Introduction à la résolution d'équations

Objectifs :

- Comprendre l'intérêt de la résolution d'une équation.
- Connaître le vocabulaire relatif à la résolution d'équations : solution, membre, degré…
- Analyser la structure algébrique d'une équation.
- Etablir des liens entre les différents registres (graphiques, numériques, algébriques, géométriques) pour traduire un problème se ramenant à une équation ou pour conjecturer des solutions ou pour vérifier ses résultats.

Enoncé :

Exercice 1 : Problème chinois

Jiu Zhang Suan Shu est un mathématicien qui a vécu en Chine vers l'an 100 avant J.C. Il a écrit un traité sur l'art mathématique qui comporte plusieurs problèmes utilisant le théorème de Pythagore.
« Soit un bambou haut de 1 toise. Son extrémité se brise et touche le sol à 3 pieds du bambou. Quelle est la hauteur du tronçon subsistant ? » (Une toise vaut 10 pieds.)

Exercice 2 : Tâches
Une tâche a malencontreusement caché un nombre de l'équation $x^2 - 10x + ... = 0$ mais Marie se souvient que 4 est solution de cette équation. Quel est le nombre caché ?

Exercice 3 : Méli-mélo
Sais-tu résoudre les équations suivantes ? Si oui, fais-le !

(E_1)	$3x+1=6x-7$	(E_2)	$\frac{2}{3}x-1=3x+\frac{1}{5}$	(E_3)	$x^2+1=0$
(E_4)	$(x-1)(x+2)=(x-1)$	(E_5)	$x^2-5x=0$	(E_6)	$5-8x^2=0$
(E_7)	$2x^2-12x+18=0$	(E_8)	$-x^2+2x=-1$	(E_9)	$2x^2+x-1=0$

ou voir fichier calcul littéral première

Place dans la progression de première :

En début d'année avant l'étude des équations du second degré.

Prérequis :

- Appliquer le théorème de Pythagore.
- Priorités des opérations et règles opératoires dans une suite de calculs pour résoudre une équation du premier degré.

Pourquoi lister les prérequis ?

- Pour qu'une notion antérieure mal maîtrisée ne vienne pas ajouter une difficulté à l'activité.
- Pour faciliter la gestion de classe en évitant trop de digressions.
- Pour parvenir à réaliser son objectif pendant la séance prévue.
- Pour ne pas perdre de temps à faire des chapitres de révisions.

Comment lister les prérequis pour le professeur ?

- Faire l'activité et envisager toutes les méthodes possibles.
- Consulter les chronologies des apprentissages et les programmes pour repérer si les méthodes font appel à des notions antérieures.

Pourquoi ces prérequis ?

Connaître et utiliser les opérations et leurs propriétés est indispensable pour comprendre et justifier la résolution d'une équation du premier degré. Dire : « on peut ajouter un même nombre à chaque membre d'une égalité » correspond bien à une règle opératoire.
Dire : « on passe de l'autre côté en changeant de signe » ou « on change de membre, on change de signe », est source d'erreurs ($2x = 3$ devient $x = 3 - 2$ ou $x = -\frac{3}{2}$) car les élèves confondent les produits et les sommes. Ces formulations doivent donc être proscrites.

Comment vérifier si les prérequis sont acquis ?

- Par un exercice à faire à la maison pour le jour même ;
- Ou, lors de séances précédentes, avec du calcul mental mettant en œuvre des équations élémentaires du premier degré ;
- Ou par un devoir à la maison donné précédemment ;
- Ou par un questionnement oral.

Que faire si les prérequis ne sont pas acquis ?

On peut utiliser l'accompagnement personnalisé pour faire un atelier « équations du premier degré ». Ne pas hésiter à préciser explicitement les opérations effectuées à chaque étape de la résolution.

$$\begin{array}{ccc} -3 & 2x + 3 = -4x - 7 & -3 \\ & 2x = -4x - 10 & \end{array}$$

__**Scénario :**__

30 minutes **Le professeur distribue un polycopié comportant les exercices 1, 2 et 3**

Prof : Je vous propose de résoudre un problème chinois. Mélanie, peux-tu lire l'énoncé, s'il te plait ?

Mélanie lit.

Prof : Avez-vous des questions à poser sur le texte?

Elève : Madame c'est quoi une toise ? Qu'est-ce que ça veut dire subsistant ?

Prof : Qui a une idée ?

La toise est une unité de mesure ancienne. Nombre d'entre elles étaient empruntées à la morphologie humaine. Leur nom en conservait fréquemment le souvenir : le doigt, la palme, le pied, la coudée, le pas, la brasse, ou encore la toise, dont le nom latin tensa - de brachia - désigne l'étendue des bras.

...

Prof : Prenez cinq minutes de recherche individuelle sans dire un mot. Je ne répondrai pas à vos questions pendant cette période. Ensuite vous pourrez, si vous le souhaitez, échanger avec votre voisin pour faire le point de vos recherches.

Elève : M'dame j'y comprends rien.

Prof : J'ai dit : « Cinq minutes de recherche individuelle sans dire un mot. Ecris tes idées ou tes questions concernant l'énoncé. »

Attention : Savoir réagir à une telle remarque est un des points clés de la gestion de la classe pour ce type de travail à prise d'initiatives.

- Si l'on cherche à répondre tout de suite à l'élève, on s'expose à ce que tous les élèves expriment la même demande et à ce que le professeur soit débordé.
- Si l'on cherche à donner une réponse collective la phase de recherche est terminée et on ne peut plus la relancer.

Le professeur circule dans les rangs pour observer comment les élèves résolvent leur exercice. Il peut leur conseiller de faire une figure.

Au bout de cinq minutes, on fait un bilan collectif pour noter toutes les idées, à partir des propositions des élèves : écrire les longueurs de chaque côté, écrire le théorème de Pythagore… Les élèves n'éprouveront pas nécessairement le besoin de désigner une des mesures inconnues par la lettre *x*. Ils peuvent se limiter à désigner les sommets du rectangle par des lettres et ce n'est pas grave !

Prof : Maintenant terminez la résolution de cet exercice et continuez à votre rythme pour les exercices 2 et 3.

Chaque élève continue la fiche à son rythme. L'objectif du premier exercice est de comprendre la mise en équation. Si cet objectif est atteint, il n'est pas indispensable d'établir une synthèse collective mais il suffit de vérifier individuellement, en passant dans les rangs, que chaque binôme a obtenu une équation correcte et a su la résoudre.

15 minutes **L'exercice 2** sert simplement à vérifier que le vocabulaire « solution » est connu de tous. Il suffit de passer dans les rangs pour s'en assurer. Un rappel oral peut rapidement être donné à chaque binôme en difficulté.

L'exercice 3 est le moment pour le professeur de bien évaluer où en sont les élèves dans la maîtrise du calcul littéral, des résolutions d'équation, des méthodes de factorisation et, de repérer leurs erreurs :

(E_2) : erreurs de calculs avec les fractions.

(E_3) : La résolution « classique » passe par $x^2 = -1$. L'erreur qui suit est souvent de conclure que $x = \sqrt{-1}$.

Un des objectifs de la classe de première est d'apprendre que $x^2 + 1$ est un nombre strictement positif.

(E_7) : la solution est exprimée à l'aide de l'inconnue :
l'élève obtient $x^2 = 6x - 9$ donc écrit $x = \sqrt{6x - 9}$

Le professeur doit aussi encourager les élèves à résoudre les équations car les élèves abandonnent vite en disant « je ne sais pas faire ». On peut dans ce cas leur demander d'utiliser la calculatrice graphique pour visualiser les solutions des équations.

45 minutes Le professeur partage le tableau en quatre parties et choisit quatre élèves pour que chacun corrige une des quatre premières équations. Il a repéré des élèves ayant des difficultés importantes mais qui ont su obtenir les solutions pour ces premiers calculs. Il envoie de préférence ces élèves au tableau pour les valoriser. Après validation des résultats et analyse des stratégies utilisées, les autres corrections sont effectuées par d'autres élèves.

Ensuite, le professeur demande de faire un « schéma » de résolution d'une équation du premier ou second degré à partir des stratégies mises en place pour les neuf équations que l'on vient de résoudre.

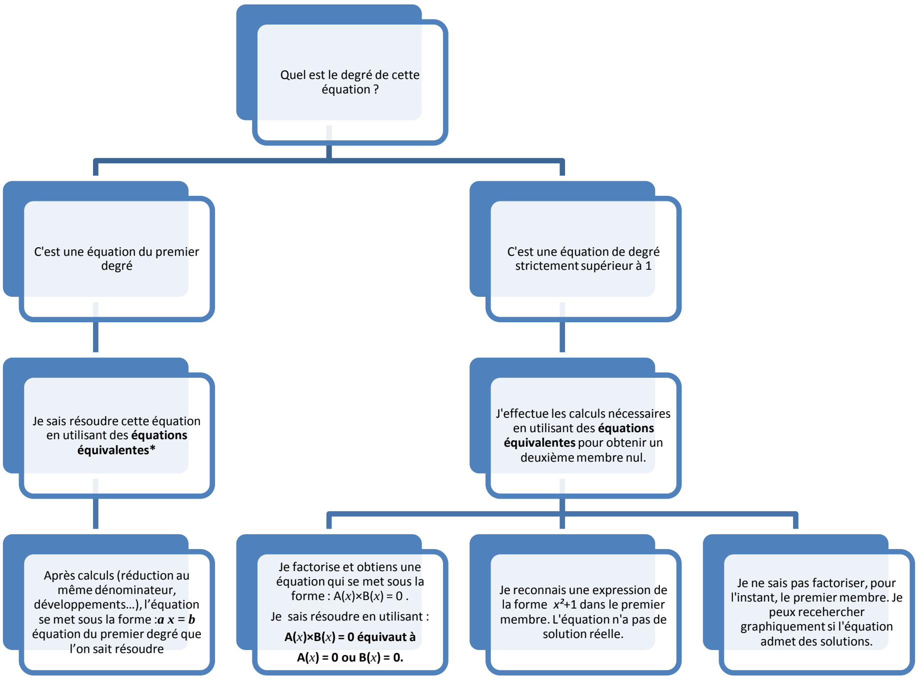
Chaque élève écrit, dans sa partie « recherches* », les différentes stratégies et collectivement, on construit petit à petit le schéma ci-dessous qui sera noté dans le cahier.

*Le cahier d'exercices contient une partie « recherches » qui n'est pas nécessairement « propre », qui correspond à une phase de « brouillon »..

<u>Trace écrite possible</u>

Résoudre une équation c'est déterminer toutes les valeurs de la **variable** qui rendent l'égalité vraie.

Pour résoudre une équation :



<u>Equations équivalentes*</u>

- On peut ajouter ou soustraire un même nombre à chaque membre d'une égalité.
- On peut multiplier chaque membre d'une égalité par un même nombre non nul.

<u>Prolongements</u>

On peut poursuivre cette préparation aux équations du second degré avec :

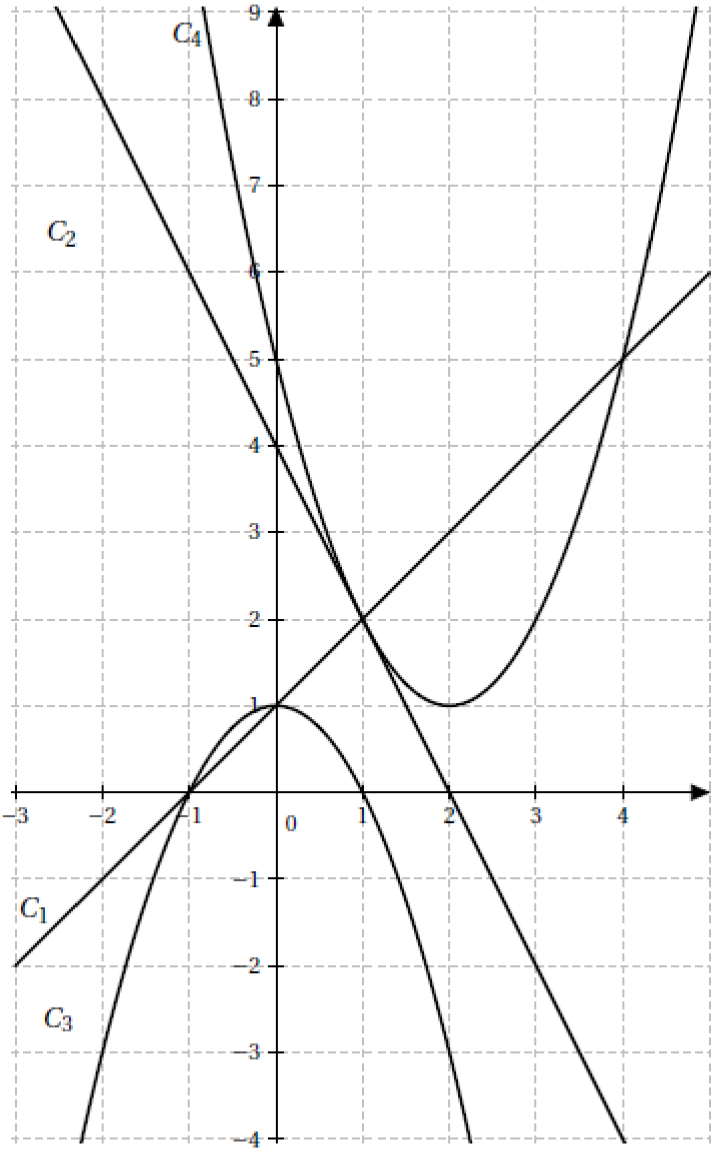
- Exercice 4 : (40 minutes environ) lien entre les fonctions du second degré, leur signe et leur sens de variation.
- Exercice 5 : (40 minutes environ) lien entre aires, expression de fonctions du second degré et leur représentation graphique.

Exercice 4 :
Fonctions et courbes

Quatre fonctions définies sur l'intervalle [-3 ; 5] sont représentées sur le graphique ci-dessous. Elles admettent une écriture algébrique de la forme $ax+b$ ou ax^2+bx+c.

1. Compléter le tableau avec le signe de a, le signe de la fonction et les variations de la fonction.

<table>
<tr><th>Fonction</th><th>Courbe</th><th>Signe de a</th><th>Signe de la fonction</th><th>Variations de la fonction</th></tr>
<tr><td>$f : x \longmapsto ...$</td><td>$C_{..}$</td><td>positif</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$g : x \longmapsto ...$</td><td>$C_{..}$</td><td></td><td><table><tr><td>x</td><td>-3 -1 1 $+5$</td></tr><tr><td>$g(x)$</td><td>-   0   +   0   -</td></tr></table></td><td></td></tr>
<tr><td>$h : x \longmapsto ...$</td><td>$C_{..}$</td><td></td><td></td><td><table><tr><td>x</td><td>-3   2   +5</td></tr><tr><td>$h(x)$</td><td>1</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>$k : x \longmapsto -2x+4$</td><td>$C_{..}$</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>



2. Déterminer graphiquement le nombre de points d'intersection de C_1 avec chacune des autres courbes.
3. Voici l'expression algébrique de chacune des fonctions :

   * $x \longmapsto -x^2+1$
   * $x \longmapsto (x-2)^2+1$
   * $x \longmapsto x+1$
   * $x \longmapsto -2x+4$.

   Retrouver, par le calcul, les abscisses des coordonnées des points d'intersection de C_1 avec chacune des autres courbes.

Exercice 5 :

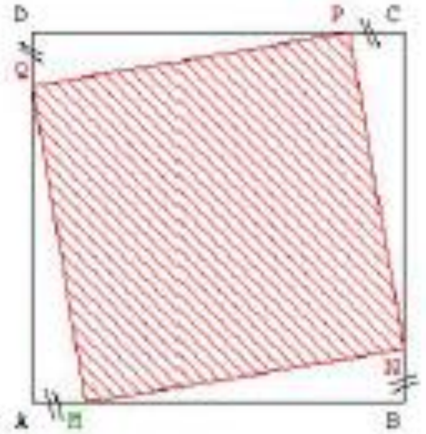
Fonctions et aires

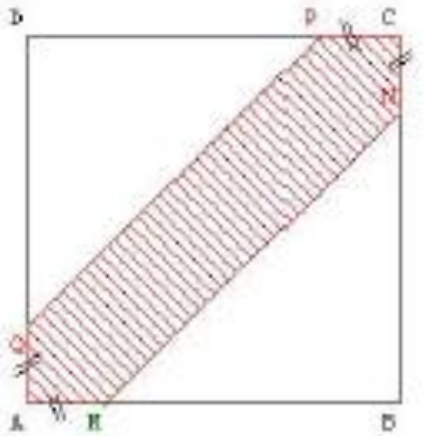
Voici quatre configurations géométriques, quatre fonctions et leurs représentations graphiques dans un repère orthonormal. ABCD est un carré de côté 1, M est un point libre sur [AB]. Chaque courbe représente l'aire de la zone hachurée en fonction de $x = AM$.

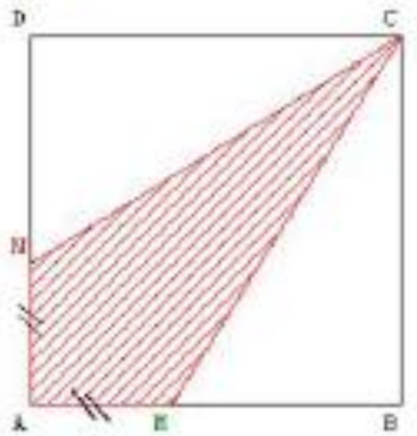
a. Associer à chaque configuration, la courbe et la fonction correspondante. Expliquer et justifier avec soin les choix.

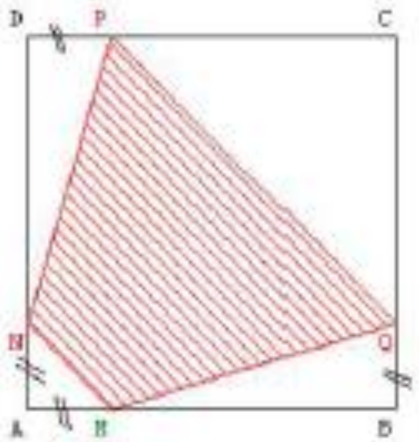
b. Dans chaque cas, déterminer les positions des points M pour lesquels l'aire hachurée est égale à $\frac{3}{4}$.

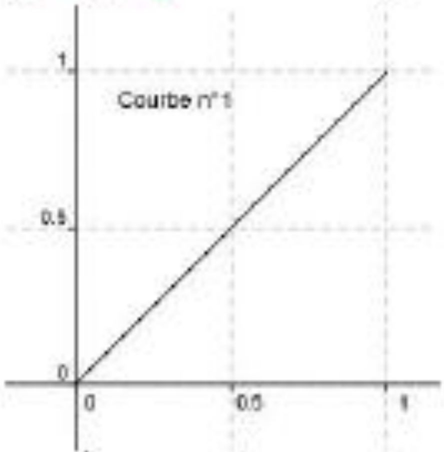
$f_1(x) = x$
$f_2(x) = 2x^2 - 2x + 1$
$f_3(x) = -x^2 + 2x$
$f_4(x) = 0,5$

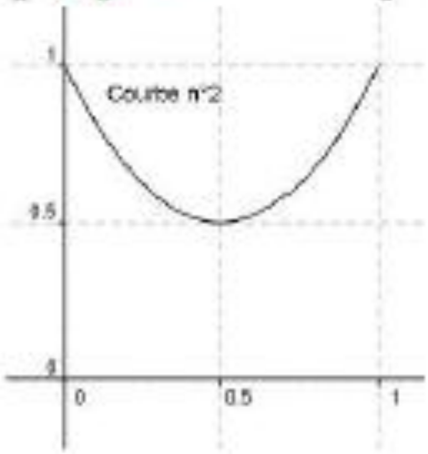

D
P
C
Q
N
A
M
B

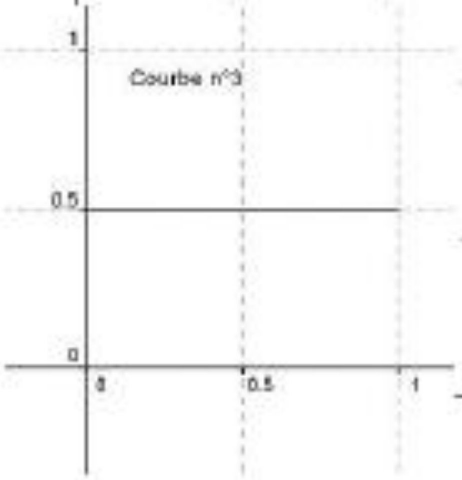

D
P
C
N
Q
A
M
B

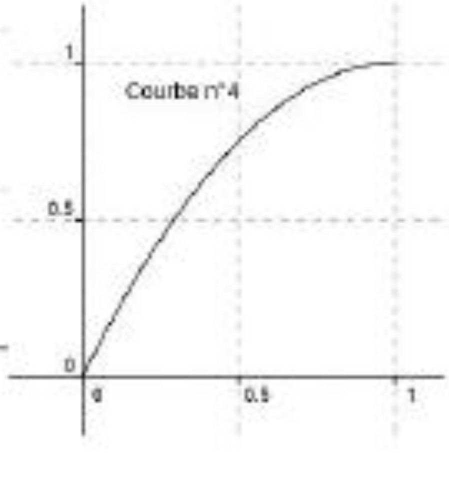

D
C
N
A
M
B


D
P
C
N
Q
A
M
B


Courbe n°1
1
0.5
0
0
0.5
1


Courbe n°2
1
0.5
0
0
0.5
1


Courbe n°3
1
0.5
0
0
0.5
1


Courbe n°4
1
0.5
0
0
0.5
1