^2}\frac{1}{1+\left(s-\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{x^2+4}\frac{1+\frac{2}{x}\left(s+\frac{x}{2}\right)}{1+\left(s+\frac{x}{2}\right)^2} + \frac{1}{x^2+4}\frac{1-\frac{2}{x}\left(s-\frac{x}{2}\right)}{1+\left(s-\frac{x}{2}\right)^2}$$
2. *En déduire le produit de convolution de la fonction* f *définie sur* $\mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ *par elle-même.*

♣ **Exercice 24**

Soit $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ *continue et positive. Si* $\displaystyle\int_a^b f = 0$ *alors* $f = 0$.

♣ **Exercice 25**

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continue en* 0 *telle que* $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(2x)$. *Montrer que* f *est constante.*

♣♣ **Exercice 26 (Continuité et borne sup)**

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue. On pose* $\Phi(x) = \sup\{f(t) :\ t \in [0,x]\}$.
Démontrer que Φ *est croissante et continue.*

♣♣ **Exercice 27 (Nombre de discontinuités d'une fonction monotone)**

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction* **croissante** *et bornée. Montrer que le nombre de points de discontinuité de* f *est dénombrable.*

♣♣ **Exercice 28 (Continuité et compacité)**

Soit f *une fonction réelle continue sur un compact* $K \subset \mathbb{R}$ *telle que* $f(x) > 0$ *pour tout* $x \in K$. *Montrer qu'il existe* $\alpha > 0$ *tel que* $f(x) \geq \alpha$ *pour tout* $x \in K$.

♣♣ **Exercice 29 (Continuité, continuité uniforme)**

Rappeler les définitions de la continuité et de la continuité uniforme, un énoncé du théorème de Heine.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continue, admettant des limites finies en* $+\infty$ *et en* $-\infty$.
Montrer que f *est bornée et uniformément continue.*

♣♣ **Exercice 30 (De l'addition à la multiplication)**

Soit f *un morphisme du groupe* $(\mathbb{R},+)$: $f(x+y) = f(x) + f(y)$ *pour tout* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

1. Déterminer $f_{|\mathbb{Q}}$.

2. Montrer que si f est monotone alors elle est linéaire.

3. Montrer que si f est continue alors elle est linéaire.

♣ Exercice 31 (Fonction réciproque)
Pour tout $x \in]1,+\infty[$ on pose $f(x) = x\ln x - x$. Montrer que f est une bijection de $]1,+\infty[$ sur $]-1,+\infty[$. On pose $g = f^{-1}$ l'application réciproque de f. Calculer $g(0)$ et $g'(0)$.

♣ Exercice 32
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable en 0. Pour $x \neq 0$, on pose $\varphi(x) := \dfrac{f(4x) + f(5x) - 2f(3x)}{x}$.
Déterminer la limite de φ en 0.

♣ Exercice 33 (Courbe représentative et tangente)
Étudier la position du graphe de l'application $x \mapsto \ln(1 + x + x^2)$ par rapport à sa tangente en 0 et 1.

♣ Exercice 34 (Développements limités)
Préciser le DL à l'ordre n en 0 des fonctions suivantes :
1. $\dfrac{1}{2-x}$ **2.** $\dfrac{1}{(x+1)(x-2)}$.

♣ Exercice 35 (Asymptote)
Préciser l'asymptote en $+\infty$ de la fonction $x \mapsto \sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}$ et sa position par rapport au graphe.

♣ Exercice 36
Déterminer les limites en $a \in \mathbb{R}$ de

$$f(x) = \frac{\sin^2 x - \sin^2 a}{x^2 - a^2} \ ; \ g(x) = \frac{a\tan x - x\tan a}{x - a} \ ; \ h(x) = \frac{x^{3/2} - a^{3/2} + (x-a)^{3/2}}{\sqrt{x^2 - a^2} + a - x}.$$

♣ Exercice 37
Soit la fonction définie par $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.
Montrer que f admet un DL1 en 0, mais qu'elle n'est pas deux fois dérivable en 0.

♣ Exercice 38
On pose $f(x) = \sin(x^2)$. Calculer $f^{(14)}(0)$.

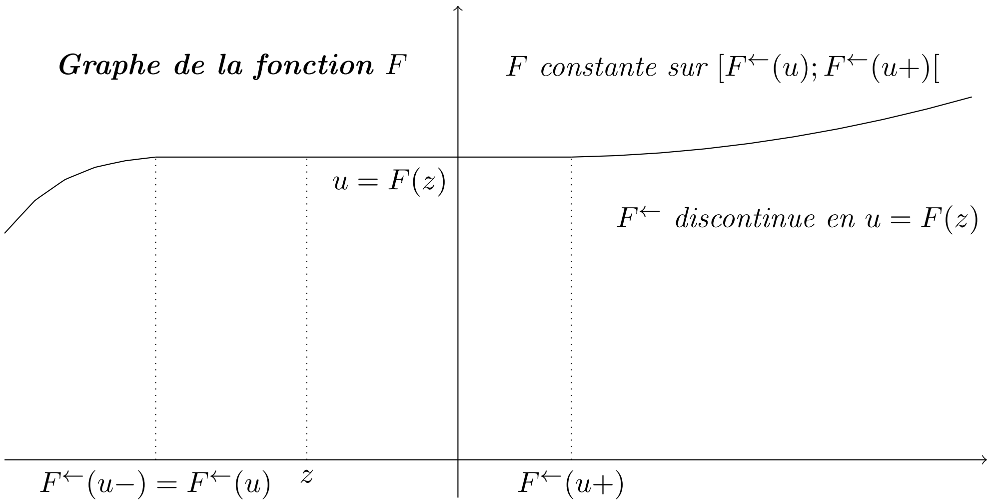
♣ Exercice 39 (Prolongement)
Soit $f(x) = (\cos x)^{\frac{1}{x}} = \exp(\frac{1}{x}\ln(\cos x))$ pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\setminus \{0\}$.

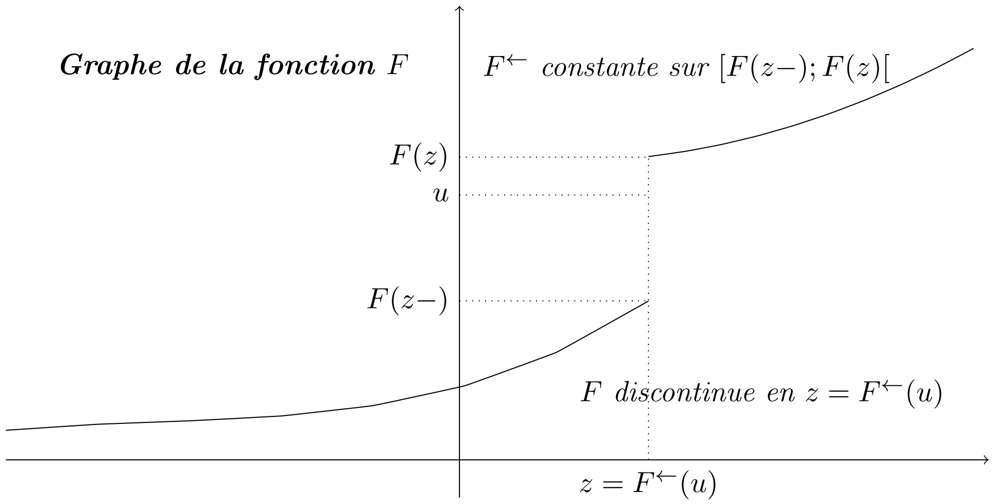
1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.

2. Déterminer un DL de f en 0 à l'ordre 2.

3. Étudier la dérivabilité du prolongement de f.

♣♣♣ Exercice 40 (Inverse généralisée)
Soit $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ une fonction croissante, continue à droite, de limite 0 en $-\infty$ et 1 en $+\infty$ (propriétés caractérisant une fonction de répartition (d'une loi) d'une variable aléatoire réelle).
On définit une inverse généralisée, définie pour tout $u \in]0,1[$, par $F^{\leftarrow}(u) = \inf\{x \in \mathbb{R}; F(x) \geq u\}$.





1. *Montrer que $F^{\leftarrow}(u)$ est bien définie pour tout $u\in]0;1[$, c'est-à-dire que la borne inférieure existe.*

Remarque. On peut étendre la définition de $F^{\leftarrow}$ en 0 et 1 :
$F^{\leftarrow}(0)=\begin{cases}-\infty \text{ si } \{x\in\mathbb{R};F(x)\geq 0\}=\mathbb{R}\\ \inf\{x\in\mathbb{R};F(x)\geq 0\} \text{ sinon}\end{cases}$ $\quad F^{\leftarrow}(1)=\begin{cases}+\infty \text{ si } \{x\in\mathbb{R};F(x)\geq 1\}=\emptyset\\ \inf\{x\in\mathbb{R};F(x)\geq 1\} \text{ sinon}\end{cases}$

2. *Montrer que $F^{\leftarrow}$ est croissante et vérifie :*

$$\forall x\in\mathbb{R},\ F^{\leftarrow}(F(x))\leq x,\quad \forall u\in]0,1[,\quad F(F^{\leftarrow}(u))\geq u.$$

3. *En déduire*

$$\forall u\in]0,1[,\ \forall x\in\mathbb{R},\quad F^{\leftarrow}(u)\leq x \iff u\leq F(x)$$

4. *Montrer que si F est strictement croissante (et donc bijective si on restreint son ensemble d'arrivée à son image $F(\mathbb{R})\supset]0;1[$), alors $F^{\leftarrow}=F^{-1}$.*

5. *Montrer que $F^{\leftarrow}$ est continue à gauche.*

♣♣ Exercice 41 (Racines de P et P')

1. *Soit $P\in\mathbb{R}[X]$ un polynôme scindé et à racines simples sur $\mathbb{R}$. Démontrer qu'il en est de même pour P'.*

2. *Soit P un polynôme réel scindé. Montrer que P' est scindé.*

3. *Montrer que le polynôme P_n défini par*

$$P_n = \left[\left(1 - X^2\right)^n\right]^{(n)}$$

est un polynôme de degré n dont les racines sont réelles, simples et appartiennent à $[-1, 1]$.

II Indications, rappels de définitions ou propositions

Exercice 1
L'ensemble des réels possède la propriété de la borne supérieure (resp. inférieure), i.e. toute partie non vide majorée (resp. minorée) possède une borne supérieure (resp. inférieure). La borne supérieure de la partie A de $\mathbb{R}$ est le plus petit des majorants de A.
$\alpha = \sup A$ si et seulement si
i) α est un majorant de A : $\forall a \in A, a \leq \alpha$;
ii) α est le plus petit (majorant de A) ou encore tout nombre strictement inférieur à α n'est pas un majorant de A : $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, \alpha - \varepsilon < x$
ii) $\forall \varepsilon > 0,\ \alpha - \varepsilon$ n'est pas un majorant de A.

Exercice 2
• Définition. Partie convexe.
Une partie C d'un e.v. réel est convexe si $\forall (x, y) \in C^2,\ \forall \lambda \in [0; 1],\ \lambda x + (1 - \lambda) y \in C$.

Exercice 3
Si $A \subset B \subset \mathbb{R}$ alors $\sup A \leq \sup B$, mais attention, $\inf A \geq \inf B$.
Définition. Fonction k-lipschitzienne. Soit I un intervalle réel. Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est k-lipschitzienne, où $k \in [0; +\infty[$, si $\forall (x, y) \in I^2,\ |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$.

Exercice 5
On pourra utiliser, voire démontrer, qu'une suite u dont les sous-suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite, est convergente (vers cette même limite).

Exercice 7
On peut montrer par récurrence que si g est une fonction croissante alors une suite v telle que $v_{n+1} = g(v_n)$ pour tout n, est monotone.
Donc son sens de variation dépend du signe de $v_1 - v_0$.

Exercice 8
Pour la question 4) ; on pourra distinguer dans l'ensemble $\mathcal{F}_n$ des suites de 0 et de 1 de longueur n ne comportant pas deux 1 consécutifs, celles se terminant par 0 et celles se terminant par 1 : $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_n^0 \cup \mathcal{F}_n^1$, où

$$\mathcal{F}_n = \{x \in \{0, 1\}^n\ ;\ \forall i \in [\![1, n-1]\!],\ x_i x_{i+1} = 0\}$$

$$\mathcal{F}_n^0 = \{x \in \mathcal{F}_n\ ;\ x_n = 0\} \text{ et } \mathcal{F}_n^1 = \{x \in \mathcal{F}_n\ ;\ x_n = 1\}.$$

Exercice 9
Pour une comparaison série/intégrale, on pourra systématiquement faire un dessin.

Exercice 10

Pour tout entier strictement positif n, on note $H_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}$, le n^e nombre harmonique. On pourra utiliser $\ln(1-x) \leq -x$ si $x < 1$ pour démontrer la décroissance de la suite u et la croissance de v.
Deux suites sont adjacentes si l'une est croissante, l'autre décroissante et que leur différence converge vers 0.
Proposition. Deux suites adjacentes convergent vers une même limite finie.

Exercice 11
On pourra considérer les parties entière et fractionnaire du nombre réel $n!e$.

Exercice 12
On peut commencer par établir $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leq v_n$.

Exercice 13
On pourra exprimer $\bar{u}_{n+1} - \bar{u}_n$ en fonction d'une somme de différences de termes de la suite u, différences dont on considérera le signe.

Exercice 14
On peut supposer $l = 0$. On fixe $\varepsilon > 0$ et on découpe la somme $u_1 + \ldots + u_n$ en deux parties.
Exercice 15
Définition. Une suite (réelle) v est de Cauchy si $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}^*,\ \forall (p,q) \in [\![N; +\infty[\![^2,\ |v_p - v_q| \leq \varepsilon$.

Exercice 16
Définitions de l'équivalence.
Deux suites u et v sont équivalentes si elles ne s'annulent pas à partir d'un certain rang et que $\lim \frac{u}{v} = 1$.
Deux suites u et v sont équivalentes si $u - v = o(v)$, c'est-à-dire s'il existe une suite ϵ tendant vers 0 telle que $u - v = v\,\epsilon$.

Exercice 17
On peut penser à l'intégrale, ou non.

Exercice 18
Soient deux suites u et v réelles équivalentes, à termes positifs à partir d'un certain rang. Si l'une des séries $\sum u_n$ ou $\sum v_n$ diverge alors les deux divergent et les suites de sommes partielles sont équivalentes.

Exercice 19
Lipschitzienne $\Longrightarrow$ uniformément continue $\Longrightarrow$ continue.

Exercice 21
Une IPP (intégration par parties) ou un changement de variables dans l'intégrale permet de trouver $F(x) = \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}$; plusieurs expressions de F sont possibles.
Exercice 22
Par récurrence avec un changement de variables.

Exercice 23
Le produit de convolution de deux fonctions f et g intégrables sur $\mathbb{R}$ ($\int_{\mathbb{R}} |f(t)|\,\mathrm{d}t < +\infty$) est la fonction $f * g$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t.$$

Par ailleurs, on rappelle que la dérivée de la fonction arctangente est $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$.
Attention à la rédaction : l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{]-\infty,+\infty[} \frac{s}{1+s^2}\,\mathrm{d}s$ est divergente, mais l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{]-\infty,+\infty[} \frac{s}{1+\left(s+\frac{x}{2}\right)^2} - \frac{s}{1+\left(s-\frac{x}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}s$ est, elle, convergente.
On trouve $f*f(x) = \dfrac{2\pi}{4+x^2}$.
Exercice 24
On pourra montrer la contraposée, si $f>0$ alors $\displaystyle\int_a^b f > 0$, en minorant f par une fonction en escalier strictment positive.

Exercice 26
Pour la continuité, on pourrait distinguer deux cas suivant que $\Phi(x) = f(x)$ ou non.

Exercice 27
On pourra par exemple majorer le nombre de sauts de hauteur supérieure à $1/n$.

Exercice 28
Définition 1. Un espace métrique E est compact si tout recouvrement de E par des ouverts contient un recouvrement fini.
Définition 2. Une partie A (d'un ensemble) est dite compacte si toute suite d'éléments de A possède une valeur d'adhérence dans A (de toute suite d'éléments de A, on peut extraire une sous-suite convergente).
Souvent quand intervient la compacité, une démonstration par l'absurde est utile.

Exercice 29
On pourra utiliser les théorèmes suivants :
Théorème de Heine. Une fonction continue sur un intervalle fermé et borné est uniformément continue.
Théorème des bornes atteintes. Une fonction continue sur un intervalle fermé et borné est bornée et atteint ses bornes.

Exercice 31
On pourrait dériver l'identité $g \circ f(x) = x$.

Exercice 32
Pour éviter d'utiliser un DL, on pourrait utiliser $f'(0) = \displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(\alpha x) - f(0)}{\alpha x}$ où $\alpha \in \mathbb{R}^*$.
Exercice 33
Convexité et droite tangente ?

Exercice 34
Les deux DL se ramènent au DL classique $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + \ldots + x^n + o(x^n)$.
Exercice 35
$y = x + \frac{1}{2}$.

Exercice 36
On pourrait éviter d'utiliser les DL en écrivant des rapports d'accroissements, comme $\dfrac{\sin x - \sin a}{x-a}$ ou $\dfrac{\tan x - \tan a}{x-a}$, dont les limites en a sont les dérivées (en a).
$f(x) \to \frac{\sin a \cos a}{a}$.

$g(x) \to -\tan a + \frac{a}{\cos^2 a}$.

Exercice 38

On pourrait utiliser les liens entre DL en 0 et dérivées en 0.

Exercice 39

Pour montrer la continuité à gauche en u, on pourrait considérer une suite croissante convergeant vers le point u.

Exercice 40

On pourrait utiliser la continuité à droite de F pour montrer l'inégalité $F(F^{\leftarrow}(u)) \geq u$.

Exercice 41

Théorème de Rolle. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue ; on suppose f dérivable sur $]a, b[$ et $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.
Proposition. Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non nul.
Une racine d'ordre r de P est racine d'ordre $r - 1$ de P'.