Université HENRI POINCARÉ NANCY 1

I.R.E.M. DE LORRAINE

Préparation à l'agrégation interne de Mathématiques

Epreuve d'Analyse

10 problèmes corrigés

Préparation à l'Épreuve d'Analyse de l'Agrégation Interne 95/96

Problème n° 1

Exercice 1 :

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin(2nt) \cdot \cotg(t)\, dt$

$$J_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2nt)}{t}\, dt$$

a) calculer la valeur de I_n.

b) montrer que $\lim\limits_{n \to \infty} J_n = \int_0^{\infty} \frac{\sin \theta}{\theta}\, d\theta$.

c) établir que $\lim\limits_{n \to \infty} (I_n - J_n) = 0$.

d) en déduire la valeur de $\int_0^{\infty} \frac{\sin \theta}{\theta}\, d\theta$.

Exercice 2 :

Rappeler pourquoi la suite $\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n\right)_{n \geq 1}$ est convergente. On note γ sa limite (: constante d'Euler)

a) montrer que $\lim\limits_{n \to \infty} \int_0^{n} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln t\, dt = \int_0^{\infty} e^{-t} \cdot \ln t\, dt$

b) calculer la valeur de $\int_0^1 t^n \ln(1-t)\, dt$ pour $n \in \mathbb{N}$.

c) en déduire que $\gamma = -\int_0^{\infty} e^{-t} \ln t \,.\, dt$.

Exercice 3 :

Pour $a, b > 0$, établir

$$\sum_{n \geqslant 0} \frac{(-1)^n}{a+nb} = \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b}\, dt$$

En déduire la valeur de la somme de la série

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \dots$$

Exercice 4 :

Expliquer pourquoi la fonction

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t}\, t^{x-1}\, dt$$

est de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ sur $]0, +\infty[$. Que vaut $\Gamma'(1)$?

Exercice 5 :

Pour $\omega \in \mathbb{R}$, on pose $f(\omega) = \int_0^{\infty} e^{-t^2} \cdot \cos(\omega t)\, dt$

a) montrer que f est de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ sur $\mathbb{R}$.

b) exprimer f' à l'aide de f, et en déduire la valeur de f.

Exercice 6 :

On considère l'EDO $xy'' + y' + xy = 0$

(: de Bessel, d'indice 0)

a) déterminer à l'aide d'une série entière la solution f au problème de condition initiale $y(0)=1$, $y'(0)=0$.

b) montrer que $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(x \sin t)\, dt$.

c) montrer que $F(z) = \int_0^{\infty} e^{-xz} f(x)\, dx$ est bien définie pour $z > 0$, et expliquer pourquoi F est dérivable sur $]0, \infty[$.

d) établir la relation $F(z) = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}$, $z > 0$.

Corrigé du problème n° 1.

Exercice 1 : a) $\underset{n\geq 1}{I_{n+1} - I_n = 0}$ (après linéarisation), $I_1 = \frac{\pi}{2}$.

b) $I_n \underset{(\theta=2nt)}{=} \int_0^{n\pi} \frac{\sin\theta}{\theta}\,d\theta \to \int_0^{\infty} \frac{\sin\theta}{\theta}\,d\theta$, l'intégrale étant convergente.

c) $I_n - J_n = \int_0^{\pi/2} \left(\operatorname{cotg} t - \frac{1}{t}\right) \cdot d\left(-\frac{\cos 2nt}{2n}\right) = \frac{1}{2n}\int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{\sin^2 t}\right)\cos 2nt\,dt$

où $\left|\int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{\sin^2 t}\right)\cos 2nt\,dt\right| \leq \int_0^{\pi/2} \left|\frac{1}{t^2} - \frac{1}{\sin^2 t}\right| dt < +\infty$ montre que

$I_n - J_n \underset{(n\to\infty)}{=} O\left(\frac{1}{n}\right)$.

d) d'où $\int_0^{\infty} \frac{\sin\theta}{\theta}\,d\theta = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 2 : La suite est ↓ et minorée par 0 (car $\frac{1}{p} > \int_p^{p+1} \frac{dt}{t}$ $\forall p \geq 1$...)

a) il y a cv de la suite de fcts $(1-t/n)^n \ln t \,\mathbb{1}_{(0,n)}(t)$ vers $e^{-t}\ln t\,\mathbb{1}_{(0,\infty)}(t)$ sur tout cpt de $]0,\infty[$ (avec Taylor reste intégral ... ou en exemple)

de plus $|f_n(t)| \leq e^{-t}|\ln t|\,\mathbb{1}_{(0,\infty)}(t) = \varphi(t)$ intégrable :

on peut conclure avec le thm de convergence dominée faible.

b) $\int_0^1 \ln(1-t)\, d\left(\frac{t^{n+1}-1}{n+1}\right) = -\frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{t^{n+1}-1}{t-1}\,dt = -\frac{1}{n+1}\int_0^1 (1+t+\dots+t^n)\,dt =$

$= -\frac{1}{n+1}\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n+1}\right)$.

c) d'où $\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \ln t\,dt \underset{t=n(1-\theta)}{=} n\int_0^1 \theta^n\left(\ln n + \ln(1-\theta)\right)d\theta =$

$= \frac{n}{n+1}\ln(n) - \frac{n}{n+1}\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n+1}\right) = \frac{n}{n+1}\left(\ln n - \left(1+\dots+\frac{1}{n+1}\right)\right) \to -\gamma$.

Exercice 3 : il faut justifier le calcul formel suivant

$$\int_0^1 t^{a-1}\sum_{n\geq 0}(-t^b)^n\,dt = \sum_{n\geq 0}(-1)^n\int_0^1 t^{a+nb-1}\,dt \;:$$

la série de fcts de tg $f_n(t) = (-1)^n t^{a+nb-1}$ converge uniformément sur tout compact de $]0,1[$, et même de $[0,1[$ (à partir d'un certain rang), la série entière en $z = t^b$ admettant $R = 1$ comme rayon de convergence. En outre, d'après le contrôle du reste d'une série alternée dont le tg. $|.| \downarrow 0$, on peut écrire que

$$\forall N,\ \Big|S_N(t) \doteq t^{a-1}\sum_{n=0}^{N}(-t^b)^n\Big| \leq \frac{t^{a-1}}{1+t^b} + t^{a-1+(N+1)b} \leq \frac{t^{a-1}}{1+t^b} + 1$$

si $t \in (0,1)$, où la fonction majorante φ est intégrable sur $(0,1)$.

Autre argument (à connaître) : la série de tg

$$u_n(t) = t^{a-1}\left((-t^b)^{2n} + (-t^b)^{2n+1}\right) = (-1)^n t^{a-1}.\, t^{2nb}(1-t^b)$$

voit la suite $(U_N(t))_{N\geq 1}$ de ses sommes partielles contrôlée en $|.|$ par

$$|U_N|(t) \leq t^{a-1}(1-t^b)\cdot\frac{1}{1-t^{2b}} = \frac{t^{a-1}}{1+t^b} = \phi(t) \qquad \forall t \in (0,1)$$

intégrable sur $(0,1)$: on peut donc l'intégrer terme à terme, et comme $1/(a+nb) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ ...

C3

Exercice 4 : chaque fct $\Gamma_n(x)=\int_0^n e^{-t}t^{x-1}dt$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,\infty[$, avec, par exemple $\Gamma_n'(x)=\int_0^n e^{-t}t^{x-1}.\ln(t).dt$

de plus, pour $n>1$, si $x\geq\varepsilon>0$,

$$\left|\int_n^\infty e^{-t}t^{x-1}\ln t\,dt\right|\leqslant\int_n^\infty e^{-t}t^{\varepsilon-1}\ln t\,dt\xrightarrow[n\to\infty]{}0 \text{ en tant}$$

que reste d'une intégrale convergente : ainsi $\Gamma_n'\xrightarrow{u}$ sur tout compact de $]0,\infty[$ vers $x\to\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\ln t\,dt$: Γ est bien dérivable sur $]0,\infty[$, avec en particulier

$$\Gamma'(1)=\int_0^\infty e^{-t}\ln t\,dt=-\gamma.$$

Exercice 5 : a) $\forall n$, $f_n(\omega)=\int_0^n e^{-t^2}\cos(\omega t)dt$ est $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ avec, par exemple $f_n'(\omega)=\int_0^n e^{-t^2}t(-\sin\omega t)dt$: comme $\int_n^\infty e^{-t^2}t\,dt\xrightarrow[(\infty)]{}0$, ...

b) $f'(\omega)=\int_0^\infty e^{-t^2}(-t\sin\omega t)dt=\int_0^\infty \sin\omega t.\,d\left(\frac{1}{2}e^{-t^2}\right)=-\frac{\omega}{2}\int_0^\infty e^{-t^2}\cos\omega t\,dt$

donc, $\forall\omega\in\mathbb{R}$, $f'(\omega)=-\frac{\omega}{2}f(\omega)$ d'où, par quadrature

$f(\omega)=Ke^{-\omega^2/4}$ où $K=f(0)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 6 : a) par identification, $f(x)=\sum_{n\geq0}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$, $R=\infty$.

b) on intègre terme à terme

$$\int_0^{2\pi} \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \sin^{2n} t \cdot x^{2n}\, dt$$

la justification est élémentaire, la série de fonctions étant normalement convergente sur $[0,2\pi]_t$: la connaissance de l'intégrale de Wallis permet de conclure...

c) $F_n(z) = \displaystyle\int_0^n e^{-xz} f(x)\, dx$ est $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_z)$ et, si $z \geq \varepsilon > 0$,

d'après b), on a $\displaystyle \left| \int_n^\infty e^{-xz} f\, dx \right| \leq \int_n^\infty e^{-\varepsilon x}\, dx \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, d'où

la conclusion demandée.

d) $$F(z) \overset{a)}{=} \int_0^\infty e^{-xz} \cdot \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} \cdot dx$$

$$= \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \frac{1}{2^{2n}} \int_0^\infty e^{-xz} x^{2n}\, dx$$

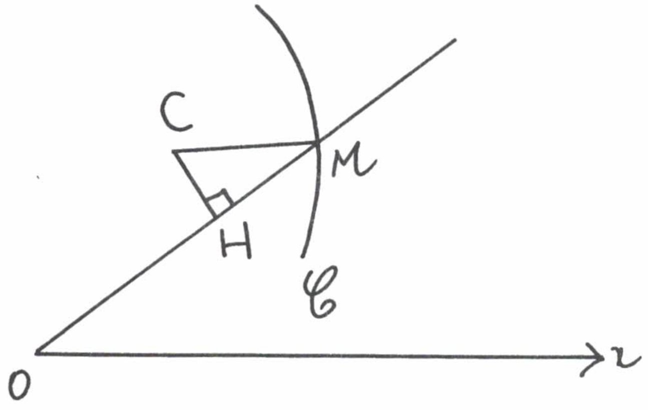
$$= \dots$$

on conclut avec la formule du binôme. On peut aussi utiliser b) et intervertir les ordres d'intégration en justifiant.

Préparation à l'épreuve d'Analyse de l'Agrégation Interne 95/96 :

Problème n° 2

Exercice 1 : déterminer les courbes planes régulières $\mathcal{C}$ telles que



$\overline{OH} = 2\,\overline{HM}$

où C désigne le centre de courbure en M :

on commencera par établir l'EDO

$$2\rho^2 + \rho'^2 + \rho\rho'' = 0$$

où $\rho = \rho(\theta)$ est l'équation polaire de $\mathcal{C}$, qu'on intégrera ensuite en posant $\rho' = f(\rho)$.

Exercice 2 : (d'après l'épreuve de 91)

On considère l'EDO $\quad 3(x^2+x)\cdot y'' + (8x+3)\cdot y' + 2y = 0$

1) déterminer la solution f développable en série entière à l'origine, et qui vaut 1 en $x = 0$.

2) identifier cette solution (: de la forme $(1+x)^{\alpha}$ avec α bien choisi).

3) en déduire l'expression de la solution générale de l'EDO.

<u>Exercice 3</u>: 1) soit $f(z) = \sum_{0}^{\infty} c_n z^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$: montrer que, pour tout entier $n \geq 0$, on a

$$c_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z^{n+1}} \, dz$$ où $\mathcal{C}$ est le cercle centré en 0, de rayon $\rho \in]0, R[$, et parcouru dans le sens trigo.

En déduire que $|c_n| \leq \frac{1}{\rho^n} \cdot \sup_{\substack{|z|=\rho \\ \mathbb{C}}} |f(z)|$.

2) On considère une EDO linéaire d'ordre 2, à coefficients a et b développables en série entière à l'origine :

$$y'' + a y' + b y = 0$$

$$a(x) = \sum_{n \geq 0} a_n \cdot x^n, \quad b(x) = \sum_{n \geq 0} b_n x^n \qquad |x| < R$$

a) montrer que si $y(x) = \sum_{n \geq 0} c_n \cdot x^n$ est une solution série entière, on a nécessairement

$$\forall n \geq 0, \ (n+1)(n+2)\, c_{n+2} = -\sum_{k=0}^{n} (k+1)\, c_{k+1} \cdot a_{n-k} - \sum_{k=0}^{n} c_k \cdot b_{n-k}$$

b) montrer que, si $|a_n|, |b_n| \leq \frac{M}{\rho^n}$ $\forall n \geq 0$, alors il existe $K > 0$ tel que $\forall n \geq 0$, $|c_n| \leq \frac{K}{\rho^n}$

c) en déduire que toute solution de l'EDO est développable en série entière en 0.

Exercice 4 : pour

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

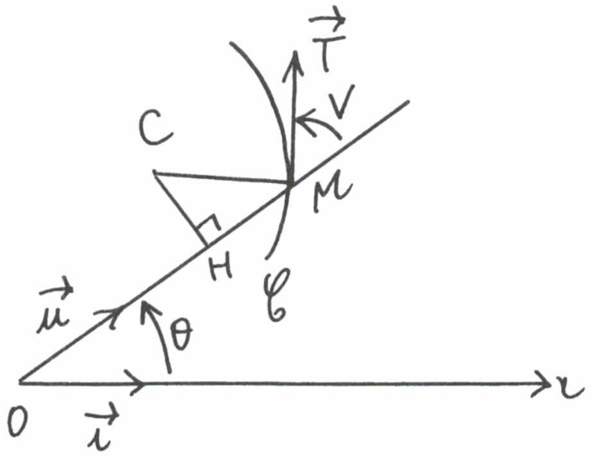
dessiner la trajectoire du système différentiel

$$\dot{\vec{x}} = A \vec{x}$$

qui part du point $M_0(3, 0, 2)$.

Corrigé du problème n°2

Exercice 1 :



$$\vec{OM} = \rho \cdot \vec{u} \qquad \varphi = (\vec{i}, \vec{T}) \qquad ' = \frac{d}{d\theta}$$

avec les notations habituelles, $\rho = 3 \mathcal{R} \sin V$

où $\mathcal{R} = \dfrac{ds}{d\varphi} = \dfrac{ds}{d\theta + dV}$, $ds = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\, d\theta$, $\operatorname{tg} V = \rho/\rho'$

donne $\dfrac{dV}{d\theta} = \dfrac{\rho'^2 - \rho \cdot \rho''}{\rho^2 + \rho'^2}$, si bien que la relation donnée s'écrit

$$\rho = \frac{3\rho(\rho^2 + \rho'^2)}{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}$$

soit $\rho\rho'' + \rho'^2 + 2\rho^2 = 0$.

Si $\rho' = f(\rho)$, $\rho'' = f' \cdot f$ et on est conduit à l'EDO

$$\rho f f' + f^2 + 2\rho^2 = 0 \quad \text{en } f(\rho)$$

qu'on intègre en posant $f^2 = F$:

$$\frac{1}{2}\rho F' + F + 2\rho^2 = 0$$

étant linéaire d'ordre 1, s'intègre avec Lagrange pour donner

$$F(\rho) = \frac{K(\rho)}{\rho^2} \qquad \text{où} \qquad K'(\rho) = -4\rho^3$$

soit $\quad F(\rho) = \dfrac{C-\rho^4}{\rho^2}$, $C \in \mathbb{R}$.

Ce qui donne, en remontant les étapes :

$$(\rho\rho')^2 + \rho^4 = C > 0$$

soit, dans la variable $R = \rho^2$

$$(R')^2 = 4(C - R^2)$$

d'où, en séparant les variables

$$\frac{dR}{2\sqrt{C-R^2}} = d\theta$$

c'est-à-dire $\qquad R^2 = C \sin 2(\theta - \theta_0)$ soit $\rho(\theta) = \sqrt{C \sin 2(\theta-\theta_0)}$

: Il s'agit d'une lemniscate de Bernoulli (dilatée $(:C)$, tournée $(:\theta_0)$).

Exercice 2 : 1) la technique d'identification conduit, sur les coefficients de $f(x) = 1 + \sum_{n \geq 1} a_n x^n$, à la relation de récurrence

$$\forall n \geq 0, \qquad a_{n+1} = -\frac{3n+2}{3(n+1)}\, a_n$$

Comme $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to 1$, avec d'Alembert, le rayon de convergence de la série vaut $R = 1$ et, à partir de $a_0 = 1$, on obtient

$\forall n \geqslant$ $$a_n = (-1)^n \frac{2.5 \ldots (3n-1)}{3.6 \ldots 3n}$$

2) avec le dvt $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \ldots$

valable pour $|x| < 1$, on est conduit à prendre $\alpha = -2/3$:

la solution précédemment trouvée s'écrit donc $(1+x)^{-2/3}$.

Du coup, il s'agit d'une solution de l'EDO sur $]-1, \infty[$.

3) écrivant l'EDO comme le SDO

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2/3x(x+1) & -(8x+3)/3x(x+1) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$$

$$W(x) = \exp\left(\int^x \left(\frac{1}{\xi} + \frac{5/3}{\xi+1}\right) d\xi\right) = \ln\left|x(1+x)^{5/3}\right|)$$

conduit, selon le plan de la leçon $\boxed{24}$, à la solution indépendante de f :

$$g(x) = f(x) \int^x \frac{d\xi}{\xi(1+\xi)^{1/3}}$$

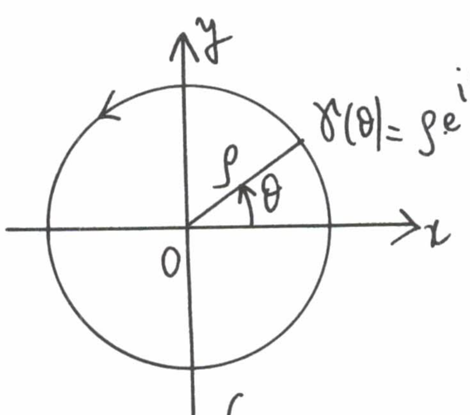
(on peut aussi poser $y = f \cdot z$ ...)

Tous calculs de $\int$ effectués, on obtient

$$g(x) = f(x)\cdot\left(\ln \frac{\left|\sqrt[3]{x+1} - 1\right|^{3/2}}{\sqrt{|x|}} + \sqrt{3}\ \mathrm{Arctg}\ \frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\sqrt[3]{x+1} + \frac{1}{2}\right)\right)$$

et, sur $]-1,1[^*$, la solution générale de l'EDO s'écrit $Af+Bg$ avec $A,B \in \mathbb{R}$.

<u>Exercice 3</u> : 1)



$\gamma(\theta) = \rho e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ paramètre le cercle $\mathcal{C}$

et, par définition d'une <u>intégrale curviligne</u>

on a
$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z^{n+1}}\, dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(\rho e^{i\theta})}{(\rho e^{i\theta})^{n+1}} \cdot \rho i e^{i\theta}\, d\theta$$

on conclut donc en intégrant terme à terme (: comme $0<\rho<R$, la série de fonctions intégrée converge <u>normalement</u> (en θ) sur $[0, 2\pi]$), et avec le fait que

$$\int_0^{2\pi} e^{ik\theta}\, d\theta = \begin{cases} 0, & \text{si } k \neq 0 \\ 2\pi, & \text{si } k = 0 \end{cases}.$$

D'où
$$|c_n| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\rho e^{i\theta})| \cdot \frac{d\theta}{\rho^n} \leq \frac{1}{\rho^n} \cdot \sup_{|z|=\rho} |f(z)|.$$

2) a) par identification.

b) en supposant l'existence de $K>0$ valable jusqu'au rang $n+1$, on aura

$$(n+1)(n+2)\,|c_{n+2}| \leq \frac{MK}{\rho^{n+1}} \cdot \sum_{0}^{n} (k+1) + \frac{MK}{\rho^{n}} \cdot (n+1)$$

si $M \geq |a|, |b|$ sur $\mathcal{C}$. Soit

$$|c_{n+2}| \leq \frac{MK}{\rho^{n+1}} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{\rho}{n+2} \right) \leq \frac{MK}{\rho^{n+2}} \quad \text{si } \rho < 1$$

c) partant de $(c_0, c_1) = (1,0)$ et $(0,1)$, on obtient ainsi 2 solutions séries entières indépendantes au voisinage de 0.

<u>Exercice 4</u> : $\quad Sp(A) = \{-2\,;\, -1 \pm 2i\}$

la solution générale s'écrit $\vec{x}(t) = C_1 \cdot e^{-2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 \cdot \vec{x}_2(t) + C_3 \cdot \vec{x}_3(t)$

avec $\vec{x}_2(t) = e^{-t} \cdot \left(\cos 2t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \sin 2t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$

$\vec{x}_3(t) = e^{-t} \cdot \left(\cos 2t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \sin 2t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \qquad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$

Soit, dans la base $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$:

$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^{-2t} \\ y(t) = e^{-t}\left(C_2 \cos 2t + C_3 \sin 2t\right) \\ z(t) = e^{-t}\left(-C_2 \sin 2t + C_3 \cos 2t\right) \end{cases}$$

Compte-tenu de la condition initiale, il s'agit de tracer la courbe gauche d'équation paramétrique

$$\begin{cases} x(t) = e^{-2t} \\ y(t) = e^{-t}\left(\cos 2t + \sin 2t\right) \\ z(t) = e^{-t}\left(-\sin 2t + \cos 2t\right) \end{cases}$$

inscrite sur le cône $x = y^2 + z^2$:

et qu'on oriente selon les temps croissants.

Problème n° 3

Exercice 1 : établir, pour $x > 0$, la relation

$$\int_0^\infty e^{-t^2} \sin(2tx)\,\frac{dt}{t} = \sqrt{\pi}\int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

1) en développant chaque membre en série entière selon x
2) en montrant que les deux membres ont même dérivée

Exercice 2 : on considère l'EDO $x(1-x)y'' + (1-3x)y' - y = 0$

1) déterminer une solution développable en série entière en 0.
2) quelle est la forme de la solution générale ?

Exercice 3 : soit l'EDO $\ddot{x} + x - x^5 = 0$

1) l'écrire sous la forme d'un système différentiel d'ordre 1, et déterminer une intégrale première.

2) on considère la surface S d'équation cartésienne

$$z = y^2 + x^2 - \frac{x^6}{3}$$

- dessiner l'allure de S au voisinage des points à plan tangent horizontal.

- tracer le réseau des lignes de niveau de S.

- dessiner l'allure de S.

3) déterminer la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \ddot{x} + x - x^5 = 0 \\ x(0) = 0\,, \quad \dot{x}(0) = \sqrt{2/3} \end{cases}$$

représenter : les courbes intégrales, la trajectoire.

<u>Exercice 4</u> : f et g sont deux fonctions continues positives à support dans $[0,1]$, et d'intégrales valant 1.

montrer que $F(\lambda) = \displaystyle\iint_{\{x\cdot y \leq \lambda\}} f(x)\, g(y)\, dx\, dy$ définit

une fonction F dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et calculer $F'(\lambda)$.

Exercice 5 :

1) On désigne par J la solution au problème de Cauchy

$$\begin{cases} xy'' + y' + xy = 0 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

: déterminer son développement en série entière.

2) $(X_i)_{i \geq 1}$ désigne une suite de VA indépendantes, de même loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$:

- montrer que $S_2 = X_1 + X_2$ a une loi de densité $\lambda^2 x e^{-\lambda x} \cdot \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$
- déterminer la loi de S_n, $n \geq 2$.

3) Soit Y une VA de loi de Poisson de paramètre $a > 0$:

on considère l'application

$$S : \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \omega & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{1+Y(\omega)} X_i(\omega) \end{array}$$

- montrer qu'il s'agit d'une VA
- à quelle condition peut-on écrire

$$\forall 0 \leq \alpha < \beta, \quad \mathbb{P}(S \in (\alpha, \beta)) = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(X_1 + \dots + X_n \in (\alpha, \beta)) \cdot \mathbb{P}(Y = n-1)$$

4) Sous la condition précédemment trouvée, exprimer la loi de S à l'aide de la fonction J de 1).

Corrigé du problème n° 3

Exercice 1 :

1) $$F(x) = \int_0^\infty e^{-t^2} \sin(2xt)\frac{dt}{t} = \int_0^\infty e^{-t^2} \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(2xt)^{2n+1}\frac{dt}{t} \underset{=}{(*)}$$

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\int_0^\infty e^{-t^2} t^{2n}\, dt \cdot (2x)^{2n+1}$$ où $$\int_0^\infty e^{-t^2} t^{2n}\, dt \underset{\theta = t^2}{=} \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-\theta}\theta^{n-1/2}\, d\theta$$

n'est autre que $\frac{1}{2}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)$ qui se calcule à partir de $\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

ce qui conduit au développement

$$F(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot \frac{1}{2^n}\cdot 1.3.5\ldots(2n-1)\,\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot(2x)^{2n+1}$$

$$= \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)}\cdot\frac{x^{2n+1}}{n!}$$

à condition toutefois de justifier l'opération $(*)$ d'intégration terme à terme :

1) la série de fonctions $\sum_{n\geq 0}\left(f_n(t) \doteq \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(2xt)^{2n+1}\frac{e^{-t^2}}{t}\right.$ converge uniformément sur tout compact de $[0,\infty[$ (car le rayon de convergence de la série entière du sinus est $+\infty$) ;

2) pour tout $N>0$, on a

$$\left|\sum_{n=0}^N f_n(t)\right| \leq e^{-t^2}\frac{\operatorname{sh}(2xt)}{t}$$ fonction intégrable sur $(0,\infty)$

si bien qu'on peut conclure avec <u>le théorème de convergence dominée faible.</u>

C2

$$G(x) = \sqrt{\pi}\int_0^x e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}\int_0^x \sum_{n\geq 0} \frac{(-t^2)^n}{n!}dt \overset{(*)}{=} \sqrt{\pi}\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^x t^{2n}dt$$

conduit au même développement, avec une justification de $(*)$ élémentaire puisque la série entière intégrée converge uniformément sur le compact $[0, x]$.

2) G est évidemment dérivable, avec $G'(x) = \sqrt{\pi}e^{-x^2}$ $\forall x > 0$.

En supposant F dérivable deux fois, on aura

$$F'(x) = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{-t^2}\frac{\sin 2tx}{t}\right).dt = 2\int_0^\infty e^{-t^2}\cos(2tx)\,dt$$

puis

$$F''(x) = 2\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{-t^2}\cos 2tx\right)dt = -4\int_0^\infty te^{-t^2}\sin 2tx\,dt =$$

$$2\int_0^\infty \sin(2tx)\,d\left(e^{-t^2}\right) = -2\int_0^\infty e^{-t^2}d(\sin 2tx) = -4x\int_0^\infty e^{-t^2}\cos 2tx\,dt$$

ce qui conduit à l'EDO $\quad F''(x) = -2x.F'(x)$, $x>0$

soit $\quad F'(x) = Ke^{-x^2}$ avec $K = F'(0) = 2\int_0^\infty e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}$.

Pour montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$, on introduit la suite de fonctions

$$F_n(x) = \int^n e^{-t^2}\sin(2tx)\frac{dt}{t}$$

dérivables ($:$ car $(t,x) \mapsto e^{-t^2}\frac{\sin 2xt}{t}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\left[\frac{1}{n}, n\right]_t \times \mathbb{R}_x$)

avec $F_n'(x) = 2\int_{1/n}^{n} e^{-t^2}\cos(2xt)\,dt$ et on montre que

1) $F_n(0) = 0 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} F(0)$ (!)

2) $F_n' \underset{n\to\infty}{\xrightarrow{u}} H$ sur $\mathbb{R}$, où $H(x) \doteq 2\int_0^{\infty} e^{-t^2}\cos(2xt)\,dt$

puisque $|H - F_n'|(x) \leq 2\int_0^{1/n} + \int_n^{\infty} e^{-t^2}\,dt$, $\forall x \in \mathbb{R}$:

on sait alors que F est dérivable, avec $F' = H$.

On recommence sans difficulté avec F', d'où la conclusion demandée.

Exercice 2 : 1) en recherchant $y(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$, on obtient la relation de récurrence $a_{n+1} = a_n$ qui conduit à la solution $\frac{a_0}{1-x}$.

2) posant $y = z/_{1-x}$, il vient $xz'' + z' = 0$ d'où

$z(x) = A\ln|x| + B$, si bien que la solution générale s'écrit sous la forme $y(x) = \frac{B}{1-x} + \frac{A\ln|x|}{1-x}$ sur $\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$, ou, plus précisément sur chaque intervalle $]-\infty, 0[$, $]0,1[$ et $]1,\infty[$.

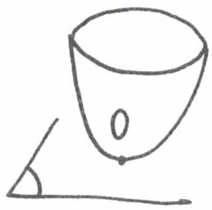
Exercice 3 : 1) $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + x^5 \end{cases}$ $V(x,y)$ est une intégrale première si

$y\frac{\partial V}{\partial x} = (x - x^5)\frac{\partial V}{\partial y}$: ainsi $V(x,y) = y^2 + x^2 - x^6/3$ convient-elle.

2) - le vecteur normal $\vec{N}\,\begin{vmatrix} \partial_x V = x - x^5 \\ \partial_y V = y \\ -1 \end{vmatrix}$ doit être vertical :

ce qui conduit aux points $P_+=(x=1, y=0, z=\frac{2}{3})$, $P_-=(x=-1, y=0, z=-\frac{2}{3})$ et O. C4

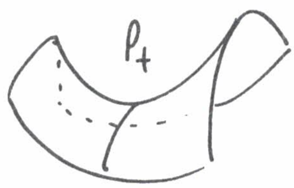
Au voisinage de O, $V(x,y)=x^2+y^2+o(2)$ et $\mathcal{S}$ a l'allure d'un paraboloïde



au voisinage de P_+ où $x=1+h$, $y=k$ avec (h,k) voisin de O, on a le développement de Taylor

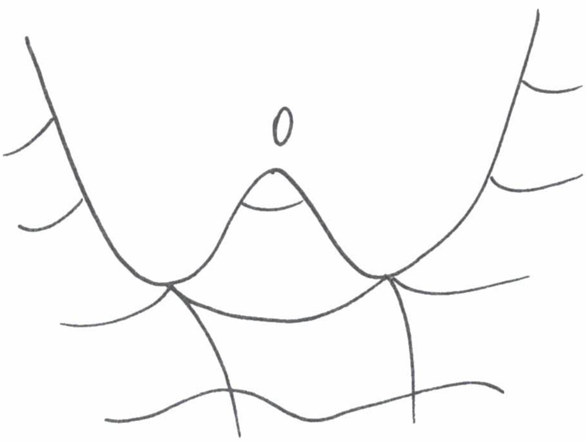
$$V(1+h,k)-V(1,0)=-4h^2+k^2+o(2)$$

et P_+ est un point selle

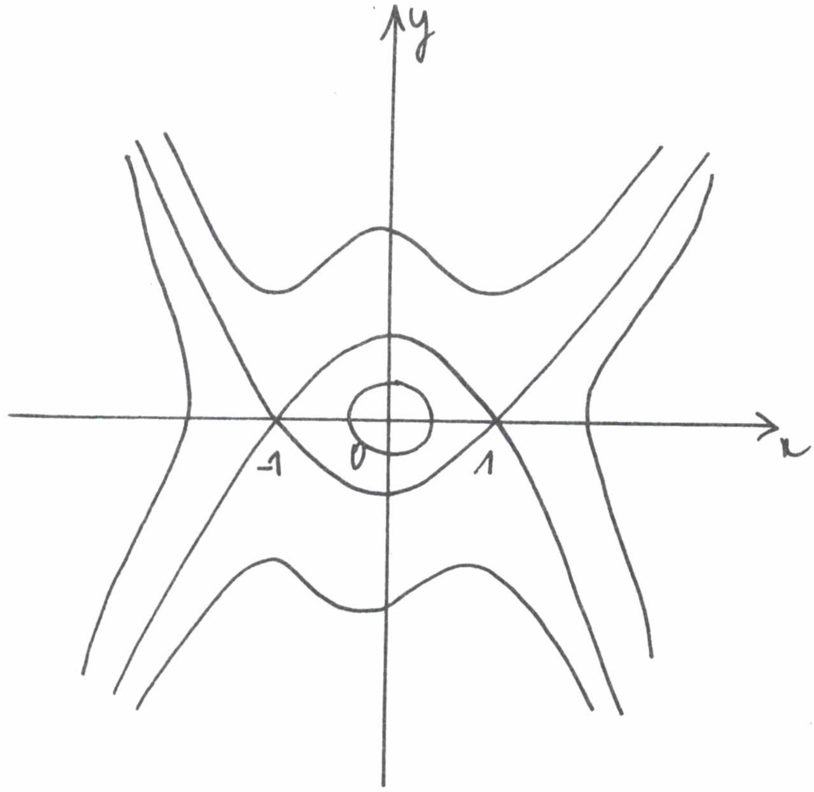


de même pour P_-, par symétrie.

– on représente l'allure de $-\mathcal{S}$: $z=-V(x,y)$:



– tracé des lignes de niveau $\{V=V_0\}$ ayant l'allure suivante :



3) La trajectoire cherchée $(x(t), y(t))$ doit être contenue dans la ligne de niveau $V = V(0, \sqrt{2/3}) = 2/3$, d'équation

$$y^2 = \frac{1}{3}(x^2-1)^2(x^2+2)$$

ce qui conduit à l'EDO d'ordre 1 à variables séparables

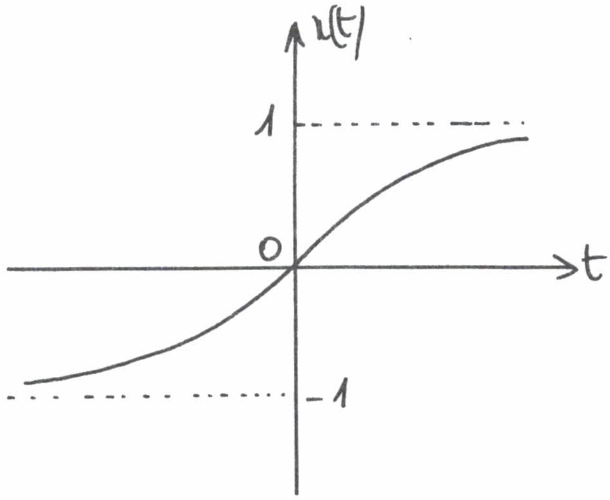
$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1-x^2)\sqrt{x^2+2}$$

dont l'intégration donne

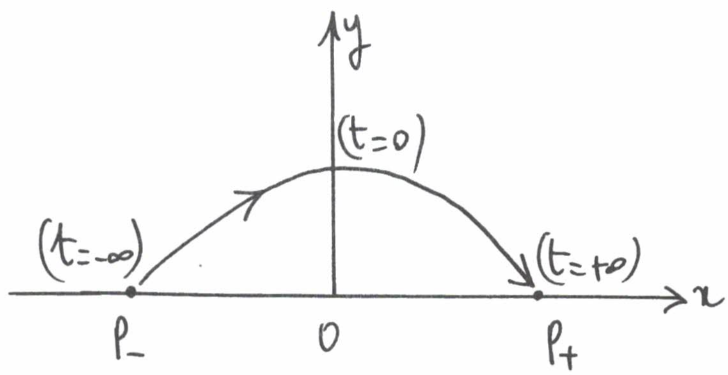
$$\int_0^{x(t)} \frac{dx}{(1-x^2).\sqrt{x^2+2}} = t\sqrt{3}$$

soit, tous calculs de primitive faits $x(t) = \sqrt{2}\,\dfrac{th(3t)}{\sqrt{3-th^2(3t)}}$

ce qui conduit aux tracés suivants,

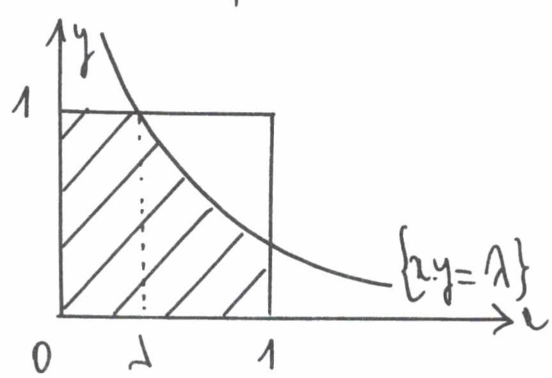


: courbe intégrale.



: trajectoire.

Exercice 4 : il est clair que $F(\lambda)=0$ si $\lambda\leq 0$, tandis que pour $\lambda\in[0,1]$ le domaine d'intégration :



montre que

$$F(\lambda)=\int_0^\lambda f(x)\left(\int_0^1 g(y)\,dy\right)dx+\int_\lambda^1 f(x)\left(\int_0^{\lambda/x} g(y)\,dy\right)dx$$

$$=\int_0^\lambda f(x)\,dx+\int_\lambda^1 f(x)\left(\int_0^{\lambda/x} g(y)\,dy\right)dx$$

et donne

$$F'(\lambda) = f(\lambda) - f(\lambda) \cdot \int_0^1 g(y)\,dy + \int_\lambda^1 f(x)\, g\left(\frac{\lambda}{x}\right) \frac{dx}{x}$$

$$= \int_\lambda^1 f(x)\, g\left(\frac{\lambda}{x}\right) \frac{dx}{x} \qquad \text{pour} \quad \lambda \in \,]0,1]$$

enfin, $F(\lambda) = F(1) = 1$ si $\lambda \geq 1$.

<u>remarque:</u> l'exemple $f = g = \mathbb{1}_{(0,1)}$ montre que F peut ne pas être dérivable en 0.

<u>Exercice 5:</u> 1) $J(x) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2^n n!)^2}$, $R = +\infty$.

2) de par l'indépendance des VA X_1 et X_2, la densité de S_2 s'obtient par

$$\int_0^x \lambda e^{-\lambda(x-y)} \cdot \lambda e^{-\lambda y}\,dy = \lambda^2 x e^{-\lambda x}, \quad x > 0$$

et, plus généralement, la densité de S_n vaut

$$\lambda \cdot \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} \cdot \mathcal{Y}(x)$$

3) étant donnés $0 \leq \alpha < \beta$, on a

$$\{S \in (\alpha,\beta)\} = \bigcup_{n \geq 1} \{X_1 + \cdots + X_n \in (\alpha,\beta) \text{ et } Y = n-1\}$$

qui se présente comme une réunion dénombrable d'événements de la tribu.

si Y est indépendante des VA X_n, on a

$$\mathbb{P}(S \in (\alpha,\beta)) = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(X_1 + \dots + X_n \in (\alpha,\beta)) \times \mathbb{P}(Y = n-1)$$

$$= \sum_{n \geq 1} \int_\alpha^\beta \lambda \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} dx \cdot e^{-a} \frac{a^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$\overset{(*)}{=} \int_\alpha^\beta \sum_{n \geq 1} \lambda \frac{(\lambda a x)^{n-1}}{((n-1)!)^2} e^{-\lambda x - a} dx$$

$$= \int_\alpha^\beta \lambda e^{-\lambda x - a} \cdot J(2i\sqrt{\lambda x a})\, dx$$

donc la densité de S, à savoir $\lambda e^{-\lambda x - a} \cdot J(2i\sqrt{\lambda x a}) \cdot Y(x)$

à condition de justifier l'opération $(*)$; le fait que $R = +\infty$ rend l'interversion élémentaire.

Préparation à l'épreuve d'Analyse de l'Agrégation interne 95/96

Problème n° 4.

Exercice 1 : Justifier la démarche suivante :

de $\dfrac{1}{n^2} = \displaystyle\int_0^{\infty} t\, e^{-nt}\, dt = \int_0^1 \ln\left(\frac{1}{1-t}\right) . (1-t)^{n-1} dt$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

on tire

$$1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} = \int_0^1 \frac{1-(1-t)^n}{t} \ln\left(\frac{1}{1-t}\right) . dt$$

$$= \int_0^1 \sum_{k \geq 1} \frac{t^{k-1}}{k} \left(1 - (1-t)^n\right) dt$$

$$= \sum_{k \geq 1} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{(k-1)!}{k(n+1)\dots(n+k)} \right)$$

soit

$$1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1/2}{(n+1)(n+2)} - \frac{2/3}{(n+1)(n+2)(n+3)} - \dots$$

Quel peut être l'intérêt de cette formule ?

Exercice 2 : On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \ddot{x} + x(1+x)^2 = 0 \\ x(0) = \dfrac{1}{3}, \quad \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$$

Tracer la trajectoire et les courbes intégrales.

Problème : (Calcul des intégrales généralisées $\displaystyle\int_0^\infty e^{-t}\cos(xt)\,\frac{dt}{\sqrt{t}}$ et $\displaystyle\int_0^\infty e^{-t}\sin(xt)\,\frac{dt}{\sqrt{t}}$).

A) (Calcul de $\displaystyle\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt$, selon "différents procédés")

1) considérer l'intégrale double impropre $\displaystyle\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$ et passer en coordonnées polaires (soigner la rédaction).

2) pour $x \geq 0$, on pose $\displaystyle f(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}\,dt$:

a) établir la continuité de f sur $[0,+\infty[$.

b) montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$, et que

$$\forall x>0, \quad f'(x) - f(x) = -\frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt$$

c) conclure.

3) pour $x \geq 0$, on pose $g(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2} dt\right)^2$, et

$$h(x) = \int_0^1 \frac{e^{-(1+t^2)x^2}}{1+t^2} dt :$$

a) montrer que g et h sont de classe $\mathcal{C}^1$.

b) calculer $g+h$.

c) conclure.

Dans la suite, on pose

$$z(x) = \int_0^{\infty} e^{-(1-ix)t} \frac{dt}{\sqrt{t}} = u(x) + i\, v(x)$$ avec $u(x)$ et $v(x)$ réels.

B) (<u>établissement des EDO en</u> z, u <u>et</u> v)

1) rappeler pourquoi z est bien définie sur $\mathbb{R}$.

2) montrer que z est dérivable sur $\mathbb{R}$, et calculer z' en fonction de z.

3) en déduire que $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ est solution d'une EDO

linéaire $\quad (1) \quad \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = A . \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$

où l'application matricielle A sera explicitée.

4) montrer aussi que u et v sont solution de l'EDO

$$(2) \quad 4(1+x^2) . y'' + 12x . y' + 3y = 0.$$

c) (étude de l'EDO (2))

1) expliquer pourquoi l'ensemble des solutions de (2) est un espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbb{R}$.

2) montrer que toutes les solutions de (2) sont développables en série entière sur $]-1, 1[$.

3) en utilisant les développements en série entière des fonctions cosinus et sinus, établir ceux des fonctions u et v.

4) retrouver ces développements à l'aide de 2) (et de A); est-il facile de reconnaître u et v?

D) (étude du SD (1))

1) rappeler pourquoi $X : t \longmapsto \exp\int_0^t A(\tau)\,d\tau$ est la solution fondamentale de (1).

2) montrer que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, on a

$$\exp\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = e^a \cdot \begin{pmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{pmatrix}$$

3) en déduire u et v.

E) (étude de l'EDO en z)

1) intégrer l'EDO en z par "séparation des variables".

2) retrouver de cette manière u et v.

3) comment justifier le calcul ?

Corrigé du Problème n° 4.

Exercice 1 :

$$1+\dots+\frac{1}{n^2}=\int_0^1 \frac{1-(1-t)^n}{1-(1-t)}\ln\left(\frac{1}{1-t}\right)dt \;=\int_0^1 \left(1-(1-t)^n\right)\cdot\sum_{k\geq 1}\frac{t^{k-1}}{k}\cdot dt$$

en développant le ln en série entière $\overset{*}{=}\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^2}\int_0^1 \left(1-(1-t)^n\right)d(t^k)$

$$=\sum_{k\geq 1}\left(\frac{1}{k^2}-\frac{(k-1)!}{k(n+1)\dots(n+k)}\right)$$

en calculant $B(k,n+1)=\int_0^1 t^{k-1}(1-t)^n\,dt$ à l'aide d'une suite d'intégration par parties. Comme $\sum_1^\infty \frac{1}{k^2}=\pi^2/6$ (: leçon série de Fourier), on peut conclure à condition de justifier l'opération $*$ d'intégration terme à terme :

i) la série de fonctions de t.g. $u_k(t)=\left(1-(1-t)^n\right)\frac{t^{k-1}}{k}$ converge uniformément sur tt cpt de $[0,1[$ (le rayon de convergence de la série de $\ln\frac{1}{1-t}$ valant 1) ;

ii) et, s'agissant d'une suite de fcts ≥ 0, on a, pour tout $N>0$

$$\left|\sum_{k=1}^N u_k\right| \leqslant \left(1-(1-t)^n\right)\ln\frac{1}{1-t} \quad \text{intégrable sur } [0,1)$$

On peut donc conclure à l'aide du théorème de convergence dominée faible, à une version du dvt d'Euler Mac Laurin, qui trouve son intérêt dans le fait que la série de tg. $\dfrac{(k-1)!}{k.(n+1)\dots(n+k)}$ est <u>rapidement convergente</u>.

<u>Exercice 2</u> : On commence par écrire l'EDO sous la forme du SD

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x(1+x)^2 \end{cases}$$

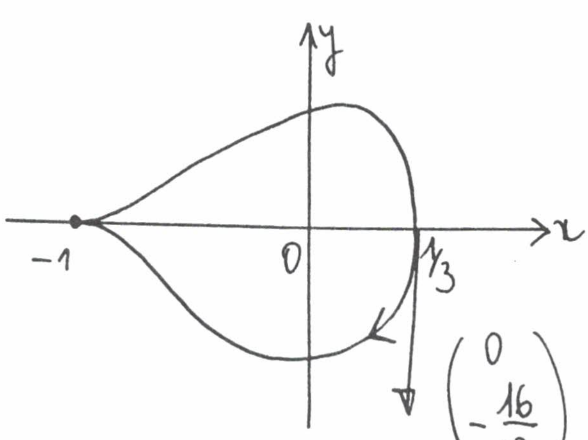
et déterminer $V(x,y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4$ comme <u>intégrale première</u> : la trajectoire cherchée est par conséquent contenue dans la ligne de niveau $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ V(x,y) = V(\frac{1}{3},0) = \frac{1}{12}\right\}$, ce qui conduit à l'équation implicite

$$y^2 = \frac{1}{6} - x^2\left(\frac{x^2}{2} + \frac{4}{3}x + 1\right)$$
$$= -\frac{1}{6}(x+1)^3(3x-1)$$

et permet de tracer la trajectoire comme le graphe de la fonction

$$y(x) = (x+1)\sqrt{\frac{(x+1)(3x-1)}{6}}$$

symétrisé / axe Ox :



$\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{16}{27} \end{pmatrix}$: champ au pt $(\frac{1}{3}, 0)$, qui permet d'orienter la trajectoire.

remarquer que $(-1,0)$ est un équilibre P appartenant à la ligne de niveau, qui est donc constituée de $P \cup$ la trajectoire demandée.

Il vient ensuite, pour $t>0$

$$\int_{1/3}^{x(t)} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{(x+1)(1-3x)}} = -t/\sqrt{6}$$

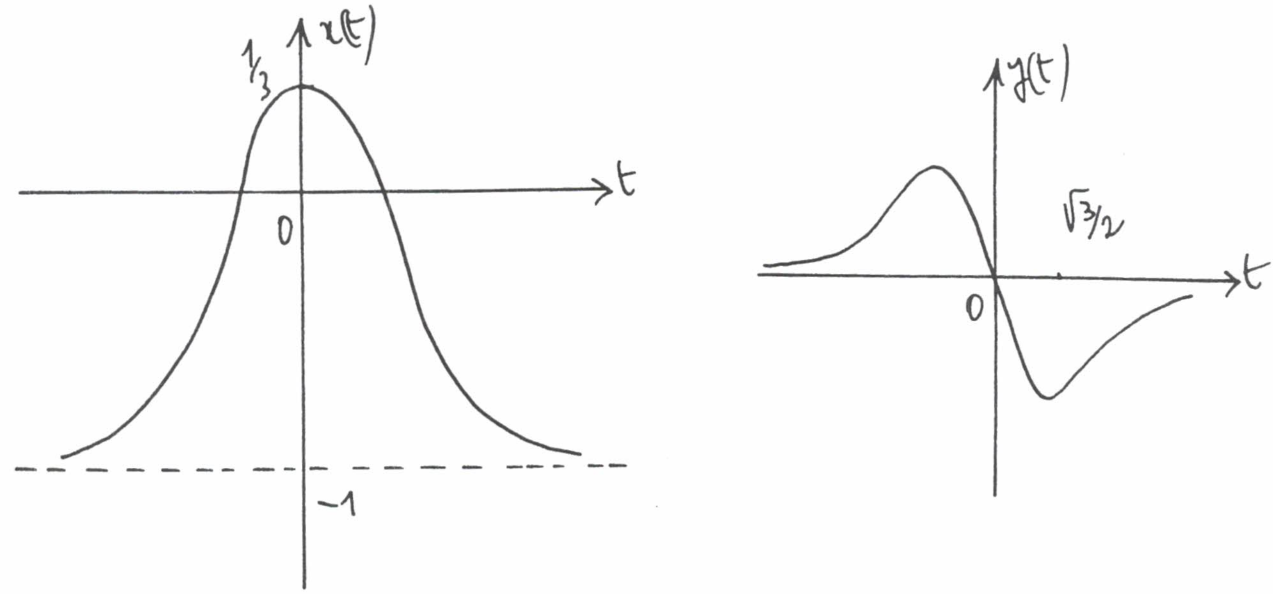
(car y devient <0)

et un calcul de primitive donne

$$\sqrt{\frac{1-3x(t)}{1+x(t)}} = -2t/\sqrt{6} \qquad \text{d'où} \qquad x(t) = \frac{3-2t^2}{9+2t^2}$$

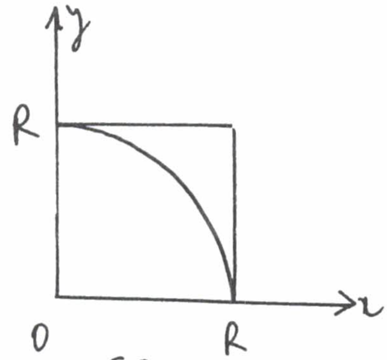
$$\text{puis : } \quad y(t) = -\frac{48t}{(9+2t^2)^2}$$

ce qui permet de tracer les courbes intégrales



Problème :

A) 1)



en notant $I_R = \iint_{\square_R} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \left(\int_0^R e^{-x^2}dx\right)^2$

et $J_R = \iint_{D_R} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \frac{\pi}{2}\int_0^R e^{-\rho^2}\rho\,d\rho = \frac{\pi}{4}\left(1-e^{-R^2}\right)$

il suffit de passer à la limite qd $R \to +\infty$ dans l'encadrement :

$$J_R < I_R < J_{R\sqrt{2}}$$

pour obtenir $\left(\int_0^\infty e^{-x^2}dx\right)^2 = \pi/4$ d'où $\int_0^\infty e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

2) a) la suite de fonctions $f_n(x) = \int_0^n e^{-xt^2}\frac{dt}{1+t^2}$ est formée de fcts continues sur $\mathbb{R}$ et $\left|\int_n^\infty e^{-xt^2}\frac{dt}{1+t^2}\right| \leqslant \int_n^\infty \frac{dt}{1+t^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

montre que $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} f$ sur $\mathbb{R}$: ainsi $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$.

b) chaque fonction f_n est dérivable, avec $f_n'(x) = \int_0^n -\frac{t^2}{1+t^2}e^{-xt^2}dt$

$\forall x \in \mathbb{R}$. en posant $g(x) = -\int_0^\infty \frac{t^2}{1+t^2}e^{-xt^2}dt$ on définit une fct

sur $]0,+\infty[$, avec

$$|g - f_n|(x) \leqslant \int_n^\infty e^{-xt^2}dt \leqslant \int_n^\infty e^{-\varepsilon t^2}dt \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

pour tout $x \geq \varepsilon > 0$ fixé : $f_n' \xrightarrow[n\to\infty]{cu} g$ sur $[\varepsilon, \infty[$, ainsi

montre que f est dérivable sur $]0, +\infty[$, avec

$$\forall x>0, \quad f'(x) = -\int_0^\infty \frac{t^2}{1+t^2} e^{-xt^2} dt$$

Ainsi,

$$f'(x) - f(x) = -\int_0^\infty e^{-xt^2} dt \underset{\theta = t\sqrt{x}}{=} -\frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^\infty e^{-\theta^2} d\theta, \quad x>0$$

c) en intégrant avec Lagrange, il vient $f(x) = K(x)\, e^x$ où

$$K'(x) = -\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \cdot \int_0^\infty e^{-\theta^2} d\theta$$

d'où

$$f(x) = k e^x + \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt \cdot \int_0^\infty e^{-\theta^2} d\theta, \quad \forall x>0$$

avec $k \in \mathbb{R}$. Comme $|f(x)| \leq \int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \pi/2 \quad \forall x \geq 0$, $k = 0$

et on obtient, avec a)

$$f(0) = 2\left(\int_0^\infty e^{-\theta^2} d\theta\right)^2$$

d'où

$$\int_0^\infty e^{-\theta^2} d\theta = \sqrt{\pi/4} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

3) a)

$$g'(x) = 2\int_0^x e^{-t^2} dt \cdot e^{-x^2}$$

$$h'(x) = -2x \int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)} dt \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

b) $(g'+h')(x) = 0$ donc $(g+h)(x) = (g+h)(0) = \pi/4 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

c) et comme $|h(x)| \leqslant e^{-x^2} \cdot \frac{\pi}{4} \xrightarrow[(+\infty)]{} 0$, il vient, en faisant $x \to +\infty$:

$$\left(\int_0^{\infty} e^{-t^2} dt\right)^2 = \frac{\pi}{4}.$$

B) 1) –

2) posant pour $n \in \mathbb{N}^*$ $\quad z_n(x) = \int_{\frac{1}{n}}^{n} e^{-(1-ix)t} \frac{dt}{\sqrt{t}}$

on a $z_n \xrightarrow[n \to \infty]{u} z$ sur $\mathbb{R}$ (car $\int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$ est une intégrale convergente), z_n étant dérivable sur $\mathbb{R}$ avec

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\quad z_n'(x) = \int_{\frac{1}{n}}^{n} i\sqrt{t}\, e^{-(1-ix)t} dt \quad$: comme l'intégrale $\int_0^{\infty} \sqrt{t} e^{-t} dt$ converge, $\quad z_n' \xrightarrow[n \to \infty]{u} Z \quad$ où $Z(x) = \int_0^{\infty} i\sqrt{t}\, e^{-(1-ix)t} dt$, et

: par conséquent, z est dérivable avec, $\forall x \in \mathbb{R}$, $z'(x) = \int_0^{\infty} i\sqrt{t}\, e^{-(1-ix)t} dt$

$$z'(x) = \int_0^{\infty} i\sqrt{t}\, d\left(-\frac{e^{-(1-ix)t}}{1-ix}\right) = \frac{-1}{2(x+i)} \cdot z(x).$$

3) soit, en séparant en Re et Im l'EDO à valeurs complexes obtenue :

$$2(x+i) \cdot (u'(x) + i v'(x)) = -(u(x) + i v(x))$$

le SDO

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad A(x) = \frac{1}{2(x^2+1)} \begin{pmatrix} -x & -1 \\ 1 & x \end{pmatrix}, \; x \in \mathbb{R}.$$

4) –

C) 1) il s'agit d'une EDO linéaire d'ordre 2 à coefficients continues sur $\mathbb{R}$, quand on la met sous la forme canonique

$$y'' + a y' + b y = 0$$

: d'après le théorème fondamental de la leçon $\boxed{24}$, la conclusion suit.

2) a et b étant développables en série entière en 0, il doit en être de même de toutes les solutions (: Exercice 3, problème n°2).

En cherchant ces solutions selon la technique d'identification :

$$y(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$$

, on est conduit à la relation de récurrence

$$\forall n \geq 0, \qquad a_{n+2} = -\frac{(2n+3)(2n+1)}{4(n+2)(n+1)} a_n$$

qui montre que $R = 1$.

3) il s'agit de justifier le calcul d'intégration terme à terme suivant

$$u(x) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \cos(xt)\, dt = \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \cdot \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (xt)^{2n} . dt \overset{*}{=}$$

$$\overset{*}{=} \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \int_0^\infty e^{-t} t^{2n-1/2} dt \,.\, x^{2n}$$

où $\displaystyle\int_0^\infty e^{-t} t^{2n-1/2} dt = \Gamma(2n+\tfrac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{4n}} \cdot \frac{(4n)!}{(2n)!}$ d'après la relation de récurrence connue et la partie A) qui permet de calculer $\displaystyle\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \int_0^\infty e^{-t} \frac{dt}{\sqrt{t}} \underset{(t=\theta^2)}{=} 2\int_0^\infty e^{-\theta^2} d\theta = \sqrt{\pi}$: ce qui donne le DSE

$$u(x) = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \cdot \frac{(4n)!}{((2n)!)^2} \cdot \left(\frac{x}{4}\right)^{2n}$$

de rayon de convergence $R = 1$, comme on le voit avec Cauchy-d'Alembert.

On justifie donc le point (*) :

i) le rayon de convergence de $\cos z$ étant ∞, la série de fcts de t $\displaystyle u_n(t) = \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \cdot \frac{(-1)^n}{(2n)!} (xt)^{2n}$ converge (à x fixé) uniformément sur tout cpt de $]0, \infty[$,

ii) de plus, pour tout $N > 0$, on a

$$\left|\sum_{n=0}^N u_n(t)\right| \leq \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \cdot ch(xt)$$

, fonction intégrable sur $(0,\infty)$ pour $|x|<1$: le thm de convergence dominée conduit à conclure.

Copie de m par v.

4) en reprenant 2), on a, pour u par exemple

$$\begin{cases} a_0 = u(0) = \int_0^{\infty} e^{-t} \frac{dt}{\sqrt{t}} = \sqrt{\pi} \\ a_1 = u'(0) = 0 \end{cases}$$

et la relation de récurrence donne bien

$$a_2 = -\frac{1.3}{1.2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{4}, \quad a_4 = \frac{1.3.5.7}{1.2.3.4} \frac{\sqrt{\pi}}{4^2} \dots$$

$$a_{2n} = (-1)^n \frac{1.3\dots(4n-1)}{1.2\dots 2n} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{4^n} = (-1)^n \frac{(4n)!}{((2n)!)^2} \cdot \sqrt{\pi}/4^{2n}$$

Sommation non immédiate ! : on choisit plutôt à intégrer l'EDO...

D) 1) rappel de Cours

2) les matrices aI et $N = b\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ commutant

on peut écrire $\exp\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = e^{aI} \times e^{N}$. On a évidemment $e^{aI} = e^a I$, tandis que $N^2 = b^2\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -b^2 I$

donne

$$\exp N = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n)!} b^{2n} . I + \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} b^{2n+1} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et à la formule demandée.

3) $$\int_0^t A(x)\,dx = \int_0^t \frac{1}{2(x^2+1)}\begin{pmatrix} -x & -1 \\ 1 & x \end{pmatrix} dx = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}\ln(1+t^2) & -\frac{1}{2}\operatorname{Arctg} t \\ \frac{1}{2}\operatorname{Arctg} t & -\frac{1}{4}\ln(1+t^2) \end{pmatrix}$$

donc, avec 2)

$$\begin{pmatrix} u(x) \\ v(x) \end{pmatrix} = \exp\int_0 A(\ )d \quad \cdot \begin{pmatrix} u(0) = \sqrt{\pi} \\ v(0) = 0 \end{pmatrix} = \dots$$

d'où tous calculs faits
$$\begin{cases} u(x) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt[4]{1+x^2}} \cos \dfrac{\operatorname{Arctg} x}{2} \\ v(x) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt[4]{1+x^2}} \sin \dfrac{\operatorname{Arctg} x}{2} \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}$$

E) 1) en opérant sans scrupule, on a

$$\frac{dz}{z} = -\frac{dx}{2(x+i)} = -\frac{1}{2}\,\frac{x-i}{x^2+1}\,dx$$

qui donne

$$\ln z(x) = -\frac{1}{4}\ln(1+x^2) + \frac{i}{2}\operatorname{Arctg} x + C$$

soit, compte-tenu de $z(0) = \sqrt{\pi}$

$$z(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt[4]{1+x^2}} \cdot \exp \frac{i}{2}\operatorname{Arctg} x$$

2) qui donne, en séparant en Re et Im

$$u(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt[4]{1+x^2}} \cos\left(\frac{1}{2}\operatorname{Arctg} x\right), \quad v(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt[4]{1+x^2}} \sin\left(\frac{1}{2}\operatorname{Arctg} x\right)$$

expressions qui se simplifie : on pose $y = \frac{1}{2}\,\mathrm{Arctg}\,x$,

$x = \mathrm{tg}\,2y$, $\cos 2y = \frac{1}{1+x^2} = 2\cos^2 y - 1 \ldots$

pour obtenir finalement

$$\begin{cases} u(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+x^2}} \\ v(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \dfrac{x}{\sqrt{\sqrt{1+x^2}-1}} \end{cases}$$

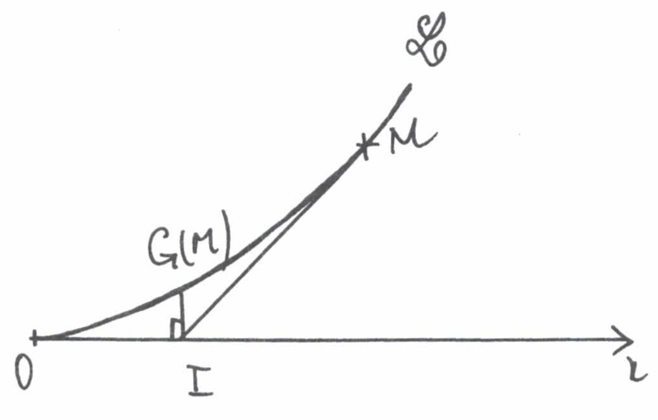
3) $\ln(z(x) \in \mathbb{C})$ n'a pas de sens (à ce niveau), mais

on peut vérifier que l'expression obtenue pour z satisfait l'EDO

en z...

Problème n° 5.

Exercice 1 : déterminer une ligne plane homogène régulière $\mathcal{L}$ tangente en O à Ox et, telle que, pour tout point $M \in \mathcal{L}$, le centre de gravité $G(M)$ de l'arc $\widehat{OM}$ se projette sur l'axe Ox selon le point d'intersection avec la tangente en M :



Exercice 2 : résoudre le problème de condition initiale

$$\begin{cases} \ddot{x} + x - \frac{3}{2}x^2 = 0 \\ x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = \frac{2}{3\sqrt{3}} \end{cases}$$

Exercice 3 : une urne contient n boules noires, et une boule blanche. On tire les boules les unes après les autres sans remise, et on note le rang N_1 de la boule blanche parmi les $(n+1)$ boules ainsi tirées. Quelle est la moyenne de N_1 ? (commencer par proposer une modélisation !)

Exercice 4 : montrer que, pour α et μ proches de 1 et $|a|$ et $|b|$ assez petits, l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x,y) = \left(\alpha . x + a \sin(x+y), \; \mu . y + b \sin x \right)$$

est un homéomorphisme.

Problème :

(A) (Calcul de l'intégrale de Fresnel $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{it^2} dt$)

1) établir la convergence de l'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{it^2} dt$.

2) pourquoi peut-on écrire, à X et $Y > 0$ donnés

$$\int_0^X \left(\int_0^Y e^{-xy^2} dy\right) . \sin x \, dx = \int_0^Y \left(\int_0^X e^{-xy^2} \sin x \, dx\right) dy \; ?$$

3) calculer la valeur de $\displaystyle\int_0^X e^{-xy^2} \sin x \, dx.$

4) justifier le passage à la limite suivant

$$\lim_{\substack{Y \to +\infty \\ Y \in \mathbb{N}}} \int_0^X \left(\int_0^Y e^{-xy^2} dy\right) \sin x \, dx = \int_0^X \left(\int_0^{+\infty} e^{-xy^2} dy\right) \sin x \, dx$$

à $X > 0$ fixé.

5) en déduire, à $X > 0$ fixé, la relation

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^X \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx = \int_0^\infty \frac{1}{1+y^4} \left(\left(1 - \cos X . e^{-y^2 X}\right) - y^2 \sin X . e^{-y^2 X} \right) dy$$

6) justifier le passage à la limite à droite lorsque $X \to +\infty$ sous le signe $\displaystyle\int_0^\infty$, et en déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx.$

7) déterminer la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{it^2} dt.$

converge uniformément sur $\mathbb{R}$, et en déduire que

$$f(t) = \sum_{n\geq 1} \frac{\sin(2\pi n t)}{\sqrt{n}}$$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$,

et 1-périodique.

2) en justifiant l'intégration terme à terme, montrer que le $n^{\text{ième}}$ coefficient de Fourier de f

$$b_n = 2\int_0^1 f(t).\sin(2\pi n t)\,dt \quad , n\geq 1$$

est bien défini, et vaut $1/\sqrt{n}$.

3) montrer que la fonction $k(t) = \sin(2\pi t).f(t)$ coïncide avec la fonction h définie en B) 3).

Que peut-on en déduire ?

D) (<u>calcul de la transformée de Fourier de φ</u>)

Etant donnée une fonction F d'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{+\infty} |F|\,dt$ convergente, on définit sa <u>transformée de Fourier</u> $\hat{F}$ en posant

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \hat{F}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi\xi t}\,F(t)\,dt$$

B) (étude d'une périodisée)

Pour $t \in \mathbb{R}^*$, on pose $\varphi(t) = \dfrac{\mathrm{sgn}(t)}{\sqrt{|t|}}$.

1) montrer que $\lim\limits_{N \to +\infty} \sum\limits_{-N}^{+N} \varphi(t-k)$ définit une fonction $g(t)$ pour $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, qui est 1-périodique et d'intégrale $\int_0^1 |g(t)|\, dt$ convergente.

2) en justifiant l'intégration terme à terme, montrer que le $n^{\text{ième}}$ coefficient de Fourier de g

$$b_n = 2 \int_0^1 g(t) \sin(2\pi n t)\, dt \quad , \; n \geq 1$$

vaut $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$. Comment s'écrit la série de Fourier de g ?

3) montrer que la fonction $h(t) = \sin(\pi t) \cdot g(t)$ est une fonction continue 1-périodique. Comment obtenir son développement en série de Fourier ?

C) (étude d'une série trigonométrique)

1) montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n \geq 1} \dfrac{\sin(\pi t) \sin(2\pi n t)}{\sqrt{n}}$

5) montrer que, dans le second cas, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_{\frac{1}{n}}^{n} \hat{\phi}(x) \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2i \int_0^{\infty} \left(\int_{\frac{2\pi t}{n}}^{2\pi n t} \frac{\sin\theta}{\sqrt{\theta}} \, d\theta \right) \frac{\phi(t)}{\sqrt{2\pi t}} \, dt$$

6) en déduire que, pour toute $\phi \in \mathcal{S}$, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi \, \hat{\phi} \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} i\varphi \cdot \phi \, dx$$

(on note $\hat{\varphi} = i\varphi$ "au sens des distributions tempérées").

On dit d'une fonction ϕ qu'elle est $\mathcal{C}^\infty$ à décroissance rapide (on note : $\underline{\phi \in \mathcal{S}}$) si

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \forall N \in \mathbb{N}, \qquad \lim_{\pm\infty} t^N \phi^{(p)}(t) = 0.$$

1) montrer que, si $\phi \in \mathcal{S}$, alors $\hat{\phi} \in \mathcal{S}$.

2) pour $\phi \in \mathcal{S}$ et φ définie sur $\mathbb{R}^*$ en B), montrer que l'intégrale généralisée

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, \hat{\phi}(x)\, dx \qquad \text{converge.}$$

3) vérifier que si $\phi \in \mathcal{S}$ est une fonction paire (respectivement impaire), sa transformée de Fourier est définie par

$$\hat{\phi}(\xi) = 2\int_0^\infty \cos(2\pi\xi t) . \phi(t)\, dt \qquad \left(\text{resp. } 2i\int_0^\infty \sin(2\pi\xi t) . \phi(t)\, dt\right)$$

4) en déduire que, si $\phi \in \mathcal{S}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, \hat{\phi}(x)\, dx = \begin{cases} 0 & , \text{si } \phi \text{ est paire} \\ \lim\limits_{n\to\infty} 2\displaystyle\int_{1/n}^{n} \hat{\phi}(x) \frac{dx}{\sqrt{x}} & , \text{si } \phi \text{ est impaire} \end{cases}$$

Corrigé du problème n° 5.

Exercice 1 : soit $y = f(x)$ l'équation cartésienne de la ligne cherchée : $f(0) = f'(0) = 0$ et, comme

$$\overline{OI} = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \quad (\text{si } f'(x) \neq 0)$$

$$x_G = \int_{\widehat{OM}} x\,ds \Big/ \ell(\widehat{OM}) = \int_0^x t\sqrt{1+(y')^2}\,dt \Big/ \int_0^x \sqrt{1+(y')^2}\,dt$$

f doit être solution de l'EDOi

$$\left(x - \frac{y}{y'}\right)\cdot \int_0^x \sqrt{1+(y')^2}\,dt = \int_0^x t\sqrt{1+(y')^2}\,dt$$

qu'on intègre (en supposant f régulière) en dérivant deux fois, ce qui donne

$$\int_0^x \sqrt{1+(y')^2}\,dt = \frac{y'}{y''}\sqrt{1+(y')^2} \quad \text{puis} \quad (1+y'^2)\,y''' = (y'')^2 y'$$

soit $$\frac{y'''}{y''} = \frac{y''y'}{1+(y')^2}$$ ce qui donne par quadrature

$y'' = C\sqrt{1+y'^2}$ puis (posant $y' = \operatorname{sh} u$) par une nouvelle quadrature $y' = \operatorname{sh}(Cx + D)$ où $y'(0) = 0$ donne

$D = 0$. Ainsi $y(x) = \frac{1}{C}\operatorname{ch}(Cx) + A$ avec $y(0) = 0$ conduit à la solution $f(x) = \frac{1}{C}(\operatorname{ch} Cx - 1)$. $\mathcal{L}$ est une chaînette.

Exercice 2 : en écrivant l'EDO sous la forme du SD

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + \frac{3}{2}x^2 \end{cases}$$

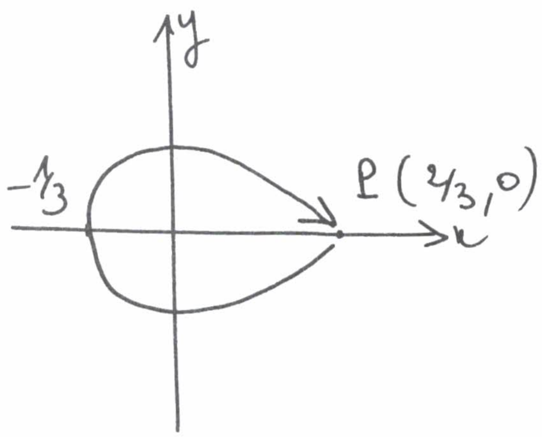
on observe que $V(x,y) = y^2 + x^2 - x^3$ est une intégrale première.

La trajectoire cherchée est donc contenue dans la ligne de niveau

$$\{ y^2 + x^2 - x^3 = 4/27 \}$$

soit l'équation implicite $y^2 = (x - 2/3)^2 \cdot (x + \frac{1}{3})$, $x \geq -\frac{1}{3}$

d'où le tracé de la trajectoire



et l'équation à variables séparables d'ordre 1 selon x

$$\dot{x} = \left(\frac{2}{3} - x\right) \cdot \sqrt{x + 1/3}$$

Une quadrature conduit alors au résultat

$$\int_0^{x(t)} \frac{dx}{\left(\frac{2}{3} - x\right) \cdot \sqrt{x + 1/3}} = t$$

donnant $\quad x(t) = -\frac{1}{3} + \left(\frac{(2+\sqrt{3})\, e^{t} - 1}{(2+\sqrt{3})\, e^{t} + 1} \right)^2 \quad \left(\underset{\pm\infty}{\longrightarrow} 2/3 \right.$, position d'équilibre)

Exercice 3 : en désignant par $\mathcal{U} = \{N_1, .., N_n, B\}$ le contenu de l'urne $\mathcal{U}$, un événement élémentaire ω est une permutation de $\mathcal{U}$; comme $\operatorname{card} \mathfrak{S}_{n+1} = (n+1)!$, on pose $\mathbb{P}(\omega) = 1/(n+1)!$ $\forall \omega$.

Ainsi $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = (\mathfrak{S}_{n+1}, \mathcal{P}(\mathfrak{S}_{n+1}), \mathbb{P})$ où

$$\forall A \subset \Omega, \quad \mathbb{P}(A) \doteq \frac{1}{(n+1)!} \cdot \operatorname{card}(A)$$

On considère donc la variable aléatoire $N_1 : \begin{array}{l} \Omega \longrightarrow \{1, 2, .., n+1\} \\ \omega \longmapsto \text{le rang de } B \end{array}$

(N_1 est évidemment mesurable !). Comme, pour $k \in \{1, .., n+1\}$, on a

$$\operatorname{card} \{\omega \,/\, N_1(\omega) = k\} = A_n^{k-1} \times 1 \times (n-k+1)!$$

la loi de N_1 est définie par

$$\mathbb{P}(N_1 = k) = \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{(n-k+1)!} \cdot (n-k+1)! = \frac{1}{n+1}$$

: il s'agit d'une loi uniforme, d'espérance

$$\mathbb{E}(N_1) = \sum_{k=1}^{n+1} k/(n+1) = \frac{1}{n+1} \cdot (n+1)(n+2)/2 = \frac{n+2}{2}.$$

Exercice 4 : adoptant sur $\mathbb{R}^2$ la norme $\|\cdot\|_\infty$, on voit que pour $g = I - f$,

$$\|g(x,y) - g(x',y')\|_\infty \leq \big(|1-\lambda| + |1-\mu| + 2|a| + |b|\big)\,\|(x,y)-(x',y')\|_\infty$$

et, par conséquent, dans les conditions de l'énoncé, pour tout $(X,Y) \in \mathbb{R}^2$ donné, $(x,y) \mapsto (X,Y) + g(x,y)$ est une contraction de $\mathbb{R}^2$: la conclusion découle du théorème du point fixe et de la remarque sur la dépendance continue du point fixe.

Problème : A) 1) la fonction $f(x,y) = e^{-xy^2}\sin x$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ et thm 7, leçon $\boxed{17}$.

2) $\displaystyle\int_0^1 e^{it^2}dt$ est définie ; $\displaystyle\int_1^T e^{it^2}dt = \int_1^T \frac{d(e^{it^2})}{2it} =$

$$= \frac{e^{it^2}}{2it}\Big|_1^T + \int_1^T \frac{e^{it^2}}{2it^2}dt$$ et l'intégrale $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dt}{t^2}$ converge.

par conséquent $\displaystyle\int_0^\infty e^{it^2}dt$ converge, comme $\displaystyle\int_{-\infty}^0 e^{it^2}dt$ par parité.

3) $\displaystyle\int_0^X e^{-xy^2}\sin x\,dx = \operatorname{Im}\left(\int_0^X e^{(i-y^2)x}dx = \frac{e^{(i-y^2)X}-1}{i-y^2}\right) =$

$\displaystyle -\frac{1}{1+y^4}\left(\left(e^{-y^2X}\cos X - 1\right) + y^2 e^{-y^2X}\sin X\right).$

4) $\displaystyle\int_0^Y e^{-xy^2}dy \underset{(x>0,\ y=t/\sqrt{x})}{=} \frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^{Y\sqrt{x}} e^{-t^2}dt \underset{(Y\to+\infty)}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^{\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$

la suite de fonctions $\displaystyle\left(f_Y(x) = \int_0^Y e^{-xy^2}dy\right)_{Y\in\mathbb{N}}$ converge vers $\left(\sqrt{\pi}/2\sqrt{x}\right)$

uniformément sur tout cpt de $]0,X]$ (car, pour $x \geqslant \varepsilon > 0$,

$\displaystyle\int_{Y\sqrt{x}}^{\infty} e^{-t^2}dt \leqslant \int_{Y\sqrt{\varepsilon}}^{\infty} e^{-t^2}dt \underset{Y\to+\infty}{\longrightarrow} 0$) et, par conséquent

la suite de fcts $\left(x \longmapsto f_Y(x).\sin x\right)$ converge uniformément vers

$\left(x \longmapsto \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right)$ dans les mêmes conditions. Ensuite, pour $x>0$,

$\displaystyle|f_Y(x).\sin x| \leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{|\sin x|}{\sqrt{x}}$ où $\displaystyle\int_0^X \frac{|\sin x|}{\sqrt{x}}dx$ est

une intégrale définie : on peut donc conclure avec le théorème de convergence dominée.

5), 6) posant $g_X(y) = \frac{1}{1+y^4}\left(\left(1-\cos X . e^{-y^2X}\right) - y^2 \sin X\, e^{-y^2X}\right)$, C^∞,

il vient $\lim\limits_{\substack{X \to +\infty \\ X \in \mathbb{N}}} g_X(y) = \underset{(y>0)}{} \ {}^1/_{1+y^4}$ et

$$\left| g_X(y) - {}^1/_{1+y^4} \right| = \left| \frac{1}{1+y^4} e^{-y^2X} . \left(\cos X + y^2 \sin X\right) \right| \leqslant \frac{1+y^2}{1+y^4} e^{-\varepsilon^2 X}$$

si $y \geqslant \varepsilon > 0$, ce qui montre que la convergence est uniforme

sur tout $[\varepsilon, +\infty[$ avec $\varepsilon > 0$; en outre, comme

$$|g_X(y)| \leqslant \frac{2+y^2}{1+y^4} \quad \text{avec} \quad \int_0^\infty \frac{2+y^2}{1+y^4} dy < +\infty, \text{ il y a}$$

convergence dominée : la conclusion suit. On obtient donc

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx = \int_0^\infty \frac{dy}{1+y^4} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4} \quad \text{(par décomposition}$$

en éléments simples) : $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx = \frac{1}{2}\sqrt{2\pi}$.

7) en opérant à partir de $e^{-xy^2} \cos y$, on obtient la même valeur

pour $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx$ $\left(\text{car } \displaystyle\int_0^\infty \frac{y^2 dy}{1+y^4} = \int_0^\infty \frac{dy}{1+y^2} \text{ par } y = {}^1/_y\right)$

D'où, finalement $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{it^2} dt = \sqrt{\pi} . e^{i\pi/4}$

B) 1) à $t \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ fixé, et pour $N > |t|$, on peut écrire

$$\sum_{-N}^{N} \varphi(t-k) = \sum_{|k|<|t|} \varphi(t-k) + \sum_{|t|<|k|\leq N} \varphi(t-k)$$

$$= \sum_{|k|<|t|} \varphi(t-k) + \sum_{|t|<k\leq N} \big(\varphi(t-k)+\varphi(t+k)\big)$$

où $\varphi(t-k)+\varphi(t+k) = \dfrac{-1}{\sqrt{k-t}} + \dfrac{1}{\sqrt{k+t}} = \dfrac{-2t}{\sqrt{k^2-t^2}\cdot(\sqrt{k+t}+\sqrt{k-t})}$

est le t.g. d'une série absolument convergente. Ceci assure l'existence de la limite simple sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$. De plus, si $|t|\leq T$,

$$\left|\frac{-2t}{\sqrt{k^2-t^2}(\sqrt{k+t}+\sqrt{k-t})}\right| \leq \frac{2T}{\sqrt{k^2-T^2}\cdot 2\sqrt{k-T}} \qquad \text{pour } k > T$$

ce qui permet de conclure à la convergence uniforme sur toute partie $[-T,T]\setminus\mathbb{Z}$: si $t\in\,]0,1[$, on peut donc écrire

$$g(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{1}{\sqrt{t-1}}\right) + \frac{1}{\sqrt{t+1}} + h(t),$$

où h est la somme d'une série de fonctions continues sur $[0,1]$ uniformément convergente sur $[0,1]$ et, à ce titre, continue sur $[0,1]$.

: Comme $\int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{t}} + \frac{1}{\sqrt{t-1}}\right)dt$ converge, $\int_0^1 |g(t)|\,dt$ converge aussi.

2) il s'agit de justifier le calcul suivant :

$$2\int_0^1 \sum_{-\infty}^{\infty} \varphi(t-k)\,.\sin(2\pi n t)\,dt = 2\sum_{-\infty}^{\infty}\int_0^1 \varphi(t-k)\sin(2\pi n t)\,dt$$

(où la somme est entendue au sens $\lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{-N}^{N}$)

car alors, il vient

$$\int_0^1 \varphi(t-k)\,.\sin(2\pi n t)\,dt \underset{(t=k+t)}{=} \int_{-k}^{-k+1} \varphi(t)\sin(2\pi n t)\,dt$$

d'où

$$b_n = 2\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\sin(2\pi n t)\,dt = 4\int_0^{\infty} \frac{\sin(2\pi n t)}{\sqrt{t}}\,dt = \frac{4}{\sqrt{2\pi n}}\int_0^{\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt$$

et on conclut avec A) 6).

Quant à la justification du passage à la limite

$$\int_0^1 \lim_{N\to+\infty}\sum_{-N}^{N} \quad = \lim_{N\to+\infty}\sum_{-N}^{N}\int_0^1$$

il suffit d'écrire la décomposition de g avec h, puisque la série de h converge uniformément sur $[0,1]$.

3) g étant impaire, sa série de Fourier s'écrit donc

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(2\pi n t)}{\sqrt{n}} .$$

3) en linéarisant.

C) 1) comme $2\sin \pi t \sin 2\pi n t = \cos(2n-1)\pi t - \cos(2n+1)\pi t$,

une transformation d'Abel donne, pour $p>q>1$

$$2\sum_{q}^{p} \frac{\sin(\pi t)\sin(2\pi n t)}{\sqrt{n}} = \frac{\cos(2q-1)\pi t}{\sqrt{q}} - \frac{\cos(2p+1)\pi t}{\sqrt{p}}$$

$$+ \sum_{q+1}^{p} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n-1}}\right) \cos(2n-1)\pi t$$

si bien que, pour tout $t\in\mathbb{R}$, on a

$$\left|\sum_{q}^{p} \frac{\sin\pi t . \sin 2\pi n t}{\sqrt{n}}\right| \leq 1/\sqrt{q}$$

et le critère de Cauchy permet de conclure.

La fonction $f_1(t) = \sin \pi t . \sum_{n\geq 1} \frac{\sin(2\pi n t)}{\sqrt{n}}$ est donc continue

sur $\mathbb{R}$ et, pour $t\notin\mathbb{Z}$, $f(t) = f_1(t)/\sin(\pi t)$ est bien

définie : f est continue sur $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

2) il s'agit de justifier l'opération suivante :

$$2\int_0^1 \sin(2\pi nt) \sum_{m\geq 1} \frac{\sin(2\pi mt)}{\sqrt{m}}\, dt = \sum_{m\geq 1} \frac{1}{\sqrt{m}} \int_0^1 \left(\cos 2\pi(n-m)t - \cos 2\pi(n+m)t\right) dt$$

qui donne $1/\sqrt{n}$:

<u>d'une part</u>, la série converge uniformément sur tout compact $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$ de $]0,1[$ (car 1) et $\sin(\pi t) \geq \sin(\pi\varepsilon)$)

<u>d'autre part</u>, toujours d'après 1) (avec $q=1 < N=p$), on a

$$\left|\sum_{m=1}^{N} \frac{\sin(2\pi nt) . \sin(2\pi mt)}{\sqrt{m}}\right| \leq \frac{|\sin(2\pi mt)|}{\sin \pi t}$$

où la fonction de droite est $\mathcal{C}^0([0,1])$: on peut donc appliquer <u>le théorème de convergence dominée</u>.

3) d'après Parseval, $h = k$.

D) 1) on considère la suite de fonctions $\varphi_n : \xi \mapsto \int_{-n}^{n} e^{-2i\pi\xi t} \phi(t) dt$

Il s'agit de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$, avec, pour tout $p \in \mathbb{N}$

$$\forall \xi \in \mathbb{R},\ \varphi_n^{(p)}(\xi) = \int_{-n}^{n} e^{-2i\pi\xi t} (-2i\pi t)^p \phi(t)\, dt$$

Comme $|\phi(t)| \leq \dfrac{C_p}{(1+|t|)^{p+2}}$ par l'hypothèse $\phi \in \mathcal{S}$, la suite $(\varphi_n^{(p)})_{n\geq 1}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_\xi$, ce qui permet de montrer que $\hat{\phi}$ est de classe $\mathcal{C}^p$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

D'autre part, $\widehat{\phi'}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi\xi t} . d\phi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} 2i\pi\xi . e^{-2i\pi\xi t} \phi(t) dt$ montre que $\widehat{\phi'}(\xi) = 2i\pi\xi . \hat{\phi}(\xi)$ et, plus généralement, $\widehat{\phi^{(p)}}(\xi) = (2i\pi\xi)^p . \hat{\phi}(\xi)$: comme $\lim_{|\xi|\to\infty} \hat{\phi}(\xi) = 0$, on conclut.

2) Comme $|\phi(x)| \leq C/_{1+|x|}$ et que $\int_0^\infty \dfrac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$ converge;

3) en particulier $\hat{\phi}$ a la parité de ϕ, d'où 4).

5) il s'agit de justifier l'interversion des ordres d'intégration :

$$\int_{\frac{1}{n}}^{n} \int_0^\infty \phi(t) \sin(2\pi t x) dt . \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int_0^\infty \left(\int_{1/n}^{n} \frac{\sin(2\pi t x)}{\sqrt{x}} dx \right) \phi(t) dt$$

car alors

$$\int_{1/n}^{n} \underset{\substack{(\theta = 2\pi t x) \\ t>0}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{\frac{2\pi t}{n}}^{2\pi n t} \frac{\sin\theta}{\sqrt{\theta}} d\theta .$$

On suit pour cela la démarche de la partie A) :

pour $0<\varepsilon<T$, on peut écrire

$$\int_{\frac{1}{n}}^{n}\left(\int_{\varepsilon}^{T}\phi(t)\sin(2\pi t x)\,dt\right)\frac{dx}{\sqrt{x}}=\int_{\varepsilon}^{T}\left(\int_{1/n\cdot 2\pi t}^{n\cdot 2\pi t}\frac{\sin\theta}{\sqrt{\theta}}\,d\theta\right)\frac{\phi(t)}{\sqrt{2\pi t}}\,dt$$

prenant $\varepsilon=\frac{1}{k}$, $T=k$ avec $k\in\mathbb{N}$,

$$f_k(x)\doteq\int_{1/k}^{k}\phi(t)\sin(2\pi t x)\,dt\xrightarrow[(k\to+\infty)]{}\int_{0}^{\infty}\phi(t)\sin(2\pi t x)\,dt$$

avec

$$\left|\int_{0}^{1/k}+\int_{k}^{\infty}\phi(t)\sin(2\pi t x)\,dt\right|\leqslant\int_{0}^{1/k}+\int_{k}^{\infty}|\phi|\,dt\to 0$$

ce qui montre qu'il y a convergence uniforme sur $\left[\frac{1}{n},n\right]_x$.

) en posant $g_n(t)=\displaystyle\int_{2\pi t/n}^{2\pi n t}\frac{\sin\theta}{\sqrt{\theta}}\,d\theta$, comme, pour $t>0$

$$g_n(t)\xrightarrow[(n\to\infty)]{}\int_{0}^{\infty}\frac{\sin\theta}{\sqrt{\theta}}\,d\theta=\frac{1}{2}\sqrt{2\pi}\quad\text{d'après A)},$$

il s'agit de justifier le passage à la limite sous le signe $\displaystyle\int_0^\infty\ \ dt$:

d'une part, comme

$$\left|\int_0^{2\pi t/n} \frac{\sin\theta}{\sqrt{\theta}}\,d\theta\right| \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\pi t}{n}} \qquad \text{et}$$

$$\left|\int_{2\pi n t}^{\infty} \frac{\sin\theta}{\sqrt{\theta}}\,d\theta = \int_{2\pi n t}^{\infty} \frac{d(-\cos\theta)}{\sqrt{\theta}}\right| \leqslant 2/\sqrt{2\pi n t}$$

la suite $(g_n)_{n\geq 1}$ converge vers $\frac{\sqrt{2\pi}}{2}$ uniformément sur tout compact de $]0,\infty[$;

d'autre part, comme

$$|g_n(t)| \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\pi t}{n}} + 2/\sqrt{2\pi n t} + \frac{1}{2}\sqrt{2\pi}$$

$$\underset{(n\geq 1)}{\leqslant} \frac{1}{2}\sqrt{2\pi t} + 2/\sqrt{2\pi t} + \frac{1}{2}\sqrt{2\pi}$$

on a

$$\left| g_n(t) \cdot \frac{\phi(t)}{\sqrt{2\pi t}} \right| \leqslant \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{t} + \frac{1}{2\sqrt{t}}\right)|\phi(t)|$$

où, comme $\phi \in \mathcal{S}$ est impaire $\left(\frac{\phi(t)}{t} \underset{(0)}{\rightarrow} \phi'(0)\right)$, la fonction de droite possède une $\int_0^\infty$ convergente : il y a donc convergence dominée, et on peut conclure, d'abord pour ϕ impaire ; pour ϕ paire la forme est évidente et comme (en général) $\phi = \frac{1}{2}(\phi+\check{\phi}) + \frac{1}{2}(\phi-\check{\phi})$.

Préparation à l'épreuve d'Analyse de l'Agrégation Interne 95/96

Problème n° 6

Exercice 1 : montrer que, pour $\alpha > 0$ fixé,

$$\sum_{1}^{\infty} e^{-t.n^{\alpha}} \underset{(t \to 0+)}{\sim} \frac{1}{\alpha} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) t^{-1/\alpha}.$$

Exercice 2 : montrer que les deux fonctions d'une variable réelle

$$f(x) = \int_0^{\infty} \frac{\sin(tx)}{e^t - 1}\, dt \qquad \text{et} \qquad g(x) = \sum_{1}^{\infty} \frac{x}{x^2 + n^2}$$

sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur leur domaine de définition respectif, et que l'une prolonge l'autre.

Exercice 3 : une urne contient $\underline{n}$ boules noires et $\underline{2}$ boules blanches B1 et B2. On tire les boules une à une sans remise. Soit N1 le rang de la première boule blanche, N2 celui de la seconde. Soit R1 le rang de B1, R2 celui de B2.

0) proposer une modélisation.

1) exprimer N_1 et N_2 à l'aide de $R1$ et $R2$.

2) montrer que $R1$ et $R2$ suivent la même loi, à déterminer.

3) calculer la loi de $(R1, R2)$, puis celle de $(N1, N2)$, et enfin celle de $N1$.

4) Quelles sont les espérances de $N1$ et $N2$?

Exercice 4: tracer l'allure de la trajectoire de la particule qui part (à $t=0$) du point $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ du plan, et qui est régie par le système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = -x + 4y \end{cases} .$$

Problème 1 : (série de Fourier, série entière, et polynômes orthogonaux)

A) à $\lambda \in]-1, 1[$ fixé, on considère la fonction

$$f(\lambda, t) = \frac{1}{1 - 2\lambda \cos t + \lambda^2}$$

de la variable réelle t.

1) expliquer pourquoi $f(\lambda, .)$ coïncide avec son développement en série de Fourier.

2) montrer que la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ de ses coefficients de Fourier satisfait à la relation de récurrence

$$\forall n \geqslant 1 \quad , \quad \alpha\, a_{n+1} - (1+\alpha^2)\, a_n + \alpha\, a_{n-1} = 0$$

3) en déduire le développement en série de Fourier de $f(\alpha, \cdot)$.

B) à $t \in \mathbb{R}$ donné, on considère la fonction $f(\cdot, t)$ précédente.

1) montrer que $f(\cdot, t)$ est développable en série entière au voisinage de l'origine : on décomposera la fraction rationnelle en éléments simples, et on précisera le rayon de convergence de la série entière obtenue.

2) retrouver le développement précédent : i) à l'aide d'un produit de séries, ii) à l'aide de la partie A).

C)

1) pour $x \in]-1, 1[$, $x = \cos t$ où $t \in]0, \pi[$, on pose

$T_n(x) = \cos(nt)$

pour $n \in \mathbb{N}^*$: montrer qu'on

$P_n(x) = \dfrac{\sin(n+1)t}{\sin t}$

définit ainsi deux polynômes de degré n.

2) relier ces polynômes aux développements obtenus en A) et B), et expliquer leur relation.

3) montrer que P_n est solution de l'EDO

$$(1-x^2)y'' - 3xy' + n(n+2)y = 0$$

et déterminer pour T_n une EDO analogue.

4) comment pourrait-on établir $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ à partir de l'EDO précédente ? transformer l'EDO en posant

$$y(x) = z(t)/\sin t \qquad \text{où } x = \cos t \in]-1,1[\quad , \text{et}$$

donner la forme de la solution générale sur l'intervalle $]-1,1[$.

D) On considère l'opérateur différentiel D défini sur $\mathcal{C}^2([-1,1])$ par

$$Df(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{d}{dx}\left((1-x^2)^{3/2} \cdot f'\right)$$

1) quel est le spectre de $D|_{\mathbb{R}_n[X]}$?

2) rappeler pourquoi $(f,g) \doteq \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, f(x)\, g(x)\, dx$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{C}^0([-1,1])$. montrer que $D|_{\mathbb{R}[X]}$ est un opérateur symétrique sur $\mathbb{R}[X]$ (muni de ce $(\cdot,\cdot)$).

vérifier que $(P_n)_{n\geq 0}$ est une suite orthogonale pour $(\cdot,\cdot)$.

3) montrer que toute fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[-1,1]$ peut se développer sous la forme

$$\forall x\in[-1,1], \qquad f(x) = \frac{2}{\pi}\cdot\sum_0^{\infty} (f, P_n)\cdot P_n(x)$$

(on montrera que (f, P_n) est le $(n+1)^{\text{ième}}$ coefficient de Fourier d'une fonction 2π-périodique impaire, et on utilisera le fait, facile à établir par récurrence, que $|P_n(x)|\leq n+1$ $\forall x\in[-1,1]$).

<u>Problème 2</u> : (série de Fourier, transformation de Fourier)

1) montrer que la fonction $\frac{1}{ch(\pi t)}$ possède une transformée de Fourier, qui s'écrit

$$\widehat{\frac{1}{ch\pi t}}(\xi) = 2\int_0^{\infty} \frac{\cos(2\pi\xi t)}{ch(\pi t)}\,dt$$

2) montrer que

$$\widehat{\frac{1}{ch\pi t}}(\xi) = \frac{4}{\pi}\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{2n+1}{(2n+1)^2+4\xi^2}$$

3) soit f_α la fonction 2π-périodique valant $\operatorname{sh}(\alpha t)$ pour $|t| < \pi$ ($\alpha > 0$ fixé) : écrire son développement en série de Fourier

4) en déduire l'expression de $\widehat{\dfrac{1}{\operatorname{ch} \pi t}}$.

Corrigé du problème n° 6.

Exercice 1 : comme, à $t>0$ fixé, $e^{-tx^\alpha} \searrow 0$ lorsque $x \nearrow +\infty$, et que $\int^\infty e^{-tx^\alpha}dx$ converge (car $e^{-tx^\alpha} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$), on est assuré de la convergence de la série, et on a l'encadrement

$$\int_1^\infty e^{-tx^\alpha}dx \leqslant \sum_1^\infty e^{-tn^\alpha} \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-tx^\alpha}dx$$

Or, $\displaystyle\int_0^\infty e^{-tx^\alpha}dx = \frac{1}{\alpha}\cdot t^{-1/\alpha}\int_0^\infty e^{-y}\,y^{1/\alpha-1}dy = \frac{1}{\alpha}t^{-1/\alpha}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)$

$(y = tx^\alpha,\ t>0)$

ce qui permet de conclure.

Exercice 2 : 1) l'intégrale généralisée converge pour tout $x \in \mathbb{R}$, et définit donc $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\int_0^n \frac{\sin(tx)}{e^t-1}dt \doteq f_n(x)\right)$ où chaque fonction f_n est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, tandis que

$$\left|\int_n^\infty \frac{\sin(tx)}{e^t-1}dt\right| \leqslant \int_n^\infty \frac{dt}{e^t-1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

montre que $f_n \xrightarrow{u} f$ sur $\mathbb{R}$, et $f_n'(x) = \displaystyle\int_0^n \frac{t\cos(tx)}{e^t-1}dt$

avec $\displaystyle\left|\int_n^\infty \frac{t\cos tx}{e^t-1}dt\right| \leqslant \int_n^\infty \frac{t\,dt}{e^t-1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ permet de conclure au fait que f est $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, avec, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{t \cos(tx)}{e^t - 1}\,dt$. C2

2) Comme $\left|\dfrac{x}{x^2+n^2}\right| \leqslant \dfrac{A}{n^2}$ pour $|x| \leq A$, la série qui définit g sur $\mathbb{R}$ converge normalement sur tt cpt de $\mathbb{R}$: g est donc continue sur $\mathbb{R}$. De plus, $\left|\left(\dfrac{x}{x^2+n^2}\right)' = \dfrac{n^2-x^2}{(x^2+n^2)^2}\right| \underset{|x|\leq A}{\leqslant} \dfrac{n^2+A^2}{n^4}$ montre que la série dérivée converge normalement sur tt cpt de $\mathbb{R}$: g est donc dérivable, et même $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

3) Le calcul formel

$$f(x) = \int_0^\infty \sin(tx) \cdot \sum_{n\geqslant 0} e^{-(n+1)t}\,dt = \sum_{n\geqslant 0} \int_0^\infty e^{-(n+1)t} \sin(tx)\,dt$$

où $\displaystyle\int_0^\infty = \operatorname{Im} \int_0^\infty e^{-(n+1-ix)t}\,dt = \operatorname{Im} \frac{n+1+ix}{(n+1)^2+x^2} = \frac{x}{(n+1)^2+x^2}$

se justifie facilement à l'aide du théorème de convergence dominée, car

i) la série de fonctions converge normalement sur tout $[\varepsilon, +\infty[$ avec $\varepsilon > 0$

ii) $\left|\displaystyle\sum_0^N e^{-(n+1)t} \cdot \sin(tx)\right| \leqslant \dfrac{|\sin(tx)|}{e^t-1}$ telle que $\displaystyle\int_0^\infty < +\infty$

Ainsi a-t-on $f = g$ sur $\mathbb{R}$.

4) Si l'on veut sortir de $\mathbb{R}$, la convergence absolue de l'intégrale

$$\int_0^{\infty} \left| \frac{\sin(tz)}{e^t - 1} \right| dt$$ n'est assurée que pour $|\operatorname{Im} z| < 1$,

tandis que la série qui définit g garde un sens sur $\mathbb{C} \setminus i\mathbb{Z}$.

Exercice 3 :

0) Si $\mathcal{U} = \{N_1, .., N_n, B_1, B_2\}$ (est le contenu de l'urne),

un événement élémentaire ω sera une permutation de $\mathcal{U}$;

on munit l'ensemble Ω de ces permutations de la tribu $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ de toutes ses parties, on pose $\forall \omega \in \Omega$, $P(\omega) = 1/(n+2)!$

puis $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{(n+2)!} \cdot \operatorname{card}(A)$:

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est un espace de probabilité.

1) $N_1 = R_1 \wedge R_2$, $N_2 = R_1 \vee R_2$.

2) $R_1 : \Omega \longrightarrow \{1, 2, ..., n+2\}$ et $\forall k \in \{1, .., n+2\}$

on a

$$\{R_1 = k\} = \{\omega \in \Omega / \ \omega_k = B_1\}$$

de cardinal $(n+1)!$: $\mathbb{P}(R_1 = k) = \frac{1}{n+2}$, $\forall k \in \{1, .., n+2\}$

(la VA R_1 suit donc une loi uniforme). Il en est de même de R_2.

3) $(R_1, R_2) : \Omega \longrightarrow \{1, 2, .., n+2\}^2 \setminus \Delta$ et, pour $1 \leq h < k \leq n+2$

$\operatorname{card}\{R1=h,\ R2=k\} = n!$, si bien que

$$\mathbb{P}(R_1=h,\ R_2=k) = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

On a encore $\{(N1,N2)=(h,k)\} = \{R1=h,\ R2=k\} \cup \{R1=k, R2=h\}$

si bien que $\mathbb{P}(N1=h,\ N2=k) = \dfrac{2}{(n+1)(n+2)}$. Par conséquent,

pour $h \in \{1, \dots, n+1\}$, il vient :

$$\mathbb{P}(N_1=h) = \mathbb{P}\Big(\bigcup_{k=h+1}^{n+2} \{N_1=h,\ N_2=k\}\Big)$$

$$= \frac{2}{(n+1)(n+2)} \cdot (n+2-h)$$

ce qui détermine la loi de N1.

4) $\mathbb{E}(N_1) \doteq \displaystyle\sum_{h=1}^{n+1} h \cdot \mathbb{P}(N_1=h) = \dots = \frac{n+3}{3}$

$\mathbb{E}(N_2) = 2 \cdot \mathbb{E}(N_1)$.

<u>Exercice 4:</u> 3 est vp d'ordre 2 de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ du SD.

$\operatorname{Ker}(A-3I) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \doteq \vec{v}_1 \right\rangle$ et $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est tel que $(A-3I)\vec{v}_2 = \vec{v}_1$:

la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ <u>trigonalise</u> A sous la forme de Jordan $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

et la solution générale du SD s'écrit

$$\vec{x}(t) = A \cdot e^{3t} \vec{v}_1 + B e^{3t} (\vec{v}_2 + t\vec{v}_1)$$

Compte-tenu de la condition initiale, la solution demandée s'écrit donc

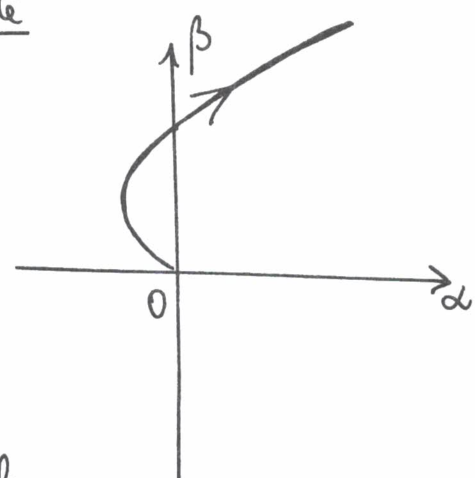
$$\vec{x}(t) = e^{3t}\left(t\vec{v}_1+\vec{v}_2\right)$$

soit, en coordonnées paramétriques dans le repère $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$:

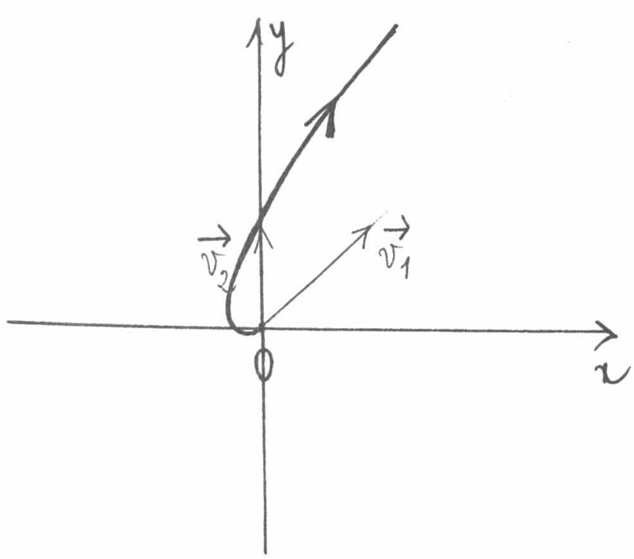
$$\begin{cases} \alpha(t) = t e^{3t} \\ \beta(t) = e^{3t} \end{cases}$$

ce qui conduit à <u>la trajectoire suivante</u>

t	$-\infty$	$-1/3$	0	$+\infty$
$\alpha(t)$	$0 \searrow$	$-\frac{1}{3e}$	$\nearrow 0 \nearrow$	$+\infty$
$\beta(t)$	$0 \nearrow$		$1 \nearrow$	$+\infty$



soit, dans le repère d'origine à l'allure



Problème 1 :

A) 1) comme $1-2\lambda\cos t+\lambda^2 = (\lambda-\cos t)^2+\sin^2 t = |\lambda-e^{it}|^2>0$ pour tout $t\in\mathbb{R}$, $f(\lambda,\cdot)$ est une fonction 2π périodique paire de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$: sa série de Fourier converge donc normalement sur $\mathbb{R}$, vers $f(\lambda,\cdot)$.

2) comme $1=(1-2\lambda\cos t+\lambda^2)\left(\frac{a_0}{2}+\sum_{n\geq 1} a_n\cos nt\right)$, il vient (à l'aide de la formule de trigonométrie $2\cos t.\cos nt = \cos(n+1)t+\cos(n-1)t$) et par identification

$$\begin{cases} 1 = (1+\lambda^2)\frac{a_0}{2} - \lambda a_1 \\ \forall n\geq 1 \ , \ 0=(1+\lambda^2)a_n - \lambda(a_{n-1}+a_{n+1}) \end{cases}$$

3) en résolvant l'équation aux différences selon la technique de l'équation résolvante, on obtient

$$\exists A,B\in\mathbb{R} \quad tq \quad \forall n \ , \ a_n = A\cdot\lambda^n + B\cdot\left(\frac{1}{\lambda}\right)^n$$

Comme $\lim_{n\to\infty} a_n$ doit exister et être nulle, on doit avoir $B=0$.

Il reste à calculer a_0 par quadrature :

$$a_0=\frac{2}{2\pi}\cdot 2\cdot\int_0^\pi \frac{dt}{1-2\lambda\cos t+\lambda^2} = \dots = \frac{2}{1-\lambda^2}$$

(en posant $u=tg(t/2)$)

et il vient donc $\forall n \geq 0$, $a_n = \dfrac{2\lambda^n}{1-\lambda^2}$ (: la série de Fourier est bien normalement convergente sur $\mathbb{R}$; la suite (a_n) est à décroissance rapide, i.e. $\forall k \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot n^k = 0$, conformément au fait que $f(\lambda, \cdot)$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$).

B) 1) $$f(\lambda,t) = \frac{1}{|\lambda - e^{it}|^2} \quad \text{pour } |\lambda| \underset{\mathbb{R}}{<} 1$$

$$= \frac{1/2i\sin t}{\lambda - e^{it}} + \frac{-1/2i\sin t}{\lambda - e^{-it}} \quad \text{pour } t \notin \pi\mathbb{Z}$$

soit, en invoquant la série géométrique

$$= \frac{-1}{2i\sin t} \cdot e^{-it} \cdot \sum_0^\infty (\lambda e^{-it})^n + \frac{1}{2i\sin t} \cdot e^{it} \cdot \sum_0^\infty (\lambda e^{it})^n$$

ce qui donne le développement en série entière pour $|\lambda| \underset{\mathbb{R}}{<} 1$:

$$f(\lambda,t) = \sum_0^\infty \frac{\sin(n+1)t}{\sin t} \cdot \lambda^n$$

en excluant $t \in \pi\cdot\mathbb{Z}$. Le rayon de convergence de la série entière obtenue est égal à 1 : en effet, d'après le lemme d'Abel, il est ≥ 1 (car la série converge sur $]-1, 1[$) ; mais, d'autre part, il ne saurait être > 1 car, comme $\lambda^n \to \infty$ pour $\lambda > 1$, cela ferait que $\sin(n+1)t \to 0$ (et un classique raisonnement par l'absurde montre que ce n'est pas le cas).

2) i) $$\frac{1}{|\lambda-e^{it}|^2} = \frac{1}{\lambda-e^{it}} \times \frac{1}{\lambda-e^{-it}} \qquad \text{pour } \lambda\in\mathbb{R}$$

$$=\left(-\sum_0^\infty e^{-i(n+1)t}\lambda^n\right)\times\left(-\sum_0^\infty e^{i(n+1)t}\lambda^n\right)$$

où les séries convergent absolument sur $]-1,1[_\lambda$: d'après le <u>théorème de Maertens</u>, on peut former la série numérique produit, de t.g.

$$\forall n\geq 0, \qquad c_n=\sum_{k=0}^n e^{-i(k+1)t}\cdot e^{i(n+1-k)t}\cdot\lambda^n$$

$$= e^{int}\,\frac{1-e^{-2i(n+1)t}}{1-e^{-2it}}\,\lambda^n \qquad \text{pour } t\notin\pi\mathbb{Z}$$

$$=\frac{\sin(n+1)t}{\sin t}\,\lambda^n.$$

ii) à partir du développement en série de Fourier obtenu en A):

$$\frac{1-\lambda^2}{1-2\lambda\cos t+\lambda^2} = 1+2\sum_1^\infty \lambda^n\cos nt$$

on effectue <u>une transformation d'Abel</u> sous la forme

$$\frac{(1-\lambda^2)\sin t}{1-2\lambda\cos t+\lambda^2} = \sin t+\sum_1^\infty \lambda^n\left(\sin(n+1)t-\sin(n-1)t\right)$$

$$=(1-\lambda^2)\cdot\left(\sin t+\lambda\sin 2t+\dots+\lambda^{n-1}\sin(nt)+\dots\right)$$

ce qui permet de retrouver le résultat.

C) 1) par la relation trigonométrique

$$\cos(n+1)t + \cos(n-1)t = 2\cos nt \cos t$$

on obtient la relation de récurrence

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2x.T_n(x)$$

qui, jointe au fait que $T_0 = 1$ et $T_1 = x$, montre que $\forall n \geq 0$, $T_n \in \mathbb{R}_n[X]$. D'autre part, $T'_{n+1}(x) = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{\sin(n+1)t}{\sin t}$

ce qui montre que $P_n = (n+1).T'_{n+1} \in \mathbb{R}_n[X]$.

2) d'après A), on a

$$\frac{1}{1-2\lambda\cos t+\lambda^2} = \frac{1}{1-\lambda^2}\left(1+2\sum_1^\infty T_n(\cos t).\lambda^n\right)$$

d'après B), on a aussi

$$\frac{1}{1-2\lambda\cos t+\lambda^2} = \sum_0^\infty P_n(\cos t).\lambda^n$$

: le lien entre les 2 développements provient de la relation trigonométrique $\sin(n+1)t - \sin(n-1)t = 2\sin t\cos nt$ qui se lit

$\forall n \geq 2$, $P_n - P_{n-2} = 2T_n$

3) en écrivant $\sin(n+1)t = P_n(\cos t).\sin t$ et en $\frac{d}{dt}$, on obtient $(n+1)\cos(n+1)t = -\sin^2 t . P'_n(\cos t) + \cos t . P_n(\cos t)$, puis

$-(n+1)^2\sin(n+1)t = \sin^3 t . P''_n(\cos t) - 3\cos t . \sin t . P'_n(\cos t) - \sin t . P_n(\cos t)$

qui conduit à l'EDO annoncée. Le même procédé donne pour T_n l'EDO

$$(1-x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0.$$

2) On pourrait chercher une solution développable en série entière par la technique d'identification ... qui conduit à la relation de récurrence

$$(k+1)(k+2)\,c_{k+2} = \big(k(k+2) - n(n+2)\big)\,c_k\,, \quad k \geq 0$$

de sorte que $c_{n+2} = 0$ ainsi que $c_{n+2h} = 0$: il suffit donc d'assurer c_0 ou $c_1 = 0$ pour obtenir une solution polynomiale...

Un calcul élémentaire de dérivée (de fonctions composées) conduit à l'EDO en z

$$\ddot{z} + (n+1)^2 z = 0$$

c'est l'OH, de solution générale $z(t) = A\cos(n+1)t + B\sin(n+1)t$:

on retrouve donc la solution $P_n(x)$ de l'EDO originale, avec une nouvelle solution $Q_n(x) = \dfrac{\cos(n+1)t}{\sin t}$, $x = \cos t \in]-1,1[$.

D) 1) comme, pour $k \geq 2$ entier, on a

$$D x^k = -k(k+2)x^k + k(k-1)x^{k-2}$$

tandis que $D1 = 0$, $Dx = -3x$, on observe que la matrice de l'opérateur $D|_{\mathbb{R}_n[X]}$ dans la base canonique $\{1, x, \dots, x^n\}$ est triangulaire supérieure, d'éléments diagonaux

$$\left(-k(k+2)\right)_{k=0}^{n} := Sp\, D|_{\mathbb{R}_n[X]}.$$

Les vp sont simples, et $\operatorname{Ker}\left(D|_{\mathbb{R}_n[X]} + k(k+2).I\right) = \mathbb{R}\cdot P_k$

puisque $$Df(x) = (1-x^2)f'' - 3xf' \qquad (\text{cf } C)\ 3))$$

2) $$(Df, g) = \int_{-1}^{1} \left((1-x^2)^{3/2} f'\right)'. g\, dx = \int_{-1}^{1} \left((1-x^2)^{3/2} g'\right)' f\, dx,$$ comme on le voit en intégrant par parties.

pour $n \neq m$, $$(P_n, P_m) = \int_0^{\pi} \sin(n+1)t . \sin(m+1)t\, dt = 0,$$

tandis que $$\|P_n\|^2 = \int_0^{\pi} \sin^2(n+1)t\, dt = \pi/2.$$

3) comme $$(f, P_n) = \int_0^{\pi} f(\cos t). \sin(n+1)t. \sin t\, dt$$, on introduit la fonction $\varphi(t) \doteq f(\cos t).\sin t$ qui est 2π-périodique, de classe $\mathcal{C}^1$, et impaire et, par conséquent le $(n+1)^{\text{ème}}$ coefficient

de Fourier $b_{n+1}(\varphi) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \varphi(t) \sin(n+1)t \, dt = \frac{2}{\pi}(f, P_n)$: d'après le <u>théorème de Dirichlet</u>, on a

$$\forall t \quad , \quad f(\cos t).\sin t = \frac{2}{\pi}.\sum_0^\infty (f, P_n).\sin(n+1)t$$

$$= \frac{2}{\pi}.\sum_0^\infty (f, P_n).P_n(\cos t).\sin t$$

ce qui donne le résultat pour $x \in]-1, 1[$ (: après simplification par $\sin t$):

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\sum_0^\infty (f, P_n).P_n(x)$$

Comme la série $\sum_0^\infty n.|f, P_n|$ converge (: f étant $\underline{\mathcal{C}^2}$, avec <u>Cauchy-Schwarz</u> et <u>Parseval</u>), on conclut, par prolongement sur $[-1, 1]$, le second membre étant continu du fait de la convergence normale de la série (: il est en effet facile de vérifier, par récurrence, que $\sup_{[-1,1]} |P_n(x)| = (n+1)$).

<u>Problème 2</u>:

1) la fct > 0 $\frac{1}{\text{ch}\,\pi t}$ est intégrable et paire.

2) il s'agit de justifier le calcul suivant

$$\int_0^\infty \frac{\cos 2\pi\xi t}{e^{\pi t}(1+e^{-2\pi t})} dt = \int_0^\infty \cos 2\pi\xi t.\sum_0^\infty (-1)^n e^{-(2n+1)\pi t} dt =$$

$$= \sum_0^\infty (-1)^n \int_0^\infty e^{-(2n+1)\pi t} \cos(2\pi \xi t)\, dt$$

or $$\int_0^\infty = \operatorname{Re} \int_0^\infty e^{-((2n+1)+2\xi i)\pi t}\, dt = \frac{(2n+1)}{((2n+1)^2+4\xi^2)\pi}$$

ce qui conduit bien à la formule annoncée. Quant à la justification de l'$\int_0$ terme à terme :

i) la série de fcts de t.g. $\cos 2\pi\xi t \cdot (-1)^n e^{-(2n+1)\pi t}$ converge normalement sur $[\varepsilon, +\infty[$, pour tout $\varepsilon > 0$;

ii) avec l'estimation du reste d'une série alternée dont le tg $e^{-(2n+1)\pi t}$ décroît vers 0 $(t>0)$, il vient, pour tout N entier positif

$$\left| \cos 2\pi\xi t \cdot \sum_0^N (-1)^n e^{-(2n+1)\pi t} \right| \leqslant \left| \sum_0^N (-1)^n e^{-(2n+1)\pi t} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\operatorname{ch}(\pi t)} + e^{-(2N+3)\pi t} \leqslant \frac{1}{\operatorname{ch}(\pi t)} + e^{-3\pi t} = g(t)$$

où g est d'intégrale impropre convergente sur $(0, \infty)$.

Le théorème de convergence dominée faible permet donc de conclure.

3) f étant impaire, $a_n = 0$ et, pour $n \geq 1$, on a

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi sh(\alpha t)\sin(nt)\,dt = \frac{2}{\pi}\cdot\int_0^\pi \frac{e^{\alpha t}-e^{-\alpha t}}{2}\sin nt\,dt$$

où $\displaystyle\int_0^\pi e^{\alpha t}\sin nt\,dt = \mathcal{I}m\int_0^\pi \;=\dots=\; -n/_{n^2+\alpha^2}$

ce qui donne $\displaystyle b_n = \frac{1}{\pi}\,\frac{(-1)^n n}{n^2+\alpha^2}\cdot 2sh(\alpha\pi)$.

4) avec le thm de Dirichlet, on peut écrire

$$sh(\alpha\pi/_2) = \frac{2}{\pi}\,sh(\alpha\pi)\cdot\sum_{p\geq 0}\frac{(2p+1)\,(-1)^p}{(2p+1)^2+\alpha^2}$$

d'où, par un calcul élémentaire $\displaystyle\widehat{\frac{1}{ch\pi t}}(\xi) = \frac{1}{ch\pi\xi}$:

la fonction $1/_{ch\pi t}$ est donc une fonction propre de la transformation de Fourier ; elle appartient à l'espace $\mathcal{S}$ introduit dans le problème n° 5.

Problème n° 7

Exercice 1 : (Calculs de la valeur de $\sum_1^{\infty} \frac{1}{n(4n^2-1)}$).

1) rappeler pourquoi la série converge.

2) calculer sa somme, via une décomposition en éléments simples.

3) retrouver le résultat, en considérant la série entière

$$f(z) = \sum_1^{\infty} \frac{z^n}{n(4n^2-1)}$$

(on liera f' à $g(z) = \sum_0^{\infty} \frac{z^n}{2n+1}$ qui vérifie l'EDO

$$2z \cdot g'(z) + g(z) = \frac{1}{1-z}$$: on remontera à f par quadratures).

Exercice 2 : (calcul de $\sum_0^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$).

1) montrer que la série $\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+(t+n)^2}$ définit une fonction $f(t)$ 1-périodique, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

2) montrer que le $k^{\text{ième}}$ coefficient de Fourier de f est

donné par l'intégrale

$$c_k = 2\int_0^{\infty} \frac{\cos(2k\pi\theta)}{1+\theta^2}\, d\theta \quad , \; k \in \mathbb{Z}.$$

3) pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$g(x) = \int_0^{\infty} \frac{\sin(tx)}{t(1+t^2)}\, dt$$

i) montrer (en justifiant les opérations de dérivation sous le signe $\int_0^{\infty}$!) que g satisfait, sur $]0,\infty[$, l'EDO

$$g''(x) - g(x) = -\frac{\pi}{2}$$

ii) en déduire que $g(x) = \frac{\pi}{2}(1-e^{-x})$, $\forall x \geq 0$

iii) tracer le graphe de g.

4) utiliser ce qui précède pour calculer la valeur de

$$\sum_{0}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}.$$

<u>Exercice 3</u>: soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de VA indépendantes de même loi uniforme sur $[0,1]$. A partir de l'intervalle $I_0 = [0,1]$, on considère la suite des intervalles $[X_1 \dots X_n , X_1 \dots X_{n-1}]$ de longueurs l_n : on demande la loi de la VA l_n.

(on commencera par étudier la loi de $\ell_1, \ell_2, \ell_3 \ldots$ et on montrera que les densités f_{ℓ_n} et $f_{\ell_{n-1}}$ des VA ℓ_n et ℓ_{n-1} sont liées par la relation

$$\forall \lambda \in (0,1), \quad f_{\ell_n}(\lambda) = \int_\lambda^1 f_{\ell_{n-1}}(t)\,\frac{dt}{t} \;).$$

<u>Problème</u> (: étude des polynômes de Hermite).

1) expliquer pourquoi, à $x \in \mathbb{R}$ fixé, la fonction

$$\varphi(\cdot, x) : t \longmapsto e^{-t^2+2tx}$$

est développable en série entière sur $\mathbb{R}$. montrer que

$$\varphi(t,x) = \sum_0^\infty \frac{1}{n!} H_n(x) \cdot t^n$$

où H_n est un polynôme de degré n. calculer H_0, H_1 et H_2.

2) montrer que $\forall n \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \left(e^{-x^2}\right)^{(n)}$.

3) établir successivement les relations suivantes :

(a) $H_n'(x) = 2x \cdot H_n(x) - H_{n+1}(x)$

(b) $H_{n+1}(x) = 2x \cdot H_n(x) - 2n \cdot H_n(x)$

(c) $H_n' = 2n H_{n-1}$ $\qquad , n \geq 1.$

(d) $H_n''(x) - 2x H_n'(x) + 2n H_n(x) = 0$

4) montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^k \cdot H_n(x)\, e^{-x^2} dx = 0$ pour $0 \leq k < n$.

5) en déduire que $\displaystyle (H_n, H_m) \doteq \int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x) \cdot H_m(x)\, e^{-x^2} dx = 0$

si $n \neq m$, et calculer $\|H_n\|^2 = (H_n, H_n)$.

6) vérifier que $\varphi_n(x) = e^{-x^2/2} \cdot H_n(x)$ obéit à l'EDO

$$y'' + (2n+1-x^2)y = 0.$$

et, en écrivant l'EDO sous la forme

$$y'' + (2n+1)y = x^2 y$$

transformer-la avec Lagrange sous la forme intégrale

$$\text{(Ei)} \quad y(x) = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x) + \frac{1}{\omega}\int_0^x t^2 \cdot \sin\omega(x-t) \cdot y(t)\,dt$$

avec $\omega = \sqrt{2n+1}$.

7) montrer que φ_{2n} obéit à l'Ei

$$y(x) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!} \cos\sqrt{4n+1}\, x + \frac{1}{\sqrt{4n+1}}\int_0^x t^2 \sin\frac{x-t}{\sqrt{4n+1}} \cdot y(t)\,dt$$

8) déduire de ce qui précède le comportement asymptotique

$$H_{2n}(x) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!} e^{x^2/2} \cdot \left(\cos\left(\sqrt{4n+1}\, x\right) + r_n(x)\right), \quad n \to +\infty$$

avec $r_n(x) = O\left(1/n^{1/4}\right)$ uniformément sur tt cpt de $\mathbb{R}_x$.

Corrigé du Problème n° 7

Exercice 1 : 1) $0 < \frac{1}{n(4n^2-1)} \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{1}{4n^3}$ tg d'une série de Riemann convergente.

2) $\frac{1}{n(4n^2-1)} = \frac{-1}{n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n-1}$ permet d'exprimer la somme partielle S_n comme

$$S_n = -H_n + 2\left(H_{2n+1} - \frac{1}{2}H_n - 1\right) + 1 + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= 2\left(H_{2n} - H_n\right) - 1 + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

où $H_{2n} - H_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ln 2$: $S = 2\ln 2 - 1$.

3) f admet $R = 1$ comme rayon de convergence : pour $|z|<1$, on a donc

$$f'(z) = \sum_1^\infty \frac{z^{n-1}}{4n^2-1} = \frac{1}{2}\sum_1^\infty \frac{z^{n-1}}{2n-1} - \frac{1}{2}\sum_1^\infty \frac{z^{n-1}}{2n+1}$$

ce qui conduit à considérer $g(z) = \sum_0^\infty \frac{z^n}{2n+1}$ pour $|z|<1$:

$$g'(z) = \sum_1^\infty \frac{1}{2}\cdot\frac{2n+1-1}{2n+1} z^{n-1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-z} - \frac{1}{2z}\left(g(z)-1\right)$$

soit l'EDO $\quad 2z\cdot g'(z) + g(z) = \frac{1}{1-z}$: il s'agit d'une EDO linéaire qui se peut intégrer avec Lagrange sur $]0,1[_z$, pour obtenir la forme de la solution générale suivante

$$\frac{1}{2\sqrt{z}}\ln\frac{1+\sqrt{z}}{1-\sqrt{z}} + \frac{k}{\sqrt{z}} \quad \text{avec } k\in\mathbb{R}$$

C2

Comme $g(z) \underset{z\to 0+}{\longrightarrow} 1$, un DL(0) permet d'obtenir $k=0$

donc
$$\forall z \in [0,1[, \quad g(z) = \frac{1}{2\sqrt{z}} \ln \frac{1+\sqrt{z}}{1-\sqrt{z}} .$$

Il s'en suit que, dans les mêmes conditions,

$$f'(z) = \frac{1}{2} g(z) - \frac{1}{2z}(g(z)-1) = \frac{1}{4} \frac{z-1}{z\sqrt{z}} \ln \frac{1+\sqrt{z}}{1-\sqrt{z}} + \frac{1}{2z}$$

Par conséquent, et pour $0<z<1$, on a

$$f(z) = \frac{1}{4}\int^z \frac{x-1}{x\sqrt{x}} \ln \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\, dx + \frac{1}{2}\ln x + C, \quad C\in\mathbb{R}$$

où le calcul de primitive s'opère par le changement de variable $y=\sqrt{x}$ suivi d'une $\int$ par parties ... On obtient

$$f(z) = \frac{1}{2}\frac{z+1}{\sqrt{z}} \ln \frac{1+\sqrt{z}}{1-\sqrt{z}} + \ln(1-z) + C, \quad C\in\mathbb{R}$$

De nouveau, C s'obtient, à partir de $f(0)=0$ et d'un DL(0) : $C=-1$:

$$f(z) = \frac{1}{2}\frac{z+1}{\sqrt{z}} \ln \frac{1+\sqrt{z}}{1-\sqrt{z}} + \ln(1-z) - 1, \quad z\in [0,1[.$$

On conclut enfin grâce au thm d'Abel :

$$S = \lim_{z\to 1-} f(z) = 2\ln 2 - 1.$$

Exercice 2 : 1) comme $\displaystyle\sum_{n=-N}^{M} \frac{1}{1+(t+1+n)^2} = \sum_{m=-N+1}^{M+1} \frac{1}{1+(t+m)^2}$, on

obtient en faisant $M,N \to +\infty$, $f(t+1) = f(t)$ $\forall t \in \mathbb{R}$ (la série étant d'ailleurs convergente sur $\mathbb{R}$, car à $t \in \mathbb{R}$ donné on a

$\displaystyle\frac{1}{1+(t+n)^2} \underset{(\pm\infty)}{\sim} \frac{1}{n^2}$.) de plus, pour $t \in [0,1]$,

$$\left|\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{1+(t+n)^2}\right) = \frac{-2(t+n)}{(1+(t+n)^2)^2}\right| \leqslant \frac{2(|n|+1)}{(1+(|n|-1)^2)^2} \underset{(\pm\infty)}{\sim} \frac{2}{|n|^3}$$

en sorte que la série dérivée terme à terme converge normalement sur $[0,1]$: f est donc $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

2) comme la série qui définit f converge normalement sur $[0,1]$ (argument précédent), l'intégration terme à terme est justifiée :

$$c_k = \int_0^1 f(t) e^{-2i\pi kt}\, dt = \sum_{-\infty}^{+\infty} \int_0^1 \frac{e^{-2i\pi kt}}{1+(t+n)^2}\, dt$$

soit, par le chgt de variable $\theta = t+n$ dans chaque intégrale et convergence de l'intégrale généralisée finale

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad c_k = \sum_{-\infty}^{+\infty} \int_n^{n+1} \frac{e^{-2i\pi k\theta}}{1+\theta^2}\, d\theta = \lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{N+1} \frac{e^{-2i\pi k\theta}}{1+\theta^2}\, d\theta$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2i\pi k\theta}}{1+\theta^2}\, d\theta$$

ou encore, comme $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} = \int_0^{\infty} \frac{e^{2i\pi k\theta}}{1+\theta^2}\, d\theta$, le résultat demandé.

3) La suite de fcts $g_n : x \longmapsto \int_0^n \frac{\sin(tx)}{t(1+t^2)}\,dt$ est C4

dérivable sur $\mathbb{R}$, car la fonction $g(t,x) = \frac{\sin tx}{t}\cdot\frac{1}{1+t^2}$

est de classe $\mathcal{C}^1_x$ sur $[0,n]_t \times \mathbb{R}_x$ $\left(\partial_x g(t,x) = \frac{\cos tx}{1+t^2}\right)$, et

on a
$$g_n'(x) = \int_0^n \frac{\cos(tx)}{1+t^2}\,dt, \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

Comme $\int_n^\infty \left|\frac{\cos tx}{1+t^2}\right| dt \leq \int_n^\infty \frac{dt}{1+t^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, $g_n' \xrightarrow[n\to\infty]{u} h$

sur $\mathbb{R}$, où $\forall x\in\mathbb{R}$, on a posé $h(x) = \int_0^\infty \frac{\cos(tx)}{1+t^2}\,dt$. Comme

l'intégrale $\int_0^\infty \frac{\sin(tx)}{t(1+t^2)}\,dt$ est bien définie, il en résulte que g

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, avec $\forall x\in\mathbb{R}$, $g'(x) = \int_0^\infty \frac{\cos(tx)}{1+t^2}\,dt$.

On décompose $g'(x) = \int_0^1 \frac{\cos tx}{1+t^2}\,dt + \int_1^\infty \frac{\cos tx}{1+t^2}\,dt \doteq g_1(x) + g_2(x)$:

g_1 est de classe $\mathcal{C}^1$ ($\partial_x g$ continûment dérivable en x...)

tandis que, pour g_2, une intégration par parties donne, pour $x>0$

$$g_2(x) = \int_1^\infty \frac{d\left(\frac{\sin tx}{x}\right)}{1+t^2} = \frac{\sin tx}{x(1+t^2)}\Bigg|_{t=1}^{\infty} + \frac{2}{x}\int_1^\infty \frac{t\sin(tx)}{(1+t^2)^2}\,dt$$

On peut alors répéter sur $x \to \int_1^\infty \frac{t\sin(tx)}{(1+t^2)^2}\,dt$ l'argument

C5

développé par g, et justifier ainsi une nouvelle ∂_x sous le signe $\int_1^\infty$, donc, en remontant l'intégration par parties, sous $\int_0^\infty$. Ce qui donne

$$\forall x>0, \quad g''(x) = -\int_0^\infty \frac{t\sin(tx)}{1+t^2}\,dt$$

$$= -\int_0^\infty \frac{1}{t(1+t^2)}\cdot(t^2+1-1)\sin tx\,dt$$

$$= g(x) - \int_0^\infty \frac{\sin(tx)}{t}\,dt$$

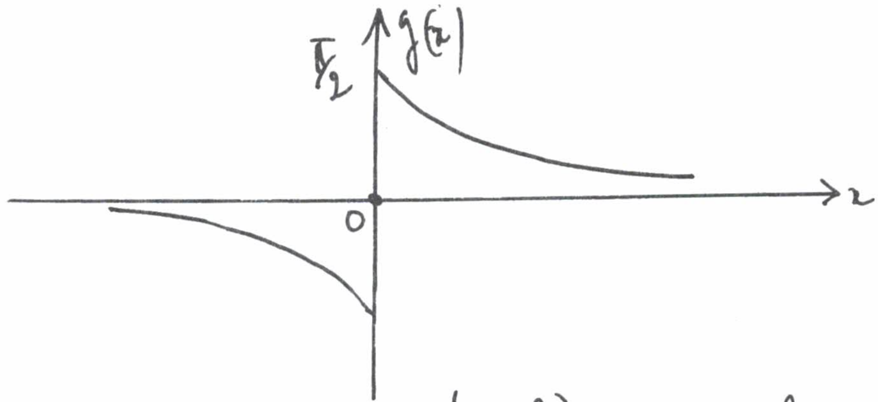
où $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin(tx)}{t}\,dt \underset{(\theta = tx)}{=} \int_0^\infty \frac{\sin\theta}{\theta}\,d\theta = \frac{\pi}{2}$.

En intégrant l'EDO obtenue, on obtient la forme suivante de

$$g(x) = Ae^x + Be^{-x} + \frac{\pi}{2}, \quad A, B \in \mathbb{R}$$

Or, comme g est à croissance linéaire $\left(: \left|\int_0^\infty \frac{\sin(tx)}{t(1+t^2)}\,dt\right| \leqslant x\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}x\right)$

on a immédiatement $A=0$. Comme d'autre part $g(0)=0$ il vient enfin $g(x) = \frac{\pi}{2}(1-e^{-x})$, $x>0$. On remarque enfin que g est impaire. D'où l'allure de son graphe :



4) d'après 3), $c_k = 2 \cdot g'(2\pi k)$ pour $k \neq 0$ tandis que $c_0 = \pi$

Comme f est $\mathcal{C}^1$, on peut donc écrire pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \pi e^{-2\pi|k|} \cdot e^{2i\pi k t} = \pi\left(1 + 2\sum_{1}^{\infty} e^{-2k\pi} \cos 2k\pi t\right)$$

Faisant $t=0$, on obtient en particulier

$$1 + 2\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} = \pi\left(1 + \frac{2e^{-2\pi}}{1-e^{-2\pi}}\right) = \pi \coth \pi$$

d'où la somme demandée

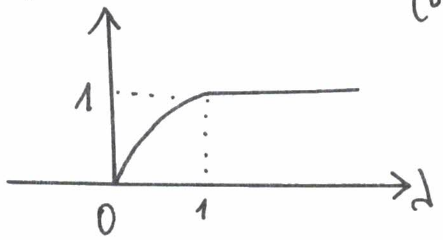
$$\sum_{0}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} = \frac{1}{2}\left(1 + \pi \coth \pi\right).$$

Exercice 3 : on a évidemment $l_n = X_1 \cdots X_{n-1}(1-X_n) : \Omega \to (0,1)$

La F.R. de la V.A. $l_2 = X_1(1-X_2)$ est donnée par

$$\forall \lambda \in (0,1), \quad P(l_2 \leq \lambda) = \iint_{\{x.y \leq \lambda\}} \chi_{(0,1)}(x) \cdot \chi_{(0,1)}(y)\, dy$$

car $1-X_2 \sim \mathcal{U}(0,1)$ de façon évidente, et les VA sont indépendantes ce qui donne $F_{\ell_2}(\lambda) = \lambda(1-\ln\lambda)\cdot \mathbb{1}_{(0,1)}(\lambda) + \mathbb{1}_{(1,\infty)}(\lambda)$.

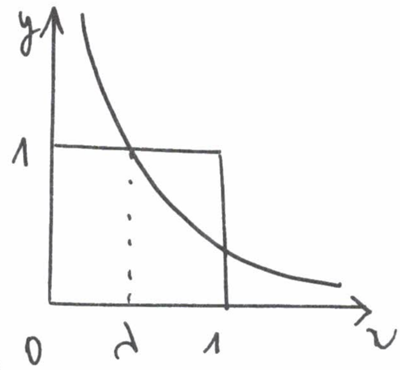


et conduit à la densité $f_{\ell_2}(\lambda) = -\ln(\lambda)\cdot \mathbb{1}_{(0,1)}(\lambda)$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

Plus généralement, et comme $\ell_n = X_1\cdot X_2 \cdots X_{n-1}(1-X_n)$

où $X_2\cdots X_{n-1}(1-X_n)$ a même loi que ℓ_{n-1} et est indépen-

-dante de X_1, on a, pour $\lambda\in(0,1)$



$$F_{\ell_n}(\lambda) = \iint_{\{x\cdot y\leq\lambda\}} f_{X_1}(x)\, f_{\ell_{n-1}}(y)\, dx\, dy$$

$$= \int_0^\lambda f(x)\cdot\int_0^1 f_{\ell_{n-1}}(y)\,dy\cdot dx + \int_\lambda^1 f(x)\int_0^{\frac{\lambda}{x}} f_{\ell_{n-1}}(y)\,dy\, dx$$

ce qui donne, après $\frac{d}{d\lambda}$, la relation de récurrence suivante

entre les densités $f_{\ell_{n-1}}$ et f_{ℓ_n} :

$$\forall\lambda\in(0,1),\qquad f_{\ell_n}(\lambda) = \int_\lambda^1 f_{\ell_{n-1}}\left(\frac{\lambda}{x}\right)\frac{dx}{x} \qquad (\text{cf: } \underline{\text{Exercice 4, Pb 3}})$$

à partir de laquelle on obtient facilement $f_{\ell_n}(\lambda) = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}(\ln\lambda)^{n-1}\,\mathbb{1}_{(0,1)}(\lambda)$.

Problème : 1) $\varphi(t,x) = e^{-t^2} \times e^{2tx}$ apparaît, à x fixé, comme le produit de 2 séries entières de rayons de convergence ∞ :

$$\varphi(t,x) = \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^{2n} \times \sum_0 \frac{(2x)^n}{n!} t^n$$

à ce titre, $\varphi(t,x) = \sum_0 \frac{1}{n!} H_n(x) t^n$, $\forall t \in \mathbb{R}$, avec

$$\forall n \geq 0, \quad H_n(x) = n! \sum_{\substack{2p+q=n \\ p,q \geq 0}} \frac{(-1)^p}{p!} \cdot \frac{(2x)^q}{q!}$$

: $H_n \in \mathbb{R}_n[X]$ et, par exemple $H_0 = 1$, $H_1(x) = 2x$,

$H_2(x) = 4x^2 - 2$.

2) d'après Taylor, $H_n(x) = \frac{\partial^n \varphi}{\partial t^n}(0,x)$ et on conclut par le chgt de variable $t = x - u$.

3) (a) d'après 2), $H_n'(x) = (-1)^n \cdot \left(2x(e^{-x^2})^{(n)} + (e^{-x^2})^{(n+1)}\right) e^{x^2}$

$$= 2x \cdot H_n(x) - H_{n+1}(x).$$

(b) en dérivant la série entière qui donne $\varphi(\cdot, x)$, on obtient

$$2(x-t) \cdot \varphi(t,x) = \sum_0^{\infty} n \frac{H_n(x)}{n!} t^{n-1}$$

ce qui conduit à (b) par identification (selon les puissances de t).

(c) dimle de (a)-(b).

(d) en combinant (a) et (b).

4) en intégrant par parties, on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^k H_n(x) e^{-x^2} dx = (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \left(e^{-x^2}\right)^{(n)} dx = (-1)^{n-1} \int_{-\infty}^{+\infty} k x^{k-1} \cdot \left(e^{-x^2}\right)^{(n-1)} dx$$

si $0 < k, n$ (car $x^k \left(e^{-x^2}\right)^{(n-1)} \underset{\pm\infty}{\longrightarrow} 0$) : il suffit

d'itérer par récurrence.

5) par linéarité, $(H_n, H_m) = 0$ si $n < m$.

d'après ( ), on a

$$\|H_n\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x) \cdot \left(2x H_{n-1}(x) - 2(n-1) H_{n-2}(x)\right) e^{-x^2} dx$$

$$= 2 \int_{-\infty}^{+\infty} x H_n \cdot H_{n-1} \, e^{-x^2} dx \quad , \text{car } H_{n-2} \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$$

$$= 2^n \int_{-\infty}^{+\infty} x^n H_n(x) e^{-x^2} dx , \quad \text{car } H_{n-1}(x) = 2^{n-1} x^{n-1} + (\in \mathbb{R}_{n-2}[X])$$

$$= 2^n \cdot n \int_{-\infty}^{+\infty} x^{n-1} H_{n-1}(x) \, e^{-x^2} dx$$

$$= \dots = 2^n n! \int_{-\infty}^{+\infty} H_0(x) e^{-x^2} dx = 2^n n! \sqrt{\pi}.$$

6) on fait varier les constantes A et B où

$$y(x) = A(x)\cos(\omega x) + B(x)\sin(\omega x)$$

ce qui conduit au système différentiel

$$\begin{cases} A'.\cos(\omega x) + B'.\sin(\omega x) = 0 \\ -A'.\sin(\omega x) + B'.\cos(\omega x) = \frac{1}{\omega} x^2.y(x) \end{cases}$$

d'où la forme (Ei).

7) comme $\varphi(0,t) = e^{-t^2} = \sum_0^\infty \frac{1}{n!} H_n(0) t^n$, on a $H_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!}$

tandis que $H'_{2n}(0) = 0$ avec (c) : d'où la détermination des constantes A et B.

8) pour $x>0$, et d'après Cauchy-Schwarz, on a

$$\left| \int_0^x t^2 \sin \omega(x-t).\, y(t)dt \right| \leqslant \left(\int_0^x t^4 dt\right)^{\frac{1}{2}} . \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} H_{2n}(t) dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant \left(\frac{x^5}{2}\right)^{\frac{1}{2}} . \sqrt{2^{2n}(2n)!\sqrt{\pi}}$$

d'après le calcul de 5). Par conséquent,

$$\varphi_{2n}(x) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!} \cos\sqrt{4n+1}\, x + r_n(x)$$

avec

$$\left|\frac{r_n(x)}{(2n)!/n!}\right| \leqslant C(x) \cdot \sqrt{\frac{2^{2n}\cdot(2n)!\,(n!)^2}{((2n)!)^2}} \cdot 1/\sqrt{n}$$

avec C borné sur tout cpt de $\mathbb{R}$ et, d'après Wallis

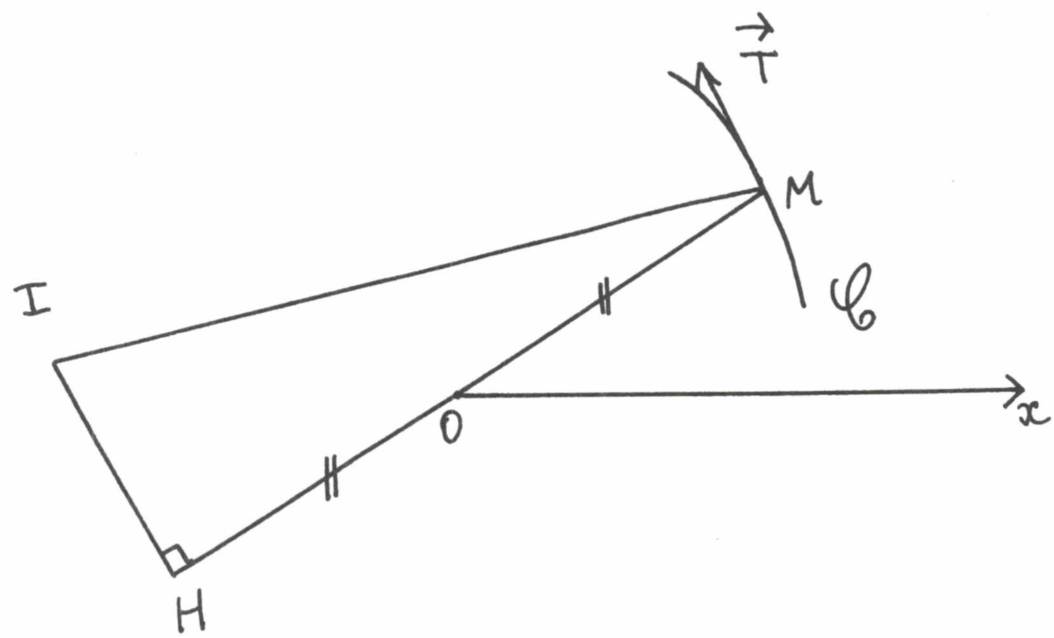
$$\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} t \, dt \underset{(n\to\infty)}{\sim} 1/\sqrt{\pi n}$$

: la conclusion demandée suit.

Préparation à l'épreuve d'Analyse de l'Agrégation Interne 95/96 :

Problème n° 8

Exercice 1 : caractériser les courbes $\mathcal{C}$ telles que



I étant le centre de courbure en M.

Exercice 2 : soit $\sum_{0}^{\infty} a_n$ une série convergente, et soit $(B_n)_{n\geq 0}$ une suite décroissante de fonctions positives et continues sur l'intervalle $[0,1]$: montrer que la série $\sum_{0}^{\infty} a_n B_n$ définit une fonction continue sur $[0,1]$.

Exercice 3 : pour $n \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \neq 1$,

calculer la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}}{(e^{it}-z)^n}\,dt.$$

Exercice 4 : soit $\begin{cases} P(x,y) = y^2 - 4x^3 + 1 \\ Q(x,y) = 2xy \end{cases}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

1) expliquer pourquoi le champ de vecteurs $\vec{F} \begin{vmatrix} P \\ Q \end{vmatrix}$ dérive d'un potentiel V, que l'on explicitera ensuite.

2) résoudre le problème de condition initiale

$$\begin{cases} \dot{x} = -Q(x,y) & x(0) = 1 \\ \dot{y} = P(x,y) & y(0) = 0 \end{cases}$$

(on tracera les courbes intégrales, et la trajectoire).

Problème 1 : (polynômes de Laguerre, et processus arrêté).

A) 1) une urne contient $\underline{N}$ boules rouges et $\underline{M}$ boules blanches. On procède à une suite infinie de tirages avec remise. On désigne par X le numéro du tirage auquel une boule rouge sort pour la première fois : déterminer la loi de X.

2) soit $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de VA indépendantes ayant chacune la loi précédente (: binomiale négative d'ordre 1) : déterminer la loi de $S_2 = X_1 + X_2$, puis celle de $S_n = X_1 + \dots + X_n$ (au moyen de la fonction génératrice de X).

3) on considère en outre ξ VA indépendante des $(X_k)_{k\geq 1}$, de loi de Poisson de paramètre λ : soit X la nouvelle variable aléatoire définie par

$$\forall \omega \in \Omega, \quad X(\omega) = X_1(\omega) + X_2(\omega) + \dots + X_{\xi(\omega)+1}(\omega)$$

Montrer que la loi de X est donnée par

$$\forall n \geq 1, \quad P(X=n) = \frac{1}{n!} \left(\frac{pz}{1-qz} e^{-\lambda \frac{1-z}{1-qz}} \right)^{(n)} (0).$$

B)

1) pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\forall x \in \mathbb{R}$, $L_n(x) = e^x (x^n e^{-x})^{(n)}$: vérifier qu'on définit ainsi un polynôme de degré n.

2) montrer qu'il s'agit d'une famille $(L_n)_{n\geq 0}$ de polynômes orthogonaux pour le produit scalaire

$$(f,g) = \int_0^{\infty} f g \, e^{-x} dx$$

3) montrer que

$$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} L_n(x) z^n = \frac{1}{1-z} . e^{-\frac{xz}{1-z}} .$$

C) exprimer la loi de la VA X définie en A) 3) à l'aide des polynômes $(L_n)_{n\geq 0}$.

Problème 2 (d'après l'épreuve Analyse du CAPES externe 96).

A) On considère le problème aux limites suivant

$$(P) \begin{cases} -y'' + c^2 y = f \text{ sur } [0,1] & , f \in \mathcal{C}^0([0,1]) \\ y(0) = \lambda \quad , y(1) = \mu \quad \text{donnés} & , c > 0 \end{cases} .$$

1) montrer que les fonctions y_0 et y_1 définis par

$\forall t \in \mathbb{R}, \; y_0(t) = \operatorname{sh}(ct) \quad , y_1(t) = \operatorname{sh} c(1-t)$

forment une base de l'espace vectoriel des solutions de l'EDO homogène $-y'' + c^2 y = 0$.

2) montrer que le problème P a une unique solution qui s'écrit

$$y(t) = \frac{\operatorname{sh}(ct)}{\operatorname{sh} c}\left(\mu + \frac{1}{c}\int_t^1 f(s) . \operatorname{sh} c(1-s) . ds\right) +$$

$$\frac{\operatorname{sh} c(1-t)}{\operatorname{sh} c}\left(\lambda + \frac{1}{c}\int_0^t f(s) . \operatorname{sh} cs \, ds\right).$$

3) montrer que la solution précédente est telle que

$$\forall t \in [0,1], \quad y(t) \leqslant \frac{\operatorname{sh} c(1-t) + \operatorname{sh} ct}{\operatorname{sh} c} \cdot \max(\lambda, \mu) +$$

$$+ \left(1 - \frac{\operatorname{sh} c(1-t) + \operatorname{sh} ct}{\operatorname{sh} c}\right) \cdot \frac{\sup(f)}{c^2}.$$

4) en déduire l'existence de constantes positives a, b, A et B telles que

$$\forall t \in [0,1], \qquad y(t) \leqslant a \max(A\lambda, B\mu, b \sup f).$$

B) On considère ici le problème aux limites

$$(P') \begin{cases} -t^2 y'' - 2ty' + y = f(t) \\ y(\alpha) = \lambda, \ y(\beta) = \mu & \text{donnés} \end{cases}$$

avec $0 < \alpha < \beta$, $f \in \mathcal{C}^0([\alpha, \beta])$.

1) déterminer $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que, si y est solution de l'EDO

$$-t^2 y'' - 2ty' + y = f(t)$$

alors, la fonction $z(x) = e^{-\gamma x} \cdot y(e^x)$ est solution d'une EDO de la forme

$$-z'' + c^2 z = g(x).$$

2) en déduire un encadrement de la solution au problème (P').

Corrigé du problème n°8

Exercice 1 : avec les notations classiques (cf : corrigé du Pb n°2)

on doit avoir $R \sin V = 2\rho$, soit $\rho = \frac{1}{2} \cdot \frac{ds}{d\varphi} \cdot \rho \frac{d\theta}{ds}$

$$\left(\vec{T} = \cos V . \vec{u} + \sin V . \vec{v} = \frac{d}{ds}(\rho \vec{u}) = \frac{d\rho}{ds} \vec{u} + \rho \frac{d\theta}{ds} \vec{v} \right)$$

ce qui conduit à la relation angulaire $d\theta = 2\, d\varphi$ où

$d\varphi = d\theta + dV$, soit $dV = -\frac{1}{2} d\theta$: $V = -\frac{1}{2}\theta$ (à une rotation près). Comme $\operatorname{tg} V = \frac{\rho}{\rho'}$, cela donne l'EDO

selon le rayon polaire $\rho(\theta)$: $\frac{\rho'}{\rho} = -\operatorname{cotg} \frac{\theta}{2}$ d'où

par quadrature $\rho = \frac{K}{\sin^2 \theta/2} = \frac{C}{1 - \cos\theta}$: on reconnaît

l'équation polaire d'une parabole de foyer O et d'axe Ox.

Exercice 2 : il s'agit de reprendre la démonstration du théorème d'Abel

en montrant que la série converge uniformément sur $[0,1]$. On

utilise pour cela le critère de Cauchy : à $q > p > 0$ donné,

en posant $A_{p-1} = 0$ et $\forall n \geq p$ $A_n = \sum_p^n a_k$, une

transformation d'Abel donne

$$\sum_p^q a_n B_n = A_p . B_p + \dots + (A_n - A_{n-1}) B_n + \dots + (A_q - A_{q-1}) B_q$$

$$= \sum_{p}^{q-1} (B_n - B_{n+1}) A_n + A_q B_q$$

à $\varepsilon > 0$ donné, on peut alors trouver $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $p > N_\varepsilon$ entraîne $\forall n \geq p \quad |A_n| \leq \varepsilon$: comme $B_n - B_{n+1} > 0$ ainsi que B_q, on obtient donc, pour $q > p > N_\varepsilon$

$$\left|\sum_{p}^{q} a_n B_n\right| \leq \varepsilon \cdot \left(\sum_{p}^{q-1} (B_n - B_{n+1}) + B_q\right) = \varepsilon B_q$$

$$\leq \varepsilon B_0$$

c'est-à-dire, comme $B_0 \in \mathcal{C}^0_+([0,1])$:

$$\left(\forall \varepsilon > 0, \ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \ \forall q > p > N_\varepsilon, \ \forall x \in [0,1] \text{ on a } \left|\sum_{p}^{q} a_n B_n(x)\right| \leq \varepsilon \cdot \|B_0\|_\infty\right)$$

: la suite des sommes partielles de la série de fonctions est donc de Cauchy dans l'<u>espace complet</u> $(\mathcal{C}^0[0,1], \|\cdot\|_\infty)$, et la conclusion suit.

<u>Exercice 3</u>: on désigne par $I_n(z)$ l'intégrale à calculer (qui est bien définie !). On peut commencer par remarquer que

$$I_n(\rho e^{i\theta}) = e^{-in\theta} \int_0^{2\pi} \frac{e^{it}}{(e^{i(t-\theta)} - \rho)^n} dt = e^{-i(n-1)\theta} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{e^{it}}{(e^{it} - \rho)^n} dt$$

(: par le chgt de variable $t = \theta + s$)

C3

ensuite, $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}}{(e^{it}-\rho)^n}\,dt = \frac{1}{(n-2)!}\int_0^{2\pi} \frac{\partial^{n-1}}{\partial\rho^{n-1}}\left(\frac{e^{it}}{e^{it}-\rho}\right)dt =$

$\dfrac{1}{(n-2)!} \cdot I_1^{(n-1)}(\rho)$, d'après le théorème de dérivation sous le signe $\int_0^{2\pi}$ (: la fonction $(t,\rho) \longrightarrow \dfrac{e^{it}}{e^{it}-\rho}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur

$[0,2\pi]_t \times \{\rho>0,\ \rho\neq 1\}$) : on a réduit le problème à celui du calcul de

$$I_1(\rho>0) = \int_0^{2\pi} \frac{e^{it}}{e^{it}-\rho}\,dt$$

Pour $0<\rho<1$, on a $\dfrac{e^{it}}{e^{it}-\rho} = \dfrac{1}{1-\rho e^{-it}} = \displaystyle\sum_0^\infty \rho^n e^{-int}$ où la série (dans la variable t) converge normalement sur $\mathbb{R}$, ce qui autorise l'intégration terme à terme

$$I_1(\rho) = \sum_0^\infty \rho^n \int_0^{2\pi} e^{-int}\,dt = 2\pi$$

Pour $\rho>1$, on a de même $\dfrac{e^{it}}{e^{it}-\rho} = -\dfrac{e^{it}}{\rho}\cdot\dfrac{1}{1-e^{it}/\rho} = -\displaystyle\sum_0^\infty \left(\frac{e^{it}}{\rho}\right)^{n+1}$

voyez donc $I_1(\rho) = -\displaystyle\sum_0^\infty \frac{1}{\rho^{n+1}}\int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t}\,dt = 0$.

En tous cas, pour $n\geq 2$, $I_n(z) = 0 \quad \forall z\in\mathbb{C},\ |z|\neq 1$.

Remarque : on pouvait aussi développer l'intégrant avec la formule du binôme et intégrer terme à terme !

<u>Exercice 4 :</u> 1) comme $\frac{\partial P}{\partial y} = 2y = \frac{\partial Q}{\partial x}$ sur $\mathbb{R}^2$ (étoilé), C4

on est assuré, avec <u>le lemme de Poincaré</u> (: au programme de l'écrit !)

de l'existence d'un potentiel V qui se calcule d'ailleurs

facilement en résolvant le système d'EDP

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial x} = P = y^2 - 4x^3 + 1 \\ \frac{\partial V}{\partial y} = Q = 2xy \end{cases}$$

la première EDP donnant $V = y^2 x - x^4 + x + C(y)$ avec

d'après la seconde EDP $2xy + C'(y) = 2xy$ donc $C = c^{te}$:

$$V(x,y) = x(y^2 - x^3 + 1) \quad \text{convient.}$$

2) si $(x(t), y(t))$ est la solution au problème posé, on observe

que $\frac{d}{dt} V(x,y) = \frac{\partial V}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial V}{\partial y}\dot{y} = P.(-Q) + Q.(P) = 0$

et par conséquent

$$\forall t, \quad V(x(t), y(t)) = V(x(0), y(0)) = V(1,0) = 0$$

ce qui entraîne la relation $y^2 - x^3 + 1 = 0$. D'où, portant

dans le SD

$$\dot{y} = y^2 - 4(y^2+1) + 1 = -3(y^2+1)$$

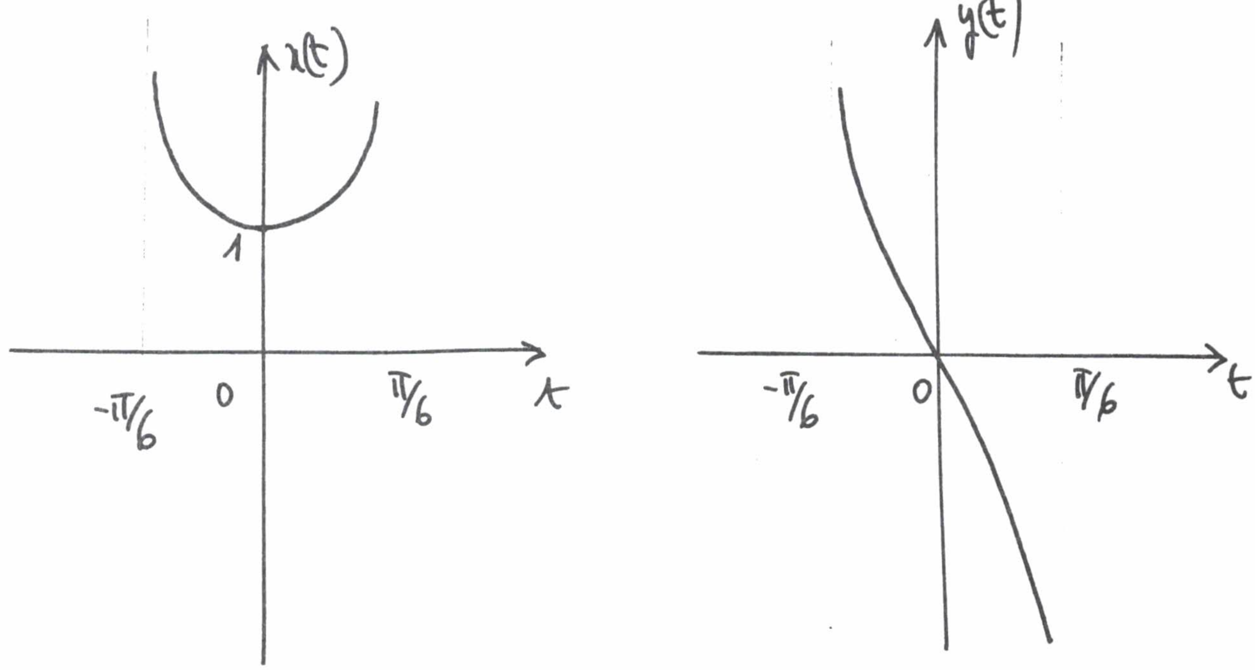
ce qui permet d'intégrer par séparation des variables :

$$\int_0^{y(t)} \frac{dy}{1+y^2} = -3t$$

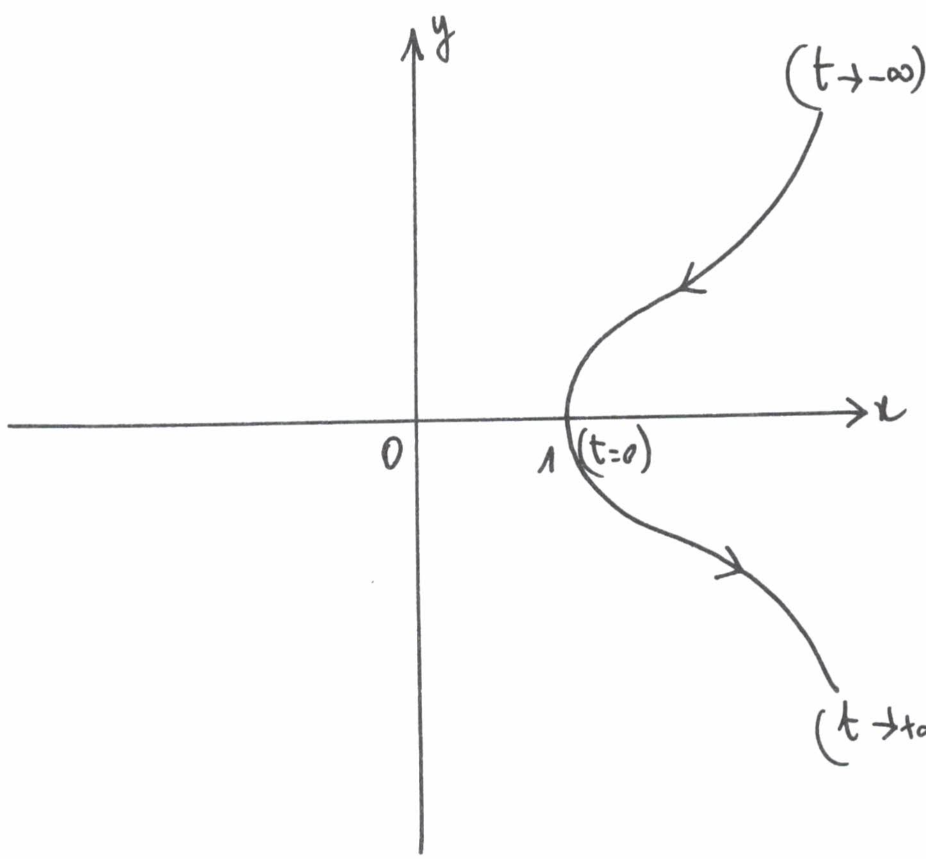
ce qui donne $y(t) = -\operatorname{tg}(3t)$, puis $x^3(t) = \dfrac{1}{\cos^2(3t)}$

d'où $x(t) = \cos^{-2/3}(3t)$, pour $|t| < \pi/6$.

On en déduit les tracés demandés :



: courbes intégrales



: trajectoire

Problème 1 : A) 1) On admet ici (cf Leçon $\boxed{27}$: suite de VA i C6 de même loi de Bernoulli...) l'existence d'un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ avec $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, $\mathcal{F}$ tribu contenant les ensembles cylindriques (: du type $\{\omega \in \Omega / \pi_n(\omega) = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in A$, partie de $\{0,1\}^n)$ et $\mathbb{P}$ mesure de probabilité telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall A \subset \{0,1\}^n$, on ait

$$\mathbb{P}(\pi_n^{-1}(A)) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}_n(\omega)$$

avec $\mathbb{P}_n(\omega) = p^k q^{n-k}$ si $p = \frac{N}{M+N}$, $q = 1-p$

et k désigne le nombre de symboles 1 dans la suite finie ω.

Alors, $\{X = n\} = \pi_n^{-1}((0, \dots, 0, 1))$ donne la loi de la VA X :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X=n) = q^{n-1} \cdot p$$

("loi binomiale négative d'ordre 1").

2) La f.g. de la VA X est donnée par

$$G_X(z) = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(X=n) \cdot z^n = \sum_{n \geq 1} p\, q^{n-1} z^n = \frac{pz}{1-qz}$$

pour $|z| < \frac{1}{q}$. Comme les VA (X_k) sont indépendantes, celle de S_n est donnée par $G_X^n(z) = \frac{(pz)^n}{(1-qz)^n}$. Ainsi, pour $n=2$,

$$G_{X_1+X_2}(z) = \left(\frac{pz}{1-qz}\right)^2 = \frac{p^2}{q} \cdot \left(\frac{1}{1-qz}\right)'$$

soit $G_{X_1+X_2}(z) = \frac{p^2 z^2}{q} \cdot \sum_{n\geq 1} n q^n z^{n-1}$, ce qui permet d'obtenir

la loi de S_2, donnée par

$$\forall n \geq 2, \quad \mathbb{P}(X_1+X_2=n) = \frac{p^2}{q}(n-1)q^{n-1} = (n-1)p^2 q^{n-2}$$

Plus généralement

$$\forall m \geq n, \quad \mathbb{P}(X_1+\dots+X_n=m) = \frac{1}{m!}\left(G_X^n\right)^{(m)}(0) = \dots$$

3) On remarque, pour commencer, que X est bien une VA :

$$\forall n \geq 1, \quad \{X=n\} = \dot{\bigcup_{k\in\mathbb{N}}}\{X_1+\dots+X_{k+1}=n, \ \xi=k\}$$

est bien, en effet, en tant que <u>réunion dénombrable</u> d'éléments de la tribu, un élément de $\mathcal{F}$. De plus

$$\mathbb{P}(X=n) = \sum_{k\geq 0}\mathbb{P}(X_1+\dots+X_{k+1}=n, \ \xi=k)$$

d'où, <u>par l'indépendance</u> des VA ξ et $X_1+\dots+X_{k+1}$

$$\mathbb{P}(X=n) = \sum_{k\geq 0}\mathbb{P}(X_1+\dots+X_{k+1}=n)\cdot\mathbb{P}(\xi=k)$$

D'après 2), il vient donc

$$\mathbb{P}(X=n) = \sum_{k\geq 0} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\cdot\frac{1}{n!}\left[\left(\frac{pz}{1-qz}\right)^{k+1}\right]^{(n)}(0)$$

On doit justifier l'opération de dérivation terme à terme

$$\left(\sum_{k\geq 0} e^{-d}\frac{d^k}{k!}\left(\frac{pz}{1-qz}\right)^{k+1}\right)^{(n)}(0) = \left(e^{-d}\cdot\frac{pz}{1-qz}\cdot\exp\left(\frac{d\,pz}{1-qz}\right)\right)^{(n)}(0)$$

pour conclure : il s'agit, au fond, de justifier l'opération pour la série de fonctions $\sum_{k\geq 0}\frac{1}{k!}\left(\frac{dpz}{1-qz}\right)^k$, ce qui est immédiat (pour $z\in\left]-\frac{1}{q},\frac{1}{q}\right[$, la série exp. ayant un rayon de convergence ∞, et la fonction $z\mapsto \frac{dpz}{1-qz}$ étant bornée, avec ses dérivées, sur tout cpt de $\left]-\frac{1}{q},\frac{1}{q}\right[$).

B) 1) avec Leibniz, $L_n(x) = e^x\sum_{k=0}^n C_n^k (x^n)^{(k)}\cdot(e^{-x})^{(n-k)}$

$$= \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} C_n^k \frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{k!} C_n^k x^k \in \mathbb{R}_n[X]$$

2) pour $n>k>0$, une intégration par parties donne

$$(x^k, L_n) = \int_0^\infty x^k (x^n e^{-x})^{(n)}dx = -k\int_0^\infty x^{k-1}(x^n e^{-x})^{(n-1)}dx$$

en itérant, on obtient $(-1)^k k!\int_0^\infty (x^n e^{-x})^{(n-k)}dx = 0$.

Comme d'autre part $\{L_j\}_0^{n-1}$ constitue une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, on peut conclure.

3) Il s'agit de préciser les conditions de validité du calcul C9

formel suivant :

$$\sum_{n\geq 0} \frac{L_n(x)}{n!} z^n = \sum_{n\geq 0} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k!} C_n^k x^k . z^{n-k}$$

$$= \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{k!} x^k \sum_{n\geq k} C_n^k z^n$$

car, par dérivation de la série géométrique $\frac{1}{1-z} = \sum_0^\infty z^h$

pour $|z|<1$, il vient

$$\frac{k!}{(1-z)^{k+1}} = \sum_{n\geq k} \frac{n!}{(n-k)!} z^{n-k}$$

soit $\sum_{n\geq k} C_n^k z^n = \frac{z^k}{(1-z)^{k+1}}$, ce qui permet alors de

conclure :

$$\sum_{n\geq 0} \frac{L_n(x)}{n!} z^n = \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{zx}{1-z}\right)^k \cdot \frac{1}{1-z} = \dots$$

Comme, d'après ce qui précède, et pour $|z|<1$, on a

$$\sum_{k\geq 0} \sum_{n\geq k} \left| \frac{(-1)^k}{k!} C_n^k x^k z^{n-k} \right| < +\infty$$

(et vaut $\frac{1}{1-|z|} \cdot e^{|xz|/1-|z|}$), on sait que l'opération d'interversion des sommations est licite.

C) d'après A) 3), on a $\forall n \geq 1$,

$$P(X=n) = \frac{1}{n!} e^{-\lambda} \cdot \frac{p}{q}\left(\frac{z}{1-z} e^{-xz/1-z}\right)^{(n)}(0) \cdot q^n$$

avec $x = -\lambda \frac{p}{q}$. Soit, avec Leibniz

$$P(X=n) = \frac{1}{n!} e^{-\lambda} p q^{n-1} \cdot \left(n \cdot \left(\frac{1}{1-z} e^{-\frac{xz}{1-z}}\right)^{(n-1)}(0) \right)$$

$$= \frac{1}{n!} e^{-\lambda} p q^{n-1} \cdot n \, L_{n-1}\left(-\lambda \frac{p}{q}\right)$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} p q^{n-1} e^{-\lambda} L_{n-1}\left(-\lambda \frac{p}{q}\right).$$

Problème 2 : A) 1) y_0 et y_1 sont solutions (l'équation caractéristique s'écrit $p^2 - c^2 = 0$ ...), et il s'agit de fonctions indépendantes ($A \operatorname{sh} ct + B \operatorname{sh} c(1-t) = 0 \ \forall t \Rightarrow A = B = 0$ comme on le voit en faisant $t=0$ et $t=1$). Or, l'espace vectoriel des solutions de l'EDO homogène est de dimension 2 (cf leçon 24) : la conclusion demandée suit.

2) La solution générale de l'EDO avec second membre s'obtient par la méthode de Lagrange :

on pose donc $y(t) = A(t)\,\mathrm{sh}\,ct + B(t)\,\mathrm{sh}\,c(1-t)$, avec

$$\begin{cases} A'.\,\mathrm{sh}\,ct + B'.\,\mathrm{sh}\,c(1-t) = 0 \\ A'.\,\mathrm{ch}\,ct - B'.\,\mathrm{ch}\,c(1-t) = -\frac{1}{c} f \end{cases}$$

qui donne

$$\begin{cases} A'(t) = -\dfrac{1}{c\,\mathrm{sh}\,c}\, f(t).\,\mathrm{sh}\,c(1-t) \\ B'(t) = +\dfrac{1}{c\,\mathrm{sh}\,c}\, f(t).\,\mathrm{sh}\,ct \end{cases}$$

d'où, par quadrature

$$\begin{cases} A(t) = A_1 + \dfrac{1}{c\,\mathrm{sh}\,c}\displaystyle\int_t^1 f(s)\,\mathrm{sh}\,c(1-s)\,ds & , A_1 \in \mathbb{R} \\ B(t) = B_0 + \dfrac{1}{c\,\mathrm{sh}\,c}\displaystyle\int_0^t f(s)\,\mathrm{sh}\,cs\,ds & , B_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

avec, compte-tenu des conditions limites $y(0) = B_0\,\mathrm{sh}\,c = \lambda$
$y(1) = A_1\,\mathrm{sh}\,c = \mu$:

l'expression demandée suit.

3) $y(t) \leqslant \dfrac{\mathrm{sh}\,ct + \mathrm{sh}\,c(1-t)}{\mathrm{sh}\,c}\,\lambda \vee \mu + \dfrac{\sup(f)}{c\,\mathrm{sh}\,c}\left(\mathrm{sh}\,ct.\displaystyle\int_t^1 \mathrm{sh}\,c(1-s)\,ds + \mathrm{sh}\,c(1-t).\int_0^t \mathrm{sh}\,cs\,ds\right)$, et il suffit de calculer les intégrales définies.

4) comme $\operatorname{sh} ct + \operatorname{sh} c(1-t) = 2 \operatorname{sh}\frac{c}{2} \operatorname{ch} c\left(t-\frac{1}{2}\right) \leqslant 2\operatorname{sh}\frac{c}{2}\operatorname{ch}\frac{c}{2} = \operatorname{sh} c$ C12

$(0 \leqslant t \leqslant 1)$

$\dfrac{\operatorname{sh} ct + \operatorname{sh} c(1-t)}{\operatorname{sh} c} \in [0,1]$, et la inclusion suit avec : $\boxed{a = A = B = 1,\ b = \frac{1}{c^2}}$

B) 1) pour $t>0$, on part par $x = \ln t$: si $y(t)$ est solution de l'EDO $-t^2y'' - 2ty' + y = f(t)$, $z(x) = e^{-\gamma x}. y(e^x)$ est telle que

$$\begin{aligned}
1. \quad & y(t) = t^{\gamma}. z(\ln t)\\
-2t. \quad & y'(t) = \gamma t^{\gamma-1}. z(\ln t) + t^{\gamma-1}. z'(\ln t)\\
-t^2. \quad & y''(t) = \gamma(\gamma-1)\, t^{\gamma-2}. z(\ln t) + (2\gamma-1)t^{\gamma-2} z'(\ln t) + t^{\gamma-2}. z''(\ln t)
\end{aligned}$$

Euler !

donne, après simplification par t^{γ}, la nouvelle EDO en $z(x)$:

$$-z''(x) - (1+2\gamma). z'(x) + \left(1 - 2\gamma + \gamma(1-\gamma)\right). z(x) = e^{-\gamma x} f(e^x)$$

Le choix de $\gamma = -\frac{1}{2}$ conduit à la forme demandée, avec $c = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

2) en utilisant A) 4), et après quelques manipulations, on obtient

$$\forall t \in [\alpha, \beta], \quad y(t) \leqslant \frac{1}{\sqrt{t}} \max\left(\lambda\sqrt{\alpha}, \mu\sqrt{\alpha}, \ \frac{4}{5} \sup_t \sqrt{t} f(t)\right)$$

d'autre part, en reprenant l'expression de y obtenue en A) 2), on y a aussi $-y(t) \leqslant \max\left(-\lambda, -\mu, \frac{1}{c^2} \sup(-f)\right)$

d'où $y(t) \geqslant \min\left(\lambda, \mu, \frac{1}{c^2} \inf(f)\right)$, ce qui donne ici

$$\forall t \in [\alpha, \beta], \quad y(t) \geqslant \frac{1}{\sqrt{t}} \min\left(\lambda\sqrt{\alpha}, \mu\sqrt{\alpha}, \ \frac{4}{5} \inf_t \sqrt{t} f(t)\right).$$

Problème n° 9

Exercice 1 : soit K la fonction définie sur $[0,1]\times[0,1]\setminus\Delta$

par

$$K(x,t)=\begin{cases}(1-x).t, & \text{si } 0\leqslant t<x\leqslant 1\\ x.(1-t), & \text{si } 0\leqslant x<t\leqslant 1\end{cases}$$

1) montrer que K se prolonge continûment sur le carré $[0,1]\times[0,1]$

On considère le problème aux limites

$$(PL)_\lambda \quad f\in\mathcal{C}^0([0,1]) : \begin{cases}\forall x\in[0,1], \displaystyle\int_0^1 K(x,t)f(t)\,dt=\lambda.f(x)\\ f(0)=f(1)=0\end{cases}$$

2) montrer que $(PL)_\lambda$ n'admet de solution non $\equiv 0$ que si λ appartient à un ensemble dénombrable (à préciser).

Exercice 2 : existence, et calcul de l'intégrale généralisée

$$\int_0^\infty \ln(1-e^{-t})\,dt \ ?$$

Exercice 3 : tracer l'allure des trajectoires du système différentiel

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X$$

Exercice 4 : calculer la valeur de $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{n}{(4n^2-1)^2}$.

Problème 1 : (Calcul des sommes de Gauss par la méthode de Dirichlet)

1) soit f la fonction 1-périodique, qui vaut $e^{2i\pi t^2}$ pour $t \in [0,1]$:

a) si c_n désigne son $n^{\text{ème}}$ coefficient de Fourier, montrer que

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad \begin{cases} c_{2k} = \displaystyle\int_{-k}^{-k+1} e^{2i\pi t^2}\, dt \\ c_{2k+1} = -i \displaystyle\int_{-(k+\frac{1}{2})}^{-k+\frac{1}{2}} e^{2i\pi t^2}\, dt \end{cases}$$

b) pourquoi a-t-on $\displaystyle\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n = 1$?

c) retrouver la valeur des intégrales de Fresnel

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(2\pi t^2)\, dt \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(2\pi t^2)\, dt.$$

Pour m entier ≥ 1, on considère la fonction g 1-périodique valant $\displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} e^{2i\pi\frac{(t+k)^2}{m}}$ pour $t \in [0,1]$.

2) montrer que $\forall n \in \mathbb{Z}$, le $n^{\text{ème}}$ coefficient de Fourier de g est donné par

$$\int_{-\frac{1}{2}mn}^{m-\frac{1}{2}mn} e^{2i\pi\theta^2/m}\, d\theta \,.\, e^{-2i\pi\frac{mn^2}{4}}.$$

3) expliciter la valeur de $e^{-i\pi\frac{mn^2}{2}}$ (on distinguera les cas n pair et n impair

4) en déduire la valeur de la somme de Gauss

$$G(m) = \sum_{k=0}^{m-1} e^{2i\pi k^2/m}$$

Problème 2 : (polynômes de Legendre)

Pour $x \in [-1,1]$ et $t \in]-1,1[$, on pose

$$\varphi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}$$

1) expliquer pourquoi, à $x \in [-1,1]$ fixé, $\varphi(x,.)$ est développable en série entière (à l'origine).

2) montrer que le développement précédent a la forme

$$\varphi(x,t) = \sum_{n\geq 0} P_n(x).\,t^n$$

où $\forall n \geq 0$, P_n est un polynôme à expliciter (à l'aide des polynômes de Tchebytchev).

(on passe par $x = \cos\theta$ et factoriser $1 - 2\cos\theta.t + t^2$)

3) justifier le calcul suivant

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-2xt+t^2}\cdot\sqrt{1-2xu+u^2}} = \sum_{p\geq 0}\left(\sum_{n+m=p}\int_{-1}^{1} P_n(x)\,P_m(x)\,dx.\,t^n u^m\right)$$

où l'intégrale de gauche vaut $\dfrac{1}{\sqrt{t.u}}\ln\dfrac{1+\sqrt{tu}}{1-\sqrt{tu}}$ pour $t,u \in [0,1[$

4) en déduire que $\displaystyle\int_{-1}^{1} P_n(x)\,P_m(x)\,dx = \begin{cases} 0, & \text{si } n \neq m \\ 2/_{2n+1}, & \text{si } n = m \end{cases}$.

Corrigé du Problème n° 9. C1

Exercice 1 : 1) en écrivant, à $x_0 \in [0,1]$ donné,

$$|(1-x)\cdot t - (1-x_0)x_0 = (t-x_0)(1-x) + (\underset{x_0}{\overset{\|}{t_0}}-x)x_0| \leqslant |t-x_0|+|x-x_0|$$

on obtient, avec $\tilde{K}(x_0,x_0) = x_0(1-x_0)$, $K(x,t)-K(x_0,x_0) =$

$O(\|(x,t)-(x_0,x_0)\|_{\infty}^{\mathbb{R}^2})$.

2) pour $f \in \mathcal{C}^0_{\mathbb{R}}([0,1])$, soit $F : x \in [0,1] \longmapsto \int_0^1 K(x,t)f(t)\,dt$:

$$F(x) = \int_0^x t f(t)\,dt \cdot (1-x) + \int_x^1 (1-t)f(t)\,dt \cdot x$$

montre que F est de classe $\mathcal{C}^2$, avec

$$F'(x) = -\int_0^x t f(t)\,dt + \cancel{x f(x)\cdot(1-x)} - \cancel{(1-x)f(x)\cdot x} + \int_x^1 (1-t)f(t)\,dt.$$

puis

$$F''(x) = -x f(x) - (1-x)f(x) = -f(x)$$

Ainsi, si f est solution de $(PL)_\lambda$, doit-on avoir

$$\lambda f'' + f = 0, \quad f(0) = f(1) = 0$$

ceci impose $\lambda = \dfrac{1}{\omega^2}$ avec $\omega \in \pi.\mathbb{Z}$ si l'on veut obtenir une solution non triviale.

C2

<u>Exercice 2</u> : $\ln(1-e^{-t}) < 0$ et $\underset{(+\infty)}{\sim} -e^{-t}$: on conclut à la convergence par <u>le critère de comparaison</u>. On justifie le calcul suivant

$$\int_0^\infty \ln(1-e^{-t})\,dt = \int_0^\infty -\sum_1^\infty \frac{e^{-nt}}{n}\,dt = -\sum_1^\infty \frac{1}{n}\int_0^\infty e^{-nt}\,dt$$

$$= -\sum_1^\infty \frac{1}{n^2} = -\pi^2/6 \quad :$$

- la série de fonctions $\sum_1^\infty \frac{e^{-nt}}{n}$ <u>converge uniformément sur tout compact</u> $[\varepsilon, T]$ <u>de</u> $]0,\infty[$ (car le rayon de convergence de la série $\ln(1-z) = -\sum_1^\infty \frac{z^n}{n}$ vaut $1 > e^{-\varepsilon}$)
- comme $0 < \sum_1^N \frac{e^{-nt}}{n} < -\ln(1-e^{-t})$ $\forall N \in \mathbb{N}^*$, $t > 0$, il y a <u>convergence dominée</u>.

<u>Exercice 3</u> : le polynôme caractéristique s'écrit

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & -4 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 7$$

à la valeur propre $\lambda = i\sqrt{7}$ se trouve associé le sous espace propre engendré par le vecteur de $\mathbb{C}^2$ $\begin{pmatrix} 4 \\ -1-i\sqrt{7} \end{pmatrix} = \vec{V}_1 - i\vec{V}_2$ avec $\{\vec{V}_1, \vec{V}_2\}$ formant une base de $\mathbb{R}^2$. Alors,

$$\vec{z}(t) = e^{i\sqrt{7}.t}\left(\vec{V}_1 - i\vec{V}_2\right) = \vec{x}(t) + i\,\vec{y}(t) \quad \text{est solution}$$

fondamentale du SD, et les trajectoires sont, dans $\{\vec{V}_1, \vec{V}_2\}$

de cercles centrés en 0, et parcourus dans le sens trigonométrique.
Dans le repère original, il s'agit donc d'ellipses... .

Exercice 4: une décomposition en éléments simples donne

$$\frac{n}{(4n^2-1)^2} = \frac{1/8}{(2n-1)^2} - \frac{1/8}{(2n+1)^2}$$

si bien que $\forall N \in \mathbb{N}^*$, $\sum_1^N = \frac{1}{8}\left(1 - \frac{1}{(2N+1)^2}\right)$: la somme vaut $1/8$.

Problème 1:

1) a) $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\quad c_n = \int_0^1 e^{2i\pi t^2 - 2in\pi t}\,dt$

en particulier,

$$c_{2k} = \int_0^1 e^{2i\pi((t-k)^2 - k^2)}\,dt \underset{(t=k+\theta)}{=} \int_{-k}^{-k+1} e^{2i\pi\theta^2}\,d\theta$$

$$c_{2k+1} = \int_0^1 e^{2i\pi\left(\left(t-\frac{2k+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{2k+1}{2}\right)^2\right)}\,dt \underset{\left(t=\frac{2k+1}{2}+\theta\right)}{=} -i\int_{-(k+\frac{1}{2})}^{-(k-\frac{1}{2})} e^{2i\pi\theta^2}\,d\theta$$

b) f est continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux : d'après le thm de

Dirichlet, $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n \cdot e^{2i\pi n t}$: on obtient l'égalité demandée en faisant $t = 0$.

c) ce qui donne

$$1 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi\theta^2} d\theta\right)(1-i)$$

(détailler $\sum_{-2K}^{2K} c_n e^{2i\pi n t} = \sum_{-K}^{K} c_{2k} e^{4i\pi k t} + \sum_{-(K-1)}^{K-1} c_{2k+1} e^{2i\pi(2k+1)t}$

et faire $K \to +\infty$), soit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi\theta^2} d\theta = \frac{1+i}{\sqrt{2}} : \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(2\pi\theta^2) d\theta = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(2\pi\theta^2) d\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

2) par définition, $\forall n \in \mathbb{Z}$

$$c_n = \sum_{k=0}^{m-1} \int_0^1 e^{\frac{2i\pi}{m}\left((t+k)^2 - mnt\right)} dt = \sum_{k=0}^{m-1} \int_{-\frac{mn}{2}+k}^{-\frac{mn}{2}+k+1} e^{\frac{2i\pi\theta^2}{m}} d\theta \cdot e^{-\frac{2i\pi}{m}\left(\frac{mn}{2}\right)^2}$$

$$\left((t+k)^2 - mnt = t^2 + 2\left(k - \frac{mn}{2}\right)t + k^2 = \left(t + \left(k - \frac{mn}{2}\right)\right)^2 + kmn - \left(\frac{mn}{2}\right)^2 \right)$$

et la conclusion suit avec Chasles.

3) si n est pair, $e^{-i\pi\frac{mn^2}{2}} = 1$; si n est impair,

on obtient

$$e^{-i\pi\frac{mn^2}{2}} = \begin{cases} 1, & \text{si } m \equiv 0\ [4] \\ -i, & \text{si } m \equiv 1\ [4] \\ -1, & \text{si } m \equiv 2\ [4] \\ i, & \text{si } m \equiv 3\ [4] \end{cases}.$$

4) comme en 1) b), on a

$$G(m)=\sum_{-\infty}^{+\infty} G_n$$

soit, avec 2) et 3)

$$G(m)=\sum_{n\,\text{pair}}\int_{\frac{1}{2}mn}^{\frac{1}{2}mn+m} e^{2i\pi\theta^2/m}\,d\theta+\sum_{n\,\text{impair}}\int_{\frac{1}{2}mn}^{\frac{1}{2}mn+m} e^{2i\pi\theta^2/m}\,d\theta\,.\,\{$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi\theta^2/m}\,d\theta\,.\,\left(1+\{\right)$$

d'où, avec 1) c)

$$G(m)=\begin{cases}(1+i)\sqrt{m}, & \text{si } m\equiv 0\ [4]\\ \sqrt{m}, & \text{si } m\equiv 1\ [4]\\ 0, & \text{si } m\equiv 2\ [4]\\ i\sqrt{m}, & \text{si } m\equiv 3\ [4]\end{cases}.$$

Problème 2 :

1) le plus simple est d'invoquer le principe de substitution : la fonction $z\mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-z}}$ est développable en série entière en 0, avec un rayon de convergence $R=1$:

à $x \in [-1, 1]$ donné, si $|t| < \sqrt{1+x^2} - |x|$, on a

$2|x||t| + t^2 < 1$ et $\varphi(x, \cdot)$ est donc développable en série entière.

<u>remarque</u>: le principe de substitution n'est pas explicitement au programme (on trouvera sa démonstration dans J. Dieudonné, Calcul infinitésimal p. 170-, par exemple). L'argument (de produit) de 2) est donc mieux adapté.

2) posant $x = \cos\theta$ avec $\theta \in [0, \pi]$, on a la factorisation

$$1 - 2xt + t^2 = (1 - te^{i\theta}).(1 - te^{-i\theta})$$

On sait (formule du binôme) que, pour $|t| < 1$,

$$\frac{1}{\sqrt{1 - te^{i\theta}}} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^{2n}} C_{2n}^{n} e^{in\theta} . t^n$$

D'après la règle du produit de 2 séries entières, on a, toujours pour $|t| < 1$

$$\frac{1}{\sqrt{1-te^{i\theta}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-te^{-i\theta}}} = \sum_{0}^{\infty} c_n(\theta) t^n$$

avec, $\forall n \geq 0$, $c_n(\theta) = \displaystyle\sum_{\substack{p+q=n \\ p,q \geq 0}} \frac{1}{2^{2p}} C_{2p}^{p} . \frac{1}{2^{2q}} C_{2q}^{q} e^{i(p-q)\theta}$

En désignant par $f(x,t)$ la fonction ainsi développée, on a $f^2 = \varphi^2$ et $f(x,0) = 1 = \varphi(x,0)$: comme $f(x,\cdot)$ et $\varphi(x,\cdot)$ sont continues, il en résulte que, pour $|t|$ assez petit, $f(x,t) = \varphi(x,t)$.
Le développement en série entière de $\varphi(x,\cdot)$ s'écrit donc sous la forme

$$\varphi(\cos\theta, t) = \sum_0^{\infty} c_n(\theta)\, t^n$$

avec

$$c_n(\theta) = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{p+q=n} C_{2p}^{p} C_{2q}^{q}\, T_{p-q}(\cos\theta)$$

car $c_n(\theta) = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n \varphi}{\partial t^n}(x,0) \in \mathbb{R}$ et $\cos(p-q)\theta = T_{p-q}(\cos\theta)$, T_k désignant le <u>$k^{\text{ième}}$ polynôme de Tchebytchev</u> (cf problème n° 6). Ainsi a-t-on

$$\forall n \geq 0, \quad P_n = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{p+q=n} C_{2p}^{p} C_{2q}^{q}\, T_{p-q}$$

3) La série précédente converge en t sur tout cpt de $]-1,1[$, à x parcourant $[-1,1]$: on peut donc

C8

effectuer le produit des séries (: <u>absolument</u> convergentes) et, en reprenant la démonstration de ce point (théorème de Mertens) on s'assure de la <u>convergence uniforme en x sur</u> $[-1,1]$, à t et $u \in [0,1[$ fixés : on peut donc intégrer terme à terme.

Posant $S = t+u$, $P = t.u$, le changement de variable

$$x = \frac{S(1+P)}{4P} + \frac{1-P}{2\sqrt{P}} \cdot \sqrt{\frac{S^2}{4P}-1}\ \mathrm{ch}\,\theta$$

élimine les $\sqrt{\cdot}$.

On conclut enfin à l'aide du développement de $\ln \frac{1+v}{1-v}$ en série entière : la suite $\left(\sqrt{\frac{2n+1}{2}} \cdot P_n\right)_{n \geq 0}$ est orthonormale pour le produit scalaire $(f,g) = \int_{-1}^{1} fg\,dx$. C'est la suite des <u>polynômes orthogonaux de Legendre</u>.

Préparation à l'épreuve d'Analyse de l'Agrégation Interne 95/96

Problème n° 10

Exercice 1 : (généralisation des exercices 1, problèmes n° 2 et n° 8)

$\mathcal{C}$? $\overline{OH} = k\,\overline{HM}$, $k \in \mathbb{R}$ fixé

Exercice 2 : Soit le système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 \cdot y \\ \dot{y} = x(1-y^2) \end{cases}$$

déterminer les positions d'équilibre ; vérifier que $x^2 \cdot (y^2-1)$ est une intégrale première ; déterminer la solution du problème de condition initiale $x(0) = 1$, $y(0) = 0$.

Exercice 3 : (à l'aide d'une série entière,) résoudre le problème de condition initiale

$$\begin{cases} (1-x^2)y'' - 2xy' + 12y = 0 \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 3 \end{cases}$$

Problème 1 :

1) préciser le domaine de définition de la fonction

$$f_a(z) = \sqrt{\frac{a}{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-a/x}}{e^x - z} \cdot \frac{dx}{x^{3/2}}$$

où a est un paramètre positif.

2) montrer que f_a est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 1[$.

3) pour $\lambda \geq 0$, on pose $\displaystyle F(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\left(x^2 + \lambda^2/x^2\right)} dx$:

calculer $F(\lambda)$ (sachant que $F(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$).

4) montrer que f_a est développable en série entière à l'origine, avec

$$\forall |z| < 1, \quad f_a(z) = \sum_{1}^{\infty} e^{-2\sqrt{an}} \cdot z^{n-1}$$

5) justifier la relation

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-a/x}}{e^x - 1} \cdot \frac{dx}{x^{3/2}} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \cdot \sum_{1}^{\infty} e^{-2\sqrt{an}} \quad , a > 0.$$

<u>Problème 2</u> : (polynômes de Bernstein)

Pour f continue sur $[0,1]$, on pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$:

$$B_n(f)(x) = \sum_{j=0}^{n} C_n^j x^j (1-x)^{n-j} f\left(\frac{j}{n}\right)$$

1) pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $\varphi(t) = (xe^t + 1 - x)^n$ si $t \in \mathbb{R}$: en calculant $\varphi(0)$, $\varphi'(0)$ et $\varphi''(0)$ de 2 manières différentes, calculer $B_n(1)$, $B_n(x)$, $B_n(x^2)$.

2) montrer que $B_n(x^2) \xrightarrow[(n\to\infty)]{u} x^2$ sur $[0,1]$.

Pour $f, g \in \mathcal{C}^0_{\mathbb{R}}([0,1])$, on note $f \leqslant g$ si $\forall x \in [0,1]$, on a :

$f(x) \leqslant g(x)$

Un endomorphisme A (: du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{C}^0_{\mathbb{R}}([0,1])$) est dit positif si $\forall f \geqslant 0$, on a $A(f) \geqslant 0$.

3) i) montrer que si A est un endomorphisme positif de $\mathcal{C}^0_{\mathbb{R}}([0,1])$, alors $\forall f \in \mathcal{C}^0_{\mathbb{R}}([0,1])$, $|A(f)| \leqslant A(|f|)$

ii) soit $f \in \mathcal{C}^0_{\mathbb{R}}([0,1])$ et $\varepsilon > 0$ fixés : montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x, y \in [0,1]$, on a

$$|f(x)-f(y)| \leq \varepsilon + \alpha (x-y)^2$$

iii) en déduire que, pour tout endomorphisme A de $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}([0,1])$, on a

$$\forall y \in [0,1], \qquad |A(f) - f(y)\cdot A(1)| \leq \varepsilon A(1) +$$

$$+ \alpha \cdot \left(A(x^2) - 2y \cdot A(x) + y^2 \cdot A(1) \right).$$

4) Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'endomorphismes de $\mathcal{C}^0_{\mathbb{R}}([0,1])$ telle que

a) $\forall n$, A_n est positif.

b) les suites $(A_n(1))$, $(A_n(x))$ et $(A_n(x^2))$ convergent uniformément sur $[0,1]$ respectivement vers 1, x et x^2.

i) montrer que la suite $\left(A_n(x^2) - 2x\cdot A_n(x) + x^2 A_n(1) \right)$ converge uniformément vers 0 sur $[0,1]$.

ii) montrer que, $\forall f \in \mathcal{C}^0_{\mathbb{R}}([0,1])$, la suite $(A_n(f))$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

5) déduire de tout cela <u>le théorème de Weierstrass</u> : toute fct continue sur $[0,1]$ est limite uniforme d'une suite de polynômes.

Corrigé du problème n° 10

Exercice 1 : on adopte les notations de l'exercice 1 du problème 2 :

la mise en équation conduit à l'EDO d'ordre 2

$$\rho\rho'' + (k-1)\rho'^2 + k\rho^2 = 0$$

où ne figure pas la variable θ : on pose donc

$\rho' = f(\rho)$: $\rho'' = f'(\rho)\cdot\rho'$ et l'EDO devient

$$\rho f f' + (k-1) f^2 + k\rho^2 = 0$$

en posant $g = f^2$, on obtient une EDO linéaire d'ordre 1 :

$$\rho g' + 2(k-1) g = -2k\rho^2$$

et la méthode de variation de la constante donne, pour $k \neq 0$

$$g(\rho) = \rho^{2-2k}\left(B^2 - \rho^{2k}\right) \quad , \text{avec } B \in \mathbb{R}$$

soit

$$\rho' = \pm \rho^{1-k}\sqrt{B^2 - \rho^{2k}}$$

qui donne, par quadrature $\rho^k(\theta) = \pm B \sin\left(\frac{\theta-\theta_0}{k}\right)$:

modulo une similitude, la solution est du type

$$\rho^k = \sin\theta$$

($k=2$ donne <u>une lemniscate</u>; $k=-\frac{1}{2}$ <u>une parabole</u>, $k=\frac{1}{2}$ <u>une hyperbole</u>)

Tandis que $k=0$ conduit à l'EDO $\rho\rho'' - \rho'^2 = 0$

qui s'intègre par double quadrature, pour donner <u>une spirale logarithmique</u> $\left(\rho = C e^{\theta-\theta_0}\right)$.

<u>Exercice 2:</u> les équilibres s'obtiennent en résolvant le système

$$\begin{cases} x^2 y = 0 \\ x(1-y^2) = 0 \end{cases}$$

ce qui conduit aux points de l'axe Oy. On a bien

$$x^2y \cdot \frac{\partial V}{\partial x} + x(1-y^2) \cdot \frac{\partial V}{\partial y} = x^2 y \cdot \left(2x(y^2-1)\right) + x(1-y^2)(2x^2y) = 0$$

La trajectoire recherchée est contenue dans la ligne de niveau

$$x^2 \cdot (y^2-1) = 1(-1) = -1$$

ceqi conduit à considérer l'EDO d'ordre 1 :

$$\dot{x} = \pm x^2 \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}$$

qui, par quadrature donne

$$x^2(t) = 1/\cos^2 t$$

d'où, comme $x(0) = +1$, la solution demandée $x(t) = \dfrac{1}{\cos t}$

définie pour $|t| < \pi/2$, tandis que $y(t) = \dfrac{\dot{x}}{x^2}(t) = \sin t$.

Exercice 3 : $y(x) = \sum_0^\infty a_n x^n$ solutionne l'EDO si

$$(n+2)(n+1)\, a_{n+2} = (n-3)(n+4)\, a_n$$

or, compte-tenu des données initiales, $a_0 = 0$, $a_1 = 3 \ldots$ ceqi

donne $y(x) = -5x^3 + 3x$.

Problème 1 :

1) $f(z)$ est défini sur $\mathbb{C} \setminus]1, +\infty[$: comme

$$\frac{e^{-\alpha/x}}{|e^x - z|\, x^{3/2}} \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{e^{-x}}{x^{3/2}} \underset{(+\infty)}{=} O\left(\frac{1}{x^2}\right)$$ l'intégrale converge

absolument en $+\infty$, tandis qu'en $0+$, et pour $z \notin]1, \infty[$

$$\left|\frac{e^{-a/x}}{(e^x-z)\,x^{3/2}}\right| \leqslant \frac{e^{-a/x}}{|e^x-|z||.x^{3/2}} \xrightarrow[(x\to 0+)]{} 0$$ par croissance comparée

ce qui montre que l'intégrand se prolonge par continuité.

Pour z réel >1, l'intégrale diverge logarithmiquement.

2) pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $g_n(z)=\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{n}\frac{e^{-a/x}}{e^x-z}\cdot\frac{dx}{x^{3/2}}$ est

de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty,1[$ (la fonction $(x,z)\mapsto\dfrac{e^{-a/x}}{e^x-z}\cdot\dfrac{1}{x^{3/2}}$

étant $\mathcal{C}^1$ sur $]0,\infty[_x\times]-\infty,1[_z$) et, $\forall z<-1$, on a

$$g_n'(z)=\int_{\frac{1}{n}}^{n}\frac{e^{-a/x}}{(e^x-z)^2}\cdot\frac{dx}{x^{3/2}}.$$ De plus, pour $z\leqslant -1-\varepsilon$

avec $\varepsilon>0$, on a $0<\dfrac{e^{-a/x}}{(e^x-z)^2x^{3/2}}<\dfrac{e^{-a/x}}{(e^x-(1-\varepsilon))^2x^{3/2}}=\varphi_\varepsilon(x)$

où l'intégrale $\displaystyle\int_0^\infty\varphi_\varepsilon(x)\,dx$ converge : ceci permet de voir

que $g_n' \xrightarrow[(n\to\infty)]{u} g_\varepsilon$ sur $]-\infty,-1-\varepsilon]$ avec

$$\forall z<-1,\quad g_\varepsilon(z)=\int_0^\infty\frac{e^{-a/x}}{(e^x-z)^2x^{3/2}}\,dx$$

Il en résulte que f est $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty,-1[$, avec $f'(z)=\cdots$

C5

3) La fonction F est continue sur $\mathbb{R}$ (: chaque fonction

$$F_n(\alpha) = \int_0^n e^{-(x^2+\alpha^2/x^2)}dx$$ l'est, et $F_n \xrightarrow[(n\to\infty)]{u} F$ sur $\mathbb{R}$)

De plus, chaque fct F_n est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$F_n'(\alpha) = -2\alpha \int_0^n e^{-(x^2+\alpha^2/x^2)} \frac{dx}{x^2}$$

et, comme

$$0 < \int^{\infty} e^{-(x^2+\alpha^2/x^2)} \frac{dx}{x^2} < \frac{1}{n^2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

la suite $(F_n')_n$ converge uniformément sur tout cpt de $\mathbb{R}_\alpha$:

<u>F est donc dérivable</u> avec

$$F'(\alpha) = \int_0^{\infty} -2\alpha . e^{-(x^2+\alpha^2/x^2)} \frac{dx}{x^2} \quad , \alpha \in \mathbb{R}$$

<u>Pour $\alpha > 0$</u>, le changement de variable $y = \frac{\alpha}{x}$ donne alors

$$F'(\alpha) = -2\int_0^{\infty} e^{-(\alpha^2/y^2+y^2)} dy = -2F(\alpha)$$

d'où $F(\alpha) = C\, e^{-2\alpha}$, $\alpha > 0$ avec

$C = F(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$: $\forall \alpha \geq 0$, $F(\alpha) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2\alpha}$.

4) il s'agit de justifier l'intégration terme à terme suivante :

$$\int_0^\infty e^{-\frac{a}{x}} \cdot \sum_{n\geq 0} e^{-(n+1)x} z^n \cdot \frac{dx}{x^{3/2}} =$$

$$\sum_{n\geq 0} \int_0^\infty e^{-\left((n+1)x + \frac{a}{x}\right)} \frac{dx}{x^{3/2}} \cdot z^n$$

car il vient ensuite, $\forall n \geq 0$

$$\int_0^\infty e^{-\left((n+1)x+\frac{a}{x}\right)} \frac{dx}{x^{3/2}} = \frac{2}{\sqrt{a}} F\left(\sqrt{(n+1)a}\right)$$

par les changements de variable $x = y^2$ puis $y = \frac{\sqrt{a}}{x}$.

Mais comme $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-a/x}}{e^x - |z|} \frac{dx}{x^{3/2}}$ converge pour $|z| < 1$,

on justifie classiquement par convergence dominée.

5) f_a est continue sur le disque $\overline{D}(0;1)$, tandis que la série entière obtenue en 4) converge pour $z = 1$: on conclut donc à l'égalité demandée avec le théorème d'Abel.

Problème 2 :

1) $\varphi(t) = \left(1 + xt + x\frac{t^2}{2} + O(t^3)\right)^n$

$$= 1 + nxt + \left(n\frac{x}{2} + \frac{n(n-1)}{2}x^2\right)t^2 + O(t^3)$$

donc $\varphi(0) = 1$, $\varphi'(0) = nx$, $\varphi''(0) = nx\left(1 + (n-1)x\right)$

d'autre part, avec Newton, $\varphi(t) = \sum_{j=0}^{n} C_n^j (1-x)^{n-j} x^j e^{jt}$

donc, par dérivation terme à terme

$$\sum_{j=0}^{n} C_n^j (1-x)^{n-j} x^j = 1$$

$$\sum_{j=0}^{n} C_n^j (1-x)^{n-j} x^j . j = \varphi'(0)$$

$$\sum_{j=0}^{n} C_n^j (1-x)^{n-j} x^j . j^2 = \varphi''(0)$$

En comparant, il vient donc $B_n(1) = 1$

$B_n(x) = x$

$B_n(x^2) = \frac{1}{n}x + \frac{n-1}{n}x^2$.

2) d'après 1), $\left| B_n(x^2) - x^2 = \frac{x - x^2}{n} \right| \leq \frac{1}{n}$, $\forall x \in [0,1]$.

3) i) comme $-|f| \leq f \leq |f|$, il vient l'encadrement

$$-A(|f|) = A(-|f|) \leq A(f) \leq A(|f|)$$

d'où la conclusion.

ii) d'après le théorème de Heine, il existe $\delta_\varepsilon > 0$ tel que C8

$$\forall x, y \in [0,1],\ |x-y| \leq \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \varepsilon$$

d'autre part, $F(x,y) = \dfrac{f(x)-f(y)}{(x-y)^2}$ est une fonction continue sur le compact $K_\varepsilon : [0,1]_x \times [0,1]_y$, $|x-y| \geq \delta_\varepsilon$ et y est donc bornée : $\alpha = \sup_{K_\varepsilon} |F|$ convient.

iii) d'après i) et ii) !

4) i) les fonctions x et x^2 étant bornées sur $[0,1]$, la suite converge uniformément sur $[0,1]$ vers la fonction

$$x^2 - 2x \cdot x + x^2 = 0$$

ii) d'après 3) iii) écrit pour A_n et i), on a

$$\forall y \in [0,1],\ |A_n(f) - f \cdot A_n(1)|(y) \leq \varepsilon A_n(1)(y) +$$

$$+ \alpha \left(A_n(x^2)(y) - 2y \cdot A_n(x)(y) + y^2 \cdot A_n(1)(y) \right)$$

et la conclusion suit en faisant $n \to \infty$.

5) –