université NANCY 1

I.R.E.M. DE LORRAINE

Contribution au nouvel élan : enseigner l'essentiel en mathématiques

fascicule 1

Préambule

Ce fascicule est une prépublication, autrement dit une publication de type I dans la nouvelle classification de l'ADIREM. Plus exactement ce n'est qu'un premier fascicule qui sera suivi d'autres, dans une stratégie incrémentale ou chaque nouveau fascicule corrige et complète le précédent.

Ce contenu de ce fascicule a certes déjà fait l'objet de regards extérieurs, même extérieurs aux IREM et à la discipline. Il ne faut pas cacher le fait que la réaction a pu être négative, le ton polémique n'étant pas nécessairement apprécié de tous. Il a été tenu compte autant que possible des remarques positives, on a corrigé quelques erreurs manifestes et adouci légèrement le trait. Il reste que la vision très noire de la situation d'aujourd'hui qu'on y décrit demeure et pourra donc choquer certains.

De toute façon il aurait été trop tôt pour demander une analyse extérieure cohérente. Ce sera fait lorsque les deux fascicules complémentaires ont été écrits, à savoir en principe dès la fin de l'année civile.

J.-P. Ferrier
rédacteur du fascicule 1
5 septembre 2003

Préambule

Ce fascicule est une prépublication, autrement dit une publication de type I dans la nouvelle classification de l'ADIREM. Plus exactement ce n'est qu'un premier fascicule qui sera suivi d'autres, dans une stratégie incrémentale ou chaque nouveau fascicule corrige et complète le précédent.

Ce contenu de ce fascicule a certes déjà fait l'objet de regards extérieurs, même extérieurs aux IREM et à la discipline. Il ne faut pas cacher le fait que la réaction a pu être négative, le ton polémique n'étant pas nécessairement apprécié de tous. Il a été tenu compte autant que possible des remarques positives, on a corrigé quelques erreurs manifestes et adouci légèrement le trait. Il reste que la vision très noire de la situation d'aujourd'hui qu'on y décrit demeure et pourra donc choquer certains.

De toute façon il aurait été trop tôt pour demander une analyse extérieure cohérente. Ce sera fait lorsque les deux fascicules complémentaires ont été écrits, à savoir en principe dès la fin de l'année civile.

J.-P. Ferrier
rédacteur du fascicule 1
5 septembre 2003

Introduction

Le présent document est une première tentative pour définir en quoi peut consister cet *essentiel* que l'on cherche à enseigner en mathématiques. Sa fonction est de faire réagir, soit en enrichissant le discours soit en montrant certains écueils, et en s'appuyant dans les deux cas sur ce tout qui a pu être écrit par les uns et les autres et sur l'expérience des IREM bien sûr.

Pour commencer on aborde principalement le *collège* et le *lycée scientifique.* C'est en effet là que le travail des IREM est le plus riche et le plus facilement accessible. On part d'un constat, certes non unanime, celui d'un enseignement des mathématiques qui serait *sinistré.* Ce constat est fait lui-même de plusieurs éléments. Le premier, et le plus important, est le fait qu'un élève puisse traverser toute sa scolarité, et même réussir, sans ne jamais rien *comprendre.* Bien sûr il est difficile de s'entendre sur le sens de comprendre; en revanche on s'accordera aisément sur ce que signifie ne rien comprendre du tout. Si l'on se réfère à l'étymologie, et donc aux racines *cum* et *prehendere*, on pense à l'incapacité de relier entre eux les divers aspects, le savoir se résumant à un réflexe concernant chacun pris isolément.

Un autre élément du constat est lié au contenu de l'enseignement. On ne peut en nier l'importance, quel que soit le mode de construction du savoir auquel on se réfère. Malheureusement le contenu actuel de l'enseignement des mathématiques au collège ou au lycée est fondamentalement *incohérent* en plusieurs occasions. C'est le cas pour la géométrie du collège de laquelle on discutera en détail. Le paradoxe est que la présentation choisie conduit à bâtir de prétendues démonstrations en se fondant sur une observation passive. A ce compte-là on aurait pu observer directement le résultat. C'est un peu comme ce commerçant qui vendait les brosses qu'il assemblait après avoir volé le bois et le crin et qui ne s'était pas rendu compte qu'il pouvait aussi voler des brosses toutes faites.

La présentation des limites et dérivées au lycée est tout aussi incohérente. On balance des définitions abstraites dans lesquelles un mathématicien aura beaucoup de peine à se reconnaître et qui ne voudront strictement rien dire à un élève. Partant de là on admet tout, énonçant des théorèmes qui ne peuvent avoir de sens et qu'il faut donc accepter comme des *mystères*, c'est-à-dire des vérités partiellement révélées. Le tout est barbouillé d'une rigueur formelle parfaitement stérilisante.

Cette incohérence du contenu n'est malheureusement pas le fait de quelques initiatives malheureuses. Surtout il n'est pas dû au souci de se mettre à la portée des élèves, auquel cas on comprendrait volontiers que tout ne soit pas forcément expliqué en détail. C'est simplement le fait de l'inclination fort répandue consistant à tenter de singer le discours rigoureux d'un traité mathématique. La transposition didactique consiste alors à vider le discours de toute sa substance. C'est un peu comme un poème dont on n'écrirait que les rimes.

Derrière cela se cache un *contresens* majeur sur ce qu'il faut entendre par des mathématiques. Pour cette raison on commencera par en discuter. Comment pourrait-on chercher l'essentiel si l'on ne sait pas de quoi?

On ira pour finir jusqu'à parler de *programmes*. Il ne s'agit pas de faire le travail des comités qui en ont été chargés. Aussi n'ira-t-on pas dans le détail, se contentant d'esquisses. Par exemple, dans un premier temps, on parlera d'un programme pour le collège et d'un programme pour le lycée scientifique. Le rôle que l'on attend de ces programmes n'est pas qu'il encadre rigoureusement l'activité. Bien au contraire il s'agira de *permettre* que l'on enseigne autrement. Car si l'on commence par dire que l'important n'est pas les programmes, chacun aura compris que l'on ne veut pas y toucher. Alors on ne pourra strictement rien faire. Dans le cadre des programmes actuels, nous dira-t-on, il est impossible de faire autrement que ce qu'on fait. Il est donc très important de dire qu'on va tourner autour des programmes jusqu'à ce qu'ils s'effondrent comme les murailles de Jéricho.

Bien sûr l'entreprise ne fait pas table rase de la réflexion développée dans et hors des IREM. On constatera qu'on fait allusion aux travaux de la CREM. Sans doute ce premier jet n'a-t-il pas intégré tout ce qui pouvait l'être.

De même ne s'agit-il pas de partir en guerre contre des comités de programmes. Le moment venu les IREM pourraient très bien collaborer avec eux. De même seront-ils attentifs à toutes les réactions des institutions concernées.

Il y a un point important qui nous rend la tâche particulièrement difficile. Pour ce qui est du collège, comme du lycée scientifique, il faut penser à des programmes souples, adaptables à la diversité des objectifs et des capacités de chacun. Au collège, ce fameux "collège unique" devenu "collège pour tous", on doit aussi bien considérer ceux qui en attendent une variante de l'ancien certificat d'études primaires que ceux qui veulent poursuivre des études scientifiques. Au lycée on ne peut pas faire d'hypothèse quand à l'organisation future, avec des programmes complémentaires comme aujourd'hui ou des classes distinctes — MPC et PCB par exemple — un peu comme hier.

Revenons pour terminer sur l'essentiel. Il ne s'agit pas de réduire pour réduire mais de se plier à au moins un grand *principe*. La connaissance scientifique n'est pas fondée sur l'argument d'autorité; elle procède de la conviction et la critique. Pour cette raison il est important de tout démontrer. On verra qu'on peut faire des démonstrations rigoureuses sans partir nécessairement de définitions formalisées. En revanche présenter des définitions incompréhensibles et admettre les résultats les plus fondamentaux n'est jamais acceptable.

Essence

Avant de rechercher l'*essentiel*, on va se demander en quoi consiste l'*essence* des mathématiques. Pour cela on va s'appuyer sur des réflexions de Rudoplh Bkouche à propos de la géométrie, complétées par la vision communiquée par Jean Dhombres. Il ne s'agit pas de faire de l'*histoire* des sciences. On cherche les origines des mathématiques sur un plan strictement logique, dans une approche purement *épistémologique*. Cependant la construction des idées s'étant faite dans le temps, l'explication rencontrera en partie l'histoire.

Le mot mathématique lui-même vient du mot grec

$$\mu\alpha\theta\eta\mu\alpha$$

qui désigne l'étude, la science, la connaissance. On retrouve la même racine dans la

$$\mu\alpha\theta\eta\sigma\iota\varsigma$$

qui est l'action d'apprendre, de s'instruire, ou encore dans la $\mu\alpha\theta\eta\tau\epsilon\iota\alpha$ qui est l'instruction que l'on reçoit d'un maître.

Cela réfère à l'enseignement que le maître transmet par le discours, à savoir le discours hypothético-déductif, par apposition à l'enseignement artistique par exemple. Souvent d'ailleurs cela se fait dans un dialogue. Ce n'est pas une grave entorse que d'y faire entrer le "débat scientifique" que certains préconisent aujourd'hui.

Ainsi, pris au sens originel, le mot *mathématique* est-il exactement synonyme de celui de *science*, pris au sens moderne cette fois. De fait l'étude de la nature est devenue scientifique à mesure qu'elle a intégré le discours hypothético-déductif, c'est-à-dire à mesure qu'elle s'est mathématisée. Cela a commencé par l'arithmétique, a suivi par la géométrie. Aujourd'hui cela comprend bien sûr toute la physique et bien au-delà. Prendre comme slogan

l'unité de la Science

n'est que reconnaître cette construction commune. Cela n'est pas sans avantage. Y-a-t'il besoin d'insister sur l'utilité de la Science? Les physiciens se croient-ils sans cesse obligés d'expliquer l'utilité de leur discipline?

Dans le même ordre d'idées, on se croit obligé d'expliquer aux lycéens que les mathématiques ne sont pas une science morte alors que la question n'est simplement pas posée pour la physique ou la biologie. Or il est bien difficile d'expliquer de façon convaincante qu'il y a encore des mathématiques à faire. L'exemple du théorème de Fermat, dont l'énoncé est accessible à tous, est mauvais. Il relève du challenge comme, pour reprendre une image donnée par Hilbert, celui consistant à envoyer une mouche sur la lune. En revanche il faudrait expliquer aux élèves que les mathématiques sont une partie indétachable de la Science, et le montrer chaque jour dans l'enseignement.

Revenons à l'essence des mathématiques, en prenant cette fois le terme dans le sens moderne. Il reste qu'il est impossible de distinguer les mathématiques dans la Science par opposition à d'autres disciplines. Il n'y a pas de frontière. D'ailleurs la géométrie (euclidienne) fait partie des mathématiques, comme la mécanique dans un passé récent alors que l'optique géométrique faisait partie de la physique. Aujourd'hui la mécanique est laissée à la physique, alors que la mécanique classique n'est que l'addition d'une dimension supplémentaire de temps. Quant à la mécanique relativiste, c'est une (autre) géométrie.

Tout au plus peut-on admettre que certains traits sont plus présents en mathématiques qu'ailleurs. On pourrait dire que les mathématiques couvrent des spécialités dont les racines sont plus anciennes, sans que cela soit péjoratif, mais cela risquerait d'être mal interprété. La théorie des probabilités est-elle ancienne?

Plus logiquement les mathématiques se manifestent par leur côté plus général et plus abstrait. Pour autant cela n'empêche pas la physique de rechercher une approche générale ou unificatrice. Les mathématiques sont moins directement confrontées au monde réel, mais n'en sont pas séparées pour autant parce que fortement inspirées par la physique. Tout est donc une question de degré et aussi de convention, puisqu'il faut spécialiser de plus en plus pour avancer et donc établir des divisions administratives dans la société scientifique. La vision élargie est réservée à quelques élites. Dans une discussion à propos de la recherche européenne, on avançait l'idée qu'il fallait des architectes. Aujourd'hui les physiciens théoriciens sont les mieux placés. Il est dommage que les mathématiciens n'aient pas cette ambition. Il est tout aussi triste qu'à propos d'un regroupement envisagé entre les deux spécialités dans le Comité national de la recherche scientifique les mathématiciens aient pu dire que "cela leur poserait des problèmes" pendant que les physiciens disaient que "cela ne leur poserait aucun".

La façon dont les physiciens théoriciens situent les mathématiques est certainement beaucoup plus fine que celle que prônent les mathématiciens eux-mêmes. Par exemple Roger Balian nous rappelle l'affirmation de Galilée selon laquelle "l'univers est écrit en langue mathématique et ses caractères sont des figures géométriques", pour insister sur le fait que la physique moderne ne peut pensée et comprise sans le langage mathématique. Cela n'est pas le fait du hasard puisque ce langage a progressé avec l'avancée de la physique. C'est beaucoup plus qu'un simple échange. On peut même dire que les mathématiques sont "forcées" par la physique. L'exemple du calcul différentiel et intégral en est l'exemple le plus simple. Pour renforcer la preuve, il suffit de se se souvenir que, pendant que se construisait ce dernier en Europe, les mathématiques japonaises, séparées de tout lien avec la physique, s'enfermaient dans une impasse.

En particulier "la déraisonnable efficacité des mathématiques" dont parle Wigner n'est pas surprenante du tout. Ce qui est peut-être trop raisonnable, et donc déraisonnable d'une certaine façon, c'est que la nature se laisse décrire de manière aussi unitaire, à moins que ce soit notre cerveau humain qui ne nous permette pas de la comprendre autrement.

Maintenant, ce qui apparaît aujourd'hui entre mathématiques et physique comme une imbrication faite de liens indissolubles, est régi par une sorte de matrice. D'une part chaque question de physique fait appel à tout un ensemble d'outils mathématiques. D'autre part chaque outil mathématique intervient dans un grand nombre de problèmes de physique. C'est cela qui va finalement imposer une certaine spécialisation, le physicien ayant besoin de connaître des mathématiques alors que le mathématicien pourra ne faire le lien avec à la physique que de temps à autre. Cela explique que la proximité des disciplines ait pu connaître des variations suivant les époques. Tantôt les mathématiques ont besoin de remettre un peu d'ordre dans leur foisonnement et elles ont tendance à s'isoler. Tantôt elles ont besoin de se resourcer et elles se rapprochent de la physique, comme c'est le cas depuis quelques décennies.

Remarquons que le mot de *synergie* employé par ceux qui défendent la relation privilégiée entre ces disciplines n'est même pas assez fort. On parle de synergie entre deux actions distinctes qui se mettent ensemble pour augmenter leur efficacité. Peut-on parler de synergie entre le coeur et le poumon dans un organisme?

Pour revenir à la spécialisation évoquée plus haut, les mathématiques sont la partie de la Science qui s'enseigne par excellence car, comme disait Jacques Louis Lions, l'impératif d'économie impose d'enseigner d'abord ce qui est général. En même temps ce privilège implique une grande responsabilité, puisque ce qui est visé est non la formation mathématique en particulier mais la formation scientifique en général. Aussi, même si les autres scientifiques peuvent avoir l'impression que les mathématiques ne plutôt moins mal enseignées que leur propre discipline, le fait que l'enseignement des mathématiques soit aujourd'hui coupé de celui de la physique fait porter sur les mathématiques la responsabilité principale de la désaffection pour les sciences.

Intéressons-nous à l'enseignement général de base, au "collège unique" ou même au lycée. On ne peut y faire figurer suffisamment de mathématiques et de physique pour qu'y apparaisse la matrice de liens dont on a parlé. Il faut alors voir la Science un peu comme à sa genèse, où la distinction entre mathématiques et physique n'existait pas. En tout cas il serait absurde que les mathématiques et la physique ne parlent pas la même langue. C'est pourtant bien le cas, et des travaux des IREM de Strasbourg et de Limoges l'attestent. Autrement dit, alors que la confusion entre disciplines devrait être plus grande à ce niveau que dans la recherche de pointe, c'est le contraire qui se passe. Il est vrai qu'il y a parfois des habitudes différentes entre la notation utilisée en physique et celle présentée en mathématiques. Une confrontation honnête aboutit cependant toujours au même résultat : c'est le client, donc le physicien, qui a raison.

Résumons-nous. On peut aussi bien dire que la physique fait partie des mathématiques que dire, comme Arnold, que les mathématiques font partie de la physique. Dans le premier cas la physique est chargée de la confrontation avec le monde réel, dans le second les mathématiques sont chargées de concevoir des outils efficaces. Vu du côté des mathématiques, c'est la seconde formulation qu'il faut choisir, pour s'astreindre à un peu d'humilité.

Une conséquence de ce qui précède est qu'il parfaitement absurde d'affirmer que les mathématiques *s'appliquent* aux autres sciences.

De même est-il absurde de parler d'*interdisciplinarité* entre mathématiques et physique par exemple. Les deux disciplines sont si indissociablement liées qu'elles ne sauraient avoir besoin d'interdisciplinarité. Si le besoin s'en fait sentir aujourd'hui c'est simplement parce qu'on a oublié les fondements de la science. Parce que dans l'enseignement — mais pas la recherche heureusement — les deux disciplines se sont séparées et continuent de dériver, mais plus vite que les continents.

Il y a trente ans les deux premières années d'université savaient équilibrer l'enseignement de mathématiques et celui de physique sous l'étiquette MP/PM. Aujourd'hui on peut faire toute scolarité à l'université en mathématiques sans ne jamais voir de physique. En conséquence il est illusoire d'illustrer un concept mathématique par la physique. Par exemple de parler de l'énergie d'une corde vibrante, de sa répartition dans les modes ... à propos des séries de Fourier.

Pour parler du lycée, regardons comment était traitée il y a trente ans l'optique géométrique dans un livre de la classe de Sciences expérimentales. Ce n'est pas de la physique palpitante, mais les limites du modèle sont bien expliquées. Surtout le traitement ne diffère pas d'un iota de celui qu'on aurait trouvé dans un livre de mathématiques. A l'inverse la cinématique faisait encore partie du programme de mathématiques. On étudiait le mouvement des planètes et la figure d'équilibre d'un pont suspendu, d'une chaînette ...

L'interdisciplinarité existe, mais ailleurs, dans ce qu'on peut appeler une *équipe intégrée* où se côtoient, réellement ou virtuellement, différents spécialistes. La recherche de pointe en fait usage, comme l'industrie. Pour autant l'interdisciplinarité n'est pas une passerelle entre des spécialités séparées par un fleuve.

Bien sûr il y a une différence dans le rapport à la vérité. En physique la référence est le monde réel; en mathématiques c'est la cohérence logique interne.

Cependant, même dans ce cas, les choses sont ne sont pas complètement tranchées. La physique aussi a besoin de cohérence interne. Que faudrait-il penser d'une physique qui serait régie par un million de lois, éventuellement contradictoires? Evidemment cette cohérence dont la physique a besoin lui est en grande partie fournie par le langage mathématique.

D'un autre côté les mathématiques ne sont pas coupées du monde physique. Le mathématicien n'a pas besoin de faire le lien en permanence et il le fait souvent par physicien interposé. Pourtant la référence transparaît, même dans les mathématiques les plus pures, pour conduire l'imagination en apportant du sens.

Il faut surtout retenir l'énorme responsabilité qui incombe aux mathématiciens au sein de la Science, et qui est celle de garantir la cohérence logique du langage qu'ils ne cessent de faire progresser. Aussi les mathématiques ne peuvent-elles s'imaginer sans l'exigence permanente de la démonstration. A partir de quelques hypothèses sur lesquelles on se sera entendu sans équivoque, tous les résultats énoncés doivent avoir été démontrés. Une seule exception détruirait tout l'édifice.

Cela ne signifie pas que tout doive être formalisé. Chacun sait que le formalisme s'accompagne souvent d'une perte de sens. On peut se permettre des démonstrations heuristiques, qui sont souvent les ébauches de démonstrations complètes dont elles ont déjà toutes les idées. En revanche admettre un énoncé en le qualifiant de propriété intuitive est contraire à la règle. Surtout quand il s'agit d'admettre tout un tas de telles propriétés au milieu d'un discours parfaitement formalisé. C'est la *structure en gruyère* que déplore Jean-Pierre Demailly et qui est souvent la règle aujourd'hui, au collège comme au lycée.

Le caractère indissociable des mathématiques et de la physique doit induire un large recouvrement dans l'enseignement de l'une et de l'autre. L'enseignant de physique a de toute façon besoin de faire des mathématiques. Il faut que celui de mathématiques ne répugne pas de faire un tout petit peu de physique à l'occasion.

Cependant il ne faut pas verser dans un mélange total des genres. On peut considérer que physique et mathématiques constituent *deux moments distincts* de l'esprit.

Bien des démonstrations heuristiques sont ainsi qualifiées à tort de *magouilles de physicien.* Il s'agit le plus souvent de démonstrations non formalisées, mais parfaitement mathématiques.

On sait que les enseignants physiciens arrivent très souvent à expliquer les notions mathématiques dont ils ont besoin bien avant que leurs homologues mathématiciens n'osent s'y attaquer. Ils n'ont pas peur d'avancer car ils ne sont pas tétanisés par une exigence très souvent stérilisante de rigueur. Cette précocité des explications données par les physiciens est à mettre en parallèle avec le fait que l'éclosion d'idées et de notions nouvelles leur incombe le plus souvent.

Que les enseignants mathématiciens prennent donc un peu de l'exemple de leurs collègues ! Il leur restera de la place pour le formalisme et la rigueur.

En effet le procédé heuristique est licite la première fois qu'on y fait appel. Cependant il exige un effort d'intuition qu'il faudra renouveler à chaque nouvelle application. Et chercher à rendre les choses correctes sera toujours aussi délicat. A partir d'un certain moment le formalisme devient plus efficace. Celui qui l'utilisera aura l'impression de mieux *comprendre*, dans le sens de prendre davantage de choses ensemble. C'est donc une question d'usage. Celui qui voudra aller plus loin ou plus haut devra disposer d'outils plus sûrs, comme le voyageur d'une voiture plus puissante, le perchiste d'une perche plus dure.

Par ailleurs ce n'est pas se placer dans un *contexte physique* que d'introduire un cours de mathématiques par un exposé de physique uniquement pour écrire une équation ou utiliser un tableau de valeurs que l'on considèrera ensuite en oubliant complètement leur origine. Il faut au moins que l'introduction soit suffisamment intégrée pour guider l'intuition dans les raisonnements abstraits qui vont suivre et il convient de commenter le résultat dans le contexte de départ. Cela vaut bien sûr pour les autres sciences expérimentales comme la biologie ou pour les sciences économiques.

***

Essayons de comprendre par quel chemin on en est arrivé, dans l'enseignement des mathématiques — mais pas dans la recherche — à des pratiques si contraires à ce qu'on a présenté comme étant l'essence de la discipline.

En fait le point de départ est simple, et très humain. Les mathématiques sont déjà difficiles; pourquoi s'embarrasser de la Science en général dans leur enseignement? Autrement dit on va jouer

les mathématiques pour elles-mêmes .

Un premier avantage est que va pouvoir se développer le *formalisme* sans souci de son éventuelle légitimité ou utilité. Comme le programme ERMEL pour l'école élémentaire le disait il y a une trentaine d'années, faire des mathématiques n'est rien d'autre que parler un *langage formel*. Le document d'accompagnement du programme de terminale S, aujourd'hui, n'annonce-t-il pas comme souhaitable pour chaque élève, quel que soit son niveau, d'avoir vu à l'occasion la place et l'intérêt d'une définition formalisée?

Le développement du formalisme est venu de la croyance erronée, extrapolée du discours de Piaget, suivant laquelle la construction du sens se faisait chez l'enfant de façon semblable à la construction mathématique consistant à partir de structures faibles et à leur ajouter progressivement de l'épaisseur. Si l'on avait conservé le contact avec la physique, il aurait été évident au contraire qu'il faut, pour citer Philippe Lombard, toujours partir "d'un concept à l'état brut, avec ses complexités et sa richesse, presque tel qu'il s'impose à l'observation première. A l'étude d'en percer quelques secrets, par la fréquentation des images, par l'exploration de situations inattendues, par le choix d'éclairages particuliers susceptibles de faire apparaître des relations cachées entre des cas de figure apparemment très différents".

Il n'est d'ailleurs pas étonnant que, pour tenter de pallier à l'absence totale de sens entraînée par l'adoption du formalisme, l'on ait tenu un double langage où une droite et un plan "physiques" voisinent la droite et le plan "mathématiques". On ne peut pas dissocier le choix du constructivisme structural de la méfiance généralisée pour la physique.

Malheureusement les travers dénoncés lors de l'introduction des mathématiques modernes sont toujours là, et ce malgré le "retour vers le concret" prôné il y a une douzaine d'années. En particulier la description suivante, donnée par Philippe Lombard à l'époque, est toujours d'actualité, avec "l'inflation du vocabulaire, l'accumulation des mots techniques, le pointillisme obsessionnel des définitions, le malin plaisir pris à redéfinir tous les mots du langage courant pour leur assigner un sens réservé aux initiés, l'intérêt maladif pour élever au rang de résultats des évidences dérisoires, l'incapacité à expliquer en langage commun des propositions impénétrables ...". Seul le pointillisme des définitions est-il peut-être un peu moins obsessionnel, encore que l'on puisse discuter. Le souci de donner des définitions un peu moins formelles a conduit à un exercice d'équilibre qui ne laisse plus aucune liberté dans l'expression.

Quelques efforts ont donc été faits, mais avec des résultats décevants car on n'a pas corrigé le choix constructiviste de départ. On a bien effacé les signes les plus visibles du formalisme, ce qui a conduit de fait à un discours encore plus impénétrable. On a amplifié le double langage en prétendant appuyer les définitions abstraites sur des présentations intuitives, alors que ces dernières n'ont aucun lien avec les premières.

Il ne faut pas minimiser, à propos du formalisme, la satisfaction vécue par les professeurs. Ils ont l'impression d'être les dépositaires d'une rigueur que chacun leur envie. Quand il ne leur reste rien d'autre à attendre, il s'y accrochent comme à une bouée.

En même temps la nécessité de garantir à la physique la cohérence interne du langage n'est plus. Par conséquent il va être possible de prendre des libertés avec l'exigence de la démonstration. On arrive ainsi à un paradoxe. Alors que le formalisme a été introduit pour permettre des démonstrations plus précises, le formalisme qui se répand aujourd'hui s'empresse de tout admettre.

Aussi n'est-il pas étonnant que l'exercice de la démonstration soit proposé dans des activités hors programme, pour favoriser une "attitude de recherche". Si l'on avait eu l'occasion de démontrer davantage dans le cadre du contenu des programmes, le besoin en eût été moins évident.

Bien sûr la noosphère a senti confusément les inconvénients d'un tel discours vis-à-vis d'une société qui pourrait finir par ne plus payer des gens dont la seule vocation est de se faire plaisir. Elle a fait semblant de rompre avec ces "mathématiques modernes" dont la paternité a été mise sur le compte d'un malheureux Bourbaki qui n'y était pour rien. Elle a même multiplié les gages pour donner le change, allant jusqu'à dire que les mathématiques que l'on enseigne ont changé.

C'est la raison pour la laquelle elle s'est mise à parler d'interdisciplinarité alors qu'on a vu que cela n'avait pas de sens. Ce n'est qu'un artifice pour masquer l'absence d'unité, un alibi pour que se creuse encore plus l'écart entre les disciplines.

La noosphère passe aussi le plus clair de son temps à vanter les applications des mathématiques. Il ne s'agit pas d'une collaboration naturelle à l'intérieur de la Science. Il s'agit d'appliquer les mathématiques indifféremment à toutes les autres sciences et sans aucun intermédiaire. Une interprétation erronée de la "déraisonnable efficacité" que leur attribue Wigner vient conforter leur sentiment d'être au centre de tout. Les autres disciplines ne peuvent pas se parler entre elles. Elles ne peuvent le faire qu'à travers les mathématiques.

Pour cette raison les applications privilégiées sont celles qui utilisent le moins les autres sciences; d'où l'engouement pour les mathématiques de l'ingénieur. Des modèles, en général plus sophistiqués que maîtrisés et validés, y ont montré une réelle efficacité. Peu importe qu'importer dans l'enseignement de base un peu de ces techniques ne soit que le pendant de ces "règles opératoires" dont le formalisme fait grand usage ! C'est la mode. Certains diront que cela renouvelle les mathématiques enseignées à l'école.

A partir du moment où l'idée même d'application des mathématiques n'est que la conséquence d'un contresens, le slogan de la CREM qui regroupe sous le nom de *science mathématique*, les mathématiques pures, les mathématiques appliquées et l'informatique ne peut qu'ajouter à la confusion. On parlera plus loin des rapports avec l'informatique qui, toujours dans l'enseignement, souffrent aussi d'un contresens. Rien que le besoin de regrouper certaines mathématiques avec d'autres qui seraient appliquées, comme de parler d'applications des mathématiques pures, est déjà désolant.

Il semblerait que la CREM ait eu besoin de ce slogan pour réaliser un consensus. Elle aurait utilisé aussi à cette fin l'opposition entre Fourier d'une part et Abel et Jacobi de l'autre sur la finalité des mathématiques. On laisse croire que travailler "pour l'honneur de l'esprit humain" est le trait qui caractérise les mathématiciens purs. Peut-être y pensent-ils plus que d'autres, mais ce trait ne crée pas plus de distinction entre mathématiciens qu'il n'en crée entre les mathématiciens et les physiciens.

***

On va dire un mot de la place de l'informatique dans l'enseignement des mathématiques. Aujourd'hui il faut y voir l'introduction d'outils, comme le moteur de calcul formel *Derive* ou le logiciel de géométrie symbolique *Cabri*, qui viennent compléter les calculatrices toutes simples.

On ne peut pas ignorer l'importance prise, dans l'industrie et aussi dans la recherche, du calcul scientifique, qu'il soit exclusivement numérique comme il l'a longtemps été ou également symbolique. Que le futur citoyen ou le futur technicien ait pu rencontrer ces techniques de façon à ne pas en être, le moment venu, l'esclave, est une exigence qu'une société démocratique peut avancer. Que faut-il faire cependant pour ne pas former de potentiels esclaves? La solution est-elle vraiment se servir des outils cités comme point de départ à toute réflexion, alors qu'il s'agirait de boîtes noires dont on ne connaitrait rien du fonctionnement? Autrement élever ces purs artefacts au niveau de déités qui révèleraient cette incontestable vérité à laquelle on pourrait pas accéder autrement? Il ne suffit pas de montrer quelques situations extrêmes où les calculatrices de base peuvent se tromper pour corriger le tir. D'ailleurs on se montre beaucoup moins critique envers les logiciels de calcul formel ou de géométrie symbolique.

La culture qu'il conviendrait d'inclure dans l'enseignement des mathématiques devrait permettre au moins de désacraliser l'outil informatique en apportant une connaissance minimale de sa mise en œuvre. Cela pourrait passer par une initiation à l'algorithmique. Cependant on ne dira rien à ce sujet car l'introduction d'une telle initiation pose trop de problèmes politiques et techniques aujourd'hui. Sauf à tomber dans un environnement presse-bouton dont l'utilisation irait dans le sens inverse que celui qui est souhaité, il faudrait convenir d'un vrai langage de programmation. Or cela impliquerait l'aval de la communauté des informaticiens et la disponibilité sur des machines effectives. A défaut une utilisation intelligente d'un tableur serait déjà un premier stade.

Au moins pourrait-on donner une idée dont les nombres sont codés et manipulés par un ordinateur. De même, avant toute utilisation éventuelle d'un logiciel de calcul ou de géométrie, devrait-on connaître la façon dont l'ordinateur s'y prend, qui n'est jamais que celle que l'élève apprend un jour en classe, mais en général plusieurs années après. Comment comprendre à ce sujet qu'on ait abandonné l'enseignement de la division alors que c'est un des rares algorithmes que chacun peut maîtriser?

Que dire alors de la tendance actuelle consistant à placer, dans l'enseignement, la bureautique au même niveau que la Science? Le brevet “informatique et internet” va prendre sur l'enseignement fondamental des heures pour un apprentissage qui ne pose de problème à aucun enfant. Pire, il s'agira de familiariser les élèves à un système d'une marque donnée, ce qui revient à vendre à cette dernière notre système éducatif. On sort ici du domaine épistémologique mais il ne faut pas être naïf et feindre d'ignorer quels sont les ressorts qui font marcher les sociétés humaines.

***

Revenons à l'unité de la Science pour nous adresser aux didacticiens. Il semble que la didactique des mathématiques se soit souvent attachée à l'étude de conceptions attachées à un concept donné, en isolant ce dernier de l'ensemble. Mieux encore, en opérant la séparation en registres, elle a fait éclater les concepts en morceaux. Tout cela est normal. C'est la méthode universelle de l'analyse.

Cependant il faudra prendre garde si l'on pratique l'ingénierie pédagogique à partir de l'analyse didactique. On sera naturellement poussé à détailler chaque composant en lui conférant une valeur autonome qui risque contrecarrer la synthèse ultérieure. Cela fait penser au premier tir raté de la fusée Ariane V. On avait testé tous les sous-programmes, mais on avait oublié de tester le programme complet.

A un niveau macroscopique, cela explique en partie la séparation entre disciplines qu'opère l'enseignement. L'inévitable "transposition didactique" dont parle Yves Chevallard pousse à la séparation. Toute notre philosophie est là pour corriger ce défaut. Il faudrait vérifier, par une analyse didactique a priori et après expériences, que notre vision conduit à des usages qui le corrigent effectivement.

A un niveau plus fin, certains concepts finissent par trouver, dans la construction mathématique, un état abouti où ils trouvent un statut unifié. C'est le cas de l'algèbre linéaire qui fait le lien entre géométrie symbolique, géométrie vectorielle et équations, tout en ouvrant d'autres perspectives. C'est aussi le cas pour les nombres, plus simplement, qui peuvent être décimaux ou fractionnaires, sans compter les pourcentages. L'enseignement doit forcément commencer par un bout et donc choisir un registre de départ. L'enrichissement par l'addition de nouveaux registres complique inévitablement la situation. Ce n'est pas grave si tout finit par s'unifier. Cependant tous les élèves du collège, voire du lycée, ne sont pas censés passer par l'université. Aussi est-il important d'opérer la fusion des registres avant chaque sortie possible du monde éducatif, c'est-à-dire en permanence. Nous avons cette prétention. L'analyse didactique devrait s'assurer que c'est bien le cas.

***

La fin de l'egocentrisme

La réforme dite des "mathématiques modernes", qui a laissé des traces non résorbées même si ses aspects les plus visibles ont été gommés, et la tendance actuelle, dont les effets commencent seulement à se faire sentir, ont un point commun, à savoir une vision on ne peu plus egocentrique des mathématiciens à l'intérieur de la Science.

Les "mathématiques modernes" ont été imposées par les mathématiciens sans aucun souci des autres disciplines. Ce n'est pas un hasard si les physiciens en ont pris ombrage, si Pierre-Gilles de Gennes a pu les classer dans les trois grandes catastrophes du siècle passé.

Il y avait une autre erreur. Le caractère structuraliste qui les porte correspond à une logique de production, celle du monde scientifique, et pas à une logique de formation comme cela aurait dû être.

Depuis la société mathématique s'est mise à craindre l'influence, notamment auprès des medias, de quelques scientifiques connus du public. Elle a cherché à reconquérir un pouvoir qu'elle avait largement perdu par sa faute. Plutôt que de faire amende honorable et de chercher alliance auprès de ceux qui l'avaient critiquée, elle a cherché à battre ses concurrents sur leur propre terrain.

C'est ainsi qu'est née une nouvelle tendance, qu'on pourrait qualifier de "mathématiques de l'ingénieur". Il s'agit de promouvoir des mathématiques qui "s'appliquent" directement, notamment au travers de modèles statistiques, sans besoin de la part des sciences expérimentales que d'un apport limité au plus juste, mais sur lequel on bâtira une image interdisciplinaire à grand renfort de publicité.

Ce faisant on commet, au centuple, l'erreur déjà commise à l'occasion des "mathématiques modernes". Les "mathématiques de l'ingénieur" obéissent à une logique de production, pas de formation.

On se trouve aujourd'hui dans une barque doublement chargée et de travers. Le formalisme est toujours présent, avec son rigorisme étroit. Et l'impératif de la "modélisation" s'y est ajouté, avec ses nouvelles exigences.

Comment ne pas souhaiter que les commissions, les IREM, les associations ne commettent pas une nouvelle fois l'erreur commise il y a trente ans dont on n'a pas encore pu se défaire, et s'efforce de suivre pendant les dix ans qui viennent une ligne dont il faudra reconnaître après coup le mal fondé?

La géométrie au collège

Nous en dirons peu de choses dans un premier temps. Beaucoup de travail a été effectué dans et autour des IREM. Il faudra prendre le temps d'en tirer la substantifique moelle.

Nous allons profiter de ce thème pour reprendre, en l'enrichissant, le rôle spécifique des mathématiques au sein de la science, ou même de la physique si l'on accepte la provocation. Nous avons insisté sur le contrat relatif à la cohérence logique. C'est toujours d'actualité bien sûr. Il y a cependant un autre contrat, celui de l'efficacité des *outils*.

Par outil, nous entendons un package technique maîtrisé dans lequel on a oublié les petits énoncés particuliers qui ont servi à le construire. C'est un peu comme ces grandes constructions théoriques qui ont fait la gloire des mathématiques françaises. Le calcul différentiel, le calcul intégral sont des outils dont nous parlerons plus loin. Comme on le verra, la maîtrise de ces outils n'est pas vraiment liée à la connaissance de théorèmes.

D'abord, dans notre cas, l'outil devra prouver son efficacité pour dénouer des problèmes "concrets", notamment des problèmes tirés d'un contexte expérimental. Et ce sera le rôle du professeur de mathématiques que de garantir la maîtrise de l'outil par l'élève dans les situations concrètes, et donc de faire effectuer maint exercice dans ce sens.

En même temps les outils seront en petit nombre et leur champ d'application très vaste. Typiquement un seul outil permettra d'attaquer mille exercices.

L'outil, dans le sens que nous lui avons donné, s'oppose à la "boîte à outils" qu'on rencontre beaucoup en géométrie au collège. Cette dernière est une collection de petis énoncés à prendre indépendamment les uns des autres, même s'ils ont tous trait au même sujet. Surtout leur usage est strictement interne aux mathématiques. Enfin, typiquement, il faudra disposer d'une collection d'une vingtaine d'énoncés pour résoudre une dizaine d'exercices.

Quels sont les outils qui doivent composer la géométrie du collège? Ils sont essentiellement au nombre de trois,

- la géométrie du triangle, avec les cas d'égalité notamment,

- la géométrie du triangle rectangle, et la trigonométrie qui y est attachée,

- l'équation $y = ax + b$ de la droite, i.e. le théorème de Thalès.

Pour quitter un moment le sujet, notons qu'on peut parler à l'université d'un outil topologique. Pourquoi ne peut-on pas en parler au niveau du lycée? Simplement parce qu'on peut pas prétendre y atteindre la maîtrise nécessaire. Au collège la théorie des groupes aurait pu être un outil pour la géométrie si sa maîtrise y était accessible. Personne ne prétendra que ce puisse être le cas, du moins je l'espère. Il faut bien comprendre que, dans notre perspective, ce qui ne participe pas de la maîtrise d'un outil n'existe tout simplement pas.

Revenons à la géométrie du collège. C'est le sujet le plus pénible à traiter. Car il apparaît tout de suite que la seule solution possible, esquissée à propos des outils, est le retour au passé, à savoir à la présentation d'Euclide. Cet aspect rétrograde n'est pas très porteur quand chacun se plie aux modes. La seule nouveauté est qu'on invoque des raisons à un tel choix.

On a dit que la science s'est construite par mathématisation de l'étude de la nature. Comme le dit Rudolph Bkouche, la géométrie est la première science physique. C'est donc ainsi qu'on doit l'enseigner pour commencer.

Faut-il que toute une tranche d'âge ait vu ce qu'était une démonstration mathématique? On peut discuter; il y a d'autres merveilles à visiter. Supposons que la réponse soit oui. Alors il ne sert à rien de présenter tout un tas de problèmes artificiels donnant cette occasion si l'on fait l'impasse sur une présentation correcte de la géométrie élémentaire.

Tout commence par l'*égalité*. Entre deux corps solides c'est la possibilité matérielle (cela suffit pour les corps plans) d'amener (par un mouvement de l'espace) en superposition l'un sur l'autre. Deux segments, deux angles, deux triangles, deux quadrilatères seront dits *égaux* s'il en est ainsi.

On se gardera bien d'employer le qualificatif *isométrique* qui est faux à tous égards. Il suppose que l'on sache déjà mesurer. Surtout que doit-on mesurer? Pour un triangle les côtés? Et pour un quadrilatère? Evidemment on fait une entorse à la théorie des ensembles en parlant de l'égalité des figures autrement que comme une coïncidence. Mais un segment, un angle, une droite *ne sont pas des ensembles de points*, au moins pour commencer. Comme on le verra, on peut choisir d'introduire progressivement le langage de la théorie des ensembles à propos de la géométrie dans l'espace.

Partant de là il faut donner les trois *cas d'égalité*, lesquels se déduisent logiquement de celui dans lequel un seul angle est concerné. Cela fait vieillot, c'est sûr. Pourtant il y a un test qui ne trompe pas. Dans les connaissances mathématiques qui auront survécu dans la mémoire d'un ancien élève du lycée (on ne disait pas collège) qui n'a plus fait de mathématiques depuis longtemps, les cas d'égalité ne sont pas les plus mal placés.

En revanche il n'est pas question d'introduire les transformations, comme les symétries axiales ou centrales, pour s'en servir de point de départ d'une démonstration. Il est beaucoup trop difficile de faire le tri entre ce que l'on voit sur la figure et ce que l'on déduit des hypothèses, et ce d'autant plus que les propriétés des symétries auront été admises dans le flou général qui entoure ces transformations. Au contraire les égalités d'angles et de côtés s'établissent pas à pas dans un enchainement naturel.

Un autre reproche que l'on doit faire à l'introduction actuelle de la géométrie est qu'elle ignore le postulatum d'Euclide. Faut-il réserver la vérité à une élite? Là est toute la question.

Notons que la géométrie à la façon d'Euclide part de constatations expérimentalement vérifiables dans le monde réel. L'utilisation précoce d'un logiciel de géométrie dynamique, boîte noire obscure, ne ferait que tout embrouiller.

Il y a encore plus grave. On a dit tout le mal qu'il fallait penser de l'approche par le constructivisme structural. L'approche algorithmique stricte imposée par l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique, avant toute tentative d'analyse, conduit à des errements analogues. Il est une chose qu'un tel outil ne peut réaliser; c'est partir d'une figure fausse et s'en servir pour faire une démonstration vraie. Or cette étape d'analyse est la clé de la géométrie.

Foin de cet outil à la mode donc ! Même si son usage permet peut-être de ramener un peu d'ordre dans la classe, puisqu'il semblerait que la machine soit davantage respectée que le professeur. A tout prendre il est plus instructif de dessiner, même maladroitement, des figures géométriques que de contempler sans comprendre des figures affichées sur un écran.

La notation fonctionnelle

Si l'on se fie à un traité de mathématiques moderne, une fonction f est la donnée d'un espace de départ E, d'un espace d'arrivée F et d'un graphe, qui est une partie de $E \times F$. Si x est un point de E, on note $f(x)$ l'unique élément y de F tel que (x, y) soit dans le graphe.

Cette notation a mis du temps à s'imposer. Elle n'est pas naturelle. L'idée, qu'on rencontre notamment en géométrie, en mécanique ou en physique, d'une variable y qui dépend d'une variable x a complètement disparu.

La notation fonctionnelle moderne a été récemment imposée au lycée; elle est même introduite dès le collège. Or le moins qu'on puisse dire est que cela n'est pas sans poser quelques problèmes.

Voyons, par exemple, comment les fonctions interviennent dans des équations différentielles dans le libellé du dernier sujet du baccalauréat de la section S.

On dit d'abord que

a) *la fonction f est solution de l'équation différentielle : $y' = ay$.*

ce qui fait jouer à y un rôle d'indéterminée et demande de comprendre qu'on doit remplacer y par f.

Ensuite

b) *la fonction g ... vérifie la relation :*

$$g'(t) = ag(t)\left(1 - \frac{g(t)}{M}\right)$$

où il n'est plus question d'équation différentielle, ce qui surprend. La loi logistique et la loi exponentielle ne seraient-elles pas sur le même plan? Ne va-t-on pas demander de comparer les modèles? L'indéterminée y a disparue et la variable t apparaît.

Encore

c) *la fonction $\frac{1}{g}$ est solution de l'équation différentielle: (E') $y' + ay = \frac{a}{M}$.*

où l'on revient à la formulation du a).

Enfin

d) $$g'' = a(1 - \frac{2g}{M})g' \ .$$

où la formulation ressemble à celle du b) mais où la variable a disparu.

L'écriture d'une équation différentielle avec une fonction y indéterminée n'est pas sans poser de problème. Il faut comprendre qu'on ne peut pas mélanger a) et c) par exemple. Cela revient à dire ceci : appelons x une solution de l'équation $y = a$, puis z une solution de l'équation $y = b$. Il y a plus simple.

Finalement on n'a jamais pu écrire que N vérifiait l'équation différentielle

$$\frac{dN}{dt} = aN\left(1 - \frac{N}{M}\right)$$

ce qui est quand même ce quon attendait.

Lorsqu'on introduit la fonction x définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par

$$x(t) = \frac{M}{1 + Ce^{-at}}$$

suivant la bonne règle, il faut indiquer qu'on se permettra l'abus de langage qui consiste à écrire x plutôt que $x(t)$ la valeur de la fonction à l'instant t lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité, ce qui revient à confondre la fonction et sa valeur pour une valeur non précisée de la variable.

Autrement dit on pourra tout aussi bien définir x comme une fonction de la variable t en posant

$$x = \frac{M}{1 + Ce^{-at}} .$$

Lorsqu'on voudra préciser qu'on prend la valeur x_1 de la fonction qui correspond à la valeur t_1 de la variable, on écrira

$$x_1 = x(t_1)$$

ce qui introduit la notation classique.

Certains vont plus loin, introduisant directement une fonction $x = x(t)$ de la variable t par exemple. Même cette façon de s'exprimer n'est pas conforme à la bonne règle, on ne doit pas la rejeter.

La confusion considérée n'est pas seulement utile; on la fait systématiquement. Dans un calcul d'intégrale, on dira par exemple qu'on effectue le changement de variable $x = u^2$ pour lequel $dx = 2udu$.

Si y est une fonction de x et x une fonction de u, il est bien clair que

$$\frac{dy}{du} = \frac{dy}{dx} . \frac{dx}{du}$$

ce qui est quand même plus facile à retenir que la formule de dérivation d'une fonction composée qui figure au programme. De même si on considère x comme une fonction de y, on a

$$\frac{dx}{dy} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^{-1}$$

tout aussi clairement.

Dérivées et intégrales au lycée

Avant de commencer, demandons-nous ce qu'on peut envisager comme compétences à faire acquérir par les élèves, c'est-à-dire comme thèmes donnant lieu à des batteries d'exercices, ou des tâches routinières pour prendre la terminologie d'Yves Chevallard. On peut noter

- la construction de courbes — sachant que le recours aux calcultatrices aura été interdit —

- le calcul d'aires ou des volumes,

- la résolution d'équations différentielles — si possible issues d'un contexte expérimental et donnant lieu à une solution commentée —

Si l'on envisage la formation à l'Analyse au lycée en termes d'outils, on en trouve essentiellement deux, qui sont

- la dérivée

et

- l'intégrale,

sachant que la dérivée f de F est caractérisée par la propriété

$$F(x) - F(y) = \int_x^y f(t)dt ,$$

laquelle contient la dérivation par rapport à une borne et le théorème des accroissements finis.

S'il est difficile de déterminer comment il faut s'y prendre pour cela, une chose au moins est sûre. Les choix retenus aujourd'hui sont désolants.

D'abord pourquoi poser le principe, comme le document d'accompagnement de terminale S le fait, suivant lequel "il est souhaitable que tous les élèves aient entrevu l'intérêt et la place d'une définition formelle", et recommander ensuite de justifier la plupart des résultats "à l'aide d'arguments intuitifs"? Il y a déjà une contradiction entre le fait d'entrevoir et le formalisme. Ce dernier n'a de sens que si tout peut être posé tranquillement. Que dire alors du recours à des arguments intuitifs?

La plupart des manuels introduisent finalement le formalisme d'une manière telle qu'il est impossible à l'élève de savoir s'il peut y recourir de façon licite ou non, soit parce que la définition qu'on lui propose est incompréhensible pour ne pas dire fausse, soit parce que ce formalisme est parachuté après une activité qui n'est même pas approfondie.

Pour montrer qu'on ne veut pas reproduire le dogmatisme en cours, on va donner en annexe quatre présentations différentes et contradictoires. Aucune n'est parfaitement satisfaisante, loin de là. Le débat et in fine l'expérimentation trancheront.

Il peut heureusement y avoir d'autres présentations d'autres possibles. Peut-être ce qu'on a écrit fournira-t-il quelques idées? Cependant on ne peut pas faire un programme en piochant ici et là, sauf à réaliser une *structure en nougat*. Il convient de trouver un fil directeur et de s'y tenir.

Autrement dit il ne faut pas réaliser un avatar de cette structure en gruyère dont parle Jean-Pierre Demailly, laquelle ne doit d'ailleurs rien à une quelconque transposition didactique puisqu'elle a été mise en place en amont de l'épreuve de l'enseignement. Avec les manuels qui l'illustrent, on a l'impression d'être en présence d'un cours universitaire déjà médiocre au départ et qui serait parvenu dans un état de décomposition avancée.

Il y a un point particulier commun à toutes les présentations. En aucun cas il ne faut introduire le symbolisme $\lim_a$ ou $\lim_{x\to a}$ à propos des limites. Par exemple, contrairement à ce que pourrait suggérer une lecture rapide du document du programme de terminale S, on se gardera bien de recommander un "enchaînement" tel que

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+x}{x^3+x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+1/x^2}{1+1/x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^3}=\lim_{x\to+\infty}1=1\ ,$$

lequel est essentiellement faux. Cela revient à supposer a priori l'existence de la limite pour l'établir.

L'emploi de ce symbolisme ne peut correspondre au niveau du lycée qu'à un réflexe pavlovien. Il joue ce rôle de vérité partiellement révélée qu'on a reproché à l'outil informatique.

Evidemment mal compris, il fait des ravages à l'université. On pourrait bien sûr l'utiliser pour conclure un passage à la limite, mais il serait trop difficile d'imposer une telle restriction.

Les graphes en terminale ES

On prend cet exemple pour montrer qu'on ne proposera rien là où il n'est pas possible d'envisager un contenu cohérent assorti de tâches routinières identifiables.

Le thème des graphes, tel qu'il apparaît dans les programmes et les manuels, n'est pas fait d'une mais de vingt problématiques différentes. Le tout avec moins d'exercices que de définitions à connaître ou de résultats à appliquer.

La solution aurait pu être de se restreindre à l'une des problèmatiques et de l'approfondir. Rien n'empêche en théorie un enseignant de travailler ainsi dans sa classe. Cependant il faut bien préparer le baccalauréat. On ne peut pas se réjouir de l'introduction des graphes et en même temps souhaiter que les élèves ne soient pas interrogés sur le sujet. Finalement on a bien posé une question; il fallait écrire une matrice de compatibilité pour ne rien en faire et colorier un graphe sans souci de minimiser le nombre de couleurs. Autrement dit, dans les conditions actuelles, il n'y a strictement rien à sauver.

Il y a bien quelques exemples qui se voudraient concrets. Le parcours d'un graphe pondéré pour déterminer le plus court chemin entre deux villes en est un. On y présente une méthode effective. Malheureusement il y a deux handicaps liés au fait qu'on résoud les problèmes "à la main". D'abord on ne peut considérer que des exemples simplets et la solution est quasiment évidente.

Surtout la présentation de la méthode est d'une lourdeur sans pareille. On se prend à rêver en pensant à celle qu'aurait pu donner un informaticien du calibre de Niklaus Wirth s'appuyant sur un vrai langage algorithmique. En même il aurait pu prendre un exemple réaliste, et même réel, à savoir la réalisation d'un point d'accueil donnant le trajet le plus court pour le métro parisien.

Evidemment il aurait fallu introduire l'algorithmique dans les programmes, peut-être évoquer les questions de preuve d'algorithme, d'invariant de boucle, faire le lien avec le raisonnement par récurrence ... On a déjà parlé des obstacles politiques. Par ailleurs c'est sans doute bien trop ambitieux. En tout cas cela se discute.

En revanche comment peut-on prétendre mettre en avant la relation entre mathématiques et informatique si l'on feint d'ignorer que, pour certains problèmes, la solution donnée dans un langage algorithmique peut être infiniment supérieure à celle donnée dans un langage ordinaire? Et si l'on résume cette relation à la simple utilisation d'outils qui, d'une part n'ont pas été conçus pour la formation mais pour la production et d'autre part se révèlent destructeurs jusqu'à preuve du contraire?

Quelques mesures simples

La première, qui n'apporte rien par elle-même mais sans laquelle rien ne serait possible, est *l'interdiction des calculatrices* aux épreuves, quelle que soit la nature des unes ou des autres. Evidemment le baccalauréat est concerné en premier par cette mesure. Cela est *non négociable.* De plus aucun formulaire ne sera distribué sous quelque prétexte que ce soit.

La seconde, qui présente les mêmes caractères que la première, serait la disparition des activités marginales : itinéraires de découverte, TPE, brevet informatique et internet ... pour redonner un horaire cohérent à l'enseignement des mathématiques. Même les options de spécialités devraient disparaître et leur horaire intégré à l'enseignement principal, lequel retrouverait des variantes comme avec les séries d'autrefois.

La disparition des activités gadget ne signifie pas qu'il faut enlever toute place à l'initiative des élèves. Leur demander de préparer de petits exposés en responsabilité n'est pas une mauvaise chose. Cependant cela devra se faire à l'intérieur de la progression du programme.

A part cela, on a dit qu'il ne pouvait pas y avoir de révolution dans les contenus. Cependant les programmes devraient retrouver une formulation plus concise, ne dépassant pas une page par année, ce qui leur confèrerait souplesse et pérennité.

Les manuels devraient subir, parallèlement, une cure d'amaigrissement. Les activités dites préparatoires, les digressions variées en auraient disparu. Quant à la présentation elle-même, elle pourrait en être plus rustique, délaissant les encarts colorés et photographies au profit d'un discours moins abrupt et plus soigné. La partie consacrée aux exercices serait importante, en évitant aussi la multiplication des images.

Cela signifie qu'il resterait beaucoup de place pour que soient développées des séquences clefs en mains. L'origine pourrait être diverse et concerner : le Comité des programmes, les éditeurs de manuels, les IREM, les associations ... avec l'occasion pour l'inspection générale de donner un avis.

Annexe: analyse au lycée, 1

La première présentation proposée est tout sauf originale. Il s'agit simplement de s'inspirer d'un traité de mathématiques digne de ce nom, en commençant par présenter correctement la notion de limite. Il n'est pas question de se limiter "aux limites à l'infini" comme le préconise le programme actuel. Il n'est pas question non plus de présenter le "langage de la continuité" comme une "traduction mathématique de la notion intuitive" correspondante.

Il est peu probable que la ligne proposée puisse être tenue aujourd'hui. On peut espérer qu'une fois les faiblesses de l'enseignement en amont, de l'école élémentaire aux premières années du lycée, corrigées et la diversité des filières du lycée réintroduite, le choix puisse être tenté en terminale scientifique dans sa variante "fondamentale". Actuellement on ose à peine y penser pour les deux premières années de l'université.

On dispose d'un très bon exposé, celui de G. H. Hardy dans son *Course of Pure Mathematics* dont la première édition date de 1908. Les choses sont suffisamment décortiquées pour qu'on puisse en tirer l'occasion de "débats scientifiques".

Voyons par exemple le soin extrême avec lequel il présente la définition d'une limite en un point, dans une version transcrite ici dans un style un peu moins littéraire.

If,

when any number $\delta > 0$, however small, is assigned, we can choose $y_0(\delta) > 0$ so that, for all values of y such that $0 < y \leq y_0(\delta)$, we have $|\phi(y) - l| < \delta$,

then we say that $\phi(y)$ tends to the limit l as y tends to 0 ...

Cela n'a pas grand chose en commun avec l'infâme soupe qui est servie dans de nombreux manuels aujourd'hui. La formalisation de la notion de limite passe par l'usage maîtrisé de quantificateurs que l'on saura poser, de la façon qui est indiquée dans la définition précédente. Avec des notations plus conformes aux habitudes scolaires, on supposera $\epsilon > 0$ donné et on choisira un $\alpha > 0$ convenable. On n'écrira jamais de ligne utilisant des symboles logiques.

Le choix fait ici suppose que des tâches routinières, c'est-à-dire des listes d'exercices, viennent étayer cette présentation. Autrement dit un investissement non négligeable sera à consentir. Même dans la situation la plus favorable, cela suppose que l'on ait mis un bémol aux prétentions applicatives de tout poil.

Cela étant, il est sans doute possible de simplifier un peu le discours de G. W. Hardy, même s'il semble inaméliorable. Seule modification significative, on n'utilisera pas le symbole lim.

Annexe: analyse au lycée, 2

La présentation qu'on envisage maintenant est située pratiquement à l'opposé de la précédente. L'ambition en est très modeste. Aussi n'a-t-on prévu qu'un discours minimal de nature heuristique sur les notions fondamentales et aucune tâche routinière pour conforter leur compréhension.

Dans ces conditions il faut abandonner toute tentative de définition. On pourra parler de *passage à la limite* sur des exemples. Ainsi dira-t-on que

$$\frac{x^2-1}{x-1} = x+1$$

prend la valeur 1 à la limite quand x tend vers 0 par valeurs $\neq 0$.

Cela n'interdit pas de préparer le terrain pour une approche ultérieure plus formelle. On pourra reprendre un peu de la présentation de l'ouvrage cité de G. W. Hardy pour commencer à expliquer ce qui se cache derrière l'idée de limite. Cependant on n'ira pas jusqu'à l'écriture d'une définition, a fortiori d'une définition en forme.

Plutôt que des "règles opératoires" toutes faites, qui mettent en jeu des réflexes pavloviens au point que tous les exercices peuvent être résolus "directement", on mettra en avant la compréhension technique. Ainsi écrira-t-on

$$\frac{x^3+x^2}{x^3+x\sin x} = \frac{1+1/x}{1+\sin x/x^2}$$

pour conclure à la valeur limite 1 en 0.

De même ignorera-t-on le "théorème des gendarmes", qui répond à cet intérêt maladif pour les énoncés les plus futiles. On préfèrera développer la méthode consistant à retrancher la limite supposée et à majorer le résultat. Cela a au moins l'avantage de s'appliquer au cas vectoriel qu'il faudra bien considérer un jour.

Ainsi prendre une limite ne sera rien d'autre que lever une indétermination : on se ramène à des expressions qui tendent ostensiblement vers 0. De toute façon il serait illusoire de tenter de mettre dans la tête de l'élève une autre conception à ce niveau, puisque les seules tâches routinières auront cette levée pour objet.

On traitera de même les directions asymptotiques et asymptotes. La méthode consiste toujours, par différence, à se ramener à une limite nulle.

Cependant on pourra être plus précis dans le cas monotone, l'existence d'une limite finie ou infinie étant toujours assurée.

Pour définir une fonction continue en un point a, on pourra dire que les valeurs s'y raccordent. Ce n'est pas très glorieux mais présente une petite utilité quand même. En effet l'étude des fonctions périodiques, notamment la recherche de solutions périodiques d'équations différentielles, fait apparaître la continuité en ce sens. De même la conception à assistée par ordinateur, pour la construction mécanique ou la typographie, utilise des fonctions dont la continuité de certaines dérivées s'obtient par raccordement.

Pour une fonction monotone, la continuité en un point est l'absence de saut, aussi bien à droite qu'à gauche en ce point. En pratique on ne considèrera que des fonctions monotones par morceaux sur un intervalle. Cependant il n'est pas possible de faire l'hypothèse que les fonctions rencontrées auront *a priori* cette propriété. En effet elle est tout sauf stable par les opérations, contrairement aux majorations explicites dont on parle dans l'annexe suivante. La différence de deux fonctions monotones n'est pas monotone par morceaux en général. Comment peut-on vérifier la monotonie d'une fonction donnée? En prenant sa dérivée, donc en appliquant le théorème des accroissements finis. Or si l'on pouvait imposer a priori aux fonctions d'être monotones par morceaux ce théorème serait une banalité.

La continuité est une propriété des fonctions qui traduisent un mouvement, lequel peut résulter d'un mécanisme par exemple. Historiquement c'est ainsi qu'était amenée la propriété des valeurs intermédiaires. Ce n'est pas une mince affaire. Qu'on pense aux difficultés rencontrées pour résoudre une équation telle que $x^3 = a$ par la géométrie ! Dans le programme scolaire, on a besoin de résoudre une équation $f(x) = a$, par exemple pour construire la fonction exponentielle à partir de la fonction logarithme ou l'inverse.

Plus généralement, beaucoup de grandeurs physiques dépendant du temps contiennent en elles-mêmes la propriété de continuité. En mathématiques on se devrait de ne présenter de fonction partout définie que continue.

En revanche l'idée "intuitive" du dessin de la courbe sans lever le crayon n'est pas bonne. Comme Guy Brousseau le fait volontiers remarquer, cette image représente la notion de connexité. Or c'est précisément le passage de la continuité à la connexité qui fait l'objet de la propriété des valeurs intermédiaires.

On peut bien énoncer un *théorème* des valeurs intermédiaires, en se limitant au cas monotone qui est largement suffisant, mais il faut alors le démontrer. Si l'on considère les nombres comme décimaux illimités, résoudre une l'équation $f(x) = a$ consiste à expliciter un procédé permettant de déterminer effectivement autant de décimales que l'on veut pour une solution de cette équation. On peut employer un algorithme de nature dichotomique pour trouver un candidat x_0 dont on montre qu'il vérifie $f(x_0) = a$ par l'absurde, sachant qu'il ne peut y avoir de saut en ce point.

On noterait qu'ici la méthode dichotomique ne doit pas faire illusion et n'est pas à voir comme une méthode de calcul approché; elle ne comporte pas de test d'arrêt lié aux erreurs de calcul. En revanche on doit faire attention à l'ambiguité du développement décimal.

Qu'est-ce alors qu'une *dérivée*? C'est simplement une *pente limite*. Plus précisément calculer la dérivée en x de la fonction $y = f(x)$ est déterminer, si on le peut, la limite de la pente

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

quand Δx tend vers 0 par valeurs $\neq 0$.

Ce faisant on n'a pas eu peur d'appeler *pente* le quotient $\Delta y/\Delta x$. La pente s'oppose au *taux* qui est $\Delta y/y\Delta x$. Ce sont les termes employés notamment en physique (pour la pente) et en biologie ou en économie (pour le taux). Evidemment la dérivée sera la pente d'une tangente en géométrie, une vitesse (instantanée) en mécanique, un coût marginal en économie.

La notation

$$\frac{dy}{dx}$$

pour désigner la limite de $\Delta y/\Delta x$ est à introduire en même temps que $f'(x)$. Son pouvoir évocateur est indiscutable. On s'en servira pour donner les règles de calcul sur les dérivées. L'important n'est pas tant que les démonstrations soient formalisées. C'est davantage le fait que l'élève puisse retrouver les formules.

On est évidemment très loin de la dérivation vue comme une opération formelle. Cette interprétation permet peut-être de vendre des calculatrices mais elle est aberrante sur le plan épistémologique. Ce n'est pas parce que le formalisme du calcul des dérivées s'est imposé historiquement avant qu'une définition satisfaisante des limites ait pu être produite que le formalisme a inspiré ce calcul.

Evidemment l'élève, confronté à de nombreux calculs de dérivées, développera probablement une conception allant dans le sens formel. Il est important qu'elle puisse fusionner avec les images de tangente, de vitesse qu'on lui aura également données. Ce peut être l'objectif d'exercices adaptés. C'est aussi la raison pour laquelle on a insisté sur la nécessité de savoir retrouver les formules de dérivation.

Venons-aux *intégrales*. L'intégrale d'une fonction f positive sur le segment $[a, b]$ est une *aire*. On étend la définition au cas d'une fonction changeant un nombre fini de fois de signe.

Il est tout à fait inutile de prendre des précautions à cet égard, contrairement aux limites. Il faudrait juste noter que l'intégrale n'a pas toujours les dimensions d'une aire.

L'essentiel du calcul différentiel et intégral est constitué de *deux énoncés fondamentaux*. Le premier dit que la fonction définie par

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

admet $f(x)$ comme dérivée en x. C'est le théorème de dérivation par rapport à la borne supérieure. On le démontrera dans le cas monotone.

Le second dit que

$$f(a) - f(b) = \int_a^b f'(t)dt$$

et c'est le théorème dit des accroissements finis.

Ici c'est plus délicat. On se ramène au cas où $f' = 0$. Actuellement on apprend en classe de première que si $f' \geq 0$ alors f est croissante, le résultat étant admis. En terminale on prétend donner un sens précis à f' mais on ne revient pas sur la propriété (mal) acquise.

Faut-il se contenter d'illustrer une telle propriété, sachant qu'elle n'est pas accessible à l'expérience? Bien sûr il est difficile d'imaginer qu'avec une pente ou une vitesse positive, on puisse descendre ou reculer. Est-ce suffisant?

Cela pose un problème fondamental. Pour imposer une démonstration, faut-il montrer une fonction qui n'est pas continue par morceaux, sachant que ce n'est pas très raisonnable au lycée? Ou bien faut-il considérer que la démonstration est impérative? Qu'elle n'est pas seulement là pour réparer les contradictions quand on en rencontre. La réponse est externe aux mathématiques et liée à la confiance que lui accordent les utilisateurs.

On peut aussi invoquer une démonstration à la Rolle, utilisant l'existence d'un maximum. L'avantage est qu'on voit mieux ce qu'il faut admettre et qui est bien sûr inacessible faute d'une définition explicite de la continuité. Est-ce mieux cependant?

Peut-être faut-il ici faire une démonstration dans un cas particulier réaliste, comme cela est proposé dans la présentation qui suit.

Notons pour finir que tout le temps gagné sur les définitions abstraites pourra être investi plus utilement pour calculer des aires, des volumes, et pour résoudre des équations différentielles simples sans se priver de l'illustration par le contexte, physique ou autre.

Annexe: analyse au lycée, 3

Cette présentation est guidée par l'idée suivante. Plutôt que de présenter continuité et dérivabilité dans le cadre le plus général, on se restreint à des situations particulières plus "calculables".

Plus précisément on se place dans un cas permettant l'écriture de majorations explicites, majoration de l'accroissement Δy en fonction de l'accroissement Δx pour la continuité, majoration de l'erreur $\Delta y - k\Delta x$ pour la dérivée.

A la liste de tâches routinières s'ajoutera alors

- la production de majorations,

ce qui n'est certainement pas un mal. Le moins qu'on puise dire est que les élèves qu'on retrouve à l'université comme étudiants n'ont pas développé une expertise très pointue dans ce domaine.

Par aileurs travailler sur des majorations explicites est plus accessible que comprendre la notion formalisée de limite. Pour autant il n'est pas sûr que ce soit accessible à suffisamment d'élèves du lycée.

On vise surtout le programme de spécialité, ou bien une variante davantage "sciences fondamentales" de la terminale ES. Pour élargir le public concerné, on peut aussi envisager de développer les arguments sur quelques exemples significatifs.

La continuité sera introduite par une condition du type

$$(c) \qquad |f(x+h) - f(x)| \leq C|h| \quad \text{ou} \quad |\Delta y| \leq C|\Delta x|$$

sur un segment, condition dont on peut montrer la stabilité par somme, produit, inverse (minoré) et composée.

Etablir des relations de ce type, notamment pour les fonctions usuelles, pourra donner lieu à des tâches routinières.

De son côté, la propriété pour la valeur k d'être la dérivée en x sera introduite par une condition du type

$$(d) \qquad |f(x+h) - f(x) - kh| \leq C|h|^2 \quad \text{ou} \quad |\Delta y - k\Delta x| \leq C|\Delta x|^2 ,$$

ce qui n'empêche pas d'expliquer que k est alors la limite d'une pente.

La propriété (d) implique la propriété (c) sur un segment. On peut montrer sa stabilité par somme, produit, inverse (minoré) et composée et justifier ainsi les règles de calcul des dérivées dans ce cadre.

On démontre le théorème de dérivation de l'intégrale par rapport à sa borne supérieure sous l'hypothèse (c) , ce qui n'est pas difficile puisqu'alors

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \int_x^{x+h} f(t)dt = hf(x) + R(h)$$

où $|R(h)| \leq C|h|$.

On démontre le théorème des accroissements finis sous l'hypothèse (d), qui implique

$$|f'(x+h) - f'(x)| \leq 2C|h|$$

et permet d'utiliser le premier énoncé. Par différence on se ramène ainsi à faire la démonstration dans le cas où $f' = 0$. Il s'agit ainsi de montrer que si

$$|f(x+h) - f(x)| \leq C|h|^2$$

alors f est constante.

Peut-être est-il bon pour une fois de faire une vraie démonstration? On imagine le décor du "débat scientifique". L'hypothèse, qui signifie que $|f(x+h) - f(x)|$ est petit, est a priori plus faible que la conclusion, qui signifie précisément que $|f(x+h) - f(x)| = 0$.

La démonstration est possible et même fort instructive. On procède par l'absurde en supposant par exemple $f(b) > f(a)$ et découpe $[a, b]$ en N intervalles égaux de longueur $h \leq (f(b) - f(a))/2C(b-a)$.

La fonction logarithme, si on l'introduit par une intégrale vérifie sur $[a, b]$ la propriété

$$\frac{|h|}{b} \leq |\log(x+h) - \log x| \leq \frac{|h|}{a}$$

et on peut en déduire la fonction exponentielle avec la propriété (c), puis sa dérivée.

Tout ce qui précède est cohérent dans la mesure où les fonctions considérées sont construites à partir des fonctions 1, x, $\cos x$ et $\sin x$, $\exp x$, $\log x$ et $\sqrt{x}$, les deux dernières ne pouvant intervenir sur un intervalle contenant 0. Ce n'est déjà pas si mal.

Evidemment les calculatrices seront interdites. D'un autre côté on demandera une présentation soignée des calculs qui montre qu'ils sont maîtrisés.

Cette présentation est la plus radicale. Elle fait complètement l'impasse sur la notion de limite. Elle donnerait bien lieu à quelques tâches routinières qui seraient des raisonnements par l'absurde. Il n'est pas sûr qu'on puisse les pratiquer au lycée, même dans des conditions optimales.

L'intégrale sera une aire algébrique. On ne précise pas les conditions à exiger d'une fonction pour qu'on puisse définir son intégrale. En pratique on n'intègrera que des fonctions continues.

L'idée qui gouverne cette présentation est la suivante. La notion fondamentale n'est la dérivée mais l'intégrale. C'est la force, ou l'accélération, qui produit la vitesse et c'est la vitesse qui produit le déplacement, pas l'inverse.

On dira que la fonction f est la dérivée de la fonction F sur l'intervalle I si l'on a

$$F(x) - F(y) = \int_x^y f(t)dt$$

pour tous x, y dans I.

On a bien compris qu'on prenait la dérivée au sens des distributions. Le théorème de dérivation par rapport à la bonne supérieure et le théorème des accroissements finis sont des banalités dans ce cadre.

Comment trouver f à partir de F? Un changement de variable affine, dont on contrôle l'effet sur les aires, montre que

$$(*) \qquad F(x) - F(y) = (x - y)\tilde{f}(x, y)$$

où la fonction de pente $\tilde{f}$ est donnée par

$$\tilde{f}(x, y) = \int_0^1 f((1 - t)x + ty)dt$$

de sorte que

$$\tilde{f}(x, x) = f(x) \ .$$

Jusqu'ici tout est trivial. Rien n'empêche pas de voir la dérivée comme une pente en un point, la limite étant ici la "vraie valeur". La propriété (*) permet d'obtenir facilement des formules de dérivation.

Il faudrait cependant montrer que la dérivée est caractérisée par la propriété ci-dessus. Surtout il faut donner des conditions pratiques pour la dérivabilité d'une fonction F de façon à justifier les formules évoquées.

En fait on doit établir que la condition (*) implique la dérivabilité de F, sous réserve d'une hypothèse convenable de continuité de $\tilde{f}$. Cela revient à définir en une seule opération la classe $\mathcal{C}^1$. C'est là que le bât blesse.

D'abord il faudra exprimer cette condition, en se plaçant sur un segment par exemple. On peut demander qu'étant donné $\epsilon > 0$ on puisse choisir $\alpha > 0$ tel que $|x - y| \leq \alpha$ implique $|\tilde{f}(x, y) - \tilde{f}(x, x)| \leq \epsilon$. Cela veut dire que les pentes des sécantes approchent celle de ce qui sera la tangente. Cette condition est raisonnablement vérifiable en pratique. En revanche son énoncé présente les écueils de la définition formalisée de la continuité.

On pourrait bien sûr se contenter d'une hypothèse plus forte, du genre

$$|\tilde{f}(x, y) - \tilde{f}(x, x)| \leq C|x - y|$$

ce qui nous ramènerait essentiellement à la présentation précédente.

Ensuite il faudra montrer que si F vérifie (*) et $\tilde{f}(x, x) = 0$, alors F est constante. C'est là que le démonstration du théorème des accroissements finis qu'on a évacué refait surface.

Il y aurait un travail gigantesque à effectuer pour faire de l'idée ici présentée le germe d'un enseignement de lycée. Même s'il semble minimal, réduit à un seul énoncé, tel quel le discours n'est accessible qu'à des étudiants de maîtrise. Peut-être ne faudrait-il pas donner l'énoncé indiqué dans le cas général mais en tirer des exercices routiniers dans des cas particuliers. Ces exercices seraient-ils faisables? A voir.

A faire

Nombres et fractions au collège

Le calcul algébrique au collège

La géométrie au lycée

Probabilités et statistique

etc

Programme du collège

Programme du lycée

et 100 pages de fiches détaillées