Calcul littéral-niveau quatrième

<u>Exercice</u> : Voici deux programmes de calculs.

<u>Programme A</u>	<u>Programme B</u>
- Choisir un nombre. - Multiplier ce nombre par 10. - Soustraire 15 au résultat précédent.	- Choisir un nombre. - Prendre le double du nombre choisi. - Ajouter (– 3) au résultat obtenu. - Multiplier le résultat par 5.

1. a) Avec le programme A, vérifie que lorsque le nombre de départ est 2, on obtient 5.

   b) Qu'obtiens-tu avec le programme B en choisissant 2 comme nombre de départ?
2. a) Choisis trois autres nombres et applique à chacun le programme A, puis le programme B.

   b) Que remarques-tu ? Peux-tu le **démontrer** ?

<u>Place dans la progression</u> : en cours d'année de 4ème.
Il faut :
- Avoir vu la multiplication des nombres relatifs ;
- Avoir manipulé des expressions littérales ;
- Avoir abordé des exercices faisant appel au calcul littéral.

<u>Objectifs</u>
- Montrer l'intérêt du calcul littéral.
- Utiliser le calcul littéral pour prouver un résultat.
- Traduire un programme de calcul par une expression littérale.

<u>Éléments du socle pouvant être évalués</u>
Compétence 3
- Mener à bien un calcul à la main.
- Raisonner, argumenter, démontrer.

<u>Pré-requis</u>
- Connaître le vocabulaire des opérations (double, somme, ...).
- Effectuer des opérations simples sur les nombres relatifs.
- Connaître et appliquer les règles de simplification d'écriture.
- Développer une expression du type k(a+b).

- **Pourquoi ces prérequis ?**

- Pour voir que les deux programmes de calculs donnent le même résultat.
- Développer pour prouver que les deux programmes sont égaux.

- **Comment vérifier si les prérequis sont acquis ?**

- Avec des séances de calcul mental dès le début de l'année en rappelant brièvement une règle à chaque fois.

Exemple : 1ère séance : addition de deux nombres relatifs.

2ème séance : soustraction de deux nombres relatifs.
3ème séance : addition et soustraction de deux nombres relatifs.
Etc ...

- Lors des séances de calcul mental, ne pas hésiter à utiliser le vocabulaire associé aux opérations : somme, produit, facteurs, ...
- Lors d'un devoir à la maison, proposer un exercice faisant intervenir la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.
- Proposer un problème à traduire par une expression littérale.

- **Que faire si les prérequis ne sont pas acquis ?**

- Le calcul mental doit être un entraînement, il peut être bon de commencer régulièrement une heure de cours par 5 calculs rapides avec la correction immédiate.
- Pour le devoir à la maison, si la distributivité n'est pas acquise, on peut envisager une correction en classe en rappelant la règle et donner quelques exemples simples à traiter juste après ou pour la séance prochaine.

Scénario : Travail individuel en classe entière. Il peut y avoir des échanges avec le voisin.

- Le professeur annonce aux élèves qu'il va leur distribuer un travail et leur demande de bien lire la consigne et de répondre aux premières questions dans leur cahier d'exercices.
- La feuille avec les deux programmes de calculs et les questions est distribuée à chaque élève.
- On laisse 5 à 10 minutes pour faire les questions 1 et 2. Le professeur passe dans les rangs et aide les élèves les plus en difficultés (Le temps de réflexion peut être plus long).
- Pour les élèves les plus à l'aise, le professeur les incite à choisir des nombres en écriture fractionnaire pour la question 2.a).
- On corrige les questions 1. et 2. a) ; le professeur trace éventuellement un tableau et interroge plusieurs élèves pour reporter les résultats des questions 1.et 2.a) (si système de projection, on peut projeter).
- Pour la question 2.a) le professeur interroge un maximum d'élève dans la classe, si l'élève ne s'est pas trompé dans ses calculs, il obtient le même résultat pour les programmes A et B. Si ce n'est pas le cas, le professeur lui demande de vérifier ses calculs et interroge un autre élève en attendant. (5min.)

Suggestion de présentation au tableau de la correction ; il n'est pas nécessaire que les élèves le recopient :

	Résultat obtenu avec le	
Nombre choisi au départ	Programme A	Programme B
2		
(– 4)		
...		
...		

- Un élève lit la question 2.b). **Discussion en classe entière animée par le professeur pour la question 2.b)**. Les élèves devraient facilement remarquer que les résultats des programmes de calculs A et B sont égaux. Il faut maintenant qu'ils le démontrent.
- Le professeur interroge la classe sur ce que signifie le verbe « démontrer » et comment on peut démontrer le résultat dans cet exercice. Il **laisse débattre les élèves entre eux sur les pistes**

éventuelles, les incite à proposer des idées. Si le débat stagne, le professeur peut demander : « Peut-on essayer **tous** les nombres? ». Si aucun élève n'a d'idée, on peut suggérer : « Que peut-on utiliser en mathématiques qui remplace n'importe quel nombre? » Le professeur insiste sur le rôle incontournable de l'utilisation d'une lettre pour la réponse à cette question.

- Nouveau temps de réflexion donné aux élèves pour permettre aux élèves de traduire chaque programme de calculs par une expression littérale. **Le professeur passe dans les rangs et amène l'élève à vérifier ses erreurs**.
- Un élève vient écrire au tableau les expressions littérales des programmes A et B.
- Il reste à montrer que les deux programmes donnent le même résultat, donc que les élèves reconnaissent que les écritures des programmes A et B : $10x - 15$ et $5(2x - 3)$ sont des expressions littérales égales. (5 min.)

Variante avec le tableur

- On pourra utiliser le tableur pour illustrer le programme de calcul et pour mettre en évidence la conjecture concernant les résultats des programmes de calculs A et B.

Ce que les élèves écrivent

- Recherche de l'élève et correction de l'exercice.
- Synthèse de l'activité sur le cahier d'exercices ou de leçon : $5(2x - 3) = 10x - 15$.

On peut éventuellement faire un rappel sur la distributivité vue en 5ème

- a, b et k désignent des nombres : $k(a+b) = ka+kb$.

Ce que les élèves peuvent retenir sur ce travail

- Pour traduire un programme de calcul, on peut utiliser une expression littérale (avec des lettres).
- Dans ce cas là, la lettre peut être remplacée par n'importe quel nombre.

Réinvestissement

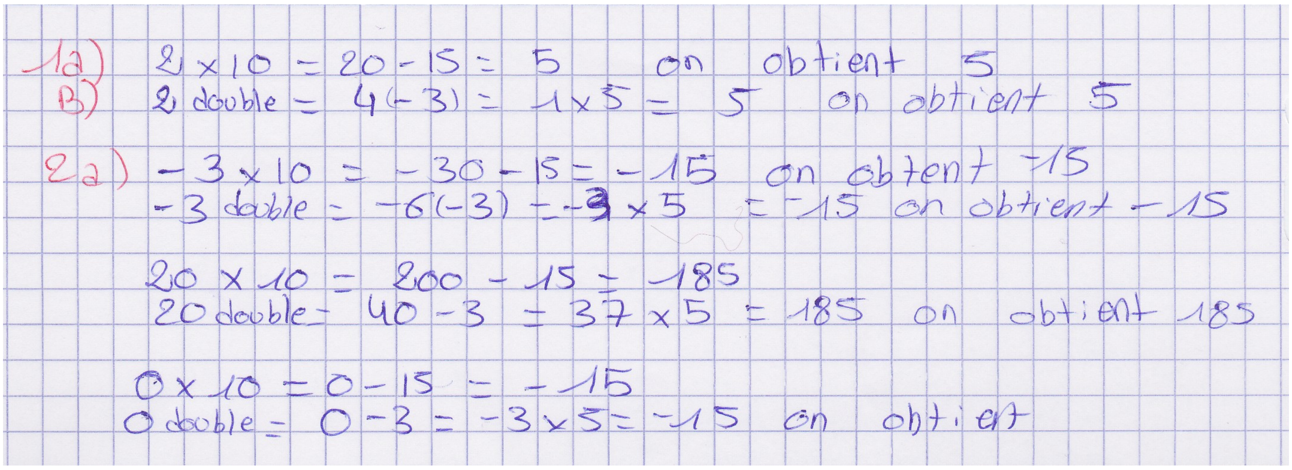
On pourra donner en DM un exercice du même type.

Exercice : Voici un programme de calculs. – Choisir un nombre. – Prendre le double de ce nombre – Ajouter 6 à ce nombre. – Multiplier le tout par 5. – Soustraire 10 fois le nombre de départ au résultat obtenu.	1) Choisis 5 nombres et applique ce programme de calculs à chacun de ces 5 nombres. 2) Que remarque-tu? 3) Prouve la réponse de la question 2).

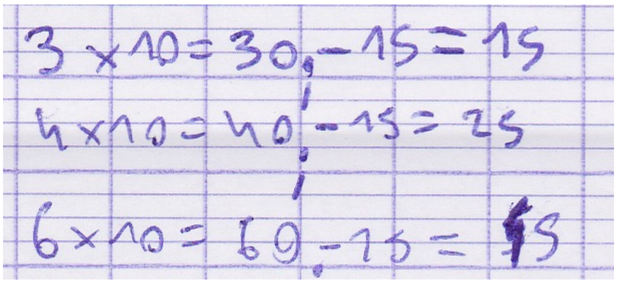
Erreurs souvent rencontrées lors de cet exercice : liste non exhaustive

- **mauvaise utilisation du signe « = » :**
    - le signe « = » est utilisé par les élèves, le plus souvent comme donnant le résultat d'une opération. Ici, l'élève écrit ce qu'il a réalisé sur les touches de sa calculatrice sans se rendre compte que lorsqu'il tape – 15, la calculatrice soustrait 15 au dernier résultat en mémoire.
    - Le calcul littéral et le travail sur les équations peuvent être l'occasion de faire prendre

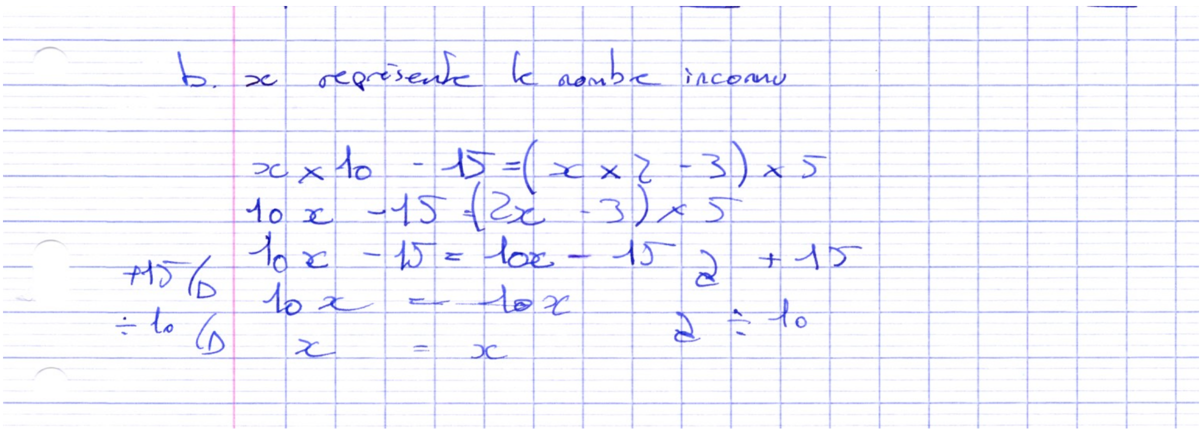
conscience aux élèves que le signe « = » traduit le fait que deux quantités sont égales.


1a) 2×10 = 20 − 15 = 5 on obtient 5
B) 2 double = 4(−3) = 1×5 = 5 on obtient 5
2a) −3×10 = −30 − 15 = −15 on obtent −15
−3 double = −6(−3) = −3×5 = −15 on obtient −15
20×10 = 200 − 15 = 185
20 double = 40 − 3 = 37×5 = 185 on obtient 185
0×10 = 0 − 15 = −15
0 double = 0 − 3 = −3×5 = −15 on obtient

- Sur cette première production on notera également la difficulté pour exprimer mathématiquement le double d'un nombre et la mauvaise utilisation des parenthèses dans l'écriture 4(-3) pour exprimer 4 – 3


3×10 = 30; −15 = 15
4×10 = 40; −15 = 25
6×10 = 60; −15 = 45

- Sur cette seconde production on remarque que l'élève semble avoir compris qu'il y a deux calculs distincts qu'il veut séparer avec le point virgule, cependant il rédige avec l'enchaînement d'opérations qui correspond à la démarche mentale ($3\times10=30$ puis j'enlève 15 ce qui me donne 15).


b. x représente le nombre inconnu
x × 10 − 15 = (x × 2 − 3) × 5
10x − 15 (2x − 3) × 5
10x − 15 = 10x − 15 ② +15
+15 ① 10x = 10x
÷10 ① x = x ② ÷10

- Ici, l'élève veut démontrer l'égalité des deux résultats pour n'importe quelle valeur de x et il commence à écrire l'égalité dès le début de son calcul. Ainsi il arrive à $x = x$ et ne sait pas quoi conclure. Le « x représente le nombre inconnu » peut laisser penser que l'élève est dans le cadre d'une résolution d'équations alors qu'ici il s'agit de montrer qu'une égalité est vraie quel que soit le nombre x.

Comme stratégie de remédiation pour démontrer une égalité littérale, on conseillera de «partir d'un membre pour arriver à l'autre» ou de transformer séparément chacun des deux membres pour obtenir la même expression ; on ne commence pas par écrire l'égalité que l'on veut montrer.

- **Mauvaises réductions d'expressions littérales :**

x

$x \times 10 = 10x$

$\boxed{10x - 15} = \cancel{-15x}$

$B = 5x\,(2x-3)$

x

$2x$

$2x(-3) = \cancel{-11x}$

$\cancel{1x \times 5} = \cancel{-5x}$

$2x + (-3)$

$-1\cancel{x} \times 5$

$B = 5 \times (2x - 3)$

$\boxed{B = 10x - 15.}$

Ces deux élèves réduisent des expressions littérales alors qu'on ne peut pas. Pour eux $10x - 15$ n'est pas un résultat . Ce n'est pas achevé. Il faut soustraire et obtenir un nombre au résultat.

$x \times 10 = 10x - 15 = -5x$

x double $= x - 2 = -2x + 3 = -5x$

Sur cette copie, on retrouve, en plus des erreurs de réduction d'expressions littérales, des erreurs dans la traduction du programme de calcul, une mauvaise utilisation du signe égal et une mauvaise expression mathématique du double de *x*.

- **confusion entre le double d'un nombre et son carré :**

3.

a) $2 \times 10 = 20$

$20 - 15 = 5$

b) $2 \times 2 = 4$

$4 + (-3) = 1$

$1 \times 5 = 5$ On obtient également 5.

4.

A) $5 \times 10 = 50$

$50 - 15 = 35$

B) $5 \times 5 = 25$

$25 + (-3) = 22$

$22 \times 5 = 110$ Le résultat n'est pas le même

Avec 2 comme nombre de départ, on ne détecte pas l'erreur car 2² est égal au double de 2 mais avec 5, on identifie bien cette erreur qui fausse d'ailleurs toute la suite de l'exercice car l'élève ne peut pas conjecturer l'égalité des 2 programmes,

1. a) $A = (2 \times 10) - 15$
$= 20 - 15$
$= 5$

b) $B = 2 \times 2 = (4 + (-3)) \times 5$
$= 5 \times 4 + 5 \times (-3)$
$= 20 + (-15)$
$= 20 - (+15)$
$= 20 - 15$
$= 5$

corrections →

J'obtient 5 avec le programme B en choisissant 2 comme nombre de départ

2. a) 4 : $A = (4 \times 10) - 15 = 40 - 15 = 25$
10 : $A = (10 \times 10) - 15 = 100 - 15 = 85$
25 : $A = (25 \times 10) - 15 = 250 - 15 = 235$

b) 4 → $B = 4 \times 4 = (16 + (-3)) \times 5 = \underline{65}$

10 → $B = 10 \times 10 = (100 + (-3)) \times 5 = \underline{485}$
25 → $C = 25 \times 25 = (625 + (-3)) \times 5 = \underline{1875}$

c) Le résultat fini tout le temps par un 5.

Même erreur avec le carré d'un nombre à la place du double pour cet élève mais il réussit tout de même à conjecturer un résultat (mais pas celui qui était attendu).

- **<u>Utilisation d'un ou plusieurs exemples pour prouver qu'un résultat est toujours vrai.</u>**

Je remarque qu'on obtient le même résultat final pour le programme A et B car j'ai choisi des nombre positif et negatif je remarque qu'on obtient toujours le même nombre je conclu donc que le programme A et B marche pour chaque nombre

a) 2×10
$= 20 - 15$
$= 5$

b) 2 4 − 3
$1 \times 5 = 5$

4	7	9	4	7	9
4×10	70	90	8 − 3	14 − 3	18 − 3
40	55	75	5×5	11×5	15×5
25			25	55	75

C'est toujours le même résultat.

oui car : A : 60 = 600 − 585 et B 60 = 120 − 3 = 117 × 5

– Les objectifs de cet exercice ne sont donc pas atteints pour ces deux élèves.

<u>Proposition d'exercices de remédiation</u>

– Pour les erreurs de réduction d'expressions littérales :

Ajouter 4 à chaque expression littérale ci-dessous et réduire. $4 + 2x$ $5 - 3x$ $8x + 2$ $8x - 2$ $x^2 + 2 + 3x$ $4x - x^2 + 8 - x$ $2x^2 + 3 - 5x + 7x^2$	Enlever $3x$, puis réduire. $4 + 2x$ $5 - 3x$ $2 + 5x$ $x + x^2 - 2$ $4x - 3x^2 + 8 - x$
Multiplier chaque expression par 3. $4 + 2x$ $8x - 4$ $x^2 - 3$	Multiplier chaque expression par $-2x$. $5 - x$ $8x - 3$ 1 x

– Utilisation d'une lettre pour montrer qu'une propriété est vraie :
En troisième on peut poser l'exercice suivant, éventuellement en devoir maison.

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.
a) Si un nombre est divisible par 9, alors il est divisible par 3.
b) Si un nombre est divisible par 3, alors il est divisible par 9.

<u>D'autres copies d'élèves</u>

– la conclusion n'est pas nécessairement celle attendue, mais cela peut donner lieu à un prolongement en demandant aux élèves de prouver cette affirmation.

1) Je remarque que les résultats sont des multiples de 5

– Même idée que précédemment, la formulation n'est pas toujours claire !

Quand on multiplie ~~par~~ ou on enlève ~~ex~~ 15 du résultat, on obtient tjrs un résultat se terminant par 5.

Car en multipliant par 1 le nbre de départ on obtient des nbrs qui en se multipliant finissent par 5

- Dans les deux copies suivantes, la réponse à la question 2. b) montre l'importance de la formulation dans un énoncé et plus généralement des consignes données à l'écrit ou à l'oral. Ces deux élèves pensent certainement avoir répondu à la question.

Exercice

1a) 2 → 2x10 → 20 → 20 − 15 = 5.

On obtient bien 5.

b) 2 → 4 → 1 x 5 = 5.

on obtient 5.

2) a) programme A : 1 → 10 → −5. 6 → 60 → 45 ; 10 → 100 → 85

programme B : 1 → 2 → −1 → −5. 6 → 12 → 9 → 45 ; 10 → 20 → 17 → 85.

b) On remarque que l'on trouve dans les 2 cas le mem résultat

Non on ne peut pas le démontrer

b) peut import le programme on aura le même résulta, oui on peus le demontrer

- L'élève a compris les deux programmes de calculs, les a traduits par des expressions littérales, il a fait une erreur dans la factorisation, mais il réussit à prouver que les résultats des programmes de calculs sont des multiples de 5.

1,5x10=15=0

1) A 10a 10a−15

2x10 = 20−15 = 5

7x10 = 70−15 = 65

b) B x2 (2b−3) x5 = −15+10b

2x2 4−3 = 1x5 = 5.

8x2 16−3 = 13x5 = 65

C'est a chaque fois de multiple de 5.

A

10x − 15 = y

5x(x x2 −3 x5) = y

5x(2x−3) = y

B

5x(2b−3) = y.