EAI MAT 2 R

SESSION 2025

AGRÉGATION

Concours interne et CAER

Section

MATHÉMATIQUES

Deuxième épreuve

Durée : 6 heures

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout matériel électronique (y compris la calculatrice) est rigoureusement interdit.

Il appartient au candidat de vérifier qu'il a reçu un sujet complet et correspondant à l'épreuve à laquelle il se présente.

Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous devez le signaler très lisiblement sur votre copie, en proposer la correction et poursuivre l'épreuve en conséquence. De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, vous devez la (ou les) mentionner explicitement.

NB : Conformément au principe d'anonymat, votre copie ne doit comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé consiste notamment en la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de la signer ou de l'identifier.
Le fait de rendre une copie blanche est éliminatoire.

A

Tournez la page S.V.P.

INFORMATION AUX CANDIDATS

Vous trouverez ci-après les codes nécessaires vous permettant de compléter les rubriques figurant en en-tête de votre copie. Ces codes doivent être reportés sur chacune des copies que vous remettrez.

AGRÉGATION INTERNE
MATHÉMATIQUES

► Concours interne de l'Agrégation de l'enseignement public :

Concours	Section/option	Épreuve	Matière
EAI	1300A	102	0530

► Concours interne du CAER / Agrégation de l'enseignement privé :

Concours	Section/option	Épreuve	Matière
EAH	1300A	102	0530

IMPRIMERIE NATIONALE – 25 0373 – D'après documents fournis

Notations et rappels

Dans tout le sujet, n est un entier naturel non nul. On désigne par $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, par $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels non nuls, par $\mathbb{R}$ le corps des nombres réels, par $\mathbb{R}_+$ l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls, par $\mathbb{R}_+^*$ l'ensemble des nombres réels strictement positifs.

On désigne par $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices carrées de taille n à coefficients réels et par $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ son sous $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices symétriques. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $A^\top$ sa transposée et $\mathrm{Tr}(A)$ sa trace ; on note $\mathrm{Sp}(A)$ le spectre de A, qui est l'ensemble de toutes ses valeurs propres.

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est muni de son produit scalaire usuel, noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$. La norme euclidienne associée est notée $\|\cdot\|$. La base canonique, orthonormée pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, est notée $\mathcal{F}$.
Sil $x \in \mathbb{R}^n$, on note $x^\top$ son transposé.

On note $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques positives, i.e. l'ensemble des matrices $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \langle Ax, x \rangle \geqslant 0.$$

On remarquera que une matrice $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est symétrique positive si et seulement si

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad x^\top A x \geqslant 0.$$

On note $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives, i.e. l'ensemble des matrices $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad \langle Ax, x \rangle > 0.$$

On remarquera que une matrice $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est symétrique positive si et seulement si

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad x^\top A x > 0.$$

La matrice d'un endomorphisme u d'un espace vectoriel E de dimension finie dans une base $\mathcal{B}$ est notée $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$.

Soit E un espace vectoriel normé. Dans la suite on considère E muni de la topologie induite par la norme. Pour toute partie A de E, on note $\mathring{A}$ l'intérieur de A, i.e. le plus grand ouvert (au sens de l'inclusion) inclus dans A, $\overline{A}$ l'adhérence de A, i.e. le plus petit fermé contenant A. Le bord ∂A d'une partie $A \subset \mathbb{R}^n$ est défini par $\partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A}$; c'est l'adhérence de A privée de l'intérieur de A. Soient A et B deux parties de E telles que $A \subset B$. A est dense dans B si $\overline{A} = B$. Soit A une partie de E : A est une partie compacte (un compact) de E si de toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A on peut extraire une suite convergeant dans A.

Si $x \in \mathbb{R}^n$ et $r \in \mathbb{R}_+$, la boule ouverte, respectivement fermée, de centre x et de rayon r est notée $B(x, r)$, respectivement $\overline{B}(x, r)$. La boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$ pour la norme $\|\cdot\|$ est notée B_2^n. La sphère unité est notée S^{n-1}.

Soit E un espace vectoriel et soit A une partie de E. A est une partie convexe si, pour tout u et pour tout v éléments de A, le segment $[u, v] = \{x \in E, \exists t \in [0, 1]$ tel que $x = (1-t)u + tv\}$ est inclus dans A.

L'espérance d'une variable aléatoire X définie sur un univers probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ *est notée, sous réserve d'existence,* $\mathrm{E}(\mathrm{X})$.

Définition 1. *Une variable aléatoire X définie sur un univers probabilisé* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ *suit une loi de Rademacher si* $X(\Omega) = \{-1, 1\}$ *et si* $\mathrm{P}(X = 1) = \mathrm{P}(X = -1) = \dfrac{1}{2}$.

Dans tout le sujet, on pourra utiliser librement l'inégalité suivante :

Théorème 2. *(inégalité arithmético-géométrique). Soit* $m \in \mathbb{N}^*$. *Soit* $(x_1, \ldots, x_m) \in (\mathbb{R}_+)^m$. *Alors*

$$\left(\prod_{i=1}^{m} x_i\right)^{1/m} \leqslant \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} x_i,$$

avec égalité si, et seulement si, $x_1 = \cdots = x_m$.

Le sujet est composé d'un vrai/faux, d'un exercice préliminaire et d'un problème en huit parties. Les résultats de l'exercice préliminaire peuvent être utilisés durant le problème.

Vrai/faux

Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses. On justifiera soigneusement la réponse.

1. Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, la fonction $x \longmapsto \int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée seconde est f.
2. L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\mathrm{d}t$ est convergente et est nulle.
3. Il existe une probabilité P sur $\mathbb{N}^*$ telle que :
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{P}(\{k\}) = \frac{1}{k(k+1)}.$$
4. Si X et Y sont deux variables aléatoires définies sur un univers probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ suivant toutes les deux des lois de Rademacher. Alors la variable aléatoire XY suit une loi de Rademacher.
5. Soit E un espace vectoriel normé. Soient A et B deux parties de E telles que $A \subset B$. On suppose que A est dense dans B et que B est dense dans E. Alors A est dense dans E.
6. La réunion de deux parties convexes de $\mathbb{R}^n$ est une partie convexe de $\mathbb{R}^n$.
7. La seule partie convexe dense de $\mathbb{R}$ est $\mathbb{R}$.

Exercice préliminaire

8. Soit Φ l'application définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ par $\Phi(A,B) = \mathrm{Tr}\left(AB^\top\right)$. Montrer que Φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Dans la suite de l'exercice, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est muni de la norme associée au produit scalaire Φ. On considère $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ comme un espace topologique avec la topologie définie par cette norme. Dans la suite, toute partie A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est munie de la topologie induite de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (O est un ouvert de A si, et seulement si, il existe un ouvert U de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $O = U \cap A$).

9. (a) Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ si, et seulement si, $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+$.
   (b) Énoncer et démontrer une caractérisation similaire des matrices de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ à l'aide de leurs spectres.
10. Soient A une matrice de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible. Montrer que $B^\top AB \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
11. Montrer que $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ sont convexes.
12. Montrer que $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
13. Montrer que $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
14. Soit $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une unique matrice $R \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $R^2 = S$. On notera $R = S^{1/2}$.
15. Soit $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Justifier que $S^{1/2}$ est inversible, puis que $(S^{1/2})^{-1} = (S^{-1})^{1/2}$. On notera plus simplement $S^{-1/2}$ la matrice $(S^{1/2})^{-1}$.

Première partie : jauge d'un corps convexe symétrique

Définition 3. *Soit C une partie de $\mathbb{R}^n$. On dit que C est un* corps convexe *si C est compact, convexe et si 0 appartient à l'intérieur de C, c'est-à-dire $0 \in \mathring{C}$. On dit que C est symétrique si*
$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad (x \in C) \iff (-x \in C).$$

On notera que cette notion de « corps convexe » n'est aucunement liée avec la notion de corps en algèbre.

16. Montrer que si C est la boule unité d'une norme N définie sur $\mathbb{R}^n$, alors C est un corps convexe symétrique.

Le but de cette partie est de caractériser les corps convexes symétriques de $\mathbb{R}^n$ comme des boules unités d'une certaine norme sur $\mathbb{R}^n$. Pour cela, on va introduire la jauge associée à un corps convexe symétrique :

Définition 4. *Soit C un corps convexe symétrique. On définit sur $\mathbb{R}^n$ l'application J, appelée jauge de C, par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad J(x) = \inf \left\{ \lambda \in \mathbb{R}_+^*,\ \frac{1}{\lambda} x \in C \right\}.$$

On se donne maintenant un corps convexe symétrique C.

17. Justifier que J, la jauge de C, est bien définie et que $J(0) = 0$.
18. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Montrer que $J(x) = 0$ si, et seulement si, $x = 0$.
19. (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, pour tout $\mu \in \mathbb{R}_+^*$, $J(\mu x) = \mu J(x)$.
    (b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, pour tout $\mu \in \mathbb{R}$, $J(\mu x) = |\mu| J(x)$.
20. Montrer que $C = \{x \in \mathbb{R}^n,\ J(x) \leqslant 1\}$.
21. Soient x et y deux éléments de $\mathbb{R}^n$. Soit ε un réel strictement positif. On note :

$$x' = \frac{x}{J(x) + \varepsilon} \qquad \text{et} \qquad y' = \frac{y}{J(y) + \varepsilon}.$$

    Soit $\alpha = \dfrac{J(x) + \varepsilon}{J(x) + J(y) + 2\varepsilon}$ et $z = \alpha x' + (1 - \alpha) y'$.
    (a) Montrer que x' et y' appartiennent à C. En déduire que $z \in C$.
    (b) En déduire que $J(x + y) \leqslant J(x) + J(y)$.
22. (a) Déduire de ce qui précède que J est une norme.
    (b) Quelle est la boule unité de cette norme J ?
    (c) En déduire que $\partial C = \{x \in \mathbb{R}^n,\ J(x) = 1\}$.
23. Montrer que si N_1 et N_2 sont deux normes de $\mathbb{R}^n$ ayant la même boule unité, alors $N_1 = N_2$.

Deuxième partie : généralités sur les ensembles convexes

Soit E un espace euclidien, dont on note $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ le produit scalaire. On note $\|\cdot\|_E$ la norme associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$.
Dans toute cette partie, on désigne par C un convexe compact de E.

24. Soit $a \in E$.
    (a) Montrer qu'il existe $x_a \in C$ tel que $\|a - x_a\|_E = \inf\limits_{x \in C} \|a - x\|_E$. Justifier que si $a \notin C$, alors $\|a - x_a\|_E > 0$.
    (b) Soient $x_0, x_1 \in C$ tels que $\|a - x_0\|_E = \|a - x_1\|_E = \inf\limits_{x \in C} \|a - x\|_E$. Montrer que $x_0 = x_1$.
    Indication : On pourra raisonner par l'absurde et considérer $\dfrac{x_0 + x_1}{2}$.

Ainsi, pour tout $a \in E$, il existe un unique $x_a \in C$ tel que $\|a - x_a\|_E = \inf\limits_{x \in C} \|a - x\|_E$. On définit alors l'application $\pi_C : E \to C$ par la relation $\pi_C(a) = x_a$.

25. Soit $a \in E$.
    (a) Soit l'application $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \langle a - \pi_C(a), x \rangle_E$. Soit l'ensemble $H = \{x \in E,\ f(x) = f(a)\}$. Justifier que H est un sous-espace affine de E. Quelles sont les dimensions possibles pour H ?

(b) Vérifier que $f(\pi_C(a)) \leqslant f(a)$ et que cette inégalité est stricte si $a \notin C$.

(c) Montrer que pour tout $x \in C$, $f(x) \leqslant f(\pi_C(a))$.

Indication : On pourra considérer l'application $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ qui à t associe $\|a - ((1-t)\pi_C(a) + tx)\|_E^2$.

(d) Soit $b \in C$ tel que pour tout $x \in C$, $\langle a-b, x-b\rangle_E \leqslant 0$. Pour tout $x \in C$, montrer que $\|a-x\|_E \geqslant \|a-b\|_E$ et en déduire que $b = \pi_C(a)$.

Ainsi, on a montré que pour tout $a \in E$, $\pi_C(a)$ est l'unique point b de C tel que pour tout $x \in C$, $\langle a-b, x-b\rangle_E \leqslant 0$.

26. (a) Soient $a, a' \in E$. Montrer que $\|\pi_C(a') - \pi_C(a)\|_E^2 \leqslant \langle a'-a, \pi_C(a') - \pi_C(a)\rangle_E$.

(b) En déduire que π_C est 1-lipschitzienne.

27. Soit $a \in \partial C$. Soit $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $E \backslash C$ qui converge vers a.

(a) Montrer que la suite $\left(\dfrac{a_p - \pi_C(a_p)}{\|a_p - \pi_C(a_p)\|_E}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite de E et qu'elle possède une sous-suite convergeant vers un élément y de E.

(b) Montrer que y est non nul et que pour tout $x \in C$, $\langle y, x-a\rangle_E \leqslant 0$.

Troisième partie : sur les ellipsoïdes

Définition 5. *Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. On appelle* ellipsoïde associé à A *la partie $\mathcal{E}_A$ définie par*

$$\mathcal{E}_A = \{x \in \mathbb{R}^n,\ \langle Ax, x\rangle \leqslant 1\}.$$

Une partie $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^n$ est un ellipsoïde *s'il existe $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $\mathcal{E} = \mathcal{E}_A$.*

28. Soit $r > 0$. Montrer que $\overline{B}(0,r)$ (la boule fermée de centre 0 et de rayon r) pour la norme $\|\cdot\|$ est un ellipsoïde de $\mathbb{R}^n$ et préciser une matrice $A_r \in \mathcal{S}_n^{++}$ telle que $\overline{B}(0,r) = \mathcal{E}_{A_r}$.

29. Soit $\mathcal{E}_A$ l'ellipsoïde associé à une matrice $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

(a) Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible. Montrer que $B^{-1}\mathcal{E}_A = \{B^{-1}x,\ x \in \mathcal{E}_A\}$ est un ellipsoïde.

(b) Montrer que $\mathcal{E}_A = A^{-1/2}B_2^n$.

(c) En déduire que $\mathcal{E}_A$ est un corps convexe symétrique.

(d) Quelle est la jauge J_A associée à $\mathcal{E}_A$?

(e) Montrer que cette jauge J_A est une norme euclidienne. On donnera la matrice du produit scalaire associé à cette norme dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

30. Soient $\mathcal{E}_A$ et $\mathcal{E}_B$ deux ellipsoïdes de $\mathbb{R}^n$, respectivement associés à A et $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathcal{E}_A = \mathcal{E}_B$ si et seulement si $A = B$.

31. Soient $\mathcal{E}_A$ et $\mathcal{E}_B$ deux ellipsoïdes de $\mathbb{R}^n$, respectivement associés à A et $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathcal{E}_A \subseteq \mathcal{E}_B$ si et seulement si pour tout $x \in E$, $\langle Bx, x\rangle \leqslant \langle Ax, x\rangle$.

Définition 6. *Soit $\mathcal{E}$ un ellipsoïde. On a montré qu'il existe une unique matrice $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $\mathcal{E} = \mathcal{E}_A$. On définit alors* la mesure de $\mathcal{E}$, *noté $\mu(\mathcal{E})$, par*

$$\mu(\mathcal{E}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

32. Dans cette question uniquement, on suppose $n = 3$. Soit r un réel strictement positif. Donner une relation entre $\mu(\overline{B}(0,r))$ et le volume de $\overline{B}(0,r)$.

33. Soit $\mathcal{E}$ un ellipsoïde de $\mathbb{R}^n$. Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible. Préciser la mesure de $B^{-1}\mathcal{E}$ en fonction de la mesure de $\mathcal{E}$.

34. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ et soient $a_1, \dots, a_n$ des réels strictement positifs. Soit $\mathcal{E} = \left\{ x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in \mathbb{R}^n,\ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2 \leqslant 1 \right\}$. Montrer que $\mathcal{E}$ est un ellipsoïde de $\mathbb{R}^n$ et calculer sa mesure.
35. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
    (a) Justifier que A admet n valeurs propres réelles (comptées avec leurs ordres de multiplicité) $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n$ et qu'il existe une base orthonormée $(f_1, \dots, f_n)$ de $\mathbb{R}^n$ telle que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $Af_i = \lambda_i f_i$.
    (b) Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Montrer que l'on a
$$\lambda_k = \sup_{V \in G_k} \min_{\substack{x \in V \\ \|x\|=1}} \langle Ax, x \rangle,$$
    où G_k désigne l'ensemble des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ de dimension k.
    Indication : Si $V \in G_k$, on pourra considérer l'intersection de V avec le sous-espace engendré par $f_k, \dots, f_n$.
36. Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ sont deux ellipsoïdes de $\mathbb{R}^n$ tels que $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}'$. Montrer que $\mu(\mathcal{E}) \leqslant \mu(\mathcal{E}')$.

Quatrième partie : existence d'un ellipsoïde de mesure maximale

Soit C un corps convexe symétrique de $\mathbb{R}^n$.

37. Justifier que C est borné et qu'il existe un ellipsoïde $\mathcal{E}'$ tel que $C \subset \mathcal{E}'$.
38. Soit $\mathcal{A} = \{\mu(\mathcal{E}),\ \mathcal{E} \text{ ellipsoïde tel que } \mathcal{E} \subset C\}$. Montrer que $\mathcal{A}$ est non vide et majoré. En déduire qu'il admet une borne supérieure notée α.
39. Justifier qu'il existe une suite $(A_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que, en notant $\mathcal{E}_p$ l'ellipsoïde associé à A_p, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{E}_p \subset C$ et $\lim_{p\to+\infty} \mu(\mathcal{E}_p) = \alpha$.
40. Pour $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on pose $N(A) = \sup_{\|x\|=1} |\langle Ax, x \rangle|$. Montrer que N est une norme sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
41. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On introduit $0 < \lambda_1(p) \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n(p)$ les valeurs propres de A_p. Montrer que la suite $(\lambda_1(p))_{p\in\mathbb{N}^*}$ est minorée par un réel strictement positif, puis que la suite $(\lambda_n(p))_{p\in\mathbb{N}^*}$ est majorée.
42. En déduire que la suite $(A_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ est bornée pour la norme N.
43. En déduire qu'il existe $\varphi : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$ strictement croissante et $A \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$ telles que $\lim_{p\to+\infty} A_{\varphi(p)} = A$.
44. Montrer que $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
45. En déduire qu'il existe un ellipsoïde $\mathcal{E}$ de mesure maximale inclus dans C.

Cinquième partie : unicité de l'ellipsoïde de mesure maximale

46. Montrer que la fonction $f : x \longmapsto \ln(1 + e^x)$ est strictement convexe sur $\mathbb{R}$.
47. Montrer que pour tout $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $\det^{1/n}(I_n + A) \geqslant 1 + \det^{1/n}(A)$ avec égalité si, et seulement s'il existe $\lambda > 0$ tel que $A = \lambda I_n$.
48. En déduire que pour tous $A, B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $\det^{1/n}(A + B) \geqslant \det^{1/n}(A) + \det^{1/n}(B)$ avec égalité si, et seulement s'il existe $\lambda > 0$ tel que $B = \lambda A$. *Indication* : on pourra utiliser la matrice $A^{1/2}$ introduite dans l'exercice préliminaire.
49. En déduire que si A et B appartiennent à $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $\det\left(\dfrac{A+B}{2}\right) \geqslant \sqrt{\det(A)\det(B)}$. Caractériser les cas d'égalité.

50. Montrer l'unicité de l'ellipsoïde de mesure maximale.

Sixième partie : le théorème de John, sens indirect

Définition 7. *Soit $u \in \mathbb{R}^n$. L'application linéaire $\psi_u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est définie par :*

$$\forall v \in \mathbb{R}^n,\ \psi_u(v) = \langle u, v \rangle u.$$

Le but des parties 6 et 7 est d'établir le théorème suivant, dû à Fritz John.

Théorème 8. *Soit C un corps convexe symétrique de $\mathbb{R}^n$. B_2^n est l'ellipsoïde de mesure maximale de C si et seulement si, $B_2^n \subset C$ et s'il existe des points $u_1, \ldots, u_m \in S^{n-1} \cap \partial C$ et des réels $c_1, \ldots, c_m > 0$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} c_i \psi_{u_i} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$.*

51. Soit $u \in \mathbb{R}^n$, non nul.
   (a) Déterminer le noyau et l'image de ψ_u, ainsi que leurs dimensions.
   (b) Montrer que ψ_u est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres.
   (c) Déterminer la trace de ψ_u.
   (d) Déterminer la matrice de ψ_u dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Dans les questions numérotées de 52 à 53h, C est un corps convexe symétrique contenant B_2^n. On suppose de plus qu'il existe des points $u_1, \ldots, u_m$ appartenant à $\partial C \cap S^{n-1}$ et des réels strictement positifs $c_1, \ldots, c_m$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} c_i \psi_{u_i} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$.

52. Soit $v \in \partial C \cap S^{n-1}$. D'après la question 27, il existe $y \in \mathbb{R}^n$, non nul, tel que pour tout $x \in C$, $\langle y, x - v \rangle \leqslant 0$.
   (a) Montrer que l'ensemble $H = \{x \in \mathbb{R}^n,\ \langle y, x - v \rangle = 0\}$ est l'hyperplan tangent à S^{n-1} en v.
   (b) En déduire que pour tout $x \in C$, $\langle v, x \rangle \leqslant 1$.

53. Soit $\mathcal{E}$ l'ellipsoïde inclus dans C de mesure maximale.
   (a) Montrer qu'il existe une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ et des nombres réels $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ strictement positifs tels que

$$\mathcal{E} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n,\ \sum_{j=1}^{n} \frac{\langle x, e_j \rangle^2}{\alpha_j^2} \leqslant 1 \right\}.$$

   Quitte à appliquer une isométrie, on suppose maintenant que $(e_1, \ldots, e_n)$ est la base canonique $\mathcal{F}$ de $\mathbb{R}^n$. Alors

$$\mathcal{E} = \left\{ x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j^2}{\alpha_j^2} \leqslant 1 \right\}.$$

   (b) Exprimer la mesure de $\mathcal{E}$ en fonction de $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.
   (c) Soit $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \partial C \cap S^{n-1}$. Montrer que $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j^2 \leqslant 1$. *Indication* : On pourra utiliser le vecteur $w = (\alpha_1 v_1, \ldots, \alpha_n v_n)$.
   (d) Calculer $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} c_i$.

 Tournez la page S.V.P.

(e) Montrer que si $x \in \mathbb{R}^n$, alors $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{m} c_i \langle x, u_i \rangle^2$.

(f) Pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$, on pose $u_i = (u_{i,1}, \ldots, u_{i,n})$. Montrer que

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_i \alpha_j u_{i,j}^2 \leqslant n.$$

(g) En déduire que

$$\left(\prod_{j=1}^{n} \alpha_j \right)^{1/n} \leqslant \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \leqslant 1.$$

(h) Conclure.

Septième partie : le théorème de John, sens direct

Soit C un corps convexe symétrique de $\mathbb{R}^n$ et on suppose que son ellipsoïde de mesure maximale est B_2^n. On note X l'ensemble des points de contact entre C et S^{n-1}, i.e. $X = S^{n-1} \cap \partial C$.

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire Φ défini dans l'exercice préliminaire.

54. Montrer que X est un compact non vide.

On pose $T = \{\mathrm{Mat}_{\mathcal{F}}(\psi_u),\ u \in X\} \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où, rappelons-le, $\mathcal{F}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On admet dans toute la suite que $\mathrm{conv}(T)$ *(le plus petit convexe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui contient T) est un compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (théorème de Carathéodory). On souhaite donc montrer que $\frac{1}{n}\mathrm{I}_n \in \mathrm{conv}(T)$. Pour cela, on raisonne par l'absurde et on suppose que $\frac{1}{n}\mathrm{I}_n \notin \mathrm{conv}(T)$.*

55. Montrer que $\mathrm{conv}(T)$ est inclus dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
56. Montrer que pour toute matrice $M \in \mathrm{conv}(T)$, la trace de M vaut 1.
57. (a) Montrer qu'il existe une forme linéaire f de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall M \in \mathrm{conv}(T), \quad f(M) > f\left(\frac{1}{n}\mathrm{I}_n\right).$$

(b) Montrer qu'il existe $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ unique telle que

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad f(M) = \mathrm{Tr}(HM).$$

Quitte à changer f on peut supposer aussi que $H \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et que H est de trace nulle (admis). On conserve cette hypothèse dans toute la suite.

58. En déduire que pour tout $u \in \partial C \cap S^{n-1}$, $\langle Hu, u \rangle > 0$.
59. Pour tout $\delta > 0$, on pose $\mathcal{E}_\delta = \{x \in \mathbb{R}^n,\ \langle (\mathrm{I}_n + \delta H)\, x, x \rangle \leqslant 1\}$. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $\delta \in]0, \alpha[$, $\mathcal{E}_\delta$ est un ellipsoïde de $\mathbb{R}^n$ et calculer sa mesure.
60. (a) Montrer qu'il existe $\eta \in]0, \alpha[$ tel que pour tout $\delta \in]0, \eta[$, pour tout $u \in \partial C$,

$$\langle (\mathrm{I}_n + \delta H)\, u, u \rangle > 1.$$

Indication : On pourra utiliser le fait suivant, après l'avoir justifié : pour toute réunion $\partial C = \bigcup_{i \in I} (U_i \cap \partial C)$ avec pour tout $i \in I$, U_i ouvert de $\mathbb{R}^n$, il existe $J \subset I$ fini tel que $\partial C = \bigcup_{i \in J} (U_i \cap \partial C)$.

(b) En déduire que pour tout $\delta \in]0, \eta[$, $\mathcal{E}_\delta \subset C$.

61. Conclure.

Huitième partie : une conséquence du théorème de John

Soit C un corps convexe symétrique de $\mathbb{R}^n$. On note $\mathcal{E}$ l'ellipsoïde de mesure maximale inclus dans C.

62. On suppose uniquement dans cette question que $\mathcal{E} = B_2^n$. Montrer que $B_2^n \subset C \subset \sqrt{n} B_2^n$.
63. En déduire que $\mathcal{E} \subset C \subset \sqrt{n}\mathcal{E}$.

Dans les questions numérotées de 64 à 66, on se propose de montrer que la constante $\sqrt{n}$ est optimale.

On pose $C = [-1, 1]^n$.

64. Vérifier que C est un corps convexe symétrique.

Soit $\mathcal{E}$ l'ellipsoïde inclus dans C de mesure maximale. On note $J_\mathcal{E}$ la jauge de $\mathcal{E}$. On rappelle qu'il s'agit d'une norme euclidienne.

65. Soit $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur un univers probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$, qui suivent une loi de Rademacher. Montrer que :

$$\mathrm{E}\left(\|(X_1, \ldots, X_n)\|_{\mathcal{E}}^2\right) \geqslant n.$$

66. Conclure.

FIN DU SUJET