

Des ondes qui n'en sont pas : solitons et télescopes de Airy

Camille Laurent-Gengoux

IECL, Université de Lorraine, Metz

Metz, 29 janvier 2019

A en croire les documents d'accompagnements pour la compétence "modéliser" :

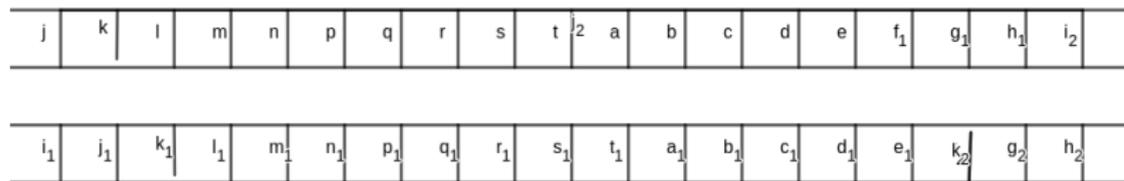
- 1 traduire une situation concrète en problème mathématique,
- 2 le résoudre
- 3 traduire la réponse mathématique en réponse concrète.

Mais je vais essayer de vous convaincre que c'est beaucoup plus que cela.

- 1 outil de compréhension par analogie des notions fondamentales,
- 2 la modélisation est un microscope-télescope de substitution.

Un jeu simple

Prenons des jetons, blancs d'un côté et noirs de l'autre, et jouons au jeu suivant :



Que se passe t-il si on a un bloc isolé de cinq jetons consécutifs ? Il va avancer de cinq cases à chaque étape.

Si l'on a deux blocs isolés : un de cinq jetons à l'arrière et un de trois jetons à l'avant. Ils vont finir par se croiser. Et là que va t-il arriver ?

Constatation expérimentale

On a :

- ① des vagues qui avancent sans se déformer,
- ② qui vont d'autant plus vite qu'elles sont longues,
- ③ et qui ressortent indemnes de collisions.

Le canal Scott Russell :

Image non libre de droit

Korteweg - et son cheval - découvrent le mascaret. Mais on dit *soliton*.

Et une belle équation

L'équation de Korteweg-de-Vries :

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^3} + 6u \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$$

où $u(x, t)$ est une fonction de x (= la position) et t (= le temps).
Dont voici le comportement (merci à Rickarbj). On a :

- 1 des vagues qui avancent sans se déformer,
- 2 qui vont d'autant plus vite qu'elles sont longues,
- 3 et qui ressortent indemnes de collisions.

Pourquoi cette coïncidence ?

S'agit-il d'ondes ?

Les ondes obéissent à une équation bien connue :

$$\frac{\partial^2 u(x, y, z)}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u(x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, z)}{\partial z^2} \right)$$

où c est la vitesse des ondes.

Les solutions :

- 1 des vagues qui avancent sans se déformer,
- 2 ...
- 3 et qui ressortent indemnes de collisions.

Exemples bien connus : ondes sonores, ondes lumineuses, corde vibrante.

S'agit-il d'ondes ?

Les ondes obéissent à une équation bien connue :

$$\frac{\partial^2 u(x, y, z)}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u(x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, z)}{\partial z^2} \right)$$

où c est la vitesse des ondes.

Les solutions :

- 1 des vagues qui avancent sans se déformer,
- 2 *et qui vont toutes à la même vitesse,*
- 3 et qui ressortent indemnes de collisions.

Exemples bien connus : ondes sonores, ondes lumineuses, corde vibrante.

A nous scientifiques :

- 1 Les ondes sont des phénomènes *linéaires*. La sortie indemne des collisions vient du "principe de superposition", c-à-d la linéarité.
- 2 Les solitons sont des phénomènes *non-linéaires*. La "sortie indemne des collisions" de KdV vient de la somme d'un terme de dispersion (linéaire) et d'un terme de concentration (quadratique) + la conservation de l'énergie.
- 3 En fait, cela vient de l'*intégrabilité au sens de Liouville* et l'existence de variables actions-angles (non-linéaires).

Mais *l'analogie avec le phénomène discret est la meilleure manière que je connaisse d'expliquer le phénomène sans théorie mathématique lourde.*

- 1 Autre exemple : le chaos...
- 2 ...avec l'effacement des décimales

Question

La lumière est-elle une onde ou une particule ?

Imaginons un coureur qui fait son jogging habituel

- 1 sous une pluie terrible,
- 2 au bord d'une mer démontée.

Evidemment :

- 1 plus il va vite, plus il voit les gouttes de pluie (= particules) venir vers lui avec un angle grand.
- 2 sa vitesse n'a aucune influence sur la direction des vagues (= ondes).

Ou, si sa vitesse ne change pas

- 1 si la pluie tombe plus lentement, il verra l'angle qu'il fait avec les gouttes ...
- 2 la vitesse des vagues n'a...

Question

La lumière est-elle une onde ou une particule ?

Imaginons un coureur qui fait son jogging habituel

- 1 sous une pluie terrible,
- 2 au bord d'une mer démontée.

Evidemment :

- 1 plus il va vite, plus il voit les gouttes de pluie (= particules) venir vers lui avec un angle grand.
- 2 sa vitesse de course n'a aucune influence sur la direction des vagues (= ondes).

Ou, si sa vitesse ne change pas

- 1 si la pluie tombe plus lentement, il verra l'angle qu'il fait avec les gouttes grandir,
- 2 la vitesse des vagues n'a aucune influence sur l'angle perçu.

En théorie, on devrait voir les étoiles selon un angle différent en été et en hiver : on appelle cela *parallaxe*.

Image non-libre de droit illustrant la parallaxe

Au temps de Galilée : indécélable. Début XVIII-ième, les instruments permettent les premières mesures.

... par des proches de *Bradley* vers 1720. Et on ne comprend rien aux résultats obtenus. Bradley voit alors une analogie :

Image d'un coureur et de la pluie qui tombe.

Faisons un dessin.

Consequence: 1757, Benoît XIV lève l'interdiction des livres héliocentriques.

Image non libre de droit

Pourquoi ? Car les ellipses de Bradley sont la première *vision directe* de la trajectoire de la Terre autour du Soleil.

Entendons-nous bien : depuis 1633,

- ① toute la communauté scientifique est héliocentriste,
- ② car les *modèles* héliocentristes donnent des prédictions correctes.

Mais il n'y avait pas de *vision directe de la trajectoire de la Terre*. C'est là le thème où je veux en venir :

Ici, la modélisation a vu ce que l'Homme ne saurait voir.

- ① toute la communauté scientifique est héliocentriste,
- ② car les *modèles* héliocentristes donnent des prédictions correctes.

Mais il n'y avait pas de *vision directe de la trajectoire de la Terre*. C'est là le thème où je veux en venir :

Ici, la modélisation a vu ce que l'Homme ne saurait voir.

Question

La lumière est-elle une onde ou une particule ?

Imaginons un coureur qui fait son jogging habituel

- 1 sous une pluie terrible,
- 2 au bord d'une mer démontée.

Evidemment **si sa vitesse ne change pas**

- 1 **si la pluie tombe plus lentement, il verra l'angle qu'il fait avec les gouttes grandir,**
- 2 **la vitesse des vagues n'a aucune influence sur l'angle perçu.**

Donc :

L'aberration des étoiles demande lumière particulaire.

C'est ennuyeux - car il y a d'excellents arguments aussi en faveur de la théorie ondulatoire...

Question

Peut-on trancher ?

Arrive Airy.

- 1 La lumière ralentit dans l'eau.
- 2 Que se passe t-il si on remplit un télescope d'eau ?

Faisons un dessin.

Théorème

Dans la théorie corpusculaire de la lumière, l'aberration des étoiles est encore plus nette dans un télescope rempli d'eau.

Question

Peut-on trancher ?

Arrive Airy.

- 1 La lumière ralentit dans l'eau.
- 2 Que se passe t-il si on remplit un télescope d'eau ?

Faisons un dessin.

Théorème

Dans la théorie corpusculaire de la lumière, l'aberration des étoiles est encore plus nette dans un télescope rempli d'eau.

Expérience

Rien de tel n'est observé !

Question

Peut-on trancher ?

La théorie corpusculaire naïve de la lumière est donc à rejeter.

En fait :

L'expérience de Airy ne se comprend en fait que dans la *relativité restreinte*.

Le premier à expliquer vraiment ce paradoxe sera Einstein - et à vrai dire Lorenz avant lui.

Question

La modélisation comme œil de substitution

- 1 on fait un modèle mathématique d'un phénomène invisible,
- 2 on en déduit un comportement macroscopique mesurable,
- 3 si on mesure le contraire, on rejette, sinon, on accepte.

Différent des modélisation demandées dans les programme "un laboureur veut diviser son champ triangulaire en trois parties égales", qui font rarement des hypothèses, mais reposent sur des *vision directe*...

... on tenta d'en trouver une dans l'atelier.

Merci de votre attention.