

Informatique Débranchée : 21 nains

Compte-Rendu de séance en classe

Hélène VIROLLAUD - Mars 2015

I Contexte

Le problème posé aux élèves peut être vu sous différents angles pour être intégré à différents niveaux. On peut par exemple le voir comme un exercice d'arithmétique : congruences avec les terminales, division euclidienne au collège ; un travail sur le binaire, le calcul en base 2, un travail d'informatique avec la notion de bit de parité...

Et certainement d'autres façons d'utiliser ce problème sont possibles.

Voici ce qui est proposé aux élèves :

21 nains sont condamnés à mort. On leur propose une épreuve leur permettant d'échapper à leur condamnation. Voici ce qui leur est proposé :

« Vous allez être disposés de manière aléatoire sur 21 marches consécutives d'un escalier, les yeux tournés vers le bas de l'escalier un bandeau sur les yeux. Chacun d'entre vous se verra poser un bonnet de couleur blanche ou rouge sur la tête. On enlèvera ensuite le bandeau de vos yeux et chacun à tour de rôle en commençant par celui qui se trouvera en haut de l'escalier devra donner la couleur du bonnet se trouvant sur sa tête. Vous n'aurez le droit que de prononcer un seul mot soit « blanc », soit « rouge ». Si vous réussissez, vous échapperez à la mort, dans le cas contraire vous serez exécuté ».

Les nains se retrouvent avant leur épreuve pour discuter de la stratégie à adopter pour être le plus possible à être sauvés.

Le but de notre exercice est de trouver la meilleure stratégie qu'ils doivent adopter.

Partie A

1. Faire un schéma pour modéliser la situation.
2. Combien de bonnets voit le nain qui se trouve en haut de l'escalier ?
Et celui qui se trouve en bas de l'escalier ?
3. D'après vous, combien de nains peuvent être sauvés à coup sûr au maximum ?

Partie B

Un des nains affirme qu'il est possible de sauver au moins 10 des 21 nains et explique son idée. Mais les autres sont sceptiques, ils trouvent que c'est beaucoup de sacrifices et pensent qu'en réfléchissant un peu on doit pouvoir mieux faire.

1. Quelle stratégie propose le nain ?

L'un d'entre eux après un peu de réflexion, affirme qu'il a une idée pour que 20 des 21 nains soient sauvés. Les autres sont enchantés mais il leur explique qu'il va falloir être très attentif aux réponses des autres pour pouvoir presque tous s'en sortir. Pour les aider à comprendre, il leur explique qu'il faut considérer les chapeaux blancs comme des 0 et les chapeaux rouges comme des 1...

2. Reprendre le schéma de la partie 1 et l'adapter avec la proposition du nain.
3. Quelle peut être la stratégie à laquelle pense le nain ?
4. Rédiger une réponse expliquant globalement la stratégie puis, faire une liste de consignes (un algorithme !) permettant à chaque nain de savoir quelle est la couleur de son bonnet.

Bonus : on pourra réfléchir à une stratégie similaire pour 4 couleurs de bonnets (rouge, vert, jaune et bleu par exemple) et un nombre de nain différent...

II Déroulement de la séance

II.1 Généralités

La séance a duré environ 40 minutes avec des élèves de seconde.

Elle a été menée avec quatre demi-groupes différents d'environ 18 élèves à chaque fois.

Les élèves ont travaillé par 2, 3 ou 4 suivant les groupes.

Découpage de la séance :

- 5 min : Lecture de l'énoncé
- 10 min : Schéma et premières idées
- 5 min : Restitution
- 15 min : Elaboration de la stratégie gagnante
- 10 min : Rédaction

II.2 Première étape : Lecture

Après la phase de lecture, les élèves ont posé beaucoup de questions pour essayer de mieux comprendre. Ils ont imaginé toute sorte de trucage dans le son de la voix, dire des mots supplémentaires, prononcer plusieurs fois les couleurs, faire des bruits avec les pieds...

Une question récurrente est le nombre de bonnets de chaque couleur. Le fait que ce nombre soit aléatoire semble gêner les élèves.

Une fois la mise au point faite pour circonscrire les règles et les interdits, la réaction immédiate de la plupart des élèves est de dire que le fait d'être sauvé ou pas pour un nain ne peut être que le fruit du hasard.

Ils ont ensuite commencé à répondre aux questions de la partie A et à faire le schéma.

II.3 Deuxième étape : Schéma, premières idées et restitution

Le schéma a permis de mettre plus clairement le problème en place, on a numéroté les marches de l'escalier pour davantage de clarté et de simplicité pour échanger.

Il a, pour chacun des groupes, été nécessaire d'expliquer le terme « à coup sûr » afin de lever les ambiguïtés.

Les questions posées sur le nombre de bonnets vus par chacun des nains ont permis elles aussi de s'approprier le problème.

Un temps de réflexion et de dialogue à l'intérieur des binômes ou trinômes a permis d'élaborer les premières stratégies. Certaines sont revenues à plusieurs reprises même si elles ne menaient finalement pas à sauver de nains.

Parmi les stratégies proposées :

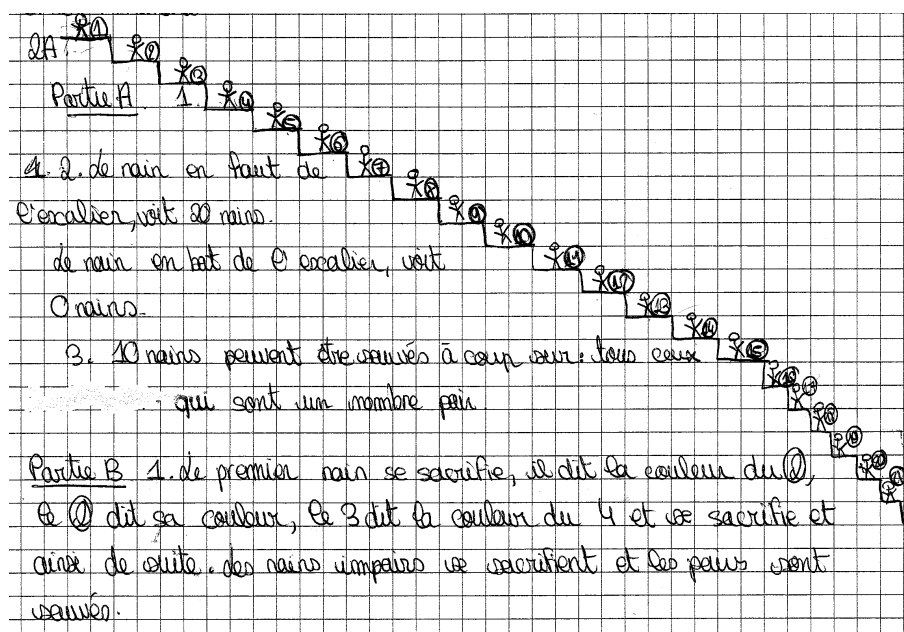
- ★ Ils disent tous « blanc » ou tous « rouge » et comme ça on en sauve la moitié. (ou alternativement rouge et blanc...)
- ★ Le premier dit la couleur du second, puis le second celle du troisième et ainsi de suite, comme ça ils sont tous sauvés, sauf le premier !

En échangeant sur les différentes stratégies qui ne permettaient pas en fait de sauver à coup sûr de nain, on a pu arriver à dire que ce qui était sûr, c'est que le nain situé sur la première marche ne pouvait pas être sauvé à coup sûr.

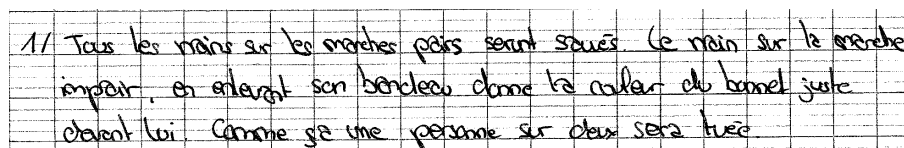
À partir de la dernière stratégie proposée, on se dirige vers une stratégie possible ce qui n'était pas clairement existant jusque là. Le dialogue avec l'ensemble du groupe a presque toujours permis de construire la stratégie gagnante qui est proposée par le premier nain.

À l'oral, cette stratégie est énoncée par un élève, voire plusieurs pour proposer des améliorations ou des corrections.

Vient ensuite le temps de rédaction pour chaque petit groupe d'élèves de cette stratégie pour sauver 10 des 21 nains.



Jusque là, les élèves n'avaient utilisé aucun terme mathématique, et lors de la rédaction, ils ont ressenti le besoin d'utiliser la notion de parité pour éviter les termes « et ainsi de suite » et être plus précis ou rigoureux dans la rédaction de leur solution.



II.4 Élaboration de la stratégie gagnante et rédaction

Dans aucun des quatre groupes les élèves n'ont pas réussi à trouver seuls une stratégie gagnante permettant de sauver 20 des 21 nains.

Pour commencer à approcher une solution, on a remplacé les couleurs par des 0 et des 1 comme préconisé dans l'énoncé.

Ensuite, on a travaillé sur des escaliers un peu moins grands, par exemple de 7 marches, puis plusieurs exemples ont été donnés au tableau donnant le nombre que devait donner le premier nain afin que tous les autres soient sauvés.

Après observation des différentes situations, les élèves émettent des hypothèses précisant ce pourquoi le premier nain disait 1 ou 0.

La parité de la somme des nombres portés par les nains a presque toujours réussi à apparaître. En revanche, l'explication à proprement parler a été très difficile à établir. Il a fallu les guider réellement pour y parvenir.

Étant donné que l'objectif de la séance était de leur permettre de rédiger la stratégie gagnante, celle-ci a été construite plus ou moins collectivement et elle a été globalement énoncée pour 7 marches afin que tous les groupes puissent rédiger cette stratégie gagnante.

On trouve ci-dessous la trace écrite de plusieurs groupes, présentant en des termes différents la stratégie gagnante.

La première trace écrite est un véritable algorithme en langage naturel. Il ne donne pas la solution complète mais permet pratiquement la récurrence.

4. Le nain qui se trouve tout en haut regarde le nombre de bonnets rouge (1) et blanc (0).

- Si en additionnant il trouve un nombre pair, il dit 0.
- Si en additionnant il trouve un nombre impair, il dit 1.

Le nain suivant regarde le nombre bonnet.

- Si le nombre est pair et que le nain précédent a dit 0, il sait qu'il est blanc (0).
- Si le nombre est impair et que le nain précédent a dit 0, il sait qu'il est rouge (1).
- Si le nombre est pair et que le nain précédent a dit 1, il sait qu'il est rouge (1).
- Si le nombre est impair et que le nain précédent a dit 1, il sait qu'il est blanc (0).

Ce deuxième algorithme n'est pas explicite mais il montre que les élèves ont bien compris la stratégie.

4. Chappelle 0 le blanc et 1 le rouge. $\rightarrow 0 = \text{pair} \rightarrow 1 = \text{impair}$

Le nain 21 observe les différentes couleurs devant lui et compte le nombre de bonnets rouges. S'il y en a un nombre pair, il dira "0" \rightarrow blanc. S'il y en a un nombre impair, il dira "1" \rightarrow rouge.

Celui-ci se sacrifie.

Le nain 20 saura alors si le nb de bonnets rouges est pair ou impair, et pourra alors en déduire sa propre couleur, et ainsi de suite.

Ce troisième extrait de compte-rendu montre que les élèves ont compris mais n'arrivent pas à exprimer clairement l'algorithme.

Si la parité de paire et impaire change, leur couleur de bonnet est différente de celui d'avant.

III Conclusion

L'activité ainsi menée est attractive pour les élèves. Ils expriment avoir dû beaucoup réfléchir et cela est très positif. Le problème les a intéressés et ils ont bien joué le jeu de la recherche et cela quel que soit leur niveau en mathématiques. Le problème n'apparaissant pas mettre en jeu des compétences élaborées, des élèves habituellement assez passifs lors des activités en classe se sont montrés enjoués et se sont clairement beaucoup investis.

En revanche, la stratégie gagnante que l'on pouvait attendre est difficile à établir et il faudrait certainement réfléchir à une série de questions différente pour la deuxième partie afin qu'ils réussissent au moins pour certains d'entre eux, à fournir un algorithme sans l'aide du professeur, cela serait bien plus constructif et leur donnerait la sensation d'avoir réussi à répondre au problème posé de manière optimale.