Classes de Lycée

Géométrie

dans

l'espace

Irem de Lorraine

Les auteurs :

– DIDRY Jean-Marie - lycée Frédéric Chopin, Nancy
– LEMERCIER Geneviève - lycée Arthur Varoquaux, Tomblaine
– ROUYER Joseph, lycée Frédéric Chopin, Nancy
– SIBILLE Pierrette - lycée Jeanne d'Arc, Nancy
– THIRY Michel, lycée Georges de la Tour, Nancy

© Edité et imprimé par l'**Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques** - (Université de Nancy I - Faculté des Sciences) - B.P. 239 - 54506 VANDOEUVRE-les-NANCY Cedex
Dépôt légal : 4e trimestre 1991
n° de la publication : 2-85406-125-X
Responsable de la publication : Le Directeur de l'IREM, Bernard ANDRE

Public visé :

L'ouvrage s'adresse essentiellement aux élèves de lycée. Certaines parties peuvent être abordées en classe de seconde, car les pré-requis de géométrie sont très élémentaires : la plupart des situations font appel principalement aux théorèmes de Thalès et de Pythagore. Un grand nombre de fiches, qui nécessitent l'outil de la dérivée, ne peuvent être exploitées qu'en première. Quelques fiches enfin, exigeant plus de maturité, ne pourront être abordées avec profit qu'en terminale.

Forme :

L'ouvrage se présente sous la forme de séries de fiches de difficulté progressive, chaque série formant un tout. Les fiches ont été conçues pour un travail quasiment autonome, elles comportent éventuellement des rappels. Il y a 76 fiches dans le recueil, celles qui sont indispensables pour traiter les suivantes sont précédées d'un astérisque dans la table des matières. L'entête de chaque fiche précise les classes dans lesquelles elle peut être abordée : *niveau A* = seconde-première-terminale ; *niveau B* = première-terminale ; *niveau C* = terminale.

Objectifs :

— Familiarisation avec les principaux solides de l'espace, en particulier avec les solides de révolution.

— Familiarisation avec le dessin des objets de l'espace. Il faut amener les élèves à avoir recours au dessin comme à un outil de description, de compréhension et d'investigation.

— Utilisation des théorèmes fondamentaux de la géométrie plane dans le contexte de l'espace.

— Réinvestissement des connaissances acquises en analyse à travers des petits problèmes d'optimisation portant sur des longueurs, des volumes ou des aires.

— Manipulation de formules comportant plusieurs paramètres (apprentissage bien utile pour l'étude des sciences physiques) .

1ère série : Familiarisation avec les conventions du dessin en perspective cavalière.

A) Règles élémentaires :

B) Le cercle :

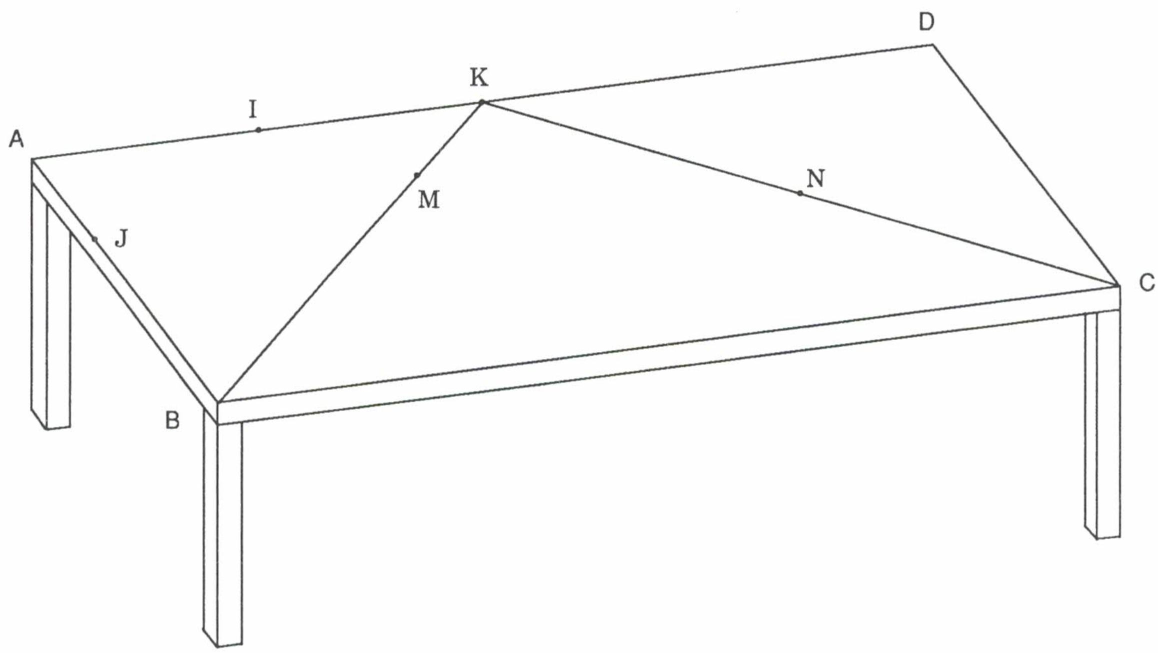
C) Le disque :

Le dessin ci-dessous représente une table rectangulaire de deux mètres sur un mètre.

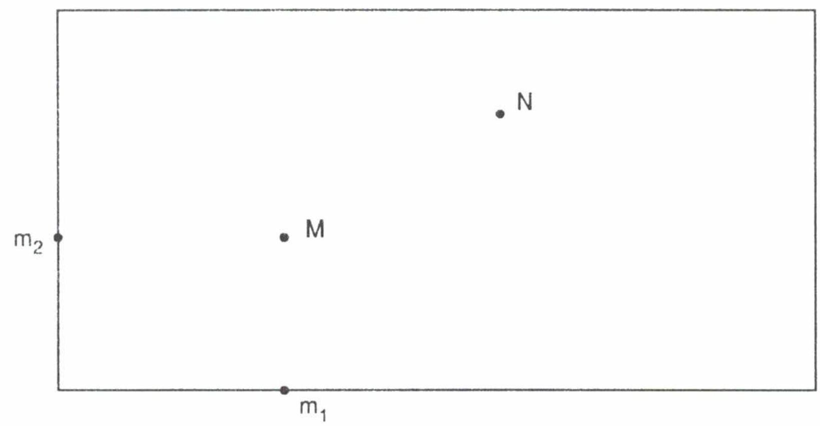
1. A partir de mesures prises sur la figure, calcule ce que valent *dans la réalité* les longueurs AI , AJ et IJ .

2. Même question pour les longueurs KB , KC , KM et KN .

3. Que vaut *"en vraie grandeur"* l'angle $\widehat{BKC}$? Déduis-en la longueur MN en vraie grandeur.



Dessin en perspective cavalière d'après une vue de dessus (1)



Dessin n° 1

Le dessin n° 1 représente une table, vue de dessus.

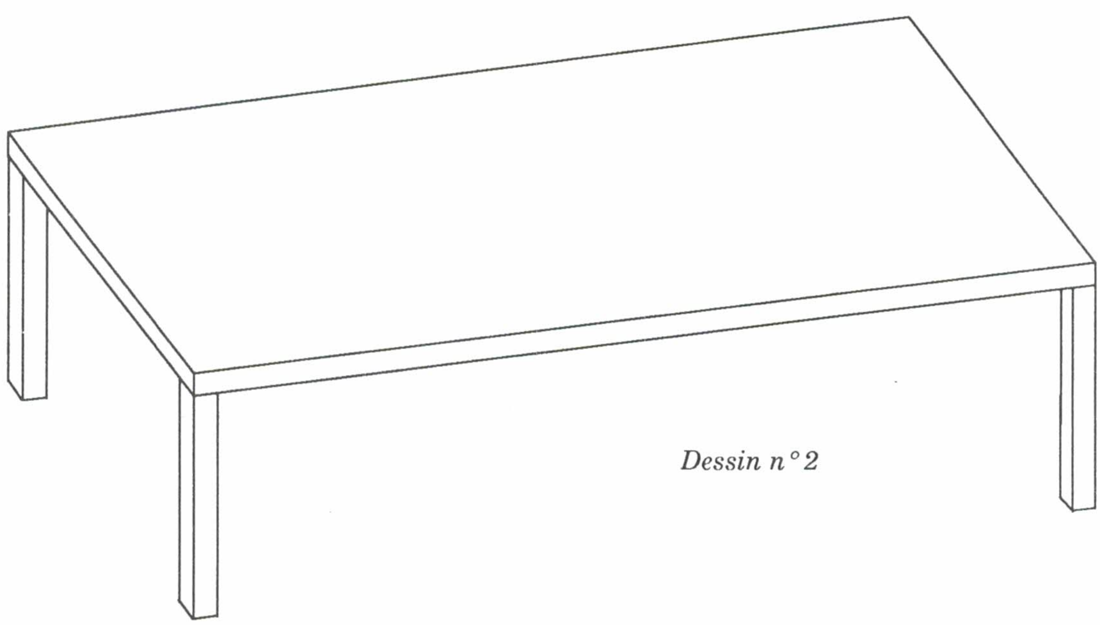
Sur celle-ci, figurent quatre points m_1, m_2, M et N ; m_1 et m_2 étant les projetés orthogonaux de M sur deux des côtés de la table.

Le dessin n° 2 est une vue en perspective de cette même table.

1. En te servant de mesures prises sur le dessin n°1, place (dans cet ordre) les points m_1, m_2 et M sur le dessin n° 2 .

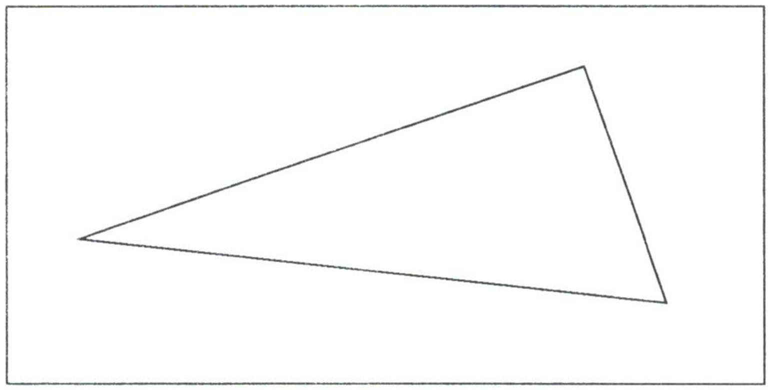
2. Construis ensuite le point N sur le dessin n° 2 .

3. Déduis-en une méthode permettant de placer sur le dessin n° 2 un point quelconque donné sur le dessin n° 1.



Dessin n° 2

Dessin en perspective cavalière d'après une vue de dessus (2)

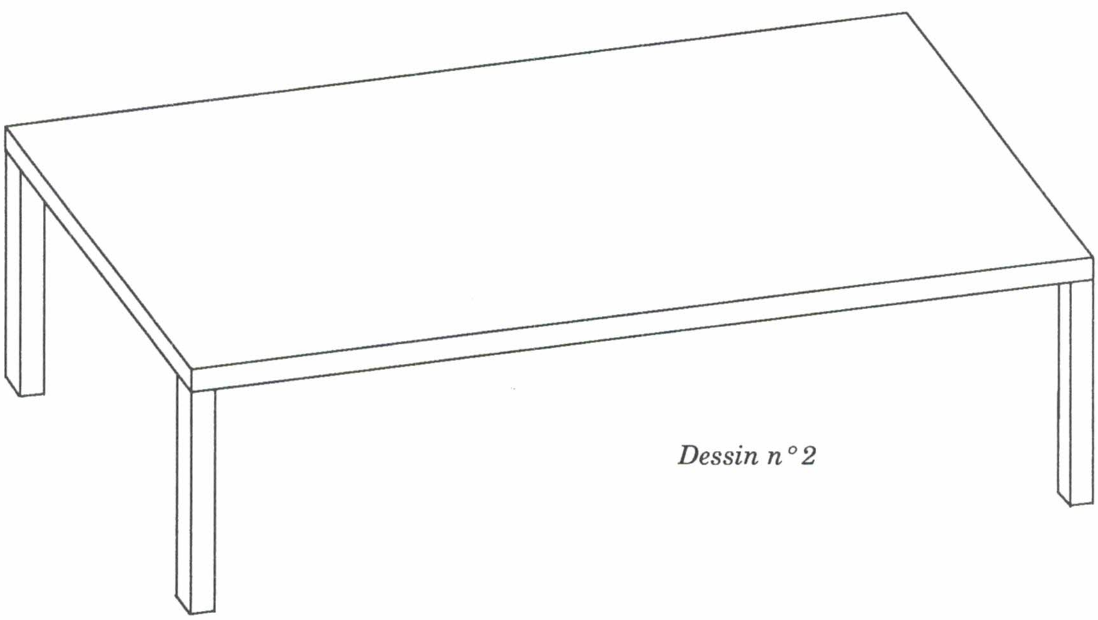


Dessin n° 1

Le dessin n° 1 représente une table vue de dessus, sur laquelle on a déposé une équerre.

Le dessin n° 2 est une vue en perspective de cette table.

Reproduis l'équerre sur le dessin n° 2 .

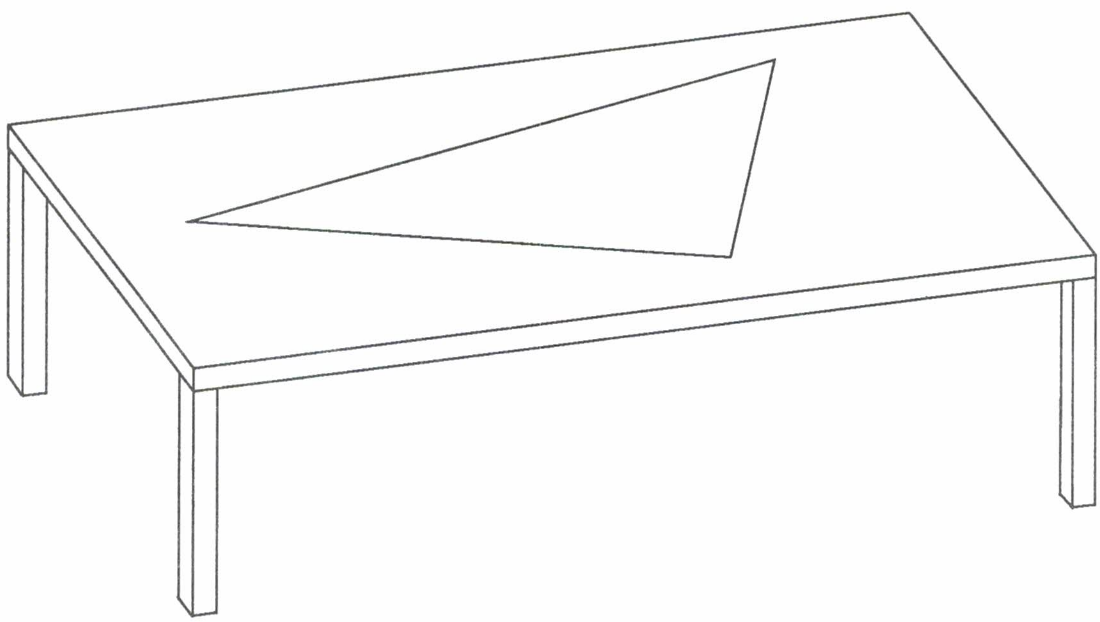


Dessin n° 2

Angle d'après une vue en perspective cavalière.

Sur le dessin ci-dessous, un élève a voulu représenter une table rectangulaire de 2 m sur 1 m, vue en perspective, avec une équerre posée à plat sur celle-ci.

A-t-il réellement représenté une équerre ? Justifie ta réponse.



niveau A

Fiche n° PC 5

Rectangles en perspective cavalière.

On a représenté un coin de pièce.

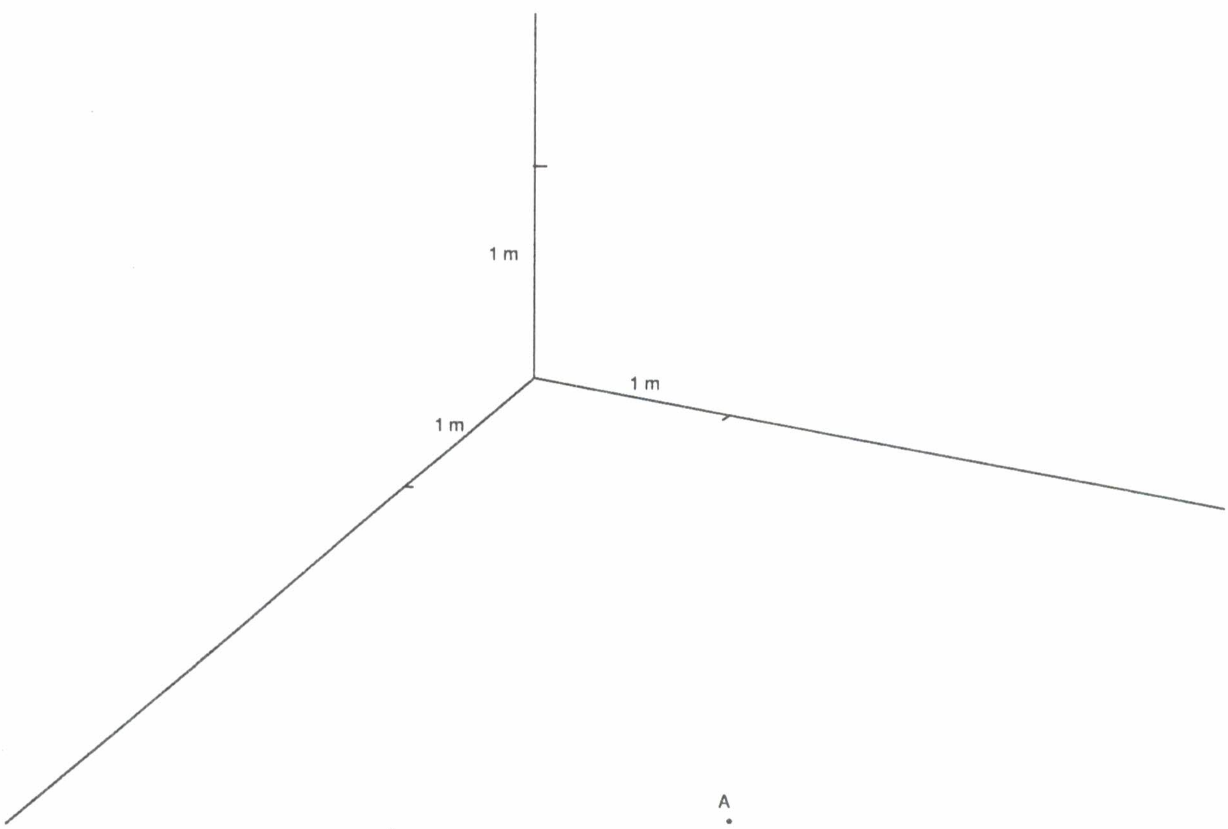
1. Le long de chaque mur, on place deux tables identiques de dimensions $L = 1{,}5$ m ; $l = 0{,}7$ m ; $h = 0{,}6$ m . Chacune est située à 2 m de l'autre mur. Dessine ces deux tables.

2. On place également un tapis carré de 3 m de côté, dont le centre est en A et dont les bords forment avec les murs un angle de 45° .

a) quelles sont les directions des diagonales de ce carré ?

b) quelles sont les longueurs de ces diagonales ?

c) utilise ce qui précède pour dessiner le tapis.



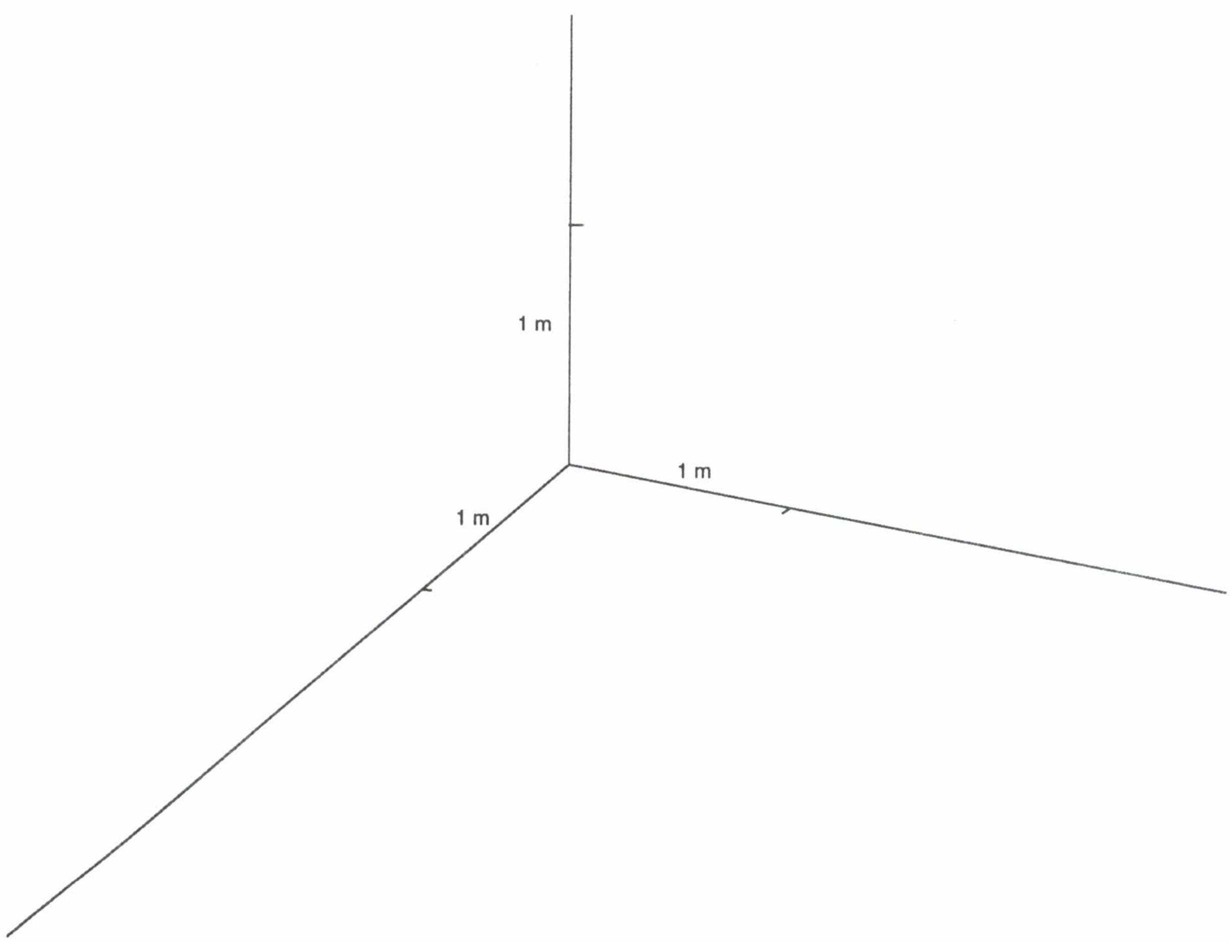
niveau A

Fiche n° PC 6

Echelles contre un mur.

On a représenté un coin de pièce. Contre chaque mur, on place une échelle mesurant 2 m et comportant 7 barreaux de 50 cm de large, régulièrement espacés. La base de chacune est à 50 cm du mur d'appui. Elles sont situées toutes deux à 1 m 50 de l'autre mur.

Dessine les échelles.



niveau A

Fiche n° PC 7

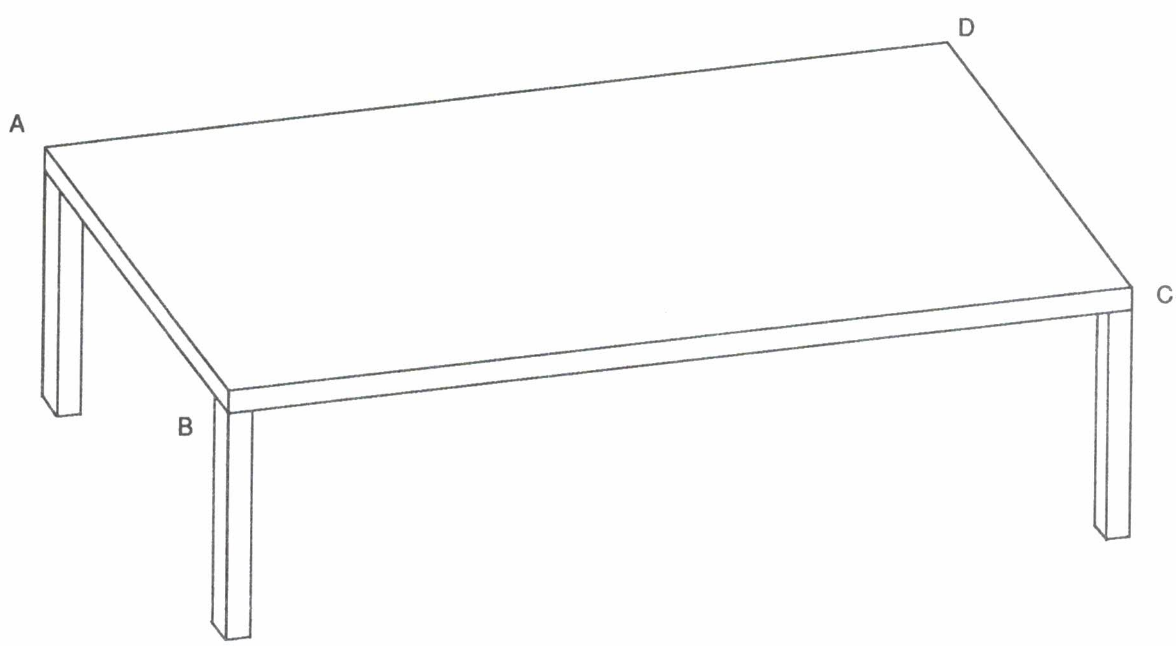
Exemple simple de rotation.

Le dessin ci-dessous représente une table rectangulaire de 2m x 1 m .

1. On fait tourner autour de A , dans le sens inverse de celui des aiguilles d'une montre, une tige métallique de longueur 1 m et de diamètre négligeable. Sa position initiale coïncide avec le bord [AB] . Dessine ses positions successives lorsqu'elle a tourné de 30° , 45° , 60° et 90° .

2. La tige est maintenant placée en [DC] . On la fait tourner autour de D , dans le sens des aiguilles d'une montre. Dessine ses positions successives quand elle a tourné de 30° , 45° , 60° et 90° .

Indication : tu pourras t'aider d'une vue de dessus où tu dessineras la barre dans ses différentes positions.



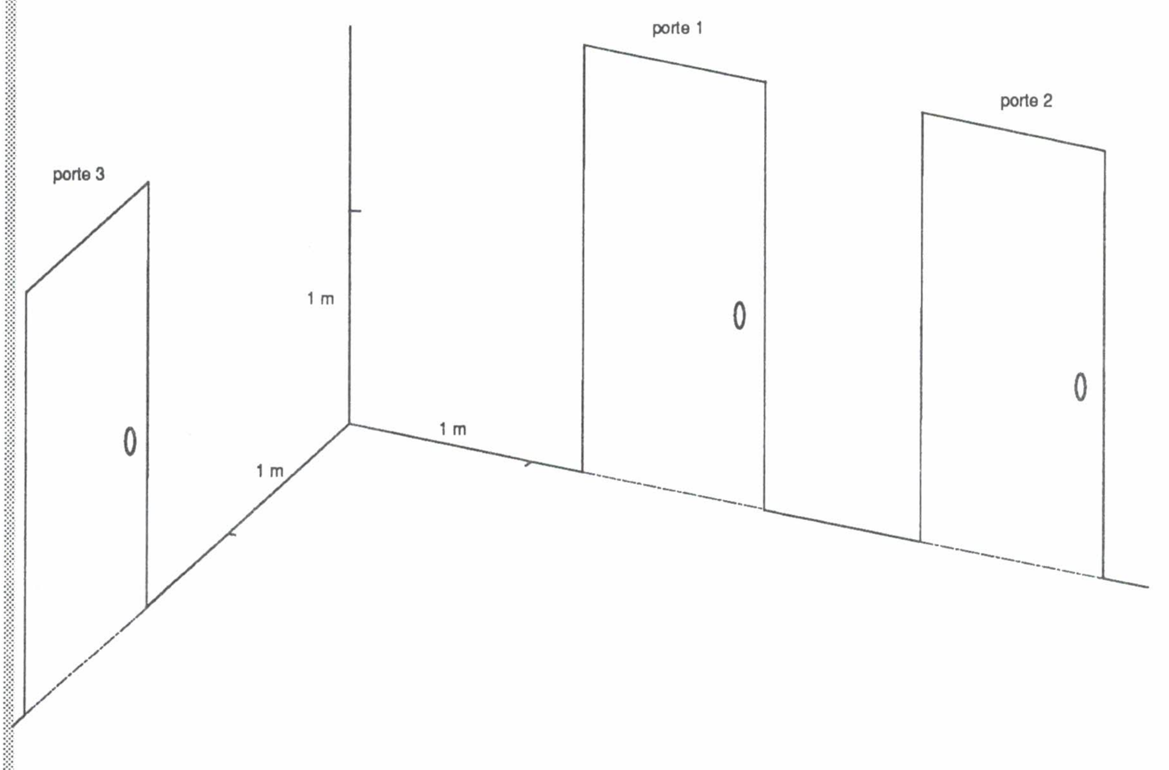
niveau A

Fiche n° PC 8

Portes ouvertes ou entrouvertes.

Le dessin ci-dessous représente un coin de salle. Complète-le en dessinant :

- ❑ la porte n° 1 ouverte de 90° vers l'avant,
- ❑ la porte n° 2 ouverte de 45° vers l'arrière,
- ❑ la porte n° 3 ouverte de 60° vers l'avant.



niveau A

Fiche n° PC 9

Méthode pour dessiner un cercle de l'espace à l'aide de 8 points.

Sur la figure n° 1 , on a dessiné un carré circonscrit à un cercle.

1. Trace la tangente en E au cercle. Démontre que $OE = OA / \sqrt{2}$ et justifie que cette tangente est parallèle à la droite (BD) .

2. On se propose de représenter le cercle ci-contre en perspective cavalière. Sur la figure n° 2 , on a commencé le dessin en représentant dans un plan (P) les droites (OI) et (OJ). Utilise les résultats de la question 1 pour construire huit points du cercle ainsi que les tangentes en ces points.

Pour achever le tracé, joins au mieux ces huit points à main levée.

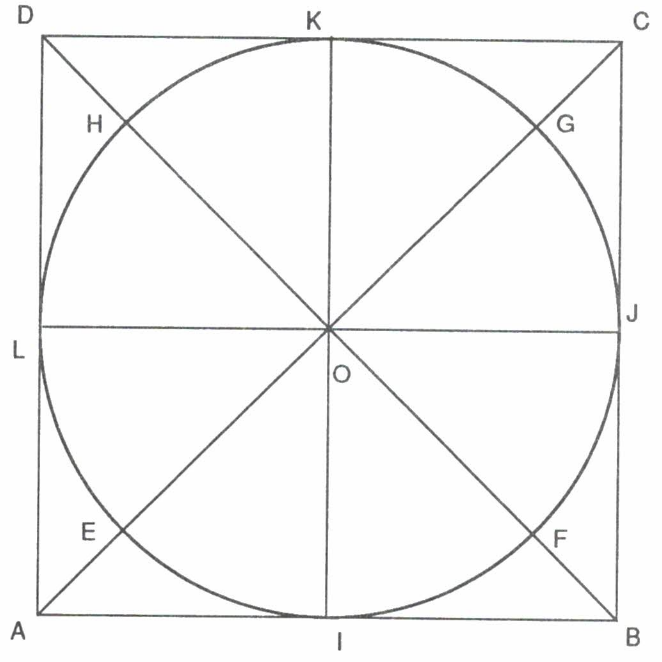


figure n°1

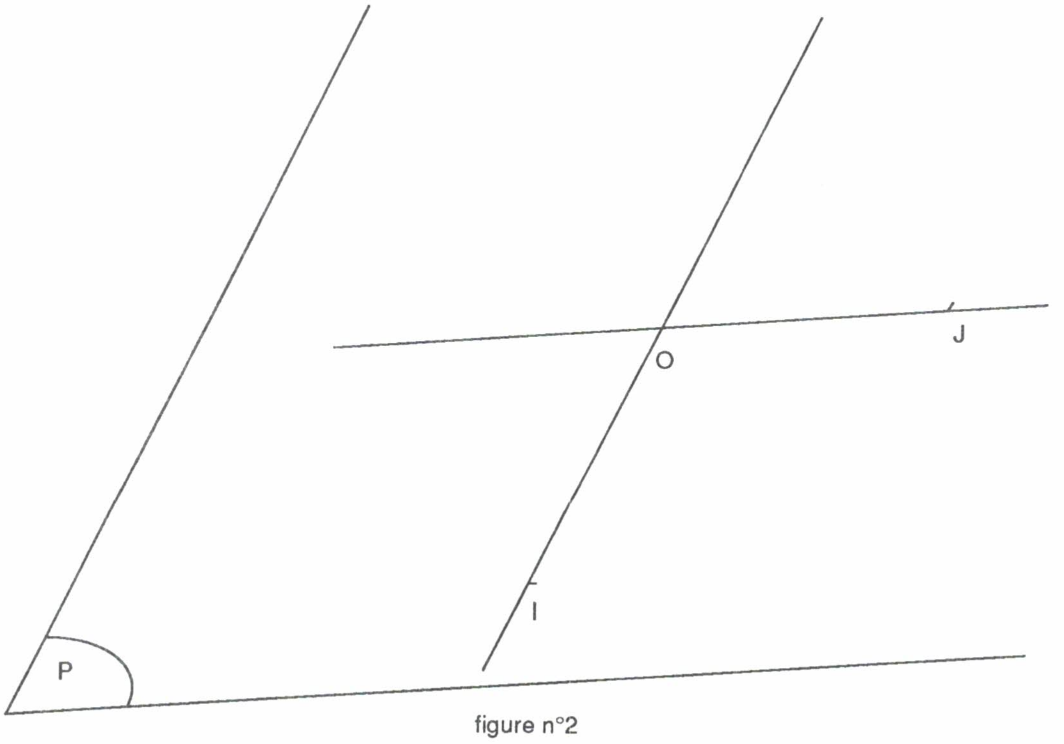


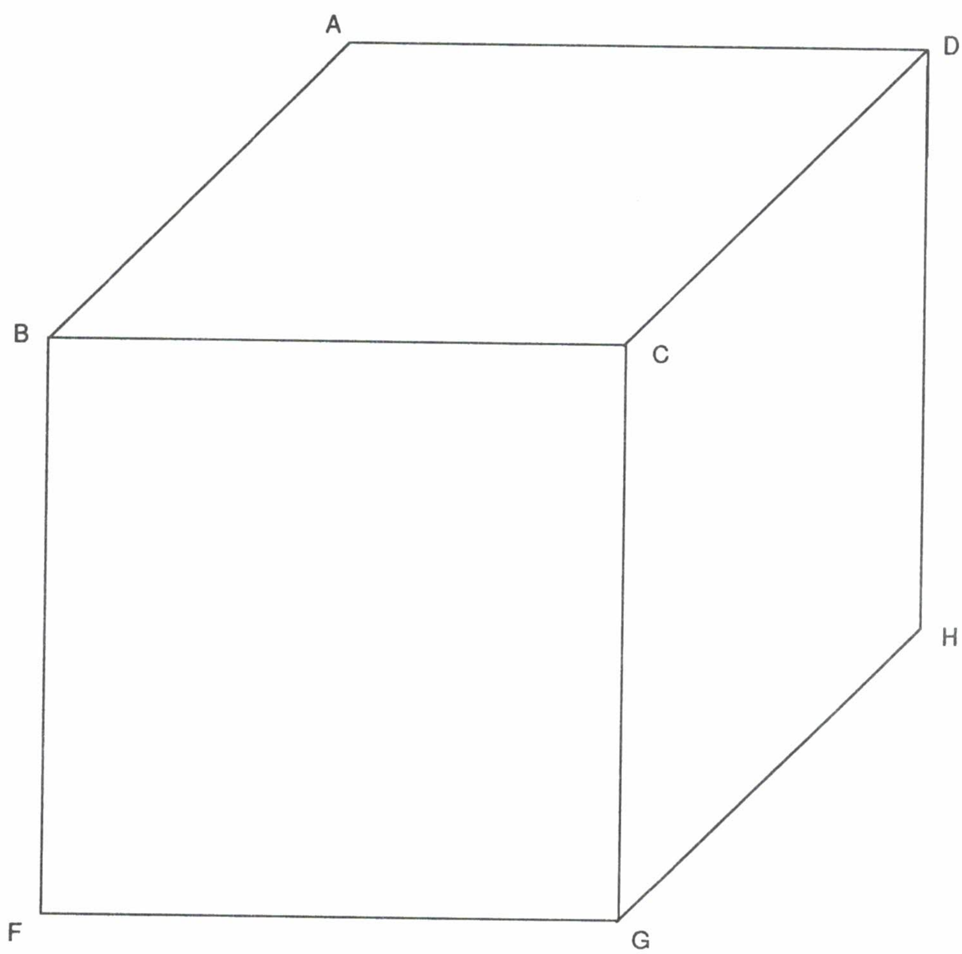
figure n°2

niveau A

Fiche n° PC 10

Cercles sur trois faces d'un cube.

Dessine un cercle inscrit dans chacune des trois faces visibles de ce cube, en exploitant la méthode développée dans la fiche précédente.



niveau A

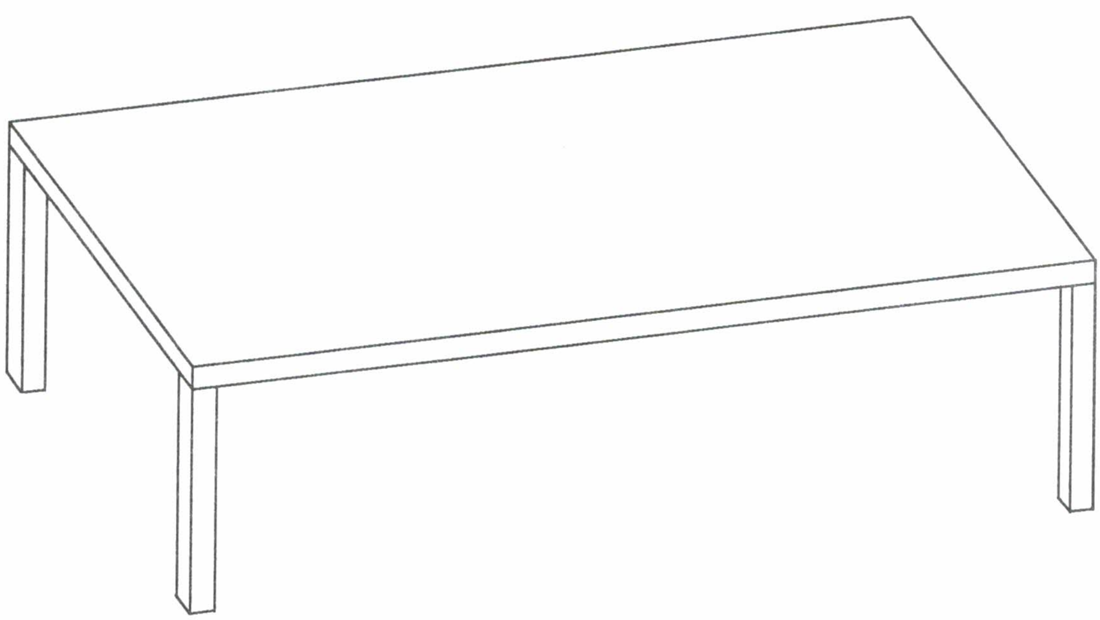
Fiche n° PC 11

Napperons sur une table.

Le dessin ci-dessous représente une table rectangulaire de 2 m sur 1 m . On place sur cette table trois napperons, en les superposant, leur centre coïncidant avec celui de la table.

- ❑ Le premier napperon est un carré de 60 cm de côté ; il a ses bords parallèles à ceux de la table.
- ❑ Le second, identique, est tourné de 45° par rapport au précédent.
- ❑ Le dernier est rond avec un diamètre de 60 cm .

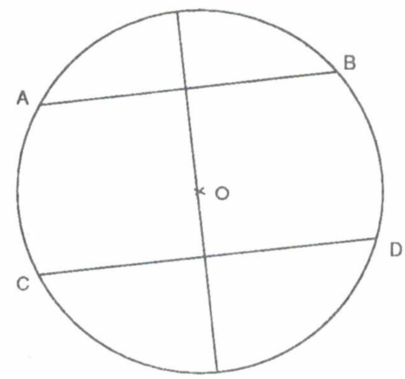
Dessine les trois napperons.



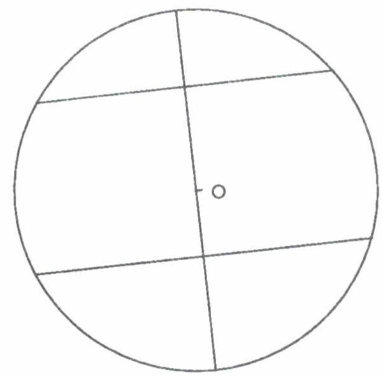
niveau 3

Fiche n° PC 12

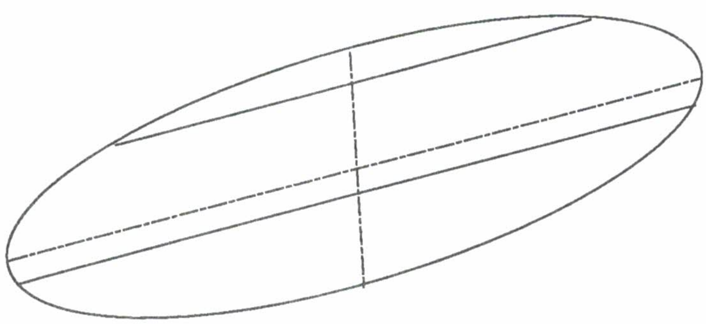
Partage d'un disque en quatre secteurs égaux.



1. Γ est un cercle de centre O .
A , B , C , D sont quatre points de C tels que (AB) soit parallèle à (CD) .
I est le milieu de [AB] et J est celui de [CD].
Démontre que O appartient à la droite (IJ) .

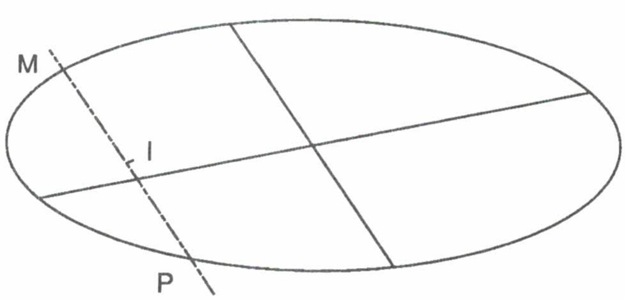


2. L'exercice précédent met en évidence une méthode permettant de construire un diamètre d'un cercle à partir de deux cordes parallèles.
Utilise-la pour trouver le centre du cercle ci-contre.



3. Ce dessin représente un disque vu en perspective.
Construis son centre par la méthode utilisée à la question 2.

4. En utilisant le fait que la droite (IJ) est perpendiculaire aux deux cordes (démontré dans la question n° 1), trouve un partage du disque ci-contre en quatre parts égales.



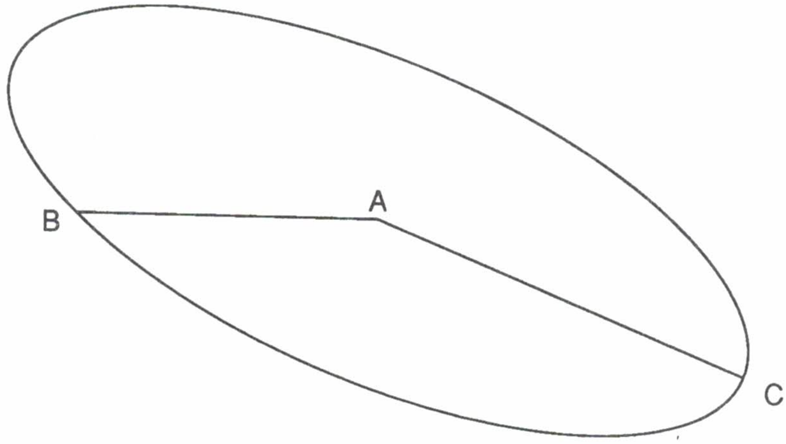
5. Ce dessin représente une galette de centre O partagée en quatre parts.
Sont-elles égales ?

niveau A

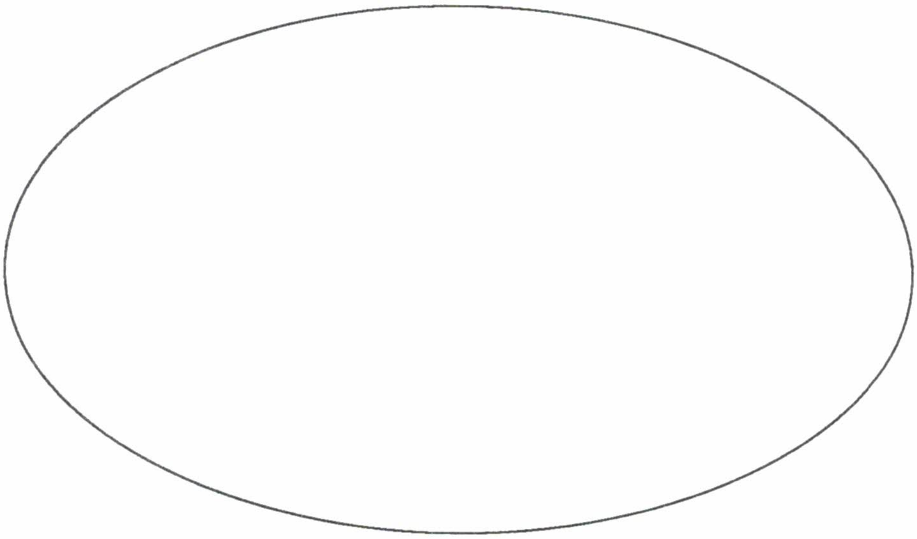
Fiche n° PC 13

Bissectrice d'un secteur angulaire.

1. Ce dessin représente un disque de centre A , vu en perspective.
Partage le secteur saillant BAC en deux secteurs égaux.



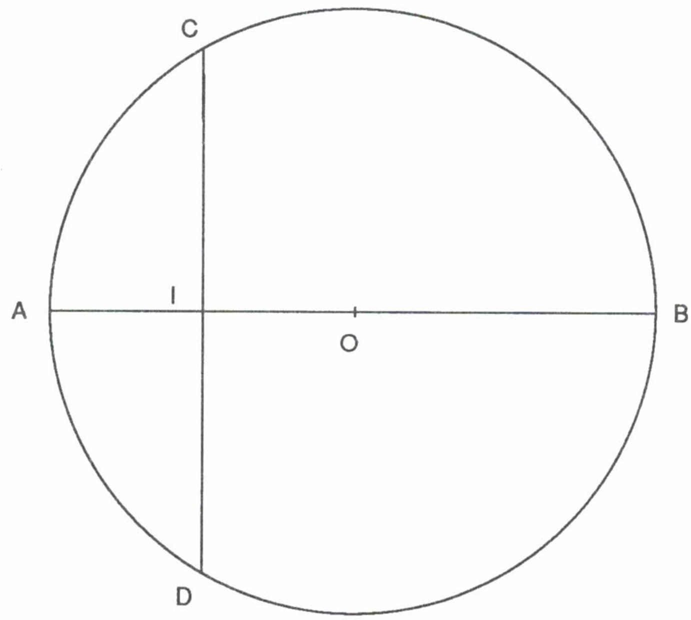
2. Ce dessin représente une galette. Partage-la en huit parts égales, puis en seize.



niveau A

Fiche n° PC 14

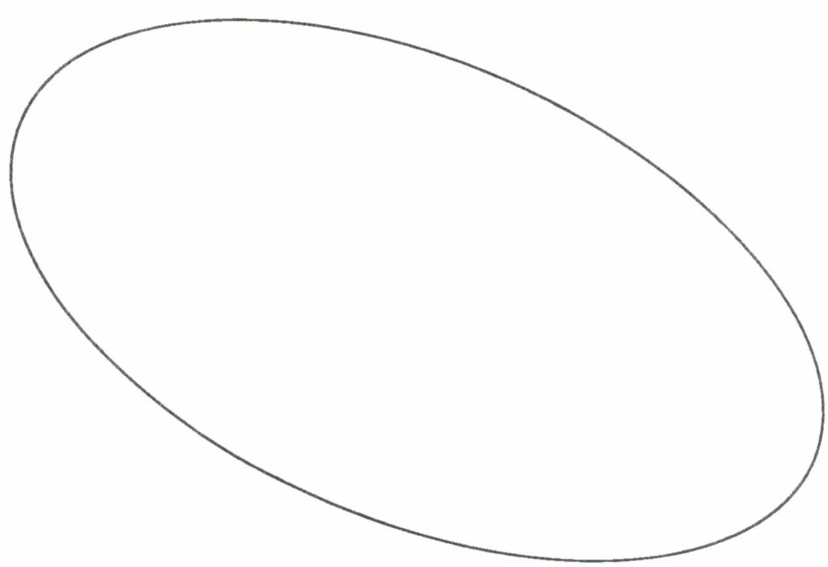
Trisection du disque.



1. Γ est un cercle de centre O et de diamètre [AB] .
(CD) est la médiatrice de [OA] .
Démontre que le triangle (BCD) est équilatéral.

2. Déduis des constructions et des résultats précédents le partage de cette tarte en trois parts égales. Puis en six parts égales.

Indication : tu pourras commencer par représenter deux diamètres qui sont perpendiculaires dans la réalité.

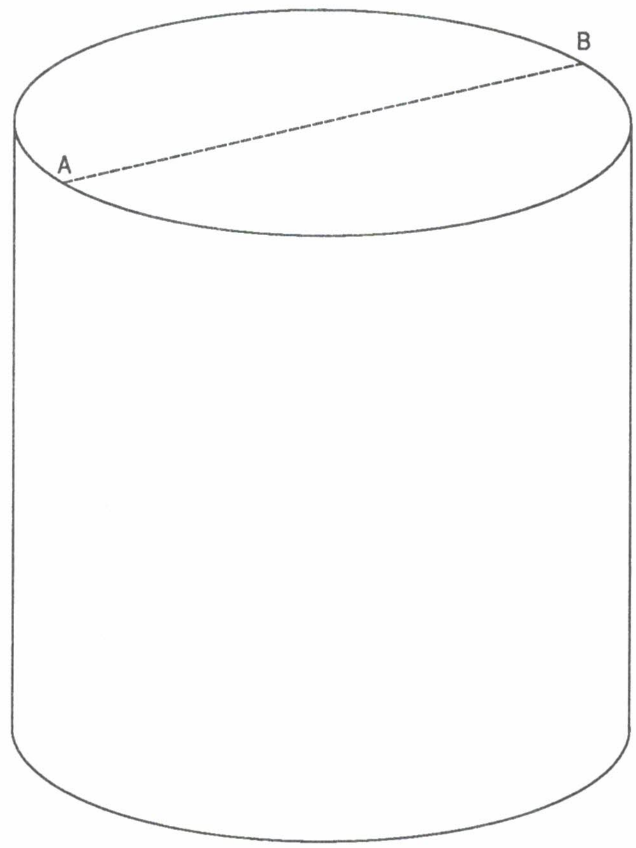


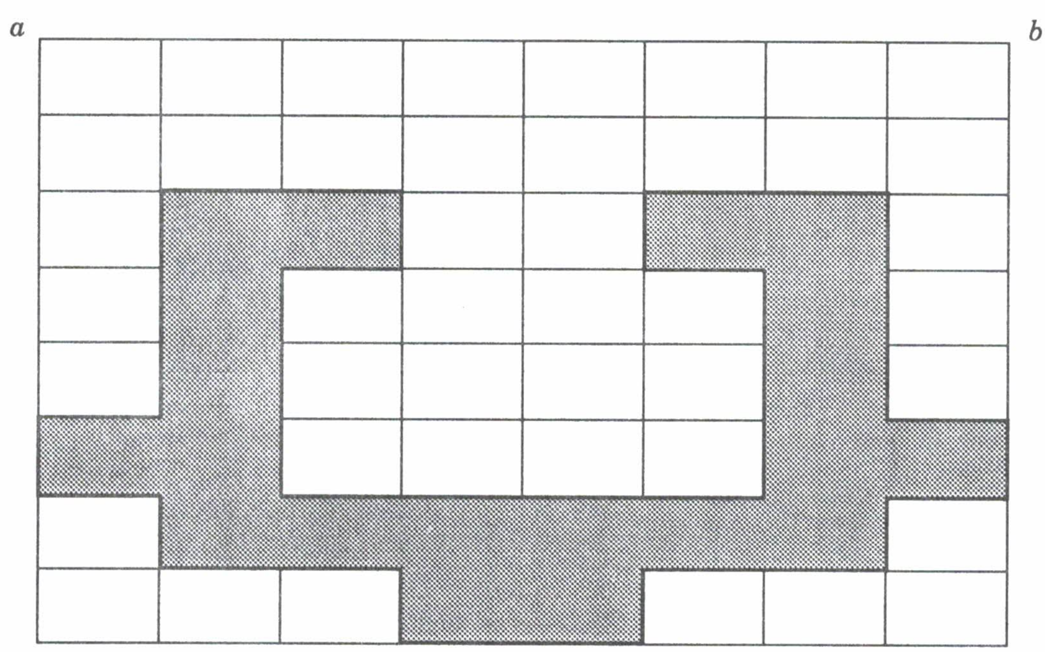
Etiquette sur une boîte cylindrique.

Le dessin ci-contre représente une boîte de conserve. Sur cette boîte on se propose de coller l'étiquette ci-dessous.

Commence par diviser le cercle qui entoure le dessus de la boîte en 16 arcs égaux, le premier d'entre eux admettant A comme extrémité. Tu peux procéder comme dans la fiche n° PC13

On colle l'étiquette sur l'avant de la boîte, *a* recouvrant A et *b* recouvrant B . Dessine-la.

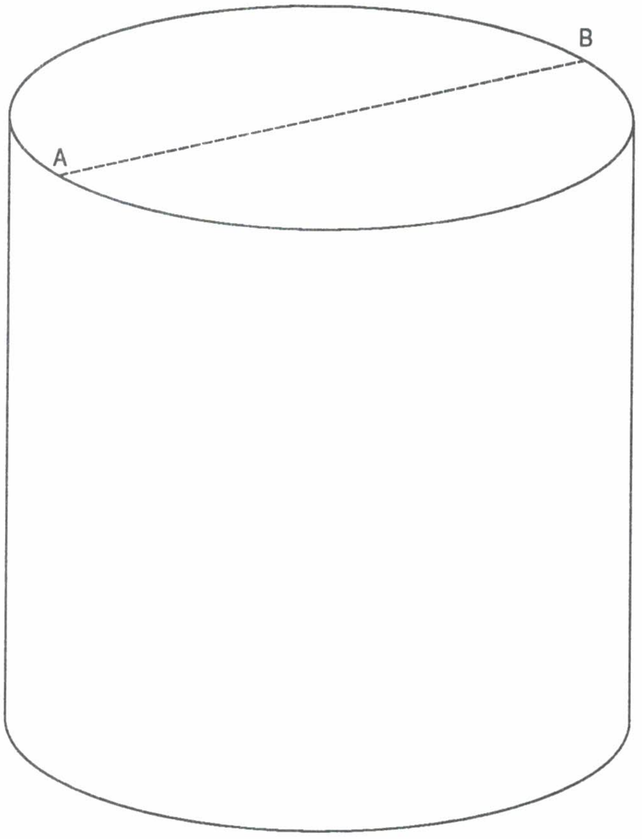




niveau A

Fiche n° PC 16

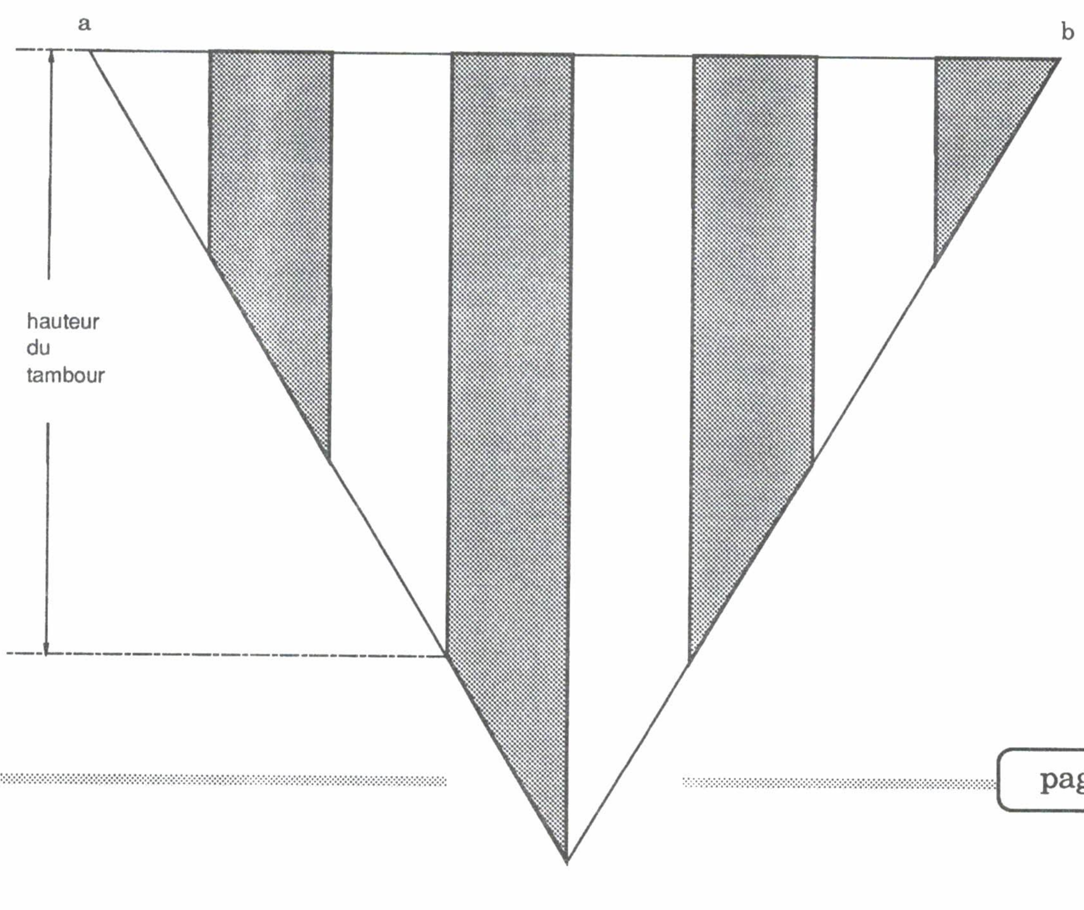
Décoration d'un tambour.



Le dessin ci-contre représente un tambour. Pour décorer ce tambour on se propose de fixer sur le devant le foulard triangulaire dessiné ci-dessous.

Commence par diviser avec soin le demi-cercle AB à l'avant de la surface supérieure du tambour en 16 arcs égaux. (Voir la fiche n° PC13) .

On place le foulard sur l'avant du tambour, a recouvrant A et b recouvrant B , en "tendant bien" ab . Dessine le résultat obtenu.



niveau A

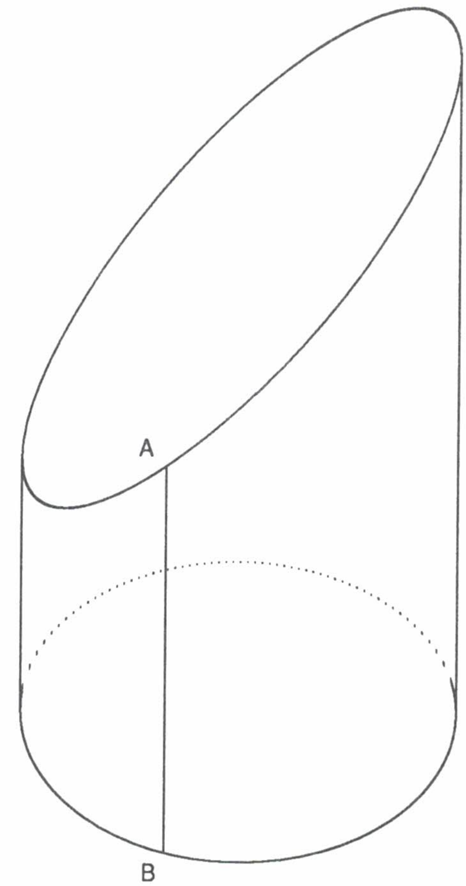
Fiche n° PC 17

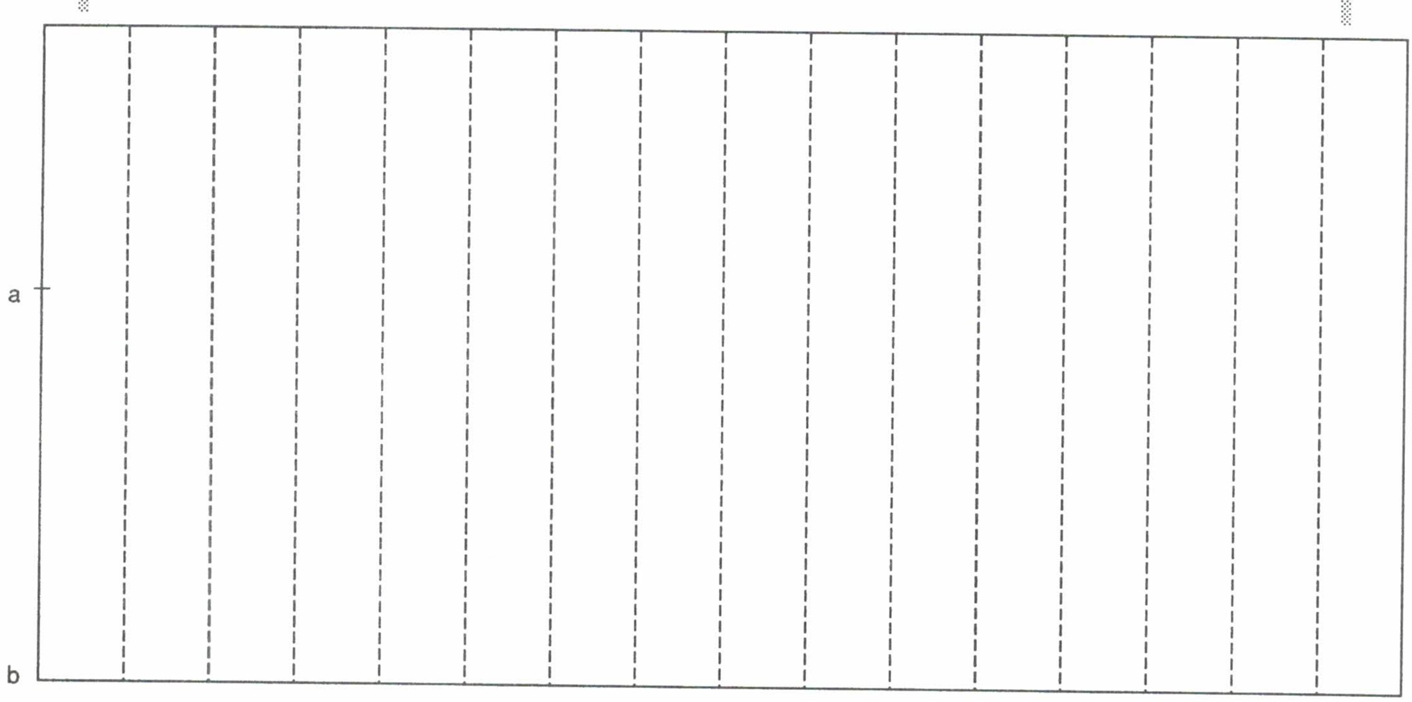
Coupe oblique d'un cylindre.

Le dessin ci-contre représente un cylindre en carton sectionné selon un plan oblique. On découpe ce morceau de cylindre selon [AB] puis on met à plat le morceau de carton ainsi obtenu.

Sur le dessin ci-contre commence par diviser le cercle inférieur en 16 arcs égaux en partant de B . Tu peux procéder comme dans la fiche PC13 .

Le dessin ci-dessous représente la surface développée (grandeur nature) du cylindre entier. Fais figurer sur ce dessin le contour de la section du cylindre tronqué. Le point a correspond à A sur le premier dessin et b à B .





niveau B

Fiche n° R 1

Points dans un repère (1) .

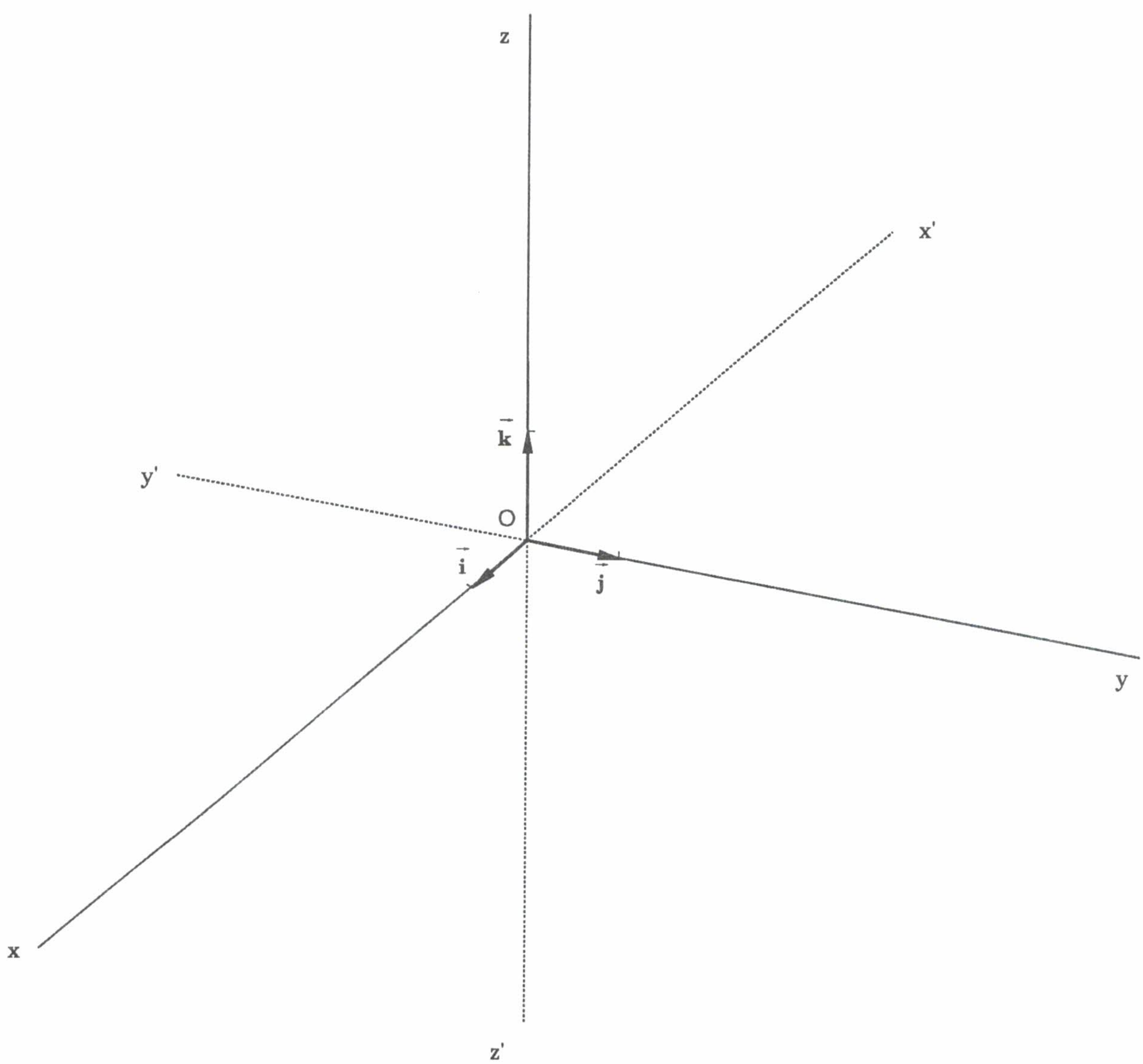
$(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère orthonormé de l'espace.

a) Place dans ce repère les points A (–1,6,0) , B (0,5,5) , C (1,0,4) et D (2,4,–1) .

b) On note :
- ❑ D_1 le projeté orthogonal de D sur le plan xOy
- ❑ D_2 le projeté orthogonal de D sur le plan yOz
- ❑ D_3 le projeté orthogonal de D sur le plan zOx

Donne les coordonnées de D_1 , D_2 et D_3 .

c) Existe-t-il un point M de l'espace qui se projette orthogonalement en B sur yOz et en A sur xOy ?



niveau B

Fiche n° R 2

Points dans un repère (2) .

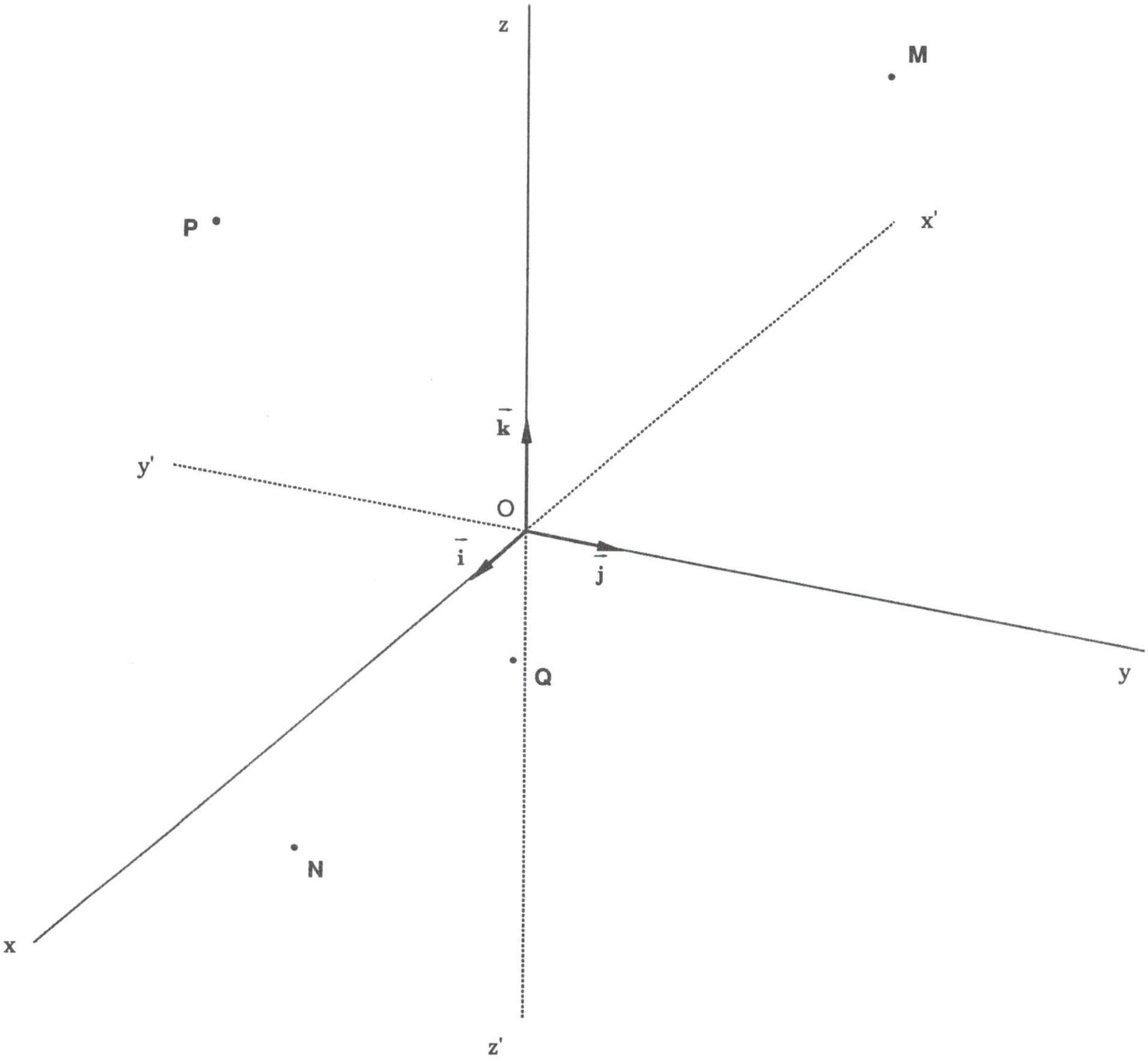
$(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère orthonormé de l'espace.

a) Le point M a pour cote 4 ; dessine son projeté orthogonal m sur le plan (xOy) . Déduis-en l'abscisse et l'ordonnée de M .

b) La cote du point N est -2 . Trouve son abscisse et son ordonnée.

c) Le point P a pour abscisse 3 ; dessine son projeté orthogonal p sur le plan (yOz) . Déduis-en l'ordonnée et la cote de P .

d) Le point Q a pour ordonnée 3 . Trouve son abscisse et sa cote.



Plans et droites liés aux axes du repère.

1. Quel est l'ensemble E_1 des points $M(x,y,z)$ tels que $z = 0$?

2. Soit E_2 l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace tels que $z = 2$.
Place le point A de cet ensemble situé sur l'axe Oz, puis décris E_2 à l'aide de A et de E_1.

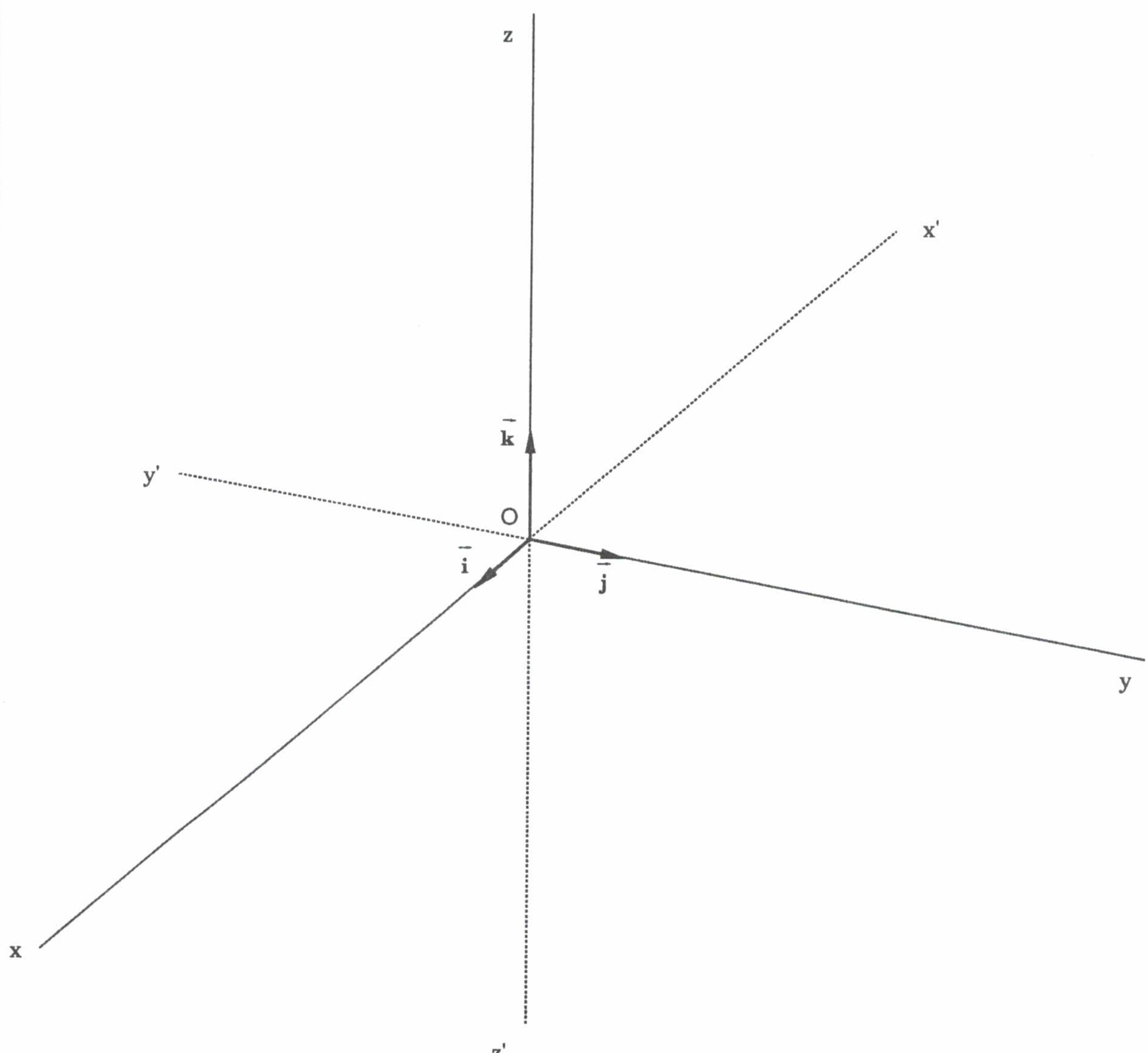
3. Quel est l'ensemble E_3 des points $M(x,y,z)$ tels que $x = 3$?

4. Soit E_4 l'ensemble des points $M(x,y,z)$ tels que $x = 3$ et $z = 2$,
Place un point C de cet ensemble dans le repère ci-contre.
Quelle est la nature géométrique de E_4 ? Dessine E_4.

5. Dessine l'ensemble E_5 des points $M(x,y,z)$ tels que $y = -2$ et $z = 1$,

6. Dessine enfin l'ensemble E_6 des points $M(x,y,z)$ tels que $x = 3$ et $y = -2$.

7. Détermine les intersections de E_4 et E_5, de E_5 avec E_6 et de E_4 avec E_6.



niveau B

Fiche n° R 4

Plans parallèles aux axes.

1. a) Soit E_o l'ensemble des points $M(x,y,z)$ tels que $x+y = 4$ et $z = 0$.
Représente E_o sur la fig. 1 . Quelle est la nature de E_o ?

b) Représente sur la fig. 1 l'ensemble E_1 des points $M(x,y,z)$ tels que $x+y = 4$ et $z = 2$.

c) Colorie sur la fig. 1 l'ensemble E_3 des points (x,y,z) tels que $x+y = 4$ et $0 \leq z \leq 2$.
Fais apparaître la partie de E_3 dont les points ont leur trois coordonnées positives.

d) Quelle est la nature de l'ensemble E_4 des points $M(x,y,z)$ tels que $x + y = 4$?
Précise sa position par rapport aux axes et aux plans du repère, puis utilise tes observations pour en suggérer une représentation sur la fig. 2.

2. Mêmes questions qu'en 1°d) avec l'ensemble E_5 des points $M(x,y,z)$ tels que $x + z = 3$, que tu représenteras sur la fig. 3.

3. Recommence avec l'ensemble E_6 des points $M(x,y,z)$ tels que $y - z = 5$, que tu représenteras sur la fig. 4.

figure 1.

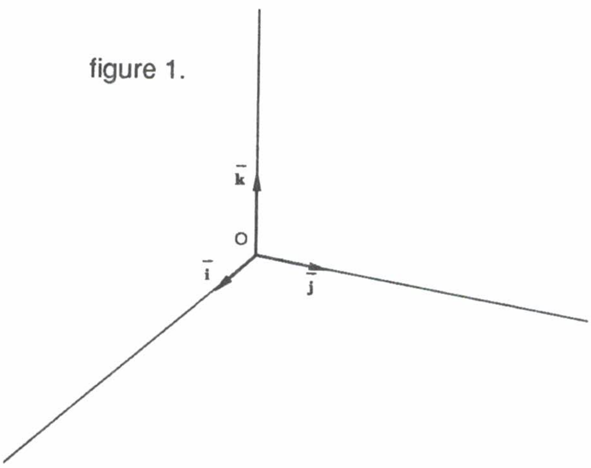


figure 2.

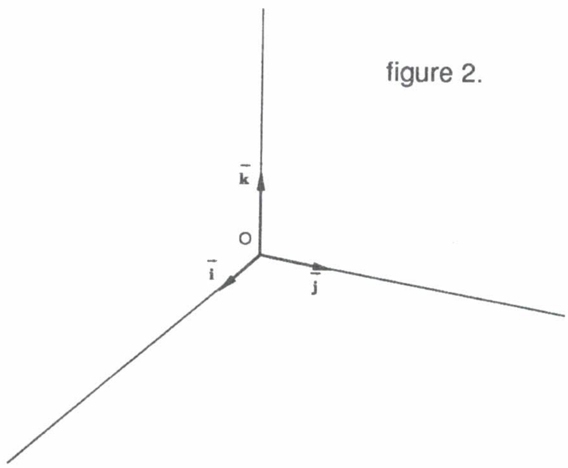


figure 3.

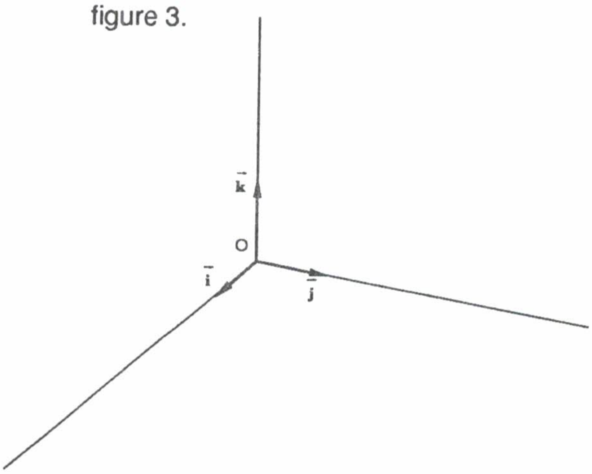
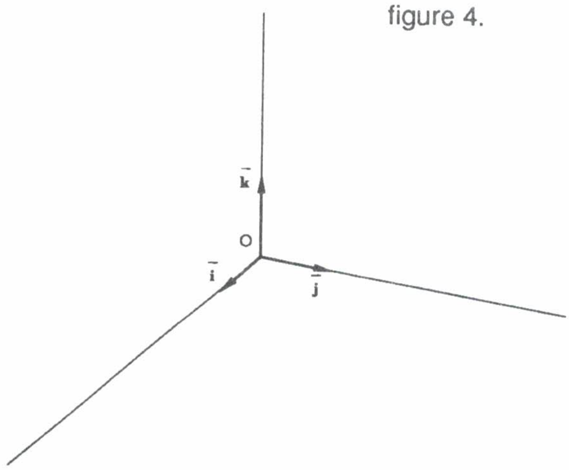


figure 4.



niveau B

Fiche n° R 5

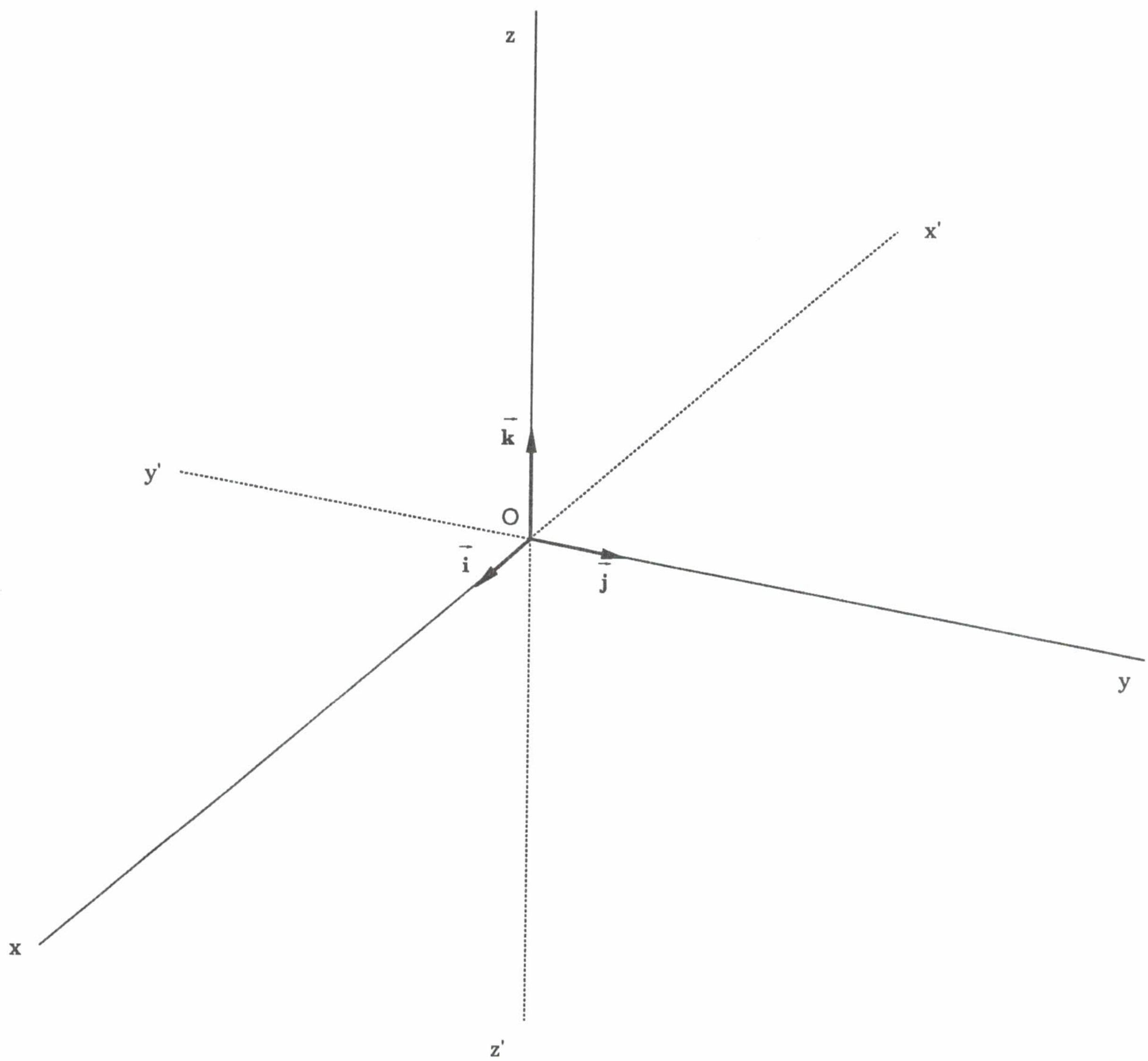
Prisme droit dans un repère (1) .

1. Colorie l'ensemble E_1 des points $M(x,y,z)$ tels que $-1 \leq x \leq 2$, $2 \leq y \leq 3$ et $z = 0$.
Quelle est la nature de E_1 ?

2. Colorie l'ensemble E_2 des points $M(x,y,z)$ tels que $-1 \leq x \leq 2$, $2 \leq y \leq 3$ et $z = -2$.
Quelle est la nature de E_2 ?

3. Colorie l'ensemble E_3 des points $M(x,y,z)$ tels que $-1 \leq x \leq 2$, $2 \leq y \leq 3$ et $z = 3$.

4. Dessine enfin l'ensemble E_4 des points $M(x,y,z)$ tels que $-1 \leq x \leq 2$, $2 \leq y \leq 3$ et $-2 \leq z \leq 3$.
Quel est le nom du solide obtenu ?



niveau B

Fiche n° R 6

Prisme droit dans un repère (2) .

1. Représente l'ensemble E_1 des points M dont les coordonnées (x,y,z) vérifient :

$$x \geq 0 \ , \ y \geq 0 \ , \ x+y = 3 \ \text{et} \ z = 0 \ .$$

Quelle est la nature géométrique de cet ensemble ?

2. Colorie successivement les ensembles E_2 et E_3 des points M dont les coordonnées (x,y,z) vérifient :

— pour E_2 : $x \geq 0 \ , \ y \geq 0 \ , \ x+y \leq 3 \ \text{et} \ z = 0 \ ,$

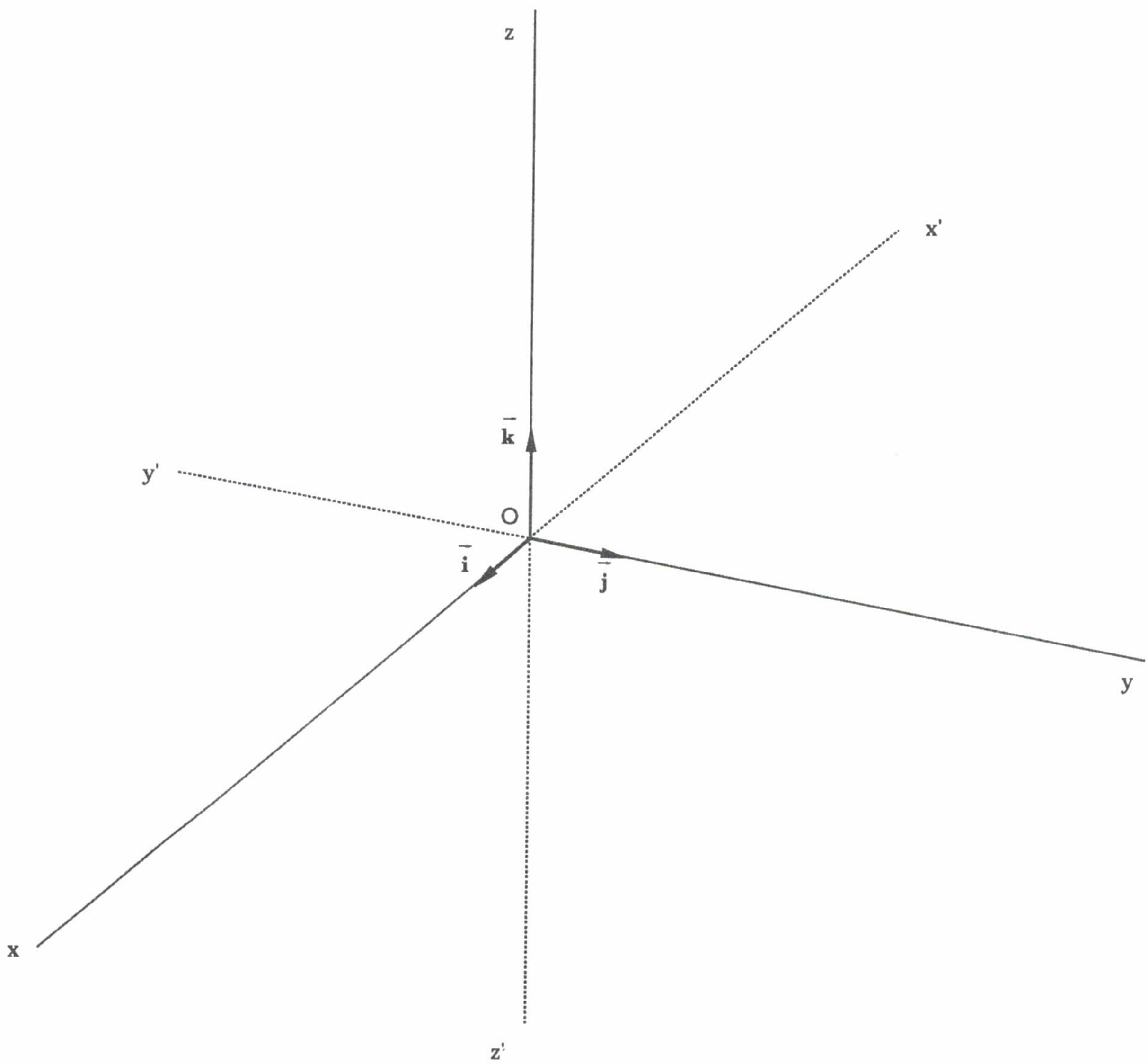
— pour E_3 : $x \geq 0 \ , \ y \geq 0 \ , \ x+y \leq 3 \ \text{et} \ z = 3 \ .$

Quelle est la nature géométrique de ces ensembles ?

3. Représente l'ensemble des points $M(x,y,z)$ tels que :

$$x \geq 0 \ , \ y \geq 0 \ , \ x+y \leq 3 \ \text{et} \ 0 \leq z \leq 3 \ .$$

Quelle est le nom de ce solide ?



niveau B

Fiche n° R 7

Prisme droit dans un repère (3) .

1. Colorie successivement les ensembles E_1 et E_2 des points M dont les coordonnées (x,y,z) vérifient :

— pour E_1 : $x \geq 1$, $y \geq 1$, $3 \leq x+y \leq 6$ et $z = 0$,

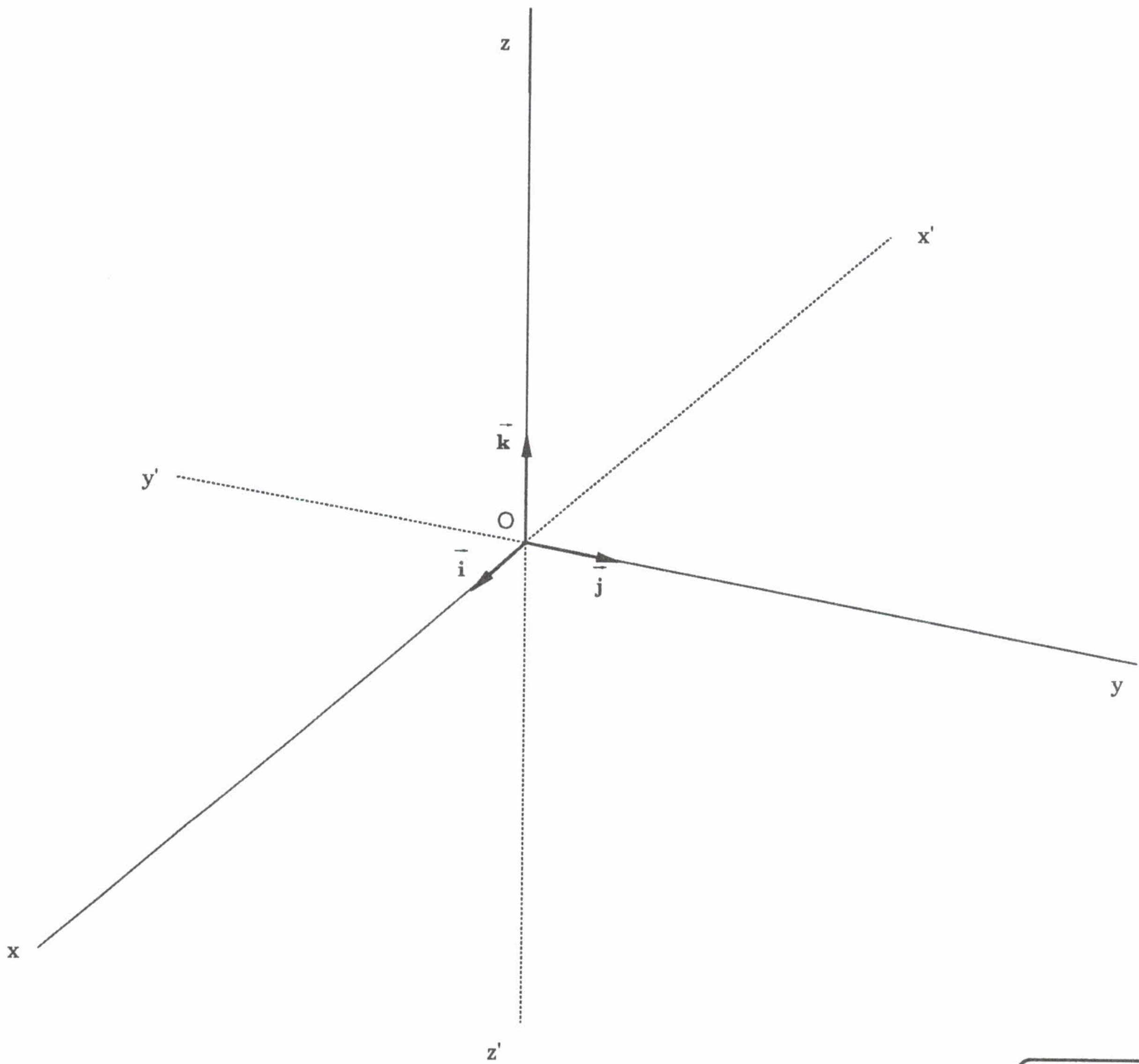
— pour E_2 : $x \geq 1$, $y \geq 1$, $3 \leq x+y \leq 6$ et $z = -3$.

Quelle est la nature géométrique des ensembles E_1 et E_2 ?

2. Représente l'ensemble des points M(x,y,z) tels que :

$$x \geq 1 \ , \ y \geq 1 \ , \ 3 \leq x+y \leq 6 \ \text{ et } \ -3 \leq z \leq 0 \ .$$

Comment s'appelle le solide obtenu ?



niveau B

Fiche n° R 8

Prisme droit dans un repère (4) .

1. Colorie l'ensemble E des points M(x,y,z) tels que :

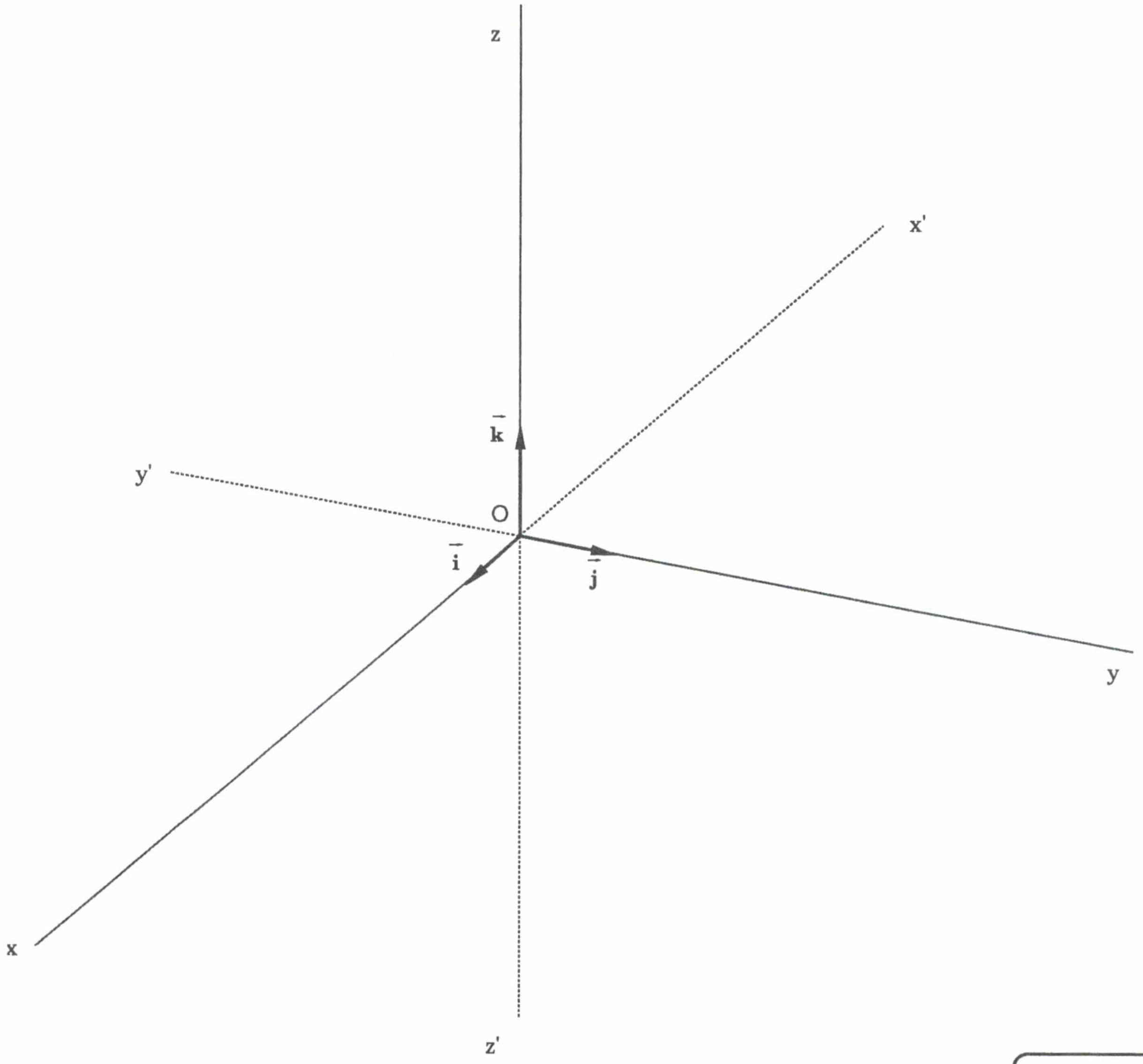
$$x \geq 0 \ , \ z \geq 0 \ , \ x+z \leq 4 \ \text{ et } \ y = 0 \ .$$

Quelle est la nature géométrique de E ?

2. Représente l'ensemble des points M(x,y,z) tels que :

$$x \geq 0 \ , \ z \geq 0 \ , \ x+z \leq 4 \ \text{ et } \ -4 \leq y \leq 4 \ .$$

Quel est le nom du solide obtenu ?



niveau B

Fiche n° R 9

Prisme droit dans un repère (5).

1. Dessine les ensembles E_1 et E_2 des points $M(x,y,z)$ tels que :

— pour E_1 : $z = 0$, $y = x$ et $x+y \leq 6$,

— pour E_2 : $z = 0$, $y = 3x$ et $x+y \leq 6$.

Quelle est la nature géométrique de E_1 et E_2 ?

2. Soit E l'ensemble des points $M(x,y,z)$ tels que :

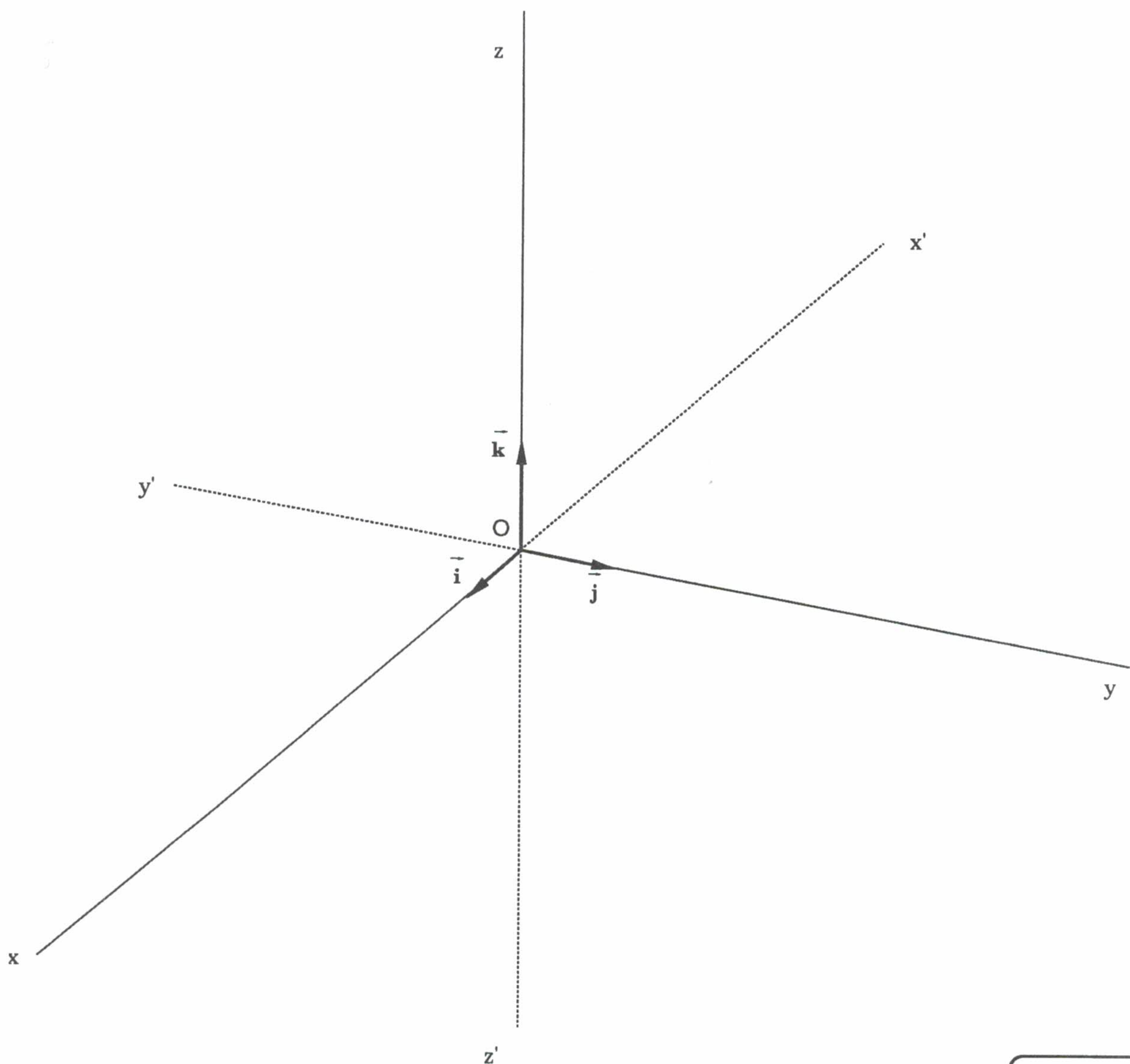
$$z = 0 \ , \ x \leq y \leq 3x \ \text{ et } \ x+y \leq 6 .$$

Montre que la condition $x \leq y \leq 3x$ implique que x et y sont positifs. Puis colorie l'ensemble E . Quelle est la nature géométrique de E ?

3. Représente l'ensemble des points $M(x,y,z)$ tels que :

$$x \leq y \leq 3x \ , \ x+y \leq 6 \ \text{ et } \ 0 \leq z \leq 4 .$$

Quel est le nom du solide obtenu ?



niveau B

Fiche n° R 10

Cylindre à base non circulaire (1).

1. Dessine l'ensemble des points M(x,y,z) tels que :

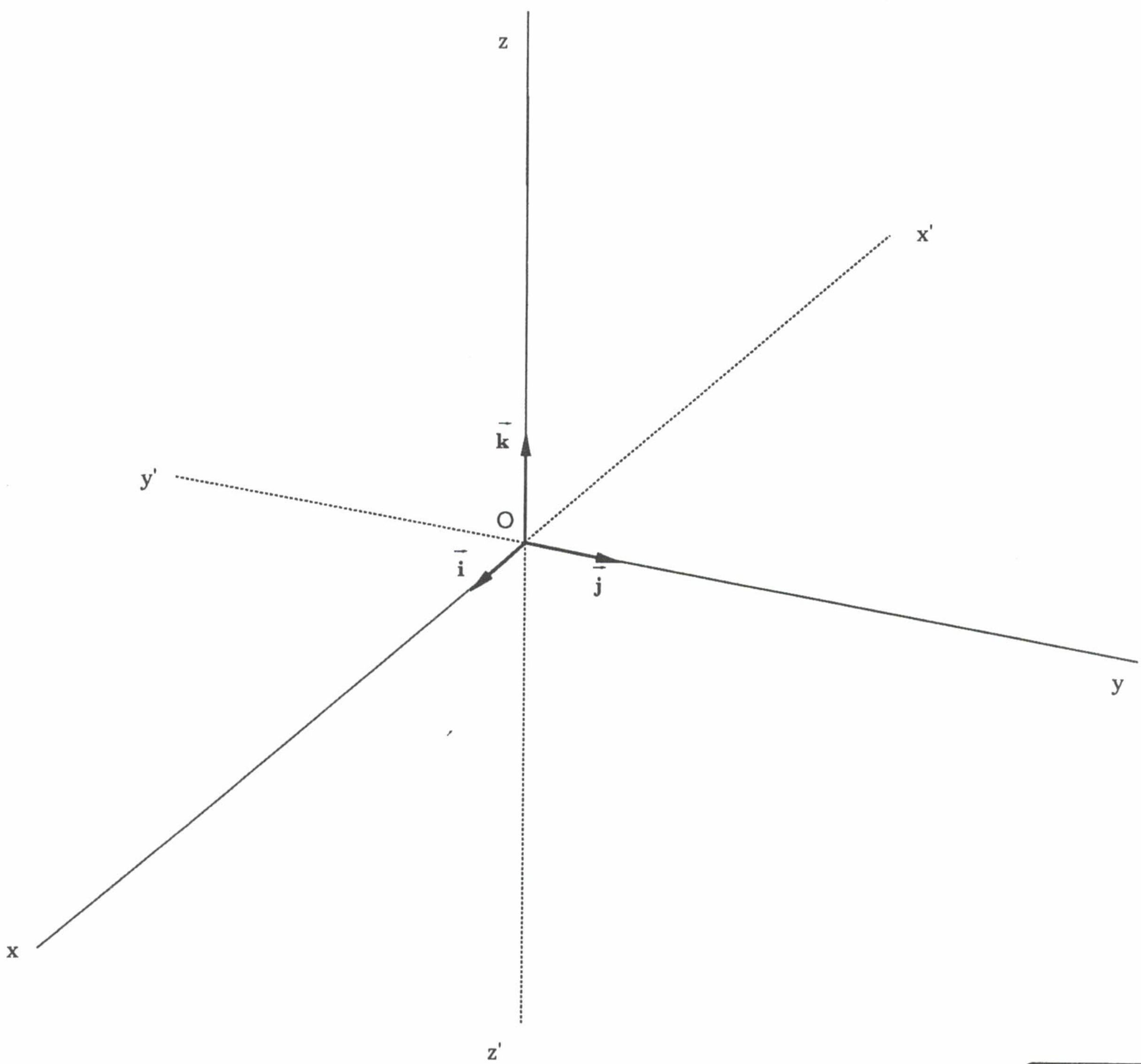
$$0 < x \leq 6 \ , \ 0 \leq y \leq 6 \ , \ z = 0 \ \text{ et } \ y = \frac{9}{x} .$$

2. Colorie l'ensemble des points M(x,y,z) tels que :

$$0 < x \leq 6 \ , \ 0 \leq y \leq 6 \ , \ z = 0 \ \text{ et } \ y \leq \frac{9}{x} .$$

3. Représente l'ensemble des points M(x,y,z) tels que :

$$0 < x \leq 6 \ , \ 0 \leq y \leq 6 \ , \ y \leq \frac{9}{x} \ \text{ et } \ 0 \leq z \leq 4 .$$



niveau B

Fiche n° R 11

Cylindre à base non circulaire (2) .

1. Dessine dans le plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les paraboles d'équations :

$$y = \frac{1}{2}x^2 \quad \text{et} \quad y = \frac{1}{4}x^2 + 4$$

Calcule les coordonnées de leurs points d'intersection, puis place-les sur la figure.

2. Colorie successivement les ensembles E_1 et E_2 des points $M(x,y,z)$ tels que :

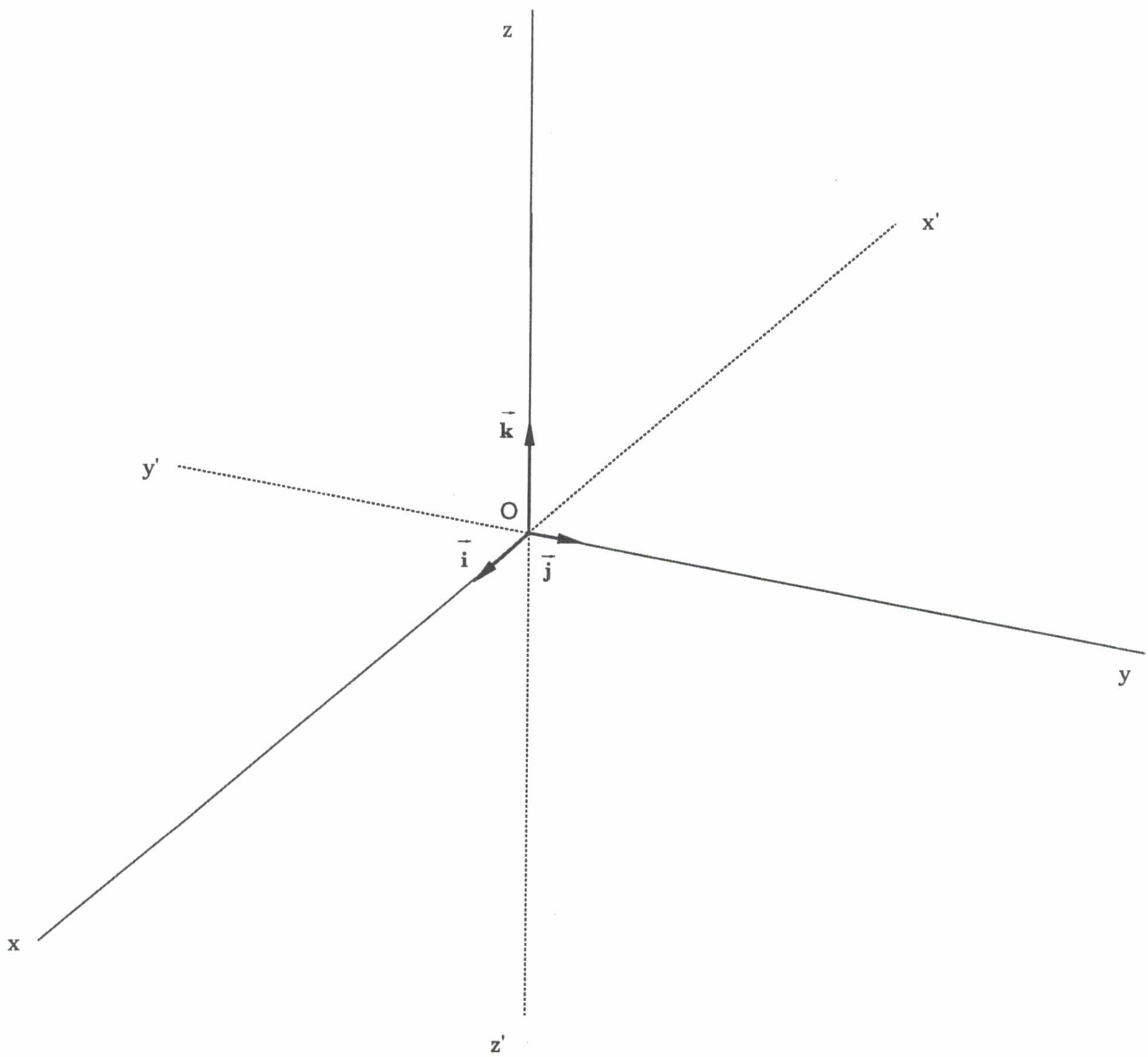
— pour E_1 : $\frac{1}{2}x^2 \leq y \leq \frac{1}{4}x^2 + 4$ et $z = 0$,

— pour E_2 : $\frac{1}{2}x^2 \leq y \leq \frac{1}{4}x^2 + 4$ et $z = 4$.

3. Représente l'ensemble des points $M(x,y,z)$ tels que :

$$\frac{1}{2}x^2 \leq y \leq \frac{1}{4}x^2 + 4 \quad \text{et} \quad 0 \leq z \leq 4 .$$

N'oublie pas de dessiner en pointillés les lignes cachées.



niveau B

Fiche n° R 12

Cylindre à base circulaire (1).

1. Soit E_1 l'ensemble des points $M(x,y,z)$ tels que $x^2 + z^2 = 4$ et $y = 0$.

Place les points de E_1 d'abscisse : $-2 ; -\frac{3}{2} ; -1 ; -\frac{1}{2} ; 0 ; \frac{1}{2} ; 1 ; \frac{3}{2} ; 1$.

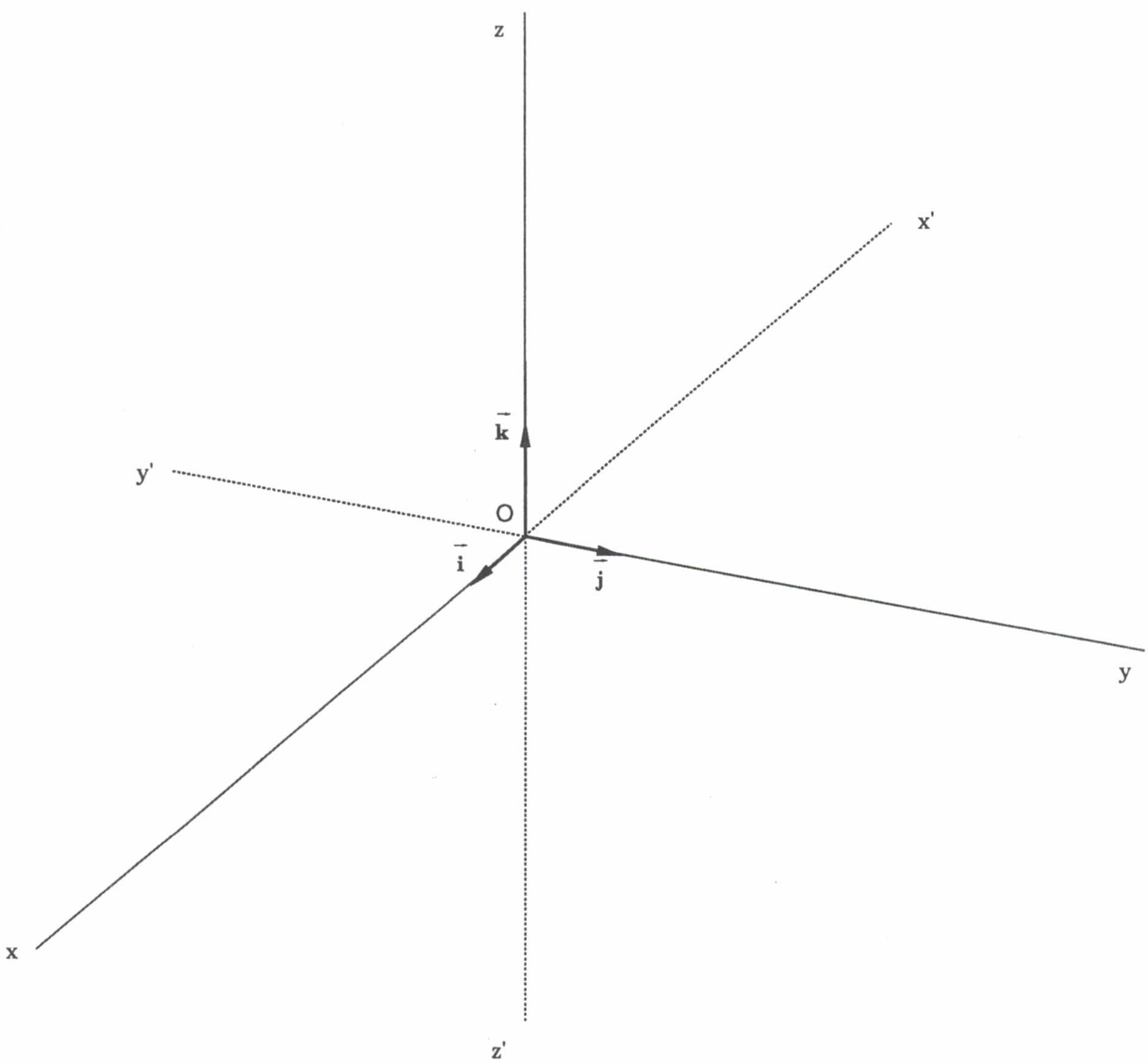
Quelle est la nature cet ensemble ? Précise ses éléments caractéristiques. Dessine l'ensemble E_1.

2. Colorie l'ensemble des points $M(x,y,z)$ tels que $x^2 + z^2 \leq 4$ et $y = 0$.

Quelle est la nature de cet ensemble ?

3. Représente l'ensemble E des points $M(x,y,z)$ tels que $x^2 + z^2 \leq 4$ et $0 \leq y \leq 5$.

Comment s'appelle le solide obtenu?



niveau B

Fiche n° R 13

Cylindre à base circulaire (2).

1. Dessine l'ensemble des points M(x,y,z) tels que :

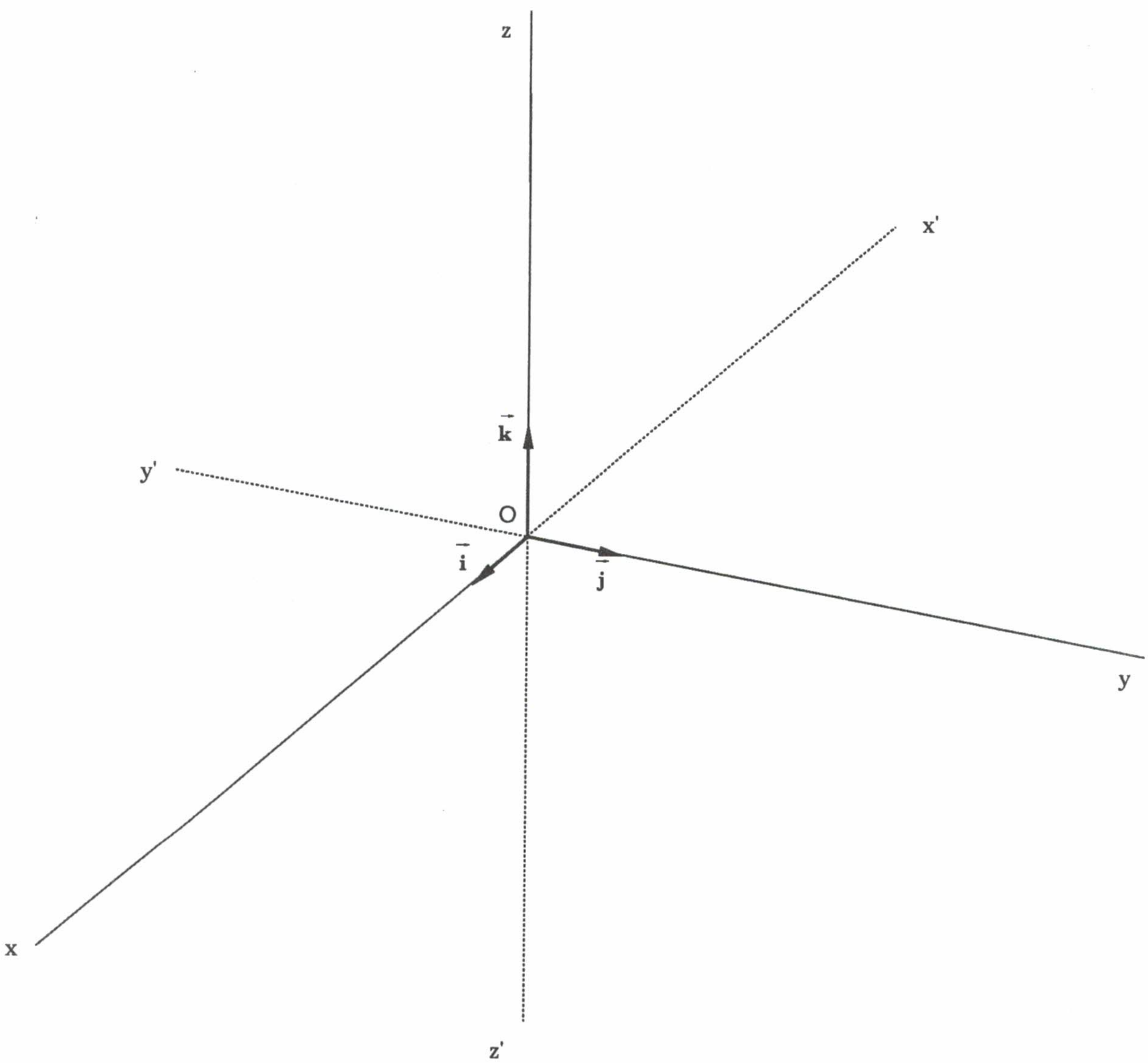
$$(x-2)^2 + (y-2)^2 = 4 \quad \text{et} \quad z = 0 .$$

Quelle est la nature de cet ensemble ? Précise ses éléments caractéristiques.

2. Représente l'ensemble des points M(x,y,z) tels que :

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 = 4 \quad \text{et} \quad 0 \leq z \leq 4 .$$

Quel est le solide obtenu ?



niveau C

Fiche n° R 14

Représentation paramétrique d'un segment.

1. Pour tout réel t dans l'intervalle $[-4;4]$ on note M_t le point de coordonnées $x = \frac{t}{2}$, $y = \frac{3}{4}t$, $z = -\frac{t}{2}$.

Soit S_1 l'ensemble des points M_t obtenus quand t varie de -4 à 4.

a) Place les points correspondant aux valeurs entières de t. Que peut-on dire de la disposition des points M_1 et M_{-1}, M_2 et M_{-2} ... ?
Démontre plus généralement que pour tout réel t de $[-4;4]$, M_{-t} est le symétrique de M_t par rapport à O.

b) Calcule les coordonnées de $\overrightarrow{OM_1}$. Démontre que $\overrightarrow{OM_t} = t\,\overrightarrow{OM_1}$.
Déduis-en la nature précise de S_1.

2. Soit S_2 l'ensemble des points N_t de coordonnées

$$x = -\frac{t}{3},\ y = -\frac{t}{2},\ z = \frac{t}{3},\ \text{avec } t \text{ dans l'intervalle } [-4;4].$$

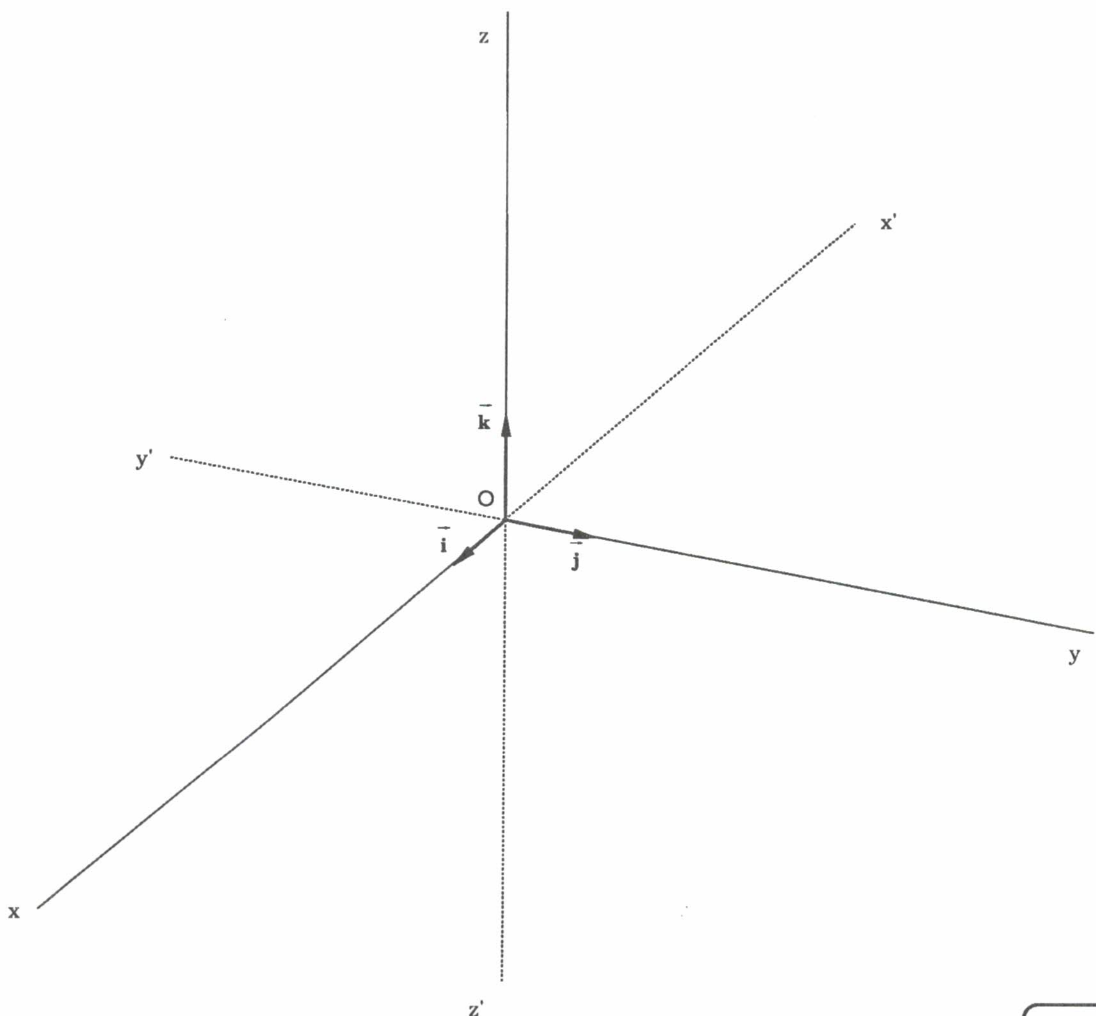
a) Place quelques points de S_2. Que peux-tu conjecturer ?

b) Vérifie que, pour tout t dans $[-4;4]$, $\overrightarrow{ON_t} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{OM_t}$.
Déduis-en le lien entre S_2 et S_1.

3. Soit S_3 l'ensemble des points P_t de coordonnées

$$x = -\frac{t}{3} + 1,\ y = -\frac{t}{2},\ z = \frac{t}{3} + 2,\ \text{avec } t \text{ dans l'intervalle } [-4;4].$$

Calcule les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{N_tP_t}$. Déduis-en la nature et le tracé de S_3.



niveau C

Fiche n° R 15

Représentation paramétrique d'un cercle, d'une ellipse.

1. Pour tout t de l'intervalle $[-\pi;\pi]$, on note $m(t)$ le point de coordonnées $x = 4 \cos t$, $y = 4 \sin t$, $z = 0$ et C l'ensemble de tous les points $m(t)$ obtenus quand t varie de $-\pi$ à π.

a) On se propose de dessiner l'ensemble C à partir de 16 de ses points : place les points m_k correspondant à $t = k\pi/8$ avec k entier variant de -8 à 8 *(tu peux utiliser d'éventuelles symétries)*.

b) Calcule la longueur $Om(t)$. Peux-tu en déduire la nature de la courbe C ?

2. Pour tout t de $[-\pi;\pi]$, on note $M(t)$ le point de coordonnées $x = 4 \cos t$, $y = 4 \sin t$ et $z = 2 \sin t$, et E l'ensemble de tous les points $M(t)$ quand t varie de $-\pi$ à π.

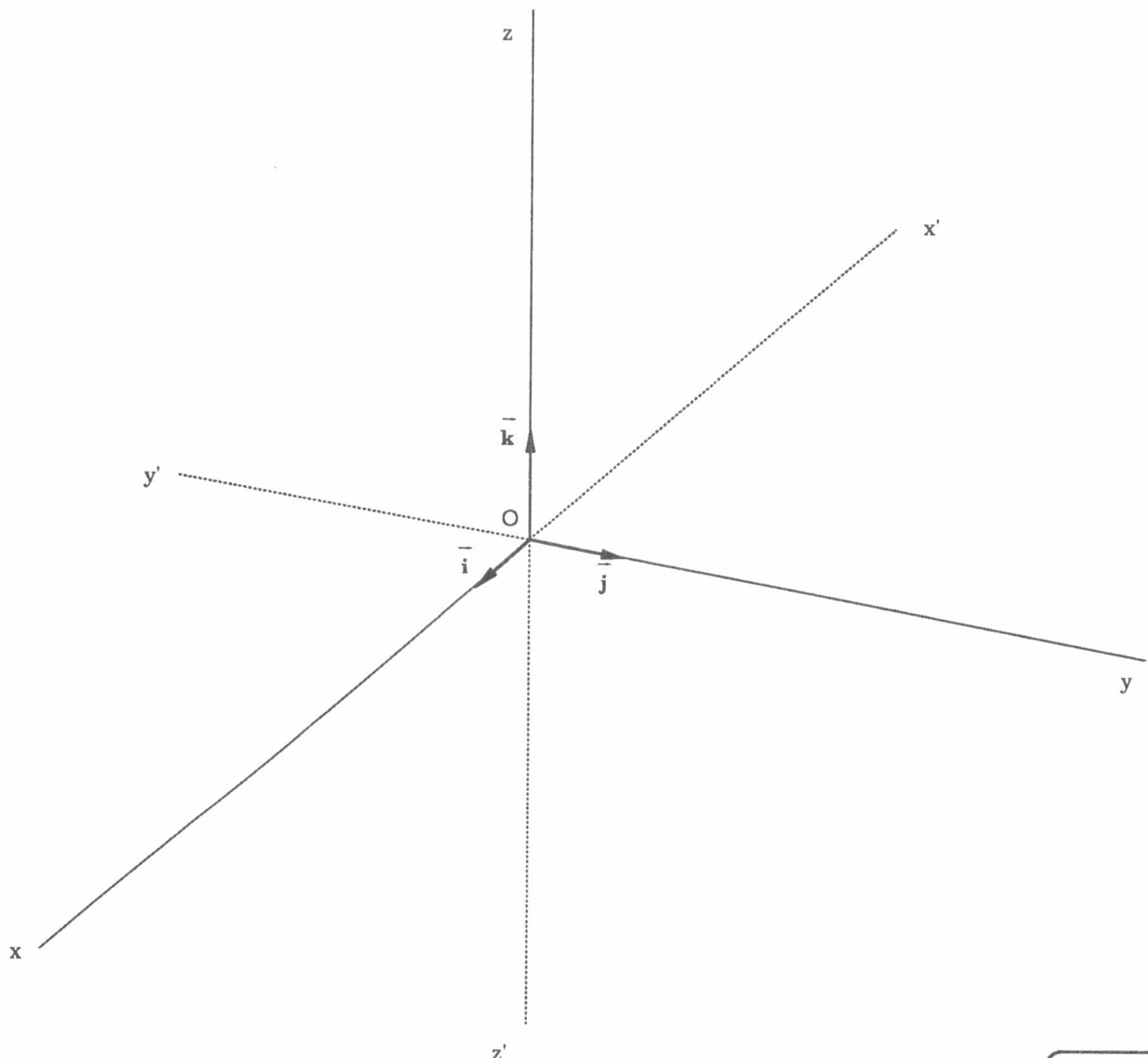
a) Détermine E à partir de 16 points M_k correspondant à $t = k\pi/8$ avec k entier variant de -8 à 8.

b) On se propose de démontrer que les points de E sont à l'intersection d'un cylindre et d'un plan :

— démontre que les points M de E ont des coordonnées qui vérifient : $x^2 + y^2 = 16$ et $-2 \leq z \leq 2$. Sur quelle surface E est-elle située.

— Montre que les coordonnées de M vérifient aussi $y - 2z = 0$.

— Conclus.



niveau C

Fiche n° R 16

Représentation paramétrique d'une hélice circulaire.

1. Pour tout t de l'intervalle $[0;2\pi]$, on note $m(t)$ le point de coordonnées $x = 3\cos t$, $y = 3\sin t$, $z = 0$, et C l'ensemble de tous les points $m(t)$ obtenus quand t varie de 0 à 2π.

a) On se propose de dessiner l'ensemble C à partir de 16 de ses points : place les points m_k correspondant à $t = k\pi/8$ avec k entier variant de 0 à 16 *(tu peux utiliser d'éventuelles symétries)*.

b) Calcule la longueur $Om(t)$. Sur quelle courbe sont placés ces points ?

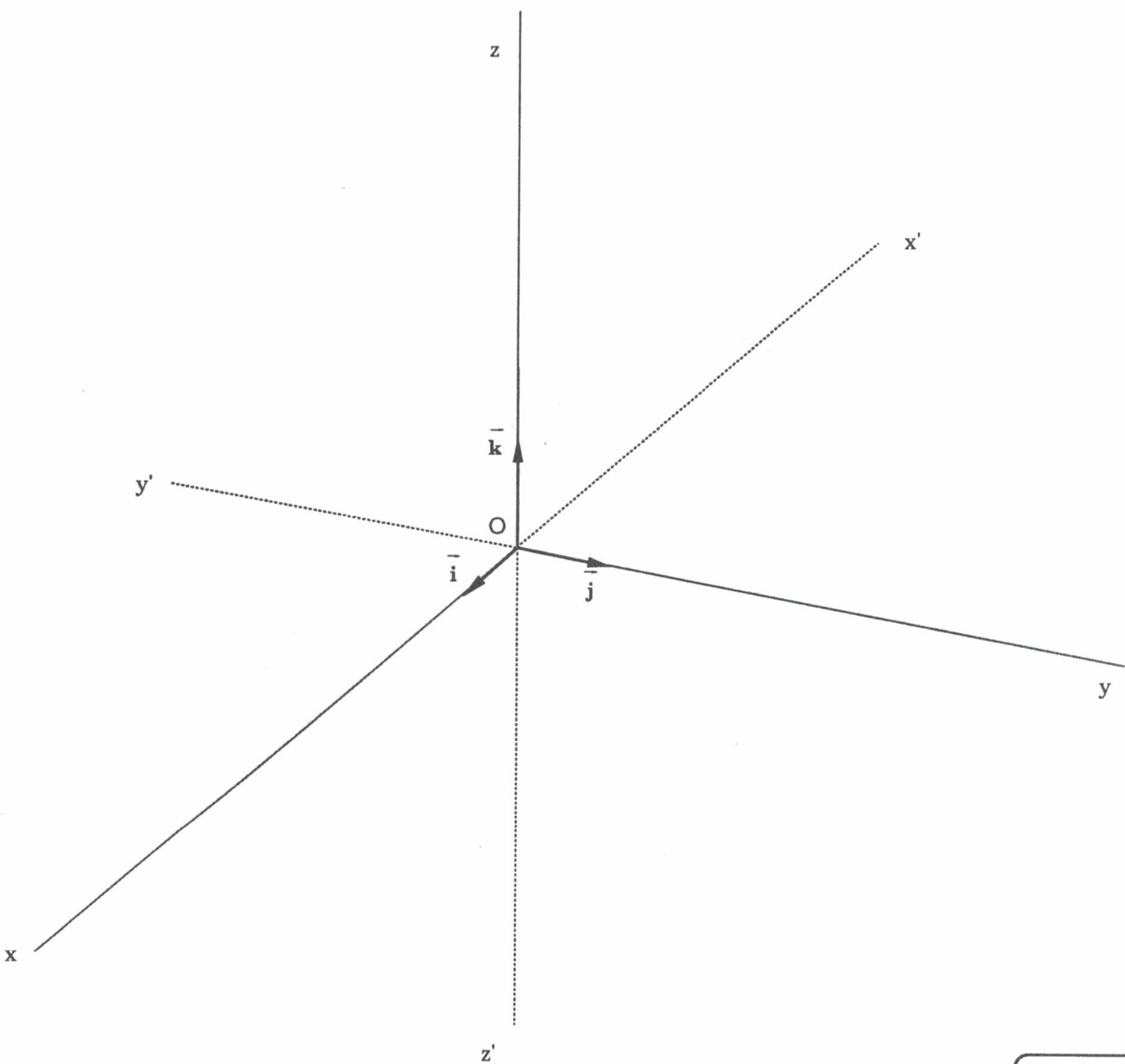
2. Pour tout t de $[0;2\pi]$, on note $M(t)$ le point de coordonnées : $x = 3\cos t$, $y = 3\sin t$ et $z = 2t/\pi$, et H l'ensemble de tous les points $M(t)$ quand t varie de 0 à 2π.

a) Dessine H à partir des 16 points M_k correspondant à $t = k\pi/8$, avec k entier variant de 0 à 16.

b) Démontre que les points M de H ont des coordonnées qui vérifient :

$$x^2 + y^2 = 9 \qquad \text{et} \qquad 0 \leq z \leq 4.$$

Sur quelle surface la courbe H est-elle située ?



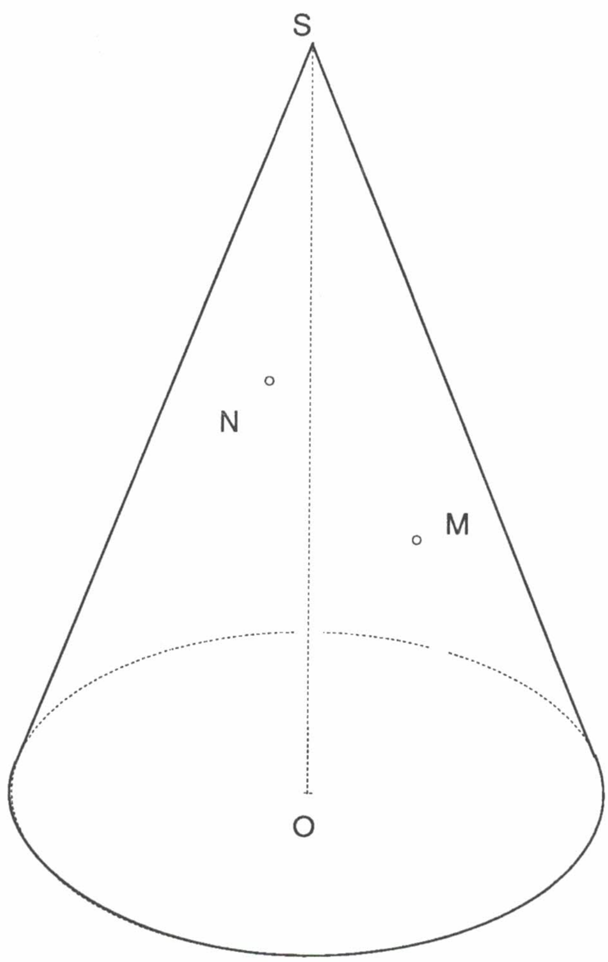
Points sur un cône.

La figure ci-dessous représente un cône de révolution.

a) Comment suggérer que le point M est sur le cône, à l'avant ?

b) Comment suggérer que le point N est sur le cône, à l'arrière ?

c) A partir de mesures précises sur la figure, calcule la distance de chacun de ces points au plan de base sachant que OS = 2m .

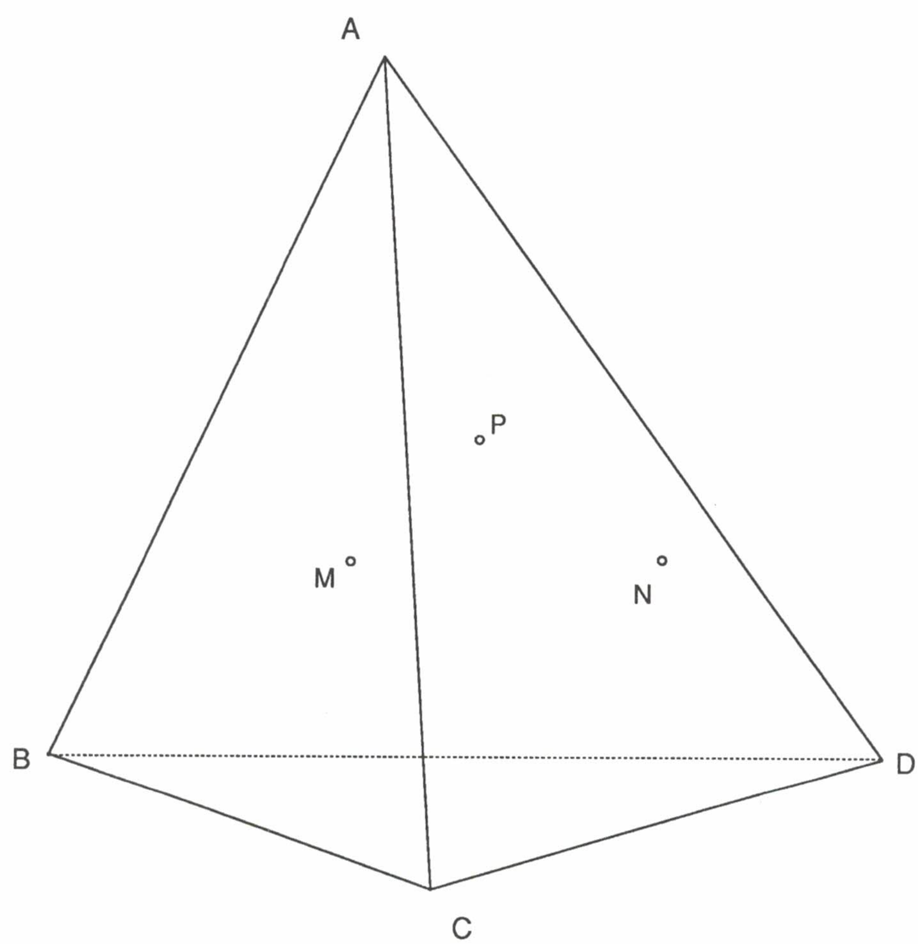


Points sur un tétraèdre.

La figure ci-dessous représente un tétraèdre ABCD .

a) Comment suggérer que les points M , N , P sont respectivement sur les faces ABC , ACD et ABD du tétraèdre.

b) Quel est celui de ces points dont la distance au plan (BCD) est la plus grande ? la plus petite ?

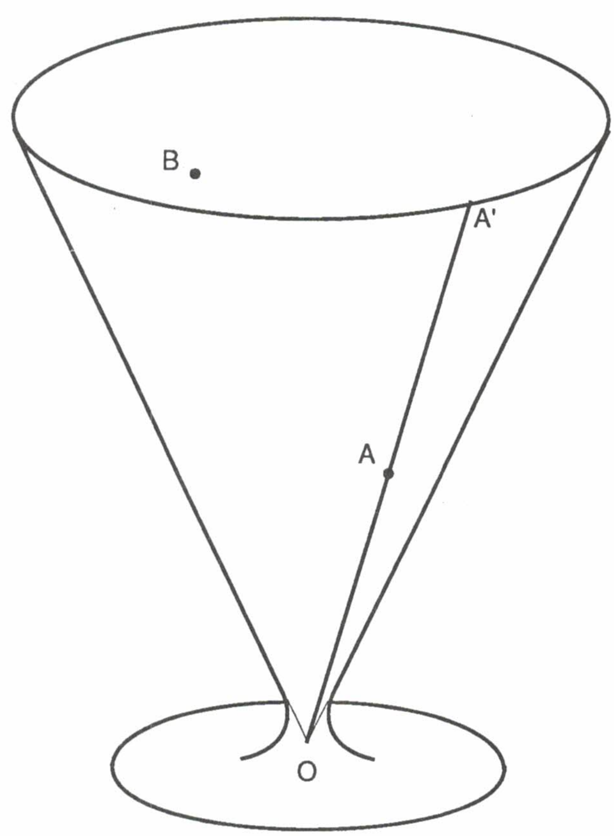


Liquide dans un verre conique (1) .

La figure ci-dessous représente un verre.
A et B sont deux points marqués sur ce verre.

1. On y verse un liquide jusqu'au niveau du point A .
Dessine la surface du liquide en plaçant, de façon précise, au moins sept points de son contour.
(*Indication* : sers-toi du rapport $\frac{OA}{OA'}$) .

2. On verse maintenant du liquide jusqu'au niveau du point B .
Dessine, de la même manière, le contour de la surface obtenue.



niveau A

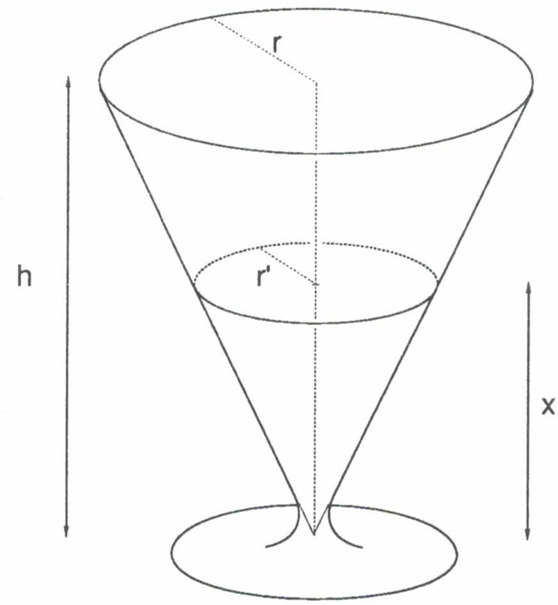
Fiche n° C 4

Liquide dans un verre conique (2) .

Paul et son petit frère André ont très soif mais n'ont pas les moyens de se faire servir plus d'un verre de diabolo menthe pour eux deux.

Ils sont servis dans un verre en forme de cône, rempli à ras bord. Paul boit le premier et donne à son frère le verre encore rempli aux trois quarts de sa hauteur.

André trouve son frère bien généreux.
Qu'en penses-tu à première vue ?



Les notations étant celles de la figure ci-contre, on appelle $V(h)$ le volume maximum de liquide que l'on peut verser dans ce verre et plus généralement $V(x)$ le volume de liquide contenu dans le verre lorsque la hauteur du liquide est égale à x .

1. Exprime $V(h)$ en fonction de h et de r .

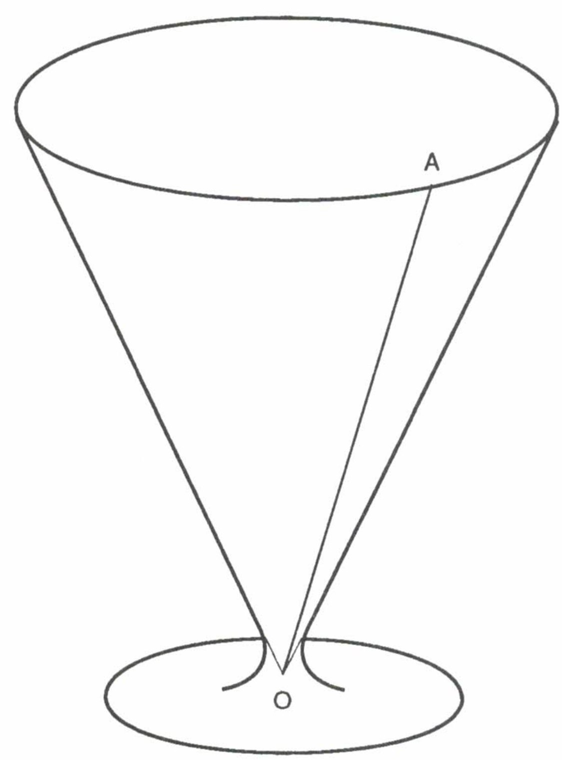
2. a) Montre que, lorsque la hauteur du liquide est égale à x , la surface du liquide est un disque de rayon $r' = r . (x/h)$.
Calcule alors $V(x)$ et établis que :

$$V(x) = V(h) . \left(\frac{x}{h} \right)^3 .$$

b) Retrouve ainsi la fraction de liquide laissée par Paul à son frère.

c) Quelle fraction de hauteur aurait-il dû laisser dans le verre pour que le partage soit équitable ?

3. On désire graduer le verre sur [OA] .
Marque sur [OA] des traits correspondant respectivement au quart, à la moitié et aux trois quarts de la capacité du verre puis dessine les lignes de niveau correspondantes.



Cône dans un repère (1) .

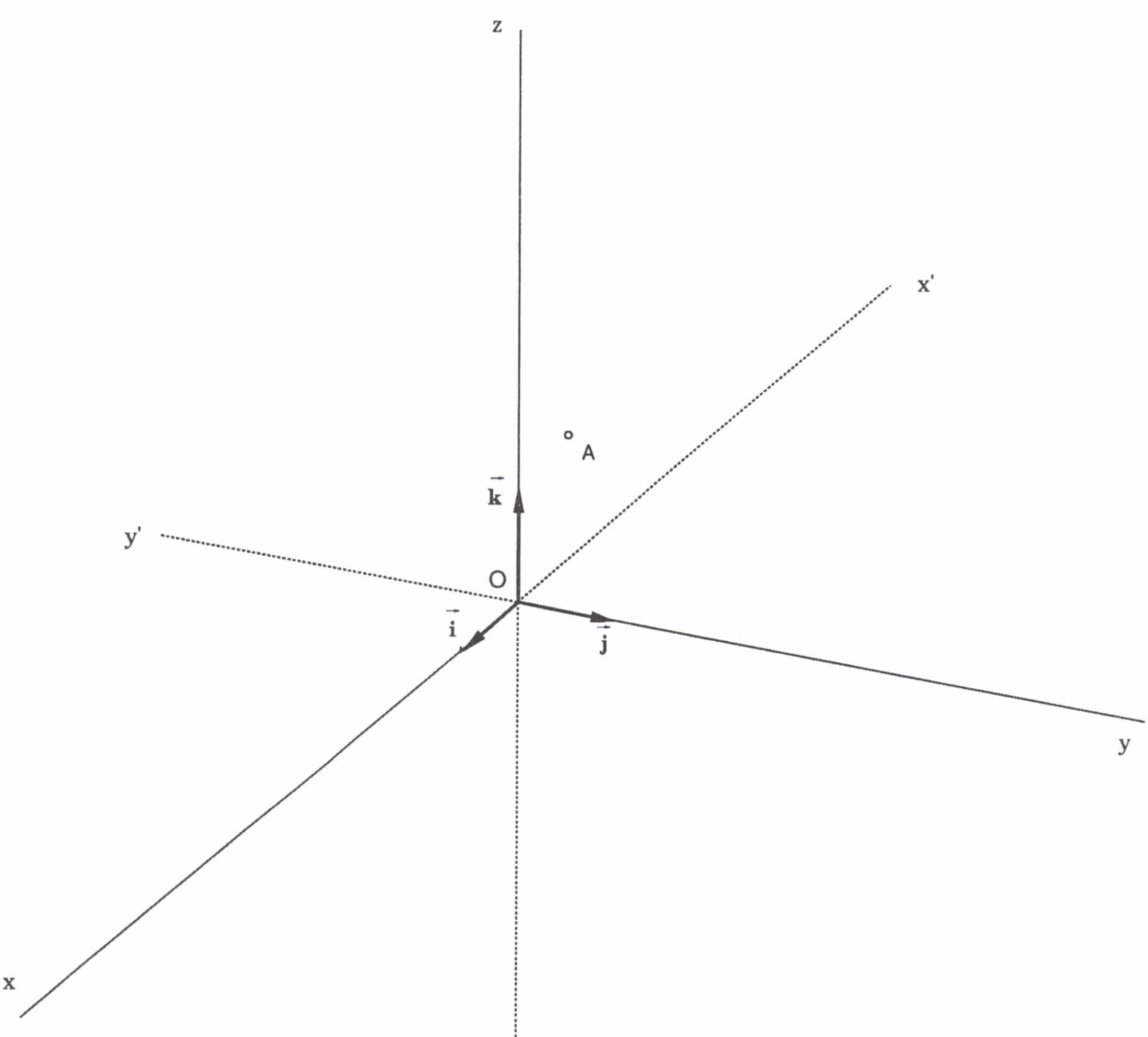
Soit Σ le cône de sommet $S(0;0;5)$ et de base le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 4$ dans le plan (xOy) .

1. Représente Σ .

2. Sachant que le point A de la figure ci-dessous est sur la partie visible du cône Σ , mesure ses coordonnées.
(*Indication* : détermine d'abord son projeté sur le plan xOy .)

3. Place le point $B(1/2 ; 1/2 ; 5/2)$. Est-il sur le cône ? Justifie ta réponse par une construction géométrique, puis par un calcul.

4. Reprends la question précédente avec le point $C(\sqrt{2}/2 ; -\sqrt{2}/2 ; 5/2)$.



Cône dans un repère (2) : équation cartésienne.

La figure 1 représente un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace. Dans ce repère, on considère le point A (0,0,3) et, dans le plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$, le cercle C de centre O et de rayon 2. On appelle Σ la surface latérale du cone de révolution de sommet A et de base C.

1. Dessine C sur la figure 1 en plaçant au moins huit points. Puis, sur cette figure, place le point A et dessine les génératrices de Σ contenues dans les plans d'équation $y = x$ d'une part, et $y = -x$ d'autre part.

2. A tout point M(x,y,z) distinct de A on associe le point p(0,0,z), projeté orthogonal de M sur Oz, et le point m(x,y,0), projeté orthogonal de M sur xOy. Enfin, on note M' le point d'intersection de (AM) avec xOy, quand il existe.

a) complète la figure 2 en plaçant m et M'.

b) A quelle condition portant sur les coordonnées de M le point M' existe-t-il ?

3. Etablis que, si $z \neq 3$, alors :

$\frac{OM'}{pM} = \frac{3}{3-z}$, et que $pM = \sqrt{x^2+y^2}$

4. Dans le cas où $z \neq 3$, calcule OM' en fonction de x, y et z, puis déduis de ce qui précède que M est un point de Σ si et seulement si :

$$0 \leq z \leq 3 \text{ et } x^2 + y^2 - \frac{4}{9}(3-z)^2 = 0.$$

5. Dire pour chacun des points suivants si ce point est un point de Σ ou non :

$E\left(1 ; 1 ; 3 + 3\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $G\left(-\frac{1}{3} ; \frac{\sqrt{3}}{3} ; 2\right)$

$F\left(1 ; 1 ; 3 - 3\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $H\left(\frac{\sqrt{2}}{3} ; \frac{\sqrt{2}}{3} ; 1{,}9\right)$

figure 1.

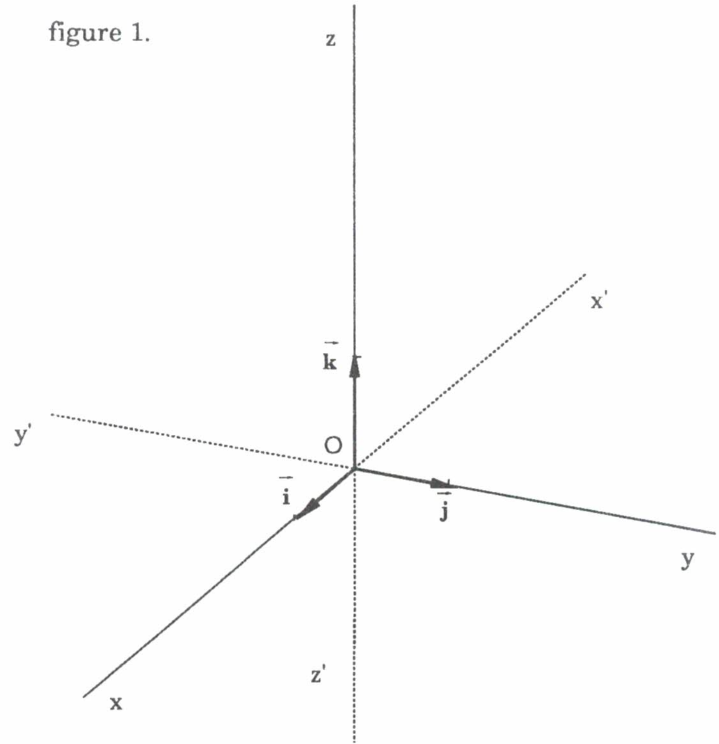
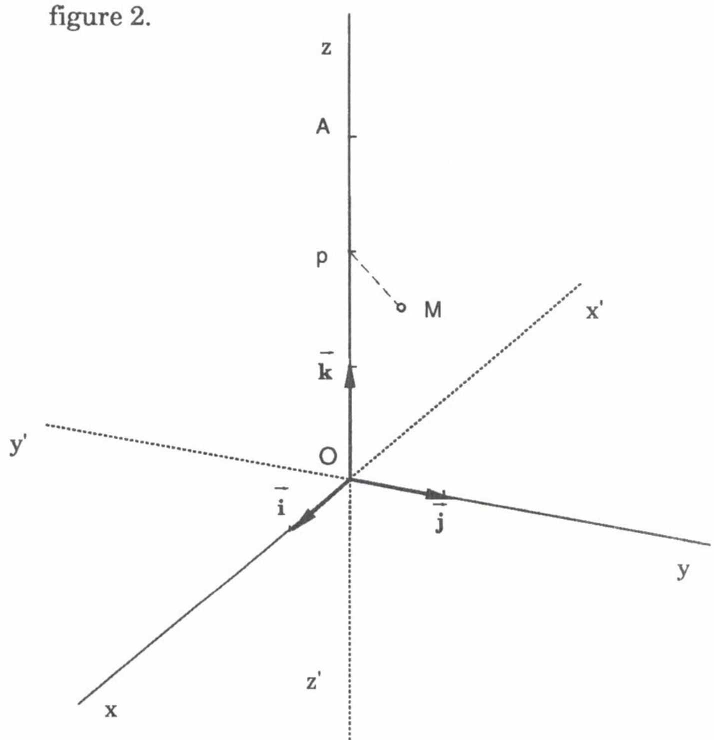


figure 2.



Arc de cercle et angle au centre associé.

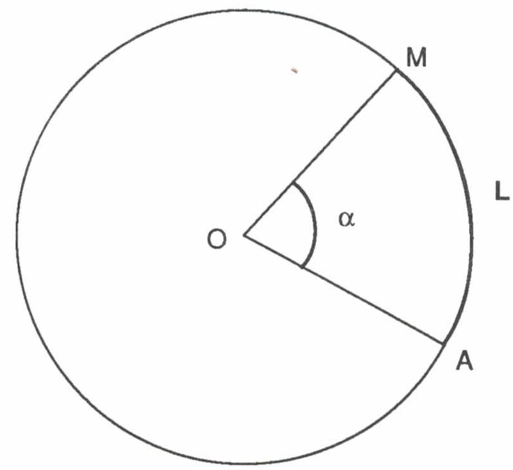
1. On se propose de démontrer la formule :

$$L = R\alpha$$

où R est le rayon du cercle et où α est la mesure en radians de l'angle au centre associé à cet arc.

Complète le tableau ci-dessous :

α	L
2π	$2\pi R$
1	...
α	...



2. C est le cercle de rayon 5 cm .

a) Calcule L sachant que l'angle au centre mesure successivement :

25° , 90° , 140° puis 210° .

(*Indication* : π radians = 180° degrés)

b) Calcule la mesure à 1° près de l'angle au centre associé aux arcs de longueurs successives :

5 cm , 11 cm et 30 cm.

niveau A

Fiche n° C 8

Le cône à partir de son patron.

La figure 3 est le développement d'un solide.

1. Mesure sur cette figure l'angle α et la longueur SA, notée g dans la suite.

2. Reproduis ce patron et construis le solide en faisant coïncider [SA] et [SB]. Mesure alors le rayon du cercle de base et la hauteur du solide.

3. Ce solide est un *cône de révolution*, que l'on a schématisé sur la figure 2, ainsi que son patron sur la figure 1.

Où retrouve-t-on l'arc AB et la longueur g du patron sur la figure 2 ?

4. Si α est exprimé en radians, démontre que :

$$r = \frac{\alpha g}{2\pi} \quad \text{et que} \quad h = g\sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{4\pi^2}}.$$

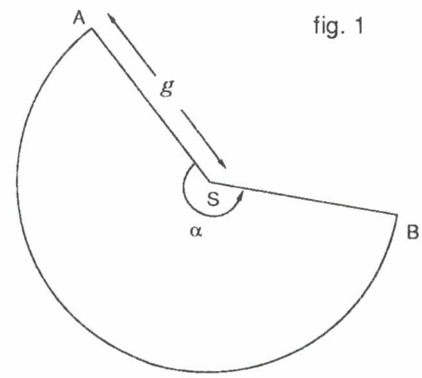


fig. 1

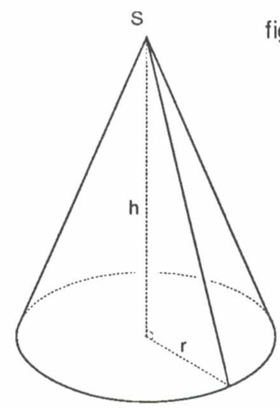


fig. 2

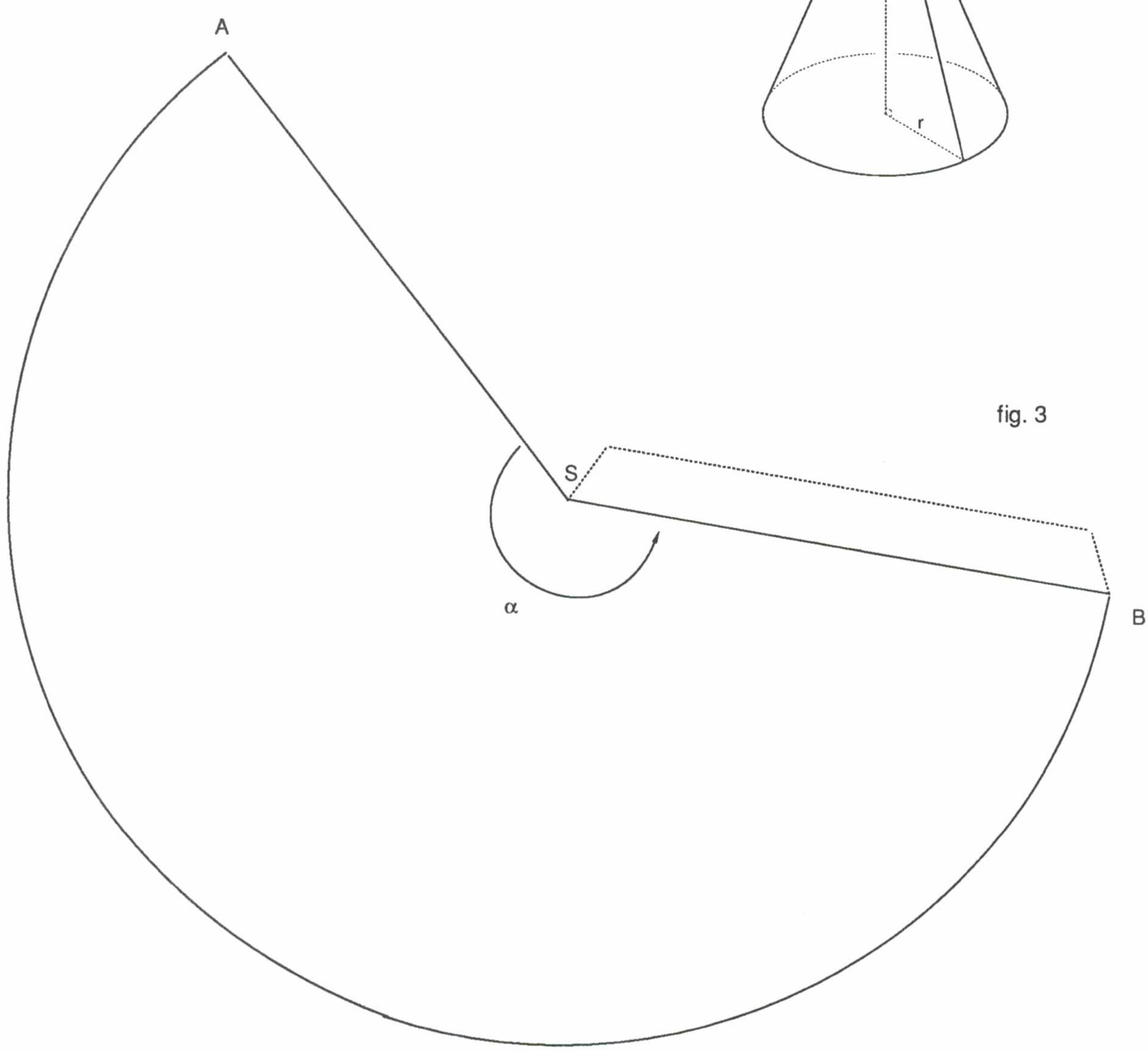


fig. 3

Patron d'un cône.

La figure ci-dessous représente un cône de révolution de hauteur 12 cm , dont le rayon du cercle de base vaut 5 cm .

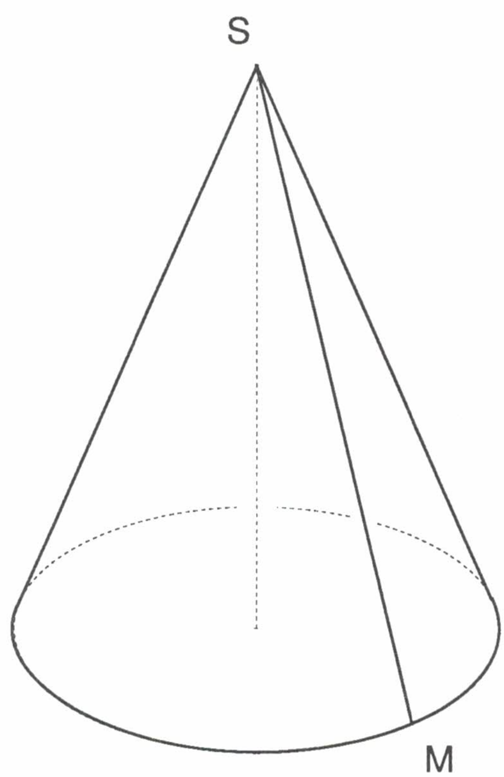
1. Quelle est la longueur de la génératrice [SM] ?

2. On coupe ce cône suivant [SM] et on déplie pour obtenir son patron.

On obtient alors une portion de disque.

Calculer la longueur des trois bords de cette portion et en déduire la mesure de l'angle α de ce patron.

3. *Application* : Construire un cône de révolution de hauteur 10 cm , dont le rayon du cercle de base vaut 8 cm .

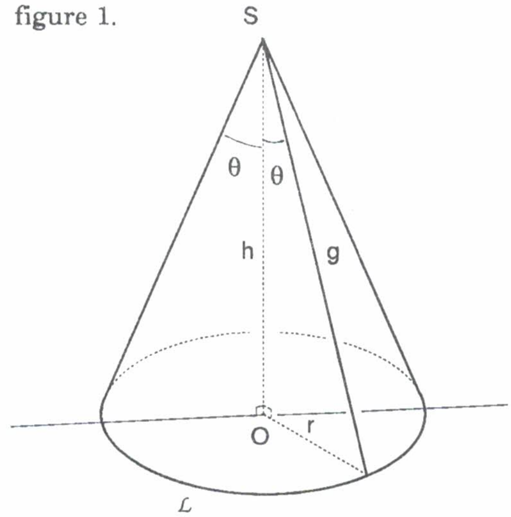


niveau A

Fiche n° C 10

Liens entre les paramètres d'un cône et ceux de son patron (1).

figure 1.



Les deux dessins ci-contre représentent un cône de révolution (fig. 1) et son patron (fig. 2).

Dans la figure 2 , α est une mesure de l'angle du patron du cône.

1. Où retrouve-t-on, dans la figure 2 , les grandeurs g et $\mathcal{L}$?

2. Après avoir fait les calculs nécessaires, dessine les patrons des deux cônes caractérisés par :

a) $g = 2\sqrt{5}$ cm et $r = 2$ cm

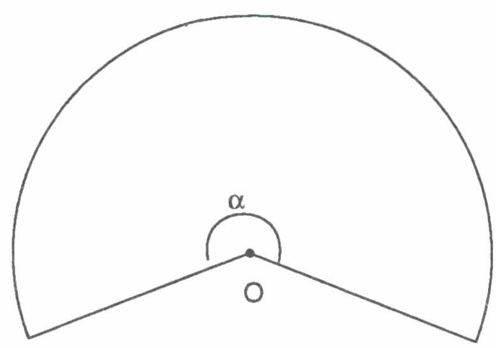
et par

b) $g = 8$ cm et $h = 6$ cm

3. Dans chacun des cas suivants, calcule les grandeurs nécessaires à la réalisation du patron du cône :

a)	$\mathcal{L} = 30$ cm	et	$h = 10$ cm
b)	$\mathcal{L} = 20$ cm	et	$\alpha = 140°$
c)	$h = 10$ cm	et	$\theta = 15°$
d)	$r = 5$ cm	et	$\theta = 20°$
e)	$\mathcal{L} = 25$ cm	et	$\theta = 25°$
f)	$g = 12$ cm	et	$\theta = 30°$

figure 2.



niveau A

Fiche n° C 11

Liens entre les paramètres d'un cône et ceux de son patron (2) .

Les deux figures ci-dessous représentent un cône de révolution et son patron.

1. Exprime g en fonction de r et de θ .

2. Où retrouves-tu, sur la figure 2 , les grandeurs g et $\mathcal{L}$ de la figure 1 ?
Déduis-en l'expression de g en fonction de r et de α , lorsque α est exprimé en radians.
Etablis alors la formule : $\alpha = 2\pi \sin \theta$

3. a) Donne la valeur de α en radians, puis en degrés, lorsque $\theta = 60°$.
b) A l'aide d'une calculette, trouve une valeur approchée de θ quand $\alpha = 100°$, quand $\alpha = 3\pi / 2$ rad .

4. Dans les deux cas suivants, calcule les grandeurs nécessaires à la construction du patron du cône :
a) $h = 10$ cm et $\alpha = 180°$,
b) $r = 6$ cm et $\alpha = 270°$.

Figure 1.

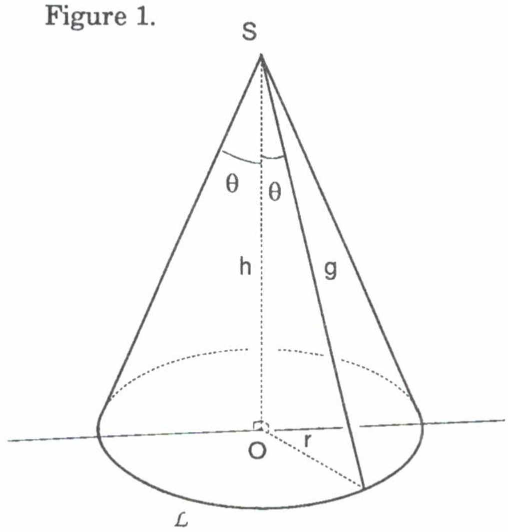
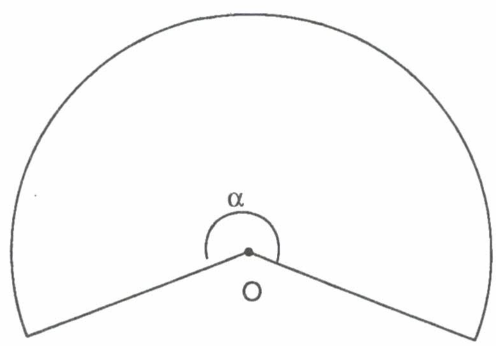


Figure 2.

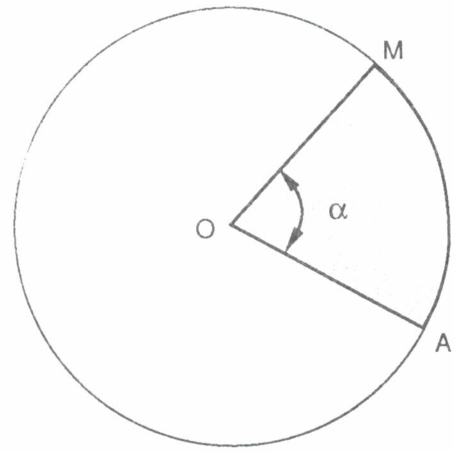


niveau *A*

Fiche n° C 12

Aire latérale d'un cône de révolution.

A) On se propose d'établir que la formule de l'aire d'un secteur circulaire est : $A = \frac{1}{2} R^2 \alpha$, où R est le rayon du cercle et où α est la mesure en radians de ce secteur.



Complète le tableau ci-dessous :

α	A
2π	πR^2
1	...
α	...

B) Les deux figures ci-dessous représentent un cône et son patron (α en radians).

Figure 1.

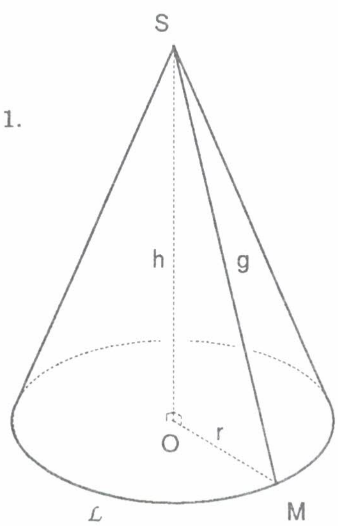
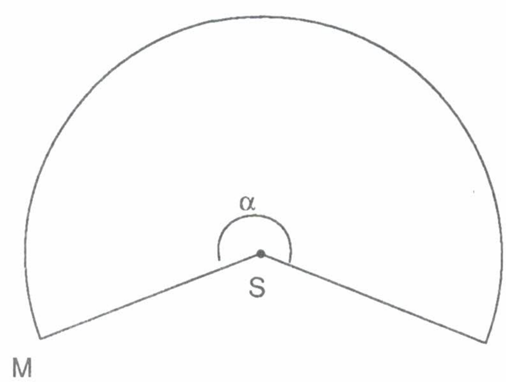


Figure 2.



On appelle *aire latérale d'un cône* l'aire de son patron. On la note A.

1. Où retrouves-tu g sur la figure 2 ?
Déduis-en l'expression de A en fonction de g et de α.

2. Où retrouves-tu $\mathcal{L}$ sur la figure 2 ?
Déduis-en l'expression de α en fonction de r et de g.

3. Etablis enfin la formule $A = \pi r g$.

niveau B

Fiche n° C 13

Cône de plus grand volume de génératrice donnée.

On dispose d'un disque en papier de rayon g dont on va découper un secteur d'angle α pour fabriquer un cône de révolution. Les questions qui suivent ont pour objet de déterminer α de façon que le cône ait un volume maximal.

1. Où retrouves-tu g sur la figure 2 ?
Exprime h et r en fonction de g et de θ, puis le volume V du cône en fonction de g et de θ.

2. En te servant de la formule $\alpha = 2\pi \sin \theta$ établie dans la fiche C11, montre que :

$$V^2 = \frac{g^6}{576\pi^4} \alpha^4 (4\pi^2 - \alpha^2).$$

3. Etudie les variations sur $[0;2\pi]$ de la fonction $x \longmapsto x^4 (4\pi^2 - x^2)$.
Déduis-en que le volume du cône fabriqué est *maximum* quand la mesure de α vaut $2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$ radians.
Donne une valeur approchée à un degré près de l'angle α trouvé ci-dessus, puis de l'angle θ correspondant.

figure 1.

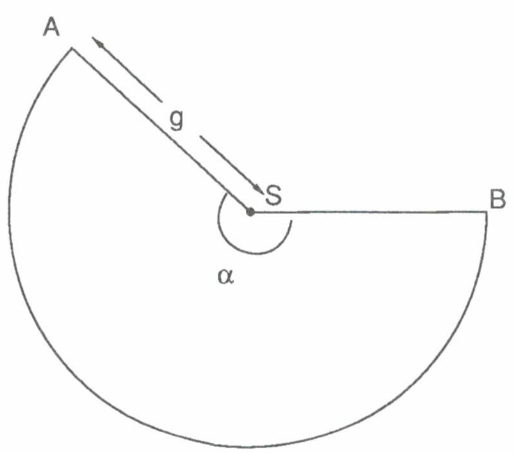
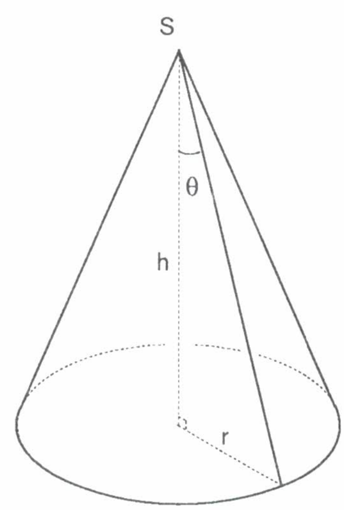
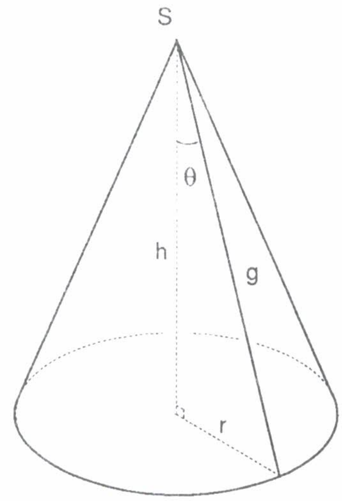


figure 2.



Cône de plus grand volume pour une aire totale donnée.

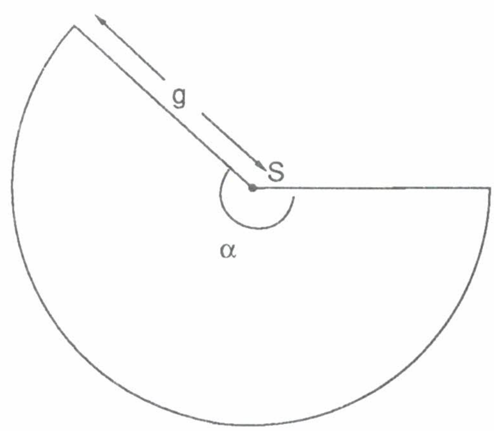


A) Un fabricant de flacons décide de produire de petites bouteilles en forme de cônes de révolution.

Avec une quantité de matière donnée, il se propose de fabriquer un flacon de volume maximal.

Il s'agit donc pour lui de trouver les proportions du cône de plus grand volume dont l'aire totale est donnée (l'aire totale du cône étant la somme de son aire latérale et de l'aire de sa base).

On note A l'aire totale du cône et V son volume. Les autres notations sont celles des figures ci-contre représentant respectivement un cône de révolution et son patron.



On rappelle qu'avec ces notations l'aire latérale du cône vaut πgr (fiche C12) et que son volume vaut $\pi r^2h/3$.

1. Justifie que $A = \pi rg + \pi r^2$.

2. Exprime g , puis g^2 en fonction de A et de r .

3. Exprime h^2 , puis V^2 en fonction de A et de r .

4. Déduis du dernier résultat que V est maximal quand

$$\frac{A}{\pi} r^2 - 2r^4$$

est maximal.

5. Etudie les variations de

$$f : r \longmapsto \frac{A}{\pi} r^2 - 2r^4$$

sur $[0;+\infty[$ et déduis-en que V est *maximal*

pour $r = \sqrt{\dfrac{A}{4\pi}}$.

6. Montre que si $r = \sqrt{\dfrac{A}{4\pi}}$, alors $g = 3r$, $h = 2\sqrt{2}\,r$, $\alpha = 120°$ et $V_{max} = \sqrt{\dfrac{A^3}{72\pi}}$.

B) Le fabricant veut maintenant produire des flacons d'une contenance égale à 20 cl , en utilisant le moins de matière possible.

— Utilise le résultat précédent pour déterminer la valeur de l'aire pour laquelle le flacon a une contenance d'au plus 20 cl .

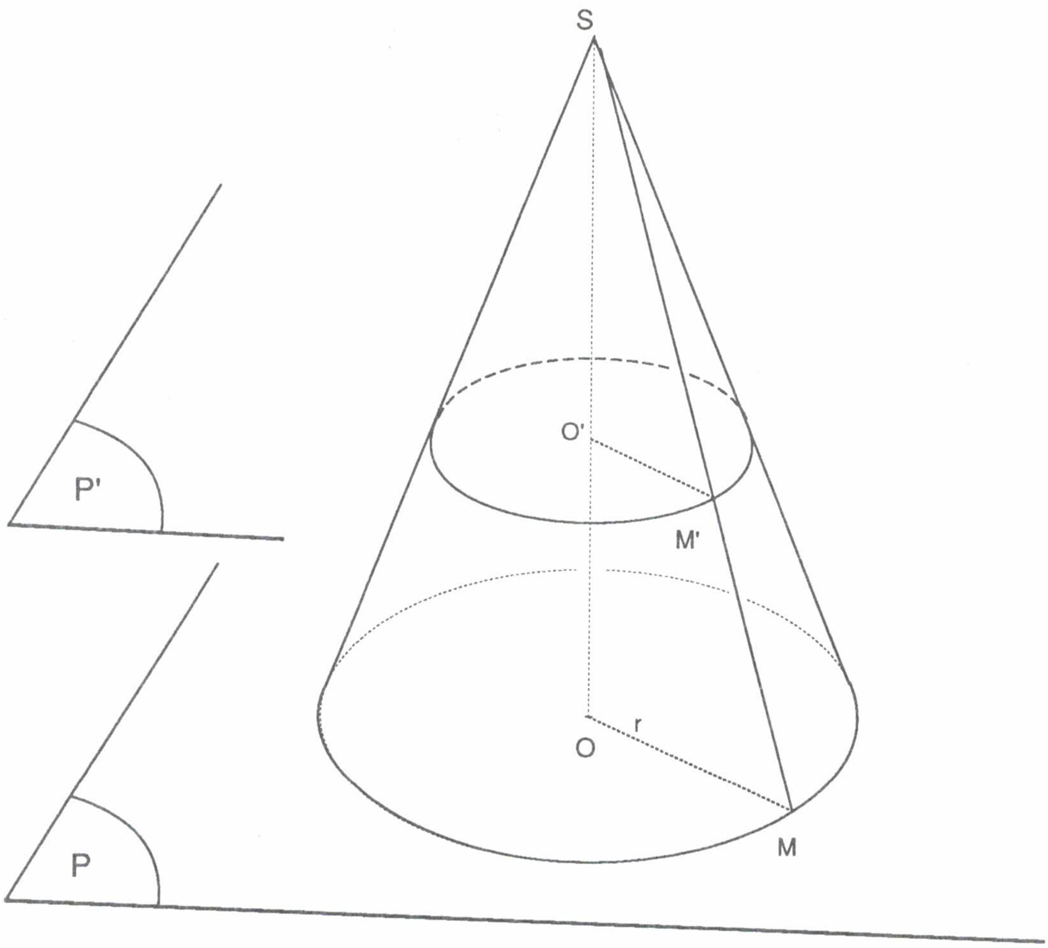
— Justifie qu'on ne peut trouver une aire plus petite correspondant à un flacon de 20 cl .

Patron d'un tronc de cône (1) .

On donne un cône dont le cercle de base a pour rayon 6 cm .
La hauteur du cône mesure 12 cm .
On mène par O' le plan (P') parallèle à (P) ; le segment [SO'] mesure 4 cm .
La partie du solide comprise entre les deux plans parallèles s'appelle un *tronc de cône* . [MM'] est une *génératrice* de ce tronc de cône.

1. Calcule les mesures de [SM] et [SM'] .

2. Dessine le patron du cône et hachure sur ce patron la partie correspondante du tronc de cône. (Pour le dessin du patron, utilise la formule $\alpha = 2\pi \sin\theta$ établie dans la fiche C11)



Patron d'un tronc de cône (2) .

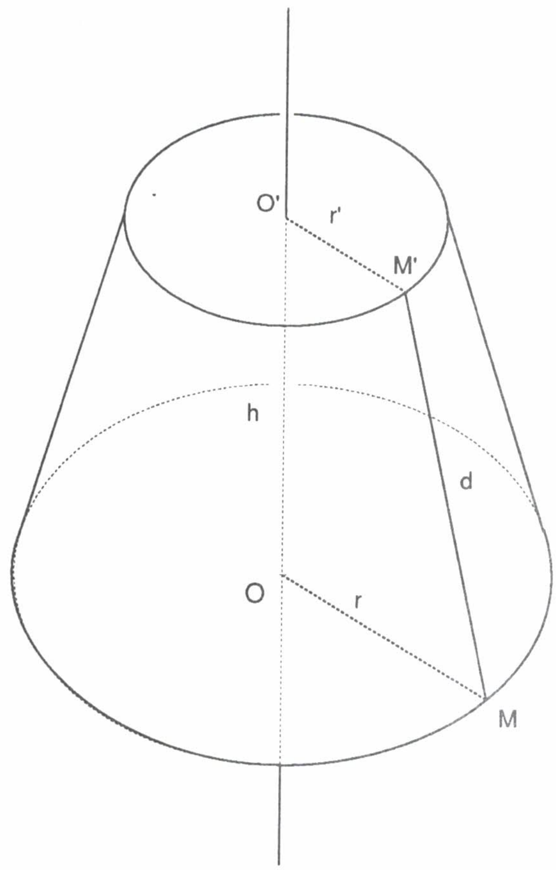
La figure représente un tronc de cône de hauteur $h = 6$ cm , de rayons $r = 5$ cm , $r' = 2$ cm .

[MM'] est une de ses génératrices.

1. Prolonge le tronc de cône en un cône dont tu noteras S le sommet. Soit m' le projeté de M' sur la base.

2. En utilisant le théorème de Thalès dans le triangle SOM , calcule SO puis SO' , SM et SM' .

3. Construis le patron de ce tronc de cône.

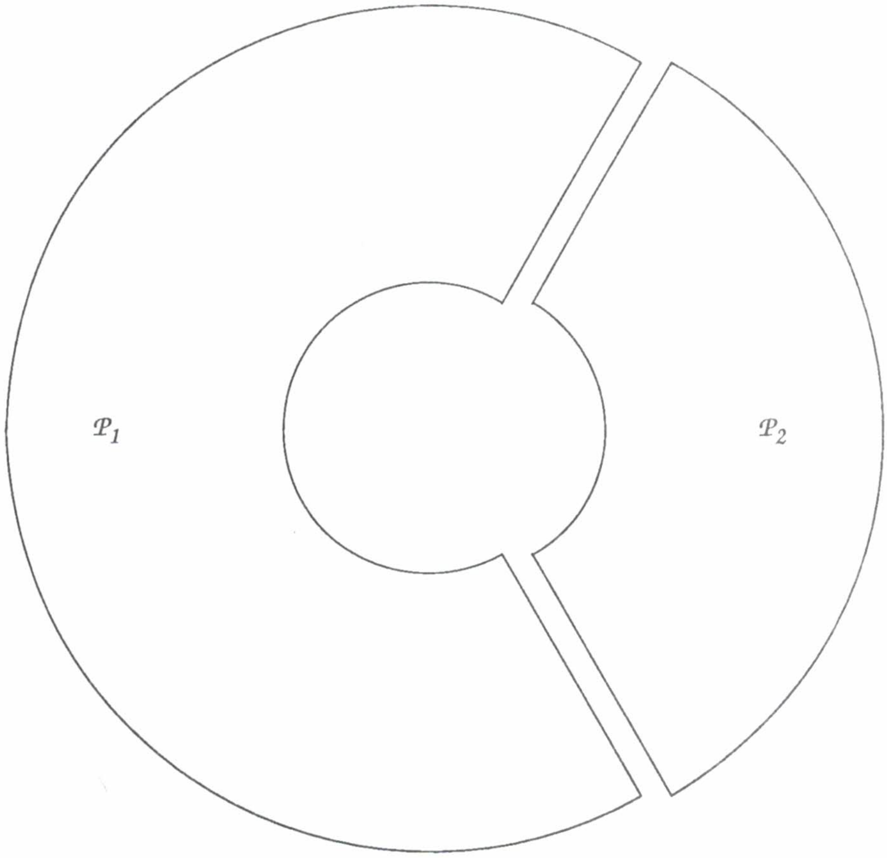


niveau A

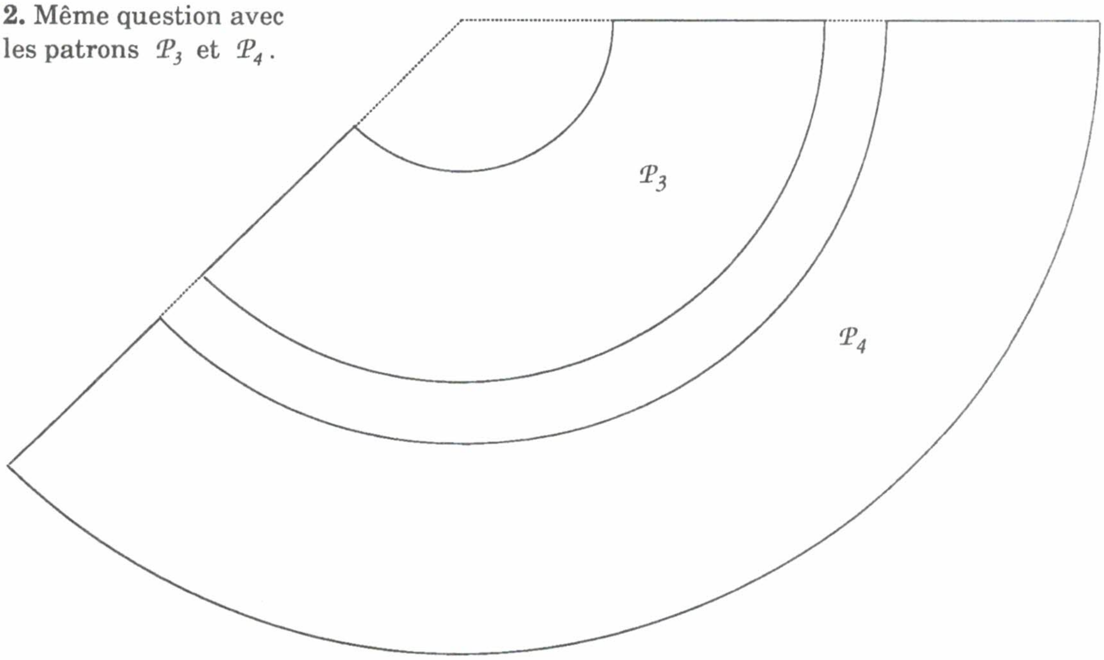
Fiche n° C 17

Comparaison des hauteurs de deux troncs de cône.

1. $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont les patrons des deux troncs de cône découpés dans une même couronne. Quel patron engendre, à ton avis, le tronc de cône de plus grande hauteur ? Tu peux vérifier ta réponse en reproduisant ces patrons et en réalisant les deux solides.



2. Même question avec les patrons $\mathcal{P}_3$ et $\mathcal{P}_4$.



niveau B

Fiche n° C 18

Hauteur du tronc de cône à partir de son patron.

Les figures (1) et (2) ci-contre représentent respectivement un tronc de cône et son patron.

1. Dessine sur la figure (1) le cône dont est issu ce tronc de cône.

2. Où retrouves-tu g , g' et d' (voir fig. 2) sur la figure (1) ainsi complétée ?
Utilise la formule générale donnant la hauteur d'un cône (vue dans la fiche C8) pour établir que, α étant exprimé en radians :

$$h = d\sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{4\pi^2}}.$$

3. Calcule la hauteur d'un tronc de cône dont :

g = 9 cm	g' = 3 cm	α = 240°
g = 9 cm	g' = 3 cm	α = 150°

4. Calcule la hauteur d'un tronc de cône dont :

g = 6 cm	g' = 1,5 cm	α = 240°
g = 7,5 cm	g' = 1,5 cm	α = 240°
g = 12 cm	g' = 3 cm	α = 240°

5. Contrôle les réponses que tu as données dans la fiche précédente.

figure 1.

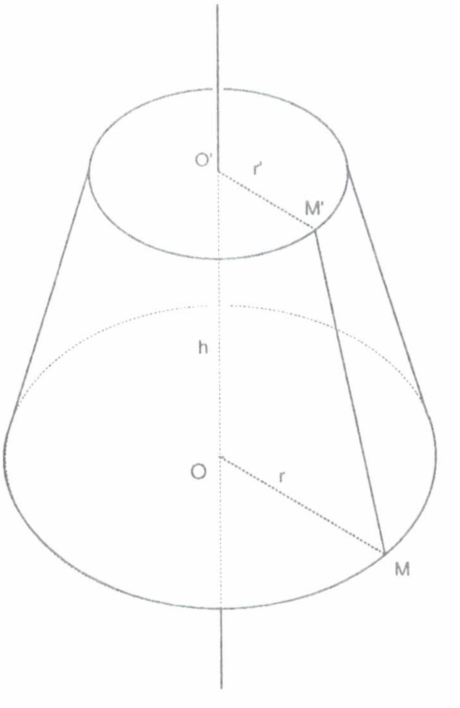
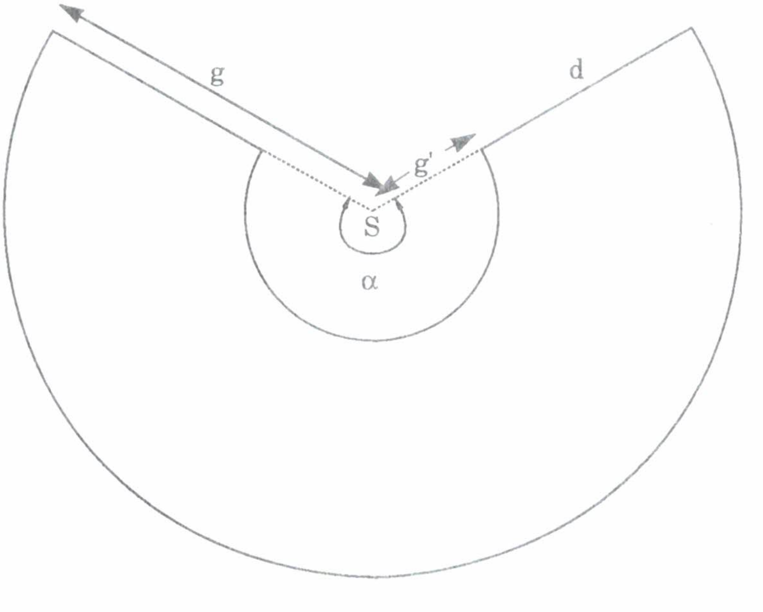
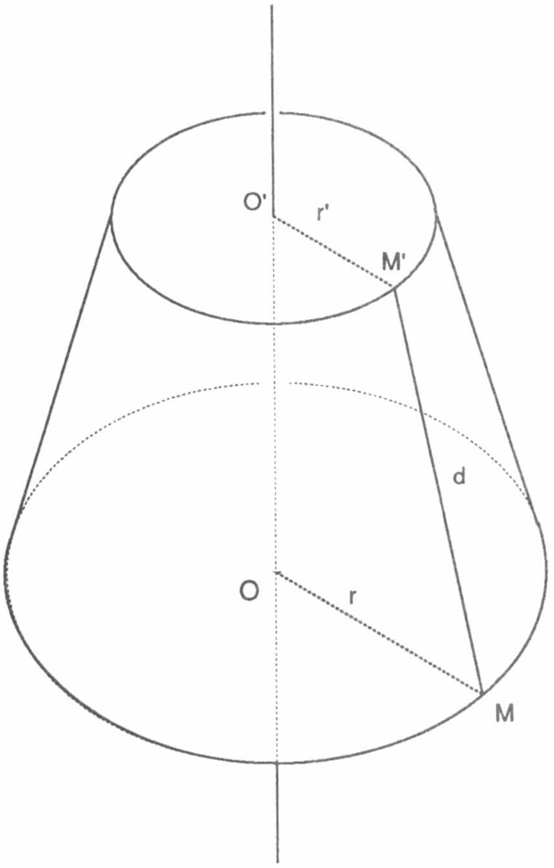


figure 2.



Aire latérale d'un tronc de cône.

On a dessiné un tronc de cône de révolution d'axe (OO') , ainsi que l'une de ses génératrices [MM'] .



1. Dessine le cône dont il est issu et note S son sommet.
On appelle m' le projeté orthogonal de M' sur la base du tronc de cône. Place m' sur le dessin.

2. En te servant du résultat établi dans la fiche C12 , justifie que l'aire A de la surface latérale du tronc de cône (disques non compris) est donnée par :

$$A = \pi r \mathrm{SM} - \pi r' \mathrm{SM'}$$

Montre que l'on a encore :

$$A = \pi(r - r')\,\mathrm{SM} + \pi r' \mathrm{d}$$

3. En utilisant le théorème de Thalès dans le triangle SMO , établis que :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{SM}} = \frac{r - r'}{r} .$$

Déduis-en la formule :

$$A = \pi(r + r')\,\mathrm{d} .$$

niveau B

Fiche n° C 20

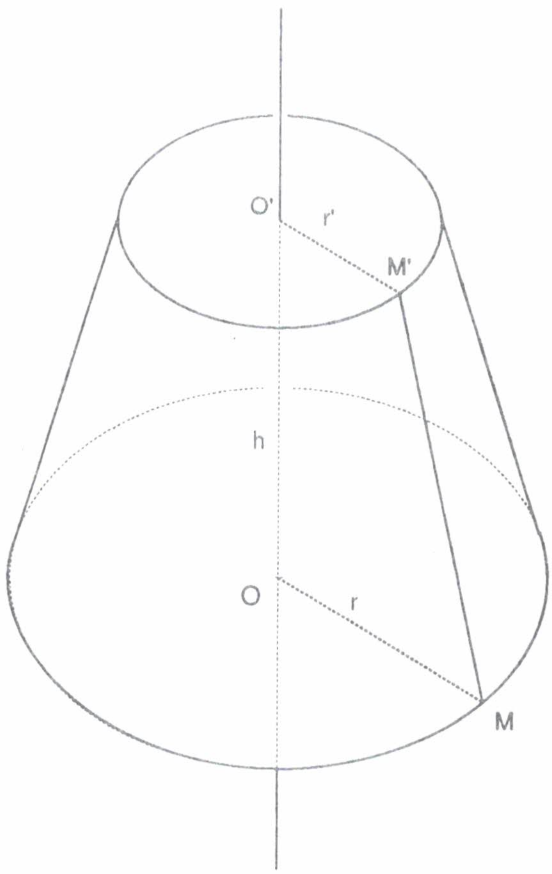
Volume du tronc de cône de révolution.

La figure ci-contre représente le tronc de cône obtenu en faisant pivoter autour de l'axe (OO') le trapèze OO'M'M .

— Complète la figure en plaçant le point S , sommet du cône dont est issu le tronc de cône.

— Place le point m' projeté orthogonal du point M sur le plan de base du cône.

On note V le volume du tronc de cône.



1. Etablis que :

(1) $V = \frac{1}{3}\pi(r^2\,SO - r'^2\,SO')$

2. Remplace dans (1) SO' par sa valeur en fonction de SO et de h .

3. Montre, en appliquant le théorème de Thalès au triangle SOM , que :

$$SO = \frac{r.h}{r - r'} .$$

4. Déduis de ce qui précède que :

$V = \frac{1}{3}\pi(r^2 + r.r' + r^2).h$

niveau A

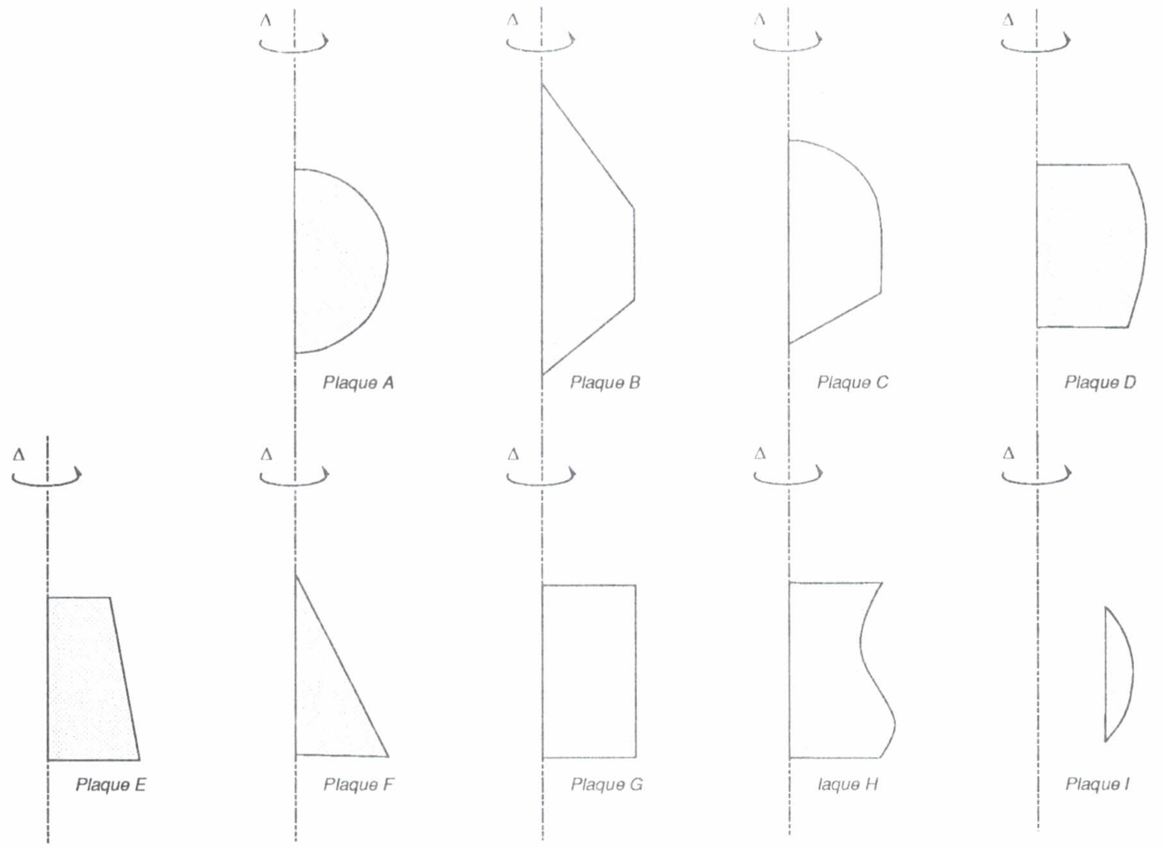
Fiche n° SR 1

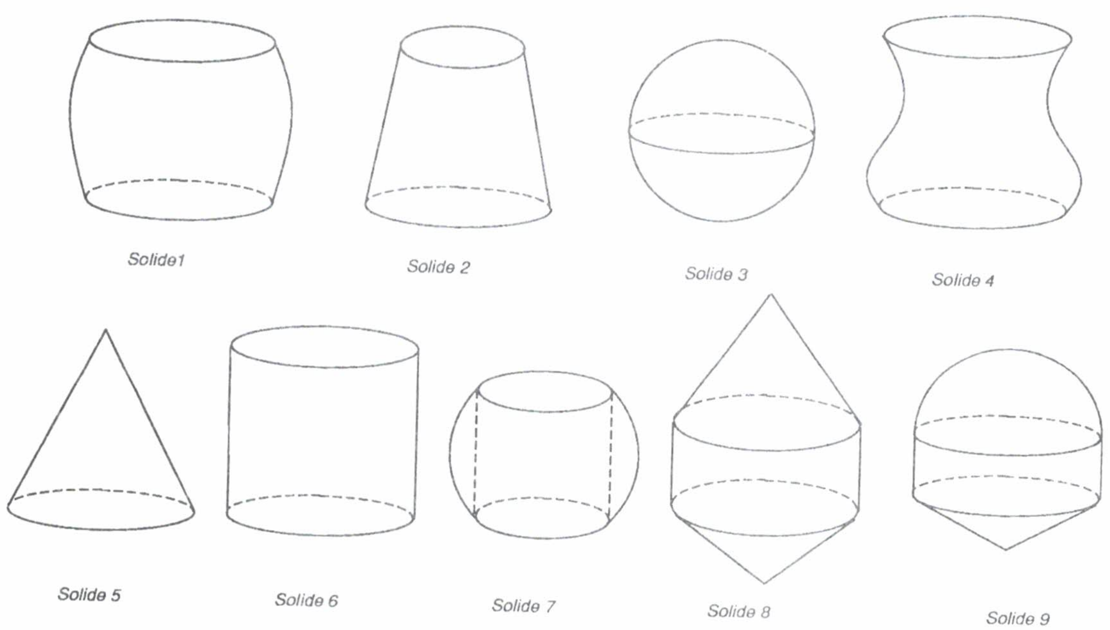
Dis-moi qui m'a engendré.

En tournant autour de l'axe Δ, chacune des plaques qui figurent sur les dessins A, B, C, D, E, F, G, H, I engendre un solide de révolution schématisé par les figures numérotées de 1 à 9.

Associe à chaque plaque son solide en complétant le tableau suivant :

plaque	A	B	C	D	E	F	G	H	I
solide									





Rotation d'une plaque rectangulaire (1) .

1. Dans la figure n° 1 , ABCD est une plaque rectangulaire. On la fait tourner d'un tour complet autour de la droite (AB) .

— Quelle est la courbe décrite par les points D et C ?
— Que peux-tu dire des points du segment [AB] ?
— Donne l'allure du solide obtenu Σ_1 . On dit que Σ_1 est le *cylindre de révolution* d'axe (AB) et de génératrice [CD] .

2. Donne l'allure du cylindre de révolution Σ_2 , d'axe (AD) et de génératrice [CB] , obtenu à partir de la plaque rectangulaire de la figure n° 2 .

3. On pose $AB = \ell_1$ et $AD = \ell_2$. Exprime, en fonction de ℓ_1 et de ℓ_2 , les volumes V_1 et V_2 des solides Σ_1 et Σ_2 . Vérifie alors que

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\ell_2}{\ell_1}.$$

Sachant que $\ell_1 > \ell_2$, quel est le solide qui a le plus petit volume ?

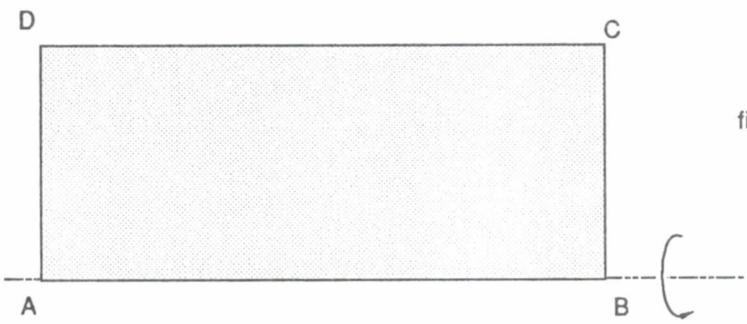


figure 1.

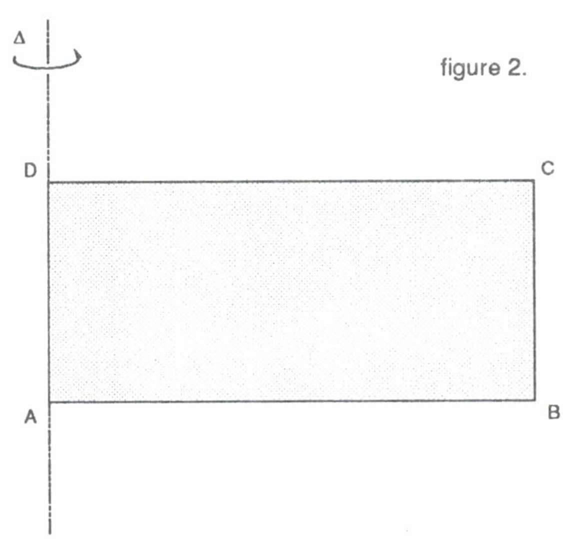


figure 2.

Rotation d'une plaque rectangulaire (2).

ABCD est une plaque rectangulaire.

I est le milieu du segment [AB], H un point de la droite (AB) n'appartenant pas à [AB].

Δ est la droite du plan (ABCD) perpendiculaire à (AB) passant par H.

On pose $AB = \ell$, $AD = h$ et $IH = x$.

On fait tourner la plaque ABCD autour de Δ d'un tour complet.

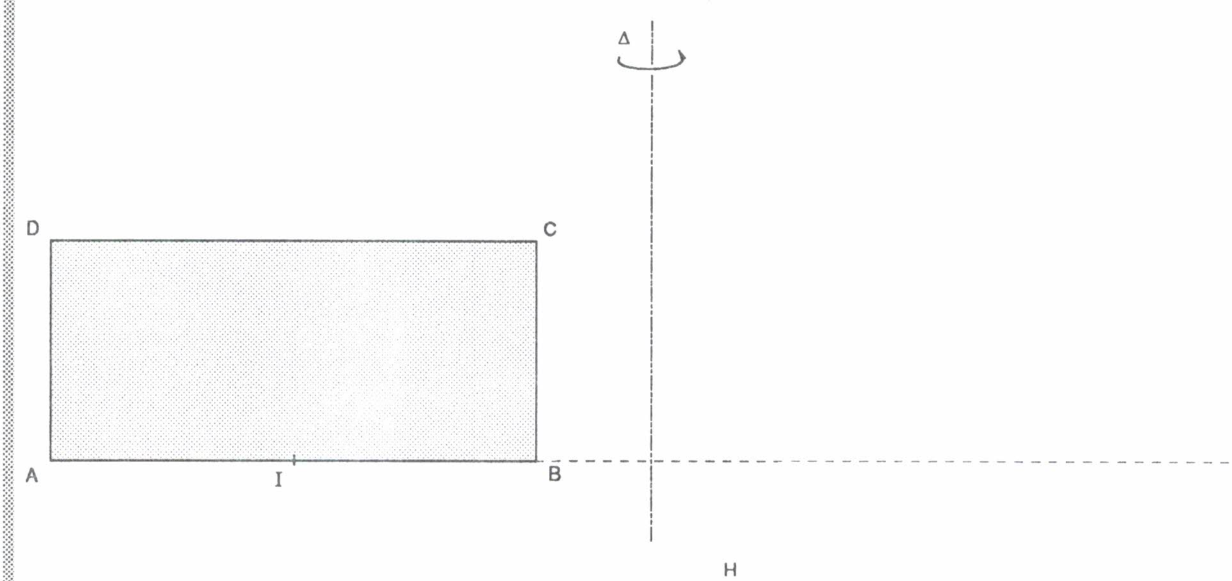
1. Donne l'allure du solide obtenu, noté Σ, et décris-le.

2. Calcule le volume V de Σ en fonction de ℓ, h et x.
Déduis-en que V augmente lorsque H s'éloigne de B.

3. Soit G le centre de gravité du rectangle ABCD.

a) Calcule la longueur c du chemin parcouru par G lors de cette révolution.

b) En désignant par S l'aire du rectangle ABCD, vérifie que $V = S \cdot c$.
Enonce le résultat obtenu.



Rotation d'une plaque rectangulaire (3) .

ABCD est une plaque rectangulaire.

I est le milieu de [AB] .

Soit H un point de [AI] et Δ la parallèle à (AD) passant par H .

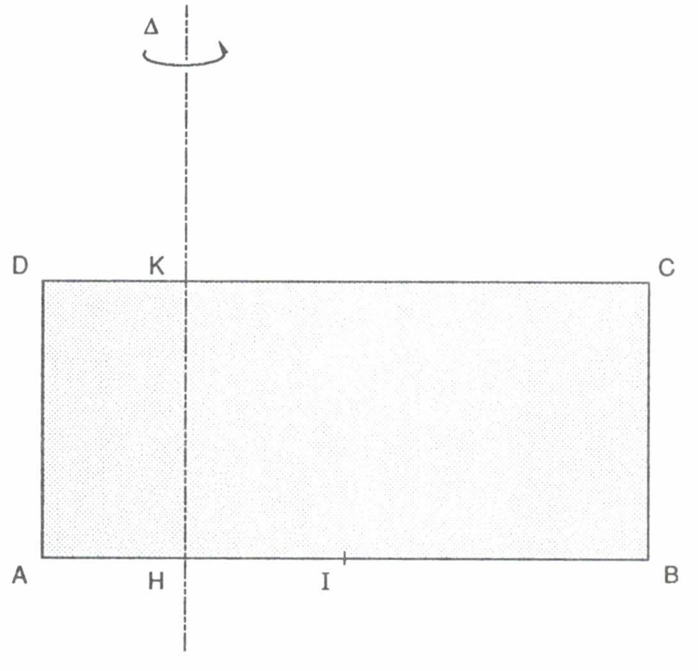
On pose $AB = \ell$, $AD = h$ et $IH = x$.

On fait tourner ABCD autour de Δ .

1. Donne l'allure du solide Σ obtenu. Quelle partie rectangulaire d'aire minimale engendre le même solide Σ ?
On note V son volume.

2. Exprime V en fonction de x , ℓ et h .

3. Pour quelle valeur de x , V est-il minimal ? maximal ?



niveau B

Fiche n° SR 5

Rotation d'une plaque rectangulaire (4) .

ABCD est une plaque rectangulaire. I est le milieu de [AB] .

Soit H un point de [AI] et Δ la parallèle à (AD) passant par H .

On pose $AB = \ell$, $AD = h$ et $IH = x$.

On fait tourner ABCD autour de Δ d'un demi-tour dans le sens de la flèche.

1. Quelles courbes les points C et D décrivent-ils au cours de ce demi-tour ?

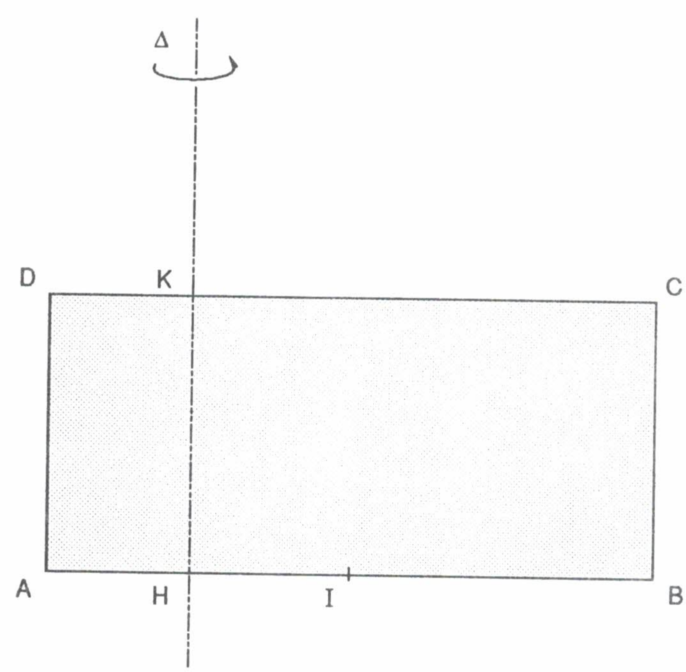
Place sur la figure les points C' et D' , positions finales de C et D .

2. Donne l'allure du solide Σ obtenu.

On note V son volume.

3. Etablis que $V = \pi . h \left(\frac{\ell^2}{4} + x^2 \right)$.

4. Pour quelle valeur de x , V est-il minimal ? maximal ?

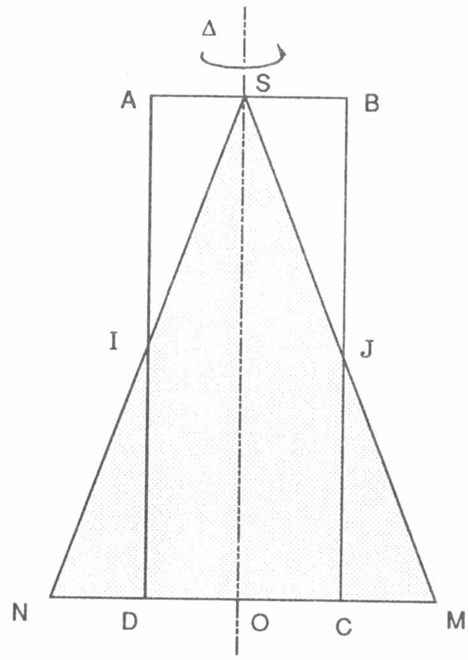


niveau B

Fiche n° SR 6

Rotation d'une plaque rectangulaire et d'une triangulaire. Comparaison des volumes.

Sachant que I et J sont respectivement les milieux des côtés [SN] et [SM] du triangle isocèle SNM, compare l'aire du rectangle ABCD à celle du triangle SNM.



1. On appelle Σ_1 le solide engendré par la rotation de ABCD autour de Δ, et Σ_2 celui engendré par la rotation de SMN autour de Δ.
A ton avis, Σ_1 et Σ_2 ont-ils même volume ? Sinon, lequel te semble de plus grand volume ?

2. Calcule les volumes de Σ_1 et Σ_2 et contrôle ainsi la réponse donnée au 1. .

3. On fait tourner la figure ci-dessus autour de Δ. Donne l'allure du solide Σ obtenu en dessinant les chemins parcourus par les points A , I et N .

4. Calcule le volume V du solide Σ en fonction de AB et de AD .

niveau B

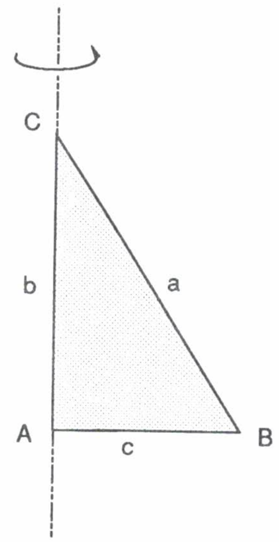
Fiche n° SR 7

Rotation d'un triangle rectangle autour d'un de ses côtés.

Soit ABC un triangle rectangle en A.

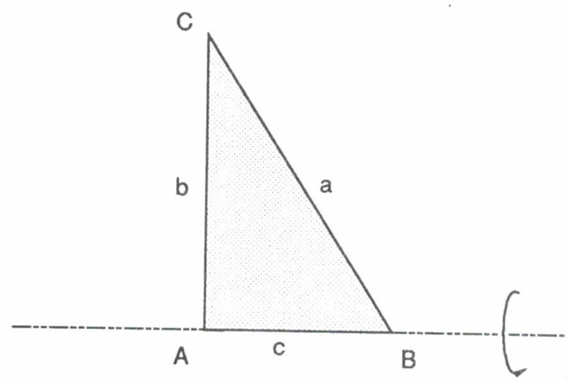
On pose $a = BC$, $b = CA$ et $c = AB$, et on suppose $c < b$.

On désigne par H le projeté orthogonal de A sur [BC], et par Σ_a, Σ_b, Σ_c les trois solides de révolution obtenus en faisant pivoter le triangle ABC autour des axes respectifs (BC), (CA) et (AB).



On pose $h = AH$ et on désigne par $\mathcal{A}$ l'aire du triangle ABC.

Enfin, on note respectivement V_a, V_b et V_c les volumes de Σ_a, Σ_b, Σ_c.



1. Donne l'allure des trois solides Σ_b, Σ_c et Σ_a. Quel est celui des trois qui paraît avoir le plus grand volume ?

2. Calcule V_b et V_c.

3. a) Calcule $\mathcal{A}$ de deux manières différentes, et retrouve ainsi que $h = bc/a$.

b) Exprime V_a en fonction de a, b, c, CH et BH. Déduis-en que :

$$V_a = \frac{1}{3}\pi\frac{b^2c^2}{a}.$$

4. Range dans l'ordre croissant V_a, V_b et V_c.

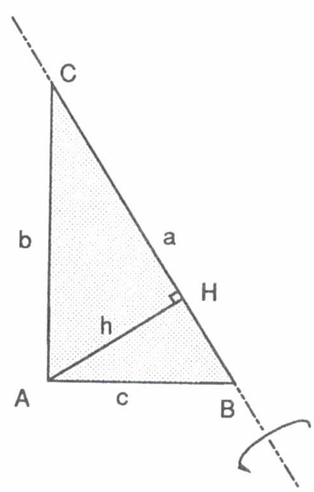
5. a) Dessine le triangle ABC avec ses trois médianes et son centre de gravité G.

b) Calcule les distances d_a, d_b et d_c du point G aux droites (BC), (CA) et (AB).

c) Calcule les longueurs L_a, L_b et L_c des chemins parcourus par G quand le triangle ABC pivote respectivement autour de (BC), autour de (CA) et autour de (AB).

Vérifie que :

$$V_a = L_a \cdot \mathcal{A} \quad V_b = L_b \cdot \mathcal{A} \quad V_c = L_c \cdot \mathcal{A}.$$



Rotation d'un triangle autour d'un de ses côtés.

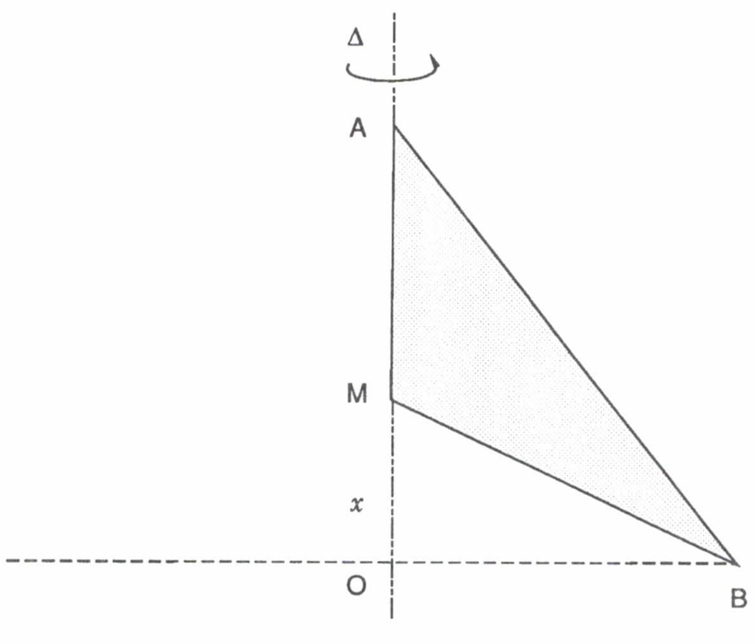
OAB est un triangle rectangle en O , et M est un point variable de [OA] .

On pose OM = x , OA = a et OB = b .

1. Donne l'allure du solide obtenu par la rotation du triangle AMB autour de (OA) .

On note V son volume.

2. Calcule V en fonction de a , b et x .



Rotation d'un triangle autour d'un axe passant par un sommet.

OACB est un trapèze rectangle en O et en A, et M est un point variable de [OA].

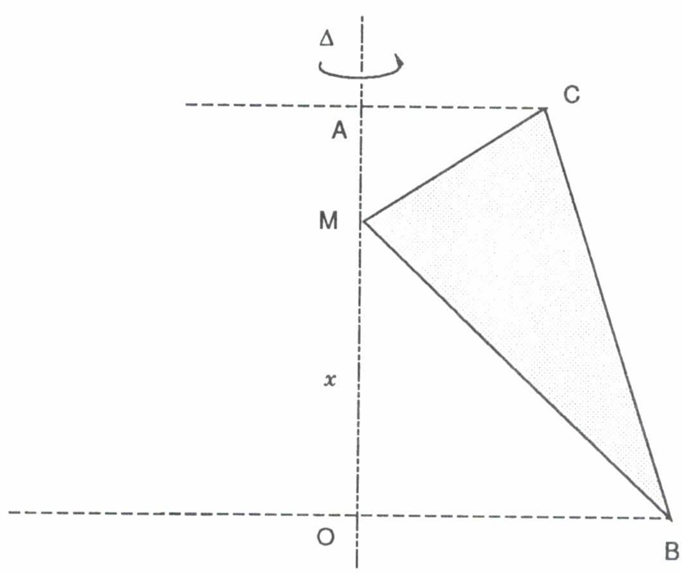
On pose $OA = a$, $OB = b$, $AC = c$ et $OM = x$.

On suppose $b > c$.

1. Donne l'allure du solide Σ obtenu par la rotation du triangle MBC autour de (OA).
On note V son volume.

2. Etablis que $V = \dfrac{1}{3}\pi(b+c)[ab - x(b-c)]$.

3. Déduis-en la position de M pour laquelle ce volume est *maximal*.



niveau B

Fiche n° SR 10

Rotation d'un triangle rectangle autour d'un axe parallèle à un des côtés de l'angle droit (1).

ABC est un triangle rectangle en B, H un point de la demi-droite [AB) non situé entre A et B.

On pose $AB = \ell$, $BC = h$ et $AH = x$ (on a donc $x \geq \ell$).

Δ est la droite du plan (ABC) perpendiculaire à (AB) passant par H.

On fait tourner le triangle ABC autour de Δ.

1. Donne l'allure du solide obtenu.

2. Etablis que le volume V de ce solide est donné par la formule :

$$V = \frac{\pi h \ell}{3}(3x - 2\ell)$$

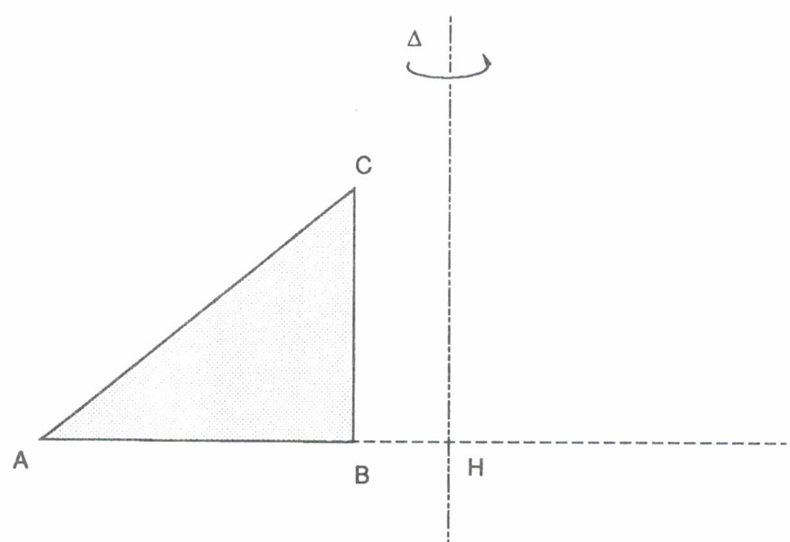
Déduis-en que V augmente lorsque H s'éloigne de B.

3. Soit G le centre de gravité du triangle ABC. On note G' son projeté orthogonal sur (BC) et K son projeté orthogonal sur Δ. Place G, G' et K sur la figure ci-dessous. On appelle I le milieu de [AB].

a) En utilisant le théorème de Thalès dans le triangle CIB, montre que $GG' = \ell/3$ et exprime ensuite GK en fonction de x et ℓ.

b) Calcule la longueur c du chemin parcouru par G lors de sa révolution autour de Δ.

c) En appelant S l'aire du triangle ABC, vérifie que $V = S . c$.



niveau B

Fiche n° SR 11

Rotation d'un triangle rectangle autour d'un axe parallèle à un des côtés de l'angle droit (2) .

ABC est un triangle rectangle en B , H un point de la droite (AB) , non situé sur la demi-droite [AB) .

On pose AB = ℓ , BC = h et AH = x .

Δ est la droite du plan (ABC) perpendiculaire à (AB) passant par H .

On fait tourner le triangle ABC autour de Δ .

1. Dessine à main levée le solide obtenu.

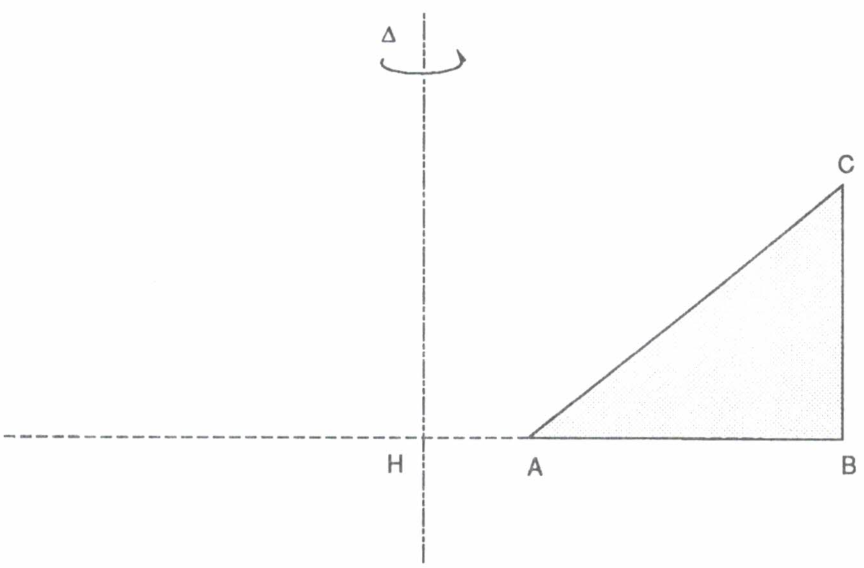
2. Etablis que le volume V de ce solide est donné par la formule :

$$V = \frac{\pi h \ell}{3} (3x + 2\ell)$$

Déduis-en que V augmente lorsque H s'éloigne de A .

3. Soit G le centre de gravité du triangle ABC . On note G' son projeté orthogonal sur (BC) , et K son projeté orthogonal sur Δ .
Place G , G' et K sur la figure ci-dessous.

a) Etablis que GG' = $\ell/3$, puis calcule GK en fonction de x et de ℓ .
b) Calcule la longueur c du chemin parcouru par G lors de sa révolution autour de Δ .
c) En appelant S l'aire du triangle ABC , vérifie que V = S.c .



niveau B

Fiche n° SR 12

Rotation d'un triangle rectangle autour d'un axe parallèle à un des côtés de l'angle droit (3) .

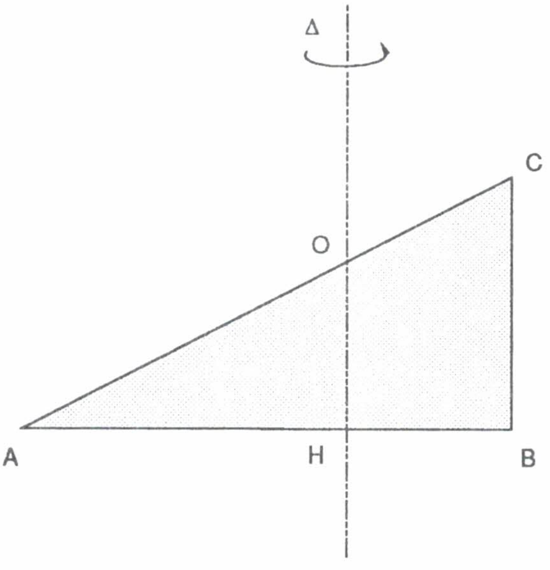
ABC est un triangle rectangle en B , H un point du segment [AB] .

On pose AB = ℓ , BC = h et AH = x (on a donc $x \leq \ell$) .

Δ est la droite du plan (ABC) perpendiculaire à (AB) passant par H . Elle coupe [AC] en O.

On note K le projeté orthogonal de C sur Δ .

On fait tourner le triangle ABC autour de Δ .



1. Dessine la position A'B'C' occupée par le triangle ABC lorsqu'il a effectué un demi-tour autour de Δ . On note D le point d'intersection des segments [BC] et [A'C'] et L le projeté orthogonal de D sur Δ .

2. En te servant des points précédents, dessine maintenant à main levée le solide Σ obtenu par la rotation de ABC d'un tour complet autour de Δ . On note V son volume.

3. On appelle :

Σ_1 le solide engendré par la rotation du triangle OAH autour de Δ et V_1 son volume,

Σ_2 le solide engendré par la rotation du triangle OCK autour de Δ et V_2 son volume,

Σ_3 le solide engendré par la rotation du rectangle CDLK autour de Δ et V_3 son volume.

a) Explique pourquoi $V = V_1 + V_3 - 2V_2$.

b) Exprime HB , OH et OK en fonction de ℓ , h et x et déduis-en que :

$$V = \frac{\pi h}{3\ell}\ [-3x^3 + 12\ell x^2 - 12\ell^2 x + 4\ell^3]$$

c) On pose $x/\ell = t$. Quelles sont les valeurs prises par t quand H varie entre A et B ? Exprime V en fonction de h , ℓ et t .

4. On pose $f(t) = -3t^3 + 12t^2 - 12t + 4$. Etudie les variations sur [0;1] de la fonction f . Déduis-en que V est *minimal* lorsque $x = 2\ell/3$ et que sa valeur est alors $4\pi h\ell^2/27$. Justifie que ceci se produit lorsque Δ passe par le centre de gravité G du triangle ABC .

5. Détermine la valeur de x qui rend le volume *minimal* dans le cas de la fiche SR10 , et calcule ce volume minimal. Fais le même travail avec la fiche SR11 .

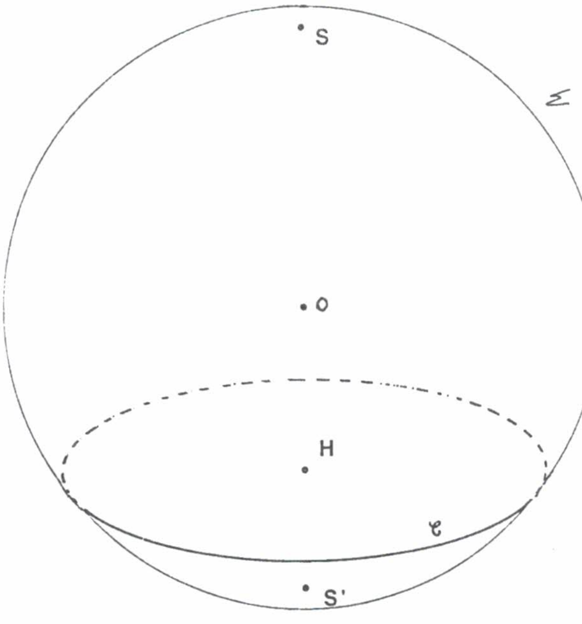
6. En faisant la synthèse des questions 4. et 5. justifie l'énoncé suivant :

"Parmi tous les solides engendrés par la rotation d'un triangle rectangle autour d'une droite de son plan parallèle à un des côtés de l'angle droit, il en est un de volume plus petit que tous les autres : c'est celui qui est obtenu lorsque la droite passe par le centre de gravité du triangle" .

niveau B

Fiche n° SI 1

Cylindres de révolution inscrits dans une sphère.



Σ est une sphère de centre O, de rayon R.

H est un point du diamètre [S'S].

Le plan perpendiculaire en H à (S'S) coupe Σ suivant le cercle C de rayon r.

1. Dessine à main levée le cylindre de révolution de base C inscrit dans la sphère.

2. On pose $OH = x$.

a) Exprime le volume V du cylindre ainsi déterminé en fonction de R et de x.

b) Etudie les variations de la fonction :

$$f : x \longmapsto x\,(R^2 - x^2)$$

pour tout x de l'intervalle [O,R].

Déduis-en que V est *maximum* pour $x = \frac{R\sqrt{3}}{3}$

et que le rapport de ce volume à celui de la sphère est alors égal à $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

niveau B

Fiche n° SI 2

Cônes de révolution inscrits dans une sphère.

On considère la sphère Σ de centre O et de rayon R .

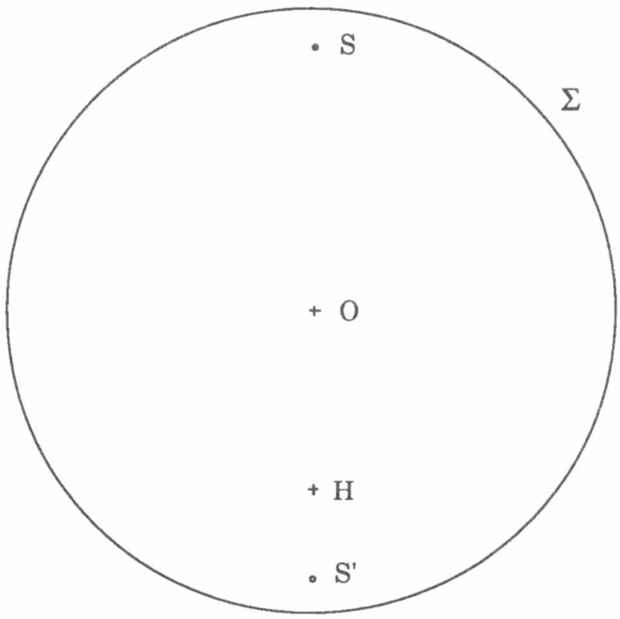
[SS'] est un de ses diamètres ; on munit (SS') d'un repère tel que :

$$\overline{OS} = R .$$

On choisit H sur]SS'[et on pose :

$$\overline{OH} = x .$$

Le plan perpendiculaire en H à (SS') coupe la sphère suivant un cercle (C) dont on notera r le rayon.



1. Dessine à main levée le cône de base (C) et de sommet S .

2. — exprime r en fonction de R et de x .

— montre que le volume V du cône ainsi déterminé est donné par la formule :

$$V = \frac{\pi R^3}{3}\left(1 - \frac{x^2}{R^2}\right)\left(1 - \frac{x}{R}\right)$$

3. On pose $t = x/R$; donne les valeurs possibles pour t ; puis exprime V en fonction de t .

4. En étudiant les variations sur $[-1 ; 1]$ de la fonction numérique :

$$f : t \longmapsto (1-t)(1-t^2)$$

justifie l'énoncé suivant :

"Parmi tous les cônes inscrits dans une sphère, ceux qui ont le volume *maximum* sont ceux dont la hauteur est les deux tiers du diamètre de la sphère. Leur volume vaut les 8/27 de celui de la sphère" .

Prismes droits à base carrée inscrits dans une sphère.

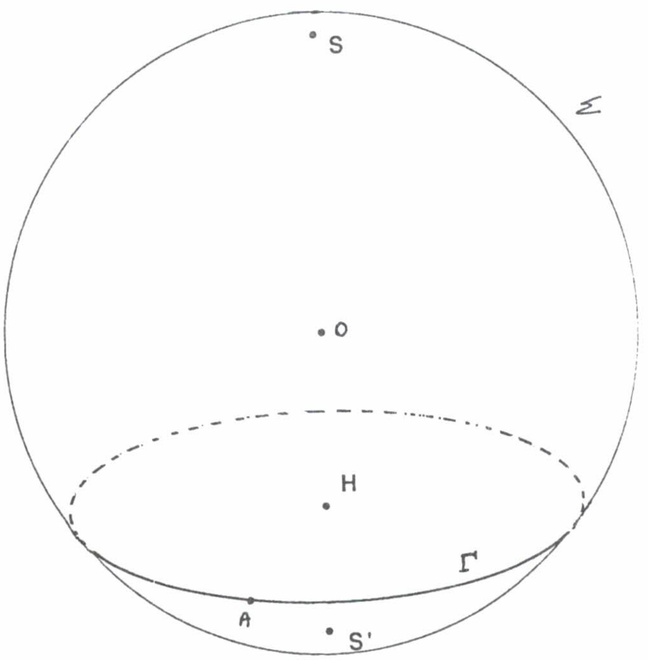
On considère la sphère Σ de centre O et de rayon R.

[SS'] est un diamètre de la sphère Σ.

H est un point de]OS'[. On pose $OH = x$.

Γ désigne le cercle suivant lequel la sphère Σ coupe le plan perpendiculaire en H à (SS').

On note r le rayon du cercle Γ.



1. A étant un point donné de Γ, construis avec rigueur les points B, C et D de Γ tels que ABCD soit un carré (cf. fiche PC12).

2. Montre que l'aire du carré ABCD, en fonction de r, vaut $2r^2$.

3. Dessine le prisme droit de base ABCD inscrit dans la sphère Σ.

4. Montre que le volume $V(x)$ de ce prisme droit est égal à $4x\,(R^2 - x^2)$.

5. Pour quelle valeur de x le volume $V(x)$ est-il *maximum* ?

6. Etablis que, pour la valeur de x trouvée à la question précédente, le prisme droit est un cube. Montre que dans ce cas, le rapport de $V(x)$ au volume de la sphère vaut $\dfrac{2\sqrt{3}}{3\pi}$.

Pyramides régulières dont la base est un triangle équilatéral, inscrites dans une sphère.

Σ est une sphère de centre O et de rayon R, [SS'] un de ses diamètres.

On munit (SS') d'un repère tel que :

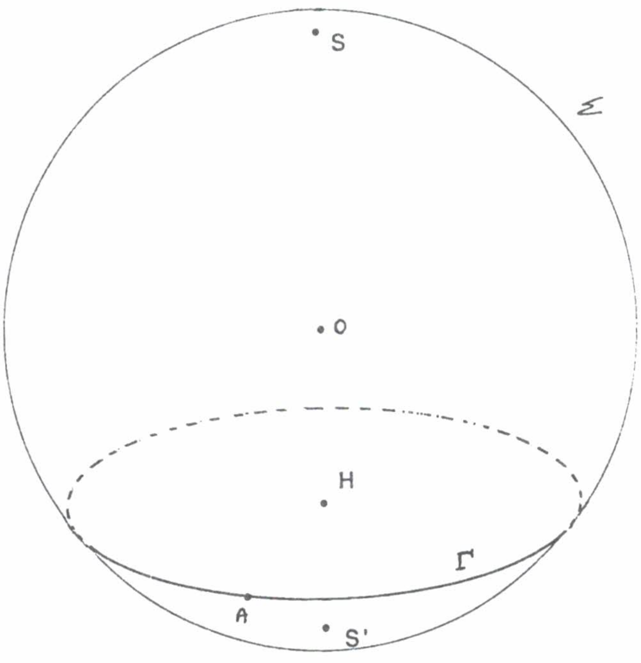
$$\overline{OS} = R.$$

On choisit H sur]SS'[et on pose :

$$\overline{OH} = x.$$

Le plan perpendiculaire en H à la droite (SS') coupe la sphère suivant un cercle Γ dont on notera r le rayon.

A est un point de Γ.



1. Place les points B et C de Γ tels que le triangle ABC soit équilatéral (tu pourras faire un dessin approximatif ou bien une construction précise en utilisant les résultats de la fiche PC14) et dessine la pyramide régulière SABC.

2. Etablis que l'aire d'un triangle équilatéral inscrit dans un cercle de rayon r vaut $\dfrac{3\sqrt{3}r^2}{4}$.

3. Exprime r et HS en fonction de R et de x.

4. Montre que le volume V de la pyramide SABC est donné par la formule :

$$V = \frac{\sqrt{3}\,R^3}{4}\left(1 - \frac{x}{R}\right)\left(1 - \frac{x^2}{R^2}\right)$$

5. On pose $t = x/R$. Quelles sont les valeurs possibles pour t ?
En étudiant les variations sur $]-1\,;1[$ de la fonction $f : t \longmapsto (1-t)(1-t^2)$, établis que V est *maximum* quand SABC est un tétraèdre régulier. Quel résultat général peut-on ainsi énoncer ?
Montre que le rapport du volume V à celui de la sphère est alors égal à $\dfrac{2\sqrt{3}}{9\pi}$.
Donne une valeur approchée de ce rapport à 10^{-2} près.

niveau B

Fiche n° SI 5

Cylindre inscrit dans un cône.

On considère un cône de révolution de sommet S. Son cercle de base a pour centre O et pour rayon r. Sa hauteur SO est notée h.

On mène par le point O' de [SO] le plan (P') parallèle à (P).

On pose SO' = x.

Le plan (P') coupe le cône suivant le cercle (C') de rayon r'.

1. Montre que : $r' = \frac{x \cdot r}{h}$.

2. Dans le cône, on construit le cylindre de révolution de base le cercle (C'), comme l'indique la figure. On note V le volume de ce cylindre.

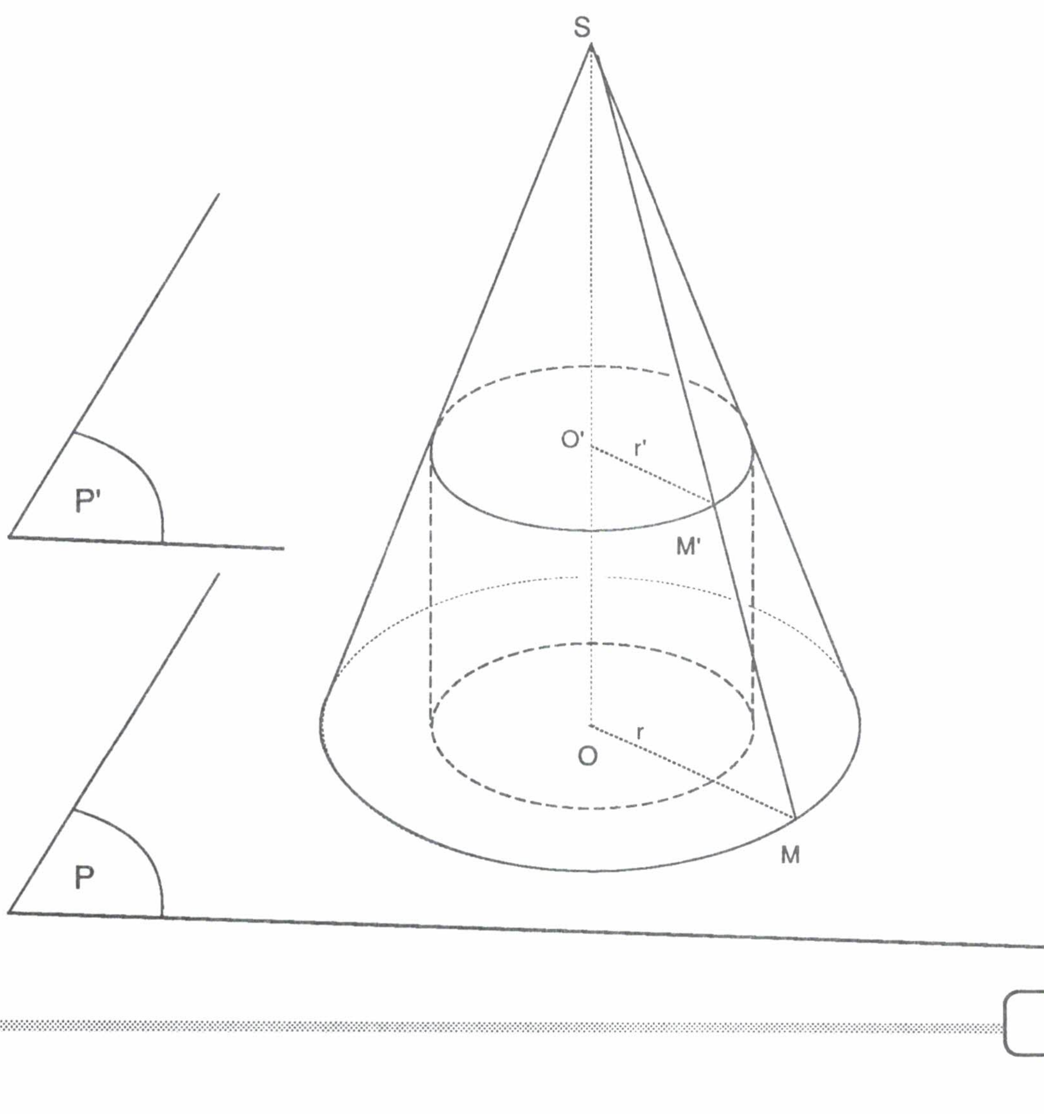
a) Calcule V en fonction de x, h, r et établis que $V = \frac{\pi r^2}{h^2} x^2(h-x)$.

b) En étudiant les variations sur $[0 ; h]$ de la fonction :

$$f : x \longmapsto x^2(h-x),$$

justifie l'énoncé suivant :

"Parmi tous les cylindres inscrits dans un cône donné, il en est un dont le volume est maximum, sa hauteur est le tiers de celle du cône, le rayon de son cercle de base est égal aux deux tiers du rayon de base du cône. Son volume est les 4/9 du volume du cône".

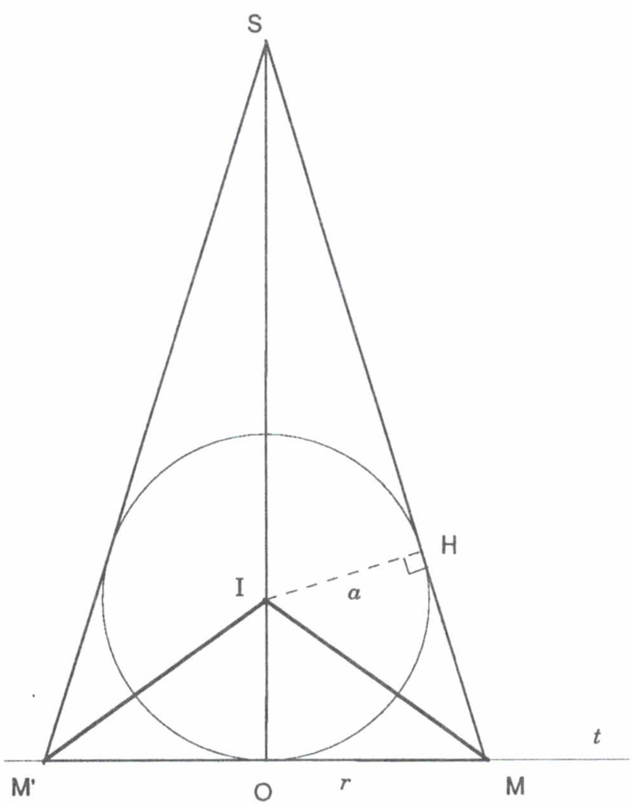


niveau C

Fiche n° SI 6

Cônes circonscrits à une sphère.

1. *Analyse d'une figure plane :* triangle isocèle circonscrit à un cercle donné.



On considère le cercle Γ de centre I et de rayon a. Soit t une tangente en un point O de Γ, M un point de t tel que OM > a et M' son symétrique par rapport à O.

De M on mène la deuxième tangente à Γ. On note H son point de contact avec Γ et S son point d'intersection avec (OI).

a) Justifie que (SM') est tangente à Γ.

b) On pose :

$$g = \mathrm{SM} \;,\; r = \mathrm{OM} \;,\; h = \mathrm{SO}$$

Démontre que MH = MO .

c) En calculant de deux manières différentes $\tan \widehat{\mathrm{OSM}}$, établis que :

(1) $\quad g - r = \dfrac{ha}{r}$.

d) En calculant de deux manières différentes l'aire du triangle OSM , établis que :

(2) $\quad g + r = \dfrac{hr}{a}$.

e) Déduis de (1) et (2) que :

$$h = \frac{2ar^2}{r^2 - a^2} \text{ et que : } r^2 = \frac{a^2 h}{h - 2a}.$$

2. On fait tourner la figure précédente autour de [SO] .
Dessine à main levée le cône obtenu. On note V son volume.

a) Montre que $\mathrm{V} = \dfrac{\pi a^2 h^2}{3(h-2a)}$. On pose $x = \dfrac{h}{2a}$; exprime V en fonction de x et de a .

Quelles sont les valeurs possibles de x ?

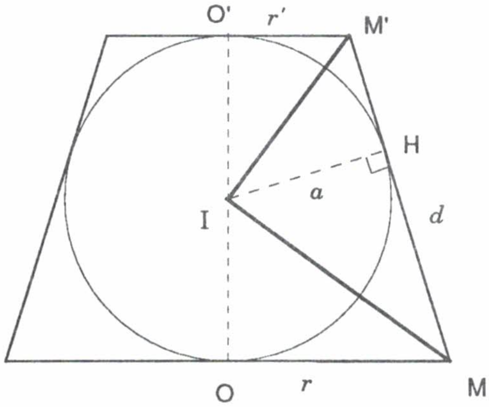
b) En étudiant les variations sur $]1;+\infty[$ de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{x^2}{(x-1)}$, justifie l'énoncé suivant :
"Parmi tous les cônes circonscrits à une sphère donnée, ceux dont la hauteur est le double du diamètre de la sphère ont un volume minimum. Ce volume est également le double de celui de la sphère" .

niveau C

Fiche n° SI 7

Troncs de cône circonscrits à une sphère.

1. *Analyse d'une figure plane :* trapèze isocèle circonscrit à un cercle donné.



On note a le rayon du cercle donné et on pose :

$$MM' = d \qquad OM = r \qquad O'M' = r'.$$

a) Démontre que $M'O' = M'H$
et que $MH = MO$.
Déduis-en que $d = r + r'$.

b) En te servant du projeté orthogonal m' de M' sur $[OM]$, démontre que :

$$d^2 = (r - r')^2 + 4a^2.$$

c) Déduis des questions précédentes que r et r' sont liés par la relation

$$rr' = a^2.$$

2. On fait tourner la figure précédente autour de $[OO']$.
Dessine à main levée le tronc de cône obtenu.
On note V son volume.

a) En te servant du résultat établi dans la fiche C20 , montre que :

$$V = \frac{2\pi a^3}{3}\left(\frac{r^2}{a^2} + 1 + \frac{a^2}{r^2}\right).$$

On pose $x = \frac{r}{a}$. Exprime V en fonction de x et de a.

b) En étudiant les variations sur $]0\,;+\infty[$ de la fonction

$$f : x \longmapsto x^2 + 1 + \frac{1}{x^2},$$

justifie l'énoncé suivant :

"Tous les troncs de cône circonscrits à une sphère donnée ont un volume strictement supérieur à celui des cylindres circonscrits à cette sphère. Ces derniers ont un volume égal à une fois et demie celui de la sphère".

niveau A

Fiche n° SI 8

Octaèdre inscrit dans un cube.

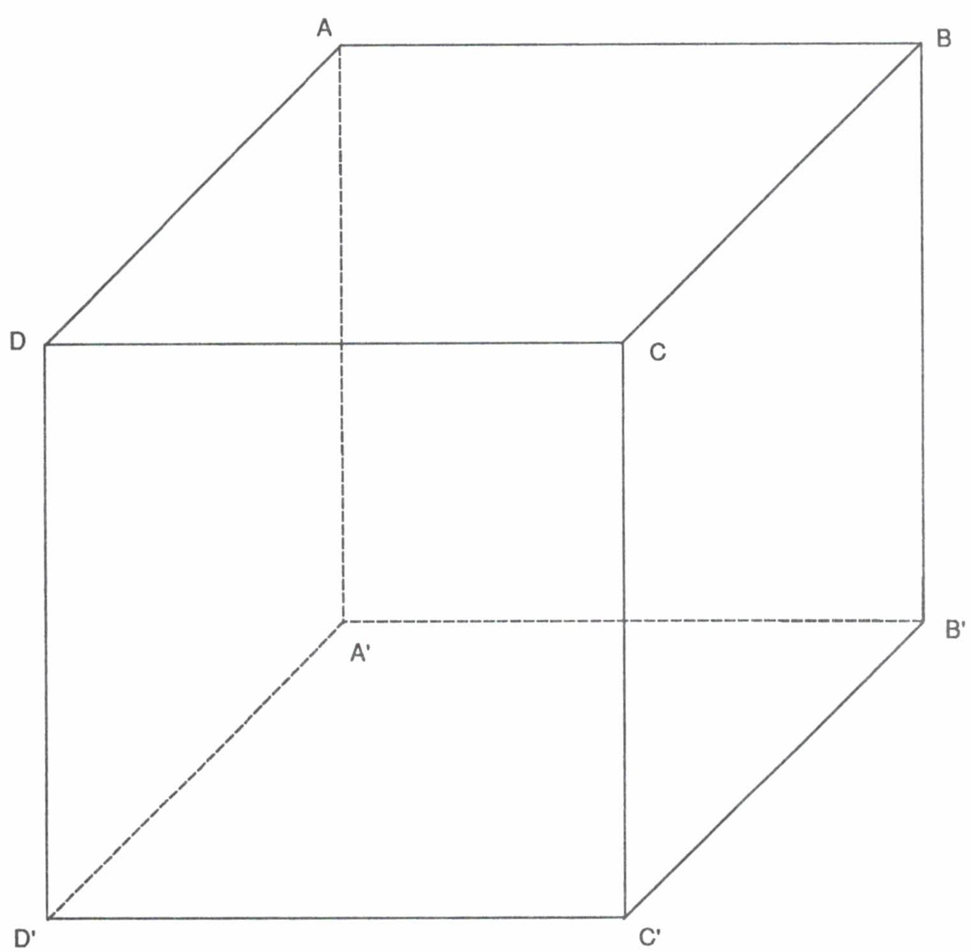
ABCDA'B'C'D' est un cube dont les arêtes ont pour longueur c .

On note respectivement I , J , K , L , M , N les centres des faces ABB'A' , BCC'B' , DCC'D' , AA'D'D , ABCD et A'B'C'D' .

1. Dessine le solide IJKLMN ; ce solide est appelé *octaèdre régulier* : explique pourquoi.

2. Exprime la longueur de l'arête [IJ] en fonction de c .

3. Démontre que IJKL est un carré et établis finalement que le volume de l'octaèdre est égal au sixième de celui du cube.



Tétraèdre régulier inscrit dans un cube.

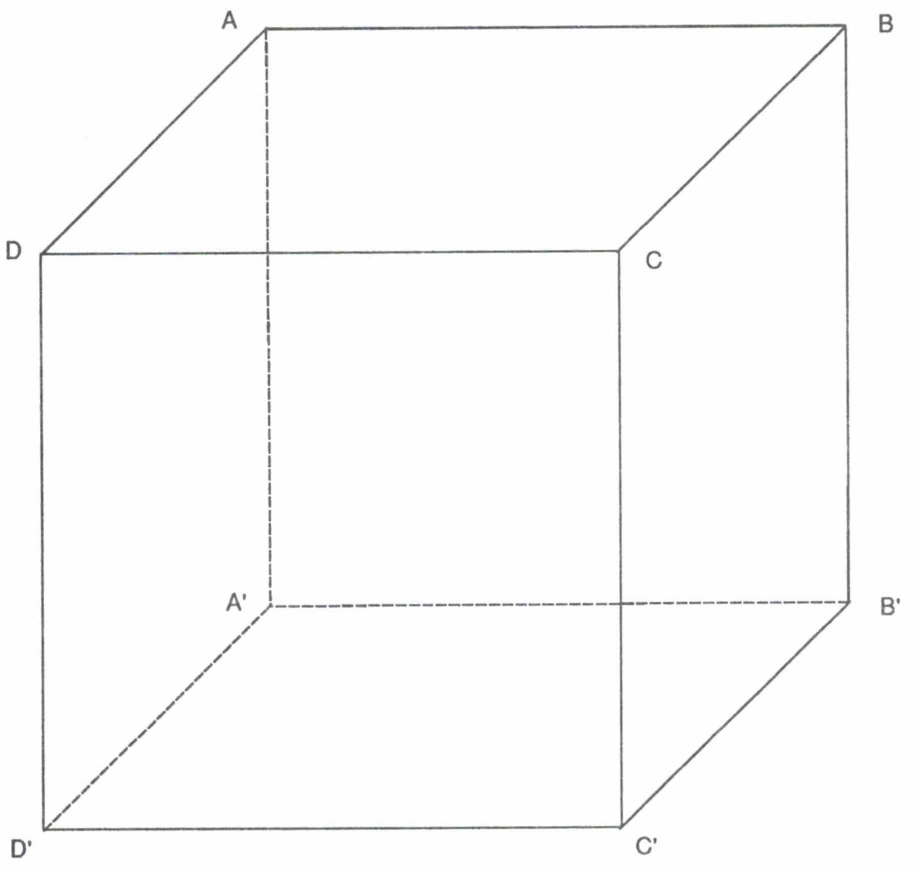
ABCDA'B'C'D' est un cube dont les arêtes ont pour longueur c .

1. Dessine le tétraèdre ACB'D' et démontre qu'il est régulier.

2. Calcule le volume du tétraèdre ACDD' en fonction de c . Trouve sur la figure d'autres tétraèdres ayant le même volume. Déduis-en que le volume du tétraèdre régulier ACB'D' est égal au tiers de celui du cube.

3. Utilise ce qui précède pour démontrer que, si on note a la longueur des arêtes d'un tétraèdre régulier, son volume V et sa hauteur h sont donnés par les formules :

$$V = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3 \qquad \text{et} \qquad h = \frac{\sqrt{6}}{3}a .$$



niveau B

Fiche n° SI 10

Solides de BELL.

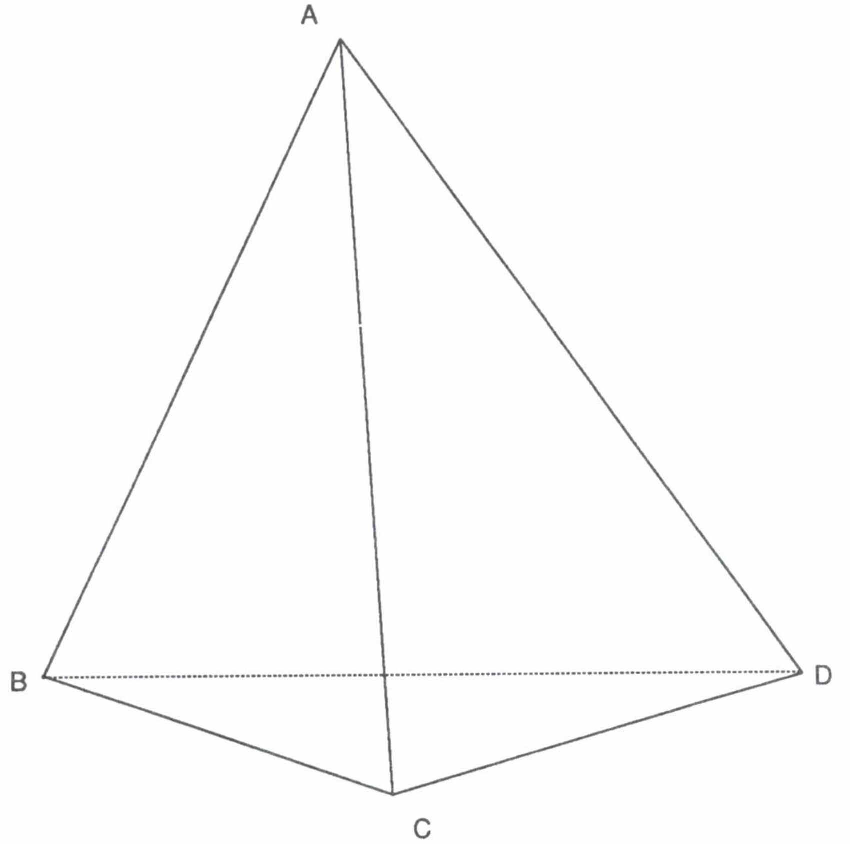
ABCD est un tétraèdre régulier.

1. Démontre que les points C et D sont dans le plan médiateur de [AB] . Déduis-en que la droite (CD) est orthogonale à la droite (AB) .

2. Place les points M , N , P , Q , milieux respectifs des arêtes [AC] , [AD] , [BD] et [BC] . Démontre que MNPQ est un carré.

3. On choisit AB = 10 cm . Réalise un patron de chacun des solides MNPQAB et MNPQCD . Reconstitue les deux solides. Que peut-on dire de leur volume ?

4. Propose à une personne, qui n'a pas eu connaissance de cette construction, d'assembler les deux solides afin d'obtenir un tétraèdre.



niveau C

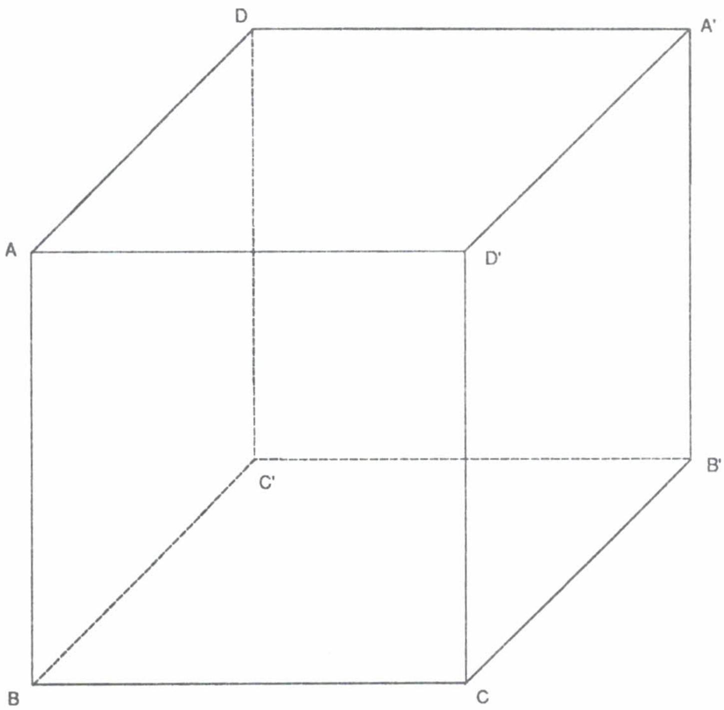
Fiche n° SI 11

Tétraèdres associés de Mœbius.

Deux tétraèdres distincts ABCD et A'B'C'D' sont appelés *tétraèdres associés de Mœbius* si tout sommet de chacun d'eux est dans le plan d'une face de l'autre.

1. Peut-on avoir une situation analogue avec des triangles distincts en géométrie plane ?

2. En utilisant les huit sommets du cube ci-contre, dessine deux tétraèdres associés de Mœbius.



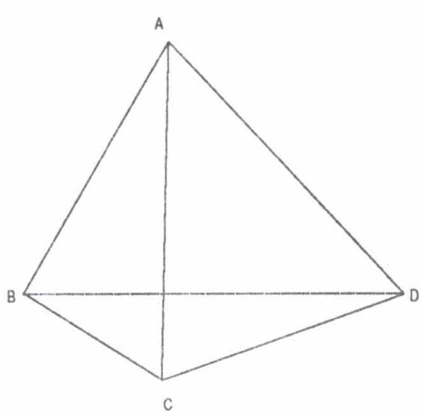
3. Complète le tétraèdre ABCD de la figure ci-dessous en plaçant les points A' , B' , C' , D' définis de la façon suivante :

A' est le centre de gravité du triangle BCD , et

$\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{DC}$,

$\overrightarrow{AD'} = \overrightarrow{CB}$,

$\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{BD}$.



a) En utilisant le fait que A' est centre de gravité de BCD , établis que :

$$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD} = 3\,\overrightarrow{BA'}\ ,\ \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} = 3\,\overrightarrow{CA'}\ ,$$

$$\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = 3\,\overrightarrow{DA'}\ .$$

Déduis-en que :

$$\overrightarrow{A'B} = \tfrac{1}{3}\overrightarrow{C'D'}\ ,\ \overrightarrow{A'C} = \tfrac{1}{3}\overrightarrow{D'B'}\ ,\ \overrightarrow{A'D} = \tfrac{1}{3}\overrightarrow{B'C'}\ .$$

b) Montre que A est le centre de gravité du triangle B'C'D' .

c) Déduis de a) et b) que ABCD et A'B'C'D' sont deux tétraèdres associés de Mœbius.

4. On se propose de déterminer les points d'intersection des arêtes de chacun de ces tétrèdres avec les faces de l'autre.

a) On note I , J , K les milieux de [AB] , [AC] et [AD] . Justifie que $I \in [CD']$. Déduis-en que $[AB] \cap (A'B'D') = \{ I \}$. Etablis de même que $[AC] \cap (A'B'C') = \{ J \}$ et que $[AD] \cap (A'C'D') = \{ K \}$.

b) On note respectivement R , L , M les points définis par : $\{ R \} = [A'B'] \cap [D'C]$, $\{ L \} = [A'C'] \cap [DB']$ et $\{ M \} = [A'D'] \cap [BC']$. Justifie l'existence de ces points et prouve que : $\{ R \} = [A'B'] \cap (ABC)$, $\{ L \} = [A'C'] \cap (ACD)$, $\{ M \} = [A'D'] \cap (ABD)$.

c) Sers-toi des résultats établis en 4. pour faire un beau dessin (respectant les conventions classiques des pointillés pour les parties cachées) de deux tétraèdres associés de Mœbius.