L'intervalle de fluctuation en terminale

Première partie : la proportion *p* est connue de manière certaine.

Nous disposons d'un biberon opaque qui contient des boules rouges et des boules qui ne sont pas rouges. Le contenu de ce biberon peut être assimilé à une population dans laquelle on connait la proportion p de boules rouges qui est égale à 0,3. En retournant ce biberon, on peut observer la couleur de la boule sortante, ce qui permet de réaliser rapidement un tirage. En répétant cette manipulation n fois, on effectue n « tirages indépendants » et on obtient ainsi un échantillon de taille n. On appelle X_n la variable aléatoire qui représente le nombre de boules rouges dans cet échantillon de taille n.

A. Loi binomiale, variable aléatoire de la fréquence observée.

1. Justifier que X_n suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
2. Lors d'un test sur 25 essais, déterminer la probabilité que, dans ce cas, le nombre de boules rouges soit compris entre 2 et 8.
3. Un élève a voulu tester le biberon avec 50 essais. Quelle est la probabilité que, dans ce cas, le nombre de boules rouges soit compris entre 9 et 19 ?
4. Soit $F_n = \dfrac{X_n}{n}$.
   - **a)** Que représente la variable aléatoire F_n ?
   - **b)** On décide de tester le biberon avec 100 essais. Déterminer la probabilité que la fréquence de boules rouges soit comprise entre 0,19 et 0,37.

B. Un nouvel intervalle de fluctuation.

On note I_n l'intervalle $\left[p - 1{,}96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1{,}96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$ où p est la proportion du caractère étudié et n la taille de l'échantillon.

1. **a)** Vérifier que l'intervalle I_{336} correspond à l'intervalle [0,251 ; 0,349].

   b) Déterminer les entiers a et b tels que $P\left(0{,}251 \leq F_{336} \leq 0{,}349\right) = P\left(a \leq X_{336} \leq b\right)$.

   Rappel : La variable aléatoire X_n ne prend que des valeurs entières comprises entre 0 et n.

   c) En déduire la probabilité que la variable fréquence F_{336} prenne ses valeurs dans l'intervalle I_{336}.
2. En utilisant le même raisonnement, déterminer la probabilité que la variable aléatoire fréquence F_{100} prenne ses valeurs dans l'intervalle I_{100}.

C. Avec un tableur

1. Reproduire la feuille de calcul ci-dessous:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		Borne inférieure p-1,96*racine(p*(1-p)/n)	Borne supérieure p+1,96*racine(p*(1-p)/n)	Borne inférieure, Valeur approchée à l'unité par excès	Borne supérieure, Valeur approchée à l'unité par défaut			
2	n					Probabilité	p= 0,3	
3	30							
4	40							
5	50							

2. Dans les cellules B3 et C3, saisir les formules permettant de préciser la borne inférieure et la borne supérieure de l'intervalle I_n pour la valeur de n donnée dans la cellule A3. Les recopier vers le bas jusqu'à la ligne 100.

3. Nous disposons des formules ARRONDI.SUP(nombre ; nombre de chiffres) et ARRONDI.INF(nombre ; nombre de chiffres). Quelles formules doit-on utiliser dans les cellules respectives D3 et E3 concernant le calcul de « A3*B3 » et « A3*C3 » ?

Les saisir dans les cellules correspondantes tout en justifiant votre choix.

4.a) Dans la cellule F3, saisir et expliquer la formule :

« =LOI.BINOMIALE(E3 ; A3 ; H$2 ; VRAI)−LOI.BINOMIALE(D3−1 ; A3 ; H$2 ; VRAI) »

b) Recopier la plage B3 : F3 jusqu'à la ligne 100.

c) A quoi correspondent les valeurs obtenues dans la colonne F ?

5. Représenter le nuage de points {(A3 ; F3) ; (A4 ; F4) ;….; (A100 ; F100)} à l'aide de l'assistant graphique du tableur.

6. Quand la valeur de n augmente, de quelle valeur la probabilité calculée se rapproche-t-elle ? Cet intervalle de fluctuation déterminé à partir de p et n, contient F_n avec une probabilité d'autant plus proche de p que n est grand. L'intervalle I_n est ainsi un intervalle de fluctuation asymptotique de la fréquence $F_n = \dfrac{X_n}{n}$, au seuil de 95%.

Deuxième partie : la proportion p est une hypothèse que l'on va tester.

Le préparateur qui a en charge le « remplissage » des biberons ne sait plus où il en est. Son problème est que les biberons sont scellés dès qu'ils sont remplis. Il affirme que la nouvelle proportion de boules rouges dans le dernier biberon préparé est de 0,4.

1. Pour tester la véracité de ses dires, on teste 50 fois ce biberon et on obtient une fréquence f d'apparition de boules rouges de 0,36. Montrer que f appartient aux intervalles de fluctuation asymptotique au seuil de 95% des proportions $p = 0,3$ et $p = 0,4$, notés respectivement I_{50} et J_{50}.
2. Avec la même fréquence d'apparition, pouvons-nous conclure en testant à présent 400 fois ce biberon ?
3. Pour cette même fréquence, déterminer le plus petit entier naturel n donnant les deux intervalles de fluctuation I_n et J_n disjoints. Est-il raisonnable de penser que l'affirmation du préparateur est fausse ?