La géométrie dans l’enseignement des mathématiques

Damien Mégy
Nancy, 15 janvier 2020

Page de pub : TFJM^2

https://tfjm.org

1. Une commande disproportionnée

Donald vient de construire une nouvelle maison. Il ne lui reste plus qu'à ajouter des cloisons à l'intérieur. Sa maison est un rectangle de taille $a \times b$, avec a et b des entiers $\geqslant 2$, que l'on décompose en cases carrées de côté 1. Donald est très capricieux. Dans sa maison, il ne veut avoir que des couloirs : chaque case qui n'est pas sur un bord du bâtiment (case *interne*) doit avoir exactement deux cases voisines. Pour une case qui est sur un bord (case *externe*), elle peut avoir soit deux cases voisines, soit une seule. Dans ce dernier cas, on dit qu'il s'agit d'une *sortie* (représentée en bleu sur la figure 1).

Malheureusement, Donald a commis une erreur lors de la commande. Emporté par son enthousiasme, il a commandé des murs trop longs ! Il n'a à sa disposition que des *bimurs*, c'est-à-dire des cloisons de longueur 2. Deux bimurs peuvent s'intersecter en un point (pour former une croix), mais ils ne peuvent pas se superposer. Donald cherche à savoir quels sont les plans possibles pour sa nouvelle maison avec ces contraintes.

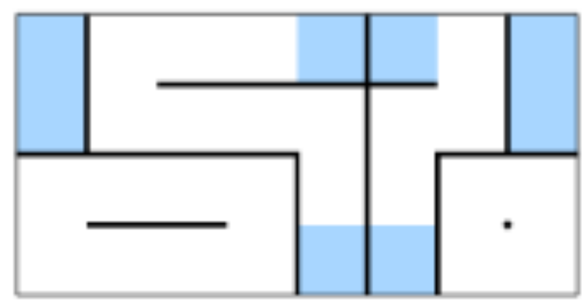


Figure 1. Exemple de plan 8×4 valide.

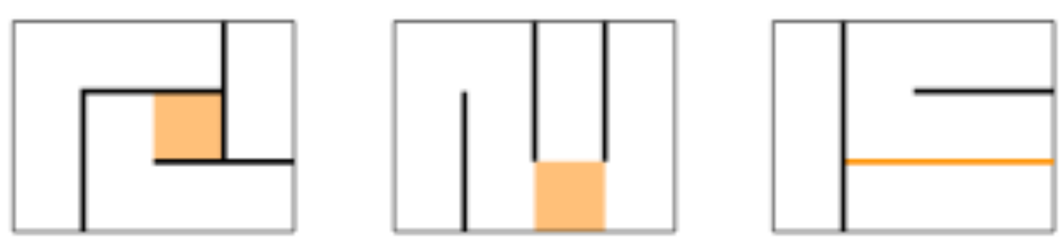
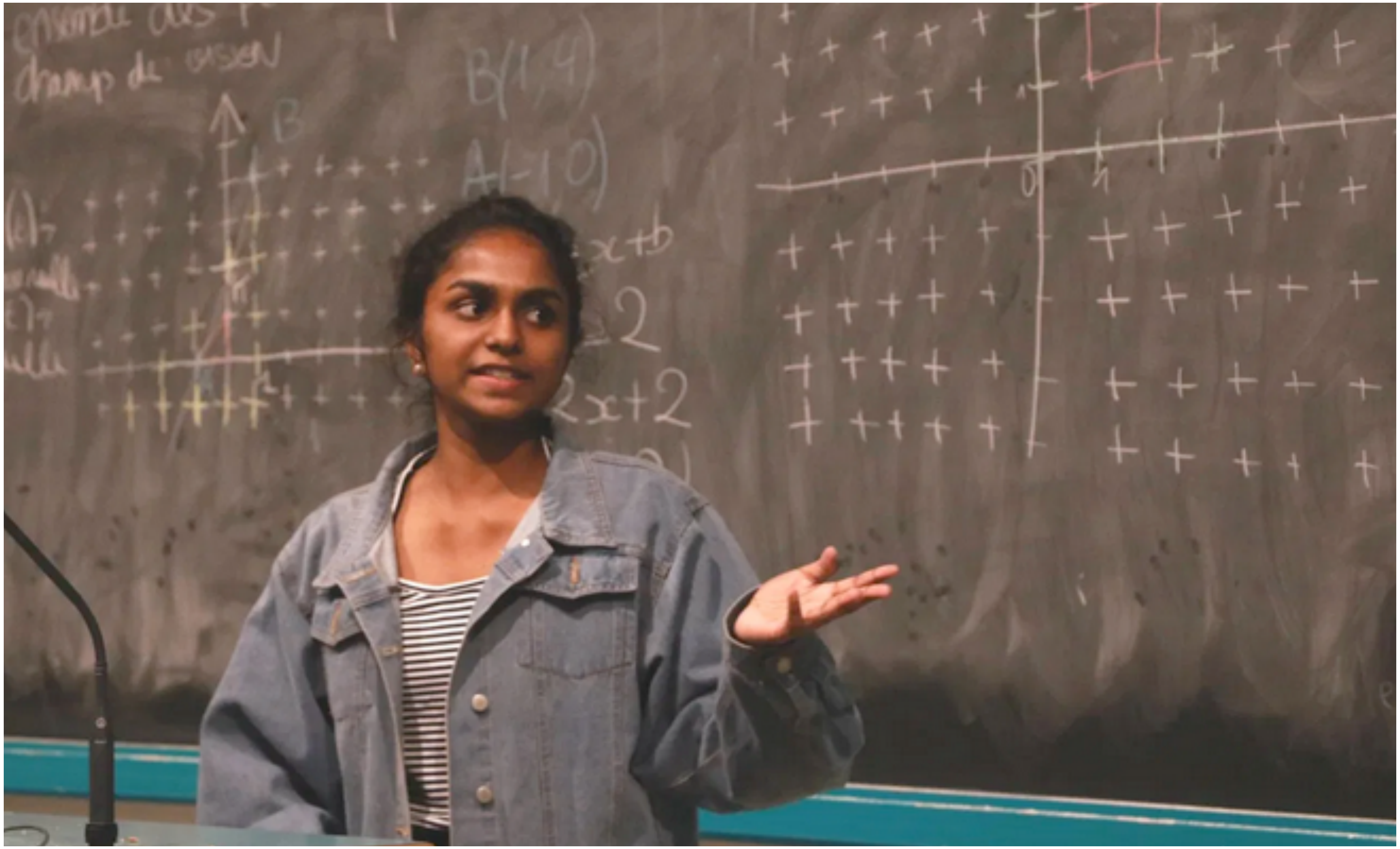


Figure 2. Exemples de trois plans 4×3 invalides.

La figure 1 représente un plan valide pour une maison de taille 8×4. Sur l'exemple, on remarque que deux bimurs s'intersectent en un point. La figure 2 représente trois plans de maisons 4×3, mais aucun n'est valide. Sur celui de gauche, la case interne orange a une unique case voisine ; sur celui du centre, la case externe orange a trois cases voisines ; celui de droite est impossible à construire la cloison orange avec des bimurs.



Pub : RJM et journées Filles et maths

https://filles-et-maths.fr/

Pub : colonies de vacances Paestel

http://paestel.fr/

Pub : Club Mathématique de Nancy

http://depmath-nancy.univ-lorraine.fr/club/

Un carré est positif : applications

Un grand nombre de résultats reposent sur le principe simple suivant : le carré d'un réel est un réel positif, et ce carré est nul si et seulement si le réel est nul. Dans cette feuille, nous explorons plusieurs applications (simples et moins simples) de ce principe.

Problème 1. Soit $ABCD$ un parallélogramme, dont on note x et y les longueurs des côtés. Quelle est la valeur maximale que peut prendre l'aire de $ABCD$?

Problème 2. [Petites astuces bonnes à connaître] Soient a et b des réels. Montrer les majorations suivantes :

$$ab \leq \frac{1}{2}\left(a^2+b^2\right); \quad ab \leq \frac{1}{4}(a+b)^2; \quad (a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2).$$

Quelle est la condition pour que ces inégalités soient des égalités?

Problème 3. Soient a et b des réels tels que $a^2+b^2=ab$. Que peut-on dire de ces deux nombres?

Problème 4. Soit x un réel strictement positif. Montrer que $x+\dfrac{1}{x} \geq 2$. Quand y a-t-il égalité?

Problème 5. [Inégalité arithmético-géométrique (« $A \geq G$ »)] Soient x et y des nombres réels positifs. Leur *moyenne arithmétique* est $A=\dfrac{x+y}{2}$. Leur *moyenne géométrique* est $G=\sqrt{xy}$. Montrer que la moyenne arithmétique est toujours supérieure à la moyenne géométrique (autrement dit, montrer que $A \geq G$). Cette inégalité est utilisée assez fréquemment.

Problème 6. [Inégalité de Cauchy-Schwarz]

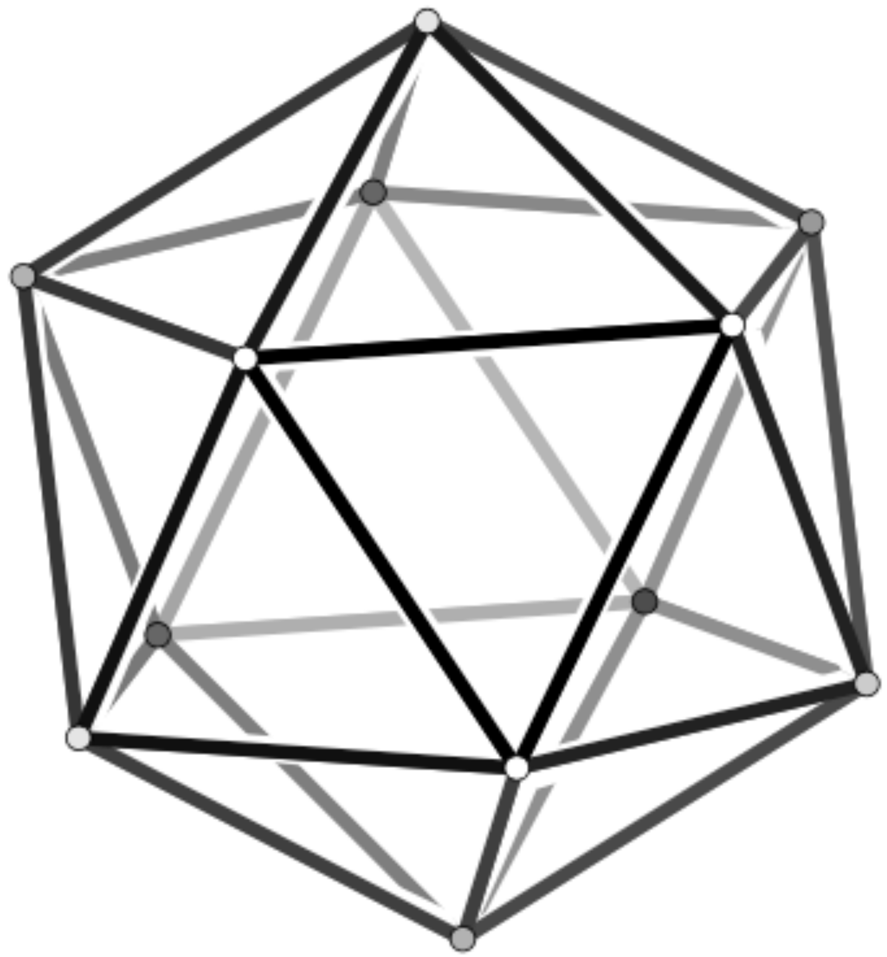
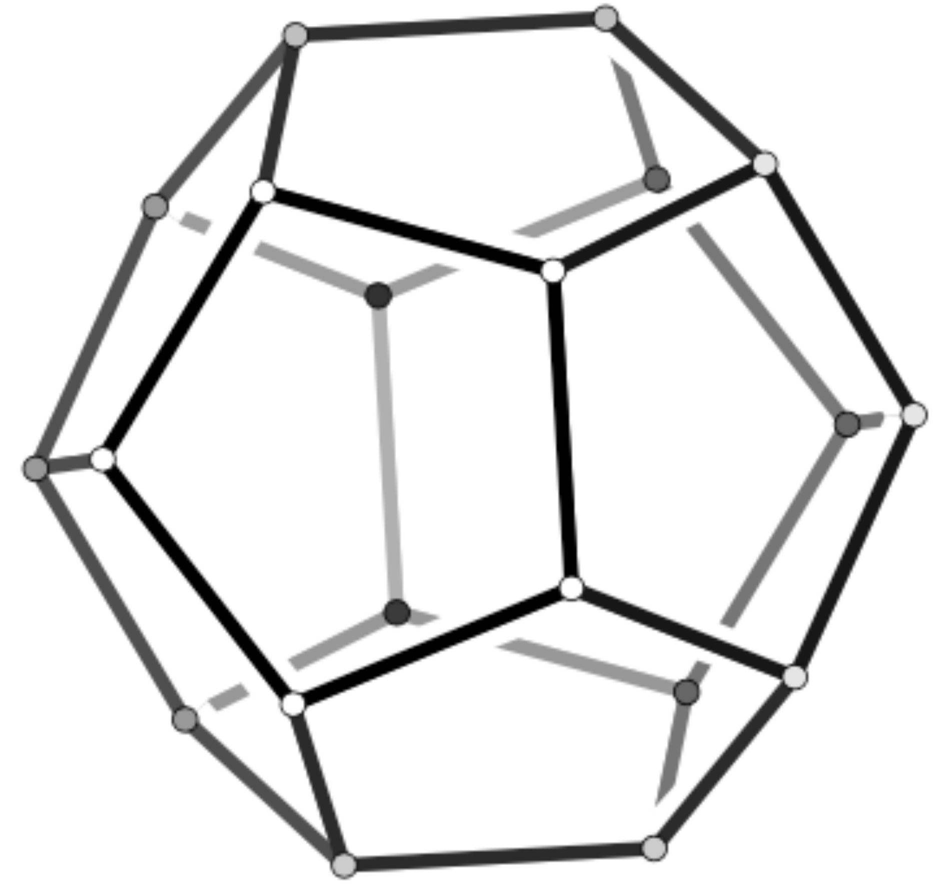
Soient a, b, c et d des nombres réels. Montrer la très célèbre inégalité de Cauchy-Schwarz [1] :

$$(ac+bd)^2 \leq (a^2+b^2)(c^2+d^2)$$

La géométrie dans l’enseignement des mathématiques

Damien Mégy

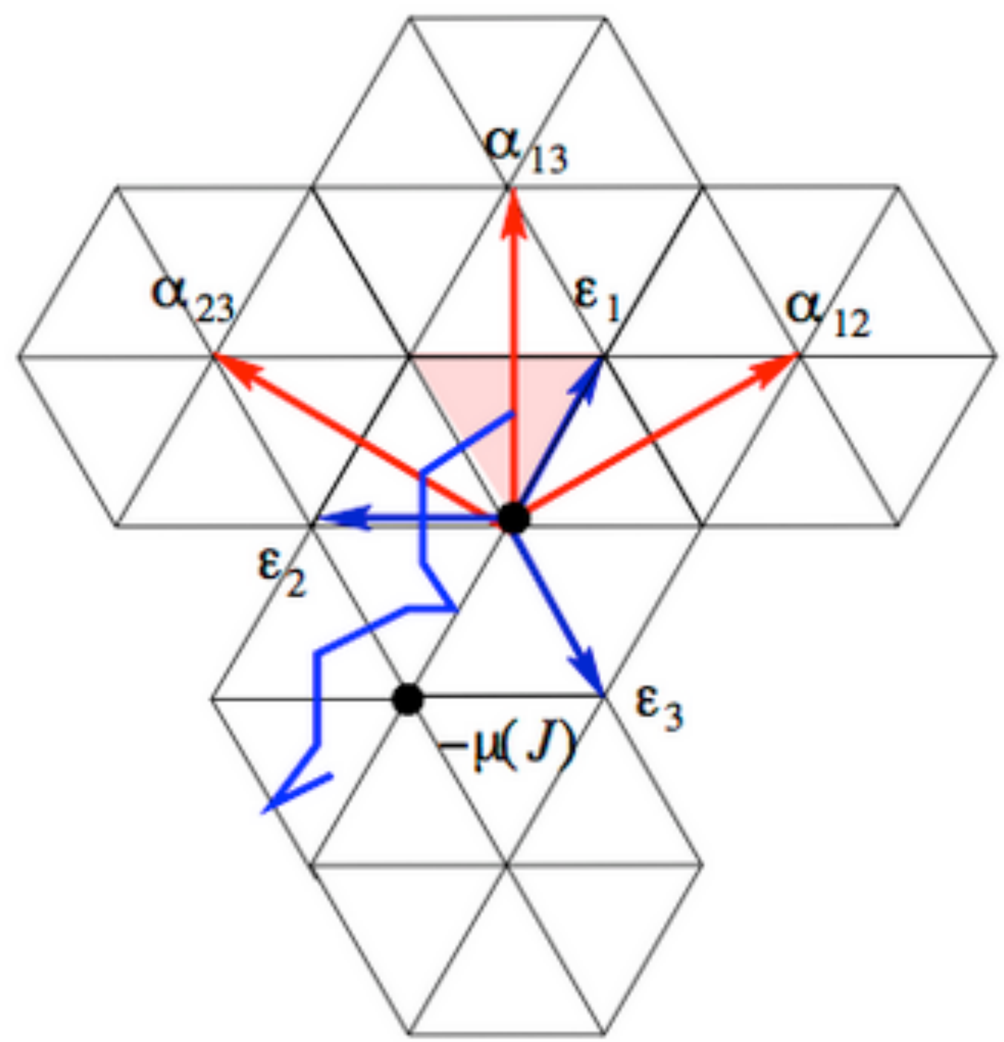
Nancy, 15 janvier 2020

I. Géométrie et combinatoire

Combinatoire

- Discipline ancienne,
- extrêmement belle,
- extrêmement dure,
- (je parle bien de la combi, pas de l'arithmétique)
- surtout sans dessins !



What is geometric combinatorics?

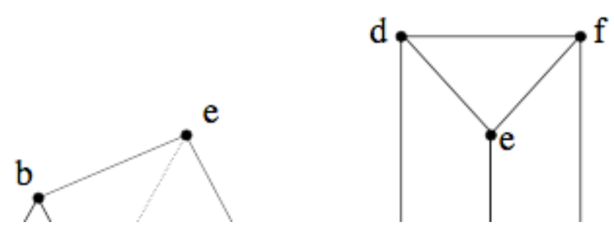
Ezra Miller and Vic Reiner

What is geometric combinatorics? This question is a bit controversial, but at least *in part*, it is the study of **geometric** objects and their **combinatorial** structure. Rather than trying to define this precisely at the outset, in this lecture we'll mainly give examples that appear in the 2004 PCMI graduate courses.

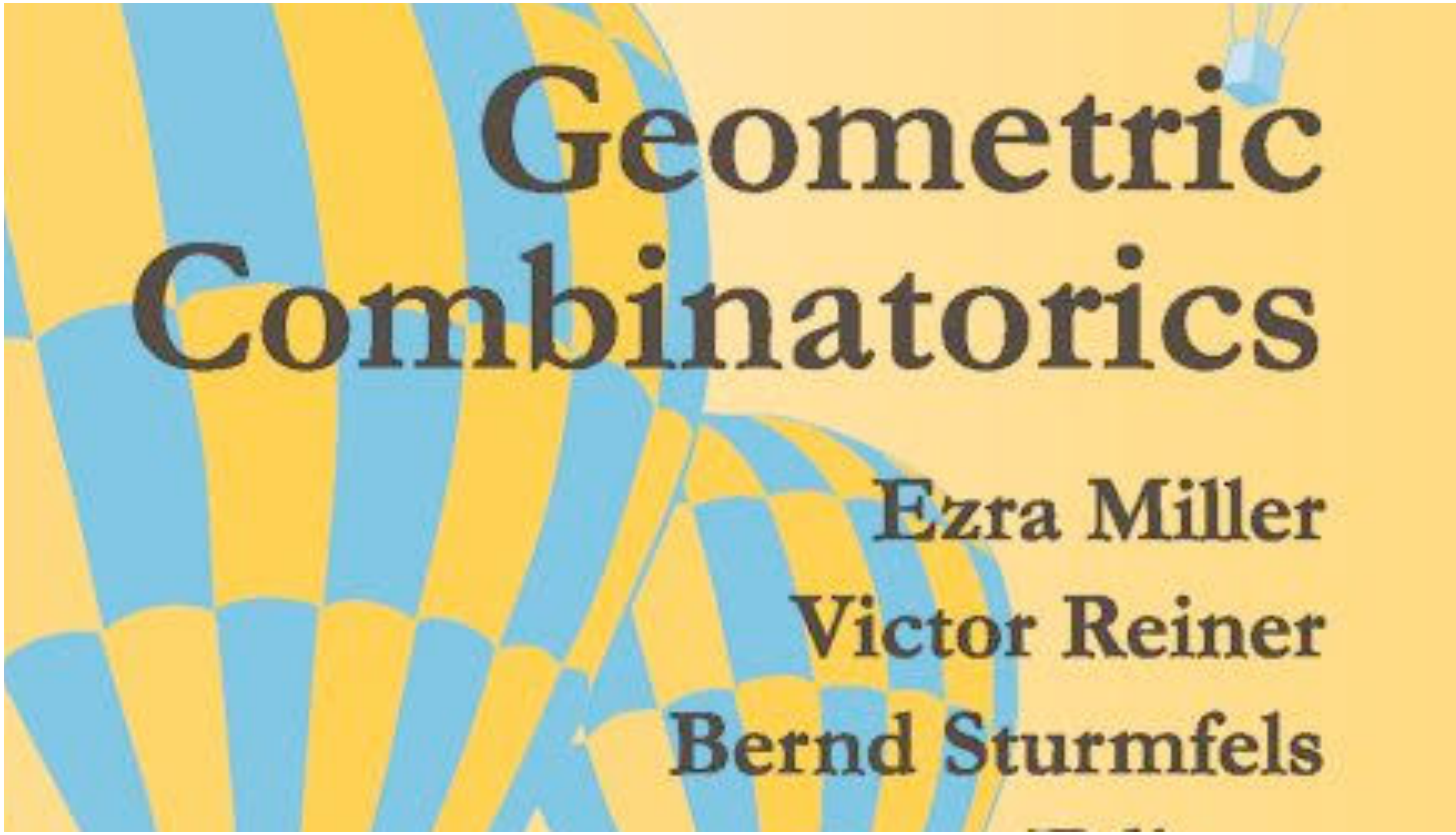
1. Polytopes

A popular class of examples are the *convex polytopes*, that is, convex hulls of finite point sets in $\mathbb{R}^d$. These form the main topic of the graduate course by Ziegler, but also play prominent roles in the undergraduate courses by Swartz and Thomas, and in the undergraduate faculty course by Su (as well as making cameo appearances in the graduate courses by Barvinok, Fomin, Forman, MacPherson, and Wachs!).

In $\mathbb{R}^2$, convex polytopes are *polygons* such as triangles, quadrilaterals, pentagons, hexagons, etc. In $\mathbb{R}^3$ they can be more interesting, such as the triangular prism depicted in Figure 1(a).



polytopes, réseaux, graphes, arrangements d'hyperplans et configurations


Geometric
Combinatorics
Ezra Miller
Victor Reiner
Bernd Sturmfels

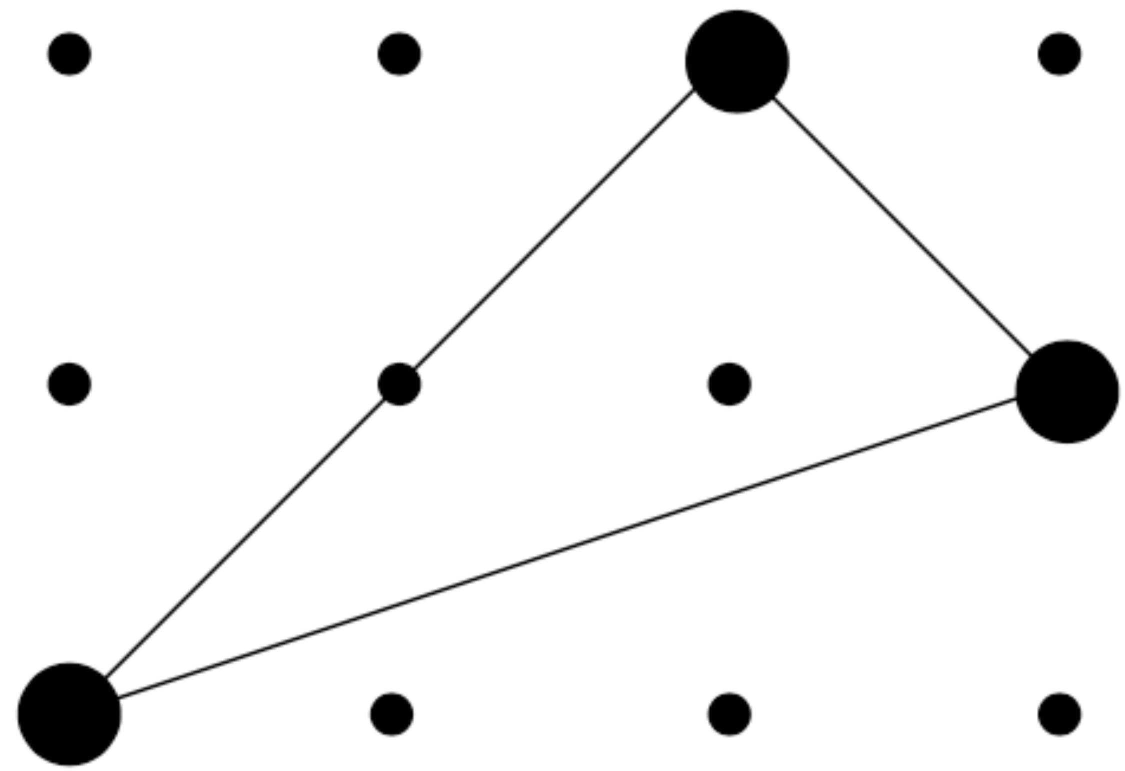
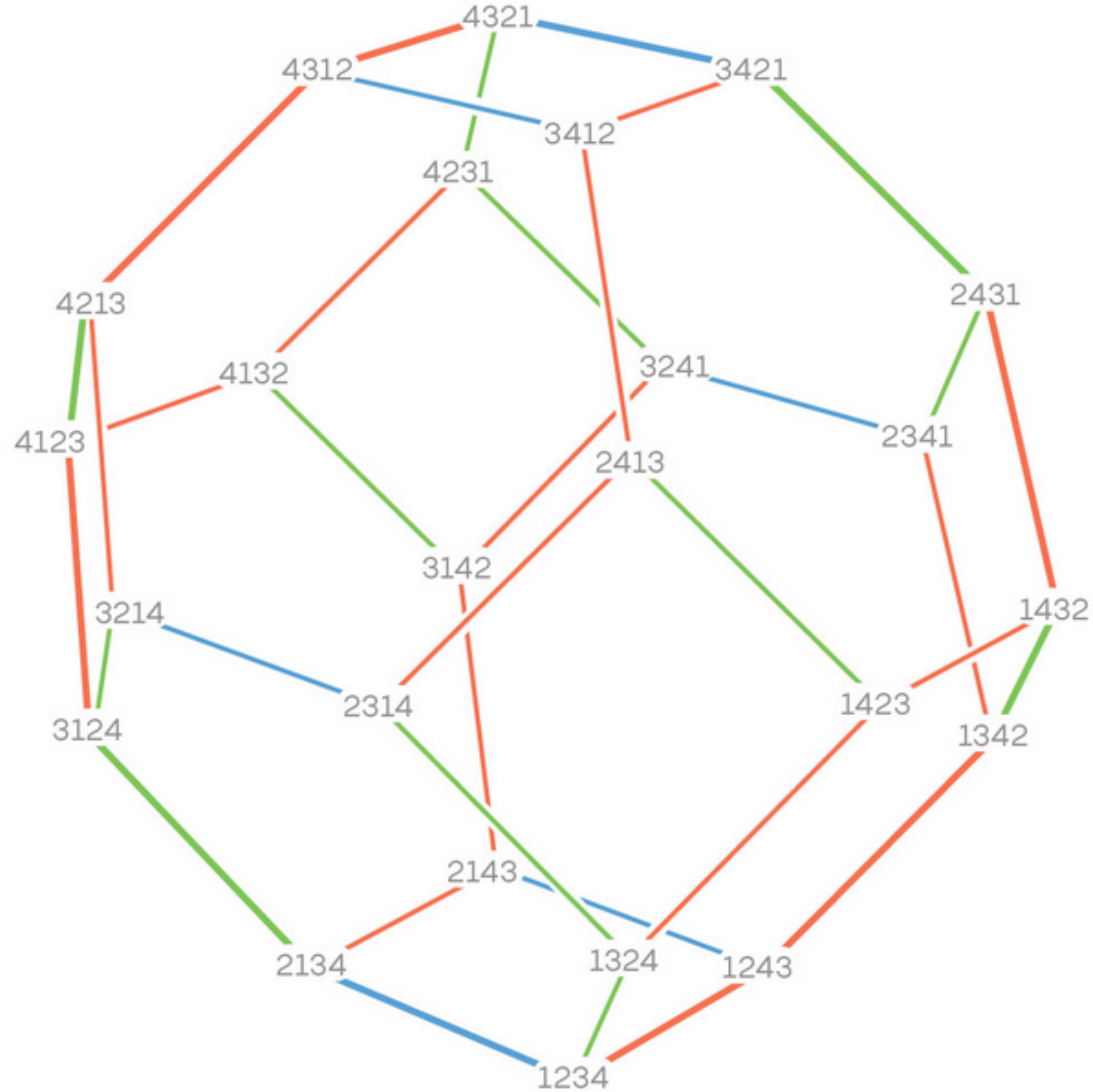
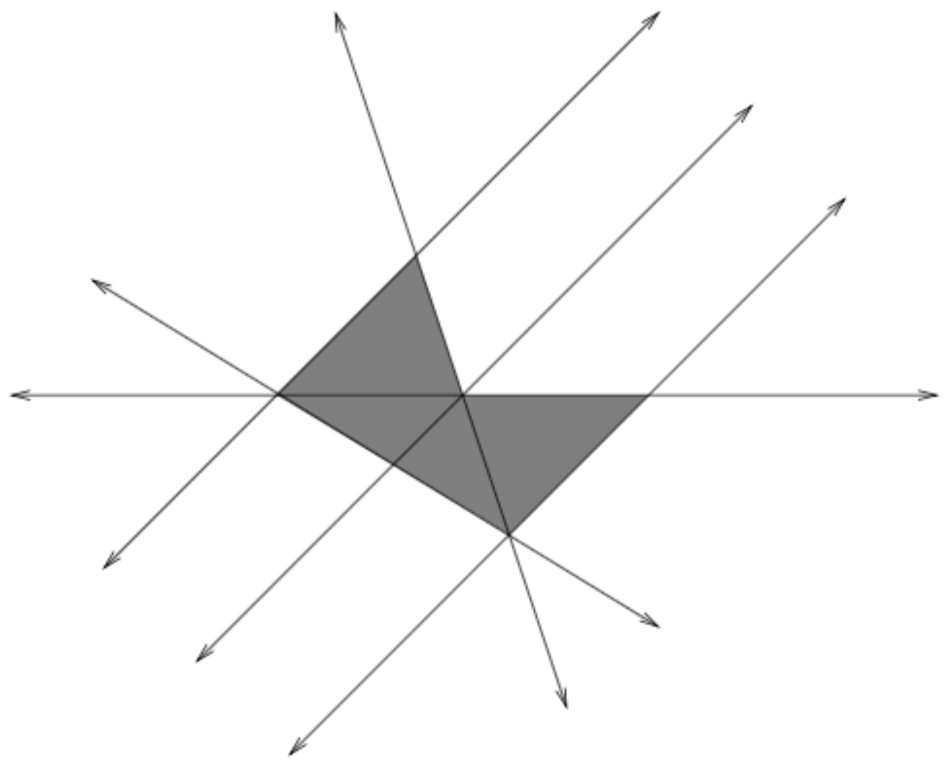
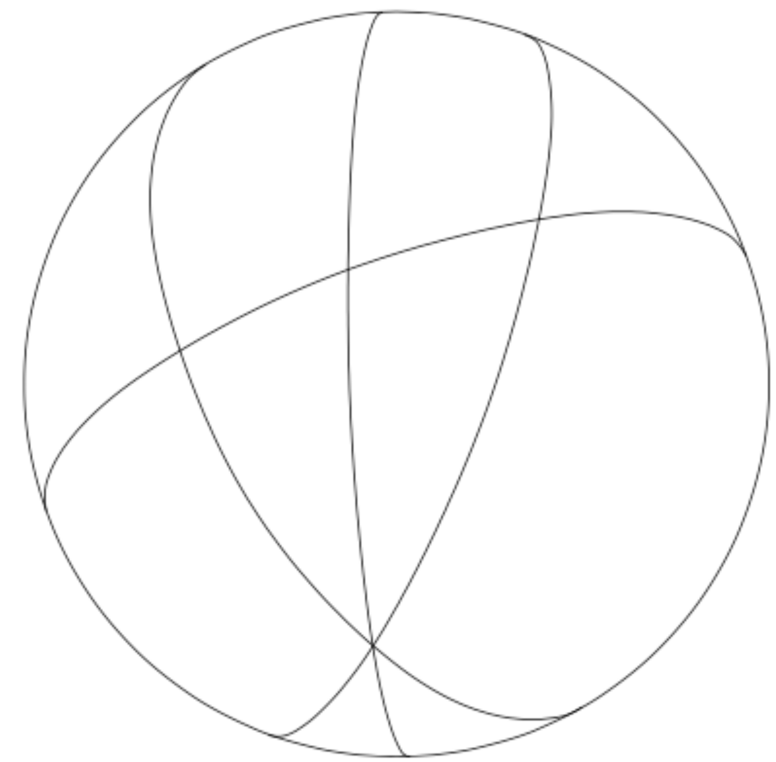


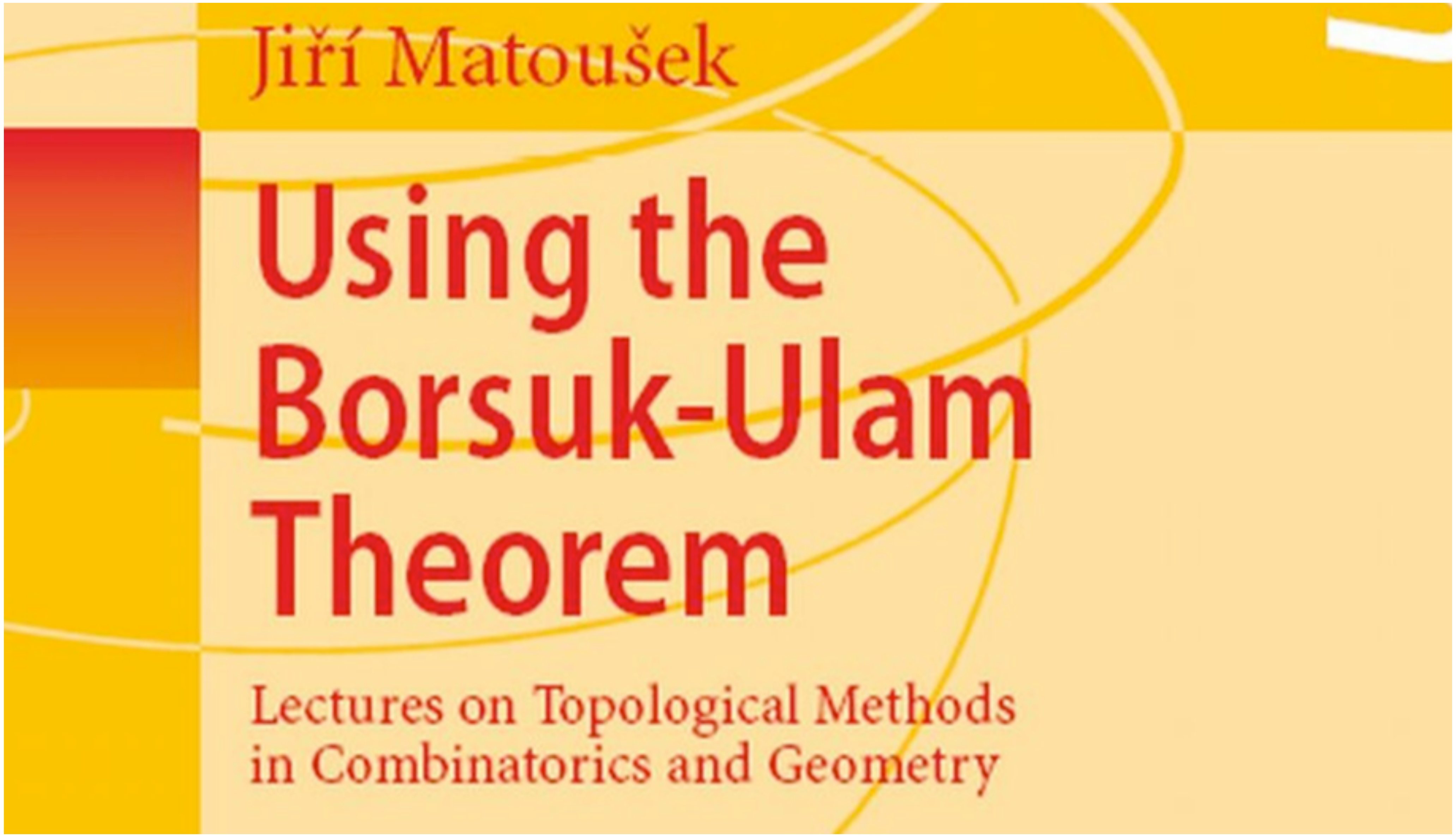
Figure 6. The area of a lattice triangle having $i = 1$ interior lattice point and $b = 4$ boundary lattice points is $i + \frac{1}{2}b - 1 = 2$.


4321
4312
3421
3412
4231
4213
2431
4132
3241
4123
2341
2413
3142
1432
3214
2314
1423
3124
1342
2143
2134
1324
1243
1234

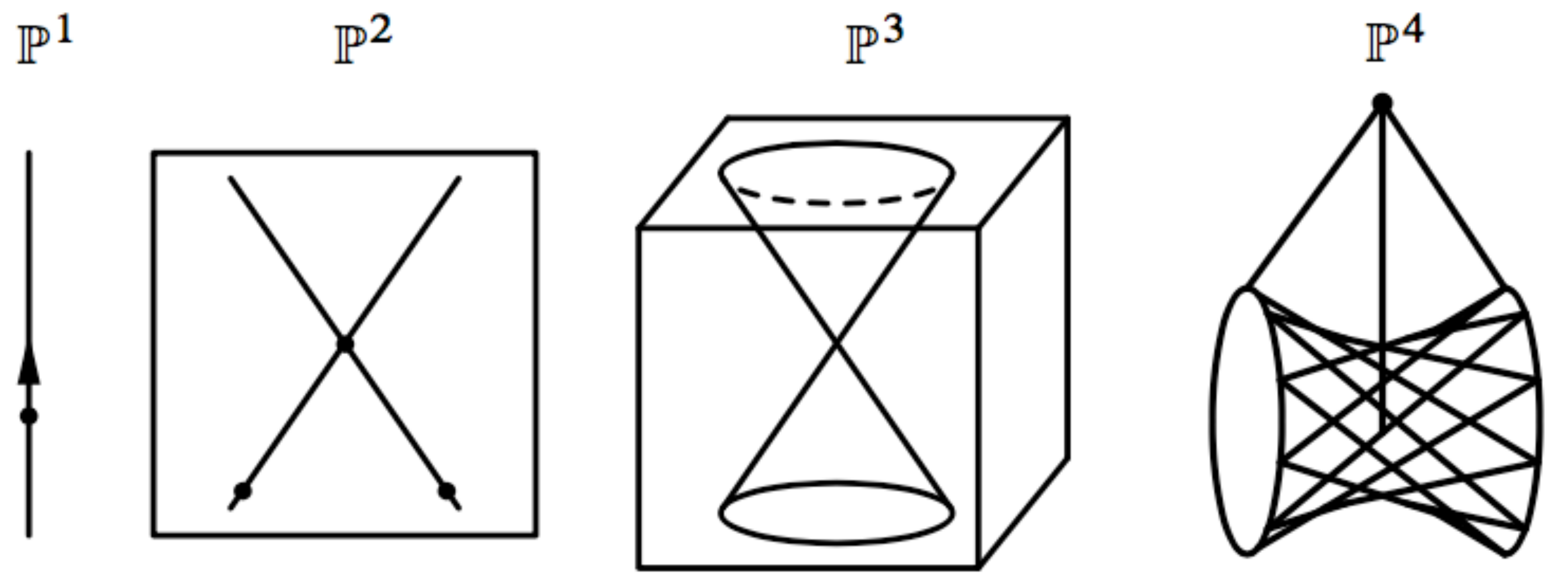
 

Arrangements de droites (ou d’hyperplans)

(ouverture vers la géométrie algébrique)



Combinatoire topologique



géométrie algébrique énumérative

Géométrie algébrique énumérative

- Bézout !
- Plücker,
- Hilbert, Schubert
- Sans oublier Chasles !! (3264)

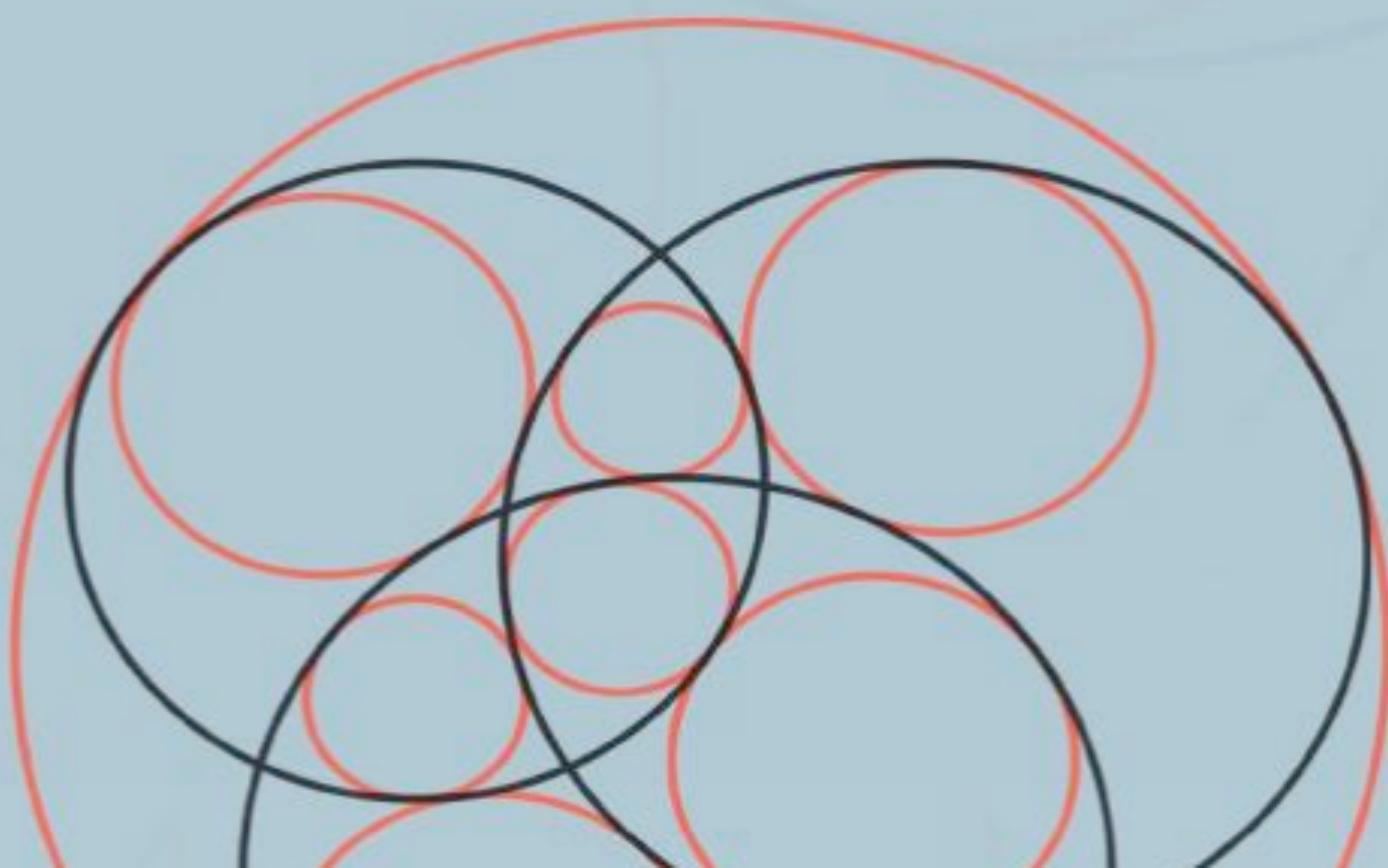
Despite a lack of precise foundations, 19th century enumerative geometry rose to impressive heights: for example, Schubert, whose *Kalkül der abzählenden Geometrie* (originally published in 1879, and reprinted 100 years later in [1979]) represents the summit of intersection theory in the late 19th century, calculated the number of twisted cubics tangent to 12 quadrics — and got the right answer (5,819,539,783,680). Imagine landing a jumbo jet blindfolded!

Schubert (l'autre)

3264 AND ALL THAT

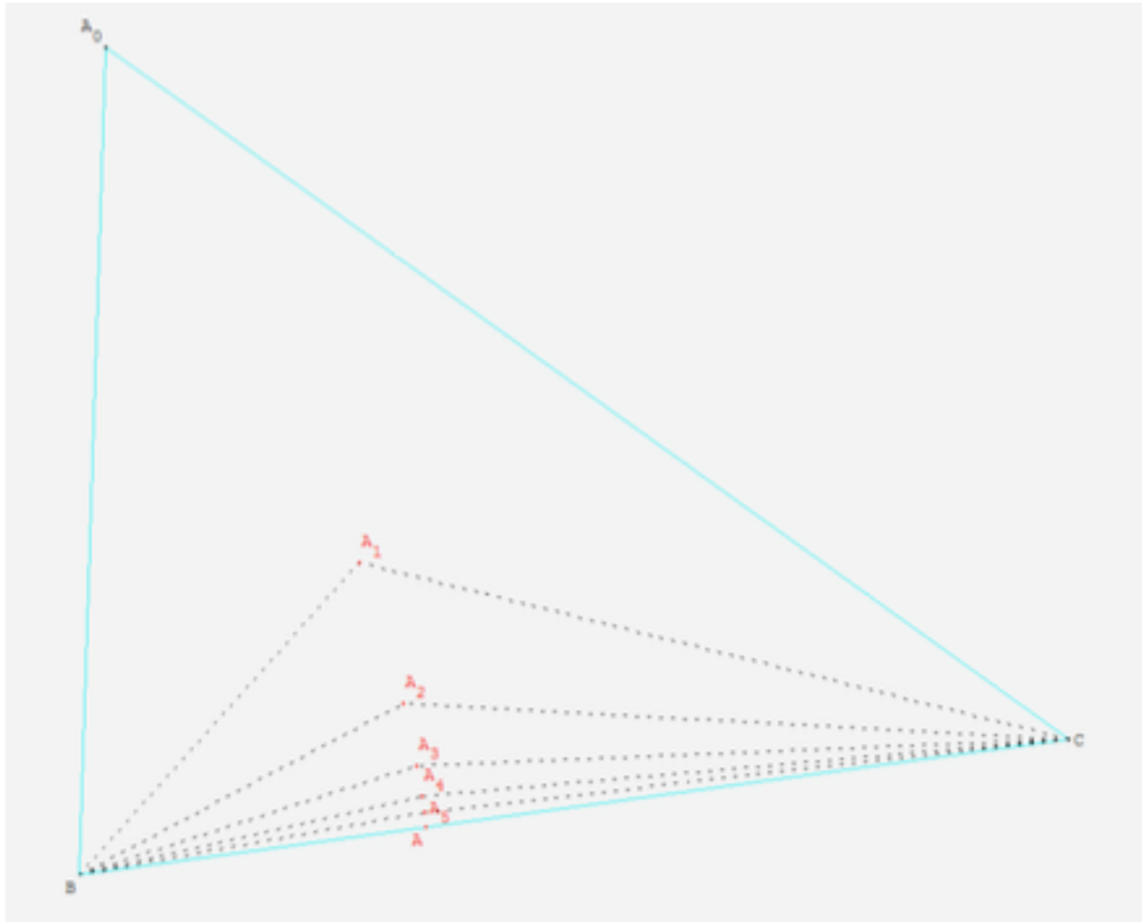
A SECOND COURSE IN ALGEBRAIC GEOMETRY

DAVID EISENBUD AND JOE HARRIS



What's with the title?

The number in the title of this book is a reference to the solution of a classic problem in enumerative geometry: the determination, by Chasles, of the number of smooth conic plane curves tangent to five given general conics. The problem is emblematic of the dual nature of the subject. On the one hand, the number itself is of little significance: life would not be materially different if there were more or fewer. But the fact that the problem is well-posed — that there is a Zariski open subset of the space of 5-tuples $(C_1, \dots, C_5)$ of conics for which the number of conics tangent to all five is constant, and that we can in fact determine that number — is at the heart of algebraic geometry. And the insights developed in the pursuit of a rigorous derivation of the number — the recognition of the need for, and the introduction of, a new parameter space for plane conics, and the understanding of why intersection products are well-defined for this space — are landmarks in the development of algebraic geometry.



Soit $\widehat{CBA} = \widehat{B}$ et $\widehat{BCA} = \widehat{C}$

Dans le triangle BA_nC

$\widehat{CBA_n} = \dfrac{\widehat{B}}{2^n}$ et $\widehat{BCA_n} = \dfrac{\widehat{C}}{2^n}$ et

$\dfrac{A_nB}{\sin(\widehat{BCA_n})} = \dfrac{A_nC}{\sin(\widehat{CBA_n})}$ donc

$\dfrac{A_nB}{A_nC} = \dfrac{\sin \dfrac{\widehat{C}}{2^n}}{\sin \dfrac{\widehat{B}}{2^n}}$ or $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{A_nB}{A_nC} = \dfrac{\widehat{C}}{\widehat{B}}$

$\widehat{BA_nC} = \pi - \dfrac{\widehat{B}}{2^n} - \dfrac{\widehat{C}}{2^n}$ donc

$\lim\limits_{n \to +\infty} \widehat{BA_nC} = \pi$ donc

$\lim\limits_{n \to +\infty} A_nB + A_nC = BC$ or

$$A_nB = \frac{\sin \dfrac{\widehat{C}}{2^n}}{\sin \dfrac{\widehat{B}}{2^n}} A_nC \text{ et } A_nB + A_nC = A_nC\left(\frac{\sin \dfrac{\widehat{C}}{2^n}}{\sin \dfrac{\widehat{B}}{2^n}} + 1\right) \text{donc} \lim_{n \to +\infty} A_nC = \frac{BC}{\dfrac{\widehat{B}}{\widehat{C}} + 1}$$

II. Géométrie et calcul

Quelques apparitions du calcul en géométrie:

- Systèmes linéaires
- Inéquations
- Équations polynomiales
- Nombres complexes

$$\frac{4}{-} = 2 \text{ et } f(1+i) = \frac{2+2i-4}{1-i-2} = \frac{-2+2i}{-1-i} = -2i, \text{c}$$

$$\left|f(z)\right| = \left|\frac{2z-4}{\bar{z}-2}\right| = \frac{2\,|z-2|}{\left|\overline{z-2}\right|} = 2$$

' est donc incluse dans le cercle de centre O e

a

$$\begin{aligned} f(z) = -2 &\iff \frac{2z-4}{\bar{z}-2} = -2 \\ &\iff 2z-4 = -2\bar{z}+4 \\ &\iff 2(z+\bar{z}) = 8 \\ &\iff \text{Ré}(z) = 2 \end{aligned}$$

al d'équation cartésienne $x = 2$, privée du p

$\frac{}{2}$. D'une part, on a

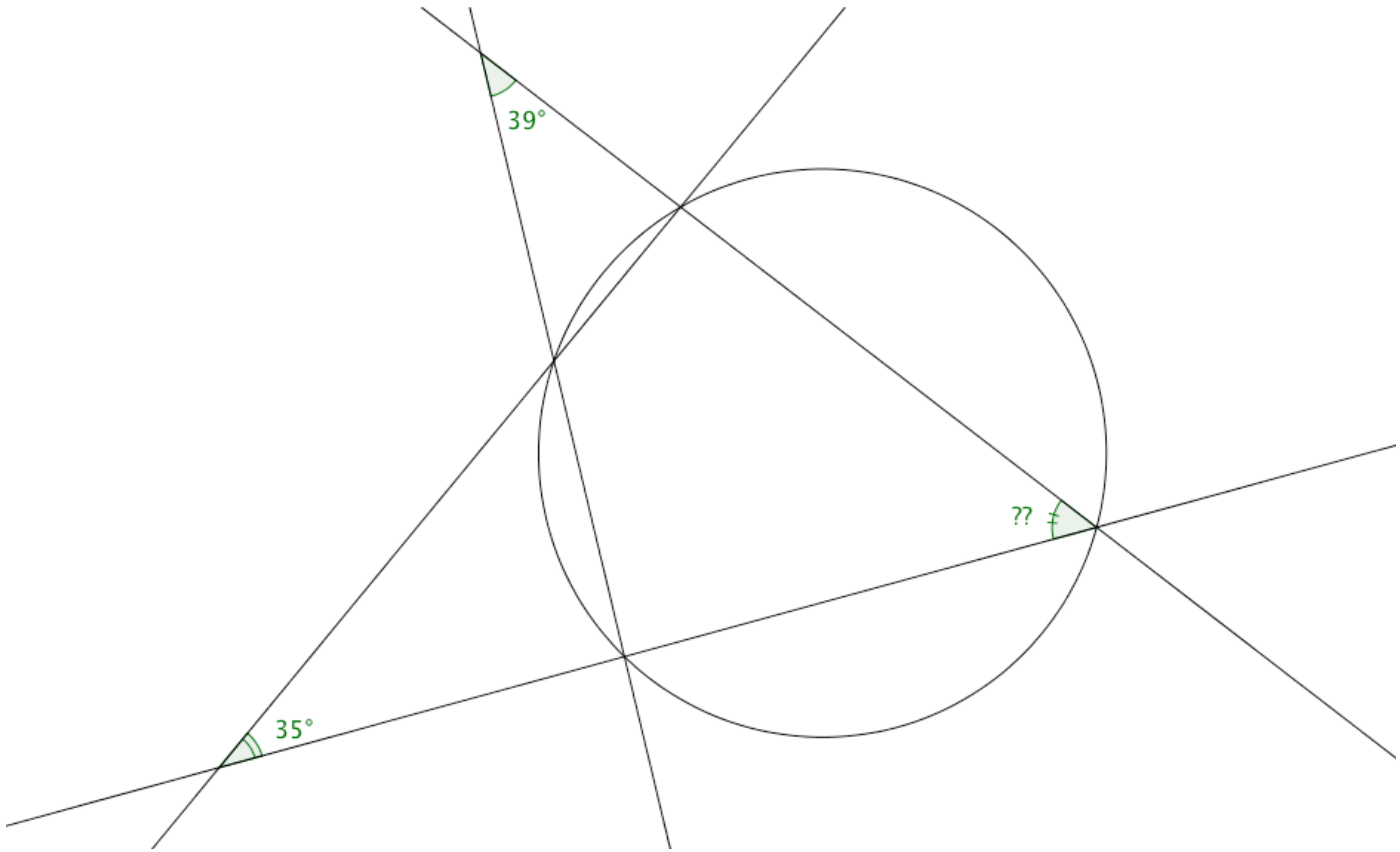
$$f(z)+2 = \frac{2z-4+2(\bar{z}-2)}{\bar{z}-2} = \frac{4\,\text{Ré}(z)-8}{\bar{z}-2}$$

$$\frac{z-2}{f(z)+2} = \frac{(z-2)(\bar{z}-2)}{4\,\text{Ré}(z)-8} = \frac{|z-2|^2}{4\,\text{Ré}(z)-8} \in \mathbb{R}$$

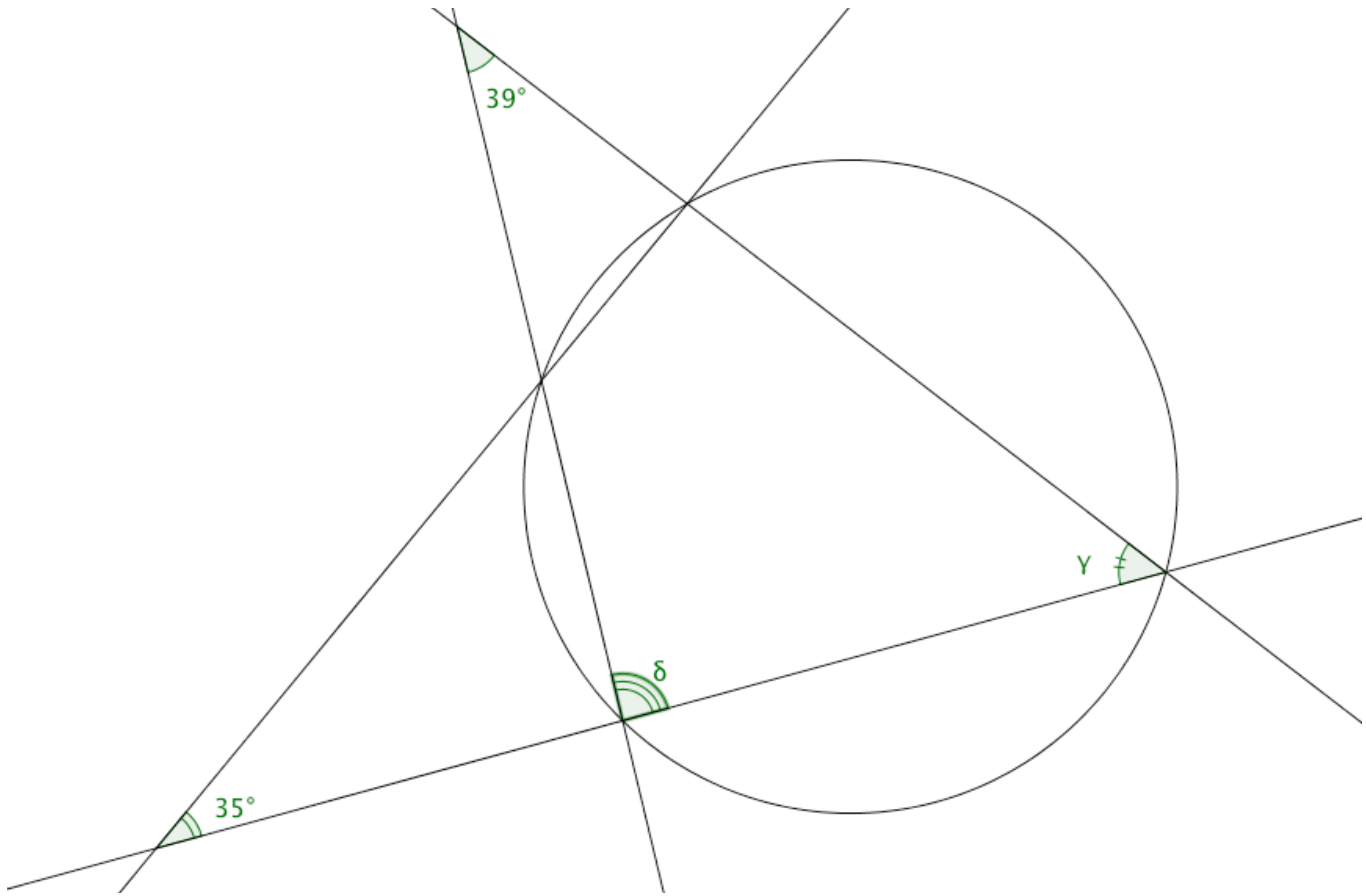
Systèmes linéaires en géométrie

Principe simple : l'utilisation de plusieurs théorèmes produit un système d'équations, parfois linéaires, paf.

- Somme des angles d'un triangle, relations sur les angles (alt/int etc)
- Égalités de périmètre, d'aires (utilisation conjointe avec des triangles isométriques)
- Théorème des milieux et Thalès
- Angles inscrits égaux / angles opposés supplémentaires dans un quadrilatère inscriptible.
- Relations métriques : théorème de la médiane/identité du parallélogramme, puissances de points, Ptolémée



Systèmes linéaires : premier exemple
(mignon tout plein)



Deux équations :

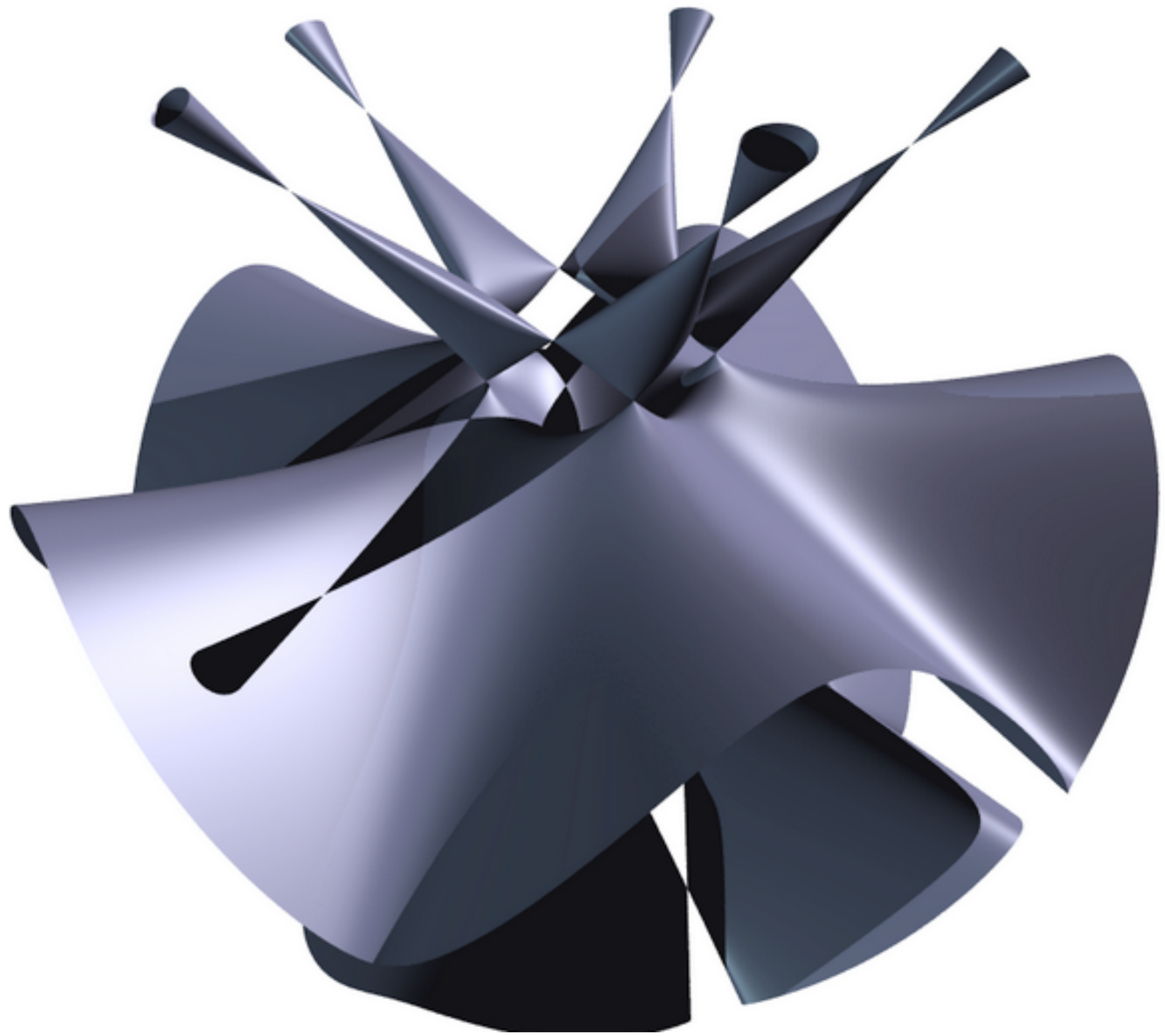
$\gamma+\delta+39=180$

$\gamma+(180-\delta)+35=180$

Et finalement $2\gamma+74=180$ et donc $\gamma=53$

Inéquations en géométrie

- Pythagore : l'hypoténuse est plus grande
- Produit scalaire ≤ produit des normes (Cauchy-Schwarz)
- En général : inégalité triangulaire
- Plus évolué : inégalité de Ptolémée, autres inégalités…



Équations algébriques en géométrie

ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

par A. GROTHENDIECK

Rédigés avec la collaboration de J. DIEUDONNÉ

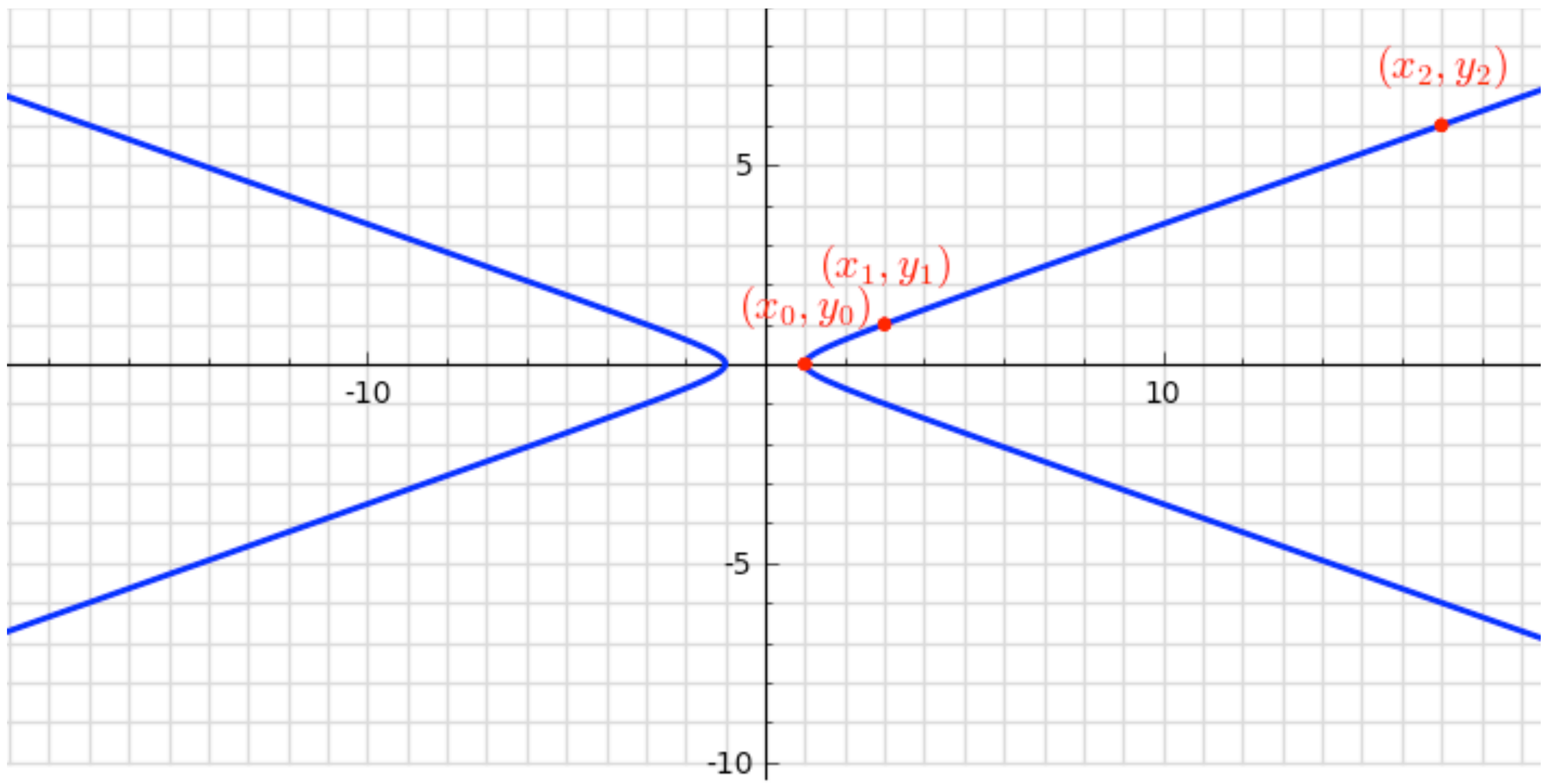
I

LE LANGAGE DES SCHÉMAS

Interlude : c'est quoi, la géométrie algébrique ???

Équations algébriques

- Spécialisation des cas précédents lorsque des variables sont égales -> carrés, cubes
- Pythagore, qui fait intervenir des carrés
- Plus généralement : problèmes avec des distances
- Accessible dès le collège en s'y prenant bien (factorisation avec identités remarquables)
- Habitue les élèves à ce qu'un problème puisse avoir plusieurs solutions
- Premier contact aussi avec le raisonnement par analyse-synthèse : on élève au carré, on trouve plusieurs solutions, on vérifie

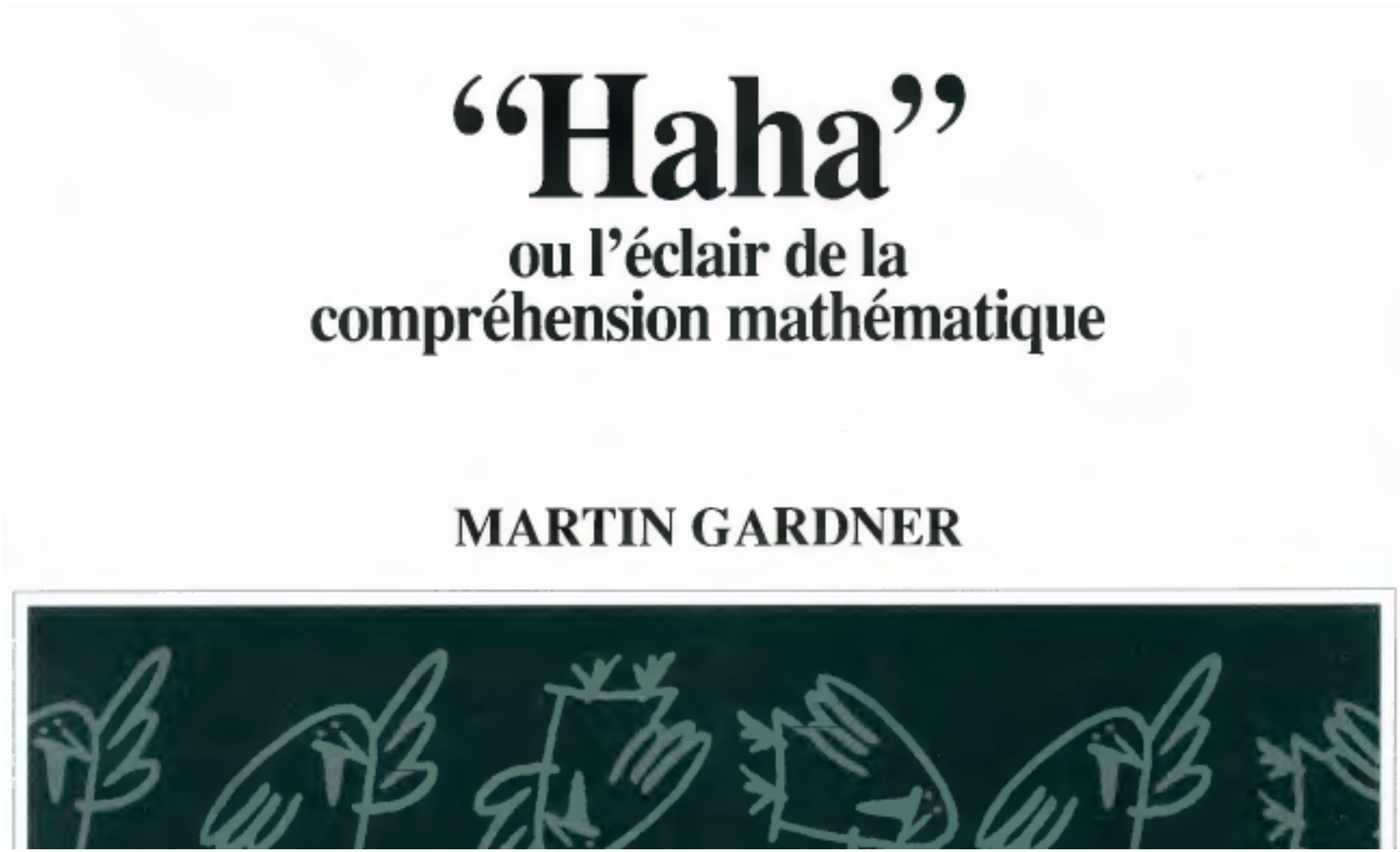


Équation de Pell-Fermat

$$x^2 - 8y^2 = 1.$$

III. Géométrie et arithmétique

(ouverture vers la géométrie algébrique)



IV. Géométrie et raisonnement

Géométrie et raisonnement

- Assertions équivalentes
- Raisonnements complexes en plusieurs étapes
- La culture du contre-exemple
- Preuves à partir d'axiomes
- Formalisation sur ordinateur

Assertions équivalentes

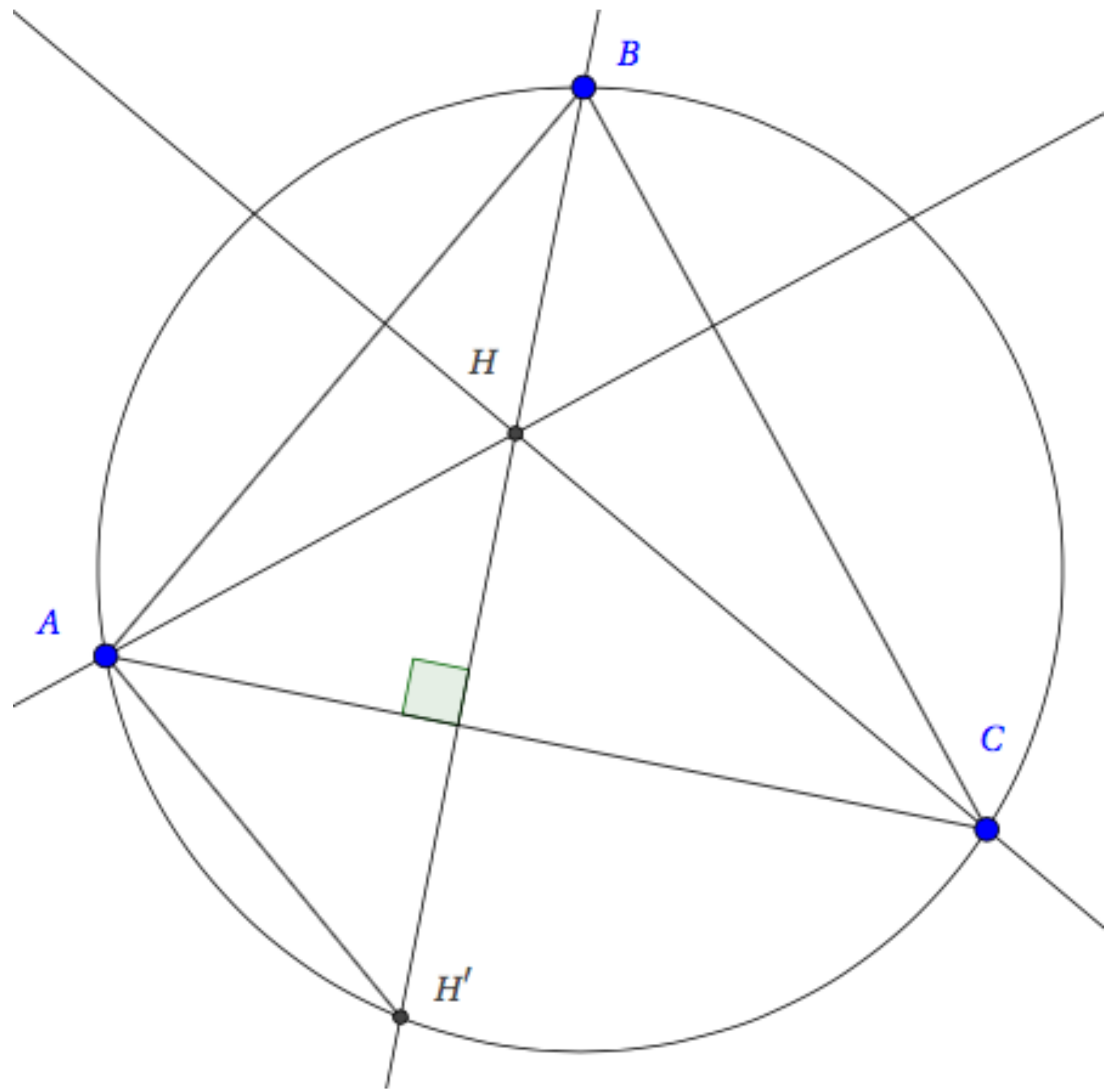
- Définitions équivalentes de figures géométriques
- triangles isocèles
- parallélogrammes
- rectangles, trapèzes, etc

Pensée complexe (l’autre)

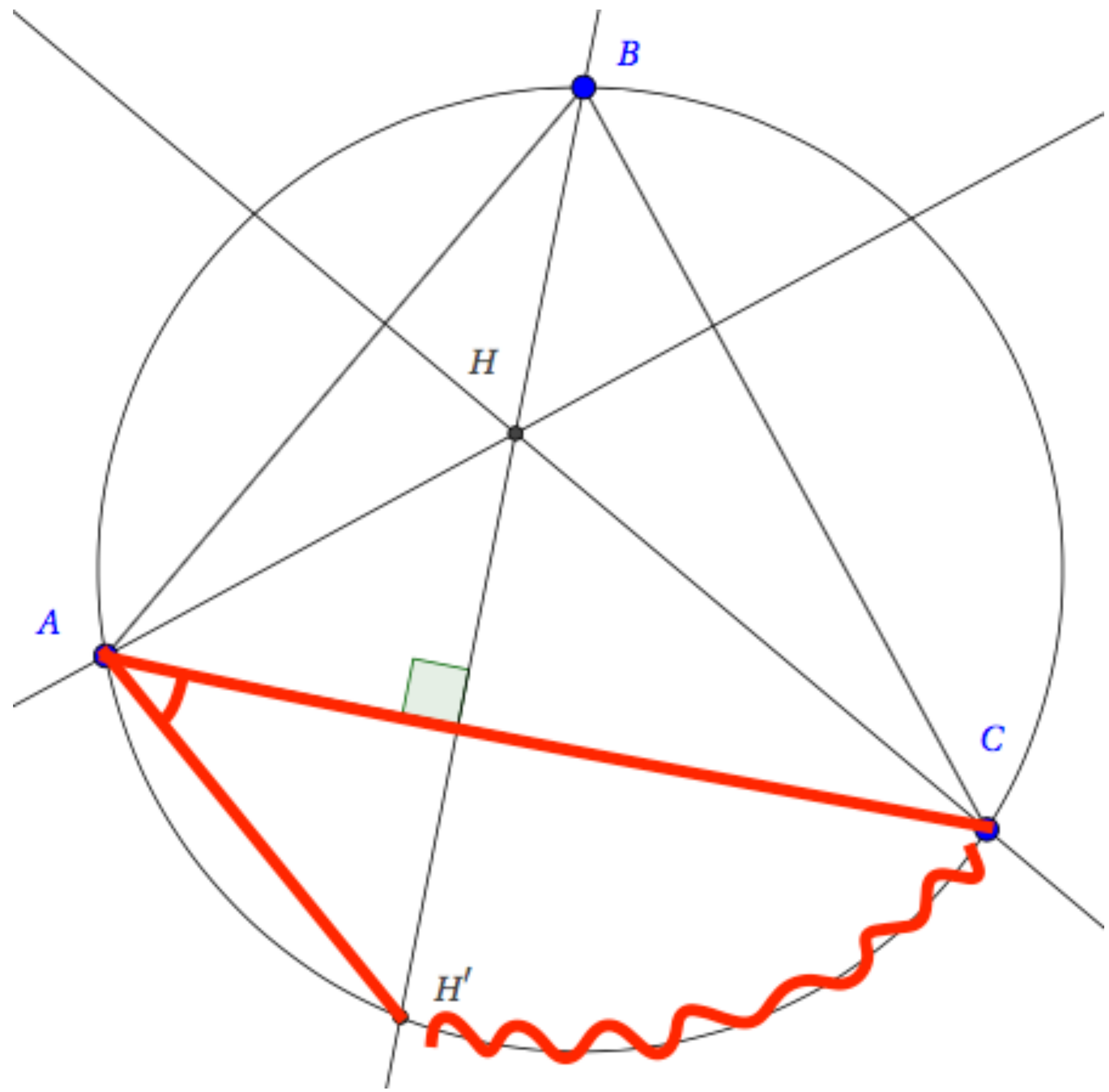
- Utilisation de plusieurs théorèmes dans une même preuve (ou d’un même théorème plusieurs fois)

- Utilisation successive de définitions équivalentes

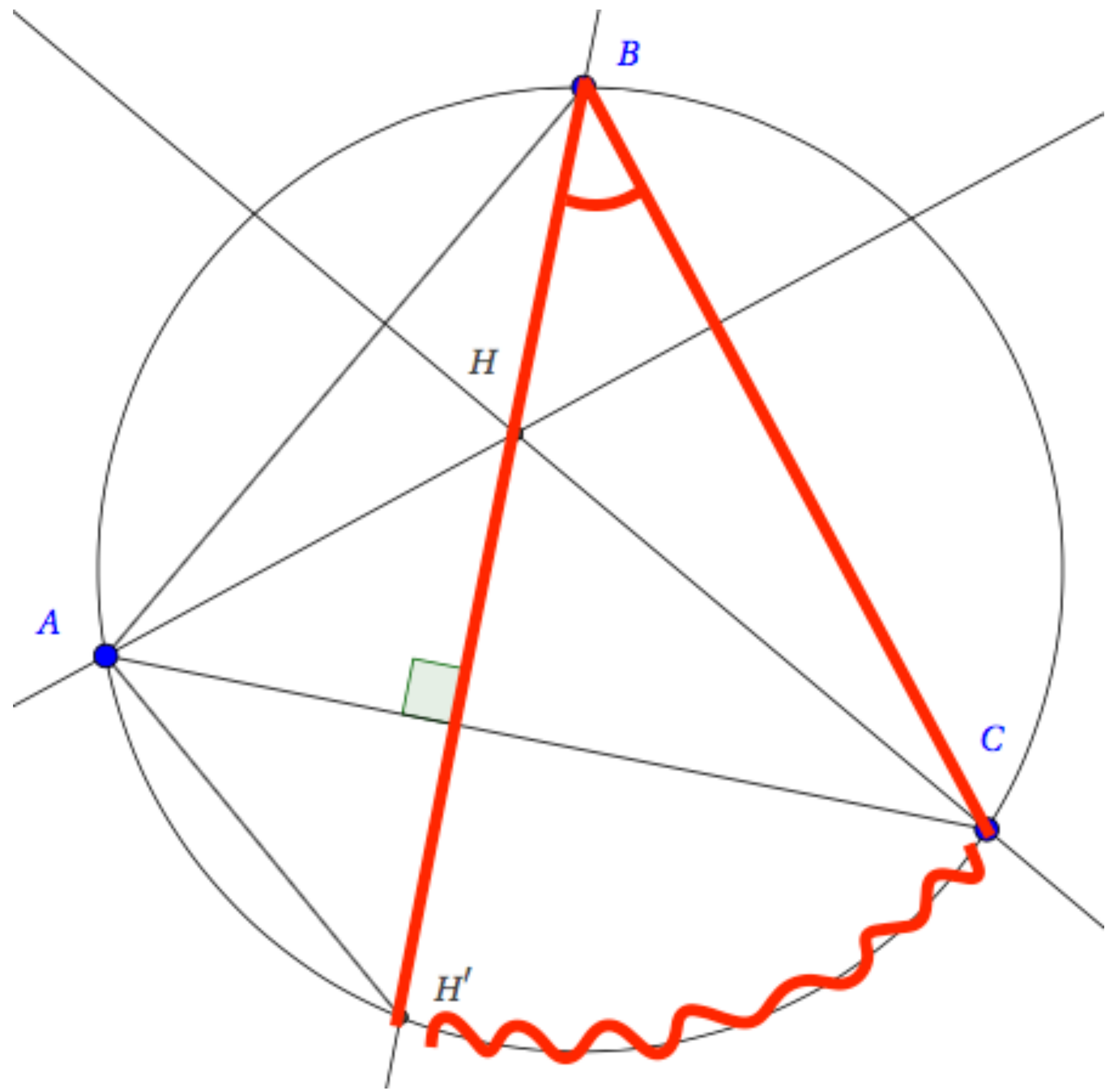
- Exemple : la « chasse aux angles »



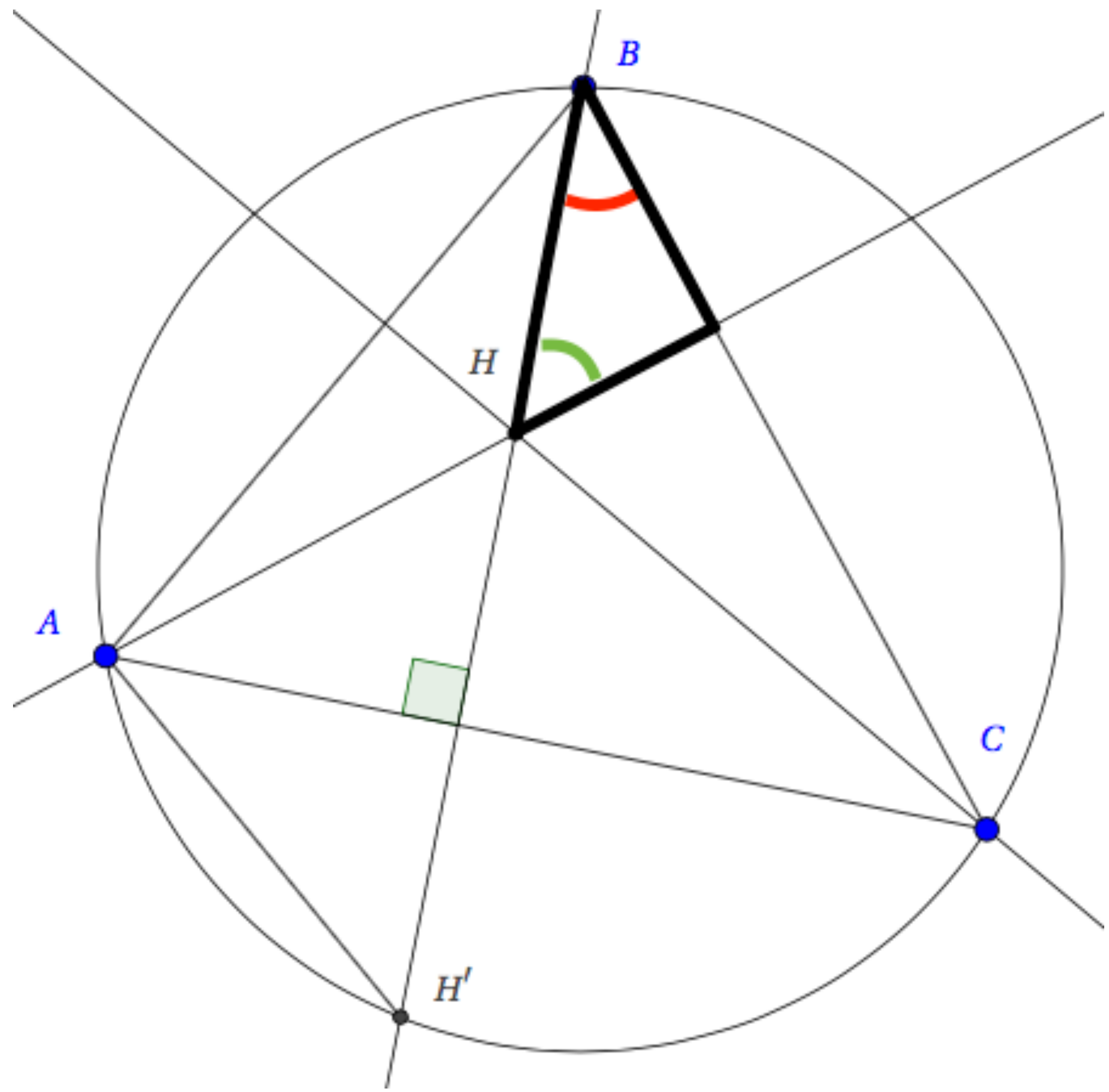
Exemple : symétrique de l'orthocentre (angle inscrit, triangles isocèles, angles complémentaires, opposés)



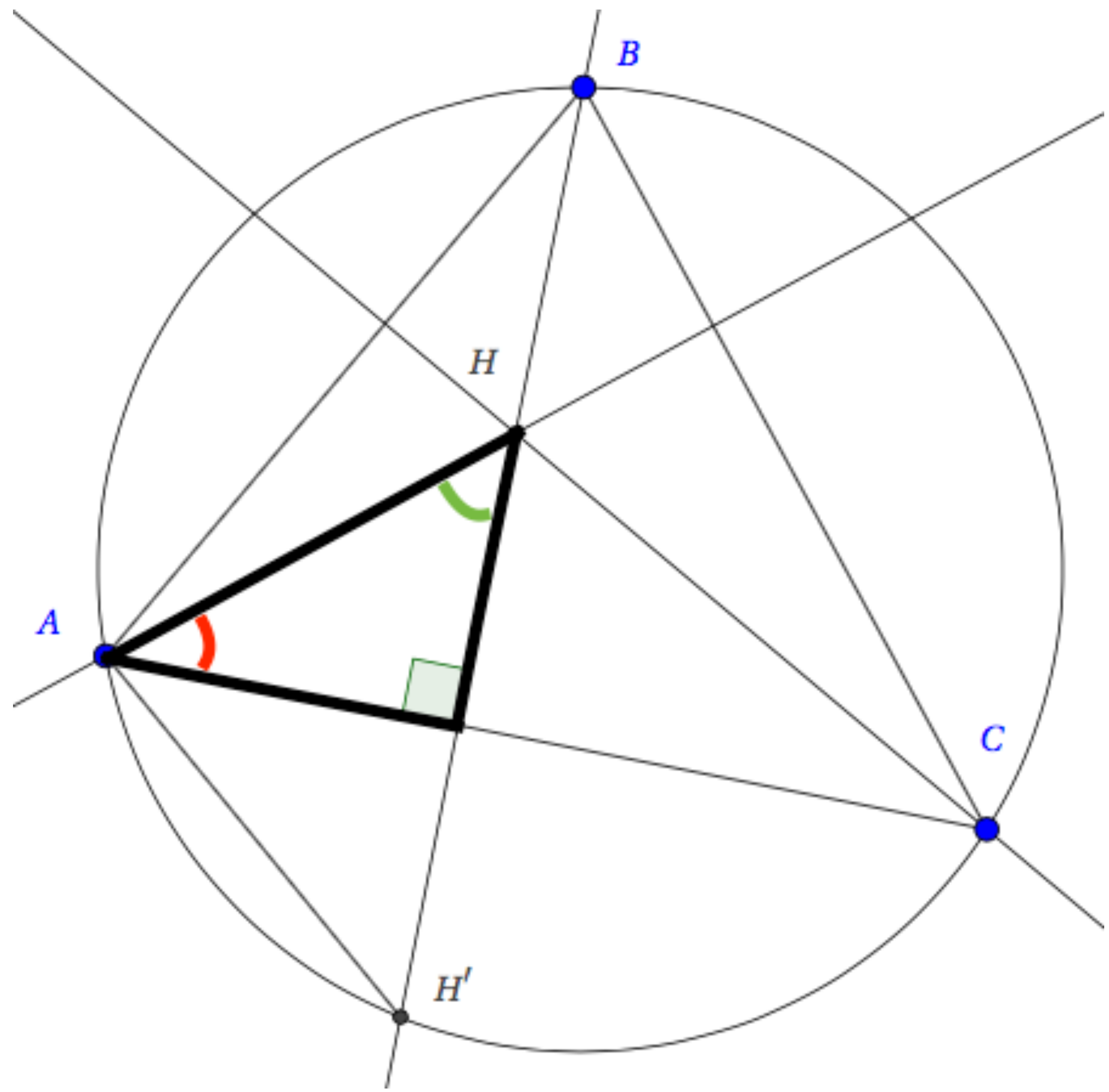
Exemple : symétrique de l'orthocentre (angle inscrit, triangles isocèles, angles complémentaires, opposés)



Exemple : symétrique de l'orthocentre (angle inscrit, triangles isocèles, angles complémentaires, opposés)



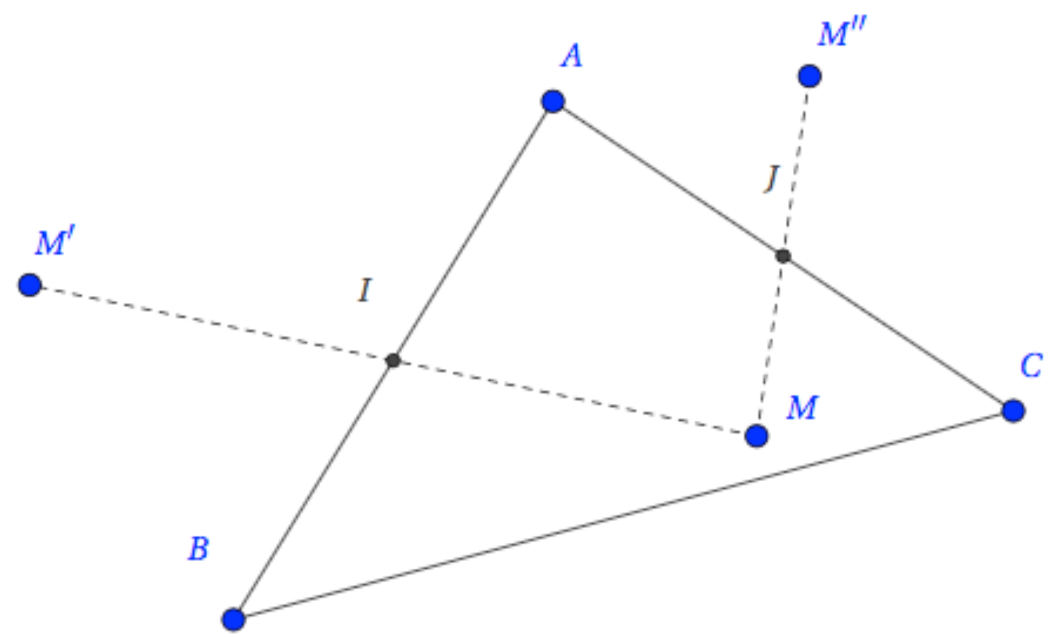
Exemple : symétrique de l'orthocentre (angle inscrit, triangles isocèles, angles complémentaires, opposés)



Exemple : symétrique de l’orthocentre (angle inscrit, triangles isocèles, angles complémentaires, opposés)

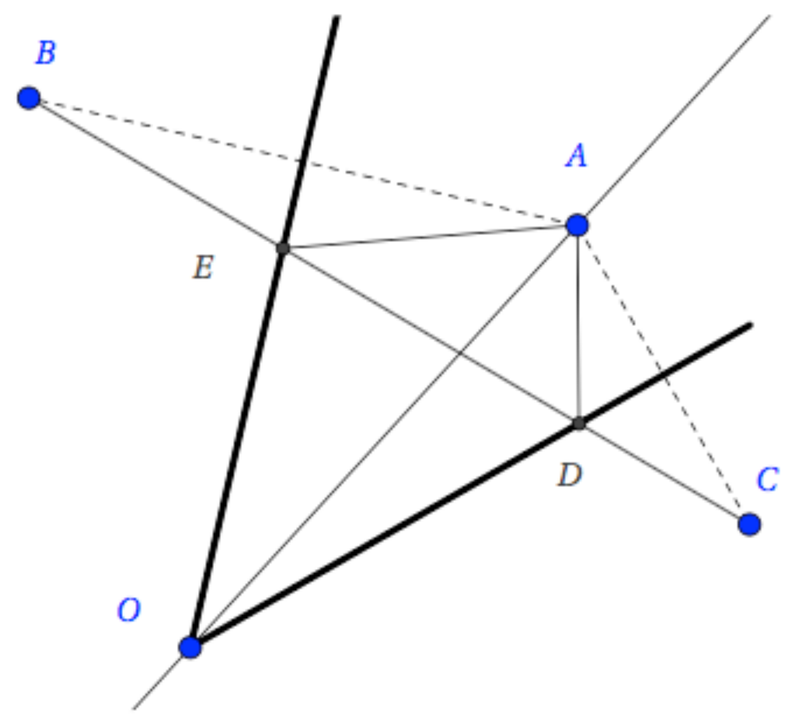
Exercice 26 (Distance entre symétriques)**.** Soit ABC un triangle et I, J les milieux de $[AB]$ et $[AC]$.

Pour tout point M, on note M' et M'' ses symétriques par rapport à I et J. Montrer que $M'M'' = BC$.

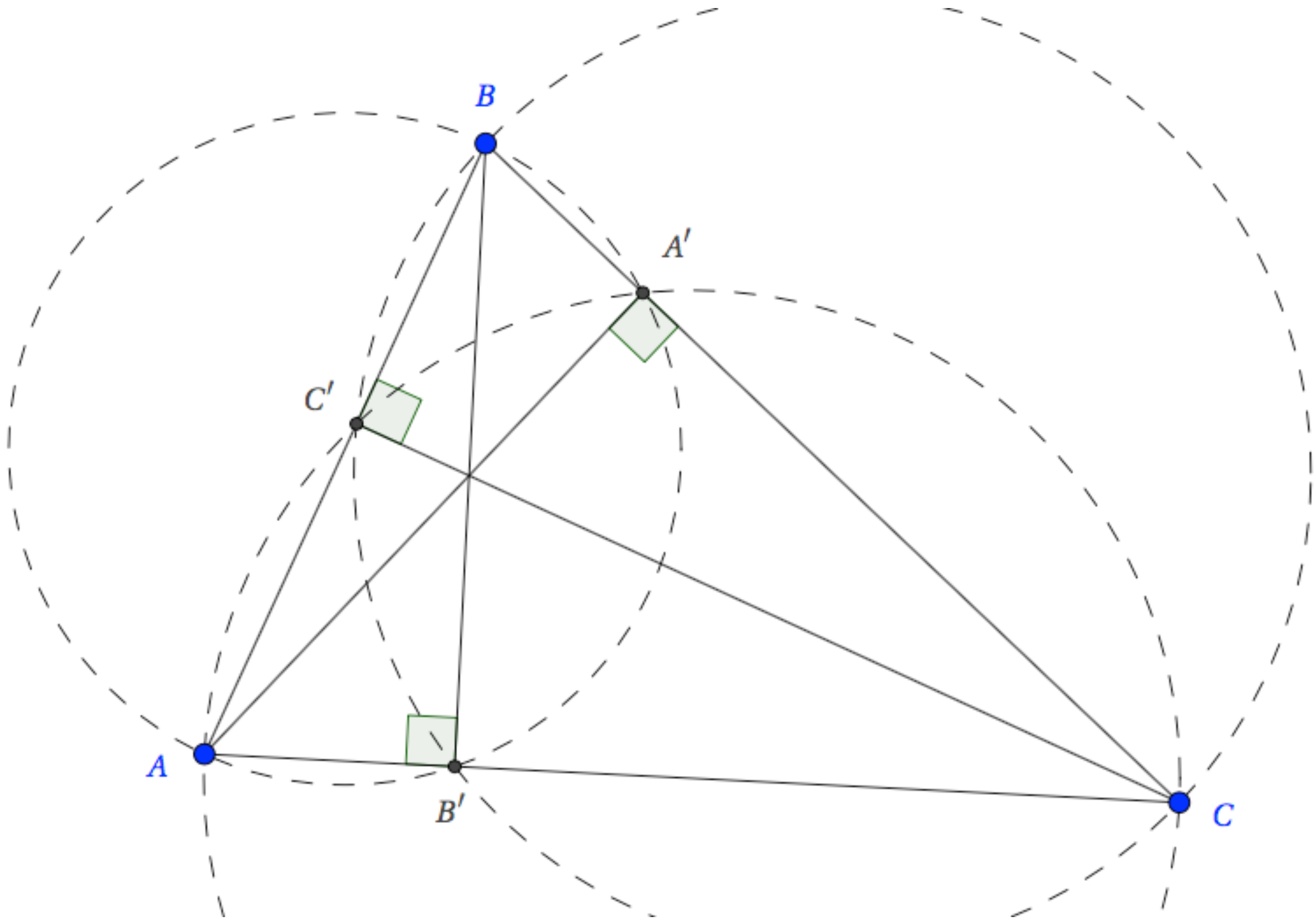


Exemple : « chaîne » de parallélogrammes

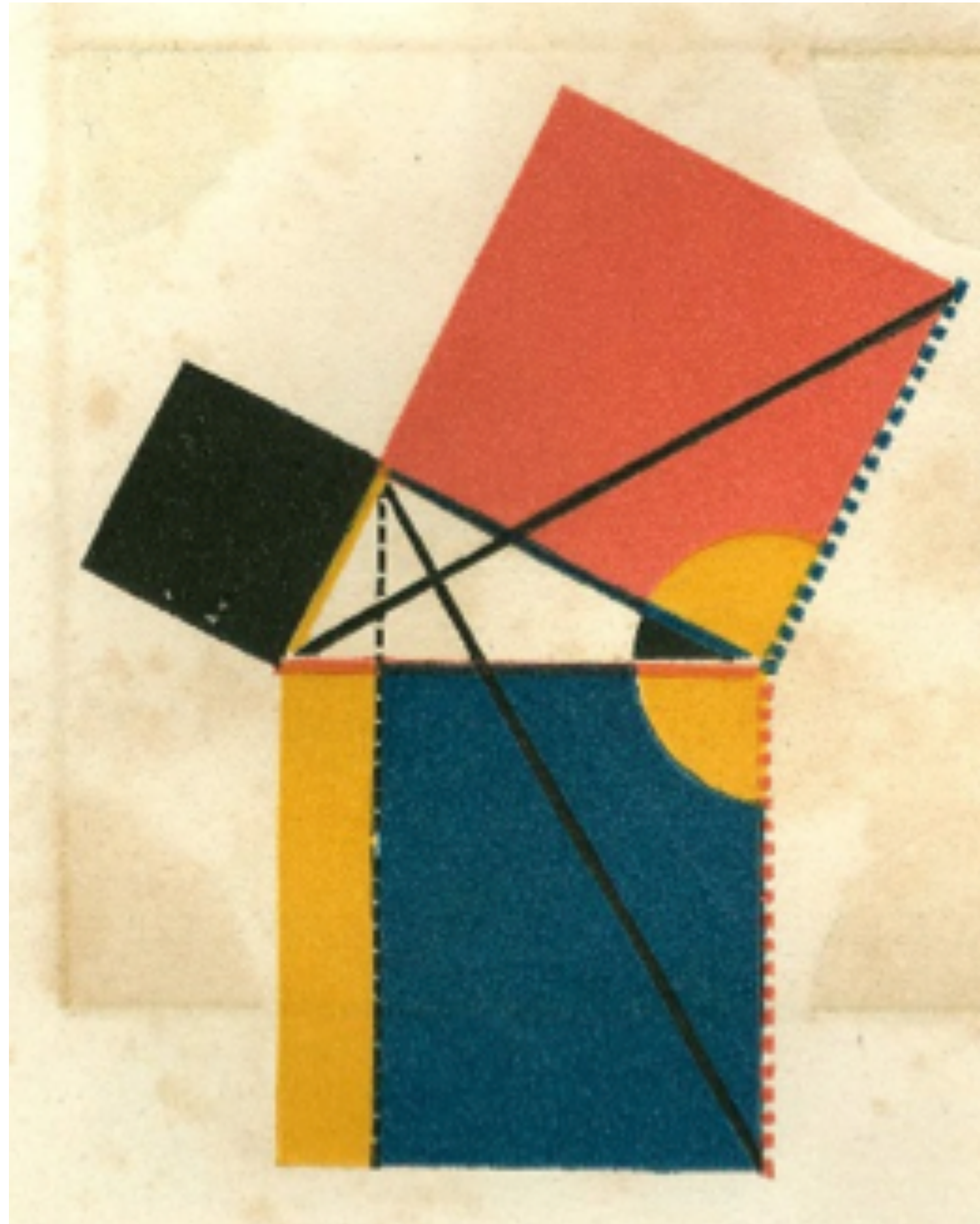
Exercice 18 (Deux réflexions ♡). Soit A un point intérieur à un angle xOy. On note B et C les symétriques de A par rapport aux bords de l'angle. Le segment $[BC]$ coupe les bords de l'angle en D et E. Montrer que $[AO)$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{DAE}$.



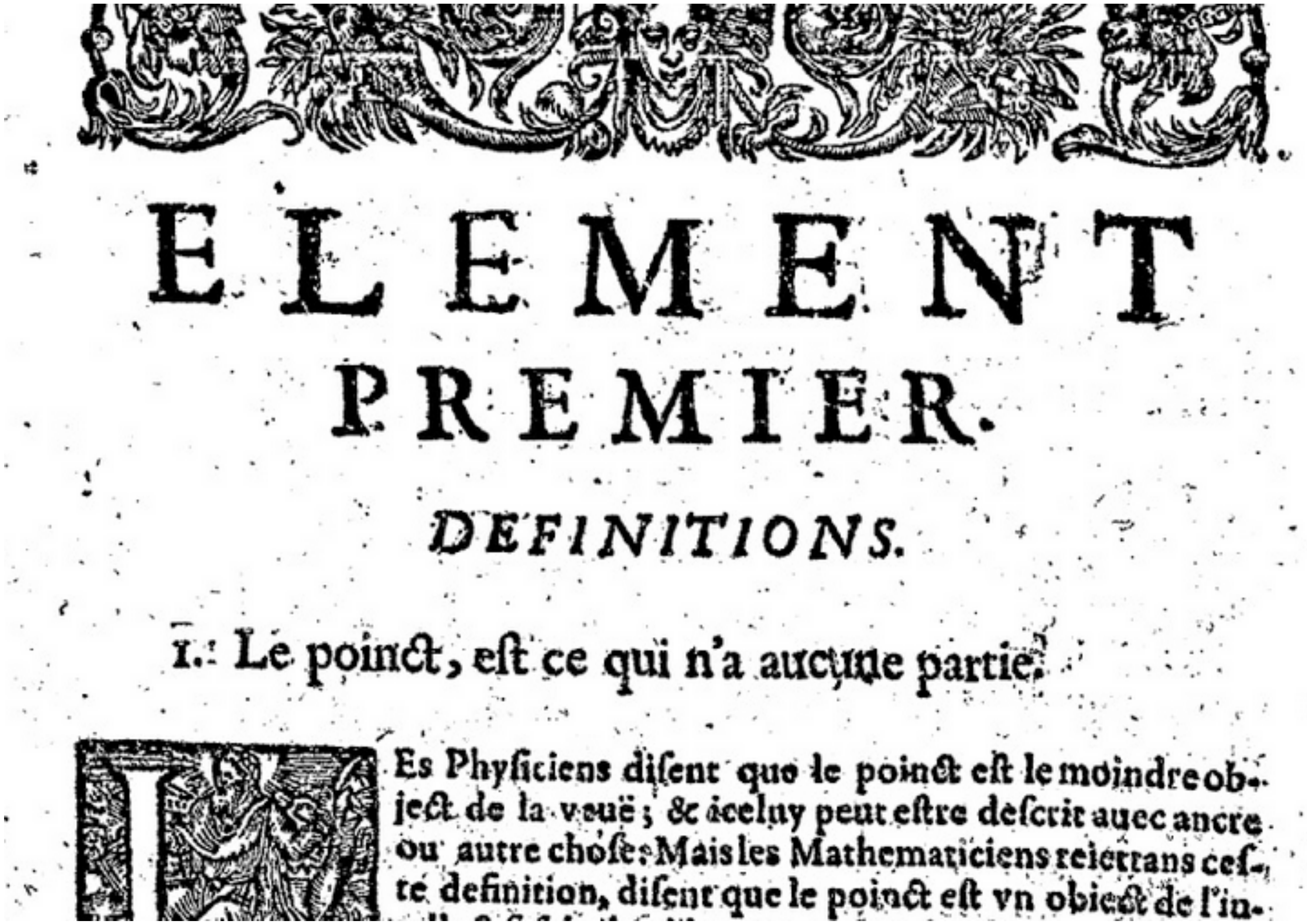
Exemple :« chaîne » de triangles isocèles



Exemple : « chaîne » de cercles
(triangle orthique)



V. Introduction à l’axiomatisation et à la formalisation de preuves sur ordinateur



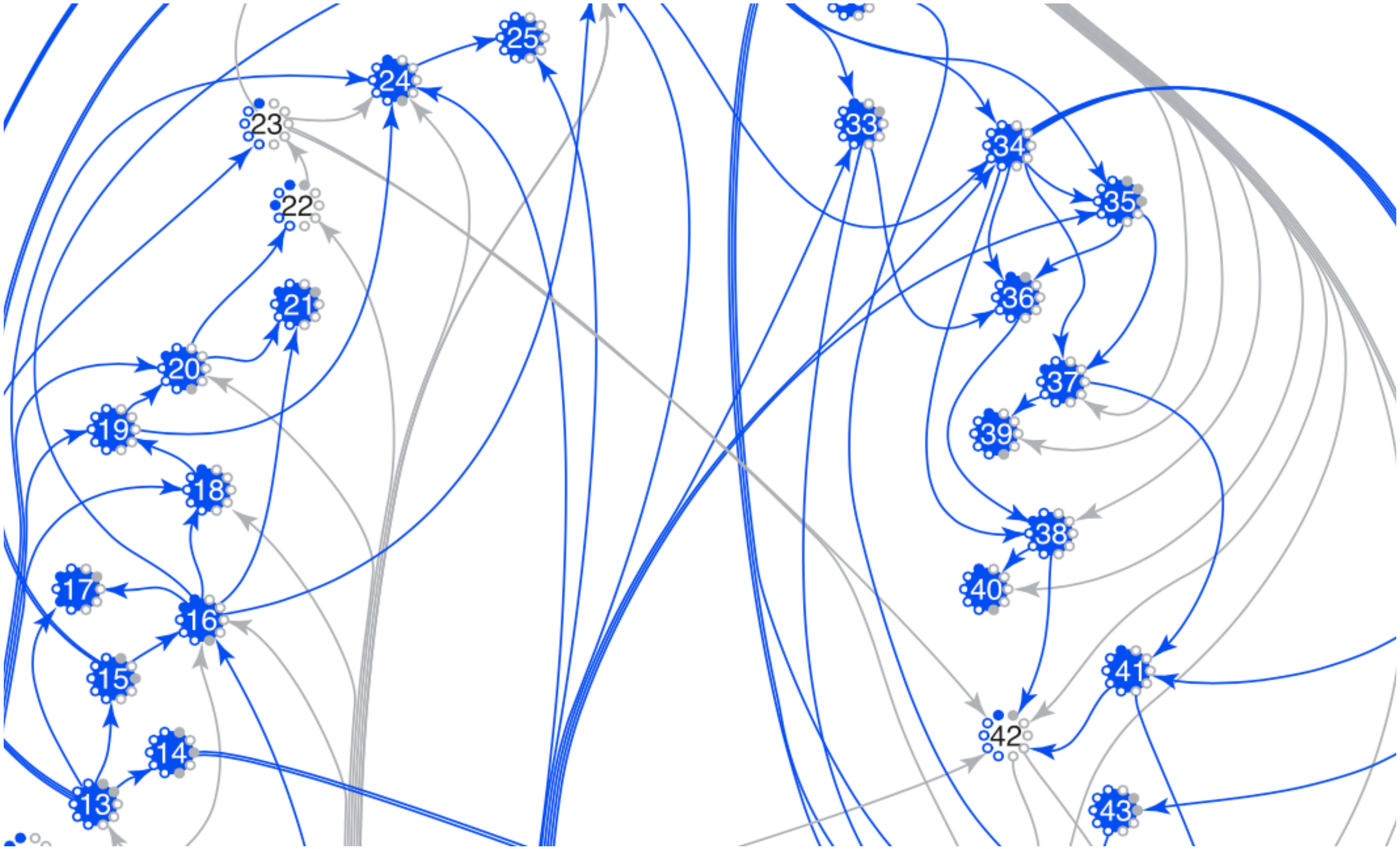
ELEMENT
PREMIER.
DEFINITIONS.

1. Le poinct, eſt ce qui n'a aucune partie.

LEs Phyſiciens diſent que le poinct eſt le moindre object de la veuë; & iceluy peut eſtre deſcrit auec ancre ou autre choſe. Mais les Mathematiciens reiettans ceſte definition, diſent que le poinct eſt vn obiect de l'in-

Axiomatisation

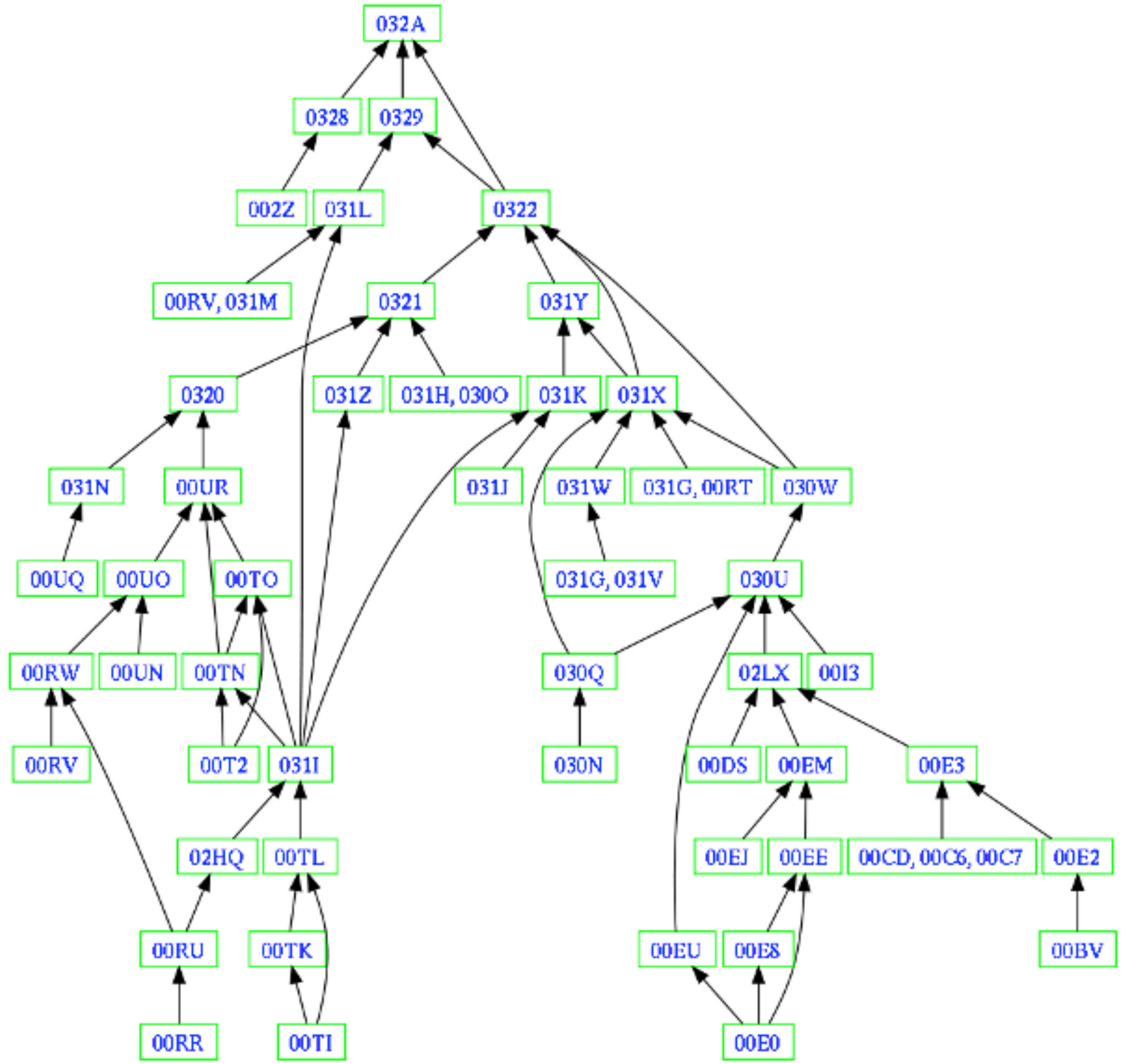
#FAIL



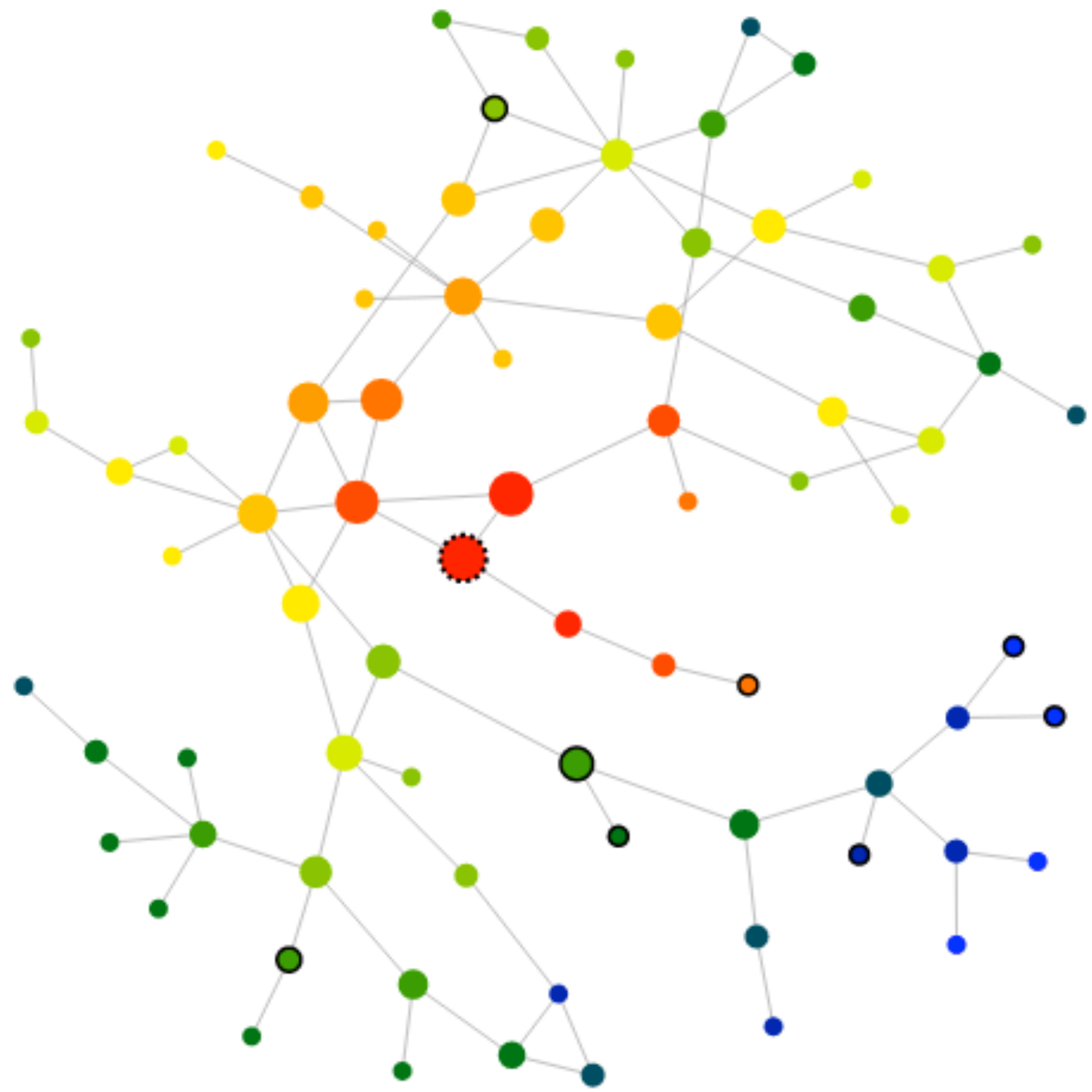
Visualisation de dépendances logiques
(Euclide)

Autres systèmes d'axiomes pour la géométrie

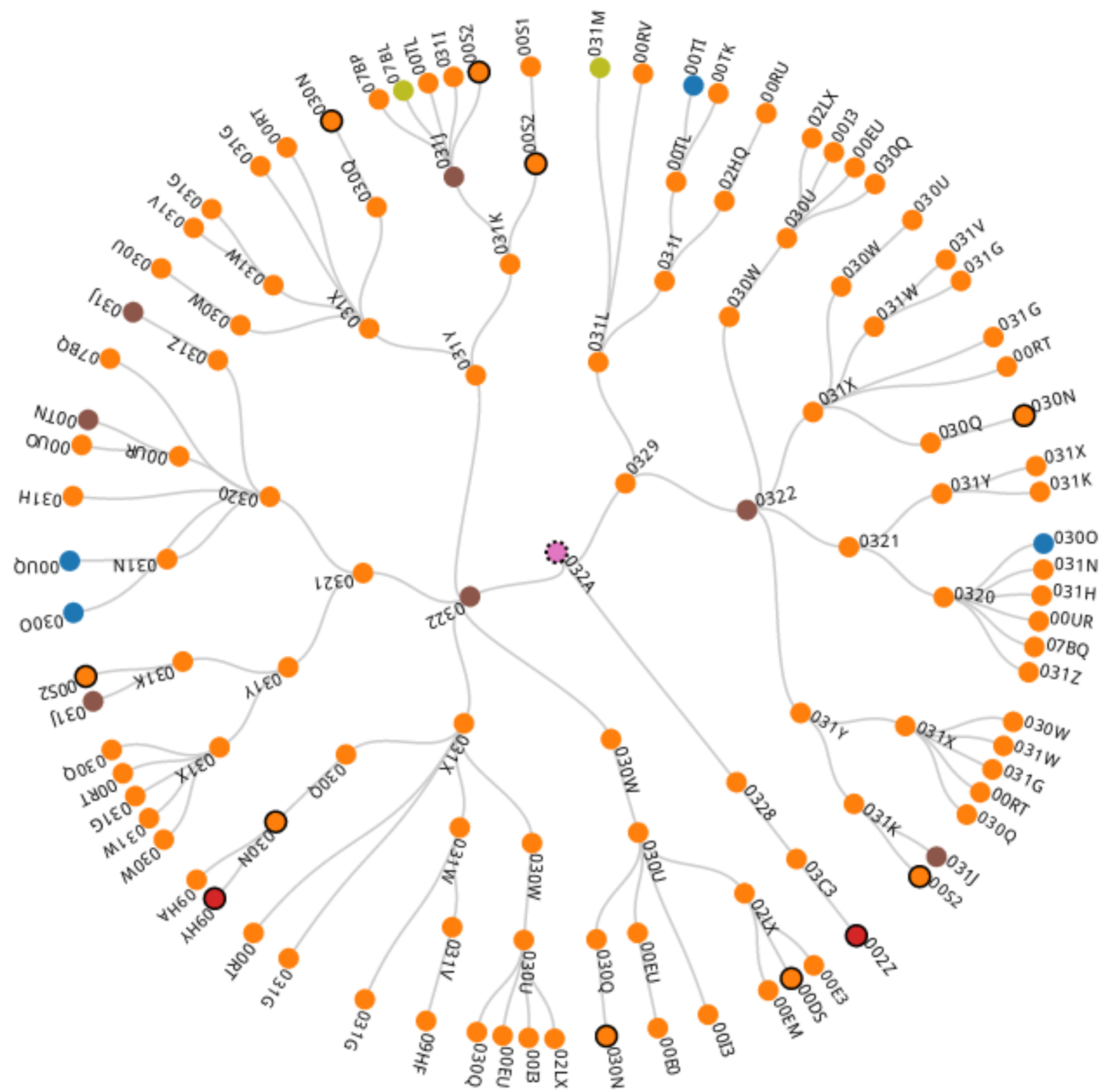
- Hilbert
- Birkhoff : seulement 4 axiomes pour la géométrie réelle plane euclidienne ! (Avec deux axiomes très puissants : mesure d'angle orientée dans $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ qui est continue, et critère de similitude des triangles.)



Visualisation de dépendances logiques
(Stacks project, https://stacks.math.columbia.edu/)



Visualisation de dépendances logiques
(Stacks project, https://stacks.math.columbia.edu/)



Visualisation de dépendances logiques
(Stacks project, https://stacks.math.columbia.edu/)

Logiciels de formalisation de preuves

- Isabelle/HOL
- Lean : voir le très bon cours « Introduction aux mathématiques formalisées » https://www.math.u-psud.fr/~pmassot/enseignement/math114/
- Lean comprend les variétés, même les espaces perfectoïdes !! (Par contre la formule de Cauchy en analyse complexe n'est pas encore formalisée.)