De la loi binomiale vers une loi continue.

Soit X_n, une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et p. On note µ son espérance et σ son écart type

Partie A. Loi Binomiale, passage du diagramme en bâtons à l'histogramme.

1. Déterminer µ et σ en fonction de n et p

2. Voici un extrait de la feuille de calcul à créer sur tableur.

On prendra pour l'instant $n = 20$ *et* $p = 0,4$.

B6 | =SI(A6>B$1;" ";LOI.BINOMIALE(A6;B$1;D$1;0))

	A	B	C	D	E	F
1	*n* =	20	*p*=	0,4		
2						
3	Espérance =		écart type=			
4						
5	x	P(X=x)				
6	0	3,65616E-05				

Recopier cette feuille de calcul, inscrire les formules dans les cellules B3 et D3.

Expliquer la formule saisie dans la cellule B6.

Étendre ces deux colonnes afin d'avoir 500 valeurs. On dresse ainsi le tableau de valeurs de la loi de probabilité de X_n.

3. À l'aide de la fonction graphisme, histogramme, faire apparaitre le diagramme en bâtons de cette loi.

4. Pour transformer le diagramme en bâtons en histogramme, on donne à chaque bâton, une épaisseur de 1, en remplaçant chaque abscisse k par l'intervalle $[k\,;k+1[$.

Quelle est l'aire d'un rectangle ?

Quelle est l'aire totale de cet histogramme ?

Partie B. Vers une loi continue.

À l'aide du changement de variable $Z_n = \dfrac{X_n - \mu}{\sigma}$:

1. a. Justifier que Z_n peut s'écrire sous la forme $aX_n + b$.

Déterminer alors l'espérance mathématique et la variance de Z_n.

b. Traduire la probabilité $P(k \le X_n < k+1)$ à l'aide de la variable aléatoire $Z_n = \dfrac{X_n - \mu}{\sigma}$.

c. Représentation graphique de Z_n : dans la colonne C, effectuer ce changement de variable sur le tableur, puis représenter l'histogramme correspondant. Faites varier les valeurs de n et de p. Pour une valeur de p fixée, que constate-t-on quand n devient de plus en plus grand ?

d. Déterminer la base des rectangles constituant l'histogramme, leurs hauteurs respectives puis l'aire totale de cet histogramme. On souhaite associer à cet histogramme, une fonction de densité. Quel ajustement devons-nous réaliser ? Le réaliser dans la colonne D.

2. Dresser dans la colonne E, le tableau de valeurs de la fonction φ d'expression $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ en utilisant la formule LOI.NORMALE(x;0;1;0).

Que remarque-t-on ?

Les mathématiciens Abraham de Moivre et Pierre-Simon de Laplace ont démontré que si a et b sont deux réels quelconques, alors $P\left(a \le Z \le b\right)=\int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$ où Z suit la loi continue de densité de probabilité φ.
$P\left(a \le Z_n \le b\right)$ se rapproche de $P\left(a \le Z \le b\right)=\int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$ lorsque n tend vers l'infini.
La loi de Z est appelée la loi normale centrée réduite.