Chapitre 9 : Espérance et variance d'une variable aléatoire
Loi binomiale (1e approche)

Axe « Probabilités - Statistiques »

Exercice 1

Deux urnes A et B contiennent des boules indiscernables au toucher. L'urne A contient 3 boules vertes numérotées 1, 2 et 3. L'urne B contient 4 boules rouges numérotées 1, 2, 3 et 4. Un jeu consiste à prélever d'abord dans l'urne A une boule verte qui indique le nombre de points marqués, puis dans l'urne B une boule rouge qui indique le nombre de points perdus.

A l'issue des deux prélèvements, on fait le bilan des points marqués ou perdus. Par exemple, si on prélève la boule verte n°2 suivie de la boule rouge n°3, le bilan est $2-3=-1$ donc on perd 1 point. On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de points gagnés ou perdus (suivant que le résultat est positif ou négatif).

1. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X (on pourra utiliser un arbre ou un tableau).
2. Calculer son espérance $E(X)$ et l'interpréter.
3. Calculer sa variance $V(X)$ (sous forme fractionnaire réduite) et son écart-type $\sigma(X)$.
4. On reprend le jeu, mais on décide de doubler le nombre de points marqués ou perdus. On note Y la variable aléatoire donnant le nouveau nombre de points. Déterminer $E(Y)$, $V(Y)$ et $\sigma(Y)$.

Exercice 2 (notion de loi géométrique tronquée)

Un coffret contient 60 perles vertes et 40 noires. On tire au hasard, successivement, et avec remise, quatre perles du coffret. On s'intéresse à l'obtention de la première perle verte.

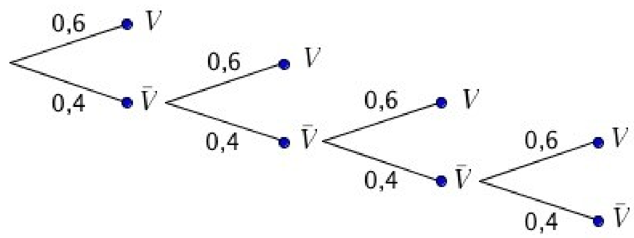
On appelle X la variable aléatoire qui indique le rang de sortie de la première perle verte. Par convention, si on n'obtient pas la perle verte, on attribue à X la valeur 0.

Partie A - illustration par un arbre pondéré

1. Représenter les quatre tirages successifs par un arbre pondéré. On notera V l'évènement « la boule tirée est verte ».
2. Calculer la probabilité de l'évènement $(X=0)$.
3. Dresser le tableau de la loi de X.
4. Calculer $E(X)$, et interpréter le résultat obtenu.

Partie B - illustration par un arbre réduit

Justifier que l'arbre réduit ci-dessous permet de retrouver la loi de X.



On dit que la variable aléatoire X suit la loi géométrique tronquée de paramètres $n=4$ et $p=0{,}6$

Exercice 3

Toute ressemblance avec des personnes connues serait le fruit d'une pure coïncidence !

Un élève de lycée réputé pour être un « couche-tard » arrive en retard le matin au lycée avec une probabilité inconnue qui sera notée p (où $p \in [0\ ;\ 1]$). Une semaine comporte 5 jours de cours et les retards de cet élève sont indépendants les uns des autres. On appelle X la variable aléatoire qui, sur une semaine de cours, comptabilise le nombre de matins où cet élève arrive en retard.

1. Dire quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire X et justifier qu'elle suit une loi binomiale.
2. (a) Déterminer en fonction de p la probabilité de l'événement A : « sur une semaine de cours, l'élève est en retard le jeudi uniquement ».

   (b) Déterminer la probabilité de l'événement $(X=1)$ en fonction de p.
3. Au bout de quelques mois de cours, le CPE sait que dans une classe de première, Florent et Robby sont

des « couche-tard ». Ce CPE aime faire des études statistiques ; il déduit de ses études que la probabilité que Florent arrive en retard le matin est de 0,6 et celle de Robby est de 0,7.

Avec ces données, qui de Florent ou Robby, a la plus forte probabilité d'être en retard exactement trois matins sur une même semaine ?

O*n pourra noter F la variable aléatoire qui, sur une semaine de cours, comptabilise le nombre de matins où Florent arrive en retard et R la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de matins où Robby arrive en retard*.