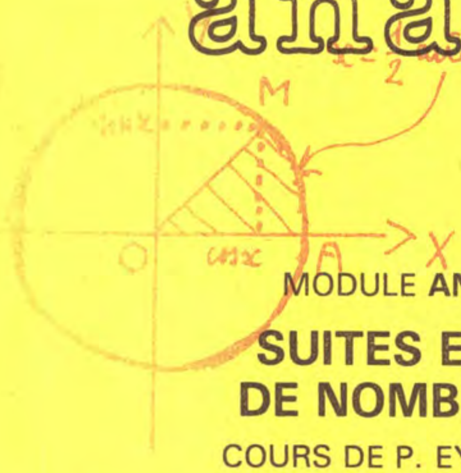
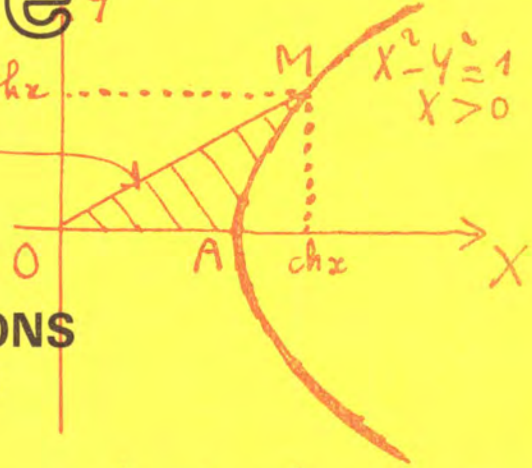
UNIVERSITÉ
DE NANCY I

CENTRE
DE TÉLÉ-ENSEIGNEMENT
UNIVERSITAIRE
DE NANCY II

analyse





MODULE AN 01 :

SUITES ET FONCTIONS DE NOMBRES RÉELS

COURS DE P. EYMARD

DIPLÔME D'ÉTUDES UNIVERSITAIRES GÉNÉRALES

SCIENCES DES STRUCTURES ET DE LA MATIÈRE
MATHÉMATIQUES PHYSIQUE INFORMATIQUE
SCIENCES DE L'ÉDUCATION

la maquette de la couverture a été réalisée par le L.E.P. Cyfflé - NANCY

© Édité et imprimé par l'**Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques** - (Université de Nancy I - Faculté des Sciences) -
B.P. 239 - 54506 VANDOEUVRE-les-NANCY CEDEX
Dépôt légal : 4e trimestre 1985
n° de la publication : 2-85406-086-5
Le Responsable de la collection : Philippe LOMBARD

Réf. N 500

M.P.I.S.E.
Module AN01

SUITES ET FONCTIONS DE NOMBRES RÉELS

Ceci est la rédaction de la première partie : 1. "Suites et fonctions de nombres réels" d'un cours d'Analyse mathématique qui en comportera cinq, les autres ayant pour titre : 2. Calcul différentiel, 3. Calcul Intégral, 4. Géométrie différentielle et Cinématique, 5. Séries.

Le programme traité dans ces cinq parties est en gros celui des deux premières années d'université. Mais il s'agit d'un télé-enseignement, un enseignement à distance, au loin, très différent de celui qui est dispensé à des étudiants ordinaires qui, dans les amphithéâtres ou les salles de travaux dirigés, reçoivent la connaissance sous forme principalement orale, et peuvent eux-mêmes poser des questions. Ce fait a été constamment présent à l'esprit du rédacteur, qui voudrait ajouter maintenant quelques conseils pratiques au lecteur.

1) Chaque leçon représente le travail d'une semaine en analyse, qui bien souvent sera à prendre sur le temps laissé

libre par d'absorbantes occupations professionnelles.

2°) Evitez systématiquement de regarder par avance les leçons au programme des semaines ultérieures. Si vous avez du temps de reste, révisez et approfondissez plutôt celles des semaines précédentes.

3°) Ne lisez pas passivement ces notes dans votre fauteuil. Ayez bien au contraire un comportement actif, la plume à la main. Par exemple, au fur et à mesure de la lecture :

a) Ecrivez, en bon français et sans abréviation aucune, un Sommaire des définitions, énoncés, exemples et contre-exemples, sans les démonstrations.

b) Quand une démonstration est annoncée, essayez d'abord d'en trouver par vous-même les grandes lignes, avant de la lire dans les notes. Un ou deux jours après l'avoir lue, essayez de la reproduire au brouillon sans l'aide des notes.

c) Quand un Exercice est proposé dans le cours du texte, tentez de le résoudre complètement, et rédigez-en la solution sur un cahier d'exercices, avant de poursuivre votre lecture. En général ces exercices sont faciles, et destinés à ponctuer la compréhension. Ils vous faciliteront la tâche par la suite. Suivre cette méthode vous mettra dans une situation de découverte et de réflexion personnelle, bien supérieure finalement au gavage d'un cours oral magistral bien difficile à interrompre. Si vous ne trouvez pas rapidement la solution d'un Exercice, remettez au lendemain la suite de la lecture, vaquez à vos occupations : une idée vous viendra peut-être à l'improviste. En désespoir de cause, regardez enfin les indications de solution en fin de chapitre, afin de pouvoir continuer votre lecture.

4°) Notez au fur et à mesure les points obscurs, pour demander des éclaircissements lors des regroupements.

5°) Comme vous le voyez, ce manuscrit est un premier jet. Vous y détecterez sûrement des lapsus, des maladresses, et même des erreurs. N'hésitez pas à écrire au rédacteur de ces lignes : Pierre EYMARD, Professeur de Mathématiques, Université de NANCY 1, BP239, 54037 VANDOEUVRE.

AN01 Leçon n°1.

<u>Exemples de suites définies par récurrence</u>

I. <u>Introduction</u>

Définir une <u>suite</u> de nombres réels (ou même complexes), c'est faire correspondre à chaque nombre entier ≥ 0 un nombre réel (ou même complexe) déterminé, qu'on note u_n. Une suite est donc une <u>fonction définie sur $\mathbb{N}$</u>, à valeurs réelles (ou même complexes).

Une suite peut être définie <u>par une formule explicite</u>

$$u_n = f(n),$$

où f est une combinaison de symboles connus. Par exemple, si, pour tout entier $n \geq 0$, on pose :

$$u_n = \sqrt{n^2+1} \quad ; \quad u_n = \frac{5n^3+n+1}{n^4+1} \quad ; \quad u_n = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n ,$$

on obtient trois exemples de suites définies explicitement en fonction de n. Mais souvent u_n est définie de façon plus détournée, par la donnée de u_0 et d'une <u>relation de récurrence</u>

$$u_n = \varphi(u_{n-1}) ,$$

où φ est une fonction explicitement connue, ce qui permet de calculer de proche en proche u_n quand on connaît u_{n-1}. Par exemple, la suite telle que :

$$u_0 = 1/2 \ , \text{ et } \quad u_n = 3u_{n-1}(1-u_{n-1}) \text{ pour tout entier } n \geq 1,$$

a pour premiers termes :

$$u_0 = 1/2 \ , \ u_1 = 3/4 \ , \ u_2 = 9/16 \ , \ u_3 = 189/256 \text{ etc...}$$

<u>Exercice 1</u> A l'aide de votre calculatrice programmable, donnez des valeurs approchées de u_{100}, u_{101}, u_{500}, u_{501}, u_{1000}, u_{1001}.

On considèrera aussi des suites définies par la donnée de leurs deux premiers termes u_0 et u_1 et d'une <u>relation de récurrence d'ordre deux</u>

$$u_{n+1} = \psi(u_n, u_{n-1}).$$

Exemple : Les nombres de Fibonacci sont définis par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$; $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ pour n entier ≥ 2.

Exercice 2. Dressez la table des 40 premiers nombres de Fibonacci.

Dans cette leçon nous allons décrire quelques exemples-type de suites définies par récurrence, pour lesquelles on peut trouver une formule explicite $u_n = f(n)$; c'est néanmoins une circonstance qui reste exceptionnelle.

II Le formule de la progression géométrique

Soit a un nombre complexe. Pour tout entier $n \geq 0$ formons la somme
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a^k = 1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1} + a^n,$$
où l'on convient que $a^0 = 1$. Si n est grand, cette somme, ayant de plus en plus de termes, n'est pas maniable. Mais on peut en donner une expression ramassée, comme suit. En multipliant par a l'égalité
$$S_n = 1 + a + a^2 + \cdots\cdots + a^{n-1} + a^n$$
on obtient
$$a\,S_n = \quad a + a^2 + \cdots\cdots + a^{n-1} + a^n + a^{n+1},$$
d'où, par différence :
$$(1-a)\,S_n = 1 - a^{n+1},$$
ce qui donne la formule :
$$\boxed{\text{si } a \neq 1, \quad \sum_{k=0}^{n} a^k = 1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1} + a^n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}}$$

Remarque : si $a = 1$, on a $S_n = n+1$.

Exercice 3. Vérifier les formules
$$a^p + a^{p+1} + \cdots + a^{n-1} + a^n = \frac{a^p - a^{n+1}}{1-a}, \quad \text{si } a \neq 1 ;$$
$$\frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \cdots + \frac{9}{10^n} = 1 - 1/10^n .$$

III Récurrences linéaires d'ordre un

Soient $a \neq 0$ et b deux constantes complexes. Posons
$$u_n = a\,u_{n-1} + b$$
pour tout n entier ≥ 1, et calculons u_n en fonction de u_0 et de n.

$$\begin{cases} u_n = a u_{n-1} + b \\ u_{n-1} = a u_{n-2} + b \\ u_{n-2} = a u_{n-3} + b \\ \ldots\ldots\ldots \\ u_3 = a u_2 + b \\ u_2 = a u_1 + b \\ u_1 = a u_0 + b \end{cases}$$

Multiplions la deuxième relation par a, la troisième par a^2, ..., la k-ième par a^{k-1}, ..., l'antépénultième par a^{n-3}, l'avant-dernière par a^{n-2}, et la dernière par a^{n-1}. Puis additionnons. Après simplifications, on obtient la formule :

$$u_n = u_0 a^n + b\,(1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1})$$

et donc :

$$u_n = u_0 a^n + b\,\frac{1-a^n}{1-a}, \text{ si } a \neq 1 ;$$

$$u_n = u_0 + nb, \text{ si } a = 1 .$$

IV Récurrences linéaires d'ordre deux

Soient a et b deux constantes complexes (non nulles), et soit (u_n) une suite telle que, pour tout entier $n \geq 0$, on ait :

$$(1) \qquad u_n = a u_{n-1} + b u_{n-2} \quad .$$

Chaque fois qu'on précise les "conditions initiales", c'est-à-dire si on donne, de manière quelconque, les valeurs des deux premiers termes u_0 et u_1, la relation (1) fournit une suite (u_n) et une seule. Tant qu'on ne précise pas les conditions initiales, (1) a une infinité de solutions. Cherchons s'il en existe du type particulier $u_n = r^n$, où r est une constante complexe (non nulle). Pour que l'on ait pour tout n :

$$r^n = a r^{n-1} + b r^{n-2} ,$$

il faut et il suffit que le nombre complexe r soit solution de l'équation du second degré

$$(2) \qquad r^2 - ar - b = 0 .$$

<u>Premier cas</u> : supposons $a^2+4b \neq 0$. Alors (2) a deux racines distinctes r_1 et r_2, donc on connaît pour (1) deux solutions non proportionnelles :

$$u_n = r_1^n \qquad \text{et} \qquad u_n = r_2^n .$$

La relation (1) étant linéaire, il est clair que, pour tout couple de constantes complexes A et B, la suite

$$(3) \qquad u_n = A r_1^n + B r_2^n$$

est encore solution de (1). Supposons maintenant qu'on précise les conditions initiales u_0 et u_1 ; nous allons voir que ceci détermine complètement les constantes A et B, ce qui prouvera à posteriori que (3) est la solution "générale" de (1). En effet, si on fait $n=0$, puis $n=1$, dans (3), on a :

$$\begin{cases} A + B = u_0 \\ r_1 A + r_2 B = u_1 \end{cases} ,$$

d'où

$$A = \frac{u_0 r_2 - u_1}{r_2 - r_1} \qquad \text{et} \qquad B = \frac{u_1 - u_0 r_1}{r_2 - r_1} .$$

Ceci fournit une formule explicite pour u_n quand on connaît u_0 et u_1, à savoir :

$$(4) \qquad u_n = \frac{(u_0 r_2 - u_1) r_1^n + (u_1 - u_0 r_1) r_2^n}{r_2 - r_1} .$$

<u>Second cas</u> : supposons $a^2+4b=0$. L'équation (2) a une seule racine $r = \frac{a}{2}$; elle fournit une seule solution de (1), à savoir $r^n = \left(\frac{a}{2}\right)^n$. Pour en trouver une autre, posons

$$u_n = r^n v_n = \left(\frac{a}{2}\right)^n v_n .$$

Un calcul facile montre que u_n satisfait à (1) si et seulement si

$$(5) \qquad v_n = 2 v_{n-1} - v_{n-2} .$$

Or $v_n = n$ est une solution évidente de (5). Ainsi $u_n = n\left(\frac{a}{2}\right)^n$

est une deuxième solution de (1), non proportionnelle à la première $\left(\frac{a}{2}\right)^n$. Par linéarité,

$$(6) \qquad u_n = \left(\frac{a}{2}\right)^n (An + B)$$

est solution de (1) quelles que soient les constantes A et B. En faisant $n=0$, puis $n=1$, dans (6), il vient :

$$B = u_0 \qquad ; \qquad \frac{a}{2}(A+B) = u_1 \quad ,$$

c'est-à-dire

$$A = \frac{2}{a}u_1 - u_0 \quad ; \quad B = u_0$$

donc

$$(7) \quad u_n = \left(\frac{a}{2}\right)^n \left[u_0 + n\left(\frac{2}{a}u_1 - u_0\right)\right] .$$

<u>Exercice</u> 4. Montrer que les nombres de Fibonacci sont donnés par la formule

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

<u>Exercice</u> 5. On considère les suites d'entiers p_n et q_n définis par :

$$p_0 = 1 \;,\; p_1 = 3 \;;\; p_n = 2p_{n-1} + p_{n-2} \quad \text{pour } n \geq 2 \;,$$

$$q_0 = 1 \;,\; q_1 = 2 \;;\; q_n = 2q_{n-1} + q_{n-2} \quad \text{pour } n \geq 2 .$$

Dressez le tableau des valeurs de p_n et q_n pour $0 \leq n \leq 13$. Pour ces valeurs de n, calculez avec 9 décimales exactes le rapport $\frac{p_n}{q_n}$. Expliquez le résultat.

III Récurrences homographiques.

Soient a, b, c, d quatre constantes complexes telles que $ad - bc \neq 0$ et $c \neq 0$. Soit (u_n) une suite telle que, pour tout entier $n \geq 1$, on ait :

$$(8) \qquad u_n = \frac{a u_{n-1} + b}{c u_{n-1} + d} .$$

Cherchons une formule explicite donnant u_n en fonction de u_0 et de n. Pour cela une étude préliminaire de la transformation dans le plan complexe

$$(9) \qquad z \longmapsto Z = \frac{az+b}{cz+d}$$

s'impose. Il est naturel d'en chercher les <u>points fixes</u> ; ce sont les racines de l'équation du second degré :

$$(10) \qquad cz^2 + (d-a)z - b = 0$$

obtenue en faisant $Z = z$ dans (9).

<u>Premier cas</u> : supposons $(d-a)^2 + 4bc \neq 0$. Alors (10) a deux racines, c'est-à-dire (9) a deux points fixes, α et β. On déduit de (9) que :

$$\frac{Z-\alpha}{Z-\beta} = \frac{(a-\alpha c)z + b - \alpha d}{(a-\beta c)z + b - \beta d} = \frac{a-\alpha c}{a-\beta c} \; \frac{z - \dfrac{b-\alpha d}{\alpha c - a}}{z - \dfrac{b-\beta d}{\beta c - a}} .$$

Mais, puisque α et β sont racines de (10), on a :

$$\frac{b-\alpha d}{\alpha c - a} = \alpha \qquad \text{et} \qquad \frac{b-\beta d}{\beta c - a} = \beta .$$

Ainsi, si (9) a deux points fixes α et β, et si l'on pose :

$$k = \frac{a-\alpha c}{a-\beta c} ,$$

la formule (9) $Z = \dfrac{az+b}{cz+d}$ est équivalente à

$$\frac{Z-\alpha}{Z-\beta} = k \, \frac{z-\alpha}{z-\beta} ,$$

expression qui se prête à l'itération. En effet, de proche en proche,

$$\frac{u_n-\alpha}{u_n-\beta} = k \frac{u_{n-1}-\alpha}{u_{n-1}-\beta} = k^2 \frac{u_{n-2}-\alpha}{u_{n-2}-\beta} = \cdots = k^{n-1} \frac{u_1-\alpha}{u_1-\beta} = k^n \frac{u_0-\alpha}{u_0-\beta} ,$$

donc (8) équivaut à :

$$(11) \qquad \frac{u_n-\alpha}{u_n-\beta} = k^n \frac{u_0-\alpha}{u_0-\beta} ,$$

d'où l'on tire la formule

$$(12) \qquad u_n = \frac{\alpha(u_0-\beta) - \beta k^n (u_0-\alpha)}{u_0-\beta - k^n(u_0-\alpha)} ,$$

où, rappelons-le, α et β sont les deux racines (supposées distinctes) de l'équation du second degré $cz^2 + (d-a)z - b = 0$, et où on a posé $k = \dfrac{a-\alpha c}{a-\beta c}$.

Second cas : supposons $(d-a)^2+4bc=0$. Alors (10) a une seule racine, c'est-à-dire (9) a un seul point fixe $\alpha=\frac{a-d}{2c}$.

Traitons d'abord le cas particulier où $\alpha=0$, c'est-à-dire où $a=d$, et donc $b=0$. Dans ce cas (9) prend la forme

$$cZz + a(Z-z)=0$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{Z}=\frac{1}{z}+\frac{c}{a}.$$

Supposons maintenant $\alpha\neq 0$. En prenant α comme nouvelle origine dans le plan complexe, on est ramené au cas particulier qui vient d'être traité. Il existe donc une constante h telle que (9) équivaut à :

$$\frac{1}{Z-\alpha}=\frac{1}{z-\alpha}+h,$$

c'est-à-dire à

$$Z=\frac{(\alpha h+1)z-\alpha^2 h}{hz+1-\alpha h}.$$

Cette formule coïncide avec (9), donc nécessairement $\frac{\alpha h+1}{h}=\frac{a}{c}$, d'où $h=\frac{2c}{a+d}$. Ainsi (9) est équivalente à

$$(13)\quad \frac{1}{Z-\alpha}=\frac{1}{z-\alpha}+\frac{2c}{a+d}$$

avec $\alpha=\frac{a-d}{2c}$. On a donc de proche en proche :

$$\frac{1}{u_n-\alpha}=\frac{1}{u_{n-1}-\alpha}+\frac{2c}{a+d}=\frac{1}{u_{n-2}-\alpha}+2\frac{2c}{a+d}=\cdots=\frac{1}{u_1-\alpha}+(n-1)\frac{2c}{a+d},$$

soit finalement

$$(14)\quad \frac{1}{u_n-\alpha}=\frac{1}{u_0-\alpha}+n\frac{2c}{a+d},$$

d'où l'on tire la formule

$$(15)\quad u_n=\frac{(a+d)u_0+2\alpha nc(u_0-\alpha)}{a+d+2nc(u_0-\alpha)},$$

où, rappelons-le, $\alpha=\frac{a-d}{2c}$.

Exercice 6. Calculer u_n tel que $u_0=3$, et $u_n=3-\frac{2}{u_{n-1}}$ pour tout entier $n\geqslant 1$.

Exercice 7. Calculer u_n tel que $u_0=2$, et $u_n=\frac{1+u_{n-1}}{3-u_{n-1}}$ pour tout entier $n\geqslant 1$.

IV Indications pour les Exercices proposés ci-dessus

Exercice 1

par défaut:

$u_{100} = 0,643301$	$u_{101} = 0,688394$
$u_{500} = 0,656076$	$u_{501} = 0,676920$
$u_{1000} = 0,659174$	$u_{1001} = 0,673990$

Vous êtes-vous posé la question de l'exactitude des décimales que vous affirmez ?

Exercice 2 Table des 40 premiers nombres de Fibonacci, définis par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$; et $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ si n est ≥ 2.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377

n	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
F_n	610	987	1.597	2.584	4.181	6765	10946	17.711	28.657	46.368	75.025

n	26	27	28	29	30	31	32
F_n	121.393	196.418	317.811	514.229	832.040	1.346.269	2.178.309

n	33	34	35	36	37	38
F_n	3.524.578	5.702.887	9.227.465	14.930.352	24.157.817	39.088.169

n	39	40
F_n	63.245.986	102.334.155

Exercice 4 L'équation (2) $r^2 - r - 1 = 0$ a les deux racines $r_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $r_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. On applique (4) avec $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$, d'où la formule $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$, due à de Moivre (1730).

Exercice 5

n	p_n	q_n	p_n/q_n	n	p_n	q_n	p_n/q_n
0	1	1	1	7	577	408	1,414215186
1	3	2	1,5	8	1393	985	1,414213198
2	7	5	1,4	9	3363	2378	1,414213625
3	17	12	1,41666...	10	8119	5741	1,414213552
4	41	29	1,413793103	11	19.601	13.860	1,414213564
5	99	70	1,414285714	12	47.231	33.461	1,414213562
6	239	169	1,414201183	13	114.243	80.782	1,414213562

On constate que les fractions $\frac{p_n}{q_n}$ convergent assez vite vers $\sqrt{2} = 1,4142135623730950488016887\ldots$ Par exemple $\frac{1393}{985}$ donne déjà 6 décimales exactes de $\sqrt{2}$, et $\frac{47.321}{33461}$ en donne 9.

Explication : La formule (4) fournit les expressions exactes :

$$p_n = \frac{(1+\sqrt{2})^{n+1} + (1-\sqrt{2})^{n+1}}{2} \quad \text{et} \quad q_n = \frac{(1+\sqrt{2})^{n+1} - (1-\sqrt{2})^{n+1}}{2\sqrt{2}},$$

d'où

$$\left| \frac{p_n}{q_n} - \sqrt{2} \right| = \left| \frac{p_n - q_n\sqrt{2}}{q_n} \right| = \frac{2\,|1-\sqrt{2}|^{n+1}}{2\,q_n} < \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{1}{q_n}\right)^2,$$

vu que $\frac{1}{q_n} = \frac{2\sqrt{2}}{(1+\sqrt{2})^{n+1} - (1-\sqrt{2})^{n+1}} > \frac{2\sqrt{2}}{(1+\sqrt{2})^{n+1}} = 2\sqrt{2}\,(\sqrt{2}-1)^{n+1}$. Quand n croît, q_n augmente assez vite, et l'erreur commise en remplaçant $\sqrt{2}$ par le nombre rationnel $\frac{p_n}{q_n}$ est inférieure à $\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{q_n}\right)^2$. Par exemple, vous n'aurez aucune difficulté, à la calculatrice, à l'aide des relations de récurrence, à trouver que la fraction $\frac{p_{23}}{q_{23}}$ vaut $\frac{768.398.401}{543.339.720}$, et fournit 17 décimales exactes de $\sqrt{2}$.

Exercice 6. Les racines de (10) sont ici $\alpha = 2$ et $\beta = 1$. En appliquant (12) avec $u_0 = 3$, on trouve $u_n = \frac{2^{n+2}-1}{2^{n+1}-1}$, après avoir remarqué que $k = \frac{1}{2}$.

Exercice 7. Ici (10) s'écrit $z^2 - 2z + 1 = 0$, donc admet la racine double $\alpha = 1$. On applique (15) avec $u_0 = 2$, $a = 1$, $d = 3$ et $c = -1$, et l'on trouve $u_n = \frac{n-4}{n-2}$.

Exercice recommandé. En supposant que vous ne connaissez pas les formules (12) et (15), faites à nouveau les Exercices 6 et 7 en appliquant directement sur ces cas particuliers les idées du III, c'est-à-dire essentiellement la considération des points fixes de la transformation homographique. Autrement dit, composez sur ces deux exemples un problème de Terminale en deux parties, sans utiliser la théorie générale développée au III.

Limites de suites

Le lecteur a déjà certainement l'expérience des propriétés élémentaires du calcul des limites ; aussi nous contenterons-nous d'en dresser un sommaire et d'indiquer quelques démonstrations types. En revanche nous insisterons sur l'axiome de la borne supérieure, qui distingue de façon décisive l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels de l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels, et sur les conséquences de cet axiome dans la théorie des limites : limites de suites monotones, critère de Cauchy, théorème de Bolzano-Weierstrass. Sous forme d'exemples, nous étudierons aussi une notion utile en Calcul numérique, celle de "rapidité" de la convergence.

I. Définition de la limite. Propriétés élémentaires.

Soit (u_n) une suite de nombres réels. On dit que cette suite est <u>majorée</u> s'il existe un nombre A tel que, quel que soit n, on ait $u_n \leq A$. On dit qu'elle est <u>minorée</u> s'il existe un nombre B tel que, quel que soit n, on ait $B \leqslant u_n$. On dit qu'elle est <u>bornée</u> si elle est majorée et minorée ; il revient au même de dire qu'il existe un nombre M tel que, quel que soit n, on ait $|u_n| \leq M$.

<u>Définition</u>. Soit (u_n) une suite. Soit l un nombre réel. On dit que (u_n) (est <u>convergente</u> et) <u>a pour limite</u> l [ou encore: <u>tend vers</u> l] <u>quand n tend vers l'infini</u> [et l'on note: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = l$, ou $\lim u_n = l$] si :

$$\left\{\begin{array}{l}\text{pour tout nombre réel } \varepsilon > 0, \text{ il existe un entier } N \text{ (dépendant de } \varepsilon) \\ \text{tel que : } n \geqslant N \text{ implique } |l - u_n| \leqslant \varepsilon.\end{array}\right.$$

Il revient au même de dire que : dans tout intervalle $[l-\varepsilon, l+\varepsilon]$ de longueur > 0 centré au point l se trouvent toutes les valeurs u_n de la suite sauf pour un ensemble <u>fini</u> des indices n, cet ensemble fini exceptionnel dépendant lui-même de l'intervalle considéré.

L'existence de la limite et sa valeur ℓ, si elle existe, ne sont pas altérées si on change un nombre fini de termes de la suite.

Si la suite (u_n) a une limite, cette limite est <u>unique</u>. En effet, si $\ell < \ell'$ étaient deux limites distinctes, prenons $\varepsilon = \frac{\ell' - \ell}{3}$; pour n assez grand, il faudrait que u_n appartienne à la fois aux deux intervalles $[\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$ et $[\ell' - \varepsilon, \ell' + \varepsilon]$; c'est absurde, puisque ces intervalles n'ont aucun point commun.

<u>Exercice</u> 1. En utilisant la définition, montrer que :

1°) la suite $u_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$ a pour limite 1 ;

2°) la suite $v_n = (-1)^n\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ n'a pas de limite.

<u>Exercice</u> 2. quel est le plus petit entier N tel que $n \geq N$ implique :

1°) $\frac{1}{n^2 - 2n} \leq \frac{1}{100}$? 2°) $\frac{1}{n^2 - 2n} \leq \frac{1}{1000}$? 3°) $\frac{1}{n^2 - 2n} \leq \frac{1}{10.000}$?

Voici maintenant un <u>sommaire des propriétés élémentaires</u> qui facilitent le calcul des limites.

1°) $\lim u_n = \ell$ si et seulement si $\lim(\ell - u_n) = 0$.

2°) Toute suite convergente est bornée.

3°) Si $\lim u_n = 0$, et si (v_n) est bornée, alors $\lim(u_n v_n) = 0$.

4°) Supposons que $\lim u_n = \ell$, et que $\lim v_n = \ell'$. Soit λ un nombre réel, et soit k un nombre entier ≥ 0. Alors :

a) $\lim(u_n + v_n) = \ell + \ell'$;
b) $\lim(\lambda u_n) = \lambda \ell$;
c) $\lim(u_n v_n) = \ell\ell'$;
d) $\lim(u_n^k) = \ell^k$
e) $\lim(|u_n|) = |\ell|$.

5°) Supposons que $\lim u_n = \ell$, et que $\ell \neq 0$. Alors, à partir d'un certain rang, $u_n \neq 0$; et $\lim \frac{1}{u_n} = \frac{1}{\ell}$. Si, de plus, $\lim v_n = \ell'$, alors $\lim \frac{v_n}{u_n} = \frac{\ell'}{\ell}$.

6°) a) Supposons que, pour tout n, on ait : $0 \leq \alpha_n \leq \beta_n$; et supposons que $\lim \beta_n = 0$. Alors $\lim \alpha_n = 0$

b) Supposons que, pour tout n, on ait : $u_n \leq w_n \leq v_n$. Soit ℓ un nombre réel. Supposons que $\lim u_n = \ell$ et $\lim v_n = \ell$. Alors $\lim w_n = \ell$.

7°) a) Supposons que, pour tout n, on ait $u_n \geq 0$. Supposons que $\lim u_n = l$. Alors $l \geq 0$.

b) [conservation des inégalités par passage à la limite]. Supposons que, pour tout n, on ait $u_n \leq v_n$. Supposons que $\lim u_n = l$ et $\lim v_n = l'$. Alors $l \leq l'$.

Mais attention ! l'hypothèse plus forte d'inégalité stricte : "pour tout n, $u_n < v_n$" n'implique pas que $l < l'$; elle implique seulement que $l \leq l'$.

Exemples types de démonstrations

2°) Dans la définition de $\lim u_n = l$, prenons $\varepsilon = 1$. Il existe N tel que $n \geq N$ implique $|l - u_n| \leq 1$. Donc, pour tout $n \geq N$, on a :

$$|u_n| \leqslant |u_n - l| + |l| \leqslant |l| + 1 .$$

Soit M le plus grand des nombres $|u_0|, |u_1|, \dots, |u_{N-1}|, |l|+1$. Il est clair que, pour tout entier n, on a $|u_n| \leq M$.

3°) Soit M fixé > 0 tel que, pour tout n, on ait $|v_n| \leq M$. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $\lim u_n = 0$, appliquons-lui la définition de la limite en y remplaçant ε par $\frac{\varepsilon}{M}$: il existe N tel que $n \geq N$ implique $|u_n| \leq \frac{\varepsilon}{M}$. Il en résulte que, pour tout $n \geq N$,

$$|u_n v_n| = |u_n|\,|v_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{M} M = \varepsilon .$$

4°) c) Il s'agit de montrer que

$$ll' - u_n v_n = (l - u_n) l' + (l' - v_n) l - (l - u_n)(l' - v_n)$$

a pour limite 0. Ceci résulte de 1°), 4°) b), 2°) et 3°).

Exercice 3. Ecrivez, par des phrases complètes et sans utiliser de flèches ou d'abréviations, la démonstration du 5°).

II. Limites infinies.

On dit que la suite (u_n) tend vers $+\infty$ (et l'on écrit $\lim u_n = +\infty$) si, pour tout nombre A, il existe un nombre entier N tel que :

$$n \geq N \text{ implique } u_n \geqslant A .$$

On dit que la suite (u_n) tend vers $-\infty$ (et l'on écrit $\lim u_n = -\infty$) si, pour tout nombre B, il existe un nombre entier N tel que :

$n \geq N$ implique $u_n \leq B$; autrement dit : si $\lim(-u_n) = +\infty$.

Sommaire de propriétés :

1°) Supposons que, pour tout n, on ait $u_n \geq v_n$. Si $\lim v_n = +\infty$, alors $\lim u_n = +\infty$.

2°) Si $\lim u_n = +\infty$ et $\lim v_n = +\infty$, alors $\lim(u_n + v_n) = +\infty$.

3°) Supposons qu'il existe un nombre $a > 0$ tel que, quel que soit n, on ait $u_n \geq a$. Supposons que $\lim v_n = +\infty$. Alors $\lim(u_n v_n) = +\infty$.

Exercice 4. Donner un exemple simple d'une suite $u_n > 0$ et d'une suite v_n tendant vers $+\infty$, telles que la suite $(u_n v_n)$ ne tende pas vers $+\infty$.

4°) Supposons que $\lim u_n = l > 0$, et $\lim v_n = +\infty$. Alors $\lim(u_n v_n) = +\infty$.

5°) Supposons qu'il existe un nombre $a > 0$ tel que, quel que soit n, on ait $u_n \geq a$. Supposons que, pour tout n, on ait $v_n > 0$, et que $\lim v_n = 0$. Alors $\lim \frac{u_n}{v_n} = +\infty$.

En particulier, en faisant $u_n \equiv 1$, on obtient que, si $v_n > 0$ tend vers 0, alors $\frac{1}{v_n}$ tend vers $+\infty$.

6°) Si $\lim u_n = +\infty$ ou $= -\infty$, alors $\lim \frac{1}{u_n} = 0$.

Démonstration du 5°). Soit A un nombre donné, qu'on peut prendre > 0. Puisque $v_n > 0$ tend vers 0, en posant $\varepsilon = \frac{a}{A}$, il existe un entier N tel que : $n \geq N$ implique $0 < v_n \leq \varepsilon = \frac{a}{A}$. Donc, pour tout $n \geq N$, on a : $\frac{u_n}{v_n} \geq a\frac{A}{a} = A$, cqfd.

Mais attention !

Si	on ne peut rien dire de général sur	on dit qu'on a la forme indéterminée
u_n tend vers $+\infty$, v_n tend vers $+\infty$	$u_n - v_n$	$\infty - \infty$
u_n tend vers 0, v_n tend vers $+\infty$	$u_n v_n$	$0.\infty$
u_n tend vers ∞, v_n tend vers ∞	$\frac{u_n}{v_n}$	$\frac{\infty}{\infty}$
u_n tend vers 0, v_n tend vers 0	$\frac{u_n}{v_n}$	$\frac{0}{0}$

Exercice 5. Rédigez, en phrases complètes et sans abréviations, la démonstration du 3°) ci-dessus.

III. Convergence de suites classiques.

1°) Soit λ un nombre réel donné. Alors :
$$\lim_{n\to\infty}(\lambda n) = \begin{cases} +\infty & \text{si } \lambda > 0 \,; \\ 0 & \text{si } \lambda = 0 \,; \\ -\infty & \text{si } \lambda < 0 . \end{cases}$$

2°) Soit k un entier donné. Alors :
$$\lim_{n\to\infty}(n^k) = \begin{cases} +\infty & \text{si } k > 0 \,; \\ 1 & \text{si } k = 0 \,; \\ 0 & \text{si } k < 0 . \end{cases}$$

3°) Soit $P(X) = a_k X^k + a_{k-1}X^{k-1} + \dots + a_1 X + a_0$, $(a_k \neq 0)$

et $Q(X) = b_h X^h + b_{h-1}X^{h-1} + \dots + b_1 X + b_0$, $(b_h \neq 0)$

deux polynômes $\neq 0$ à coefficients réels de degrés k et h respectivement. La suite $u_n = \dfrac{P(n)}{Q(n)}$ a même limite que la suite $v_n = \dfrac{a_k}{b_h} n^{k-h}$, qui est le rapport des termes de plus haut degré de P et de Q, c'est-à-dire :
$$\lim_{n\to\infty}\frac{P(n)}{Q(n)} = \begin{cases} \dfrac{a_k}{b_h} & \text{si } k = h \,; \\ 0 & \text{si } k < h \,; \\ +\infty & \text{si } k > h, \text{ et si } a_k \text{ et } b_h \text{ sont de même signe}; \\ -\infty & \text{si } k > h, \text{ et si } a_k \text{ et } b_h \text{ sont de signes opposés}. \end{cases}$$

4°) Soit a un nombre réel > 0 donné. Alors :
$$\lim (a^n) = \begin{cases} 1 & \text{si } a = 1 \\ +\infty & \text{si } a > 1 \\ 0 & \text{si } a < 1 \end{cases} .$$

<u>Démonstration du 3°)</u>. On a
$$u_n = \frac{a_k n^k \left(1 + \frac{a_{k-1}}{n} + \dots + \frac{a_1}{n^{k-1}} + \frac{a_0}{n^k}\right)}{b_h n^h \left(1 + \frac{b_{h-1}}{n} + \dots + \frac{b_1}{n^{h-1}} + \frac{b_0}{n^h}\right)} = v_n\, w_n ,$$
où $w_n = \dfrac{1 + \frac{a_{k-1}}{n} + \dots + \frac{a_1}{n^{k-1}} + \frac{a_0}{n^k}}{1 + \frac{b_{h-1}}{n} + \dots + \frac{b_1}{n^{h-1}} + \frac{b_0}{n^h}}$ tend vers 1, d'après le 2°), et les règles 4°) et 5°) du I.

Démonstration du 4°). Si $a>1$, posons $a=1+u$, avec $u>0$.

D'après la formule du binôme de Newton, pour tout entier $n\geq 0$ on a :

$$a^n=(1+u)^n=1+C_n^1u+C_n^2u^2+\dots+C_n^nu^n\geq 1+C_n^1u=1+nu.$$

Or $\lim(1+nu)=+\infty$, donc à fortiori $\lim(a^n)=+\infty$.

Si $a<1$, posons $b=\frac{1}{a}$. Alors $b>1$, donc $\lim(b^n)=+\infty$. Par suite $a^n=\frac{1}{b^n}$ tend vers 0.

Il sera parfois avantageux d'utiliser le

Lemme. Supposons $u_n\neq 0$ pour tout n. Supposons que $\lim\frac{u_{n+1}}{u_n}=l$ existe, et que $-1<l<1$. Alors $\lim u_n=0$.

Démonstration du Lemme. Posons $a=\frac{1+|l|}{2}$. On sait que $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}$ tend vers $|l|$; dans la définition de la limite, prenons $\varepsilon=\frac{1-|l|}{2}$. Il existe un entier N tel que :

$$n\geq N \text{ implique } \left|\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}-|l|\right|\leq\frac{1-|l|}{2}.$$

Par l'inégalité triangulaire, il en résulte que :

pour tout $n\geq N$, on a : $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}\leq|l|+\frac{1-|l|}{2}=a$.

Donc, pour tout $n>N$, on a :

$$|u_n|=\frac{|u_n|}{|u_{n-1}|}\frac{|u_{n-1}|}{|u_{n-2}|}\cdots\frac{|u_{N+1}|}{|u_N|}|u_N|\leq|u_N|a^{n-N}=\lambda a^n,$$

où λ est la constante $\frac{|u_N|}{a^N}$. Puisque $0<a<1$, l'inégalité $|u_n|\leq\lambda a^n$, valable dès que $n\geq N$, prouve que u_n tend vers 0.

Exemples d'application du Lemme

5°) Soit a un nombre réel donné. Alors $\lim\frac{a^n}{n!}=0$.

6°) Soit $0<a<1$, et soit k un entier ≥ 0. Alors $\lim(a^nn^k)=0$.

7°) Soient α et x deux nombres réels. Supposons $-1<x<1$. Alors

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)x^n}{n!}=0.$$

IV. L'axiome de la borne supérieure, et la convergence des suites monotones.

Muni des deux opérations usuelles d'addition et de multiplication, l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels est un <u>corps</u>, qui contient comme sous-corps l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels.
De plus $\mathbb{R}$, ainsi que $\mathbb{Q}$, sont munis d'une <u>relation d'ordre</u> $x \leq y$, totale, et compatible avec les opérations de corps, c'est-à-dire satisfaisant aux trois ~~opérations~~ propriétés fondamentales :

a) si x et y sont donnés, on a $x \leq y$ ou $y \leq x$;

b) $x \leq y$ implique $x + z \leq y + z$;

c) $0 \leq x$ et $0 \leq y$ impliquent $0 \leq xy$.

Dans $\mathbb{R}$ tout comme dans $\mathbb{Q}$ est vérifié <u>l'axiome d'Archimède</u> :
d) quels que soient $y \geq 0$ et $x > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $nx > y$.

Mais les propriétés énumérées jusqu'à présent ne permettent pas de distinguer $\mathbb{R}$ de $\mathbb{Q}$. La particularité de $\mathbb{R}$ est de posséder un axiome d'ordre supplémentaire, non vérifié dans $\mathbb{Q}$, <u>l'axiome de la borne supérieure</u>.

<u>Définitions</u>. Soit E une partie de $\mathbb{R}$. On appelle <u>majorant</u> de E tout nombre réel A tel que, pour tout $x \in E$, on ait $x \leq A$. On appelle <u>minorant</u> de E tout nombre réel B tel que, pour tout $x \in E$, on ait $B \leq x$. On dit que E est <u>majorée</u> (resp. <u>minorée</u>) s'il existe des majorants (resp. minorants) de E.

<u>Axiome de la borne supérieure</u> : Si E est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$, alors, parmi tous les majorants de E il en existe un qui est plus petit que tous les autres majorants de E.

Comme tout axiome, celui-ci doit être admis sans discussion. C'est à prendre ou à laisser. Ceux qui ne sont pas contents n'ont qu'à sortir !

<u>Définitions</u> 1°) On note $\sup E$, et on appelle <u>borne supérieure</u> de E le majorant minimal de E dont l'axiome postule l'existence.

2°) Soit (u_n) une suite majorée de nombres réels. On note $\sup_n u_n$ la borne supérieure de l'ensemble E des valeurs u_n de cette suite.

3°) Si E est une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$, elle admet un minorant plus grand que tous les autres (changer x en $-x$ dans l'axiome) ; on la note $\inf E$ et on l'appelle <u>borne inférieure</u> de E. Si la suite (u_n) est minorée, on note $\inf_n u_n$ la borne inférieure de l'ensemble E des valeurs de cette suite.

La borne inférieure (resp. supérieure), si elle existe, est unique.

<u>Exercice 6</u>. Calculez : $\sup_{n\geq 1} \frac{1}{n}$; $\inf_{n\geq 1} \frac{1}{n}$; $\sup_{n\geq 1}\left(1-\frac{1}{n}\right)$; $\sup_{n\geq 1}\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$.

<u>Exercice 7</u>. Soit E l'ensemble des nombres rationnels x tels que $x^2 \leq 2$. Qu'est-ce que $\sup E$? Montrez, comme savait déjà le faire Pythagore au $V^{\text{ème}}$ siècle avant Jesus-Christ, que ce n'est pas un nombre rationnel.

<u>Définitions</u>. Soit (u_n) une suite de nombres réels. On dit qu'elle est <u>croissante</u> (resp. <u>décroissante</u>) si, pour tout entier $n \geq 0$, on a $u_n \leq u_{n+1}$ (resp. $u_n \geq u_{n+1}$). On dit qu'elle est monotone si elle est croissante ou si elle est décroissante.

<u>Théorème 1</u>. 1°) Soit (u_n) une suite <u>croissante</u> et <u>majorée</u>. Alors (u_n) a une limite (finie), et cette limite n'est autre que $\sup_n u_n$.

2°) Soit (u_n) une suite <u>décroissante</u> et <u>minorée</u>. Alors (u_n) a une limite (finie) et cette limite n'est autre que $\inf_n u_n$.

<u>Démonstration</u> 1°) Posons $l = \sup_n u_n$. Soit $\varepsilon > 0$. Le nombre $l-\varepsilon$ est $< l$, donc ne peut être un majorant de l'ensemble des valeurs u_n. Ainsi il existe au moins un indice N tel que $u_N > l-\varepsilon$. Puisque (u_n) est croissante, on a $u_n \geq u_N > l-\varepsilon$ pour tout $n \geq N$. Ainsi $n \geq N$ implique $l-\varepsilon < u_n \leq l$, cqfd — Pour démontrer le 2°), appliquez le 1°) à la suite $(-u_n)$.

<u>Remarque</u> : Soit (u_n) une suite croissante et non majorée. Pour tout nombre A, il existe N tel que $u_N > A$, donc tel que $n \geq N$ implique $u_n \geq u_N > A$. Par conséquent $\lim u_n = +\infty$. Ainsi, pour une suite <u>croissante</u>, on a l'alternative :

– ou bien elle est majorée, et alors elle a une limite finie ;

– ou bien elle n'est pas majorée, et alors elle tend vers $+\infty$.

<u>Contre-exemple</u>. La suite $u_n = (-1)^n$ n'a de limite ni finie, ni infinie.

Exercice 8. Pour n entier ≥ 1, on pose $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Montrez que cette suite est croissante, et a une limite comprise entre 2 et 3.

Exercice 9. On pose $u_0 = 0$ et, pour $n \geq 1$, on pose $u_n = \sqrt{2 + u_{n-1}}$. Montrez que la suite (u_n) est croissante et majorée, et trouvez sa limite.

Définition. Soit (u_n) une suite convergente, de limite ℓ. Soit r un nombre ≥ 1. On dit que (u_n) tend vers ℓ avec une rapidité d'ordre r si la suite $\dfrac{|u_{n+1} - \ell|}{|u_n - \ell|^r}$ a une limite finie non nulle, quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 10 (trois méthodes pour une valeur approchée de $\sqrt{A}$).
Soit A un nombre réel tel que $0 < A < 1$. On pose :

$u_0 = 0$, et $\quad u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2}(A - u_n^2)$ pour $n \geq 0$;

$v_0 = 1$, et $\quad v_{n+1} = \frac{1}{2}\left(v_n + \frac{A}{v_n}\right)$ pour $n \geq 0$;

$w_0 = 1$, et $\quad w_{n+1} = \dfrac{w_n^3 + 3Aw_n}{3w_n^2 + A}$ pour $n \geq 0$.

1°) Montrez que la suite (u_n) est croissante, et les suites (v_n) et (w_n) décroissantes. Montrez que les trois suites tendent vers $\sqrt{A}$ avec une rapidité d'ordre un pour (u_n), deux pour (v_n), trois pour (w_n).

2°) (à l'aide d'une calculatrice programmable). Soit $A = \frac{1}{3}$. Quel est le plus petit entier n pour lequel 9 décimales exactes de $\frac{1}{\sqrt{3}} = 0{,}577350269$ sont obtenues par u_n ? par v_n ? par w_n ?

Définition. On dit que deux suites (u_n) et (v_n) de nombres réels sont adjacentes si : 1°) (u_n) est croissante ; 2°) (v_n) est décroissante ; 3°) pour tout n on a : $u_n \leq v_n$; 4°) $\lim (v_n - u_n) = 0$.

Proposition. Si deux suites sont adjacentes, elles ont une limite, la même pour les deux suites.

En effet (u_n) est croissante, et majorée par v_0, donc a une limite ℓ. De même (v_n) est décroissante, et minorée par u_0, donc a une limite ℓ'. Mais $\ell - \ell' = \lim u_n - \lim v_n = \lim (u_n - v_n) = 0$. Donc $\ell = \ell'$.

Exercice 11. Soient a et b des nombres réels tels que $0 < a < b$. On pose : $u_0 = a$, $v_0 = b$, et, pour $n \geq 0$, $\quad u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$ et $v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$.

Montrez que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. Leur limite commune $M(a,b)$ s'appelle la "moyenne arithmético-géométrique" de Gauss. A la calculatrice, trouvez 8 décimales exactes de $M(1,\sqrt{2})$.

V. Conséquences théoriques de l'axiome de la borne supérieure : critère de Cauchy ; théorème de Bolzano-Weierstrass.

Les démonstrations (un peu abstraites) de ce paragraphe pourront être omises en première lecture.

Soit $n \mapsto u_n$ une suite de nombres réels. Soit $k \mapsto n_k$ une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, c'est-à-dire telle que $k<k'$ implique $n_k < n_{k'}$. Alors $k \mapsto u_{n_k}$ est une suite de nombres, qu'on qualifie de suite extraite de la suite (u_n).

Exemple : La suite $(\frac{1}{p})$ des inverses des nombres premiers est extraite de la suite $(\frac{1}{n})$ des inverses des nombres entiers ≥ 1, grâce au fait qu'il y a une infinité de nombres premiers.

Si $\lim u_n = l$, alors toute suite extraite de (u_n) tend vers l.

Définition. On dit que (u_n) est une suite de Cauchy si, pour tout $\varepsilon>0$, il existe un entier N tel que :

quels que soient $m \geq N$ et $n \geq N$, on a $|u_n - u_m| \leq \varepsilon$.

Toute suite de Cauchy est bornée ; en effet, si dans la définition, on prend le N qui correspond à $\varepsilon = 1$, alors $|u_n| \leq M$ pour tout n, où M est le plus grand des nombres $|u_0|, |u_1|, \dots, |u_{N-1}|$, et $|u_N|+1$.

Toute suite convergente est de Cauchy. En effet, supposons $\lim u_n = l$. Soit $\varepsilon>0$. Il existe N tel que $n\geq N$ implique $|l-u_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Donc $m\geq N$ et $n \geq N$ impliquent : $|u_n - u_m| \leq |u_n - l| + |l-u_m| \leq \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Lemme. Soit (u_n) une suite de Cauchy. Supposons que (u_n) admette une suite extraite convergente, de limite l. Alors la suite (u_n) elle-même converge, et tend vers l.

Démonstration. Soit $k \mapsto n_k$ une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que $\lim_{k\to\infty} u_{n_k} = l$. Soit $\varepsilon>0$. Par hypothèse : il existe un entier K tel que $k \geq K$ implique $|l - u_{n_k}| \leq \varepsilon/2$; et il existe un entier N tel que $n \geq N$ et $m \geq N$ impliquent $|u_n - u_m| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Choisissons un k qui soit : 1°) $\geq K$; 2°) tel que $n_k \geq N$. Alors, pour tout $n \geq N$, on a :

$$|l - u_n| \leq |l - u_{n_k}| + |u_{n_k} - u_n| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

Théorème 2 (critère de Cauchy) Si une suite (u_n) de nombres réels est une suite de Cauchy, alors cette suite a une limite (finie).

Démonstration. Posons $n_0 = 0$ et pour tout entier $k \geq 0$, soit n_{k+1} le plus petit entier $> n_k$ tel que :

$$p \geq n_{k+1} \text{ et } q \geq n_{k+1} \text{ impliquent } |u_p - u_q| \leq \frac{1}{2^{k+2}} .$$

Posons $v_k = u_{n_k} - \frac{1}{2^k}$. La suite (v_k) est croissante, car

$$v_k - v_{k+1} = u_{n_k} - u_{n_{k+1}} - \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} \leq \frac{1}{2^{k+1}} - \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} = 0 .$$

De plus (v_k) est majorée, car (u_n) est bornée, étant de Cauchy. Donc, d'après le théorème 1, la suite $k \mapsto v_k$ a une limite finie l. La suite $k \mapsto u_{n_k} = v_k + \frac{1}{2^k}$ tend aussi vers l. Donc (u_n) tend vers l, d'après le Lemme.

Le critère de Cauchy est un moyen puissant de prouver l'existence d'une limite sans connaître d'avance la valeur de cette limite.

Théorème 3 (de Bolzano-Weierstrass) Toute suite bornée possède au moins une suite extraite convergente.

Démonstration. Soit I l'ensemble des entiers n tels que u_n majore $u_{n+1}, u_{n+2}, u_{n+3}$, etc....

Supposons d'abord I infini. Alors rangeons les entiers $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$ de I dans l'ordre croissant. La suite $k \mapsto u_{n_k}$ est décroissante, et minorée (car (u_n) est bornée), donc elle fait l'affaire, d'après le Théorème 1.

Supposons maintenant I fini. Il existe un entier m_1 strictement plus grand que tous ceux de I. Puisque m_1 n'est pas dans I, il existe un entier $m_2 > m_1$ tel que $u_{m_2} > u_{m_1}$. Puisque m_2 n'est pas dans I, il existe un entier $m_3 > m_2$ tel que $u_{m_3} > u_{m_2}$. Et ainsi de suite. La suite extraite $u_{m_1}, u_{m_2}, u_{m_3}, \dots\dots$ est croissante et majorée, donc elle fait l'affaire.

VI. Limites de suites de nombres complexes

Si $z = x + iy$ est un nombre complexe, avec $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ et $i = \sqrt{-1}$, on note $x = \mathrm{Re}\, z$, $y = \mathrm{Im}\, z$, $\bar{z} = x - iy$, et $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2+y^2}$.

Soit $z_n = x_n + iy_n$ une suite de nombres complexes, et $z = x+iy$ un nombre complexe. Il est équivalent de dire :

i) pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N tel que $n \geq N$ implique $|z - z_n| \leq \varepsilon$

ou de dire

ii) $\lim x_n = x$ et $\lim y_n = y$.

On dit alors que (z_n) est convergente, tend vers z, et l'on écrit $\lim z_n = z$.

Restent valables pour les suites de nombres complexes : les propriétés 1°), 2°), 3°), 4°), 5°) de I, ainsi que les Théorèmes 2 et 3

Exercice 12 Soit a un nombre complexe tel que $|a| < 1$. Trouver les limites des suites a^n et $1 + a + a^2 + \cdots + a^n$.

VII. Indications pour les Exercices proposés dans cette Leçon

Exercice 1 1°) Soit $\varepsilon > 0$. Prenons $N =$ le plus petit entier $\geq \frac{1}{\varepsilon}$. Alors $n \geq N$ implique : $|1 - u_n| = \left|\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} = \varepsilon$.

2°) On a $v_n \geq 1$ si n est pair et $v_n \leq -1$ si n est impair. Il est donc impossible que tous les v_n, sauf pour un nombre fini d'indices, se trouvent dans un même intervalle de longueur $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

Exercice 2. 1°) $N = 12$; 2°) $N = 33$; 3°) $N = 102$.

Exercice 3 A partir d'un certain rang, u_n est proche de l de moins de $\frac{|l|}{2}$, donc est $\neq 0$. Quitte à enlever un nombre fini de termes, on peut supposer $u_n \neq 0$ pour tout n. Puisque $|u_n|$ tend vers $|l|$, il existe N_1 tel que $n \geq N_1$ implique $|u_n| \geq \frac{|l|}{2}$. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque (u_n) tend vers l, il existe N_2 tel que $n \geq N_2$ implique $|l - u_n| \leq \varepsilon \frac{|l|^2}{2}$. Soit N le plus grand des deux nombres N_1 et N_2. Si $n \geq N$, on a :

$$\left|\frac{1}{l} - \frac{1}{u_n}\right| = \frac{|l - u_n|}{|l|\,|u_n|} \leq \varepsilon \frac{|l|^2}{2} \frac{1}{|l| \frac{|l|}{2}} = \varepsilon .$$

22/ Exercice 4. $u_n = \frac{1}{n^2}$ et $v_n = n$.

Exercice 5 Soit A un nombre réel, qu'on peut supposer > 0. Puisque v_n tend vers $+\infty$, il existe N tel que $n \geq N$ implique $v_n \geq \frac{A}{\alpha}$, donc implique $u_n v_n \geq a \frac{A}{\alpha} = A$.

Exercice 6. 1 ; 0 ; 1 ; $\frac{3}{2}$.

Exercice 7. $\sup E = \sqrt{2}$. Démontrons, comme Pythagore, que $\sqrt{2}$ n'est pas une fraction irréductible $\frac{p}{q}$. On aurait $p^2 = 2q^2$. Donc p^2 serait pair, donc p serait pair. On aurait $p = 2k$, d'où $4k^2 = 2q^2$, donc $2k^2 = q^2$. Ainsi q^2 serait pair, donc q aussi serait pair. La fraction $\frac{p}{q}$ ne serait pas irréductible, contrairement à l'hypothèse.

Exercice 8 D'après la formule du binôme de Newton

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + n\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2}\frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\frac{1}{n^k} + \cdots + \frac{1}{n^n}$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k}{n}\right) + \cdots$$

A k fixé, le k-ième terme croît avec n ; de plus, quand n augmente, s'ajoutent de nouveaux termes. Donc (u_n) est croissante.

De plus $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1 + 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \cdots + \frac{1}{1\cdot 2\cdots n} <$

$$< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} < 3.$$

Exercice 9 Par récurrence, on voit que, pour tout n, on a $u_n \leq 2$.

puis $u_{n+1} - u_n = \sqrt{2+u_n} - u_n = \frac{2}{\sqrt{2+u_n} + u_n} \geq 0$. La suite est croissante et majorée ; elle a une limite $l \geq 0$. Quand n tend vers $+\infty$, la relation $u_n^2 = 2 + u_{n-1}$ donne $l^2 = 2 + l$, donc $l = 2$ car $l \geq 0$.

Exercice 10 1) La première relation s'écrit

(1) $\quad \sqrt{A} - u_{n+1} = (\sqrt{A} - u_n)\left[1 - \frac{1}{2}(\sqrt{A} + u_n)\right]$.

Par récurrence on en déduit que, pour tout n, on a $0 \leq u_n \leq \sqrt{A}$, puis que $\sqrt{A} - u_{n+1} \leq \sqrt{A} - u_n$, donc que (u_n) est croissante. Si l est sa limite, faisant tendre n vers $+\infty$ dans la relation de récurrence, il vient $\quad l = l + \frac{1}{2}(A - l^2)$, donc $l^2 = A$ et $l = \sqrt{A}$ vu que $l \geq 0$. Enfin, d'après la relation (1),

$$\frac{\sqrt{A} - u_{n+1}}{\sqrt{A} - u_n} = 1 - \frac{1}{2}(\sqrt{A} + u_n) \text{ tend vers } 1 - \sqrt{A} \neq 0$$

donc la rapidité est d'ordre un.

Par récurrence v_n est ≥ 0 pour tout n. La relation de récurrence s'écrit

$$(2) \quad v_{n+1} - \sqrt{A} = \frac{(v_n - \sqrt{A})^2}{2v_n}$$

Ceci prouve que $v_n \geq \sqrt{A}$ pour tout n. De plus :

$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2}\left(\frac{A}{v_n} - v_n\right) = \frac{A - v_n^2}{2v_n} \leq 0$, donc (v_n) est décroissante.

Sa limite l vérifie l'équation $\quad l = \frac{1}{2}\left(l + \frac{A}{l}\right)$, donc $l = \sqrt{A}$ car $l \geq 0$

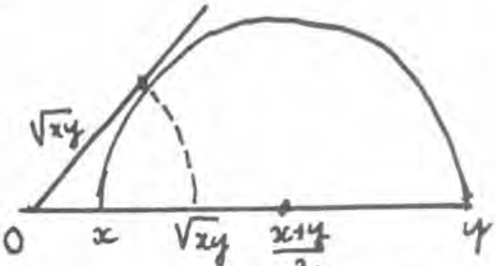
Enfin (2) prouve que $\frac{|\sqrt{A} - v_{n+1}|}{|\sqrt{A} - v_n|^2}$ tend vers $\frac{1}{2\sqrt{A}} \neq 0$, donc la rapidité est d'ordre deux.

On traite (w_n) de la même façon, après avoir remarqué que la relation de récurrence s'écrit :

$$(3) \quad w_{n+1} - \sqrt{A} = \frac{(w_n - \sqrt{A})^3}{3w_n^2 + A} \quad .$$

2°) u_{25} ; v_5 ; w_3.

<u>Exercice 11</u> Si $0 < x < y$, le point $\frac{x+y}{2}$ est le centre du cercle de diamètre $[x, y]$, et $\sqrt{xy}$ est la longueur de la tangente menée de 0 à ce cercle. On en déduit immédiatement que (u_n) est croissante, (v_n) décroissante, $u_n \leq v_n$.



De plus, il est clair sur la figure que

$$\frac{x+y}{2} - \sqrt{xy} \leq \frac{y-x}{2} \;,$$

donc $\quad v_n - u_n \leq \frac{v_{n-1} - u_{n-1}}{2} \leq \frac{v_{n-2} - u_{n-2}}{2^2} \leq \dots \leq \frac{v_0 - u_0}{2^n} = \frac{b-a}{2^n}$,

d'où résulte que $\lim(v_n - u_n) = 0$.

$M(1, \sqrt{2}) = 1,198140235$.

<u>Exercice 12</u>. a^n tend vers 0 ;

$$1 + a + a^2 + \dots + a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1-a} \text{ tend vers } \frac{1}{1-a} \;.$$

Développement décimal d'un nombre réel

L'écriture décimale d'un nombre entier ne présentant guère de difficultés, nous étudierons seulement le développement décimal des nombres réels compris entre 0 et 1. A ce propos nous verrons ce qui distingue les nombres rationnels des irrationnels, et nous rechercherons — d'abord expérimentalement — la structure arithmétique du développement décimal des nombres rationnels.

I. Comment préciser la position d'un nombre réel dans un intervalle ?

Soit r un nombre réel fixé >0. Soit à étudier un nombre réel $\xi \geq 0$. Supposons que nous sachions déjà que $0 \leq \xi < r$. C'est mieux que rien, mais ce n'est pas très précis. Pour en savoir plus, divisons l'intervalle $[0, r[$ en les dix intervalles égaux :

$[0, \frac{1}{10}r[$, $[\frac{1}{10}r, \frac{2}{10}r[$, ..., $[\frac{a}{10}r, \frac{a+1}{10}r[$, ..., $[\frac{8}{10}r, \frac{9}{10}r[$, $[\frac{9}{10}r, r[$.

Le nombre ξ est situé dans un et un seul de ces intervalles. Autrement dit, nous avons dégagé le

<u>Lemme</u>. Soit r un nombre réel >0. Soit ξ un nombre réel tel que $0 \leq \xi < r$. Alors il existe un nombre entier a et un seul parmi les dix nombres entiers $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ qui soit tel que

$$0 \leq \xi - \frac{a}{10}r < \frac{r}{10} ;$$

et ce nombre a est la partie entière(*) du nombre $\frac{10\xi}{r}$.

<u>Exercice 1</u>. Trouvez a quand $\xi = \sqrt{2}$ et $r = 2$.

(*) Si x est un nombre réel, la partie entière de x, notée $\mathrm{Ent}(x)$, est le plus grand entier $\leq x$. C'est donc l'entier a tel que $a \leq x < a+1$.

II Le développement décimal d'un nombre réel x tel que $0 \leq x < 1$.

Soit $0 \leq x < 1$. Appliquons le lemme avec $\xi = x$, et $r = 1$. En posant $a_1 = \mathrm{Ent}(10x)$, nous obtenons un entier a_1 tel que $0 \leq a_1 \leq 9$ et tel que :

$$0 \leq x - \frac{a_1}{10} < \frac{1}{10}.$$

La connaissance de a_1 précise la position de x à $\frac{1}{10}$ près. Pour faire mieux, appliquons à nouveau le lemme avec $\xi = x - \frac{a_1}{10}$, et $r = \frac{1}{10}$, donc posons $a_2 = \mathrm{Ent}\left(\frac{10\,\xi}{r}\right) = \mathrm{Ent}\left(10^2\xi - 10a_1\right)$. L'entier a_2 est tel que $0 \leq a_2 \leq 9$, et tel que :

$$0 \leq x - \frac{a_1}{10} - \frac{a_2}{10^2} < \frac{1}{10^2}.$$

La connaissance de a_1 et a_2 précise la position de x à $\frac{1}{100}$ près.

Par hypothèse de récurrence supposons définis, pour un entier $n \geq 2$, des entiers $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ choisis parmi $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, et vérifiant pour tout $k = 2, 3, \dots, n-1$ les formules :

$a_1 = \mathrm{Ent}(10x)$; $\quad a_k = \mathrm{Ent}\left(10^k x - 10^{k-1}a_1 - \dots\dots - 10\,a_{k-1}\right)$;

et
$$0 \leq x - \frac{a_1}{10} - \frac{a_2}{10^2} - \dots\dots - \frac{a_k}{10^k} - \dots\dots - \frac{a_{n-1}}{10^{n-1}} < \frac{1}{10^{n-1}}.$$

Alors appliquons le Lemme avec

$$\xi = x - \frac{a_1}{10} - \frac{a_2}{10^2} - \dots\dots - \frac{a_{n-1}}{10^{n-1}} \quad \text{et} \quad r = \frac{1}{10^{n-1}},$$

c'est-à-dire posons : $a_n = \mathrm{Ent}\left(10^n x - 10^{n-1}a_1 - \dots\dots - 10\,a_{n-1}\right)$.
L'entier a_n est tel que $0 \leq a_n \leq 9$, et tel que :

$$0 \leq x - \frac{a_1}{10} - \frac{a_2}{10^2} - \dots\dots\dots - \frac{a_{n-1}}{10^{n-1}} - \frac{a_n}{10^n} < \frac{1}{10^n}.$$

Nous pouvons poursuivre indéfiniment l'algorithme de fabrication des a_n, et énoncer le

<u>Théorème 1</u>. Soit x un nombre réel tel que $0 \leq x < 1$. Définissons par récurrence la suite d'entiers $(a_n)_{n \geq 1}$ comme suit :

$a_1 = \mathrm{Ent}(10x)$; et, pour $n \geq 2$:

$$a_n = \mathrm{Ent}\left(10^n x - 10^{n-1}a_1 - \dots\dots - 10^{n-k}a_k - \dots\dots - 10\,a_{n-1}\right).$$

Alors :

1°) Chaque entier a_n est tel que $0 \leq a_n \leq 9$.

2°) Les a_n ne sont pas tous égaux à 9 à partir d'un certain rang.

3°) Pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$0 \leqslant x - \left(\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots\cdots + \frac{a_n}{10^n}\right) < \frac{1}{10^n}.$$

Démonstration du 2°). Par l'absurde, supposons que, pour tout $n \geq N$, on ait $a_n = 9$. Posons $y = x - \sum_{k=1}^{N-1} \frac{a_k}{10^k}$, et appliquons le 3°) du Théorème. .. Pour tout entier $p \geq 0$, on aurait

$$0 \leqslant y - \frac{9}{10^N} - \frac{9}{10^{N+1}} - \cdots\cdots - \frac{9}{10^{N+p}} < \frac{1}{10^{N+p}},$$

c'est-à-dire, d'après la formule de la progression géométrique :

$$0 \leq y - \frac{1}{10^{N-1}}\left(1 - \frac{1}{10^{p+1}}\right) < \frac{1}{10^{N+p}}$$

ou encore :

$$1 - \frac{1}{10^{p+1}} \leqslant 10^{N-1} y < 1 \quad . .$$

Ainsi le nombre $10^{N-1}y$ appartiendrait à tous les intervalles $\left[1 - \frac{1}{10^{p+1}}, 1\right[$ pour tout $p \geq 0$, ce qui est absurde, car l'intersection de cette infinité d'intervalles est vide.

Définitions 1°) a_n est appelée la n-ième décimale de x. La suite des a_n est notée $0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots\ldots$, et s'appelle le développement décimal de x. On écrit $x = 0, a_1 a_2 \cdots a_n \cdots\cdots$.

2°) On appelle nombre décimal tout nombre rationnel qui peut s'écrire $\frac{m}{10^n}$, où m et n sont deux entiers ; ce sont donc les fractions irréductibles de la forme $\frac{p}{2^\alpha 5^\beta}$, où α et β sont entiers, et où p est premier avec 10.

Le 3°) du théorème 1 peut encore s'exprimer comme suit :

Proposition 1 Soit $x = 0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots\ldots$ le développement décimal d'un nombre réel x tel que $0 \leq x < 1$. Alors, pour tout entier $n \geq 1$, le nombre décimal $\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\cdots\cdots+\frac{a_n}{10^n}$ est une approximation de x à $\frac{1}{10^n}$ près par défaut.

En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient :

<u>Corollaire</u> 1. $\quad x=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\cdots\cdots+\frac{a_n}{10^n}\right).$

<u>Corollaire</u> 2. Tout nombre réel est limite d'une suite de nombres rationnels.

<u>Exercice</u> 2. Soit $0\leq x<1$. Montrez que x est un nombre décimal si et seulement si tous les a_n sont nuls à partir d'un certain rang.

Le théorème 1 admet une réciproque :

<u>Théorème</u> 2 Soit $a_1,a_2,\ldots,a_n,\ldots\ldots$ une suite quelconque d'entiers tels que, pour tout n, on ait $0\leq a_n\leq 9$, et non tous égaux à 9 à partir d'un certain rang. Alors il existe un nombre réel x et un seul, tel que $0\leq x<1$, et ayant $0,a_1a_2\ldots a_n\ldots\ldots$ comme développement décimal.

<u>Démonstration</u> Pour tout entier $n\geq 1$, posons $x_n=\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\cdots+\frac{a_n}{10^n}$.

La suite (x_n) est croissante, et majorée par

$$\sup_n\left(\frac{9}{10}+\frac{9}{10^2}+\cdots\cdots+\frac{9}{10^n}\right)=\sup_n\left(1-\frac{1}{10^n}\right)=1.$$

Donc elle converge vers un nombre x tel que $0\leq x\leq 1$.

Montrons que $x\neq 1$. En effet il y a au moins un N tel que $a_N<9$. Dès que $n\geq N$, on a :

$$x_n\leq\frac{9}{10}+\cdots+\frac{9}{10^{N-1}}+\frac{8}{10^N}+\frac{9}{10^{N+1}}+\cdots+\frac{9}{10^n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{9}{10^k}-\frac{1}{10^N}\leq 1-\frac{1}{10^N},$$

donc

$$x=\sup_n x_n\leq 1-\frac{1}{10^N}<1.$$

Enfin, montrons que, pour tout entier $p\geq 1$ fixé, a_p est bien la p-ième décimale de x. Fixons un $N>p$ tel que $a_N<9$. Dès que $n\geq N$ on a :

$$x_n-x_p\leq\frac{9}{10^{p+1}}+\cdots+\frac{9}{10^{N-1}}+\frac{8}{10^N}+\frac{9}{10^{N+1}}+\cdots+\frac{9}{10^n}=$$

$$=\frac{1}{10^p}\sum_{k=1}^{n-p}\frac{9}{10^k}-\frac{1}{10^N}\leq\frac{1}{10^p}-\frac{1}{10^N},$$

donc $x-x_p=\left(\sup\limits_n x_n\right)-x_p=\sup\limits_n\,(x_n-x_p)\leq\frac{1}{10^p}-\frac{1}{10^N}<\frac{1}{10^p}$.

Ainsi $$0 \leq x - \left(\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_p}{10^p}\right) < \frac{1}{10^p} \,,$$

c'est-à-dire $$0 \leq [10^p x - (10^{p-1} a_1 + \cdots + 10\, a_{p-1})] - a_p < 1\,,$$

ce qui exprime que
$$a_p = \mathrm{Ent}\,(10^p x - 10^{p-1} a_1 - \cdots\cdots - 10\, a_{p-1}),$$
donc a_p est bien le p-ième décimale de x. L'unicité de x résulte du Corollaire 1.

<u>Exercice</u> 3. Soit $x_n = \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \cdots + \frac{9}{10^n}$. Trouvez $\lim x_n$.

<u>Exercice</u> 4. Soient $a_1, a_2, \ldots, a_k$ k nombres entiers compris entre 0 et 9, avec $a_k \neq 9$. Pour $n > k$, on pose :
$$x_n = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_k}{10^k} + \frac{9}{10^{k+1}} + \frac{9}{10^{k+2}} + \cdots + \frac{9}{10^n}\,.$$
Montrez que (x_n) a une limite x. Quel est le développement décimal de x ?

III. <u>Développement décimal d'un nombre rationnel</u>.

Pour trouver le développement décimal d'une fraction $\frac{m}{q}$, un réflexe de nos années d'écolier nous incite à effectuer la division de m par q. Prenons par exemple la fraction $\frac{9}{28}$:

$$\begin{array}{l|l}
9 & 28 \\ \hline
0\,6 & 0{,}32\,\underbrace{142857}\ldots \\
\quad 0\,\boxed{4} & \\
\quad\quad 1\,2 & \\
\quad\quad\quad 0\,8 & \\
\quad\quad\quad\quad 2\,4 & \\
\quad\quad\quad\quad\quad 1\,6 & \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad 2\,0 & \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad 0\,\boxed{4} & \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \ddots &
\end{array}$$

Les restes successifs $9, 6, \boxed{4}, 12, 8, 24, 16, 20, \boxed{4}, \ldots\ldots$ sont tous inférieurs au diviseur 28. Il arrivera fatalement qu'un de ces restes se trouvera égal à l'un des restes déjà obtenus antérieurement : c'est ici le cas du reste 4, obtenu d'abord à la troisième division partielle, puis à la neuvième. Dès lors le processus ne peut que se répéter, et l'on obtiendra

$$\frac{9}{28} = 0,32\,\underbrace{142857}\,\underbrace{142857}\,\underbrace{142857}\,\underbrace{\ldots\ldots\ldots}\ldots$$

Après une partie "singulière", limitée ici aux deux premières décimales, va se répéter indéfiniment une "période", ici 142857.

Nous allons voir que ce phénomène est général, et caractérise les développements décimaux des nombres rationnels.

Proposition 2. Les décimales $0,a_1a_2a_3\ldots a_n\ldots$ d'un nombre rationnel $x = \frac{m}{q}$ tel que $0 \leq x < 1$ s'obtiennent par l'algorithme de la division euclidienne :

$$\begin{cases} m = r_1 \quad , \text{ donc } r_1 < q \\ 10 r_1 = q a_1 + r_2 \quad , \text{ où } 0 \leq r_2 < q \\ 10 r_2 = q a_2 + r_3 \quad , \text{ où } 0 \leq r_3 < q \\ - - - - - - - - - - - - - \\ 10 r_{n-1} = q a_{n-1} + r_n \quad , \text{ où } 0 \leq r_n < q \\ 10 r_n = q a_n + r_{n+1} \quad , \text{ où } 0 \leq r_{n+1} < q \\ - - - - - - - - - - - - - \end{cases}$$

Démonstration. En effet il résulte des deux premières relations que

$$10x = 10\frac{m}{q} = 10\frac{r_1}{q} = a_1 + \frac{r_2}{q} \quad , \text{ où } 0 \leq \frac{r_2}{q} < 1 ,$$

donc $a_1 = \text{Ent}(10x)$. Plus généralement, multiplions la première relation par $\frac{10^n}{q}$, la deuxième par $\frac{10^{n-1}}{q}, \ldots$, l'avant-dernière par $\frac{10}{q}$, et la dernière par $\frac{1}{q}$, et additionnons membre à membre. On obtient :

$$10^n \frac{m}{q} = 10^{n-1} a_1 + 10^{n-2} a_2 + \cdots + 10 a_{n-1} + a_n + \frac{r_{n+1}}{q} ,$$

ce qui, vu que $0 \leq \frac{r_{n+1}}{q} < 1$, implique que :

$$a_n = \text{Ent}(10^n x - 10^{n-1} a_1 - 10^{n-2} a_2 - \cdots - 10 a_{n-1}).$$

Donc a_n est bien la n-ième décimale de x, cqfd.

Dans cet algorithme, les restes successifs r_n sont tous des entiers compris entre 0 et q, donc ne prennent qu'un nombre fini de valeurs possibles. Par suite il existe deux entiers $s \geq 0$ et $p \geq 1$ uniques, tels que : 1°) $r_{s+1} = r_{s+p+1}$; 2°) mais $r_n \neq r_m$ quels que soient $1 \leq n < m \leq s+p$. Nous appellerons les entiers s et p respectivement <u>longueur de la partie singulière</u> et <u>longueur de la période</u> du développement décimal de $x = \frac{m}{q}$.

Si s et p sont connus, nous savons que $x = \frac{m}{q}$ a un développement de la forme :

$$x = \frac{m}{q} = 0, a_1 a_2 \ldots a_s \underbrace{a_{s+1} a_{s+2} \ldots a_{s+p}} \underbrace{a_{s+1} a_{s+2} \ldots a_{s+p}} \underbrace{\ldots\ldots}$$

avec une <u>partie singulière</u> $a_1 a_2 \ldots a_s$, et une <u>période</u> $a_{s+1} a_{s+2} \ldots a_{s+p}$ qui se répète indéfiniment.

Un tel développement est dit <u>périodique</u>. Il est dit <u>purement périodique</u> si $s = 0$.

<u>Exercice 5</u>. Quelle est la millième décimale de $\frac{9}{28}$?

<u>Proposition 3</u>. Un nombre réel est rationnel si et seulement si son développement décimal est périodique.

<u>Démonstration</u>. Il reste seulement à voir que si

$$x = a_1 a_2 \ldots a_s \underbrace{a_{s+1} \ldots a_{s+p}} \underbrace{a_{s+1} \ldots a_{s+p}} \underbrace{\ldots\ldots} \ldots$$

a un développement périodique, alors x est rationnel. En posant $y = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_s}{10^s}$, on est ramené à prouver que

$$10^s (x - y) = 0, \underbrace{a_{s+1} \ldots a_{s+p}} \underbrace{a_{s+1} \ldots a_{s+p}} \underbrace{\ldots\ldots} \ldots$$

est rationnel. Or

$$10^s (x-y) = \lim_{k \to +\infty} \left(\frac{a_{s+1}}{10} + \cdots + \frac{a_{s+p}}{10^p} \right) \left(1 + \frac{1}{10^p} + \frac{1}{10^{2p}} + \cdots + \frac{1}{10^{kp}} \right) =$$

$$= \lim_{k \to +\infty} \left(\frac{a_{s+1}}{10} + \cdots + \frac{a_{s+p}}{10^p} \right) \frac{1 - \frac{1}{10^{(k+1)p}}}{1 - \frac{1}{10^p}} = \frac{10^{p-1} a_{s+1} + \cdots + 10 a_{s+p-1} + a_{s+p}}{10^p - 1}$$

est évidemment rationnel.

Exercice 6. 1) Grâce à l'algorithme de la Proposition 2, programmez sur votre calculatrice le calcul des nombres s et p pour toute fraction irréductible $x = \frac{m}{q}$, où $0 \leq x < 1$, et $2 \leqq q < 100$.

2) Utilisez ce programme pour calculer s et p quand on fait $q = 28$, et successivement $m = 1, 3, 5, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 23, 25$. Que découvrez-vous ainsi expérimentalement ?

3) Dressez le tableau des valeurs de s et p pour $x = \frac{1}{q}$, l'entier q prenant toutes les valeurs entre 2 et 99. Ce tableau est reproduit à la page suivante.

4) Etudiez expérimentalement ce tableau pour essayer de découvrir les lois qui permettent d'annoncer les valeurs de s et p quand on connaît le dénominateur q de la fraction irréductible $x = \frac{m}{q}$. On pourra notamment réfléchir aux points suivants :

a) Que constate-t-on pour les nombres q tels que $s \neq 0$?

b) Que vaut s pour les nombres q de la forme 2^α ? pour les nombres q de la forme 5^β ?

c) Que vaut s pour les nombres q de la forme $2^\alpha 5^\beta$?

d) Que vaut s pour les nombres q de la forme $2^\alpha 5^\beta q'$, où q' est premier avec 2 et avec 5 ?

Désormais attachez-vous aux q qui ne sont ni pairs ni multiples de 5 :

a)' Pour un tel q trouvez une relation arithmétique entre q et $10^p - 1$.

b)' Constatez que p est le plus petit entier satisfaisant à cette relation.

c)' Que vaut p quand q n'est ni pair ni multiple de 5 ?

Enfin énoncez les formules donnant s et p quand q a la forme générale $q = 2^\alpha 5^\beta q'$. Vérifiez sur le Théorème 3 ci-après.

Longueurs p de la période et s de la partie singulière pour $x = \frac{1}{q}$.

q	p	s	q	p	s	q	p	s	q	p	s
2	1	1	27	3	0	52	6	2	77	6	0
3	1	0	28	6	2	53	13	0	78	6	1
4	1	2	29	28	0	54	3	1	79	13	0
5	1	1	30	1	1	55	2	1	80	1	4
6	1	1	31	15	0	56	6	3	81	9	0
7	6	0	32	1	5	57	18	0	82	5	1
8	1	3	33	2	0	58	28	1	83	41	0
9	1	0	34	16	1	59	58	0	84	6	2
10	1	1	35	6	1	60	1	2	85	16	1
11	2	0	36	1	2	61	60	0	86	21	1
12	1	2	37	3	0	62	15	1	87	28	0
13	6	0	38	18	1	63	6	0	88	2	3
14	6	1	39	6	0	64	1	6	89	44	0
15	1	1	40	1	3	65	6	1	90	1	1
16	1	4	41	5	0	66	2	1	91	6	0
17	16	0	42	6	1	67	33	0	92	22	2
18	1	1	43	21	0	68	16	2	93	15	0
19	18	0	44	2	2	69	22	0	94	46	1
20	1	2	45	1	1	70	6	1	95	18	1
21	6	0	46	22	1	71	35	0	96	1	5
22	2	1	47	46	0	72	1	3	97	96	0
23	22	0	48	1	4	73	8	0	98	42	1
24	1	3	49	42	0	74	3	1	99	2	0
25	1	2	50	1	2	75	1	2			
26	6	1	51	16	0	76	18	2			

Théorème 3. Les longueurs s de la partie singulière et p de la période du développement décimal d'une fraction irréductible $\frac{m}{q} < 1$ ne dépendent que de q et non de m. Si l'on écrit $q = 2^{\alpha} 5^{\beta} q'$, où α et β sont les entiers ≥ 0 tels que l'entier q' ne soit divisible ni par 2, ni par 5, alors :

1°) s est le plus grand des deux nombres α et β ;

2°) p est le plus petit entier ≥ 1 tel que $10^p - 1$ soit divisible par q'.

Démonstration (pour lecteur motivé seulement).

Si $x = 0, a_1 a_2 \ldots a_s \underbrace{a_{s+1} \ldots a_{s+p}} \underbrace{a_{s+1} \ldots a_{s+p}} \underbrace{\ldots\ldots} \ldots$,
la démonstration de la Proposition 3 a fait apparaître que

$$x = \frac{10^{s} a_1 + 10^{s-1} a_2 + \cdots + 10 a_{s-1} + a_s}{10^s} + \frac{10^{p-1} a_{s+1} + \cdots + 10 a_{s+p-1} + a_{s+p}}{10^s (10^p - 1)} =$$

$$= \frac{M}{10^s (10^p - 1)} = \frac{m}{2^{\alpha} 5^{\beta} q'} .$$

Cette dernière forme étant irréductible, ceci exige que $s \geq \mathrm{Max}(\alpha, \beta)$ et que q' divise $10^p - 1$. Posons $s_0 = \mathrm{Max}(\alpha, \beta)$, et soit p_0 le plus petit entier ≥ 1 tel que $10^{p_0} - 1$ soit divisible par q'. Nous savons déjà que $s \geq s_0$ et $p \geq p_0$. Montrons les inégalités en sens inverse.

Des $s_0 + 1$ premières équations de l'algorithme de la Proposition 2, on tire par combinaison linéaire :

$$(1) \quad 10^{s_0} m = q\,(10^{s_0-1} a_1 + \cdots + 10 a_{s_0-1} + a_{s_0}) + r_{s_0+1} .$$

Sur (1) on voit que r_{s_0+1} est divisible par $2^{\alpha} 5^{\beta}$. Posons :

$$(2) \qquad r_{s_0+1} = 2^{\alpha} 5^{\beta} m' ,$$

où $m' < q'$ car $r_{s_0+1} < q$. D'autre part $10^{p_0} - 1$ est divisible par q' ; on peut écrire $10^{p_0} - 1 = q' b$. Considérons l'entier $c = m' b$. On a :

$$(3) \qquad (10^{p_0} - 1)\, m' = q' c .$$

Comme $m' < q'$, on a $c < 10^{p_0} - 1$; on peut donc écrire l'entier c dans le système décimal sous la forme

$$c = 10^{p_0-1} d_1 + 10^{p_0-2} d_2 + \cdots + 10\, d_{p_0-1} + d_{p_0} ,$$

où $0 \leq d_i \leq 9$ et où les premiers d_i ont le droit d'être nuls.

On peut réécrire (3) :

$$(10^{p_0} - 1)\, m' = q' \,(10^{p_0-1} d_1 + 10^{p_0-2} d_2 + \cdots + 10\, d_{p_0-1} + d_{p_0})$$

et, en multipliant les deux membres par $2^\alpha 5^\beta$:

$$(10^{p_0} - 1)\, r_{s_0+1} = q\,(10^{p_0-1} d_1 + 10^{p_0-2} d_2 + \cdots + 10\, d_{p_0-1} + d_{p_0}) .$$

Divisons maintenant les deux membres par $10^{p_0} - 1 = 10^{p_0}\left(1 - \frac{1}{10^{p_0}}\right)$:

$$(4) \qquad r_{s_0+1} = q \left(\frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \cdots + \frac{d_{p_0-1}}{10^{p_0-1}} + \frac{d_{p_0}}{10^{p_0}} \right) \frac{1}{1 - \frac{1}{10^{p_0}}} .$$

En tenant compte de (1), et de la formule de la progression géométrique

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{10^{p_0}}} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{10^{p_0 k}} ,$$

(4) s'écrit finalement :

$$x = \frac{m}{q} = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_{s_0}}{10^{s_0}} + \lim_{n\to\infty} \left(\frac{d_1}{10^{s_0+1}} + \frac{d_2}{10^{s_0+2}} + \cdots + \frac{d_{p_0}}{10^{s_0+p_0}} \right) \left(1 + \frac{1}{10^{p_0}} + \cdots + \frac{1}{10^{np_0}} \right)$$

d'où résulte immédiatement que le développement décimal de x commence par $0, a_1 a_2 \ldots a_{s_0}$ et est suivi de la période $d_1 d_2 \ldots d_{p_0}$ répétée indéfiniment. Ceci prouve que $s \leq s_0$ et $p \leq p_0$ —

IV. Indications sur les exercices.

Exercice 1. $a = 7$.

Exercice 2. Si $a_n = 0$ pour tout $n > N$, on a $x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{10^k} = \sum_{k=1}^{N} \frac{a_N}{10^N}$ donc x est de la forme $\frac{m}{10^N}$.

Exercice 3. $\lim x_n = 1$.

Exercice 4. La suite est croissante et majorée par 1. Le développement décimal de $x = \lim x_n$ est $0, a_1 a_2 \ldots a_{k-1} (a_k + 1)\, 000\ldots$

Exercice 5. $a_{1000} = a_4 = 4$. En effet $s = 2$ et $p = 6$; d'autre part $1000 = 2 + [(166 \times 6) + 2]$.

Le nombre π. Les fonctions circulaires.

La théorie des fonctions circulaires (cosinus, sinus, etc...), telle qu'elle est présentée habituellement dans les traités élémentaires de trigonométrie, repose sur une intuition géométrique, une hypothèse en général non prouvée, à savoir qu'un arc de cercle (ou un angle) est susceptible d'être mesuré, ce qui, en définitive, relève du calcul intégral. Toute la difficulté est dans la question suivante : qu'est-ce que le θ qui intervient dans $\cos\theta$ et $\sin\theta$?

Le lecteur a certainement déjà l'expérience des formules classiques de la trigonométrie, et de leurs applications à la résolution des équations trigonométriques et à la géométrie du triangle. Sinon il pourrait lire "La trigonométrie, par Robert Campbell, Collection: Que sais-je, n° 692, P.U.F. 1967".

Ici nous insisterons plutôt sur les fondements de la théorie, sur la formule d'addition et ses conséquences, et sur les liens avec les nombres complexes.

I. Longueur d'un arc de cercle. Définition de π.

Rappelons que le plan euclidien orienté $\mathbb{R}^2$ est l'ensemble des couples ordonnés (x,y) de nombres réels ; la distance de deux points $M=(x,y)$ et $M'=(x',y')$ de $\mathbb{R}^2$ est définie par

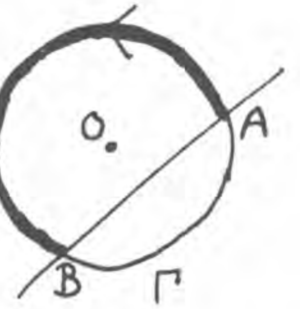
$$d(M,M') = \left[(x-x')^2+(y-y')^2\right]^{1/2} ,$$

qu'on appelle encore longueur du segment MM'. Ceci permet de définir la longueur de toute ligne polygonale $M_0M_1M_2 \ldots\ldots M_{k-1}M_k$ comme somme des longueurs de ses côtés M_pM_{p+1}, où $p=0,1,\ldots,k-1$.

Dans $\mathbb{R}^2$ le cercle de centre O, de rayon un, est l'ensemble des points M tels que $d(O,M)=1$; on l'appellera le <u>cercle trigonométrique</u> et on le désignera par Γ. Si A et B sont deux points distincts de Γ, la droite AB a pour équation cartésienne

$$(y-y_B)(x_A-x_B) - (x-x_B)(y_A-y_B) = 0 ,$$

et délimite deux régions du plan, donc délimite sur Γ <u>deux</u> arcs de cercle d'origine A, d'extrémité B. L'un de ces arcs est formé des points (x, y) de Γ tels que :



$$(y-y_B)(x_A-x_B)-(x-x_B)(y_A-y_B) \geq 0 \ ;$$

on dira que c'est l'arc AB parcouru dans le sens <u>direct</u> (ou le sens <u>trigonométrique</u>) (*). L'autre arc AB est formé des points (x,y) de Γ tels que :

$$(y-y_B)(x_A-x_B)-(x-x_B)(y_A-y_B) \leq 0 \ ;$$

on dit que c'est l'arc AB parcouru dans le sens <u>rétrograde</u> (ou le sens des aiguilles d'une montre). Ainsi se trouve orienté le cercle trigonométrique.

Soit sur Γ un arc d'origine A, d'extrémité B. Sur cet arc prenons une succession finie de points $M_0 = A, M_1, M_2, \dots, M_{k-1}, M_k = B$, de sorte que, pour tout entier $p = 0, 1, \dots, k-1$, le sous-arc M_pM_{p+1} de AB soit de même sens que l'arc AB. On dit alors que la <u>ligne polygonale</u> $M_0M_1M_2 \dots M_{k-1}M_k$ est <u>inscrite</u> dans l'arc AB. Grâce à l'inégalité triangulaire, en projetant chaque segment M_pM_{p+1} sur Ox et Oy, on voit aisément que la longueur de toute ligne polygonale inscrite est majorée par le nombre 8. Ces longueurs ont donc une borne supérieure.

<u>Définition</u> 1. On appelle <u>longueur</u> d'un arc du cercle Γ la borne supérieure des longueurs des lignes polygonales inscrites dans cet arc.

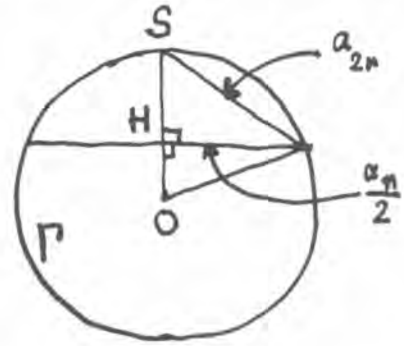
<u>Définition</u> 2. On désigne par π le nombre qui est la longueur de l'arc de demi-cercle défini par : $x^2+y^2=1$; $y \geq 0$.

Nous admettrons le résultat suivant, qui relève des débuts du Calcul Intégral (cf. le module AN 03 de ce cours) :

(*) en d'autres termes : l'arc direct AB est formé des points M de Γ tels que le produit vectoriel $\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{BM}$ soit ≥ 0.

<u>Théorème</u> 1. Soit γ un arc du cercle Γ, et soit (L_n) une suite de lignes polygonales inscrites dans γ. Supposons que, quand n tend vers l'infini, la longueur du plus long côté de L_n tende vers 0. Alors, quand n tend vers l'infini, la longueur de L_n a pour limite la longueur de l'arc γ.

II. Méthode d'Archimède (3.ième siècle avant J.C.) pour calculer les premières décimales de π.



Soit a_n la longueur du côté du polygone régulier à n côtés inscrit dans Γ, et soit $p_n = \frac{n}{2} a_n$ le demi-périmètre de ce polygone. On a : $\pi = \lim_{n \to +\infty} p_n$. Or, d'après le théorème de Pythagore :

$$OH^2 = 1 - \frac{a_n^2}{4} \qquad \text{et} \qquad HS^2 = (a_{2n})^2 - \frac{a_n^2}{4}.$$

Comme $OH + HS = 1$, ceci fournit la relation de récurrence :

$$a_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - a_n^2}},$$

d'où l'on tire : $$p_{2n} = \sqrt{2}\, n \sqrt{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{p_n}{n}\right)^2}}.$$

Partant de $p_6 = 3$, on obtient le tableau :

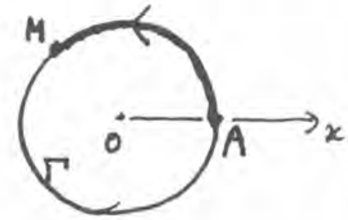
n	6	12	24	48	96	192	384
p_n	3,0000	3,1058	3,1326	3,1393	3,1410	3,1414	3,1415

<u>Exercice</u> 1. Dressez le tableau analogue pour $n = 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256$.

<u>Remarque</u> : Dans son étude "La mesure du cercle", Archimède mentionne déjà l'encadrement : $\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$, qui fournit $3,140 < \pi < 3,143$. A la fin du seizième siècle seulement, apparut l'excellente approximation fractionnaire $\frac{355}{113} = 3,1415929$, dont l'écart avec $\pi = 3,14159\,26535\,89793\,23846\ldots$ est, par excès, inférieur à 3×10^{-7}.

III. Définition du sinus et du cosinus.

Prenons comme origine sur le cercle trigonométrique Γ le point $A=(1,0)$. Pour tout point M de Γ, l'arc AM orienté dans le sens direct a pour longueur un nombre positif et inférieur à 2π. Réciproquement :



Lemme 1. Pour tout nombre réel θ tel que $0 \leq \theta < 2\pi$, il existe un point M de Γ et un seul tel que la longueur de l'arc direct AM soit égale à θ.

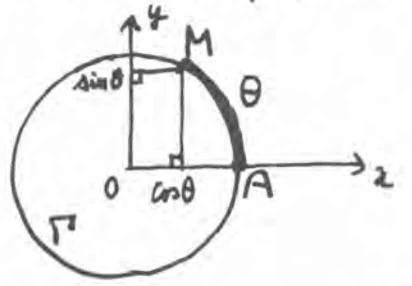
Première démonstration (esquisse) s'appuyant sur des notions qui seront développées à la prochaine Leçon (n°5) : Par raison de symétrie on peut supposer $\theta \leq \pi$. Si $-1 \leq x \leq 1$, soit $M(x)$ le point de Γ de coordonnées $(x, \sqrt{1-x^2})$ et $L(x)$ la longueur de l'arc d'origine A, d'extrémité $M(x)$. On vérifie que la fonction $x \mapsto L(x)$, définie sur le segment $[-1,+1]$, est continue et strictement décroissante ; elle prend donc (une fois et une seule) toute valeur θ intermédiaire entre ses valeurs au bord $L(-1)=\pi$ et $L(1)=0$.

Seconde démonstration (esquisse) s'appuyant sur les définitions de la présente leçon et sur le théorème 1. On suppose $0 \leq \theta < \pi$. Soit P_n le polygone régulier à 2^n côtés inscrit dans Γ dont un sommet est A, et soit a_{2^n} la longueur du côté de P_n. La suite $\frac{1}{2}\,\mathrm{long}(P_n)$ est croissante et tend vers π, donc pour n assez grand ($n \geq n_0$), on a $\frac{1}{2}\,\mathrm{long}(P_n) \geq \theta$. Pour tout $n \geq n_0$, soit L_n la plus petite ligne polygonale d'origine A, extraite de P_n, inscrite dans Γ, de sens direct, et telle que : $\mathrm{long}(L_n) \geq \theta$; ainsi :

$$(1) \quad \mathrm{long}(L_n) - a_{2^n} < \theta \leq \mathrm{long}(L_n).$$

Soit M_n l'extrémité de L_n, et x_n l'abscisse de M_n. La suite (x_n) est croissante et majorée par 1 ; elle a donc une limite x telle que $-1 \leq x \leq 1$. Soit M le point $(x, \sqrt{1-x^2})$. Quand n tend vers l'infini, on peut prouver, grâce au Théorème 1, que $\mathrm{long}(L_n)$ tend vers la longueur de l'arc AM. Il résulte alors de (1) que $\theta = \mathrm{long}(\text{arc } AM)$. L'unicité n'offre pas de difficultés.

<u>Définition</u>. 1°) Si θ est un nombre réel tel que $0 \leq \theta < 2\pi$, on appelle <u>cosinus</u> de θ (resp. <u>sinus de</u> θ), et on note $\cos\theta$ (resp. $\sin\theta$) l'abscisse (resp. l'ordonnée) du point M de Γ tel que l'arc direct AM soit de longueur θ.



2°) Plus généralement, soit θ un nombre réel quelconque, et soit $\mathring{\theta}$ l'unique nombre réel tel que $0 \leq \mathring{\theta} < 2\pi$ et tel que $\theta - \mathring{\theta}$ soit un multiple entier de 2π. On pose $\sin\theta = \sin\mathring{\theta}$ et $\cos\theta = \cos\mathring{\theta}$.

Ainsi les fonctions sinus et cosinus sont définies par périodicité sur $\mathbb{R}$ tout entier.

On vérifie sur les définitions que, pour tout nombre réel θ, on a les formules :

$$\sin(\theta+2\pi) = \sin\theta \quad ; \quad \cos(\theta+2\pi) = \cos\theta \ ;$$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \ ;$$

$$\sin(\pi-\theta) = \sin\theta \quad ; \quad \cos(\pi-\theta) = -\cos\theta \ ;$$

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta \ ; \quad \cos(-\theta) = \cos\theta \ ;$$

$$\sin\left(\tfrac{\pi}{2}-\theta\right) = \cos\theta \quad ; \quad \cos\left(\tfrac{\pi}{2}-\theta\right) = \sin\theta \ ;$$

$$\sin\left(\tfrac{\pi}{2}+\theta\right) = \cos\theta \quad ; \quad \cos\left(\tfrac{\pi}{2}+\theta\right) = -\sin\theta \ ;$$

pour tout entier k, $\quad \sin(k\pi) = 0 \ ; \ \cos(k\pi) = (-1)^k \ ;$

$$\sin\left(\tfrac{\pi}{2}+k\pi\right) = (-1)^k \ ; \ \cos\left(\tfrac{\pi}{2}+k\pi\right) = 0 \ ;$$

$$\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \ ; \ \sin\frac{\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \ ; \ \cos\frac{\pi}{6} = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

IV. Formules d'addition.

Soit θ un nombre réel. Dans $\mathbb{R}^2$ considérons la transformation linéaire qui, au point $m = (x,y)$, associe le point $M = (X,Y)$ défini par

$$\begin{cases} X = \cos\theta\, x - \sin\theta\, y \\ Y = \sin\theta\, x + \cos\theta\, y \end{cases}$$

Notons ρ_θ cette transformation.

Grâce à la formule $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, il est facile de vérifier que $\rho_{-\theta}(M) = m$, c'est-à-dire que ρ_θ admet $\rho_{-\theta}$ comme transformation inverse.

<u>Lemme 2</u>. La transformation ρ_θ conserve les distances des points dans $\mathbb{R}^2$, et transforme tout arc de Γ en un arc de même longueur et même orientation.

<u>Démonstration</u>. 1) Soient $m=(x,y)$ et $m'=(x',y')$ deux points de $\mathbb{R}^2$ et $M=(X,Y)$, $M'=(X',Y')$ leurs transformés par ρ_θ. On a :

$$d(M,M')^2 = (X-X')^2 + (Y-Y')^2 =$$

$$= [\cos\theta(x-x') - \sin\theta(y-y')]^2 + [\sin\theta(x-x') + \cos\theta(y-y')]^2 =$$

$$= (\cos^2\theta + \sin^2\theta)[(x-x')^2 + (y-y')^2] = d(m,m')^2.$$

2) Soit un arc de Γ, de sens direct, d'origine m, d'extrémité m'. Si M et M' sont les transformés de m, m', on a $OM = OM' = Om = Om' = 1$, donc M et M' sont sur Γ. Si p est un point quelconque de l'arc mm', et si P est son transformé, on a $OP = Op = 1$, donc P est sur Γ. De plus un calcul facile montre que :

$$(Y_P - Y_{M'})(X_M - X_{M'}) - (X_P - X_{M'})(Y_M - Y_{M'}) =$$

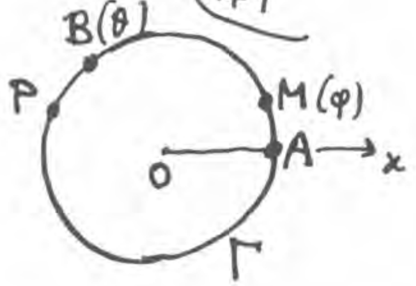
$$= (\cos^2\theta + \sin^2\theta)[(y_p - y_{m'})(x_m - x_{m'}) - (x_p - x_{m'})(y_m - y_{m'})],$$

donc le premier membre est ≥ 0, ce qui prouve que P se trouve sur l'arc direct MM'. Mais tout point Q de cet arc MM' est obtenu (une fois et une seule) comme image par ρ_θ du point $\rho_{-\theta}(Q)$ de l'arc mm'.

3) Si L est une ligne polygonale inscrite dans un arc γ de Γ, il résulte de 1°) et 2°) que la ligne polygonale $\rho_\theta(L)$ est inscrite dans l'arc $\rho_\theta(\gamma)$, et a même longueur que L. Donc :

$$\operatorname{long} \rho_\theta(\gamma) = \sup_L \operatorname{long} \rho_\theta(L) = \sup_L \operatorname{long}(L) = \operatorname{long}(\gamma).$$ cqfd

De ce lemme, nous allons déduire les formules donnant les sinus et cosinus d'une somme de deux nombres réels.



Soient θ et φ deux nombres réels tels que :
$0 \leq \theta \leq \pi$ et $0 \leq \varphi \leq \pi$.
Considérons sur Γ les quatre points :
$A = (1,0)$; $B = \rho_\theta(A) = (\cos\theta, \sin\theta)$;
$M = (\cos\varphi, \sin\varphi)$; et

$$(2) \quad P = \rho_\theta(M) = (\cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi,\ \sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi).$$

Par définition des sinus et cosinus, on a :

$$\theta = \mathrm{long}(\text{arc } AB) \quad \text{et} \quad \varphi = \mathrm{long}(\text{arc } AM).$$

D'après le Lemme 2, on a :

$$\mathrm{long}(\text{arc } BP) = \mathrm{long}(\text{arc } AM) = \varphi,$$

donc

$$\mathrm{long}(\text{arc } AP) = \mathrm{long}(\text{arc } AB) + \mathrm{long}(\text{arc } BP) = \theta + \varphi.$$

Par définition des sinus et cosinus, les coordonnées de P sont donc $\cos(\theta+\varphi)$ et $\sin(\theta+\varphi)$. Mais, comme elles sont aussi données par (2), on obtient les formules d'addition :

$$\boxed{\begin{aligned} \cos(\theta+\varphi) &= \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi \\ \sin(\theta+\varphi) &= \sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi \end{aligned}},$$

pour θ et φ entre 0 et π, mais plus généralement quels que soient θ et φ réels, grâce aux propriétés de périodicité et symétrie formulées à la fin du § III.

Les formules qui suivent sont des conséquences directes de ces deux formules fondamentales (en posant au passage $\theta + \varphi = \theta_1$ et $\theta - \varphi = \theta_2$, donc $\theta = \frac{\theta_1+\theta_2}{2}$ et $\varphi = \frac{\theta_1-\theta_2}{2}$). Quels que soient les nombres réels $\theta, \varphi, \theta_1$ et θ_2, on a :

$$\cos\theta\cos\varphi = \frac{1}{2}\left[\cos(\theta+\varphi) + \cos(\theta-\varphi)\right]$$

$$\sin\theta\sin\varphi = \frac{1}{2}\left[\cos(\theta-\varphi) - \cos(\theta+\varphi)\right]$$

$$\cos\theta\sin\varphi = \frac{1}{2}\left[\sin(\theta+\varphi) - \sin(\theta-\varphi)\right]$$

$$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta$$

$$\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta \; ; \; 1-\cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2} \; ; \; 1+\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}$$

$$\cos\theta_1 + \cos\theta_2 = 2\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\cos\frac{\theta_1-\theta_2}{2}$$

$$\cos\theta_1 - \cos\theta_2 = -2\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\sin\frac{\theta_1-\theta_2}{2}$$

$$\sin\theta_1 + \sin\theta_2 = 2\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\cos\frac{\theta_1-\theta_2}{2}$$

$$\sin\theta_1 - \sin\theta_2 = 2\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\sin\frac{\theta_1-\theta_2}{2} .$$

Exercice 2. Montrez que $\rho_\theta = \rho_{\theta+2\pi}$, et que, quels que soient θ et φ, la composée $\rho_\theta \circ \rho_\varphi$ des deux transformations ρ_θ et ρ_φ n'est autre que la transformation $\rho_{\theta+\varphi}$.

Exercice 3. En utilisant la formule
$$\cos[(n+1)\theta] + \cos[(n-1)\theta] = 2\cos\theta\cos(n\theta),$$
montrez que, pour tout entier $n \geq 0$, on a :
$$\cos(n\theta) = T_n(\cos\theta),$$
où les T_n sont les polynômes de degré n (polynômes de Chebyshev) définis par les relations de récurrence :
$T_0(x) \equiv 1$, $T_1(x) \equiv x$; et, pour $n \geq 1$, $T_{n+1}(x) = 2x\,T_n(x) - T_{n-1}(x)$.

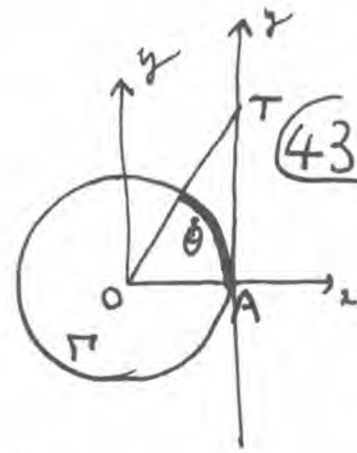
Donnez l'expression de $\cos(7\theta)$ en fonction de $\cos\theta$.

Exercice 4. Si θ n'est pas un multiple entier de π, montrez que, pour tout entier $n \geq 1$, on a :
$$\frac{\sin(n\theta)}{\sin\theta} = U_{n-1}(\cos\theta),$$
où les U_n sont les polynômes de degré n (polynômes de Chebyshev de seconde espèce) définis par les relations de récurrence :
$U_0(x) \equiv 1$, $U_1(x) \equiv 2x$; et, pour $n \geq 1$, $U_{n+1}(x) = 2x\,U_n(x) - U_{n-1}(x)$.

Donnez l'expression de $\sin(7\theta)$ en fonction de $\cos\theta$.

Exercice 5. Montrez que, si a et b sont deux nombres réels tels que $a^2+b^2 \neq 0$, on peut écrire : $a\cos\theta + b\sin\theta = r\cos(\theta-\omega)$, et calculez r, $\sin\omega$ et $\cos\omega$ en fonction de a et b.

V. (pour mémoire) Fonctions $tg(\theta)$ et $cotg(\theta)$.



Si $\theta - \frac{\pi}{2}$ n'est pas un multiple entier de π, on pose :
$$tg\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \overline{AT},$$
et, si θ n'est pas un multiple entier de π,
$$cotg(\theta) = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}.$$
Sous réserve qu'elles aient un sens, on a les formules :
$$tg(\theta + k\pi) = tg\theta \ ; \ tg(-\theta) = -tg\theta \ ; \ tg(\tfrac{\pi}{2} - \theta) = cotg\,\theta \ ;$$
$$tg(\theta+\varphi) = \frac{tg\theta + tg\varphi}{1 - tg\theta\, tg\varphi} \ ; \quad tg(\theta - \varphi) = \frac{tg\theta - tg\varphi}{1 + tg\theta\, tg\varphi}$$
$$tg\frac{\pi}{4} = 1 \ ; \ tg\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \ ; \ tg\frac{\pi}{3} = \sqrt{3} \ ;$$
$$tg(2\theta) = \frac{2\,tg\theta}{1 - tg^2\theta} \ ; \ \sin(2\theta) = \frac{2\,tg\theta}{1+tg^2\theta} \ ; \ \cos(2\theta) = \frac{1 - tg^2\theta}{1 + tg^2\theta}.$$
Ces trois dernières formules permettent d'exprimer rationnellement les fonctions $\sin\theta$, $\cos\theta$, $tg\theta$ en fonction de la variable $t = tg\frac{\theta}{2}$.

VI. Argument d'un nombre complexe.

Les nombres complexes sont de la forme $x + iy$, où x et y sont réels ; on les additionne et les multiplie comme d'habitude, mais en appliquant la règle $i^2 = -1$. A tout nombre complexe $z = x+iy$ correspond son image, le point (x,y) de $\mathbb{R}^2$. Le module de z est $\sqrt{x^2+y^2}$, et l'on a $|zz'| = |z|\,|z'|$. Le cercle trigonométrique est l'image de l'ensemble des nombres complexes de module un. Ainsi tout nombre complexe de module un peut-il s'écrire
$$z = \cos\theta + i\sin\theta,$$
où θ est un nombre complexe défini à $2k\pi$ près, k entier ; l'ensemble infini de ces nombres réels θ s'appelle l'argument de z, et est noté $\arg(z)$; plus particulièrement, celui $\mathring{\theta}$ de ces nombres qui est tel que $0 \leq \mathring{\theta} < 2\pi$, s'appelle la détermination principale de l'argument de z, et est noté $\mathrm{Arg}(z)$, avec un A majuscule.

 Plus généralement, si z est un nombre complexe <u>non nul</u>, on a $z = |z| \frac{z}{|z|}$, et $\frac{z}{|z|}$ est de module un ; on appelle argument de z (resp. détermination principale de l'argument de z) $\arg\left(\frac{z}{|z|}\right)$ [resp. $\mathrm{Arg}\left(\frac{z}{|z|}\right)$]. Ainsi tout nombre complexe <u>non nul</u> s'écrit :

$$z = |z| \, (\cos\theta + i \sin\theta) \,,$$

où θ est un nombre réel défini à $2k\pi$ près, à savoir $\theta = \arg(z)$.

<u>Théorème</u> 2. Soient z et z' deux nombres complexes non nuls. Alors

$$\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') \quad , \text{ à } 2k\pi \text{ près.}$$

<u>Démonstration</u>. Quitte à les diviser par leurs modules, on peut supposer que z et z' sont de module un. Alors, si $\theta = \arg(z)$ et $\theta' = \arg(z')$, on a :
$$z = \cos\theta + i\sin\theta \quad \text{et} \quad z' = \cos\theta' + i \sin\theta' ,$$
donc :
$$\begin{aligned} zz' &= (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta' + i\sin\theta') = \\ &= \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' + i\,(\cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta') \\ &= \cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta') , \end{aligned}$$
en vertu des formules d'addition.

En particulier, pour n entier ≥ 0, $\arg(z^n) = n \arg z + 2k\pi$.

<u>Corollaire</u> (formule de de Moivre). Pour tout entier $n \geq 0$, et tout nombre réel θ, on a :

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta) .$$

<u>Exercice</u> 6. Soit θ un nombre réel non multiple entier de 2π, et n un entier ≥ 0. Calculez les sommes :

$$S_n = 1 + \cos\theta + \cos(2\theta) + \cdots\cdots + \cos(n\theta)$$
$$\text{et} \quad T_n = \sin\theta + \sin(2\theta) + \cdots\cdots + \sin(n\theta) \,;$$

pour cela on calculera $S_n + i T_n$ grâce à la formule de de Moivre, à celle de la progression géométrique, puis en prenant les parties réelle et imaginaire du résultat. On trouvera :

$$S_n = \frac{\cos\frac{n\theta}{2} \sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\sin\frac{\theta}{2}} \quad \text{et} \quad T_n = \frac{\sin\frac{n\theta}{2} \sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\sin\frac{\theta}{2}} .$$

VII. Indications pour les Exercices proposés dans cette Leçon.

Exercice 1. $a_4 = \sqrt{2}$, donc $p_4 = 2\sqrt{2} = 2,8284$. On trouve :

n	4	8	16	32	64	128	256
p_n	2,8284	3,0615	3,1214	3,1365	3,1403	3,1413	3,1415

Exercice 2. Par substitution dans les formules de transformation et application des formules d'addition. Ce fait exprime que la composée de deux "rotations" d'"angles" θ et φ est la "rotation" d'"angle" $\theta+\varphi$.

Exercice 3. On a : $T_0(x) \equiv 1$; $T_1(x) \equiv x$; $T_2(x) \equiv 2x^2-1$; $T_3(x) = 4x^3-3x$; $T_4(x) \equiv 8x^4-8x^2+1$; $T_5(x) \equiv 16x^5-20x^3+5x$; $T_6(x) \equiv 32x^6-48x^4+18x^2-1$

et $T_7(x) \equiv 64x^7-112x^5+56x^3-7x$, donc :

$$\cos(7\theta) = 64\cos^7\theta - 112\cos^5\theta + 56\cos^3\theta - 7\cos\theta.$$

Exercice 4. Il suffit de diviser par $\sin\theta$ la formule :

$$\sin[(n+1)\theta] + \sin[(n-1)\theta] = 2\sin(n\theta)\cos\theta.$$

On a : $U_0(x) \equiv 1$; $U_1(x) \equiv 2x$; $U_2(x) \equiv 4x^2-1$; $U_3(x) = 8x^3-4x$; $U_4(x) = 16x^4-12x^2+1$; $U_5(x) = 32x^5-32x^3+6x$;

et $U_6(x) = 64x^6-80x^4+24x^2-1$, donc :

$$\sin(7\theta) = \sqrt{1-\cos^2\theta}\,\left(64\cos^6\theta - 80\cos^4\theta + 24\cos^2\theta - 1\right).$$

Exercice 5. D'après les formules d'addition

$$r\cos\omega = a \quad \text{et} \quad r\sin\omega = b,$$

donc $r = \sqrt{a^2+b^2}$, $\cos\omega = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\omega = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Exercice 6. En posant $z = \cos\theta + i\sin\theta$, la formule de de Moivre donne : $S_n + iT_n = 1 + z + z^2 + \dots + z^n$, somme qui, d'après la formule de la progression géométrique, vaut :

$$S_n + iT_n = \frac{1-z^{n+1}}{1-z} = \frac{1-\cos(n+1)\theta - i\sin(n+1)\theta}{1-\cos\theta - i\sin\theta} =$$

$$= \frac{[1-\cos(n+1)\theta - i\sin(n+1)\theta][1-\cos\theta + i\sin\theta]}{(1-\cos\theta)^2+\sin^2\theta} = \text{etc.} \dots$$

Fonctions continues

La notion générale de fonction est celle d'<u>application</u> d'un ensemble E ("ensemble de définition" de la fonction f) dans un ensemble F (où f prend ses "valeurs") : à chaque élément x de E on fait correspondre un élément $f(x)$ de F. Dans ce chapitre F sera l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels ou, plus généralement, l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes. Quant à E, ce sera le plus souvent un <u>intervalle</u> de $\mathbb{R}$ ou, plus généralement, une réunion finie d'intervalles.

Les intervalles de $\mathbb{R}$ se répartissent en plusieurs classes. Si $\alpha \leq \beta$ sont des nombres réels, on peut distinguer : 1°) les intervalles bornés ouverts $]\alpha, \beta[$, ensembles des x réels tels que $\alpha < x < \beta$; 2°) les intervalles bornés fermés $[\alpha, \beta]$, ensembles des x réels tels que $\alpha \leq x \leq \beta$, encore appelés "segments" ; 3°) les intervalles bornés semi-ouverts $]\alpha, \beta]$ et $[\alpha, \beta[$, définis respectivement par $\alpha < x \leq \beta$ et $\alpha \leq x < \beta$; 4°) $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$ tout entier ; 5°) les intervalles du type $[\alpha, +\infty[$ et $]-\infty, \beta]$; 6°) les intervalles du type $]\alpha, +\infty[$ et $]-\infty, \beta[$.

On visualisera les propriétés de f par son <u>graphe</u>, ensemble des points de coordonnées $(x, f(x))$ dans un plan cartésien Ox, Oy.

I. Limites de fonctions d'une variable réelle

Il y a plusieurs espèces de limites, qu'il faut soigneusement distinguer.

1) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soit $a \in I$. Soit f une fonction définie dans I, à valeurs complexes. Soit $l \in \mathbb{C}$.

<u>Définition.</u> $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que : $x \in I$, $|x - a| < \eta$ implique $|l - f(x)| < \varepsilon$.

2) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soit $a \in I$. Soit f une fonction définie dans l'ensemble I privé de a (ce qui n'exclut pas que f puisse être aussi définie au point a...), à valeurs complexes. Soit $l \in \mathbb{C}$.

<u>Définition.</u> $\lim\limits_{x \to a, x \neq a} f(x) = l$ si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que : $x \in I$, $x \neq a$, $|x - a| < \eta$ implique $|l - f(x)| < \varepsilon$.

3°) Soit $I =]a, b[$, où $b > a$. Soit f une fonction définie dans I, à valeurs complexes. Soit $\ell \in \mathbb{C}$.

Définition. $\lim\limits_{x \to a, x > a} f(x) = \ell$ si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que: $x \in I$, $x > a$, $|x - a| < \eta$ impliquent $|\ell - f(x)| < \varepsilon$.

On définit de même $\lim\limits_{x \to b, x < b} f(x)$.

4°) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soit $a \in I$. Soit f une fonction définie dans I, à valeurs réelles.

Définition. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ si, pour tout nombre réel A, il existe $\eta > 0$ tel que: $x \in I$, $|x - a| < \eta$ implique $f(x) > A$.

Par analogie avec 2°) et 3°), le lecteur écrira sans peine les définitions de $\lim\limits_{x \to a, x \neq a} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to a, x > a} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to b, x < b} f(x) = +\infty$, ainsi que les notions de $\lim f(x) = -\infty$.

5°) Soit $I =]\alpha, +\infty[$. Soit f une fonction définie dans I, à valeurs complexes. Soit $\ell \in \mathbb{C}$.

Définition. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre réel A tel que $x \in I$, $x > A$ implique $|\ell - f(x)| < \varepsilon$.

6°) Définition. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ si, pour tout nombre réel B, il existe un nombre réel A tel que $x \in I$, $x > A$ implique $f(x) > B$. (ici on a supposé f à valeurs réelles).

Le lecteur écrira sans peine les définitions de $\lim\limits_{x \to -\infty}$ et de $\lim f(x) = -\infty$.

Exercice 1. Posons: $f(x) =$ l'entier le plus proche de x quand $x - \frac{1}{2}$ n'est pas entier, et $f(x) = n + \frac{1}{2}$ si $x = n + \frac{1}{2}$ avec n entier. Etudiez l'existence des $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} f(x)$; $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}, x > \frac{1}{2}} f(x)$; $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}, x \neq \frac{1}{2}} f(x)$.

Exercice 2. Etudiez l'existence de $\lim\limits_{x \to 0, x \neq 0}$ pour la fonction $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$; pour la fonction $g(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

Bon nombre des propriétés de ces notions de limites se démontrent comme pour les limites de suites (Leçon n° 2) ; nous n'en ferons pas la démonstration.

a) Aux 1°), 2°), 3°) et 5°), la limite l, si elle existe, est unique. De plus dire que $\lim f(x) = l$ équivaut à dire que $\lim[f(x) - l] = 0$.

b) Au 1°) supposons $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = l'$. Alors $\lim\limits_{x \to a} [f(x) + g(x)] = l + l'$ et $\lim\limits_{x \to a} [f(x) g(x)] = l l'$. Si, de plus, $l' \neq 0$, on a $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{l}{l'}$ - Ces propriétés sont encore valables pour les notions de limites 2°), 3°) et 5°). Mais (attention !) si $\lim f(x) = +\infty$ et $\lim g(x) = 0$, on ne peut rien dire de $\lim[f(x) g(x)]$; le lecteur dressera aisément une liste d'autres cas d'indétermination.

c) (fonction composée). Supposons que f est définie sur un intervalle I, et g sur un intervalle J contenant l'image de I par f. Alors la fonction composée $g \circ f$ est définie sur I par

$$g \circ f(x) = g[f(x)].$$

Exercice 3 Si $g(x) = \cos x$ et $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, quelles sont les fonctions $g \circ f$ et $f \circ g$?

Revenons au cas général. Supposons que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ et que $\lim\limits_{x \to l} g(x) = L$. Alors $\lim\limits_{x \to a} g \circ f(x) = L$.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta_1 > 0$ tel que $|y - l| < \eta_1$ implique $|L - g(y)| < \varepsilon$. Il existe $\eta > 0$ tel que $|x - a| < \eta$ implique $|l - f(x)| < \eta_1$, donc a fortiori implique $|L - g[f(x)]| < \varepsilon$.

d) (conséquences de l'axiome de la borne supérieure). Soit E une partie non vide de $\mathbb{R}$, et f une fonction définie sur E, à valeurs réelles. L'image $f(E)$ de E par f, ensemble des nombres réels $f(x)$ quand x parcourt E, est non vide. On dit que f est majorée (minorée) si l'ensemble $f(E)$ est majoré (minoré) ; dans ce cas on note $\sup\limits_{x \in E} f(x)$ (resp. $\inf\limits_{x \in E} f(x)$) le plus petit (resp. le plus grand) des majorants (resp. minorants) de l'ensemble $f(E)$. La fonction

f est dite bornée si elle est à la fois majorée et minorée.

Soit maintenant I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, et soit f une fonction définie sur I, à valeurs réelles. On dit que la fonction f est croissante (resp. décroissante) sur I si : $x_1 \in I$, $x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ impliquent $f(x_1) \leq f(x_2)$ (resp. $f(x_1) \geq f(x_2)$). On dit que f est strictement croissante (resp. décroissante) si $x_1 < x_2$ implique $f(x_1) < f(x_2)$ (resp. $f(x_1) > f(x_2)$). On dit que f est (strictement) monotone si elle est (strictement) croissante ou décroissante.

Théorème 1. Soit $I =]a, b[$, où $a < b$ et où éventuellement $b = +\infty$. Soit f une fonction définie dans I, à valeurs réelles. Supposons que f est croissante et majorée dans I. Alors :
$\lim_{x \to b,\, x \neq b} f(x)$ existe, et cette limite vaut $\sup_{x \in I} f(x)$.

De même toute fonction décroissante minorée a une limite, qui est sa borne inférieure.

II. Définition de la continuité ; propriétés élémentaires.

Proposition 1. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, non vide et non réduit à un point. Soit f une fonction définie dans I, à valeurs complexes. Soit a un point de I (il n'est pas interdit que a soit une extrémité de I). Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que : $x \in I$, $|x - a| < \eta$ implique $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$;

ii) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$;

iii) pour toute suite (x_n) dans I telle que $\lim_{n \to +\infty} x_n = a$, on a : $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = f(a)$.

Définition. Si ces propriétés ont lieu, on dit que la fonction f est continue au point a.

On dit que f est continue dans I si elle est continue en tout point a de I.

<u>Démonstration de la Proposition 1</u>. L'équivalence entre i) et ii) n'est autre que la définition de $\lim\limits_{x \to a}$.

Montrons que i) implique iii). Soit $x_n \in I$ telle que $\lim x_n = a$. Soit $\varepsilon > 0$. D'après i), soit $\eta > 0$ tel que $x \in I$, $|x-a| < \eta$ implique $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Il existe un entier N tel que $n > N$ implique $|x_n - a| < \eta$, donc implique $|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon$. Ceci prouve que $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = f(a)$.

Montrons que non i) implique non iii). Si non i), il existe $\alpha > 0$ tel que, quel que soit l'entier $n > 0$, il existe $x_n \in I$ vérifiant $|x_n - a| < \frac{1}{n}$, mais $|f(x_n) - f(a)| \geq \alpha$. Il est clair que cette suite (x_n) tend vers a alors que la suite $(f(x_n))$ ne tend pas vers $f(a)$, donc non iii).

<u>Exemples</u>. La fonction définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ est continue sur $\mathbb{R}$. La fonction définie par $g(0) = y_0$ et, si $x \neq 0$, $g(x) = \sin\frac{1}{x}$, est non continue à l'origine, quel que puisse être le choix de y_0. La fonction $h(x) = 1$ si x est rationnel, et $= 0$ si x est irrationnel, n'est continue nulle part.

Soient f et g deux fonctions définies sur I, et continues au point a. Soit λ un nombre complexe, et k un nombre entier > 0. Alors les fonctions λf ; $f+g$; fg ; $\frac{f}{g}$ si $g(a) \neq 0$; f^k ; et $\sqrt[k]{f}$ si $f(x)$ est partout ≥ 0 ; sont toutes continues au point a.

Soit f une fonction définie sur I et continue en un point $a \in I$. Soit J un intervalle contenant $f(I)$, et soit g une fonction définie sur J et continue au point $b = f(a)$. Alors la fonction composée $g \circ f$ est continue au point a.

Il est évident que toute fonction constante, et la fonction $f(x) \equiv x$ sont continues dans $\mathbb{R}$. Il en résulte que sont continues dans $\mathbb{R}$:

– toute fonction polynômiale $x \mapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$;

– toute fraction rationnelle $\frac{P(x)}{Q(x)}$, où P et Q sont deux fonctions polynômiales, sauf aux points a tels que $Q(a) = 0$, c'est-à-dire sauf aux "pôles" de la fraction rationnelle ;

– toute fonction $x \mapsto \sqrt[q]{x^p}$, où p et q sont deux entiers > 0, et $x \geq 0$;

— les fonctions $\sin x$ et $\cos x$, et, pour $x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$, la fonction $\operatorname{tg} x$.
Pour démontrer ce dernier point, il suffit de considérer le cas de $\sin x$. Or, la corde étant moins longue que l'arc,

$$0 \leq |\sin x| = |\sin x - \sin 0| \leq |x| ,$$

donc la fonction sinus est évidemment continue à l'origine. Si maintenant $a \in \mathbb{R}$ est quelconque, l'inégalité

$$|\sin x - \sin a| = 2\left|\cos \frac{x+a}{2}\right| \left|\sin \frac{x-a}{2}\right| \leq \frac{2|x-a|}{2} = |x-a|$$

montre plus généralement que sin est continue au point a.

La définition iii) de la continuité permet de trouver explicitement la limite de certaines suites définies par récurrence :

<u>Proposition</u> 2. Soient $a<b$ deux nombres réels, et φ une fonction définie et <u>continue</u> sur $[a,b]$, telle que $a \leq \varphi(x) \leq b$ pour tout $x \in [a,b]$. Soit $x_0 \in [a,b]$. Considérons la suite (x_n) définie par

$$(1) \qquad x_n = \varphi(x_{n-1})$$

pour $n \geq 1$. Supposons qu'on sache déjà que (x_n) a une limite l [par exemple si (x_n) est monotone, ou de Cauchy]. Alors l est l'une des racines de l'équation $l = \varphi(l)$.

En effet, quand $n \to +\infty$, on a : $\lim x_n = l$ et $\lim x_{n-1} = l$, donc, par continuité de φ, on a $\lim \varphi(x_{n-1}) = \varphi(l)$. Il résulte de (1) que $l = \varphi(l)$.

<u>Exercice 4</u>. Trouvez la limite de la suite définie par
$$u_0 = \frac{\pi}{2}, \text{ et } u_n = \sin(u_{n-1}) \text{ si } n \geq 1.$$

<u>Exercice 5</u>. Même question pour $v_0 = 0$, et $v_n = \sqrt{2+v_{n-1}}$.

III. <u>Théorèmes fondamentaux sur les fonctions continues sur un segment.</u>

Ces théorèmes sont indispensables si on veut développer à peu près rigoureusement la théorie. Si le lecteur ne se sent pas spécialement motivé pour les démonstrations abstraites il pourra se contenter de bien assimiler les énoncés des Théorèmes 2, 3 et 4 ci-après, et de faire les Exercices proposés après leurs démonstrations.

<u>Théorème 2</u>. Soient a et b deux nombres réels tels que $a<b$. Soit f une fonction à valeurs réelles, définie et continue sur le segment $[a,b]$. (donc y compris au point a et au point b). Alors :

1°) la fonction f est <u>bornée</u> sur $[a,b]$;

2°) la fonction f "<u>atteint ses bornes</u>", c'est-à-dire : si on pose :

$$M = \sup_{a\leq x\leq b} f(x) \qquad \text{et} \qquad m = \inf_{a\leq x\leq b} f(x),$$

il existe des nombres réels c et d dans $[a,b]$ tels que :

$$f(c) = M \qquad \text{et} \qquad f(d) = m.$$

<u>Démonstration</u>. 1°) Par l'absurde supposons f non bornée. Pour tout entier $n>0$, il existe $x_n \in [a,b]$ tel que $|f(x_n)| \geq n$. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass (cf. la Leçon n° 2), de la suite (x_n) on peut extraire une suite $k \mapsto x_{n_k}$ qui, quand $k\to+\infty$, converge vers une limite x. Pour tout k on a les inégalités $a \leq x_{n_k} \leq b$, donc on a aussi $a\leq x\leq b$. Puisque la fonction f est continue au point x, la suite $(f(x_{n_k}))$ converge vers $f(x)$, donc la suite $(|f(x_{n_k})|)$ converge vers le nombre $|f(x)|$. Mais $|f(x_{n_k})| \geq n_k$ tend vers $+\infty$; c'est contradictoire.

2°) Par définition de la borne supérieure, pour tout entier $n>0$ il existe $y_n \in [a,b]$ tel que : $M - \frac{1}{n} \leq f(y_n) \leq M$. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, de la suite (y_n) on peut extraire une suite $k \mapsto y_{n_k}$ qui converge vers une limite $y \in [a,b]$. Les inégalités ci-dessus montrent que $\lim_{n\to+\infty} f(y_n) = M$, donc aussi $\lim_{k\to+\infty} f(y_{n_k}) = M$. Puisque f est continue, on a aussi $\lim_{k\to+\infty} f(y_{n_k}) = f(y)$. Ainsi $f(y)=M$; il suffit de poser $y=c$.

On raisonne de même pour la borne inférieure.

<u>Corollaire</u>. Soit f une fonction continue sur $[a,b]$, à valeurs réelles. On suppose que, pour tout $x\in[a,b]$, on a $f(x)>0$. Alors il existe un nombre $m>0$ tel que, pour tout $x\in[a,b]$, on ait $f(x)\geq m$.

Il suffit en effet de poser $m = \inf_{a \leq x \leq b} f(x)$, et de remarquer que $m = f(d)$, donc que m est > 0.

Exercice 6. Donnez des exemples aussi simples que possible :

a) d'une f continue sur $[0, +\infty[$ et non bornée sur cet intervalle ;

b) d'une f continue sur $[0, 1[$ et non bornée sur cet intervalle ;

c) d'une f continue bornée sur $[0, +\infty[$ qui n'atteint pas sa borne supérieure ;

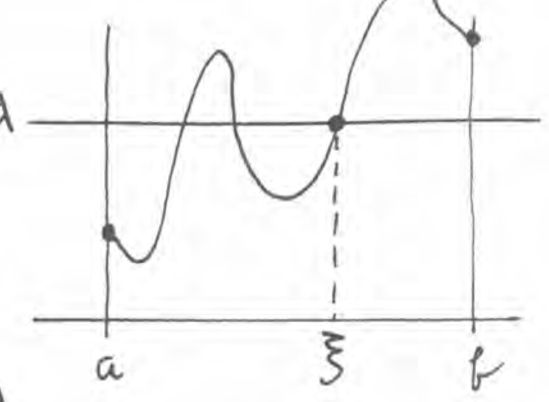
d) idem sur $[0, 1[$;

e) d'une f continue bornée sur $[0, +\infty[$, partout > 0, et telle que $m = \inf_{0 \leq x} f(x) = 0$;

f) idem sur $[0, 1[$.

Théorème 3 ("théorème des valeurs intermédiaires"). Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, à valeurs réelles. Soit λ un nombre compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Alors il existe un nombre $\xi \in [a, b]$ tel que $f(\xi) = \lambda$.

Autrement dit : toute valeur intermédiaire entre deux valeurs prises par f est prise par f.



Démonstration. Par exemple supposons $f(a) \leq f(b)$. Soit E l'ensemble des $x \in [a, b]$ tels que $f(x) \leq \lambda$. Puisque $a \in E$, l'ensemble E n'est pas vide ; il est majoré par b ; donc E a une borne supérieure ξ, et $\xi \in [a, b]$. Prouvons que $f(\xi) = \lambda$.

Par définition de la borne supérieure, pour tout entier $n > 0$, il existe $x_n \in E$ tel que $\xi - \frac{1}{n} \leq x_n \leq \xi$. Ceci entraîne que $\lim_{n \to +\infty} x_n = \xi$. Or, pour tout n, on a $f(x_n) \leq \lambda$, donc

$$f(\xi) = \lim_{n \to +\infty} f(x_n) \leq \lambda .$$

Par l'absurde supposons $f(\xi) < \lambda$. Alors $\xi < b$. Posons $\varepsilon = \lambda - f(\xi)$. On a $\varepsilon > 0$. Puisque f est continue au point ξ, il existe $x \in]\xi, b[$ tel que $f(x) - f(\xi) < \varepsilon$, donc tel que $f(x) < \lambda$. Un tel x serait dans E, et ξ ne serait pas la borne supérieure de E, puisque $x > \xi$.

<u>Exercice</u> 7. Déduire du théorème 3 que tout polynôme à coefficients réels de degré impair a nécessairement une racine réelle.

<u>Exercice</u> 8. Donnez un exemple aussi simple que possible d'une fonction non continue sur $[0,1]$, mais qui cependant satisfait au théorème des valeurs intermédiaires.

Le théorème 4 ci-après sera utilisé surtout en Calcul Intégral (module AN03).

<u>Définition</u>. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et f une fonction définie dans I, à valeurs complexes. On dit que f est <u>uniformément continue</u> dans I, si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que:

$$x \in I,\ x' \in I,\quad |x' - x| < \eta \text{ impliquent } |f(x') - f(x)| < \varepsilon.$$

Ceci entraîne évidemment que f est continue en chaque point x de I, mais elle l'est d'une manière cohérente entre les divers x, en ce sens que, pour tout $\varepsilon > 0$ donné, on peut faire un choix du $\eta > 0$ qui soit universel pour la définition de la continuité en tous les x de I à la fois.

<u>Exercice</u> 9. La fonction $f(x) = x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$, mais pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

<u>Théorème</u> 4 (théorème de Heine) Soient $a < b$ deux nombres réels. Soit f une fonction définie et continue sur le segment $[a,b]$, à valeurs complexes. Alors f est uniformément continue sur $[a,b]$.

<u>Démonstration</u>. Par l'absurde supposons que f n'est pas uniformément continue sur $[a,b]$. Il existe un $\alpha > 0$ tel que, pour tout entier $n > 0$ on peut trouver des points x_n et x'_n de $[a,b]$ vérifiant $|x'_n - x_n| \leqslant \frac{1}{n}$, mais pourtant tels que $|f(x'_n) - f(x_n)| \geqslant \alpha$. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, de la suite (x_n) on peut extraire une suite partielle $k \mapsto x_{n_k}$ qui converge vers un $x \in [a,b]$; évidemment (x'_{n_k}) converge vers

le même x. Puisque f est continue, les suites $\{f(x_{n_k})\}$ et $\{f(x'_{n_k})\}$ convergent toutes deux vers $f(x)$, donc, pour k assez grand, on doit avoir $|f(x'_{n_k}) - f(x_{n_k})| < \alpha$, ce qui est contradictoire.

Exercice 10. La fonction $g(x) = \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $[0, +\infty[$.

IV. Fonction réciproque d'une fonction continue strictement monotone.

Si f est une application d'un ensemble E dans un ensemble F, on dit que f est injective si : $x \in E$, $x' \in E$, $x \neq x'$ impliquent $f(x) \neq f(x')$, on dit que f est surjective si, pour tout $y \in F$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. On dit que f est bijective (de E sur F) si elle est injective et surjective ; il revient au même de dire que, pour tout $y \in F$, il existe un $x \in E$ et un seul tel que $f(x) = y$. Cet x bien déterminé, notons-le alors $f^{-1}(y)$; on a ainsi défini une application f^{-1} bijective de F sur E, qu'on appelle l'application réciproque de f (ou la transformation "inverse" de la transformation f, si le contexte est géométrique).

Nous nous intéressons ici à des fonctions f définies sur un intervalle ; nous allons prendre sur f des hypothèses très particulières, afin de définir une fonction réciproque f^{-1} elle aussi sur un intervalle.

Théorème 5. Soient $a < b$ des nombres réels, et soit f une fonction, à valeurs réelles, définie, continue et strictement croissante sur $[a, b]$. Alors f est une application bijective de $[a, b]$ sur le segment $[f(a), f(b)]$. La fonction réciproque f^{-1} est strictement croissante et continue du segment $[f(a), f(b)]$ sur le segment $[a, b]$. Le graphe de f^{-1} en axes orthonormés est le symétrique de celui de f par rapport à la première bissectrice.

Démonstration. On a $M = \sup\limits_{a \le x \le b} f(x) = f(b)$ et $m = \inf\limits_{a \le x \le b} f(x) = f(a)$

D'après les théorèmes 2 et 3, l'image du segment $[a, b]$ par f est le segment $[f(a), f(b)]$. De plus f est injective, car, si $x_1 < x_2$, on a $f(x_1) < f(x_2)$ donc $f(x_1) \neq f(x_2)$. Il est clair que f^{-1} est strictement croissante ; son graphe se déduit de celui de f par la transformation $(x,y) \mapsto (y,x)$, qui est la symétrie par rapport à la première bissectrice.

Le seul point un peu délicat dans la démonstration est de prouver que f^{-1} est <u>continue</u> en tout point y_0 de $[f(a), f(b)]$. Faisons-le quand $f(a) < y_0 < f(b)$; pour $y_0 = f(a)$ ou $f(b)$ ce serait analogue. Posons $g = f^{-1}$, et $x_0 = g(y_0)$. On a : $a < x_0 < b$, et $f(x_0) = y_0$. Soit $\varepsilon > 0$. Nous cherchons un $\eta > 0$ tel que $|y - y_0| < \eta$ implique $|g(y) - x_0| < \varepsilon$. Soient α et β des nombres réels tels que :

$$a < \alpha < x_0 < \beta < b \quad \text{et} \quad x_0 - \alpha < \varepsilon \; ; \; \beta - x_0 < \varepsilon .$$

L'image par f du segment $[\alpha, \beta]$ est le segment $[f(\alpha), f(\beta)]$. On a : $f(a) < f(\alpha) < y_0 < f(\beta) < f(b)$. Prenons pour η le plus petit des deux nombres $y_0 - f(\alpha)$ et $f(\beta) - y_0$. Alors η est > 0, et, si $|y - y_0| < \eta$, on a : $f(\alpha) < y < f(\beta)$; donc, en appliquant à cette double inégalité la fonction strictement croissante $g = f^{-1}$, on a : $\alpha < g(y) < \beta$, et, par suite, $|g(y) - x_0| < \varepsilon$, cqfd.

<u>Extensions du théorème 5</u>. En changeant f en $-f$, on voit que toute fonction continue strictement décroissante a une fonction réciproque continue strictement décroissante. De plus on peut supposer f strictement monotone sur un intervalle non nécessairement fermé ou non nécessairement borné, et obtenir autant d'énoncés analogues au théorème 5. Par exemple :

Soit f une fonction continue strictement croissante, définie dans $]a, b[$. Supposons que $\lim_{x \to a, x > a} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to b, x < b} f(x) = +\infty$. Alors f admet une fonction continue strictement croissante, qui est une application bijective de $]-\infty, +\infty[$ sur $]a, b[$, et dont le graphe s'obtient par symétrie par rapport à la première bissectrice à partir de celui de f.

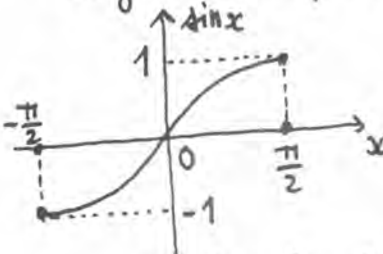
<u>Exemples</u>. Limitons l'ensemble de définition de $f(x) = x^2$ à $[0, +\infty[$.

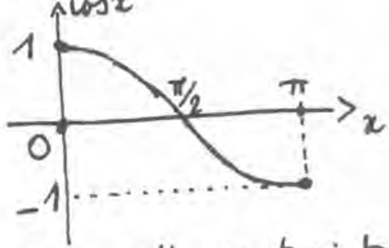
Sur cet intervalle f est continue et strictement croissante. Sa fonction réciproque, définie sur $[0,+\infty[$, est $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$. Plus généralement, les fonctions x^p et $\sqrt[p]{x}$, définies sur $[0,+\infty[$, sont, pour p entier >0 fixé, réciproques l'une de l'autre.

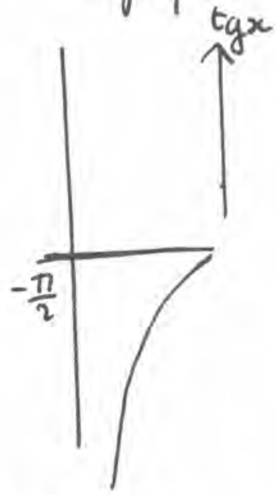
La fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x}$ sur $]0,+\infty[$ est sa propre fonction réciproque.

V. Fonctions réciproques des fonctions circulaires.

En suivant la définition des fonctions circulaires le long du cercle trigonométrique (Leçon n°4), on trace aisément les graphes suivants :







On s'est limité à des intervalles restreints de définition pour ces fonctions, afin qu'elles soient strictement monotones sur ces intervalles, et qu'on puisse donc en prendre les fonctions réciproques. Elles sont définies comme :

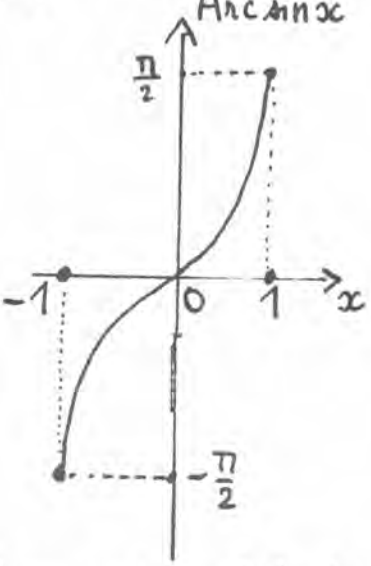
La fonction Arc sin x est définie pour $-1 \leq x \leq 1$ comme fonction réciproque de la fonction sinus, elle-même définie sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Autrement dit, pour tout $-1 \leq x \leq 1$, le nombre $y = \text{Arc}\sin x$ est l'unique nombre réel y tel que : $\sin y = x$ et $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$.

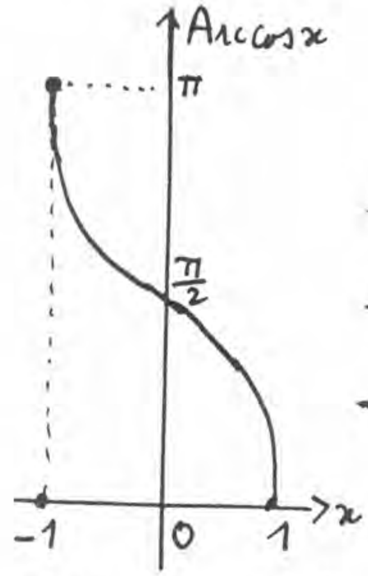
La fonction Arc cos x est définie pour $-1 \leq x \leq 1$ comme fonction réciproque de la fonction cosinus, elle-même définie sur $[0,\pi]$. Autrement dit, pour tout $-1 \leq x \leq 1$, le nombre $y = \text{Arc}\cos x$ est l'unique nombre réel y tel que : $\cos y = x$ et $0 \leq y \leq \pi$

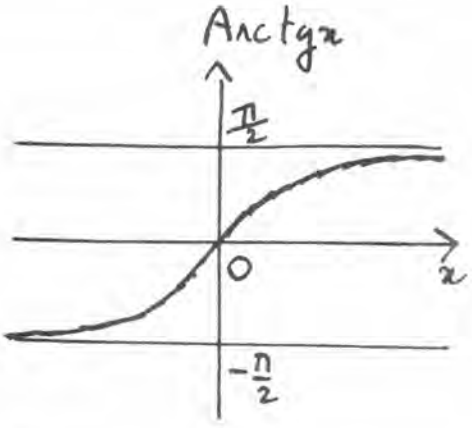
<u>Exercice 11</u>. Démontrez que : $\text{Arc}\sin x + \text{Arc}\cos x = \frac{\pi}{2}$.

La fonction Arc tg x est définie pour tout x réel comme fonction réciproque de la fonction tangente, elle-même définie sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Autrement dit, pour tout x réel, le nombre $y = \text{Arc}\,\text{tg}\, x$ est l'unique nombre réel y tel que : $\text{tg}\, y = x$ et $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$.

Par symétrie par rapport à la première bissectrice, on obtient les graphes suivants.







<u>Exercice</u> 12. Calculez $\text{Arcsin}\,\frac{1}{2}$, $\text{Arccos}\,\frac{1}{2}$, $\text{Arctg}\,1$.

<u>Exercice</u> 13. Soient x_1 et x_2 deux nombres réels tels que $x_1 x_2 \neq 1$. Trouvez une formule pour $\text{Arctg}\,\frac{x_1+x_2}{1-x_1x_2}$.

<u>Exercice</u> 14. Calculez $\cos(\text{Arctg}\,x)$ et $\sin(\text{Arctg}\,x)$.

<u>Exercice</u> 15. Calculez $\text{tg}\left(4\,\text{Arctg}\,\frac{1}{5}\right)$. Déduisez-en la formule:

$$\frac{\pi}{4} = 4\,\text{Arctg}\,\frac{1}{5} - \text{Arctg}\,\frac{1}{239}.$$

<u>Exercice</u> 16. Démontrez la formule:

$$\frac{\pi}{4} = 5\,\text{Arctg}\,\frac{1}{7} + 2\,\text{Arctg}\,\frac{3}{79}.$$

<u>Exercice</u> 17. Pour $x \geq 1$ et $y > 0$ démontrez la formule

$$\text{Arctg}\,\frac{1}{x} = \text{Arctg}\,\frac{1}{x+y} + \text{Arctg}\,\frac{y}{x^2+xy+1}.$$

VI. Indications sur les Exercices proposés dans cette Leçon.

<u>Exercice</u> 1. La première et la troisième limites n'existent pas; la deuxième vaut 1.

<u>Exercice</u> 2. La première limite n'existe pas; la seconde vaut 0.

Exercice 3. $g \circ f(x) = \cos(\sqrt{1-x^2})$, définie pour $|x| \leq 1$.
$f \circ g(x) = |\sin x|$, définie pour tout x réel.

Exercice 4. La suite est décroissante et minorée par 0. Elle a donc une limite ℓ. Puisque la fonction sinus est continue, $\ell = \sin(\ell)$, ce qui n'est possible que pour $\ell = 0$.

Exercice 5. Par récurrence sur n, on vérifie que $0 \leq v_n \leq 2$. Puis $v_{n+1} = \sqrt{2+v_n} \geq \sqrt{v_n+v_n} = \sqrt{2v_n} \geq \sqrt{v_n v_n} = v_n$, donc la suite (v_n) est croissante, et majorée par 2. Elle a une limite ℓ. Puisque la fonction $\sqrt{2+x}$ est continue pour $x > -2$, on a $\ell = \sqrt{2+\ell}$, donc $\ell^2 - \ell - 2 = 0$. La seule racine positive de cette équation est $\ell = 2$. Donc $\lim v_n = 2$.

Exercice 6. a) $f(x) = x$; b) $f(x) = \frac{1}{1-x}$; c) $f(x) = \frac{x}{x+1}$; d) $f(x) = x$; e) $f(x) = \frac{1}{1+x}$; f) $f(x) = 1-x$.

Exercice 7. Soit $P(x) = a_{2n+1}x^{2n+1} + a_{2n}x^{2n} + \dots + a_1 x + a_0$, avec n entier ≥ 0, et $a_{2n+1} \neq 0$. Par exemple $a_{2n+1} > 0$. Alors $\lim\limits_{x \to -\infty} P(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} P(x) = +\infty$. Donc il existe des valeurs a et b de x telles que $a < b$ et telles que : $P(a) < 0$ et $P(b) > 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\xi \in]a, b[$ tel que $P(\xi) = 0$.

Exercice 8. $f(x) = x$ si $0 \leq x < \frac{1}{2}$, et $= x - \frac{1}{2}$ si $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$.

Exercice 9. Si $f(x) = x^2$ était uniformément continue sur $\mathbb{R}$, pour $\varepsilon = 1$ il existerait $\eta > 0$ tel que $x \geq 0$, $y \geq 0$, $|x-y| \leq \eta$ impliqueraient $|x^2 - y^2| \leq 1$. Or c'est faux pour $x = \frac{1}{\eta}$, $y = \eta + \frac{1}{\eta}$.

Exercice 10. Pour $x \geq 1$ et $y \geq 1$, on a $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \frac{|x-y|}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \leq \frac{1}{2}|x-y|$ donc $\sqrt{x}$ est uniformément continue sur $[1, +\infty[$; elle l'est aussi sur $[0,1]$ d'après le théorème de Heine. Elle l'est donc sur $[0, +\infty[$.

Exercice 13. $\cos(\mathrm{Arctg}\, x) = 1/\sqrt{1+x^2}$ et $\sin(\mathrm{Arctg}\, x) = x/\sqrt{1+x^2}$.

Exercices 15, 16 et 17. Aux deuxièmes membres, on applique plusieurs fois la formule $\mathrm{tg}(a+b) = \frac{\mathrm{tg}\, a + \mathrm{tg}\, b}{1 - \mathrm{tg}\, a\, \mathrm{tg}\, b}$.

Dérivées

Bien entendu le lecteur connaît déjà les principales règles de calcul des dérivées de fonctions d'une variable réelle ; nous insisterons plutôt sur les aspects plus difficiles ou moins connus : dérivées d'une fonction composée, d'une fonction réciproque ; formule de Leibniz pour la dérivée n-ième d'un produit ; théorèmes de Rolle, des accroissements finis ; formule de Taylor ; dérivabilité des fonctions convexes. Cette leçon est une première introduction au Calcul Différentiel, qui sera développé tout au long du module AN02.

I. Définitions et premières propriétés

Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction définie dans I, à valeurs complexes. Soit a un point de I. Soit l un nombre complexe. Si

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x\in I,\, x\neq a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = l,$$

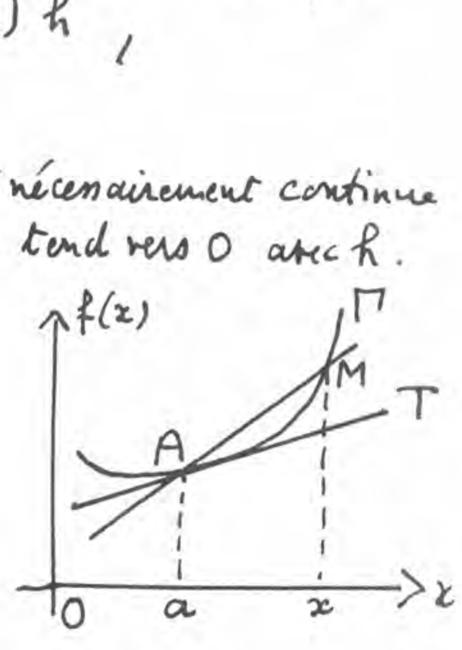
on dit que la fonction f est <u>dérivable au point a</u>, et que sa <u>dérivée au point a</u> vaut l. On pose alors : $l = f'(a)$.

Il revient au même (en posant $x = a+h$) de dire que, si, pour tout $h \neq 0$ tel que $a+h \in I$, on <u>définit</u> le nombre $\varepsilon(h)$ par

$$f(a+h) = f(a) + l h + \varepsilon(h)\, h ,$$

alors : $\lim\limits_{h\to 0,\, h\neq 0} \varepsilon(h) = 0$.

Si f est dérivable au point a, elle est déjà nécessairement continue au point a, car $f(a+h) - f(a) = lh + \varepsilon(h)h$ tend vers 0 avec h.



Pour que f réelle ait pour dérivée l au point a, il faut et il suffit que, sur le graphe Γ de f, la droite qui porte la corde AM, ait quand $M = (x, f(x))$ tend vers $A = (a, f(a))$ sur Γ, une position limite de pente l. Cette position limite s'appelle la

<u>tangente</u> à Γ au point A ; c'est la droite d'équation cartésienne :

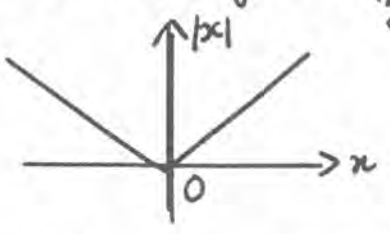
$$y - f(a) = f'(a)(x-a).$$

En axes orthonormés, on appelle <u>normale</u> à Γ au point A la droite perpendiculaire en A à la tangente en A à Γ ; son équation est :

$$f'(a)\,[y - f(a)] + x - a = 0.$$

On utilise parfois une extension de la définition. Soit $b > a$. Si f est définie dans $[a, b[$, on dit que f est <u>dérivable à droite</u> au point a si la limite $\lim\limits_{x \to a,\, x>a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x-a}$ existe (et est finie) ; on la note alors $f'_d(a)$. On définit de même la dérivée à gauche f'_g.

Par exemple la fonction $f(x) = |x|$ n'est pas dérivable au point $a = 0$, mais elle y admet une dérivée à droite (égale à $+1$), et une dérivée à gauche (égale à -1), ce qui munit son graphe de "demi-tangentes" à droite et à gauche au point 0.



Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$. Si f est définie et dérivable en tout point a de I, on dit que f est <u>dérivable dans I</u>. Quand x parcourt I, sa dérivée $f'(x)$ au point x devient elle-même une fonction de x définie dans I, qu'on appelle la (fonction) dérivée de f, et qu'on note f'.

Rappelons sans démonstrations les <u>règles de calcul</u> et <u>premiers exemples</u>, qui sont des conséquences faciles du calcul des limites. Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$. Soit $a \in I$. Soient f et g des fonctions définies dans I, à valeurs complexes, dérivables au point a. Soient λ, α, β des constantes complexes. Soit k un entier >0. Alors les dérivées qu'on va écrire existent, et on a les formules qui suivent.

1°) $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$; $(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$.

2°) $(fg)'(a) = f(a)g'(a) + f'(a)g(a)$;

3°) si $g(x)$ est partout non nul dans un intervalle ouvert contenant a,

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{g(a)f'(a) - f(a)g'(a)}{[g(a)]^2} ;$$

4°) si $f(x)$ est constante sur I, alors $f'(x)$ est $\equiv 0$ sur I ;

5°) si $f(x) \equiv x$ sur I, alors $f'(x) \equiv 1$ sur I ;

6°) $(\alpha x + \beta)' = \alpha$;

7°) $(x^k)' = k x^{k-1}$; et, si $x \neq 0$, $\left(\frac{1}{x^k}\right)' = \frac{-k}{x^{k+1}}$. Par conséquent, si $x \neq 0$, pour tout entier k positif, négatif ou nul, on a la formule :

$$(x^k)' = k x^{k-1} \quad ;$$

8) si $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ est une fonction polynômiale, à coefficients complexes, de degré ≥ 1, avec n entier ≥ 1 et $a_n \neq 0$, elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est le polynôme de degré $(d^\circ P) - 1$:

$$P'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \cdots + 2 a_2 x + a_1 \, ;$$

si
$$P(x) = A\,(x - x_1)^{k_1} (x - x_2)^{k_2} \cdots (x - x_p)^{k_p},$$

où $x_1, \ldots, x_p$ sont les racines complexes distinctes de P, et $k_1, \ldots, k_p$ leurs ordres de multiplicité, on a la formule :

$$P'(x) = P(x) \left[\frac{k_1}{x - x_1} + \frac{k_2}{x - x_2} + \cdots + \frac{k_p}{x - x_p} \right].$$

9) $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ pour $x > 0$.

10) $(\sin x)' = \cos x$; $(\cos x)' = -\sin x$; $(\mathrm{tg}\, x)' = 1 + \mathrm{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$, où, pour la dernière formule, on suppose que $x - \frac{\pi}{2}$ n'est pas un multiple entier de π ; on a aussi $(\mathrm{cotg}\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ pour $x \neq k\pi$, k entier.

<u>Exercice 1</u>. Pour $0 < x < \frac{\pi}{2}$, établir l'inégalité $\sin x < x < \mathrm{tg}\, x$. En déduire les formules du 10°).

<u>Exercice 2</u>. Si $f(x) = \cos x + i \sin x$, avec $i^2 = -1$, exprimer simplement $f'(x)$ à l'aide de $f(x)$.

<u>Exercice 3</u>. On pose $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$, et $f(0) = 0$. Montrez que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Que vaut $f'(0)$? La fonction $f'(x)$ est-elle continue pour $x = 0$?

<u>Exercice 4</u>. Les points du graphe de la fonction $\frac{\sin x}{x}$ où la tangente est parallèle à Ox ont pour abscisses les racines de l'équation $x = \mathrm{tg}\, x$.

II. Dérivation des fonctions composées, des fonctions réciproques

Proposition 1. Soient I et J deux intervalles ouverts de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction définie dans I, à valeurs réelles qui appartiennent à J, et soit g une fonction complexe définie dans J. Soit a un point de I ; posons $b = f(a)$. Supposons que f est dérivable au point a, et que g est dérivable au point b. Alors la fonction composée $g\circ f$ est dérivable au point a, et :

$$\boxed{(g\circ f)'(a) = g'(b)\, f'(a) = g'[f(a)]\, f'(a)} .$$

Corollaire. Supposons f dérivable dans I et g dérivable dans J. Alors $g\circ f$ est dérivable dans I, et $(g\circ f)' = (g'\circ f)\, f'$.

Démonstration. Posons $f'(a) = \ell$ et $g'(b) = m$. Par hypothèse, si on définit $\varepsilon(h)$ et $\varepsilon_1(k)$ par les formules :

$$f(a+h) = f(a) + \ell h + \varepsilon(h) h$$
$$g(b+k) = g(b) + mk + \varepsilon_1(k) k ,$$

on a $\lim\limits_{h\to 0, h\neq 0} \varepsilon(h) = 0$ et $\lim\limits_{k\to 0, k\neq 0} \varepsilon_1(k) = 0$. Or, en posant au passage :

$$k = \ell h + \varepsilon(h) h ,$$

on a :

$$(g\circ f)(a+h) = g[f(a+h)] = g[f(a) + \ell h + \varepsilon(h) h] = g(b+k) =$$
$$= g(b) + mk + \varepsilon_1(k) k = g(b) + m\ell h + m\varepsilon(h) h + \varepsilon_1(k) k =$$
$$= g\circ f(a) + m\ell h + h\, \varepsilon_2(h) ,$$

si l'on pose $\quad (1) \quad \varepsilon_2(h) = m\,\varepsilon(h) + \varepsilon_1(k)\dfrac{k}{h}$.

Il suffit de voir que $\lim\limits_{h\to 0, h\neq 0} \varepsilon_2(h) = 0$. Or dans (1) le terme $m\,\varepsilon(h)$ tend vers 0, et le second terme $\varepsilon_1(k)\dfrac{k}{h}$ aussi, car, quand $h\neq 0$ tend vers 0, $k = \ell h + \varepsilon(h) h$ tend vers 0, donc aussi $\varepsilon_1(k)$, et $\dfrac{k}{h} = \ell + \varepsilon(h)$ reste borné.

Exemple : Soit f dérivable jamais nulle sur I, et k un entier. Alors $(f^k)' = k f^{k-1} f'$. En particulier $\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$.

Proposition 2. Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction continue strictement monotone dans I. Soit J l'intervalle image de I par f. Soit $\overset{-1}{f}$ la fonction réciproque de f, définie dans J (cf. la Leçon n°5). Soit a un point de I. Supposons que f soit dérivable au point a, et que $f'(a) \neq 0$. Alors la fonction $\overset{-1}{f}$ est dérivable au point $b = f(a)$, et :

$$(\overset{-1}{f})'(b) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Corollaire. Si f a une dérivée partout non nulle dans I, alors $\overset{-1}{f}$ est dérivable dans J, et $(\overset{-1}{f})' = \frac{1}{f' \circ \overset{-1}{f}}$.

Démonstration. Posons $g = \overset{-1}{f}$. Si $y = f(x)$ et $b = f(a)$, on a $g(y) = x$ et $g(b) = a$. Si y est $\neq b$, alors x est $\neq a$, vu la stricte monotonie ; les quotients qu'on va écrire ont donc un sens :

$$\frac{g(y) - g(b)}{y - b} = \frac{x - a}{f(x) - f(a)} = \frac{1}{\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}}.$$

Quand $y \neq b$ tend vers b, alors $x = g(y)$ tend vers $a = g(b)$, car la fonction g est continue au point b (Leçon n°5). Le dernier membre tend alors vers $\frac{1}{f'(a)}$, cqfd.

Exemples (dérivées des fonctions réciproques des fonctions circulaires)

1) Prenons $I =]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$; $J =]-1, +1[$; et $f = \sin$, donc $\overset{-1}{f} = \operatorname{Arcsin}$. On a $f' = \cos$, donc $(\overset{-1}{f})'(x) = \frac{1}{\cos(\operatorname{Arcsin} x)} =$
$= +\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, avec le signe + car $|\operatorname{Arcsin} x| < \frac{\pi}{2}$. Donc

$$\boxed{(\operatorname{Arcsin} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

pour $-1 < x < 1$.

2°) Puisque $\operatorname{Arc}\cos x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arc}\sin x$ (cf Leçon n° 5, Ex 11), on a
$$(\operatorname{Arc}\cos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
pour $-1 < x < 1$.

3°) Prenons $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $f = \operatorname{tg}$, donc $J = \mathbb{R}$ et $\overset{-1}{f} = \operatorname{Arctg}$. On a $f' = 1 + \operatorname{tg}^2$, donc $(\overset{-1}{f})'(x) = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{Arctg} x)} = \frac{1}{1+x^2}$. Ainsi, pour tout x réel,
$$\boxed{(\operatorname{Arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}}$$

<u>Exercice</u> 5. Soit $a < b$. Pour $a < x < b$, dérivez $2\operatorname{Arctg}\sqrt{\frac{b-x}{x-a}}$.

III. <u>Dérivées d'ordre supérieur</u>

Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction dérivable dans I. Soit $a \in I$. Si la dérivée f' de f admet une dérivée au point a, on l'appelle <u>dérivée seconde</u> de f au point a, et on la note $f''(a)$. Si f'' existe en tout point de I, et si la fonction f'' a une dérivée au point a, on l'appelle dérivée troisième de f au point a, et on la note $f'''(a)$ ou $f^{(3)}(a)$. Et ainsi de suite : supposons que, de proche en proche, on ait pu calculer, par dérivations successives, la dérivée $f^{(k-1)}(x)$ d'ordre $k-1$, où k est entier ≥ 2, en tout point x de I. Si la fonction $f^{(k-1)}$ est dérivable au point a, on pose :
$$f^{(k)}(a) = \left[f^{(k-1)}\right]'(a) ,$$
qu'on appelle <u>dérivée k-ième</u> (ou d'ordre k) de f au point a.
On convient que $f^{(0)} = f$.

On vérifie facilement que, quels que soient les entiers p et $q \geq 0$,
$$f^{(p+q)} = (f^{(p)})^{(q)} = (f^{(q)})^{(p)} ;$$
que $(f+g)^{(k)} = f^{(k)} + g^{(k)}$; $(\lambda f)^{(k)} = \lambda f^{(k)}$;
que, pour tout entier n, et pour tout nombre complexe α, on a : pour $x \neq \alpha$, $[(x-\alpha)^n]^{(k)} = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)(x-\alpha)^{n-k}$.

Exercice 6. Calculez la dérivée k-ième de $\frac{1}{1-x^2}$ pour $x \neq \pm 1$.

Cherchons maintenant une formule pour la dérivée n-ième d'un produit. En appliquant plusieurs fois la formule $(fg)' = f'g + fg'$, on obtient :

$$(fg)'' = f''g + 2f'g' + fg''$$

$$(fg)''' = f'''g + 3f''g' + 3f'g'' + fg''',$$

ce qui rend plausible la

Proposition 3. Soient f et g deux fonctions n fois dérivables sur I. Soit n un entier ≥ 1. Alors la fonction fg est n fois dérivable sur I, et on a la formule (dite de Leibniz) :

$$(fg)^{(n)} = f^{(n)}g + C_n^1 f^{(n-1)}g' + \cdots + C_n^k f^{(n-k)}g^{(k)} + \cdots + C_n^{n-1} f g^{(n-1)} + f g^{(n)},$$

où $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ est le nombre de combinaisons de n objets k à k, donc où les C_n^k sont les coefficients du binôme de Newton, qui s'obtiennent de proche en proche par la formule du triangle de Pascal :

$$(2) \qquad C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}.$$

Démonstration. Par récurrence, supposons la formule vraie pour n. En la dérivant, on obtient :

$$\begin{aligned}(fg)^{(n+1)} = {} & f^{(n+1)}g + f^{(n)}g' + \\ & + C_n^1 f^{(n)}g' + C_n^1 f^{(n-1)}g'' + \\ & + C_n^2 f^{(n-1)}g'' + C_n^2 f^{(n-2)}g''' + \cdots \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots + \\ & + C_n^{p-1} f^{(n-k+2)}g^{(k-1)} + C_n^{k-1} f^{(n-k+1)}g^{(k)} + \\ & + C_n^k f^{(n-k+1)}g^{(k)} + C_n^k f^{(n-k)}g^{(k+1)} + \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots + \\ & + C_n^{n-1} f''g^{(n-1)} + C_n^{n-1} f'g^{(n)} \\ & + f g^{(n+1)}.\end{aligned}$$

En rassemblant les termes écrits l'un en dessous de l'autre, et en appliquant (2), on obtient la formule annoncée pour $n+1$.

Application. Posons $y = \operatorname{Arctg} x$, donc $y' = \frac{1}{1+x^2}$ et $y'' = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$.

On a l'identité : $(1+x^2)y'' + 2xy' = 0$.

Dérivons $(n-2)$ fois cette identité en appliquant la formule de Leibniz, et en remarquant que les dérivées d'ordre ≥ 3 de $1+x^2$, et d'ordre ≥ 2 de $2x$ sont identiquement nulles :

$$(1+x^2)y^{(n)} + C_{n-2}^1 2x\, y^{(n-1)} + C_{n-2}^2 2\, y^{(n-2)} + 2x\, y^{(n-1)} + C_{n-2}^1 2\, y^{(n-2)} = 0,$$

d'où, pour n entier ≥ 2, la relation de récurrence :

$$(1+x^2)\, y^{(n)} + 2(n-1)x\, y^{(n-1)} + (n-2)(n-1)\, y^{(n-2)} = 0.$$

On en déduit en particulier que la suite $a_n = \dfrac{y^{(n)}(0)}{n!}$ obéit à la relation de récurrence $n a_n = -(n-2)a_{n-2}$. Compte tenu de $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$, on en tire, pour tout entier $p \geq 0$, que :

$$a_{2p} = 0, \quad \text{et} \quad a_{2p+1} = (-1)^p \frac{1}{2p+1}.$$

Exercice 7. Pour $-1 < x < 1$, on pose $y = \operatorname{Arcsin} x$. Montrez que $(1-x^2)y'' = xy'$; que $(1-x^2)y^{(n)} - (2n-3)xy^{(n-1)} = (n-2)^2 y^{(n-2)}$; et que si $a_n = \dfrac{y^{(n)}(0)}{n!}$, on a : $a_{2p} = 0$ et $a_{2p+1} = \dfrac{1.3.5\ldots(2p-1)}{2.4.6\ldots(2p)} \dfrac{1}{2p+1}$.

IV. Théorème de Rolle. Formule des accroissements finis.

Définition. Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction définie sur I, à valeurs réelles. Soit a un point de I.

On dit que f présente un maximum au point a, s'il existe un nombre $r > 0$ tel que : $x \in I$, $|x-a| < r$ impliquent $f(x) \leq f(a)$.

On dit que f présente un minimum au point a, s'il existe un nombre $r > 0$ tel que : $x \in I$, $|x-a| < r$ impliquent $f(x) \geq f(a)$.

Il s'agit donc de maxima ou minima "relatifs", par rapport à ce qui se passe "au voisinage" de a, et non pas d'un maximum ou minimum "absolu" valable sur I tout entier.

La recherche des maxima et minima sera traitée en détail au module AN02. Pour l'instant nous énonçons seulement la

<u>Proposition 4</u>. Soit I un intervalle <u>ouvert</u> de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction à valeurs réelles, définie dans I. Soit a un point de I. On suppose que :

1°) f présente au point a un maximum (ou un minimum) ;

2°) f est dérivable au point a.

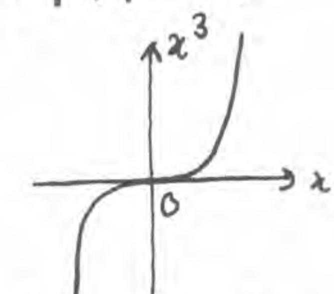
Alors $f'(a) = 0$.

<u>Démonstration</u>. Par exemple supposons qu'il s'agisse d'un maximum. Il existe $r > 0$ tel que, pour $x \in I$ et $|x - a| < r$, on ait :

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geqslant 0 \text{ si } x < a \quad , \text{ et } \quad \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leqslant 0 \text{ si } x > a .$$

Le premier quotient tend vers $f'(a)$ quand $x < a$ tend vers a ; donc $f'(a) \geqslant 0$. Le second quotient tend vers $f'(a)$ quand $x > a$ tend vers a ; donc $f'(a) \leqslant 0$. Par conséquent $f'(a) = 0$.

<u>Remarque</u>. La réciproque de la Proposition 4 est fausse. Si $f(x) = x^3$, on a $f'(0) = 0$, mais f ne présente ni maximum ni minimum à l'origine.



<u>Proposition 5</u> (Théorème de Rolle) Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$. Soit f une fonction à valeurs réelles, définie et continue dans $[a, b]$, et dérivable dans $]a, b[$. Supposons que $f(a) = f(b) = 0$. Alors il existe au moins un nombre ξ dans l'intervalle ouvert $]a, b[$ tel que $f'(\xi) = 0$. (*)

<u>Démonstration</u>. Si $f(x) \equiv 0$ sur I, n'importe quel ξ fait l'affaire. Supposons maintenant $f \not\equiv 0$; supposons donc (par exemple) qu'il existe

---

(*) Si de nuit vous vous rendez en voiture de Grenoble à Turin, en un point au moins du trajet le pinceau lumineux des phares sera horizontal.

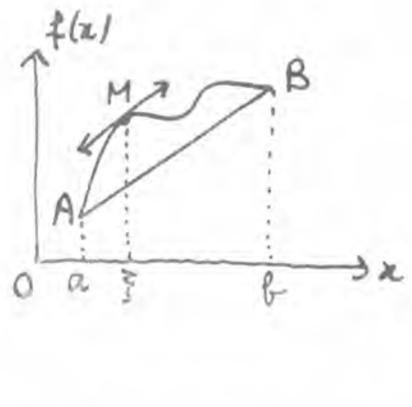
des $x \in]a,b[$ tels que $f(x) > 0$. Soit $M = \sup_{a \le x \le b} f(x)$. On a $M > 0$. D'après le théorème 2 de la Leçon n°5, la borne M est atteinte : il existe $\xi \in [a,b]$ tel que $f(\xi) = M$; plus précisément $\xi \in]a,b[$, car $M > 0$ et $f(a) = f(b) = 0$. Il est clair que f présente un maximum au point ξ. Donc $f'(\xi) = 0$, d'après la Proposition 4.

Remarque. L'énoncé de la Proposition 5 a un sens si f est à valeurs complexes, mais la Proposition n'est pas valable sous ces hypothèses plus générales. Par exemple $f(x) = \cos x + i \sin x - 1$, avec $a = 0$, $b = 2\pi$, vérifie les hypothèses de la proposition 5, mais $f'(x) = -\sin x + i \cos x$, donc $|f'(x)| = 1$; par conséquent f' n'est jamais nulle.

Théorème 1 (formule des accroissements finis). Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$. Soit f une fonction à valeurs réelles, définie et continue dans $[a,b]$, et dérivable dans $]a,b[$. Alors il existe un nombre ξ dans l'intervalle ouvert $]a,b[$ tel que :

$$f(b) - f(a) = (b-a) f'(\xi).$$

Interprétation géométrique : si Γ est le graphe de f, d'extrémités A et B, il existe au moins un point M de Γ, distinct de A et B, où la tangente à Γ soit parallèle à la corde AB.



Pour démontrer le Théorème 1, il suffit d'appliquer le théorème de Rolle à la fonction

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a).$$

Corollaire 1. Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, et soit f une fonction définie dans I, à valeurs complexes. Les deux assertions suivantes sont équivalentes : i) f est constante sur I ; ii) f est dérivable dans I et sa dérivée est identiquement nulle dans I.

Démonstration. Il est clair que i) entraîne ii). Pour démontrer que ii) entraîne i), en considérant les parties réelle et imaginaire de f, on se ramène au cas où f est réelle. Si x_1 et x_2 sont deux points de I, d'après le théorème 1, $f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(\xi) = 0$, donc $f(x_1) = f(x_2)$

<u>Définition</u>. Soit f une fonction définie dans un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, à valeurs complexes. On appelle <u>primitive</u> de f dans I toute fonction F définie et dérivable dans I telle que $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$.

<u>Corollaire</u> 2. Si F_1 et F_2 sont deux primitives de f dans I, alors il existe une constante C telle que $F_1(x) = F_2(x) + C$ pour tout $x \in I$.

<u>Corollaire</u> 3. Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$. Soit f une fonction à valeurs réelles, définie et continue dans $[a,b]$, et dérivable dans $]a,b[$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes : i) la fonction f est croissante dans $[a,b]$; ii) $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in]a,b[$.

<u>Démonstration</u>. Soit $x_0 \in]a,b[$. Si f est croissante, on a l'inégalité

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

pour tout $x \in [a,b]$, $x \neq x_0$. En passant à la $\lim_{x \to x_0, x \neq x_0}$, on obtient que $f'(x_0) \geq 0$. Réciproquement, supposons ii) et soient $x_1 < x_2$ dans $[a,b]$. D'après le théorème 1, il existe $\xi \in]x_1, x_2[$, donc $\xi \in]a,b[$ tel que :

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(\xi) \geq 0 .$$

Ainsi $f(x_2) \geq f(x_1)$, ce qui prouve i).

Critère analogue ($f'(x) \leq 0$) pour les fonctions f décroissantes.

La même fin de démonstration (avec $>$ au lieu de $\geq$) prouve que, si $f'(x)$ est > 0 pour tout $x \in]a,b[$, alors f est strictement croissante dans $[a,b]$. Mais cette fois la réciproque n'est pas vraie : la fonction $f(x) = x^3$ est strictement croissante, alors que $f'(0) = 0$.

<u>Exercice</u> 8. On pose $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ si $x \neq 0$, et $f(0) = 1$. Déterminez le plus grand nombre b tel que f soit strictement décroissante sur $[0, b]$.

<u>Exercice</u> 9. Soient α et β deux nombres réels tels que $\beta - \alpha$ ne soit pas un multiple entier de π. Montrez que, dans les intervalles ouverts où elle est définie, la fonction $\frac{\sin(x+\alpha)}{\sin(x+\beta)}$ ne présente ni maximum ni minimum.

V. Formule de Taylor

Préambule. Soit a un nombre réel. Tout polynôme de degré n peut s'écrire
$$P(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n,$$
et les règles élémentaires de dérivation montrent que, pour tout entier $0 \leq p \leq n$, on a la formule $P^{(p)}(a) = p!\,c_p$. Ainsi, pour tout polynôme P de degré n, on a une formule exacte :
$$P(x) = P(a) + \frac{P'(a)}{1!}(x-a) + \frac{P''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$
à l'aide des valeurs de ses dérivées successives jusqu'à l'ordre n au point a. Si maintenant f est une fonction non polynômiale, mais suffisamment dérivable, on peut former le polynôme :
$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$
qui ne donnera plus la valeur exacte de $f(x)$; nous allons voir pourtant qu'on peut estimer la différence entre $f(x)$ et ce polynôme.

Théorème 2 (formule de Taylor). Soient a et b deux nombres réels tels que $a<b$. Soit f une fonction à valeurs réelles, définie et continue sur $[a,b]$. Soit n un entier ≥ 0. On suppose que :

1°) pour tout entier p tel que $0 \leq p \leq n$, la fonction f admet une dérivée p-ième $f^{(p)}$ continue dans $[a,b]$ (Nota bene : on convient que les $f^{(p)}(a)$ sont des dérivées à droite, les $f^{(p)}(b)$ à gauche) ;

2°) f admet dans $]a,b[$ une dérivée d'ordre $p+1$.

Alors il existe au moins un nombre ξ dans $]a,b[$ tel que :
$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \cdots + \frac{f^{(p)}(a)}{p!}(b-a)^p + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + R_n,$$
où
$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

Remarque. Pour $n=0$, on retrouve la formule des accroissements finis.

Démonstration de la formule de Taylor. Posons, pour $a \leq x \leq b$,

$$\varphi(x) = f(b) - f(x) - (b-x) f'(x) - \dots - \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n)}(x)$$

puis

$$g(x) = \varphi(x) - \left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{n+1} \varphi(a) \quad .$$

La fonction g est continue sur $[a,b]$, et $g(a) = g(b) = 0$. De plus, pour tout $x \in]a,b[$ existe la dérivée $g'(x)$, qu'un calcul élémentaire montre être égale à :

$$g'(x) = \frac{(n+1)(b-x)^n}{(b-a)^{n+1}} \left[\varphi(a) - \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x) \right] .$$

Appliquons à g le théorème de Rolle : il existe $\xi \in]a,b[$ tel que $g'(\xi) = 0$, donc tel que $R_n = \varphi(a) = \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$.

Application aux fonctions sinus et cosinus.

Si $f(x) = \sin x$, on a $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f'''(x) = -\cos x$, $f^{(IV)}(x) = \sin x$, etc.. Donc, pour tout entier $p \geq 0$,

$$f^{(2p)}(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad f^{(2p+1)}(0) = (-1)^p .$$

En faisant $a = 0$ et $b = x$ dans la formule de Taylor, on voit que : pour tout x réel, il existe un nombre réel ξ compris entre 0 et x, tel que :

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + (-1)^{p+1} \cos\xi \, \frac{x^{2p+3}}{(2p+3)!}$$

Si x est fixé, on sait (cf la Leçon n° 2) que $\lim_{p \to +\infty} \frac{|x|^{2p+3}}{(2p+3)!} = 0$. De plus $|(-1)^{p+1} \cos\xi| \leq 1$. On en déduit la :

Proposition 6. Soit x un nombre réel fixé. Alors :

$$\sin x = \lim_{p \to +\infty} \left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} \right),$$

et l'erreur commise en remplaçant $\sin x$ par la parenthèse est inférieure à $\frac{|x|^{2p+3}}{(2p+3)!}$.

De même :

$$\cos x = \lim_{p \to +\infty} \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} \right),$$

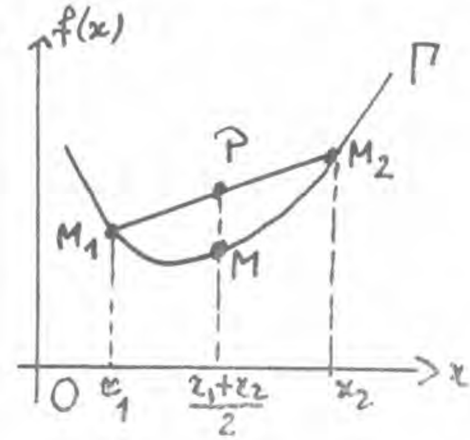
et l'erreur commise en remplaçant $\cos x$ par la parenthèse est inférieure à $\dfrac{|x|^{2p+2}}{(2p+2)!}$.

<u>Exercice</u> 10. Soit $f(x) = x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120}$. En calculant $f\left(\dfrac{3\pi}{10}\right)$, combien de décimales exactes de $\sin \dfrac{3\pi}{10}$ obtient-on ? Comment améliorer ce score ?

<u>Exercice</u> 11. En faisant $a = 0$ et $b = x$, écrire la formule de Taylor pour la fonction $\operatorname{Arctg} x$; pour la fonction $\operatorname{Arcsin} x$.

VI. Fonctions convexes

La convexité est un puissant outil pour obtenir des inégalités non évidentes. A la prochaine leçon, où nous étudierons les fonctions exponentielles $x \mapsto a^x$, nous verrons que la convexité de ces fonctions est au coeur de leur théorie.



<u>Définitions</u>. Soit I un intervalle, et f une fonction définie dans $\underline{I}$, à valeurs réelles. On dit que la fonction f est <u>convexe</u> dans I si elle est continue dans I et si, quels que soient $x_1 < x_2$ dans I, on a l'inégalité :

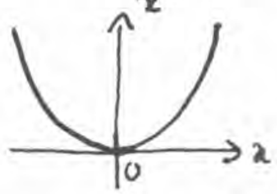
i) $\qquad f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right) \leqslant \dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$.

Si ces inégalités sont strictes ($<$), on dit que f est <u>strictement</u> convexe dans I.

On dit que f est (strictement) concave dans I si $(-f)$ est (strictement) convexe, ce qui revient à remplacer $\leqslant$ par $\geqslant$ ($<$ par $>$) dans la définition.

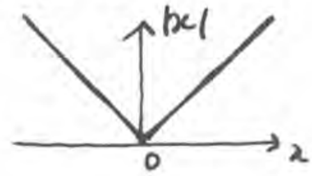
Soit Γ le graphe de f. Géométriquement, dire que f continue est (strictement) convexe, c'est dire que, quels que soient les points distincts M_1 et M_2 sur Γ, le milieu P de la corde M_1M_2 est (strictement) <u>au-dessus</u> du point M de Γ qui a même abscisse que P.

<u>Exemples</u> 1) $f(x) = x^2$ est strictement convexe sur $\mathbb{R}$ car, si $x_1 \neq x_2$,



$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 - \frac{x_1^2+x_2^2}{2} = -\frac{1}{4}(x_1-x_2)^2 < 0 .$$

2) $f(x) = |x|$ est convexe sur $\mathbb{R}$, mais non strictement convexe.



<u>Exercice</u> 12. La fonction $\frac{1}{x}$ est strictement convexe pour $x > 0$. La fonction $\sqrt{x}$ est strictement concave pour $x \geq 0$.

<u>Proposition</u> 6. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soit f une fonction continue sur I, à valeurs réelles, et soit Γ son graphe. Les trois assertions suivantes sont équivalentes :

i) f est convexe ;

ii) quels que soient $x_1 < x_2$ dans I, pour tout nombre réel λ tel que $0 < \lambda < 1$, on a l'inégalité :

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) ;$$

iii) quels que soient les points distincts M_1 et M_2 sur Γ, l'arc M_1M_2 de Γ est au-dessous de la corde M_1M_2.

<u>Démonstration</u> (esquisse). iii) n'est qu'une autre formulation (géométrique) de ii), sachant que les points du segment de droite M_1M_2 sont les points de coordonnées :

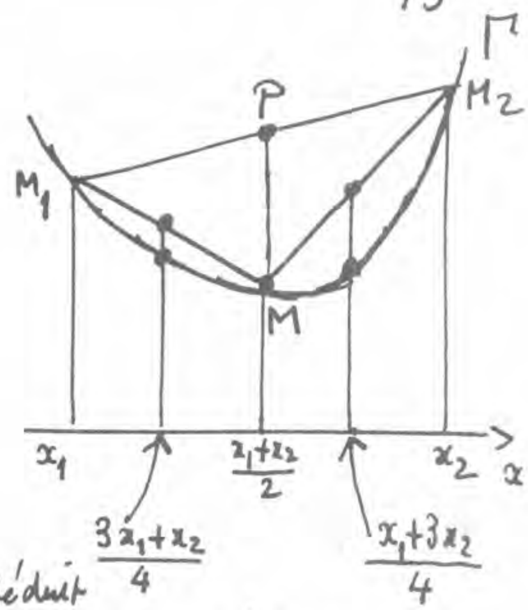
$$x_\lambda = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \quad , \quad y_\lambda = \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

quand le paramètre réel λ varie de 0 à 1.

i) est le cas particulier de ii) quand on fait $\lambda = 1/2$.

Reste à voir que la propriété i) implique la propriété en apparence beaucoup plus forte ii). Soit M le point d'abscisse $\frac{x_1+x_2}{2}$ situé sur Γ. En appliquant i) aux cordes M_1M et MM_2, on voit que :

$$\begin{cases} f\left(\frac{3x_1+x_2}{4}\right) \leq \frac{3}{4} f(x_1) + \frac{1}{4} f(x_2) \\ f\left(\frac{x_1+3x_2}{4}\right) \leq \frac{1}{4} f(x_1) + \frac{3}{4} f(x_2) \end{cases} ;$$



ainsi ii) est-il prouvé pour $\lambda = \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}$. En coupant à nouveau en deux chacun des quatres segments obtenus et en leur appliquant i), on voit que ii) vaut pour $\lambda = \frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \frac{3}{8}, \frac{4}{8}, \frac{5}{8}, \frac{6}{8}, \frac{7}{8}$. Et ainsi de suite : par décomposition dyadique on déduit de proche en proche de i) que l'inégalité ii) vaut chaque fois que λ est un <u>nombre dyadique</u> $\frac{p}{2^n}$, où n est entier ≥ 1 et p entier tel que $0 < p < 2^n$. Mais, de même que tout nombre réel est limite d'une suite de nombres décimaux (Leçon n° 3), tout nombre réel $0 < \lambda < 1$ est limite d'une suite (λ_k) de nombres dyadiques. Sachant maintenant que, pour tout k, on a l'inégalité :

$$f(\lambda_k x_1 + (1-\lambda_k) x_2) \leq \lambda_k f(x_1) + (1-\lambda_k) f(x_2),$$

grâce à la continuité de f, on en déduit, quand $k \to +\infty$, que :

$$f(\lambda x + (1-\lambda) x) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(x).$$

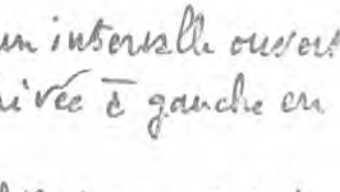
<u>Remarque</u>. A la prochaine leçon, on verra que ii) est un approfondissement considérable de i) [inégalités de Hölder, de Minkowski].

Il est facile de voir que f est strictement convexe si et seulement si on a $<$ dans les inégalités ii).

<u>Proposition 7</u>. Soit f une fonction convexe dans un intervalle ouvert I. Alors f admet une dérivée à droite et une dérivée à gauche en tout point a de I.

<u>Démonstration</u>. Soit $A = (a, f(a))$, et $B = (b, f(b))$ un point de Γ à gauche de A. Si $M = (x, f(x))$, d'après iii), la pente

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$



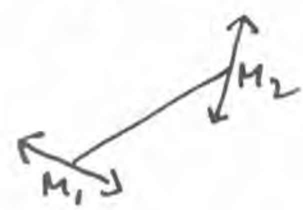
de la corde AM est une fonction décroissante de x

pour $x \in I$, $x > a$, et elle est minorée par la pente de la corde BA. D'après le Théorème 1 de la Leçon n°5, cette pente a une limite quand $x \to a$, $x > a$; autrement dit $f'_d(a)$ existe. On raisonne de même pour la dérivée à gauche.

Proposition 8. Soit f une fonction réelle et dérivable dans un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$. Pour que f soit convexe dans I, il faut et il suffit que sa dérivée f' soit croissante dans I.

Démonstration. Dans la démonstration de la Proposition 7, on aurait pu préciser que $f'_d(a)$ est la borne inférieure des pentes des cordes AM pour M à droite de A, et $f'_g(a)$ la borne supérieure des pentes des cordes MA pour M à gauche de A. Ici on suppose que $f'_d(a)=f'_g(a)$ pour tout a.

Supposons f convexe, et soit M_1 à gauche de M_2 sur le graphe Γ de f ; ce qu'on vient de dire prouve que la pente de la tangente en M_1 à Γ est plus petite que la pente de la corde M_1M_2, qui est elle même plus petite que la pente de la tangente en M_2 à Γ. Ainsi, si $x_1<x_2$, on a $f'(x_1)\leq f'(x_2)$, et la fonction f' est croissante sur I.



Réciproquement, supposons f' croissante. On va prouver iii). Soient $x_1<x_2$ dans I, et M_1, M_2 les points de Γ d'abscisses x_1, x_2. La corde M_1M_2 a pour équation cartésienne

$$y = f(x_1) + \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1),$$

et nous cherchons à prouver qu'elle est au-dessus de l'arc M_1M_2 de Γ, c'est-à-dire nous voulons montrer que la fonction

$$g(x) = f(x)-y = f(x)-f(x_1)-\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

est ≤ 0 pour tout $x \in]x_1,x_2[$. Or $g(x_1)=g(x_2)=0$, donc, d'après le théorème de Rolle, il existe $\xi \in]x_1,x_2[$ tel que $g'(\xi)=0$. Mais $g'(x) = f'(x) - \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(x) -$ constante ; donc g', comme f', est croissante. Pour montrer que $g(x)$ est ≤ 0, nous distinguerons deux cas : 1°) si $x_1 < x \leq \xi$, on a $g'(x) \leq g'(\xi) = 0$, donc g est décroissante dans $[x_1, \xi]$; par conséquent $g(x) \leq g(x_1) = 0$;

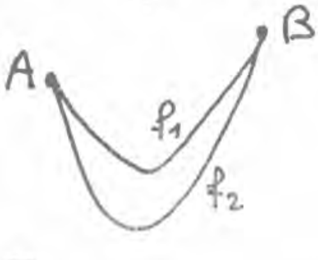
2°) si $\xi \leq x < x_2$, on a $g'(x) \geq g'(\xi) = 0$, donc g est croissante dans $[\xi, x_2]$; par conséquent $g(x) \leq g(x_2) = 0$.

Corollaire. Soit f une fonction réelle dans un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$. Supposons que f a une dérivée seconde f'' dans I. Pour que f soit convexe dans I, il faut et il suffit que la fonction $f''(x)$ soit partout ≥ 0 dans I.

Remarque. Supposons que f dérivable soit telle que f' soit strictement croissante dans I ; alors f est strictement convexe. Si f'' existe et si $f''(x) > 0$ pour tout $x \in I$, alors f est strictement convexe.

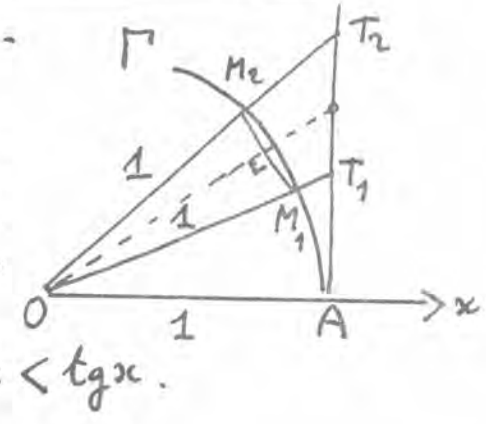
Exercice 13. Montrez que la fonction $\sin x$ est strictement concave pour $0 \leq x \leq \pi$. En déduire que, pour $0 < x < \frac{\pi}{2}$, on a la double inégalité : $\frac{2}{\pi} x < \sin x < x$.

Exercice 14 (tiré des oeuvres d'Archimède, III-ième siècle avant J.C.) Si f est une fonction convexe sur $[a, b]$, on appelle "longueur" du graphe Γ de f la borne supérieure des longueurs des lignes polygonales inscrites dans Γ. Soient f_1 et f_2 deux fonctions convexes sur $[a, b]$, telles que $f_1(a) = f_2(a)$ et $f_1(b) = f_2(b)$, et Γ_1 et Γ_2 leurs graphes. On suppose que Γ_2 est au-dessous de Γ_1. Alors montrez que la longueur de Γ_2 est plus grande que celle de Γ_1.



VII. Indications sur les Exercices proposés dans cette Leçon

Exercice 1. Γ étant le cercle trigonométrique, des considérations élémentaires de parallélisme et d'inégalités triangulaires montrent que $M_1M_2 < T_1T_2$. En considérant la longueur de l'arc comme limite des longueurs des lignes polygonales inscrites, il en résulte que, pour $0 < x < \frac{\pi}{2}$, on a : $x < \operatorname{tg} x$.



Divisant par $\sin x$ la double inégalité $\sin x < x < \operatorname{tg} x$, il vient $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$ qui tend vers 1 quand $x>0$ tend vers 0 ; d'où $\lim_{x\to 0, x\neq 0} \frac{\sin x}{x} = 1$; la fonction sinus a pour dérivée 1 à l'origine. Puis $\left|\frac{\sin x - \sin a}{x-a}\right| = \left|\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}\cos\frac{x+a}{2}\right|$ tend vers $\cos a$, quand $x\neq a$ tend vers a. Donc $(\sin x)' = \cos x$, etc...

Exercice 2. $f'(x) = i f(x)$.

Exercice 3. $f'(0) = \lim_{x\to 0, x\neq 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0, x\neq 0} x \sin\frac{1}{x} = 0$. Si $x\neq 0$, on a $f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$, qui n'a pas de limite quand $x\neq 0$ tend vers 0. Donc la fonction f' n'est pas continue à l'origine.

Exercice 4. On convient que $f(0)=1$. On a $f'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$ si $x\neq 0$, et $f'(0)=0$. Les x cherchés sont les racines de $f'(x)=0$, donc de $x = \operatorname{tg} x$.

Exercice 5. Cette dérivée vaut $-[(x-a)(b-x)]^{-1/2}$

Exercice 6. $\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right)$, donc $\left(\frac{1}{1-x^2}\right)^{(k)} = \frac{k!}{2}\left[(1-x)^{-k-1} + (-1)^k (1+x)^{-k-1}\right]$.

Exercice 8. D'après l'Exercice 4, c'est le plus petit nombre $b>0$ tel que $b = \operatorname{tg} b$.

Exercice 9. $f'(x) = \frac{\sin(x+\beta)\cos(x+\alpha) - \cos(x+\beta)\sin(x+\alpha)}{\sin^2(x+\beta)} = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin^2(x+\beta)} \neq 0$.

Exercice 10. Alors que $\sin\frac{3\pi}{10} = 0{,}809016944\ldots$, on a $f\left(\frac{3\pi}{10}\right) = 0{,}\underline{809}146450\ldots$ En poussant plus loin le développement, on obtient :

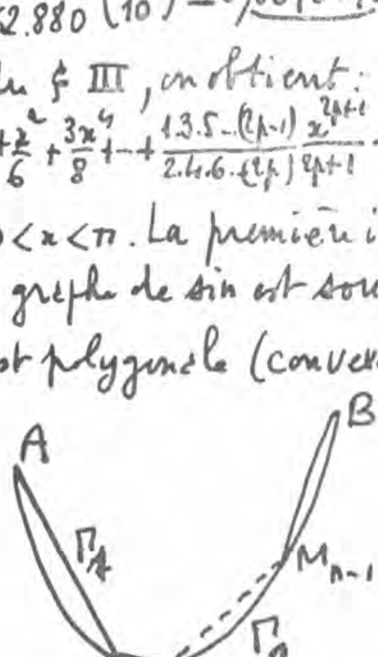
$$f\left(\frac{3\pi}{10}\right) - \frac{1}{5040}\left(\frac{3\pi}{10}\right)^7 = 0{,}\underline{80901}5341\ldots ; \quad + \frac{1}{362\,880}\left(\frac{3\pi}{10}\right)^9 = 0{,}\underline{8090170}08$$

Exercice 11. En utilisant les calculs de la fin du § III, on obtient :

$$\operatorname{Arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{2p+1} + R_{2p+1} ; \quad \operatorname{Arcsin} x = x + \frac{x^2}{6} + \frac{3x^4}{8} + \cdots + \frac{1.3.5\ldots(2p-1)}{2.4.6\ldots(2p)}\frac{x^{2p+1}}{2p+1} + R_{2p+1}.$$

Exercice 13. $(\sin x)'' = -\sin x$ est <0 pour $0<x<\pi$. La première inégalité exprime que, pour $0<x<\frac{\pi}{2}$, la corde du graphe de sin est sous l'arc

Exercice 14. On se ramène à supposer que Γ_1 est polygonale (convexe) et on raisonne par récurrence sur le nombre n de ses côtés : $\operatorname{long}(\Gamma_1) = AM_1 + \operatorname{long}(\text{ligne polygonale } M_1M_2\ldots M_{n-1}B) \leq \operatorname{long}(\text{arc } AM_1) + \operatorname{long}(\text{arc } M_1B) = \operatorname{long}(\Gamma_2)$.



Les fonctions a^x. Le nombre e.

Dans cette Leçon, nous étudions une opération fondamentale sur les nombres réels : le calcul des puissances ou exponentiation. Partant du symbole $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$, supposé connu pour a réel >0, p entier, et q entier >0, en prolongeant par continuité nous définissons et étudions a^x pour x réel quelconque. La fonction $f(x) = a^x$ ainsi obtenue est convexe et dérivable sur $\mathbb{R}$. Elle est liée à l'équation fonctionnelle :

$$f(x+y) = f(x)f(y).$$

De plus elle est proportionnelle à sa dérivée. Parmi tous les nombres réels $a>0$ possibles, il en existe un et un seul, le nombre e, tel que la fonction e^x correspondante soit, mieux que proportionnelle, <u>égale</u> à sa dérivée ; telle sera la définition du nombre e adoptée dans ce cours.

Au passage nous obtiendrons quelques inégalités classiques, en exploitant la convexité des fonctions a^x.

I. Rappels sur a^x quand x est un nombre rationnel.

Soit a un nombre réel >0. La définition et l'étude de a^x quand x est rationnel relèvent du calcul algébrique élémentaire des nombres réels. D'abord, pour tout entier $n \geq 1$, le nombre a^n, appelé puissance n-ième de a, s'obtient comme produit de n facteurs égaux à a. Les formules suivantes sont évidentes :

$$a^{n+m} = a^n a^m \quad ; \quad (a^n)^m = a^{nm} \quad ; \quad (ab)^n = a^n b^n ,$$

où a et b sont des nombres réels >0, et n et m des nombres entiers ≥ 1. En posant $a^0 = 1$, et $a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$, la définition de a^n et les trois formules ci-dessus s'étendent à tous les entiers n et m, qu'ils soient positifs, négatifs ou nuls.

On sait de plus que, pour tout entier $q>0$, il existe un nombre réel >0 et un seul, noté $\sqrt[q]{a}$ ou $a^{\frac{1}{q}}$, et appelé racine q-ième de a, dont la puissance q-ième soit égale à a.

Si le nombre rationnel x est égal à la fraction $\frac{p}{q}$, où p est un entier et q un entier >0, on pose $a^x = (a^p)^{\frac{1}{q}}$. On constate que a^x ne dépend pas de la fraction $\frac{p}{q}$ représentant x, que a^x est >0, que $a^x = (a^{\frac{1}{q}})^p$, et qu'on a les trois formules :

$$a^{x+y} = a^x a^y \quad ; \quad (a^x)^y = a^{xy} \quad ; \quad (ab)^x = a^x b^x,$$

où a et b sont des nombres réels >0, et x et y des nombres <u>rationnels</u> quelconques. On en déduit la formule :

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x .$$

Nous tenons ces faits pour bien connus ; nous y ajoutons quatre lemmes.

<u>Lemme</u> 1. Soient a un nombre réel >0 et x un nombre rationnel >0. Alors : 1°) a^x est >1 si $a>1$; 2°) a^x est <1 si $a<1$.

Car le produit de p nombres positifs >1 (resp. <1) est >1 (resp. <1), et la racine q-ième d'un nombre positif >1 (resp. <1) est >1 (resp. <1).

<u>Lemme</u> 2. Soient x_1 et x_2 deux nombres rationnels tels que $x_1 < x_2$. Alors : 1°) $a^{x_1} < a^{x_2}$ si $a>1$; 2°) $a^{x_1} > a^{x_2}$ si $0<a<1$.

Car la formule $a^{x_2 - x_1} = \dfrac{a^{x_2}}{a^{x_1}}$ nous ramène à appliquer le Lemme 1, où l'on pose $x = x_2 - x_1$.

<u>Lemme</u> 3. Soit ε un nombre réel >0 et N un entier >0. Alors :

$$1 + N\varepsilon \leq (1+\varepsilon)^N .$$

La démonstration se fait par récurrence sur N, ou encore, en remarquant que le premier membre n'est que le début du développement du deuxième membre par la formule du binôme de Newton.

<u>Lemme</u> 4. Soit ε un nombre réel >0. Alors il existe un nombre entier $N>0$ tel que, pour tout nombre rationnel x vérifiant $|x| < \frac{1}{N}$, on ait : $|a^x - 1| \leq \varepsilon$.

Démonstration. Supposons d'abord $a \geq 1$. Choisissons un entier $N > \frac{a-1}{\varepsilon}$. D'après le Lemme 3 :
$$a < 1 + N\varepsilon \leq (1+\varepsilon)^N ,$$
donc $a^{\frac{1}{N}} - 1 \leq \varepsilon$. Par suite, si $0 \leq x \leq \frac{1}{N}$, on a, d'après les Lemmes 1 et 2,
$$|a^x - 1| = a^x - 1 \leq a^{\frac{1}{N}} - 1 \leq \varepsilon .$$

Supposons maintenant $0 < a < 1$, et posons $b = \frac{1}{a}$. D'après la première partie de la démonstration, il existe un entier $N > 0$ tel que $b^x - 1 \leq \varepsilon$ pour tout x rationnel vérifiant $0 \leq x \leq \frac{1}{N}$; pour un tel x on a donc :
$$|a^x - 1| = 1 - a^x = 1 - \frac{1}{b^x} = \frac{b^x - 1}{b^x} \leq b^x - 1 \leq \varepsilon ,$$
car $b^x \geq 1$ d'après le Lemme 1.

Enfin on voit que la propriété énoncée par le Lemme s'étend aux x rationnels tels que $-\frac{1}{N} \leq x \leq 0$, en changeant x en $-x$ et a en $\frac{1}{a}$.

II. Définition de a^x quand x est un nombre réel.

Soit a un nombre réel > 0. Soit x un nombre réel ; il existe des suites (x_n) croissantes de nombres rationnels telles que $\lim x_n = x$; si d_n désigne la n-ième décimale du nombre $x - \mathrm{Ent}(x)$, la formule
$$x_n = \mathrm{Ent}(x) + \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \cdots + \frac{d_n}{10^n}$$
fournit un exemple d'une telle suite. D'après le Lemme 2, la suite (a^{x_n}) est croissante si $a \geq 1$ (resp. décroissante si $a \leq 1$) et elle est majorée (resp. minorée) par le nombre $a^{\mathrm{Ent}(x)+1}$; cette suite a donc une limite.

Définition. Soit a un nombre réel > 0. Soit x un nombre réel. On note a^x (et on désigne par "a puissance x") la limite de la suite (a^{x_n}), où (x_n) est une quelconque suite croissante de nombres rationnels ayant pour limite x.

Justification. Vérifions que le nombre réel a^x ainsi obtenu ne dépend pas de la suite (x_n) approximant x. Soient (x_n) et (x'_n)

deux suites croissantes de nombres rationnels ayant pour limite x. Posons $y = \lim a^{x_n}$ et $y' = \lim a^{x'_n}$. On a $y' \neq 0$, car y' est limite d'une suite croissante de nombres >0. Donc :

$$\frac{y}{y'} = \frac{\lim a^{x_n}}{\lim a^{x'_n}} = \lim \frac{a^{x_n}}{a^{x'_n}} = \lim a^{x_n - x'_n} = 1 ,$$

d'après le Lemme 4, et le fait que les $x_n - x'_n$ sont rationnels et tendent vers 0.

III. Premières propriétés de la fonction a^x.

Soit a un nombre réel >0.

1°) Pour tout x réel, le nombre a^x est >0.
Car les a^{x_n} sont >0 et $a^x = \sup_n a^{x_n}$.

2°) On a l'équation fonctionnelle fondamentale :

$$\boxed{a^{x+y} = a^x a^y}$$

quels que soient les nombres x et y réels.

Soient en effet (x_n) et (y_n) des suites croissantes de nombres rationnels ayant pour limite respectivement x et y. La suite de nombres rationnels $(x_n + y_n)$ est croissante et a pour limite $x+y$. D'autre part $a^{x_n+y_n} = a^{x_n} a^{y_n}$.
Donc : $a^{x+y} = \lim a^{x_n+y_n} = \lim (a^{x_n} a^{y_n}) = (\lim a^{x_n})(\lim a^{y_n}) = a^x a^y$.

3°) En faisant $y = -x$, on obtient que : $1 = a^0 = a^x a^{-x}$, donc :

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

pour tout x réel.

4°) Quels que soient $a>0$, $b>0$ et x réels, on a la formule :

$$\boxed{(ab)^x = a^x b^x} .$$

En effet, si (x_n) est une suite croissante de nombres rationnels ayant pour limite x, on a pour tout n la relation $(ab)^{x_n} = a^{x_n} b^{x_n}$, donc :
$(ab)^x = \lim (ab)^{x_n} = \lim (a^{x_n} b^{x_n}) = (\lim a^{x_n})(\lim b^{x_n}) = a^x b^x$.

5°) En faisant $b = \frac{1}{a}$, et en remarquant que $1^x \equiv 1$, on obtient :
$\frac{1}{a^x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ pour tout x réel, ce qui précise la propriété 3°).

IV. Croissance. Continuité. Limites à l'infini.

<u>Proposition 1</u>. Si $a>1$, la fonction $x \mapsto a^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Si $0<a<1$, la fonction $x \mapsto a^x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

<u>Démonstration</u>. Puisque $\left(\frac{1}{a}\right)^x = \frac{1}{a^x}$, il suffit de la faire pour $a>1$. Soient $x_1 < x_2$ deux nombres réels. Il existe une suite (r_n) de nombres rationnels >0 ayant pour limite le nombre $x_2 - x_1$. D'après le lemme 1, chaque a^{r_n} est >1, donc $\dfrac{a^{x_2}}{a^{x_1}} = a^{x_2-x_1} = \sup\limits_n a^{r_n} > 1$.

<u>Proposition 2</u>. La fonction $x \mapsto a^x$ est continue sur $\mathbb{R}$.

<u>Démonstration</u>. 1°) Prouvons d'abord la continuité à l'origine. Soit ε un nombre réel >0. Soit, d'après le Lemme 4, un entier $N>0$ tel que, pour tout r <u>rationnel</u> vérifiant $|r| \leq \frac{1}{N}$, on ait $|a^r - 1| \leq \varepsilon$. Plus généralement soit x <u>réel</u> vérifiant $|x| \leq \frac{1}{N}$. Il existe une suite croissante (r_n) de nombres rationnels tendant vers x et tels que $|r_n| \leq \frac{1}{N}$. Alors $a^x = \lim a^{r_n}$, donc $|a^x - 1| = \lim |a^{r_n} - 1| \leq \varepsilon$ par conservation des inégalités par passage à la limite.

2°) Soit x_0 un nombre réel $\neq 0$. On vient de voir que $\lim\limits_{x-x_0 \to 0} a^{x-x_0} = 1$. Or $a^x - a^{x_0} = a^{x_0}(a^{x-x_0} - 1)$, donc $\lim\limits_{x\to x_0}(a^x - a^{x_0}) = 0$. Autrement dit, la fonction a^x est continue au point x_0.

<u>Corollaire</u>. Quels que soient x et y réels, on a la formule :

$$\boxed{(a^x)^y = a^{xy}}$$

<u>Démonstration</u>. La formule est considérée comme connue quand x et y sont tous deux rationnels.

1°) Supposons y rationnel et x irrationnel. Soit (x_n) une suite de nombres rationnels tendant vers x. Alors $(x_n y)$ tend vers xy, donc, par continuité de la fonction a^x, la suite $(a^{x_n y})$ tend vers a^{xy}. Mais, d'autre part, $a^{x_n y} = (a^{x_n})^y$ tend vers $(a^x)^y$ par continuité de la fonction "puissance" $x \mapsto \sqrt[q]{x^p}$, où $y = \frac{p}{q}$ est fixé. Donc $a^{xy} = (a^x)^y$.

2°) Supposons x et y irrationnels. Soit (y_n) une suite de nombres rationnels tendant vers y. Alors $(a^x)^{y_n} = a^{xy_n}$ d'après le 1°) de la démonstration ; par continuité des fonctions $x \mapsto a^x$ et $y \mapsto (a^x)^y$, on obtient, quand n tend vers $+\infty$, l'identité $(a^x)^y = a^{xy}$.

<u>Proposition</u> 3. 1°) Si $a > 1$, on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$.

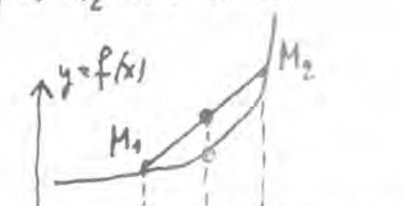
2°) Si $0 < a < 1$, on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$.

<u>Démonstration</u> : Quitte à changer a en $\frac{1}{a}$, et x en $-x$, il suffit de trouver l'une des quatre limites. Or, si $a > 1$, on a l'inégalité $a^x \geqslant a^{\mathrm{Ent}(x)}$. Mais on a vu, à la Leçon n° 2, que $\lim\limits_{n \to +\infty} a^n = +\infty$; or, quand x tend vers $+\infty$, évidemment $n = \mathrm{Ent}(x)$ tend vers $+\infty$.

V. <u>Convexité des fonctions a^x</u>.

<u>Proposition</u> 4. Soit a un nombre réel > 0 et $\neq 1$. Alors la fonction $x \mapsto a^x$ est strictement convexe sur $\mathbb{R}$.

<u>Démonstration</u>. On sait déjà que cette fonction est continue. La Proposition 4 énonce donc (cf. la Leçon n° 5) que, si x_1 et x_2 sont deux nombres réels distincts, on a :



$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2},$$

si l'on pose $f(x) = a^x$; il s'agit donc de voir que

$$a^{\frac{x_1 + x_2}{2}} < \frac{a^{x_1} + a^{x_2}}{2},$$

c'est-à-dire que $\sqrt{a^{x_1} a^{x_2}} < \dfrac{a^{x_1} + a^{x_2}}{2}$. En posant $A_1 = a^{x_1}$ et $A_2 = a^{x_2}$, ceci n'est autre que l'inégalité bien connue :

$$(1) \qquad \sqrt{A_1 A_2} \leqslant \frac{A_1 + A_2}{2},$$

qui exprime que la moyenne géométrique de deux nombres positifs A_1 et A_2 est inférieure ou égale à leur moyenne arithmétique, l'égalité n'étant possible que si $A_1 = A_2$. Cette inégalité (1) vient de ce que :

$$A_1 + A_2 - 2\sqrt{A_1 A_2} = \left(\sqrt{A_1} - \sqrt{A_2}\right)^2 \geqslant 0.$$

La fonction $f(x) = a^x$ étant strictement convexe, on sait que, quels que soient les nombres réels x_1 et x_2 distincts, et $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ tels que $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, on a l'inégalité : $f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) < \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$, qui exprime que tout arc du graphe de f est strictement au-dessous de sa corde. Ainsi :

$$a^{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2} < \lambda_1 a^{x_1} + \lambda_2 a^{x_2},$$

ce qui fournit une inégalité plus générale que (1) :

$$(2) \qquad A_1^{\lambda_1} A_2^{\lambda_2} \leqslant \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 ,$$

quels que soient les nombres réels $A_1 > 0$, $A_2 > 0$, et $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ tels que $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, l'égalité n'étant possible que si $A_1 = A_2$.

<u>Exercice 1</u>. Par récurrence sur n, montrez que, si $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont n nombres réels > 0, et si $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont n nombres réels > 0 tels que $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1$, on a l'inégalité :

$$(3) \qquad A_1^{\lambda_1} A_2^{\lambda_2} \cdots A_n^{\lambda_n} \leqslant \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \dots + \lambda_n A_n ,$$

l'égalité n'étant possible que si $A_1 = A_2 = \dots = A_n$.

Si p est un nombre réel > 1, introduisons le nombre $q = \frac{p}{p-1}$ c'est-à-dire tel que $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$. Le nombre q s'appelle "l'exposant conjugué" de p.

<u>Inégalité de Hölder</u>. Soit p un nombre réel > 1, et $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$. Alors, quels que soient les nombres $x_1, \dots, x_n$; $y_1, \dots, y_n$ réels > 0, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \leqslant \Big(\sum_{k=1}^{n} x_k^p \Big)^{1/p} \Big(\sum_{k=1}^{n} y_k^q \Big)^{1/q},$$

l'égalité n'ayant lieu que si $(y_1, \dots, y_n)$ est proportionnel à $(x_1, \dots, x_n)$, c'est-à-dire si $\frac{y_k}{x_k}$ est indépendant de $k = 1, 2, \dots, n$.

<u>Démonstration</u>. Les deux membres de l'inégalité sont "homogènes de degré 1" par rapport aux x_k, et aussi par rapport aux y_k ; autrement dit : l'inégalité, dès lors qu'elle est prouvée pour des systèmes $(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_n)$, est prouvée aussi pour les systèmes proportionnels $(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$ et $(\mu x_1, \dots, \mu x_n)$. Donc,

sans perdre de généralité, on peut supposer que $\sum x_k^p = 1$ et $\sum y_k^q = 1$; il reste à montrer que, sous ces hypothèses supplémentaires, $\sum x_k y_k \leqslant 1$, l'égalité n'étant possible que si $x_1 = y_1, x_2 = y_2, \dots, x_n = y_n$.
Pour ce faire, appliquons, pour tout k, l'inégalité (2) où l'on fait :

$$A_1 = x_k^p \quad , \quad A_2 = y_k^q \quad ; \quad \lambda_1 = \frac{1}{p} \quad , \quad \lambda_2 = \frac{1}{q} \; .$$

On obtient que, pour tout $k = 1, 2, \dots, n$,

$$(4) \qquad x_k y_k \leqslant \frac{1}{p} x_k^p + \frac{1}{q} x_k^q \; ,$$

avec égalité seulement si $x_k = y_k$. En additionnant les n inégalités (4), on obtient :

$$\sum x_k y_k \leqslant \frac{1}{p} \sum x_k^p + \frac{1}{q} \sum x_k^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \, ,$$

avec égalité seulement si chaque $x_k = y_k$, c.q.f.d.

<u>Remarque</u>. Pour $p = q = 2$, on obtient comme cas particulier l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left| \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \right| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2 \right)^{1/2} ,$$

qui exprime que, dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$, le produit scalaire de deux vecteurs est, en valeur absolue, inférieur ou égal au produit de leurs longueurs, l'égalité n'ayant lieu que si les vecteurs sont proportionnels.

<u>Inégalité de Minkowski</u>. Soit p un nombre réel > 1. Alors, quels que soient les nombres $x_1, \dots, x_n$; $y_1, \dots, y_n$ réels > 0, on a :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^p \right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^p \right)^{1/p} ,$$

l'égalité n'ayant lieu que si $(y_1, \dots, y_n)$ est proportionnel à $(x_1, \dots, x_n)$.

<u>Démonstration</u>. Posons :

$$S = \sum (x_k + y_k)^p = \sum x_k (x_k + y_k)^{p-1} + \sum y_k (x_k + y_k)^{p-1}$$

et appliquons l'inégalité de Hölder à chaque terme du dernier membre, en remarquant que $(p-1)q = p$:

$$S \leqslant \left(\sum x_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum (x_k+y_k)^p\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum y_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum (x_k+y_k)^p\right)^{\frac{1}{q}}$$

c'est-à-dire :

$$S \leqslant S^{\frac{1}{q}} \left[\left(\sum x_k^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum y_k^p\right)^{\frac{1}{p}}\right],$$

d'où résulte l'inégalité de Minkowski en multipliant les deux membres par $S^{-\frac{1}{q}}$. Il n'y a égalité que si l'égalité a lieu dans les deux applications de l'inégalité de Hölder, c'est-à-dire si les $(x_k+y_k)^{p-1}$ sont proportionnels à la fois aux x_k et aux y_k, donc si les x_k et les y_k sont proportionnels entre eux.

<u>Remarque</u>: Pour $p=2$, l'inégalité de Minkowski exprime que, dans l'espace euclidien, la longueur d'un côté d'un triangle est inférieure à la somme des longueurs des deux autres côtés.

VI. <u>Dérivée de la fonction a^x</u>.

Comme toute fonction convexe, la fonction a^x admet en tout point une dérivée à droite (cf. la Leçon n°6); en particulier, quand h réel >0 tend vers 0, la dérivée à droite à l'origine :

$$L_a = \lim_{h>0,\, h\to 0} \frac{a^h - 1}{h}$$

existe. Cette même constante L_a est aussi la dérivée à gauche à l'origine, car, vu que a^h tend vers 1,

$$\lim_{h>0,\, h\to 0} \frac{a^{-h}-1}{-h} = \lim_{h>0,\, h\to 0} \frac{1}{a^h} \frac{a^h-1}{h} = L_a.$$

Ainsi la fonction $f(x)=a^x$ est-elle dérivable à l'origine, et $f'(0)=L_a$.

Si maintenant x est un point quelconque de $\mathbb{R}$,

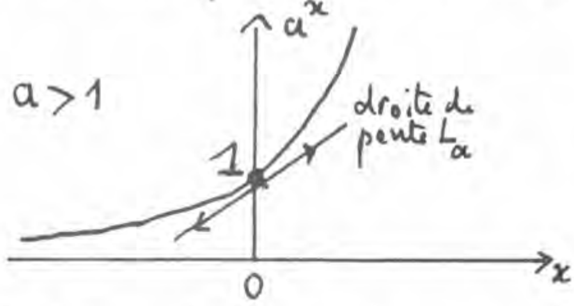
$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{a^{x+h}-a^x}{h} = a^x \frac{a^h-1}{h}$$

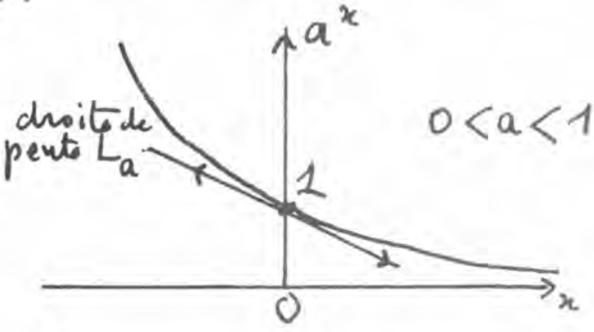
tend, quand $h\neq 0$ tend vers 0, vers $a^x L_a = L_a f(x) = f'(0) f(x)$:

<u>Proposition</u> 5. La fonction $f(x)=a^x$ est dérivable en tout point x de $\mathbb{R}$. Sa dérivée $f'(x)$ est proportionnelle à la fonction $f(x)$ elle-même :

$$f'(x) = f'(0) f(x).$$

Nous pouvons dessiner l'allure du graphe de $f(x)=a^x$, en distinguant selon que $a>1$ ou $0<a<1$:





VII. Le nombre e. La fonction e^x.

La fonction $x \mapsto f(x)=a^x$ s'appelle encore la fonction exponentielle de base a : elle possède la propriété remarquable d'être proportionnelle à sa dérivée : $f'(x)=L_a f(x)$, la constante de proportionnalité L_a dépendant de la base a choisie. Nous allons voir qu'il existe un nombre réel $a>0$ et un seul (noté e) tel que $L_a=1$. La fonction exponentielle e^x correspondante sera égale à sa dérivée, donc plus remarquable encore.

Lemme 5. Pour tout nombre réel $a>0$ et tout nombre réel y, on a la relation :

$$L_{a^y} = y\, L_a .$$

Cette relation s'obtient immédiatement en prenant la dérivée par rapport à x à l'origine des deux membres de l'identité :

$$(a^y)^x = a^{yx}.$$

Théorème 1. Il existe un nombre réel $e>0$ et un seul tel que la dérivée L_e à l'origine de la fonction e^x soit égale à 1.

Démonstration. a) Existence. Choisissons un nombre réel $a>0$ quelconque, et posons $e=a^{\frac{1}{L_a}}$. En faisant $y=\frac{1}{L_a}$ dans le Lemme 5, on voit que $L_e=\frac{1}{L_a}L_a=1$.

b) Unicité. Supposons que les fonctions $f(x)=a^x$ et $g(x)=b^x$ vérifient toutes deux la relation $L_a=L_b=1$. Donc $f'(x)=f(x)$ et $g'(x)=g(x)$ d'après la Proposition 5. Posons $h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$, donc

$f(x) = g(x)\,h(x)$. En dérivant, on a:

$$f(x) = f'(x) = g'(x)\,h(x) + g(x)\,h'(x) = g(x)\,h(x) + g(x)\,h'(x),$$

donc $h'(x) \equiv 0$. Par suite $h(x) = \text{constante} = h(0) = 1$, donc $f = g$. Ainsi $a^x = b^x$ pour tout x, ce qui, pour $x = 1$, montre que $a = b$.

<u>Exercice 2</u>. Dans la définition $e = a^{\frac{1}{La}}$, choisir $a = 2$, et en déduire que la suite $x_n = 2^{\frac{1}{n(2^{\frac{1}{n}}-1)}}$ tend vers e. Pour $n = 10.000$, obtenir ainsi les quatre premières décimales de $e = 2{,}7182\ldots$.

La fonction $x \mapsto e^x$ s'appelle (absolument) la <u>fonction exponentielle</u>, et est aussi notée $\exp(x)$.

<u>Théorème 2</u>. Parmi les fonctions f telles que $f(0) = 1$ et ayant une dérivée continue sur $\mathbb{R}$, la fonction exponentielle est la seule qui soit égale à sa dérivée.

<u>Démonstration.</u> Supposons que $f(0) = 1$ et $f'(x) = f(x)$. Posons $h(x) = e^{-x} f(x)$. En dérivant on obtient: $h'(x) = e^{-x}\,[f'(x) - f(x)] \equiv 0$, donc $h(x) = \text{constante} = h(0) = 1$. Par suite $f(x) = e^x$.

<u>Corollaire</u>. Les seules fonctions f telles que $f(0) = 1$, qui ont une dérivée continue sur $\mathbb{R}$, et qui vérifient l'équation fonctionnelle:

$$(5) \qquad f(x+y) \equiv f(x)\,f(y) \quad ,$$

sont les fonctions $f(x) = a^x$, où a est une constante réelle > 0.

<u>Démonstration</u>. A x fixé, dérivons les deux membres de (5) par rapport à y; il vient $f'(x+y) = f(x)\,f'(y)$, donc, pour $y = 0$,

$$(6) \qquad f'(x) = f'(0)\,f(x).$$

Posons $k = f'(0)$. Si $k = 0$, d'après (6) $f'(x)$ est $\equiv 0$, donc $f(x)$ est constamment égale à 1, donc $f(x) = 1^x$. Désormais supposons $k \neq 0$, et posons $g(x) = f(\frac{x}{k})$. On a $g(0) = 1$, et, d'après (6),

$$g'(x) = \frac{1}{k}\,f'\left(\frac{x}{k}\right) = \frac{1}{k}\,k\,f\left(\frac{x}{k}\right) = g(x),$$

donc $g(x) = e^x$ d'après le Théorème 2. Par conséquent, en posant $a = e^k$,

$$f(x) = e^{kx} = a^x.$$

La fonction $f(x) = e^x$ est indéfiniment dérivable, et égale à toutes ses dérivées successives. Pour tout entier $k \geq 0$, on a $f^{(k)}(0) = 1$. Appliquons à cette fonction la formule de Taylor à l'ordre n (cf. la Leçon n° 6). On voit que, pour tout nombre réel x, il existe un nombre réel ξ, situé entre 0 et x, tel que :

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots\cdots + \frac{x^n}{n!} + e^{\xi} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

Or $e^{\xi} \leq e^{|x|}$, et, à la Leçon n° 2, on a vu que $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$. On a donc prouvé le

<u>Théorème</u> 3. 1°) Pour tout x réel, on a :

$$e^x = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots\cdots + \frac{x^n}{n!}\right).$$

2°) L'erreur commise en remplaçant e^x par le polynôme $1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots\cdots + \frac{x^n}{n!}$ est, tant que $|x|$ est $\leq A$, inférieure à $e^A \frac{A^{n+1}}{(n+1)!}$.

En particulier, si l'on pose $x_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots\cdots + \frac{1}{n!}$, la suite (x_n) converge en croissant vers le nombre e, et $e - x_n < \frac{3}{(n+1)!}$, donc la convergence est très rapide. Euler n'eut aucun mal à en déduire les 23 premières décimales de e :

$$e = 2,71828182845904523536028\ldots.$$

<u>Exercice</u> 3. Soit y_n la dérivée n-ième de la fonction $y_0 = e^{ax}\sin(bx)$ où a et b sont deux constantes réelles. Trouvez une relation de récurrence linéaire, à coefficients constants, d'ordre deux, entre les y_n.

VIII. <u>Indications sur les exercices.</u>

<u>Exercice</u> 1. En posant $\mu_1 = \frac{\lambda_1}{1-\lambda_n}, \ldots, \mu_{n-1} = \frac{\lambda_{n-1}}{1-\lambda_n}$, par hypothèse de récurrence on a $A_1^{\lambda_1} A_2^{\lambda_2} \ldots A_{n-1}^{\lambda_{n-1}} = (A_1^{1-\lambda_n})^{\mu_1} \ldots (A_{n-1}^{1-\lambda_n})^{\mu_{n-1}} \leq \mu_1 A_1^{1-\lambda_n} + \cdots + \mu_n A_{n-1}^{1-\lambda_n}$, puis multipliez les deux membres par $A_n^{\lambda_n}$ et appliquez (2).

<u>Exercice</u> 3. $y_{n+2} = 2a\, y_{n+1} - (a^2 + b^2)\, y_n$.

Logarithmes

I. Définition et premières propriétés.

Soit a un nombre réel >0 et $\neq 1$. La fonction $x \mapsto a^x$ définit une application continue bijective de $\mathbb{R}$ sur l'ensemble $\mathbb{R}_+^*$ des nombres réels >0 ; elle est dérivable et strictement monotone. Nous allons étudier sa fonction réciproque, qui est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

Définition. On appelle logarithme (de base a) du nombre réel $x>0$, et l'on note $y = \log_a x$, l'unique nombre réel y tel que $a^y = x$.

En particulier les logarithmes de base 10 ont été très utilisés en liaison avec la numération décimale ; les logarithmes de base 2 sont à la mode à cause des ordinateurs. Mais on verra que les logarithmes des diverses bases ne diffèrent que par une constante multiplicative ; aussi s'intéressera-t-on essentiellement aux logarithmes de base e, encore appelés logarithmes naturels ou logarithmes népériens(*), et notés simplement $\operatorname{Log} x$.

Exercice 1. Montrez que le nombre $\log_{10} 2$ est irrationnel.

La définition permet de traduire les propriétés des fonctions a^x, étudiées à la Leçon précédente, en propriétés des logarithmes.

1°) $\log_a a = 1$; $\log_a 1 = 0$;

2°) quels que soient $x>0$ et $y>0$, on a :

$$\boxed{\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)}\ .$$

Cette propriété fondamentale des logarithmes explique leur intérêt pour le Calcul numérique. Le cerveau humain, imité en cela par les ordinateurs, trouve les additions moins pénibles que les multiplications. Les tables de Neper furent immédiatement utilisées par Kepler

(*) John Neper (1550-1617), mathématicien écossais, principal inventeur des logarithmes, dont il établit les premières tables.

pour ses calculs astronomiques.

Pour démontrer cette formule, posons $X = \log_a x$ et $Y = \log_a y$, donc $x = a^X$ et $y = a^Y$. On a : $xy = a^X a^Y = a^{X+Y}$. Par suite $X + Y = \log_a(xy)$, cqfd.

3°) $\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$; $\log_a \frac{y}{x} = \log_a y - \log_a x$.

4°) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, et $a > 0$, $a \neq 1$. Pour tout $x > 0$, on a :

$$\boxed{\log_a(x^\alpha) = \alpha \log_a x}.$$

Exercice 2. Démontrez par vous-même 3°) et 4°).

En particulier, si $q > 0$ et p sont entiers, on notera les formules :

$$\log_a(x^p) = p \log_a x \quad \text{et} \quad \log_a \sqrt[q]{x} = \frac{1}{q} \log_a x.$$

5°) (changement de base). Pour $a > 0$, $b > 0$, et $x > 0$, on a :

$$\log_b x = (\log_b a)(\log_a x).$$

En effet, posons $y_1 = \log_a x$ et $y_2 = \log_b x$. On a donc $x = a^{y_1}$, et

$y_2 = \log_b(a^{y_1}) = y_1 \log_b(a)$ d'après le 4°).

6°) Pour $a > 0$, $b > 0$, et x réel, on a :

$$b^x = a^{x \log_a b}.$$

En effet les deux membres ont le même $\log_a$.

La fonction logarithme népérien $\log_e x$, plutôt notée $\operatorname{Log} x$, permet de décrire toutes les autres $\log_a$, car elles lui sont proportionnelles, puisque, si l'on fait $b = e$ dans le 5°),

$$\log_a x = \frac{1}{\operatorname{Log} a} \operatorname{Log} x.$$

Par exemple, $\log_{10} x = M \operatorname{Log} x$, où $M = \frac{1}{\operatorname{Log} 10} = 0,43429\ldots$

De même la fonction exponentielle e^x permet de décrire toutes les autres a^x, car, en vertu du 6°), où l'on fait $b = a$ et $a = e$:

$$\boxed{a^x = e^{x \operatorname{Log} a}}.$$

Remarque. De cette formule résulte que la dérivée L_a de a^x à l'origine, introduite au § VI de la Leçon précédente, n'est autre que Loga. Par conséquent la dérivée de la fonction a^x est la fonction $a^x \operatorname{Log} a$.

II. Etude de la fonction Log x.

Naturellement cette fonction jouit des propriétés 2'), 3'), 4') énoncées ci-dessus plus généralement pour les fonctions $\log_a x$. De plus : $\operatorname{Log} 1 = 0$; $\operatorname{Log} e = 1$; $\operatorname{Log} 2 = 0{,}69314\ldots$; $\operatorname{Log} 3 = 1{,}09861\ldots$; $\operatorname{Log} 10 = 2{,}30258$.

Proposition 1. La fonction $x \mapsto \operatorname{Log} x$ est strictement croissante et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Sa dérivée est la fonction $\frac{1}{x}$.

Démonstration. Car cette fonction est réciproque de la fonction strictement croissante et dérivable $f(x) = e^x$: on a $\operatorname{Log} x = \overset{-1}{f}(x)$. Or $f'(x) = e^x$, donc, en appliquant le calcul des dérivées de fonctions réciproques :

$$\left(\overset{-1}{f}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left[\overset{-1}{f}(x)\right]} = \frac{1}{e^{\operatorname{Log} x}} = \frac{1}{x}.$$

Remarque : Pour cette raison-là aussi (donner une primitive à $\frac{1}{x}$), on ne pouvait pas ne pas introduire cette nouvelle fonction Log x.

Corollaire 1. La dérivée de $\log_a x$ est $\frac{1}{x \operatorname{Log} a}$.

Corollaire 2. La fonction $\operatorname{Log}|x|$, définie pour tout $x \neq 0$, a pour dérivée $\frac{1}{x}$ pour tout $x \neq 0$.

Car, si $x < 0$, la fonction composée $\operatorname{Log}|x| = \operatorname{Log}(-x)$ a pour dérivée $(-1)\frac{1}{-x} = \frac{1}{x}$.

Corollaire 3. Soit $x \mapsto u(x)$ une fonction dérivable, partout non nulle dans un intervalle ouvert I. Alors la fonction composée $x \mapsto \operatorname{Log}|u(x)|$ a pour dérivée par rapport à x dans I :

$$\left(\operatorname{Log}|u(x)|\right)' = \frac{u'(x)}{u(x)}.$$

Exercice 3. Le quotient $\frac{u'}{u}$ est appelé "dérivée logarithmique" de u. Montrez que, si u et v sont deux fonctions dérivables et jamais nulles sur I, la dérivée logarithmique de la fonction uv (resp. $\frac{u}{v}$)

est la somme (resp. la différence) des dérivées logarithmiques de u et de v. Calculez la dérivée logarithmique de $f(x) = \dfrac{(x^2+1)^5}{(2x^4+1)^3}$; en déduire $f'(x)$.

<u>Proposition</u> 2. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$, ayant une dérivée première continue sur $\mathbb{R}_+^*$, et telle que, quels que soient $x>0$ et $y>0$,

$$(1) \qquad f(xy) = f(x) + f(y).$$

Alors il existe une constante C telle que $f(x) = C \operatorname{Log} x$.

<u>Démonstration</u>. A x fixé, dérivons les deux membres de (1) par rapport à y :

$$x f'(xy) = f'(y) ,$$

d'où, en faisant $y = 1$, et en posant $f'(1) = C$:

$$f'(x) = \frac{C}{x} .$$

Les fonctions $f(x)$ et $C \operatorname{Log} x$ ont même dérivée ; donc il existe une constante D telle que $f(x) = C \operatorname{Log} x + D$. Faisant $x = 1$, on voit que $D = f(1)$. Mais, d'après (1) où l'on fait $x = y = 1$,

$$D = f(1) = f(1) + f(1) = 2D ,$$

donc $D = 0$.

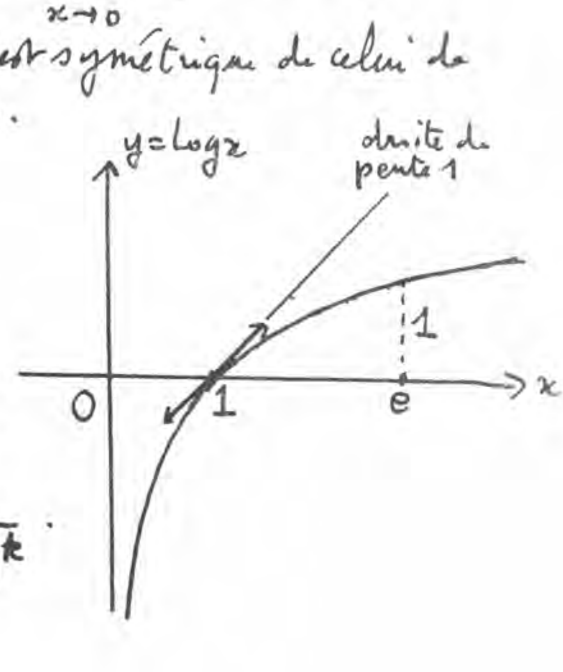
<u>Proposition</u> 3. La fonction $\operatorname{Log} x$ est strictement concave sur $\mathbb{R}_+^*$.

En effet sa dérivée seconde $-\dfrac{1}{x^2}$ est <0.

<u>Exercice</u> 4. Montrez que, pour $x \geq 0$, on a : $\dfrac{x}{1+x} \leq \operatorname{Log}(1+x) \leq x$.

<u>Proposition</u> 4. $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{Log} x = +\infty$; et $\lim\limits_{\substack{x>0 \\ x \to 0}} \operatorname{Log} x = -\infty$.

Ceci se voit sur le graphe de $\operatorname{Log} x$, qui est symétrique de celui de e^x par rapport à la première bissectrice.



Nous allons maintenant appliquer <u>la formule de Taylor</u> à la fonction

$$f(x) = \operatorname{Log}(1+x)$$

entre les points 0 et x. Les dérivées successives de f sont : $f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$;

$$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} , \ldots , f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}(k-1)! \frac{1}{(1+x)^k} .$$

Donc : $f(0)=0$, $f'(0)=1$, $f''(0)=-1$, ..., $f^{(k)}(0)=(-1)^{k-1}(k-1)!$

Par conséquent, pour tout n fixé et tout $x>0$, il existe un nombre ξ situé entre 0 et x tel que :

$$\mathrm{Log}(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \frac{(-1)^n}{n+1}\frac{x^{n+1}}{(1+\xi)^{n+1}}.$$

<u>Proposition 5</u>. Soit x un nombre réel tel que $\frac{1}{2} < x \leq 1$. Alors :

$$\mathrm{Log}(1+x) = \lim_{n\to+\infty}\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\right).$$

En particulier, pour $x=1$,

$$\mathrm{Log}\,2 = \lim_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right).$$

<u>Remarque</u>. La proposition est valable plus généralement pour $-1<x\leq 1$, mais, à ce stade du cours, nous n'avons pas les moyens de la prouver pour x proche de -1.

<u>Démonstration</u>. Il s'agit de montrer que $R_n = \dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

Supposons d'abord $0\leq x\leq 1$. Alors $\xi \geq 0$, donc $R_n \leq \frac{1}{n+1}$ tend évidemment vers 0.

Supposons maintenant $-\frac{1}{2}<x<0$, et posons $r=-x$. Donc $0<r<\frac{1}{2}$, et par suite $\dfrac{r}{1-r}<1$. On a $-r\leq\xi\leq 0$, donc $1+\xi \geq 1-r$. Par conséquent

$$R_n \leq \left(\frac{|x|}{1+\xi}\right)^{n+1} \leq \left(\frac{r}{1-r}\right)^{n+1}$$

tend vers 0.

<u>Proposition 6</u>. $\displaystyle\lim_{x\neq 0,\, x\to 0} \frac{\mathrm{Log}(1+x)}{x} = 1.$

En effet, cette limite n'est autre que la valeur pour $x=0$ de la dérivée $\frac{1}{1+x}$ de la fonction $x\mapsto \mathrm{Log}(1+x)$.

<u>Corollaire</u>. Soit x un nombre réel. Alors $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$.

En particulier : $$\boxed{e = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}.$$

Démonstration. On peut supposer n déjà assez grand pour que $1+\frac{x}{n}$ soit >0. En posant $u_n = (1+\frac{x}{n})^n$,

$$\operatorname{Log} u_n = n \operatorname{Log}\left(1+\frac{x}{n}\right) = x \, \frac{\operatorname{Log}\left(1+\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}}$$

tend vers x, quand n tend vers l'infini, d'après la Proposition 6. Par continuité de la fonction exponentielle, $u_n = e^{\operatorname{Log} u_n}$ tend vers e^x.

Exercice 5. Soit $x>0$. Montrez que $\lim_{n\to+\infty} n(\sqrt[n]{x}-1) = \operatorname{Log} x$.

III. Etude des fonctions "puissances" $x \mapsto x^\alpha$, où α est réel.

On connaît déjà assez bien les fonctions monômes x^n, où n est un entier ≥ 0, définies pour x réel quelconque ; les fonctions $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ où n est un entier >0, définies pour $x \neq 0$; et les fonctions $x^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{x}$, où q est un entier >0, définies pour $x>0$.

Soit α un exposant réel quelconque. Pour tout x réel >0, on a défini :

$$x^\alpha = e^{\alpha \operatorname{Log} x}.$$

C'est un nombre >0. Etudions la fonction $x \mapsto x^\alpha$, définie sur $\mathbb{R}_+^*$, en discutant selon les valeurs du paramètre α. Si $\alpha = 0$, la fonction x^α est $\equiv 1$; supposons donc $\alpha \neq 0$.

La dérivée de la fonction x^α est $\frac{\alpha}{x} e^{\alpha \operatorname{Log} x}$, c'est-à-dire :

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}.$$

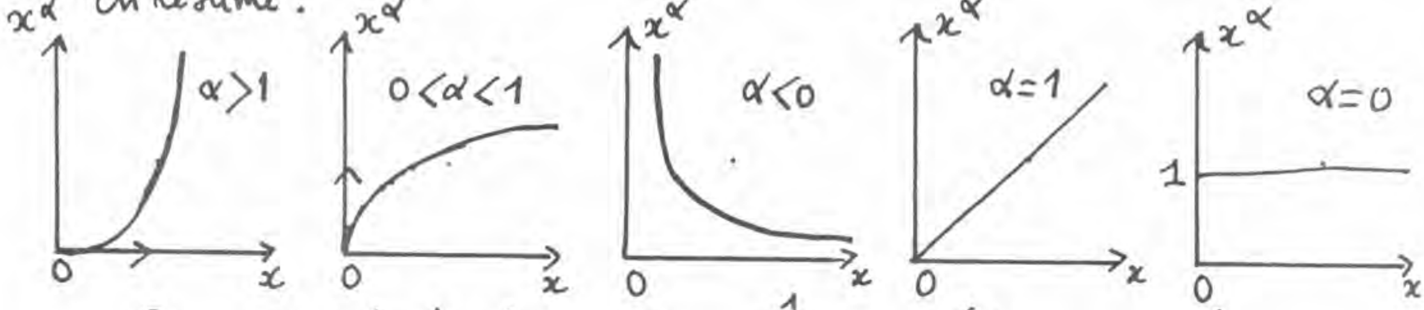
Par exemple $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Donc la fonction x^α est strictement croissante si $\alpha>0$, et strictement décroissante si $\alpha<0$. De plus, remarquons que si $y = x^\alpha$, on a $y(1) = 1$ et $y'(1) = \alpha$.

Du comportement de $\operatorname{Log} x$ et e^x, il résulte immédiatement que :
1) quand $x \to +\infty$, x^α tend vers $+\infty$ si $\alpha>0$, vers 0 si $\alpha<0$;
2) quand $x>0$ tend vers 0, x^α tend vers 0 si $\alpha>0$, vers $+\infty$ si $\alpha<0$.

La dérivée seconde de x^α est $\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$, donc la fonction est strictement convexe si $\alpha<0$ et si $\alpha>1$; elle est strictement concave si $0<\alpha<1$. Pour $\alpha=1$, il s'agit de la fonction $y=x$.

Si $\alpha>0$, x^α tend vers 0 quand $x>0$ tend vers 0 ; on prolonge alors la fonction x^α en lui attribuant la valeur 0 pour $x=0$. Quand $x>0$ tend vers zéro, $\frac{y}{x}=x^{\alpha-1}$ tend vers 0 si $\alpha>1$, vers $+\infty$ si $0<\alpha<1$; donc, à l'origine, le graphe est tangent à Ox si $\alpha>1$, à Oy si $0<\alpha<1$.

En résumé :



Pour $\alpha\neq 0$, les fonctions x^α et $x^{\frac{1}{\alpha}}$ sont réciproques ; leurs graphes sont donc symétriques par rapport à la première bissectrice.

Pour $\alpha=-1$, le graphe de $\frac{1}{x}$ est une branche d'hyperbole équilatère

Pour $\alpha=2$ et $\alpha=\frac{1}{2}$, les graphes de x^2 et de $\sqrt{x}$ sont des demi-paraboles.

Soit α un nombre réel fixé, et x un nombre réel >-1. Nous allons appliquer la formule de Taylor, entre 0 et x, à la fonction "binôme" $f(x)=(1+x)^\alpha$. On a, pour ses dérivées successives,

$f'(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1}$; $f''(x)=\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$; ..... ; $f^{(k)}(x)=\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$,

donc: $f(0)=1$; $f'(0)=\alpha$; $f''(0)=\alpha(\alpha-1)$; ..... ; $f^{(k)}(0)=\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)$.

Par conséquent, pour tout x fixé >-1, il existe un nombre ξ situé entre 0 et x tel que :

$$(1+x)^\alpha = 1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\dots+\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + R_n ,$$

où

$$R_n = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\xi)^{\alpha-n-1}x^{n+1} .$$

<u>Proposition</u> 7. Soit x un nombre réel tel que $-\frac{1}{2}<x<1$, et soit α un nombre réel quelconque. Alors :

$$(1+x)^\alpha = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\dots+\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n\right)$$

<u>Remarque:</u> La Proposition est valable plus généralement pour $-1<x<1$, mais, à ce stade du cours, nous n'avons pas les moyens de la prouver pour x proche de -1.

Démonstration. Il s'agit de montrer que R_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Supposons d'abord $0 \leq x \leq 1$. Alors $(1+\xi)^{\alpha-n-1} \leq (1+\xi)^{\alpha} \leq 2^{|\alpha|}$, donc $|R_n| \leq 2^{|\alpha|} \dfrac{|\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)|}{(n+1)!} x^n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, comme on l'a vu à la Leçon n° 2.

Supposons maintenant $-\frac{1}{2} < x < 0$, et posons $r = -x$. Donc $0 < r < \frac{1}{2}$, et par suite $0 < \frac{r}{1-r} < 1$. Or $-r \leq \xi \leq 0$, donc $1 + \xi \geq 1 - r$, et $\frac{|x|}{1+\xi} \leq \frac{r}{1-r}$. Par conséquent :

$$|R_n| \leq 2^{|\alpha|} \frac{|\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)|}{(n+1)!} \left(\frac{r}{1-r}\right)^n$$

tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, comme on l'a vu à la Leçon n° 2.

En particulier, pour $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\alpha = -\frac{1}{2}$, on obtient que si $-\frac{1}{2} < x < 1$ (mais en fait si $-1 < x < 1$) :

(2) $$\sqrt{1+x} = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1.3.5 \dots (2n-3)}{2.4.6\dots(2n-2)(2n)} x^n\right)$$

et $$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} + \dots + (-1)^n \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2.4.6 \dots (2n)} x^n\right).$$

Exercice 6. Soit A un nombre entier >0 et N^2 le carré le plus proche de A. On pose $A = N^2 \pm x$, où $x > 0$. Puisque $x \leq N$, on voit que $\frac{x}{N^2}$ est assez petit. Calculez $\sqrt{A} = N\sqrt{1 \pm \frac{x}{N^2}}$ en le remplaçant par la valeur approchée $N\left(1 \pm \frac{x}{2N^2} - \frac{1}{8}\left(\frac{x}{N^2}\right)^2\right)$ déduite des trois premiers termes du deuxième membre de (2), quand on prend $A = 173$; combien de décimales exactes obtenez-vous ainsi pour $\sqrt{173}$?

Procédez de même pour $\sqrt{997}$.

IV. Croissance comparée de e^x, x^α et $\operatorname{Log} x$.

Lemme. Soit n un entier >0 fixé. Alors $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$.

En effet, d'après la formule de Taylor à l'ordre $n+1$,
$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{e^\xi x^{n+2}}{(n+2)!},$$
donc, en particulier, $e^x > \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ ou encore $\frac{e^x}{x^n} > \frac{x}{(n+1)!}$, qui tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

Proposition 8. Soit α un nombre réel >0. Alors :
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} x^\alpha e^{-x} = 0.$$

Démonstration. Si $n = \operatorname{Ent}(\alpha)+1$, on a $x^\alpha \leqslant x^n$, donc $\frac{e^x}{x^\alpha} \geqslant \frac{e^x}{x^n}$, qui tend vers $+\infty$ d'après le Lemme, ce qui établit la première limite. Pour la deuxième, il suffit d'inverser la première, car $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$.

Proposition 9. Soit α un nombre réel >0. Alors :
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{Log} x}{x^\alpha} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x>0,\, x\to 0} x^\alpha \operatorname{Log} x = 0.$$

Démonstration. Quand x tend vers $+\infty$, $y = \alpha \operatorname{Log} x$ tend vers $+\infty$, donc $\frac{\operatorname{Log} x}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha}\frac{y}{e^y}$ tend vers 0 d'après la Proposition 8.
La seconde limite se ramène à la première en changeant x en $\frac{1}{x}$.

Les Propositions 8 et 9 expriment qu'en cas de conflit, l'exponentielle l'emporte sur toute puissance, et que toute puissance l'emporte sur le logarithme.

Exercice 7. Soient n et k deux entiers >0, et soit $f(x)$ la dérivée k-ième de la fonction $x^n e^{-\sqrt{x}}$. Montrez que $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 8. Pour $x>0$, calculez la dérivée de la fonction x^x.

Exercice 9. Trouvez la limite, quand $x\neq 0$ tend vers 0, de
$$\frac{1}{\operatorname{Log}(1+x)} - \frac{1}{x}.$$

V. Indications sur les Exercices proposés dans cette Leçon.

Exercice 1. Il est impossible que $\log_{10} 2 = \frac{p}{q}$, car ceci signifierait que $10^{\frac{p}{q}} = 2$, donc $10^p = 2^q$: or 10^p est divisible par 5 et 2^q ne l'est pas.

Exercice 2. 4°). Si $y = \log_a x$, on a $x = a^y$, donc $x^\alpha = (a^y)^\alpha = a^{\alpha y}$. Par conséquent $\alpha y = \log_a(x^\alpha)$, cqfd.

Exercice 3. Il suffit de diviser par uv (resp. par $\frac{u}{v}$) la relation $(uv)' = uv' + u'v$ (resp. la relation $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$).

Si $f(x) = \dfrac{(x^2+1)^5}{(2x^4+1)^3}$, on a $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = 5\,\dfrac{2x}{x^2+1} - 3\,\dfrac{8x^3}{2x^4+1}$, d'où

$$f'(x) = \left(\frac{x^2+1}{2x^4+1}\right)^4 (10x - 24x^3 - 4x^5).$$

Exercice 4. L'inégalité $\operatorname{Log}(1+x) \leq x$ exprime que, par concavité, le graphe de $\operatorname{Log}(1+x)$ est sous sa tangente à l'origine. La fonction $\varphi(x) = \operatorname{Log}(1+x) - \frac{x}{1+x}$ est nulle pour $x = 0$, et sa dérivée

$$\varphi'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{1}{1+x}\left[1 - \frac{1}{1+x}\right]$$ est ≥ 0 pour $x \geq 0$. Donc $\varphi(x)$ est croissante pour $x \geq 0$, ce qui prouve que $\varphi(x) \geq 0$ car $\varphi(0) = 0$.

Exercice 5. La fonction $y \mapsto x^y$ a pour dérivée à l'origine $\operatorname{Log} x$, donc $\operatorname{Log} x = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{x} - 1\right)$.

Exercice 6. $173 = 13^2 + 4$; ici $N = 13$, $x = 4$. On approche $\sqrt{173}$ par $13\left(1 + \dfrac{4}{2\times 169} - \dfrac{16}{8 \times 169^2}\right) = 13,15294\ldots$, avec 5 décimales exactes.

De même, si $A = 997$, on prend $N = 32$ et $x = -27$, d'où $\sqrt{997} = 31,5753\ldots$

Exercice 7. Par récurrence sur k, on montre que $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)\sqrt{x}}\, e^{-\sqrt{x}}$ et on applique la Proposition 8. Ici P et Q sont des polynômes.

Exercice 8. $x^x(1 + \operatorname{Log} x)$. Exercice 9 : $\frac{1}{2}$.

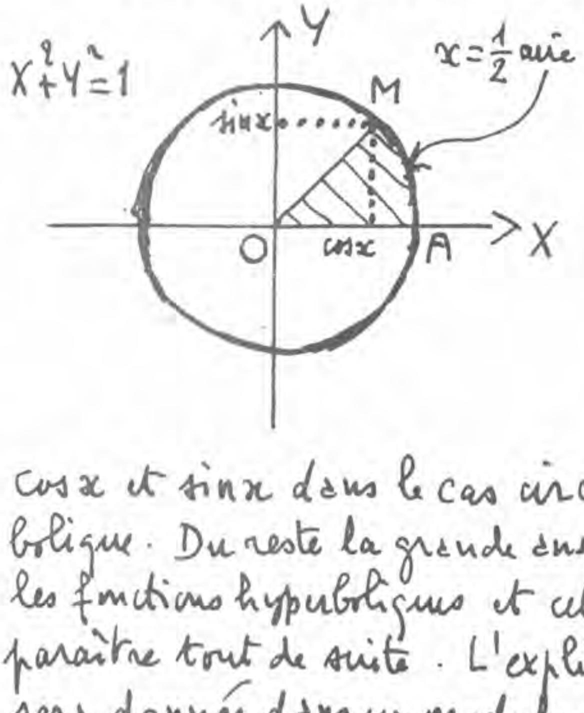
Fonctions hyperboliques

I. Pour tout nombre réel x, on pose :

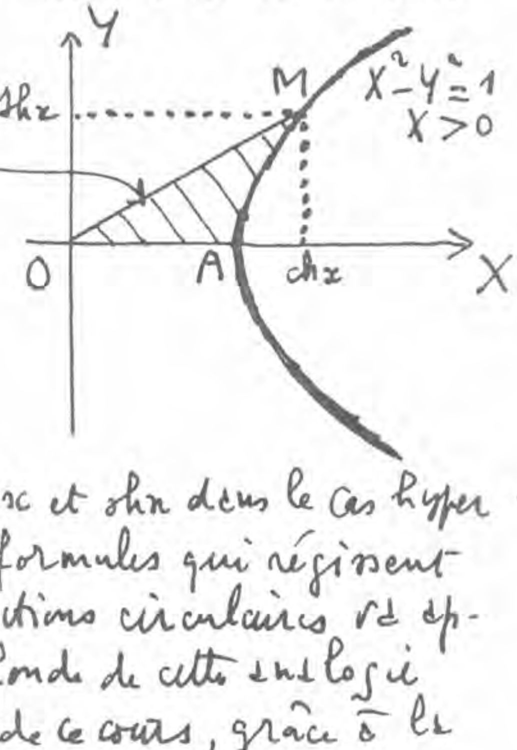
$$\boxed{\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}} \quad \text{et} \quad \boxed{\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}},$$

qu'on appelle respectivement le <u>cosinus hyperbolique</u> et le <u>sinus hyperbolique</u> du nombre x.

Quand nous disposerons de la notion d'intégrale, donc d'aire, nous pourrons justifier cette terminologie en remarquant que, si dans un plan euclidien OXY on considère d'une part le cercle $X^2+Y^2=1$, d'autre part la branche d'<u>hyperbole</u> équilatère $X>0$, $X^2-Y^2=1$, et si, dans chaque cas, on désigne par x la moitié de l'aire hachurée du "secteur" OAM, alors les coordonnées de M sont



$x = \frac{1}{2}$ aire hachurée



$\cos x$ et $\sin x$ dans le cas circulaire, $\operatorname{ch} x$ et $\operatorname{sh} x$ dans le cas hyperbolique. Du reste la grande analogie des formules qui régissent les fonctions hyperboliques et celles des fonctions circulaires va apparaître tout de suite. L'explication profonde de cette analogie sera donnée dans un module ultérieur de ce cours, grâce à la fonction exponentielle de variable <u>complexe</u>.

Par convexité de la fonction exponentielle, remarquons que $\operatorname{ch} x$ est toujours ≥ 1. Pour tout x réel, on pose encore :

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}, \quad \text{et}, \text{ si } x \neq 0, \quad \operatorname{coth} x = \frac{1}{\operatorname{th} x} = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x},$$

qu'on appelle respectivement la tangente et la cotangente hyperboliques du nombre x.

Pour tous x et y réels on a les <u>propriétés</u> suivantes :

1°) $\mathrm{ch}(-x) = \mathrm{ch}\,x$; $\mathrm{sh}(-x) = -\,\mathrm{sh}\,x$; $\mathrm{th}(-x) = -\,\mathrm{th}\,x$.

Autrement dit : la fonction ch est paire, les fonctions sh et th sont impaires.

2°) $$\mathrm{ch}\,x + \mathrm{sh}\,x = e^{x} \quad ; \quad \mathrm{ch}\,x - \mathrm{sh}\,x = e^{-x},$$

d'où en multipliant membre à membre :

$$\boxed{\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1},$$

puis, en divisant par $\mathrm{ch}^2 x$:

3°) $$1 - \mathrm{th}^2 x = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}.$$

<u>Exercice 1</u>. Ecrire l'analogue de la formule de de Moivre (Leçon n°4).

4°) (<u>Formules d'addition</u>). Dans la formule $e^{x+y} = e^{x}e^{y}$, reportons le 2°), et développons le second membre :

$$\mathrm{ch}(x+y) + \mathrm{sh}(x+y) = (\mathrm{ch}\,x + \mathrm{sh}\,x)(\mathrm{ch}\,y + \mathrm{sh}\,y) = \mathrm{ch}\,x\,\mathrm{ch}\,y + \mathrm{sh}\,x\,\mathrm{sh}\,y + \mathrm{sh}\,x\,\mathrm{ch}\,y + \mathrm{ch}\,x\,\mathrm{sh}\,y$$

A cette relation, joignons celle obtenue en changeant y en $-y$ et x en $-x$:

$$\mathrm{ch}(x+y) - \mathrm{sh}(x+y) = \mathrm{ch}\,x\,\mathrm{ch}\,y + \mathrm{sh}\,x\,\mathrm{sh}\,y - \mathrm{sh}\,x\,\mathrm{ch}\,y - \mathrm{ch}\,x\,\mathrm{sh}\,y$$

d'où, par addition et soustraction, et division par deux :

$$\boxed{\begin{aligned} \mathrm{ch}(x+y) &= \mathrm{ch}\,x\,\mathrm{ch}\,y + \mathrm{sh}\,x\,\mathrm{sh}\,y \\ \mathrm{sh}(x+y) &= \mathrm{sh}\,x\,\mathrm{ch}\,y + \mathrm{ch}\,x\,\mathrm{sh}\,y \end{aligned}}$$

On en déduit les formules :

5°) $$\mathrm{th}(x+y) = \frac{\mathrm{th}\,x + \mathrm{th}\,y}{1 + \mathrm{th}\,x\,\mathrm{th}\,y},$$

et :

6°) $\mathrm{ch}(2x) = \mathrm{ch}^2 x + \mathrm{sh}^2 x = 2\,\mathrm{ch}^2 x - 1 = 2\,\mathrm{sh}^2 x + 1$;

$\mathrm{sh}(2x) = 2\,\mathrm{sh}\,x\,\mathrm{ch}\,x$;

$$\mathrm{th}(2x) = \frac{2\,\mathrm{th}\,x}{1 + \mathrm{th}^2 x}.$$

<u>Exercice 2</u>. Montrer que, pour tout entier $n \geq 0$, on a la formule :

$$\mathrm{ch}(nx) = T_n(\mathrm{ch}\,x),$$

où les T_n sont les polynômes de Chebyshev (cf. l'Ex 3 de la Leçon n°4).

7°) (<u>dérivées</u> des fonctions hyperboliques). Les fonctions ch, sh et th sont indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$. Vu que $(e^x)' = e^x$, on a :

$$(\mathrm{ch}\,x)' = \mathrm{sh}\,x \quad ; \quad (\mathrm{sh}\,x)' = \mathrm{ch}\,x \; ; \; (\mathrm{th}\,x)' = 1 - \mathrm{th}^2 x = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}.$$

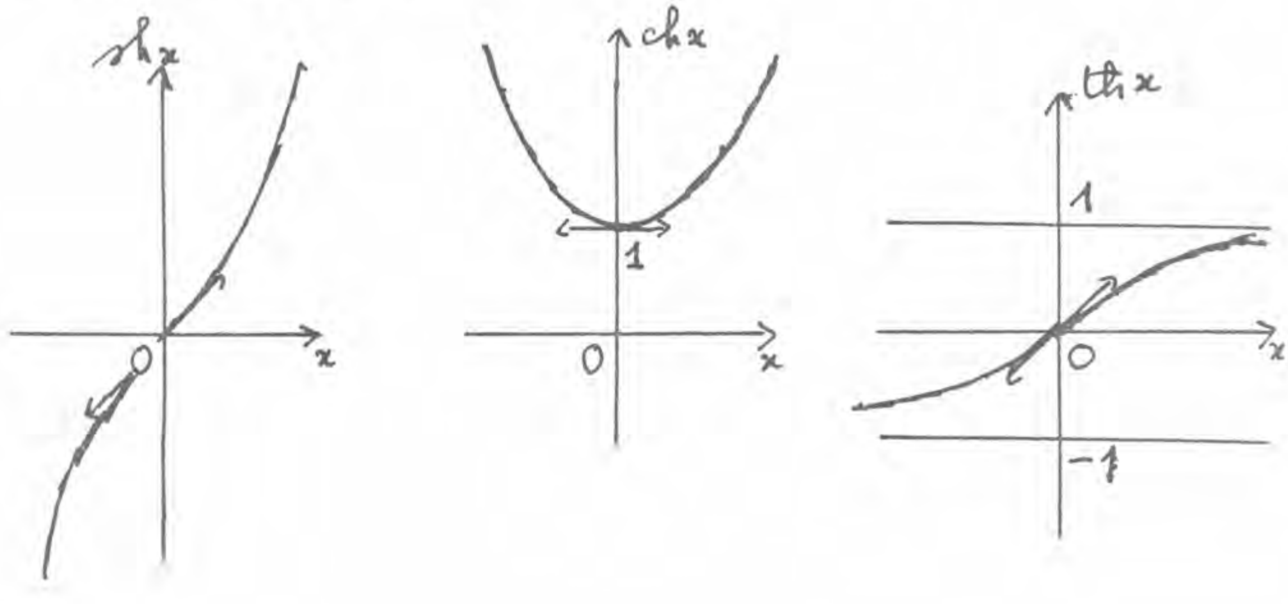
8°) (étude de sh x). Puisque $(\mathrm{sh}\,x)' = \mathrm{ch}\,x \geq 1 > 0$, la fonction impaire $\mathrm{sh}\,x$ est croissante. Sa dérivée à l'origine vaut 1. On a $(\mathrm{sh}\,x)'' = \mathrm{sh}\,x > 0$ pour $x > 0$; la fonction sh est convexe pour $x > 0$. Quand $x \to +\infty$, e^x tend vers $+\infty$ et e^{-x} vers 0, donc $\lim_{x \to +\infty} \mathrm{sh}\,x = +\infty$ et même, pour tout $\alpha > 0$, on a : $\lim_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{sh}\,x}{x^\alpha} = +\infty$.

9°) (étude de ch x). Puisque $(\mathrm{ch}\,x)' = \mathrm{sh}\,x$ est ≥ 0 pour $x \geq 0$, la fonction paire $\mathrm{ch}\,x$ est croissante pour $x \geq 0$, vaut 1 pour $x = 0$. Sa dérivée à l'origine est nulle. On a $(\mathrm{ch}\,x)'' = \mathrm{ch}\,x > 0$, donc la fonction ch est strictement convexe sur $\mathbb{R}$. Quand x tend vers $+\infty$, la fonction $\mathrm{ch}\,x$ tend vers $+\infty$, plus vite que tout x^α, $\alpha > 0$; on a toujours $\mathrm{ch}\,x > \mathrm{sh}\,x$, mais $\mathrm{ch}\,x - \mathrm{sh}\,x = e^{-x}$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

10°) (étude de th x). Puisque $(\mathrm{th}\,x)' = 1/\mathrm{ch}^2 x > 0$, la fonction impaire $\mathrm{th}\,x$ est croissante. On a $\mathrm{th}\,0 = 0$ et $\mathrm{th}'0 = 1$. Quand $x \to +\infty$,

$$\mathrm{th}\,x = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = 1 - \frac{2}{e^{2x} + 1}$$

tend vers 1 en croissant.



On appelle "chaînette" le graphe de ch x : c'est en effet la forme que prend un fil homogène pesant suspendu par ses deux extrémités.

Exercice 3. Calculez les dérivées des fonctions Log(ch x) et Arctg(e^x).

Maintenant appliquons la formule de Taylor à la fonction $f(x) = \mathrm{ch}\, x$ entre les points 0 et x. Pour tout entier $k \geq 0$, on a :

$f^{(k)}(x) = \mathrm{ch}\, x$ si k est pair ; $f^{(k)}(x) = \mathrm{sh}\, x$ si k est impair ;

donc $f^{(k)}(0) = 1$ si k est pair, et $f^{(k)}(0) = 0$ si k est impair. Par conséquent :

11°) Pour tout x réel, et tout entier $n \geq 0$, il existe un nombre ξ situé entre 0 et x tel que :

$$\mathrm{ch}\, x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \mathrm{ch}\,\xi \; \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} .$$

Or, pour x fixé, $\mathrm{ch}\,\xi \leq \mathrm{ch}\, x$, et, à la leçon n°2, on a vu que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} = 0$, donc :

12°) Pour tout x réel fixé,

$$\boxed{\mathrm{ch}\, x = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!}\right)} ,$$

et l'erreur commise en remplaçant ch x par la parenthèse est $\leq \mathrm{ch}\, x \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}$.

On démontre de même que,

$$\boxed{\mathrm{sh}\, x = \lim_{n\to+\infty} \left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)} ,$$

l'erreur commise en remplaçant sh x par la parenthèse étant $\leq \mathrm{ch}\, x \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!}$.

Exercice 4. Soit n un entier ≥ 0. Trouvez des formules pour les sommes

$$S = 1 + \mathrm{ch}\, x + \mathrm{ch}(2x) + \cdots + \mathrm{ch}(nx)$$

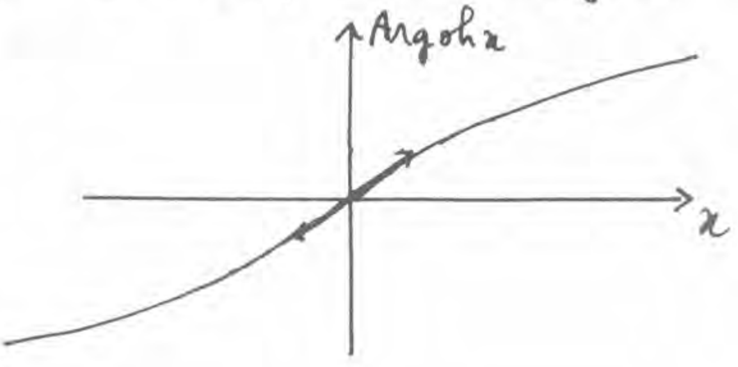
et

$$T = \mathrm{sh}\, x + \mathrm{sh}(2x) + \cdots + \mathrm{sh}(nx) .$$

II. Fonctions réciproques des fonctions hyperboliques

La fonction sh définit une application continue strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Elle admet donc une fonction réciproque, continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$; cette fonction réciproque est notée $y = \text{Argsh}\, x$, ce qui se lit : argument sinus hyperbolique x.

Pour tout x réel, $y = \text{Argsh}\, x$ est l'unique nombre réel y tel que $x = \text{sh}\, y$.



Le graphe de Argsh se déduit de celui de sh par symétrie par rapport à la première bissectrice.

En fait $y = \text{Argsh}\, x$ peut s'exprimer à partir de symboles connus antérieurement. En effet, si $y = \text{Argsh}\, x$,

$$x = \text{sh}\, y = \frac{e^y - e^{-y}}{2} = \frac{e^{2y} - 1}{2e^y},$$

donc

$$e^{2y} - 2x e^y - 1 = 0,$$

et, en résolvant l'équation du second degré en e^y :

$$e^y = x \pm \sqrt{1+x^2}.$$

Puisque $e^y > 0$, il faut prendre le signe $+$, donc $e^y = x + \sqrt{1+x^2}$, d'où, en prenant les Log des deux membres, la formule

$$\boxed{\text{Argsh}\, x = \text{Log}\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)}.$$

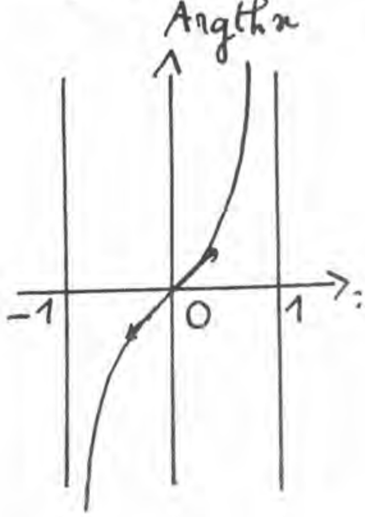
En dérivant le deuxième membre, on obtient :

$$\left(\text{Argsh}\, x\right)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

<u>Exercice 5</u>. Donnez une autre démonstration de cette formule en utilisant le théorème de dérivation des fonctions réciproques.

La fonction th définit une application continue strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur l'intervalle $]-1,+1[$. Elle admet donc une fonction réciproque, continue et strictement croissante de $]-1,+1[$ sur $\mathbb{R}$; cette fonction réciproque est notée $\operatorname{Argth} x$.

Pour tout x réel tel que $-1<x<1$, le nombre $y=\operatorname{Argth} x$ est l'unique nombre réel y tel que $x=\operatorname{th} y$.



Le graphe de Argth se déduit de celui de th par symétrie par rapport à la première bissectrice.

En fait $y=\operatorname{Argth} x$ peut s'exprimer à partir de symboles connus antérieurement. En effet, si $y=\operatorname{Argth} x$, on a :

$$x=\operatorname{th} y=\frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1},$$

donc $e^{2y}=\dfrac{1+x}{1-x}$, ce qui, pour $-1<x<1$, est bien >0. En prenant les Log des deux membres, on obtient la formule :

$$\boxed{\operatorname{Argth} x=\frac{1}{2}\operatorname{Log}\frac{1+x}{1-x}}$$

pour $-1<x<1$.

En dérivant le deuxième membre, on trouve que :

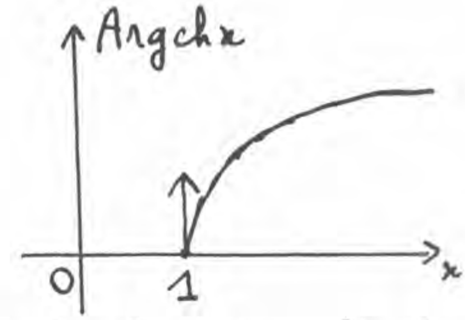
$$(\operatorname{Argth} x)'=\frac{1}{1-x^2},$$

formule qu'on aurait pu aussi obtenir par le théorème de dérivation des fonctions réciproques.

La fonction ch n'est pas monotone sur $\mathbb{R}$; pour prendre sa réciproque, restreignons-nous à sa définition pour $x\geqslant 0$. Alors ch est une application continue strictement croissante de $[0,+\infty[$ sur $[1,+\infty[$. Elle admet une fonction réciproque,

continue et strictement croissante de $[1,+\infty[$ sur $[0,+\infty[$; cette fonction réciproque est notée $\operatorname{Argch} x$.

Pour tout x réel ≥ 1, le nombre $y = \operatorname{Argch} x$ est l'unique nombre réel $y \geq 0$ tel que $x = \operatorname{ch} y$.



Le graphe de Argch se déduit par symétrie par rapport à la première bissectrice de la demi-chaînette, graphe de $\operatorname{ch} x$ pour $x \geq 0$.

En fait $y = \operatorname{Argch} x$ peut s'exprimer à partir de symboles connus antérieurement. En effet, si $y = \operatorname{Argch} x$, on a: $x = \operatorname{ch} y$, et $\operatorname{sh} y = +\sqrt{x^2-1}$ en vertu de la propriété 2) et du fait que $y \geq 0$, donc

$$e^y = x + \sqrt{x^2-1},$$

d'où, en prenant les Log des deux membres, la formule:

$$\boxed{\operatorname{Argch} x = \operatorname{Log}(x + \sqrt{x^2-1})}$$

pour tout x réel ≥ 1. On en déduit que

$$(\operatorname{Argch} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

<u>Exercice 6</u>. Résoudre l'équation $\operatorname{ch} x + 2\operatorname{sh} x = 3$.

<u>Exercice 7</u>. Soient a, b et c trois constantes réelles non nulles. Discuter le nombre de racines de l'équation

$$a \operatorname{ch} x + b \operatorname{sh} x = c.$$

On pourra supposer $c > 0$. On sera amené à distinguer selon que $b^2 + c^2 - a^2$ est < 0, $= 0$, > 0, ce dernier cas lui-même se subdivisant.

III. Indications sur les Exercices proposés dans cette Leçon.

Exercice 1. $(\mathrm{ch}\,x+\mathrm{sh}\,x)^n=(e^x)^n=e^{nx}=\mathrm{ch}(nx)+\mathrm{sh}(nx)$.

Exercice 2. $\mathrm{ch}(0x)\equiv 1\equiv T_0(x)$; $\mathrm{ch}\,x\equiv\mathrm{ch}\,x\equiv T_1(\mathrm{ch}\,x)$, et, pour $n\geq 1$, $\mathrm{ch}[(n+1)x]+\mathrm{ch}[(n-1)x]=2\,\mathrm{ch}(nx)\,\mathrm{ch}\,x$, donc $\mathrm{ch}(nx)$ satisfait à la même relation de récurrence que $T_n(\mathrm{ch}\,x)$ et aux mêmes conditions initiales.

Exercice 3. $[\mathrm{Log}(\mathrm{ch}\,x)]'=\mathrm{th}\,x$; $(\mathrm{Arctg}\,e^x)'=\dfrac{1}{2\,\mathrm{ch}\,x}$.

Exercice 4.
$$\begin{cases} S+T=1+e^x+e^{2x}+\dots+e^{nx}=\dfrac{1-e^{(n+1)x}}{1-e^x} \;; \\ S-T=1+e^{-x}+e^{-2x}+\dots+e^{-nx}=\dfrac{1-e^{-(n+1)x}}{1-e^{-x}}. \end{cases}$$
d'où, après calculs, les formules :
$$S=\frac{\mathrm{ch}\frac{nx}{2}\,\mathrm{sh}\frac{(n+1)x}{2}}{\mathrm{sh}\frac{x}{2}} \quad\text{et}\quad T=\frac{\mathrm{sh}\frac{nx}{2}\,\mathrm{sh}\frac{(n+1)x}{2}}{\mathrm{sh}\frac{x}{2}}.$$

Exercice 5. Si $f(x)=\mathrm{sh}\,x$, on a : $f'(x)=\mathrm{ch}\,x$, et $f^{-1}(x)=\mathrm{Arg\,sh}\,x$. Par conséquent
$$[f^{-1}(x)]'=\frac{1}{f'[f^{-1}(x)]}=\frac{1}{\mathrm{ch}(\mathrm{Arg\,sh}\,x)}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$
vu la propriété 2°).

Exercice 6. L'équation s'écrit $\dfrac{e^{2x}+1}{2}+2\,\dfrac{e^{2x}-1}{2}=3e^x$ ou encore $3(e^x)^2-6e^x-1=0$, donc $e^x=\dfrac{3\pm 2\sqrt{3}}{3}$. Comme $e^x>0$, seul le signe + convient, d'où $x=\mathrm{Log}\left(1+\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$.

Exercice 7. On peut écrire l'équation proposée comme suit :
$$(a+b)(e^x)^2-2c\,e^x+(a-b)=0.$$
Le trinôme en e^x a pour discriminant $b^2+c^2-a^2$. Si $b^2+c^2-a^2<0$, pas de solution. Si $b^2+c^2-a^2=0$, une solution $x=\mathrm{Log}\dfrac{c}{a+b}$ pourvu que $a+b>0$. Si $b^2+c^2-a^2>0$, on a deux, une ou zéro solutions selon que $a+b$ et $a-b$ sont tous deux >0, de signes opposés, ou tous deux <0.

AN01 Leçon n° 10

Développements limités

I. Utilisation d'équivalents dans le calcul des limites

Aux Leçons 2 et 4 on a envisagé divers modes de passage à la limite : $\lim\limits_{n\to+\infty}$, $\lim\limits_{x\to x_0}$, $\lim\limits_{x\to x_0, x>x_0}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}$ etc.... Ce qu'on dira dans cette leçon est valable dans ces diverses circonstances. Pour fixer les idées nous prendrons souvent l'exemple de $\lim\limits_{x\to x_0}$, et même de $\lim\limits_{x\to 0}$ auquel on se ramène en changeant x en $x+x_0$.

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, et $x_0 \in I$. Soient f et g deux fonctions définies dans I, à valeurs complexes. On dit que f et g sont <u>équivalentes</u> quand $x \to x_0$ si, pour $|x-x_0|$ assez petit, il existe une fonction $h(x)$ telle que :

$$f(x) = g(x)\,h(x) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to x_0} h(x) = 1.$$

Alors g et f sont équivalentes ; et, si une troisième fonction φ est équivalente à g, alors f et φ sont équivalentes. On écrit $f(x) \sim g(x)$.

Si $f(x)$ est dérivable à l'origine, et si $f'(0) \neq 0$, la définition de la dérivée montre que $f(x) - f(0) \sim f'(0)\,x$ quand $x \to 0$. En vous reportant aux Leçons précédentes, cette remarque vous permettra de dresser une première liste d'équivalents classiques, pour $x \to 0$:

$\sin x \sim x$	$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$, si $\alpha \in \mathbb{R}$,
$\operatorname{tg} x \sim x$	$\operatorname{Log}(1+x) \sim x$
$\operatorname{sh} x \sim x$	$\operatorname{Arctg} x \sim x$
$\operatorname{th} x \sim x$	$\operatorname{Arcsin} x \sim x$
$e^x - 1 \sim x$	$\operatorname{Argth} x \sim x$
$a^x - 1 \sim x \operatorname{Log} a$	$\operatorname{Argsh} x \sim x$

D'autre part, si $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ est un polynôme $\neq 0$ de degré n, on a :

$$P(x) \sim a_n x^n \quad \text{quand } x \to \pm\infty.$$

En effet $P(x) = a_n x^n h(x)$, où $h(x) = 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n}\frac{1}{x} + \cdots + \frac{a_1}{a_n}\frac{1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n}\frac{1}{x^n}$ tend vers 1 quand $x \to \pm\infty$.

<u>Proposition 1</u>. Soit l un nombre réel, qui a le droit d'être nul, ou bien $l = +\infty$ ou $-\infty$. Supposons que $f(x) \sim g(x)$, et que $\lim g(x) = l$. Alors $\lim f(x) = l$.

<u>Démonstration</u>. Car $f(x) = g(x)h(x)$ avec $\lim h(x) = 1$, et
$$\lim f(x) = \lim[g(x)h(x)] = (\lim g(x))(\lim h(x)) = l\,1 = l.$$

<u>Remarque</u>. Si $l = 0$ ou $\pm\infty$, la réciproque est fausse; $f(x)$ et $g(x)$ peuvent avoir même limite (nulle ou infinie) sans être équivalentes. Par exemple les fonctions x et x^2 tendent vers 0 quand $x \to 0$, mais ne sont pas équivalentes.

<u>Proposition 2</u>. Si $f(x) \sim g(x)$ et $f_1(x) \sim g_1(x)$, alors:
$$f(x)f_1(x) \sim g(x)g_1(x).$$

<u>Démonstration</u>. En effet par hypothèse $f(x) = g(x)h(x)$ et $f_1(x) = g_1(x)h_1(x)$ avec $\lim h(x) = 1$ et $\lim h_1(x) = 1$. Donc
$$f(x)f_1(x) = g(x)g_1(x)\,h(x)h_1(x), \quad \text{avec } \lim[h(x)h_1(x)] = 1.$$

La Proposition 2 s'étend à un nombre fini de facteurs; de plus, si $f(x) \sim g(x)$ sont partout > 0, et si α est réel, on démontre de même que $[f(x)]^\alpha \sim [g(x)]^\alpha$; par exemple $\sqrt{f(x)} \sim \sqrt{g(x)}$.

Enfin, si $f(x) \sim g(x)$, on a $\frac{1}{f(x)} \sim \frac{1}{g(x)}$ si ces inverses ont un sens.

Mais prenez garde que $f \sim g$ et $f_1 \sim g_1$ n'impliquent nullement que $f + f_1$ soit équivalent à $g + g_1$ ou $f - f_1$ à $g - g_1$. Par exemple, quand $x \to 0$, $x + x^2 \sim x + x^3$ et $x \sim x$, mais x^2 n'équivaut pas à x^3.

En résumé, pour calculer la limite d'une expression du type
$$\frac{[f_1(x)]^{\alpha_1}[f_2(x)]^{\alpha_2}\cdots\cdots[f_p(x)]^{\alpha_p}}{[g_1(x)]^{\beta_1}[g_2(x)]^{\beta_2}\cdots\cdots[g_q(x)]^{\beta_q}},$$
on peut remplacer chaque f_i et chaque g_j par un équivalent, mais il ne faut jamais faire la somme ou la différence d'équivalents.

Puisque $1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} \sim 2\left(\frac{x}{2}\right)^2$, on obtient, quand $x\to 0$:
$1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}$ et, de même, $\operatorname{ch} x - 1 \sim \frac{x^2}{2}$.

Si $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$, avec $a_n \neq 0$ et $b_m \neq 0$, est une fraction rationnelle, $\frac{P(x)}{Q(x)} \sim \frac{a_n}{b_m} x^{n-m}$ quand $x \to \pm\infty$.

<u>Exercice 1</u>. Calculez $\lim\limits_{x\to 0, x\neq 0} \frac{(e^x-1)\operatorname{Log}(1+x)}{1-\cos x}$ et $\lim\limits_{x\to 0, x\neq 0} \frac{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x}}{x\sqrt{\operatorname{tg} x}}$.

<u>Exercice 2</u>. Calculez $\lim\limits_{x\to+\infty} (4x^3-3x^2+8)\sin x \operatorname{tg}\frac{1}{x^4}$.

II <u>Définition des développements limités</u>. <u>Théorème de Taylor-Young</u>.

<u>Préambule</u>. Si une fonction $f(x)$ est dérivable au point $x=0$, et si on pose $a_0 = f(0)$, $a_1 = f'(0)$, on peut écrire :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \varepsilon(x)\, x,$$

où $\varepsilon(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 0. Autrement dit : au voisinage de 0 on peut remplacer la fonction (compliquée) $f(x)$ par la fonction polynômiale de degré 1 (simple) $a_0 + a_1 x$, en ne commettant qu'une erreur $\varepsilon(x)x$ qui tend vers 0 plus vite que ne le fait x.

Les fonctions usuelles sont fréquemment indéfiniment dérivables dans un intervalle ouvert I qui contient 0. Si c'est le cas pour $f(x)$, posons :

$$a_0 = f(0),\quad a_1 = \frac{f'(0)}{1!},\ \ldots\ldots,\ a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!},\ \ldots\ldots$$

Au Chapitre 6 nous avons vu que, si n est un entier <u>fixé</u> ≥ 1, la formule de Taylor permet d'écrire pour tout $x \in I$

$$(1)\qquad f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots\cdots + a_n x^n + \varepsilon(x)\, x^n,$$

où $\varepsilon(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x$ et où ξ est un nombre réel compris entre 0 et x. Puisqu'ici $f^{(n+1)}$ est supposée continue sur I, quand $x\to 0$ $f^{(n+1)}(\xi)$ tend vers $f^{(n+1)}(0)$, et donc $\varepsilon(x)$ tend vers 0. Par suite on peut remplacer, grâce à (1), au voisinage de 0 la fonction $f(x)$

par la fonction polynômiale de degré n

$$x \mapsto a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n,$$

en commettant une erreur $\varepsilon(x)x^n$ qui tend vers 0 plus vite que ne le fait x^n. Plus $|x|$ est petit et plus n est grand, et d'autant meilleure sera l'approximation ainsi faite.

Exercice 3. On pose $P(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$. Calculez $P(\frac{1}{10})$ et comparez le nombre obtenu avec $\exp(\frac{1}{10})$.

Définition. Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, contenant 0. Soit f une fonction définie dans I, à valeurs complexes. Soit n un entier ≥ 0. S'il existe des constantes complexes $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ telles que

$$(1) \quad f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots\cdots + a_n x^n + \varepsilon(x) x^n,$$

avec $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$, on dit que (1) est un développement limité d'ordre n de $f(x)$ au voisinage de l'origine.

Unicité. Si f admet un développement limité (1) à l'ordre n, ce développement est unique, car $a_0 = f(0)$, et pour $0 < k \leq n$, les coefficients a_k sont déterminés par : $a_k = \lim_{x \to 0, x \neq 0} \frac{f(x) - a_0 - a_1 x - \cdots - a_{k-1} x^{k-1}}{x^k}$

Développement à l'ordre $p < n$: Supposons que (1) soit un développement limité de $f(x)$ à l'ordre n. Alors, pour tout $p < n$, les mêmes constantes $a_0, a_1, \dots, a_p$ fournissent un développement limité de $f(x)$ d'ordre p :

$$(2) \quad f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_p x^p + \varepsilon_1(x) x^p.$$

Il suffit en effet de poser : $\varepsilon_1(x) = a_{p+1} x + \cdots + a_n x^{n-p} + \varepsilon(x) x^{n-p}$. Mais le développement (2) est moins fin, moins précis que le développement (1).

La méthode exposée au Préambule, qui s'appuie sur la formule de Taylor, fournit les développements limités de nombreuses fonctions usuelles. Avant de l'appliquer à des exemples, donnons-lui une formulation utilisant moins d'hypothèses que celles du Préambule : on y suppose l'existence d'une dérivée de moins, et la dernière dérivée est seulement supposée exister à l'origine.

__Théorème 1__ (de Taylor-Young). Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, contenant 0. Soit f une fonction définie dans I, à valeurs complexes. Soit n un entier $\geqslant 0$. On suppose que :

1) quel que soit $0 \leqslant p \leqslant n-1$, la dérivée $f^{(p)}$ existe et est continue dans I ;

2) $f^{(n)}(0)$ existe.

Alors $f(x)$ admet au voisinage de 0 le développement limité d'ordre n :

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots\dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \varepsilon(x)x^n,$$

où $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

__Démonstration__. Il s'agit de raffiner un fait que nous connaissons déjà sous des hypothèses un peu plus larges (cf. le Préambule) ; cette démonstration pourra sans inconvénient être sautée en première lecture. On se ramène immédiatement au cas où f est réelle.

Fixons provisoirement un $x \in I$, $x \neq 0$, et définissons le nombre A_x par la relation :

$$0 = f(x) - f(0) - \frac{f'(0)}{1!}x - \frac{f''(0)}{2!}x^2 - \dots\dots - \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} - A_x \frac{x^n}{n!}.$$

Pour fixer les idées, supposons $x > 0$; pour tout $t \in [0, x]$, posons :

$$\varphi(t) = f(t) - f(0) - \frac{f'(0)}{1!}t - \frac{f''(0)}{2!}t^2 - \dots\dots - \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}t^{n-1} - A_x \frac{t^n}{n!}.$$

Alors :

$$\varphi'(t) = f'(t) - f'(0) - \frac{f''(0)}{1!}t - \dots\dots - \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-2)!}t^{n-2} - A_x \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} ;$$

$$\varphi''(t) = f''(t) - f''(0) - \frac{f'''(0)}{1!}t - \dots\dots - \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-3)!}t^{n-3} - A_x \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} ;$$

etc.....

$$\varphi^{(n-1)}(t) = f^{(n-1)}(t) - f^{(n-1)}(0) - A_x t.$$

On a $\varphi(0) = \varphi(x) = 0$, donc d'après le théorème de Rolle (Leçon n°6), il existe $\xi_1 \in]0, x[$ tel que $\varphi'(\xi_1) = 0$. Mais, puisque $\varphi'(0) = \varphi'(\xi_1) = 0$, il existe $\xi_2 \in]0, \xi_1[$ tel que $\varphi''(\xi_2) = 0$. Et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on obtienne l'existence d'un $\xi_{n-1} \in]0, \xi_{n-2}[$ tel que

$\varphi^{(n-1)}(\xi_{n-1})=0$. Notons plutôt ξ ce ξ_{n-1}. Le nombre ξ est entre 0 et x, et l'on a :

$$\frac{f^{(n-1)}(\xi)-f^{(n-1)}(0)}{\xi}=A_x .$$

Dans cette égalité faisons tendre $x\neq 0$ vers 0 ; le nombre ξ, situé entre 0 et x, tend aussi vers 0, donc $\lim\limits_{x\to 0, x\neq 0} A_x = f^{(n)}(0)$. Autrement dit :

$$A_x = f^{(n)}(0) + \varepsilon(x) ,$$

où $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$, cqfd.

III. Première liste de développements limités usuels

Dans les Leçons précédentes, nous avons calculé les dérivées n-ièmes à l'origine de quelques fonctions classiques. En s'y reportant, le théorème de Taylor-Young fournit au voisinage de 0, les développements limités suivants, où n est un entier ≥ 0 quelconque, et où $\varepsilon(x)$ tend vers 0 quand $x\to 0$:

$$\sin x = x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+\cdots\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\varepsilon(x)x^{2n+2}$$

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\cdots\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\varepsilon(x)x^{2n+1}$$

$$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots\cdots+\frac{x^n}{n!}+\varepsilon(x)x^n$$

$$a^x = 1+\frac{\operatorname{Log}a}{1!}x+\frac{(\operatorname{Log}a)^2}{2!}x^2+\cdots\cdots+\frac{(\operatorname{Log}a)^n}{n!}x^n+\varepsilon(x)x^n, \text{ si } a>0$$

$$\operatorname{ch} x = 1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\varepsilon(x)x^{2n+1}$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{x}{1!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots\cdots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\varepsilon(x)x^{2n+2}$$

$$\operatorname{Arctg} x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\varepsilon(x)x^{2n+2}$$

$$\operatorname{Arcsin} x = x+\frac{x^3}{6}+\frac{3x^5}{40}+\cdots\cdots+\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\varepsilon(x)x^{2n+2}$$

Si α est un nombre réel, on a le développement limité "du binôme":

$$(1+x)^\alpha = 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+\cdots\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\varepsilon(x)x^n,$$

avec comme cas particuliers ($\alpha=\frac{1}{2}$, $\alpha=-\frac{1}{2}$, $\alpha=-1$):

$$\sqrt{1+x} = 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2.4.6\ldots(2n)}x^n+\varepsilon(x)x^n \quad ;$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1-\frac{x}{2}+\frac{3x^2}{8}+\cdots\cdots+(-1)^n\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)}x^n+\varepsilon(x)x^n \,;$$

$$\frac{1}{1+x} = 1-x+x^2+\cdots\cdots+(-1)^n x^n+\varepsilon(x)x^n \quad ;$$

Exercice 4. Etablir ce dernier développement directement par la formule de la progression géométrique.

Enfin la Leçon n°8 nous fournit le développement, pour $x\to 0$,

$$\mathrm{Log}(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\varepsilon(x)x^n \quad .$$

IV. Opérations sur les développements limités

A partir de développements limités connus, on peut en trouver d'autres par somme, produit, quotient, composition, dérivation, primitivation.

Si une fonction paire (i.e. telle que $f(x)\equiv f(-x)$) a un développement limité (1), nécessairement $a_1=a_3=a_5=\ldots\ldots=0$. En effet:

$$\begin{cases} f(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots\cdots+a_nx^n+\varepsilon(x)x^n \\ f(-x)=f(x) = a_0-a_1x+a_2x^2-a_3x^3+\cdots\cdots+(-1)^na_nx^n+\varepsilon(-x)(-1)^nx^n \end{cases}$$

sont deux développements limités à l'ordre n de $f(x)$, donc l'unicité exige que $a_n=(-1)^na_n$. De même, dans le développement limité d'une fonction impaire, les coefficients a_{2k} d'indices pairs sont nuls.

Exercice . Où constatez-vous ce phénomène dans le III ?

Somme. Si $\quad f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots+a_nx^n+\varepsilon(x)x^n$

et $\quad g(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots\cdots+b_nx^n+\varepsilon_1(x)x^n$,

avec $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$ et $\lim_{x\to 0}\varepsilon_1(x)=0$, sont des développements limités du même ordre n de $f(x)$ et $g(x)$, en additionnant et en posant $\varepsilon_2(x)=\varepsilon(x)+\varepsilon_1(x)$ que

$$f(x)+g(x)=a_0+b_0+(a_1+b_1)x+(a_2+b_2)x^2+\cdots+(a_n+b_n)x^n+\varepsilon_2(x)x^n$$

est un développement limité à l'ordre n de $f(x)+g(x)$.

Produit. Sous les mêmes hypothèses, posons:

$$P(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n \quad ; \quad Q(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n.$$

Alors on sait que:

$$P(x)Q(x)=c_0+c_1x+\cdots+c_nx^n+c_{n+1}x^{n+1}+\cdots+c_{2n}x^{2n},$$

où $c_0=a_0b_0$, $c_1=a_0b_1+a_1b_0$, $c_2=a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0$, etc..., et d'une manière générale, pour $0\leq k\leq 2n$,

$$c_k=a_0b_k+a_1b_{k-1}+\cdots+a_{k-1}b_1+a_kb_0=\sum_{p+q=k}a_pb_q.$$

Donc $$f(x)g(x)=\left[P(x)+\varepsilon(x)x^n\right]\left[Q(x)+\varepsilon_1(x)x^n\right]=$$

$$=P(x)Q(x)+\varepsilon(x)Q(x)x^n+\varepsilon_1(x)P(x)x^n+\varepsilon(x)\varepsilon_1(x)x^nx^n=$$

$$=c_0+c_1x+\cdots+c_nx^n+(c_{n+1}x+\cdots+c_{2n}x^n)x^n+\left[\varepsilon(x)Q(x)+\varepsilon_1(x)P(x)+\varepsilon\varepsilon_1(x)x^n\right]x^n$$

Ainsi $$f(x)g(x)=c_0+c_1x+\cdots+c_nx^n+\varepsilon_2(x)x^n,$$

où $\varepsilon_2(x)=c_{n+1}x+\cdots+c_{2n}x^n+\varepsilon(x)Q(x)+\varepsilon_1(x)P(x)+\varepsilon(x)\varepsilon_1(x)x^n$ tend vers 0 quand $x\to 0$. Nous venons de prouver la

Proposition 3. Si $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\varepsilon(x)x^n$

et $g(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_nx^n+\varepsilon_1(x)x^n$,

avec $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$ et $\lim_{x\to 0}\varepsilon_1(x)=0$, sont des développements limités à l'ordre n de $f(x)$ et de $g(x)$, alors, en posant $c_k=\sum_{p+q=k}a_pb_q$,

$$f(x)g(x)=c_0+c_1x+\cdots+c_nx^n+\varepsilon_2(x)x^n,$$

avec $\lim_{x\to 0}\varepsilon_2(x)=0$, est un développement limité à l'ordre n de $f(x)g(x)$.

En pratique, on effectue le produit des polynômes $a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ et $b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n$, et l'on n'en conserve que les termes d'ordre $\leq n$.

Exercice 5. Ecrivez le développement limité au voisinage de 0 de $\dfrac{\cos x}{1+x}$ à l'ordre 4.

<u>Division</u>. Soient $f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + \varepsilon(x) x^n$
et $g(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n + \varepsilon_1(x) x^n$,
avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$ et $\lim_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = 0$, des développements limités, au même ordre n, de $f(x)$ et $g(x)$. Supposons que $b_0 = g(0) \neq 0$. Alors puisque $\lim_{x\to 0} g(x) = b_0$, pour $|x|$ suffisamment petit on a $g(x) \neq 0$, et il y a un sens à écrire $\frac{f(x)}{g(x)}$. Si cette fonction a un développement limité à l'ordre n :

$$(3) \qquad \frac{f(x)}{g(x)} = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots\dots + A_n x^n + \varepsilon_2(x) x^n,$$

puisque $f(x) = \frac{f(x)}{g(x)} g(x)$, d'après la Proposition 3 les coefficients inconnus $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$ s'obtiennent nécessairement (par la méthode dite "des coefficients indéterminés") en résolvant les équations :

$$(S) \qquad \begin{cases} A_0 b_0 = a_0 \\ A_1 b_0 + A_0 b_1 = a_1 \\ A_2 b_0 + A_1 b_1 + A_0 b_2 = a_2 \\ \text{etc...} \\ A_n b_0 + A_{n-1} b_1 + \dots\dots + A_1 b_{n-1} + A_0 b_n = a_n, \end{cases}$$

qui, puisque $b_0 \neq 0$, fournissent successivement de manière unique les valeurs de A_0, puis de A_1, etc.., jusqu'à A_n, en fonction des données $a_0, \dots, a_n$ et $b_0, \dots, b_n$. Reste à <u>justifier</u> cette méthode pratique, c'est-à-dire à prouver que, si, pour $x \neq 0$, on <u>définit</u> $\varepsilon_2(x)$ par la relation (3) où l'on prend pour $A_0, A_1, \dots, A_n$ la solution du système (S), alors la limite de $\varepsilon_2(x)$ est nulle quand $x \neq 0$ tend vers 0. Puisque $g(x)$ tend vers $b_0 \neq 0$, il revient au même de démontrer que $\varepsilon_2(x) g(x)$ tend vers 0. Or, en posant $a_k = \sum_{p+q=k} A_p b_q$ même pour $n < k \leq 2n$, on a :

$$\varepsilon_2(x) g(x) = \frac{1}{x^n}\left[f(x) - (A_0 + A_1 x + \dots + A_n x^n) g(x)\right] =$$

$$= \frac{1}{x^n}\Big[a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n - (A_0 + A_1 x + \dots + A_n x^n)(b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n) +$$
$$+ \varepsilon(x) x^n - (A_0 + A_1 x + \dots + A_n x^n)\varepsilon_1(x) x^n\Big] =$$

$$= a_{n+1} x + \dots + a_{2n} x^n + \varepsilon(x) - (A_0 + A_1 x + \dots + A_n x^n)\varepsilon_1(x), \text{ qui tend vers } 0.$$

On vient de prouver la

<u>Proposition</u> 4. $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ admet un développement limité à l'ordre n, dont les coefficients $A_0, A_1, \dots, A_n$ s'obtiennent en résolvant le système (S).

<u>Exercice</u> 6. Écrivez le développement limité de $\operatorname{tg} x$ à l'ordre 6 au voisinage de l'origine.

<u>Exercice</u> 7 (long). Les nombres de Bernoulli sont définis par

$$\varphi(x) = \frac{x}{e^x - 1} = B_0 + \frac{B_1}{1!}x + \frac{B_2}{2!}x^2 + \dots + \frac{B_n}{n!}x^n + \varepsilon(x)x^n,$$

où $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$. 1°) Montrez que $B_0 = 1$ et $B_1 = -\frac{1}{2}$. 2°) Montrez que la fonction $\varphi(x) + \frac{x}{2}$ est paire. Qu'en déduisez-vous pour B_3, B_5, B_7, etc…? 3°) Calculez B_2, B_4, B_6, B_8 et B_{10}. 4°) Vérifiez que $x \coth x = x + \varphi(2x)$ et que $\operatorname{th} x = 1 + \dfrac{\varphi(4x) - \varphi(2x)}{x}$. En déduire les développements limités à l'ordre 10 des fonctions $x \coth x$ et $\operatorname{th} x$.

<u>Fonction composée</u> (substitution d'un développement limité dans un autre).

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, contenant 0. Soit f une fonction à valeurs <u>réelles</u>, définie dans I et ayant un développement limité d'ordre n au voisinage de l'origine :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \varepsilon(x) x^n, \quad \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$$

Faisons l'hypothèse que $a_0 = f(0) = 0$. Soit J un intervalle ouvert contenant l'image de I par f, et soit g une fonction définie dans J, à valeurs complexes. Supposons que

$$g(u) = b_0 + b_1 u + b_2 u^2 + \dots + b_n u^n + \varepsilon_1(u) u^n, \quad \lim_{u\to 0} \varepsilon_1(u) = 0,$$

est un développement limité de g d'ordre n, au voisinage de 0.

La fonction $g\circ f(x) = g[f(x)]$ est définie dans I, et

$$g\circ f(x) = b_0 + b_1 f(x) + b_2 [f(x)]^2 + \dots + b_n [f(x)]^n + \varepsilon_1(f(x))[f(x)]^n.$$

Les règles pour la somme et le produit permettent d'écrire le développement limité :

$$b_0 + b_1 f(x) + \dots + b_n [f(x)]^n = c_0 + c_1 x + \dots + c_n x^n + \varepsilon_2(x) x^n$$

Quant au terme supplémentaire $\varepsilon_1(f(x))[f(x)]^n$, puisque $f(x)$ tend vers $a_0 = 0$ quand $x \to 0$, il est lui-même de la forme $\varepsilon_3(x)x^n$.
En résumé, on obtient un développement limité à l'ordre n de $g \circ f(x)$ en remplaçant, dans le développement limité de $g(u)$ la variable u par la partie polynômiale du développement limité de $f(x)$, en effectuant les calculs, et en ne gardant que les termes d'ordre $\leq n$ en x.

<u>Exemples</u> De $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + \varepsilon(x)x^n$, on tire en changeant x en x^2 :

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \varepsilon_1(x)x^{2n+1}$$

<u>Exercice 8</u>. Sachant, depuis l'Exercice 6, que

$$\operatorname{tg} u = u + \frac{u^3}{3} + \frac{2u^5}{15} + \varepsilon(u)u^6 \quad , \quad \lim_{u\to 0} \varepsilon(u) = 0 ,$$

écrivez le développement limité à l'ordre 6 de $\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{1-x^2}\right)$.

<u>Dérivation</u>. Ici nous allons prendre des hypothèses assez fortes pour éviter d'avoir à faire des démonstrations délicates.

<u>Proposition 5</u>. Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, contenant 0. Soit n un entier ≥ 0. Soit f une fonction à valeurs complexes, définie dans I et admettant dans I des dérivées $f^{(p)}$ continues jusqu'à l'ordre $n-1$. Supposons de plus que $f^{(n)}(0)$ existe. Ces hypothèses (de Taylor-Young) assurent (on l'a vu) que $f(x)$ a un développement limité d'ordre n :

$$(1) \qquad f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots\cdots + a_n x^n + \varepsilon(x)x^n ,$$

avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$, où d'ailleurs (Théorème 1), on sait que, pour $0 \leq k \leq n$, on a la formule $a_k = \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}$. Ceci étant, la fonction $f'(x)$ admet un développement limité d'ordre $n-1$

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + \cdots\cdots + n a_n x^{n-1} + \varepsilon_1(x)x^{n-1},$$

dont la partie polynômiale s'obtient en dérivant (terme à terme) la partie polynômiale de (1).

<u>Démonstration</u>. La fonction $f'(x)$ satisfait les hypothèses de Taylor-Young d'ordre $n-1$, donc a un développement limité

$$f'(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_{n-1} x^{n-1} + \varepsilon_1(x) x^{n-1},$$

où $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon_1(x) = 0$, et où, pour $0 \leq k \leq n-1$,

$$b_k = \frac{(f')^{(k)}(0)}{k!} = \frac{f^{(k+1)}(0)}{k!} = (k+1) a_{k+1}, \text{ cqfd.}$$

Il est souvent utile de faire une autre lecture de la Proposition 5 en posant $f'(x) = g(x)$, et $f(x) = G(x)$. Alors $G(x)$ est l'une des primitives de $g(x)$, lesquelles sur I ne diffèrent que d'une constante (Leçon n° 6). Supposons que ce soit le développement limité de $g(x)$ qui soit connu :

$$g(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_{n-1} x^{n-1} + \varepsilon_1(x) x^{n-1}.$$

Alors, en lisant à l'envers la relation $b_k = (k+1) a_{k+1}$, on obtient le <u>développement limité des primitives</u> $G(x)$ de $g(x)$:

$$G(x) = a_0 + b_0 x + b_1 \frac{x^2}{2} + \cdots + b_{n-1} \frac{x^n}{n} + \varepsilon(x) x^n,$$

en "intégrant terme à terme" celui de $g(x)$, et ajoutant la constante $a_0 = G(0)$.

<u>Exemples</u>. 1) Par dérivation, on obtient le développement limité de $\cos x$ à partir de celui de $\sin x$; de $\operatorname{ch} x$ à partir de $\operatorname{sh} x$.

2) $\left(\frac{1}{1-x}\right)^2 = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + n x^{n-1} + \varepsilon(x) x^{n-1}$.

3) On sait que $(\operatorname{Arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$, et $\operatorname{Arctg} 0 = 0$. En intégrant terme à terme : $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \varepsilon(x) x^{2n+1}$, on retrouve (beaucoup plus facilement) le développement de $\operatorname{Arctg} x$ obtenu en III par le théorème de Taylor-Young.

<u>Exercice 9</u>. Par intégration terme à terme, retrouvez les développements limités de $\operatorname{Log}(1+x)$, de $\operatorname{Arc\,sin} x$.

<u>Exercice 10</u>. Ecrire les développements limités de $\operatorname{Argth} x$, de $\operatorname{Argsh} x$.

<u>Utilisation des développements limités pour le calcul de limites :</u>

On remarque que, si un développement limité

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \varepsilon(x) x^n, \quad \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0,$$

a ses coefficients non tous nuls, et si $a_0 = a_1 = \dots = a_{p-1} = 0$, mais $a_p \neq 0$, alors, quand $x \to 0$, $f(x) \sim a_p x^p$. En effet :

$$f(x) = a_p x^p h(x), \text{ avec } h(x) = 1 + a_{p+1} x + \dots + a_n x^{n-p} + \varepsilon(x) x^{n-p},$$

donc $\lim_{x\to 0} h(x) = 1$.

Exemple : $\lim_{x\to 0, x\neq 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x} = 2$, car $\operatorname{tg} x - x = \dfrac{x^3}{3} + \varepsilon(x) x^3$ et $x - \sin x = \dfrac{x^3}{6} + \varepsilon_1(x) x^3$, donc $\operatorname{tg} x - x \sim \dfrac{x^3}{3}$ et $x - \sin x \sim \dfrac{x^3}{6}$.

Exercice 11. Calculez $\lim_{x\to 1} \dfrac{1 - 4\sin^2 \frac{\pi x}{6}}{1 - x^2}$.

V. Indications sur les exercices proposés.

Exercice 1. 2 et $\dfrac{1}{2}$.

Exercice 2. La limite est nulle car $\operatorname{tg} \dfrac{1}{x^4} \sim \dfrac{1}{x^4}$, et $\sin x$ est borné.

Exercice 3. $P(\frac{1}{10}) = 1{,}105170834..$, alors que $\exp(\frac{1}{10}) = 1{,}105170918...$

La formule de Taylor annonçait que $e^{\frac{1}{10}} - P(\frac{1}{10}) < e^{\frac{1}{10}} (\frac{1}{10})^5 \frac{1}{5!} = 0{,}000000092$.

Le résultat $0{,}000\,000\,084$ est légèrement meilleur.

Exercice 4. $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + (-1)^{n+1} \dfrac{x^{n+1}}{1+x}$, donc $\varepsilon(x) = \dfrac{(-1)^{n+1} x}{1+x}$.

Exercice 5. $\dfrac{\cos x}{1+x} = 1 - x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{2} + \dfrac{13}{24} x^4 + \varepsilon(x) x^4$, $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

Exercice 6. $\operatorname{tg} x = x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2}{15} x^5 + \varepsilon(x) x^5$, avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

Exercice 7. $B_{2k+1} = 0$ si $k \geq 1$; $B_2 = \dfrac{1}{6}$; $B_4 = -\dfrac{1}{30}$; $B_6 = \dfrac{1}{42}$; $B_8 = -\dfrac{1}{30}$; $B_{10} = \dfrac{5}{66}$. Pour tout entier $n \geq 0$, on a :

$$x \coth x = 1 + \sum_{p=1}^{n} (-1)^p \frac{2^{2p} B_{2p}}{(2p)!} x^{2p} + \varepsilon(x) x^{2n+1}, \text{ où } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0, \text{ et :}$$

$$\operatorname{th} x = \sum_{p=1}^{n} \frac{4^{2p} - 2^{2p}}{(2p)!} B_{2p} x^{2p-1} + \varepsilon(x) x^{2n}, \text{ où } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Exercice 8. $\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{1-x^2}\right) = x + \dfrac{4}{3} x^3 + \dfrac{32}{15} x^5 + \varepsilon(x) x^6$, où $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

Exercice 10. $\operatorname{Arg\,th} x = x + \dfrac{x^3}{3} + \dots + \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} + \varepsilon(x) x^{2n+2}$;

$$\operatorname{Arg\,sh} x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \dots + (-1)^n \frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2.4.6\cdots(2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \varepsilon(x) x^{2n+2}$$

Exercice 11 : $\dfrac{\pi\sqrt{3}}{6}$.

AN01 Leçon n°11

Représentation graphique des courbes $y=f(x)$

Les axes Ox, Oy seront, sauf mention contraire, toujours orthonormés. Soit $x \mapsto y=f(x)$ une fonction à valeurs réelles, définie dans un ensemble E réunion d'intervalles disjoints de $\mathbb{R}$. Soit Γ le graphe de f, c'est-à-dire l'ensemble dans $\mathbb{R}^2$ des points $M(x)$ de coordonnées $(x, f(x))$, quand x parcourt E.

I. Etude de la croissance

On se fait une première idée de l'allure de Γ, en divisant E en une succession d'intervalles dans chacun desquels f est soit croissante, soit décroissante. Ceci se fait en regardant le signe de la dérivée $f'(x)$ (cf. Leçon n°6). Rappelons que, si f est continue dans $[a,b]$ et dérivable dans $]a,b[$:

1) si $f'(x)$ est ≥ 0 (resp. >0) pour tout $x \in]a,b[$, alors f est croissante (resp. strictement croissante) dans $[a,b]$;

2) si $f'(x)$ est ≤ 0 (resp. <0) pour tout $x \in]a,b[$, alors f est décroissante (resp. strictement décroissante) dans $[a,b]$;

3) si, en un point $x_0 \in]a,b[$, la fonction f passe par un maximum ou un minimum (relatifs), alors $f'(x_0)=0$; donc les maxima et minima de f sont à chercher parmi les racines de l'équation $f'(x)=0$, mais une étude plus approfondie s'impose dans chaque cas pour décider si une racine déterminée de l'équation $f'(x)=0$ est vraiment un maximum ou un minimum ;

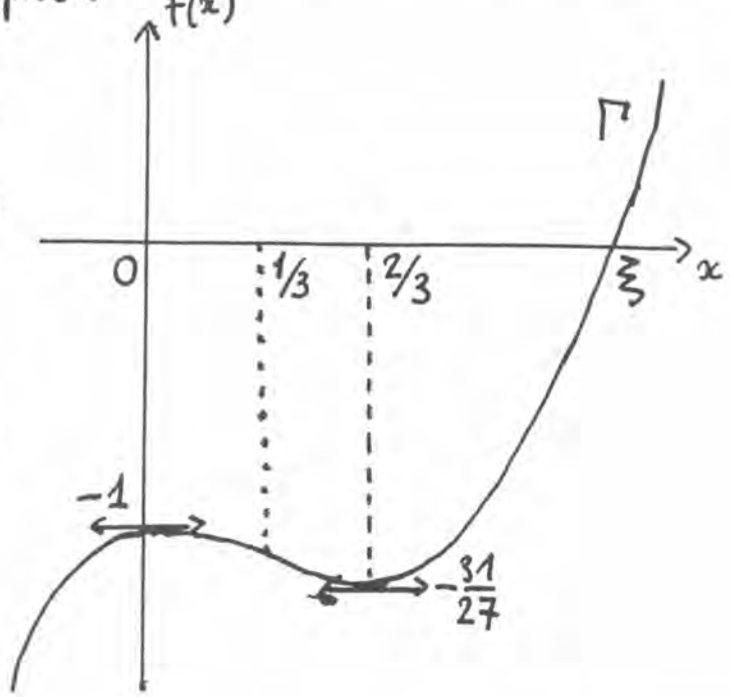
4) si de plus $f''(x)$ existe et est ≥ 0 (resp. >0) dans $]a,b[$, la fonction f est convexe (resp. strictement convexe) dans $[a,b]$; elle est concave (strictement concave) si $f''(x) \leq 0$ (<0).

Cette étude préliminaire se résume par un tableau de variations, et une première ébauche, encore grossière, de Γ.

Exemple. Posons $f(x) = x^3 - x^2 - 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On a $f'(x) = 3x^2 - 2x = x(3x-2)$. Donc $f'(0) = f'(\frac{2}{3}) = 0$, et $f'(x) > 0$ si $x<0$ et si $x > \frac{2}{3}$, mais $f'(x) < 0$ si $0 < x < \frac{2}{3}$.

De plus $f(0) = -1$ et $f\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{31}{27}$. D'autre part $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Ces résultats sont schématisés dans le tableau de variations et le graphe Γ ci-après :

x	$-\infty$		0		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\frac{31}{27}$	$\nearrow$	$+\infty$



Ils permettent déjà de répondre à quelques questions :

1) f présente un maximum au point $x = 0$, un minimum au point $x = \frac{2}{3}$;

2) si λ est un paramètre réel, l'équation
$$x^3 - x^2 - 1 = \lambda$$
a une seule racine réelle si $\lambda < -\frac{31}{27}$ ou si $\lambda > -1$, trois racines réelles si $-\frac{31}{27} < \lambda < -1$, et deux racines réelles (dont une "double") si $\lambda = -\frac{31}{27}$ ou si $\lambda < -1$. En remarquant que $f(1) = -1 < 0$ et $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{8} > 0$, on peut "localiser" la racine ξ de l'équation
$$x^3 - x^2 - 1 = 0$$
par l'inégalité $1 < \xi < \frac{3}{2}$.

3) $f''(x) = 6x - 2$ est < 0 pour $x < \frac{1}{3}$ et > 0 pour $x > \frac{1}{3}$. Donc Γ est strictement concave pour $x \leq \frac{1}{3}$, strictement convexe pour $x \geq \frac{1}{3}$. Le point $M\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{29}{27}\right)$ mérite une étude locale plus approfondie.

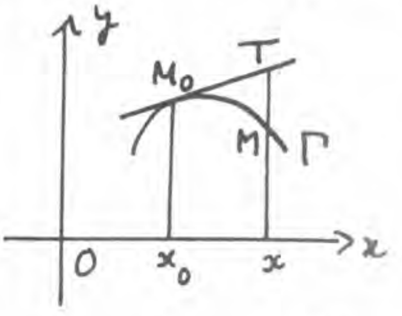
Exercice 1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = x^4 - 2x^3 + 1$. Etudiez la croissance de f ; déterminez le minimum. Discutez le nombre de racines réelles de l'équation $f(x) = \lambda$. Localisez la plus grande racine ξ de $f(x) = 0$. Etudiez la convexité du graphe.

II. Etude locale au voisinage d'un point à distance finie

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, sur lequel f est définie. Soit x_0 un point de I et $M_0=(x_0, f(x_0))$ le point correspondant du graphe Γ de f. On va supposer que f a autant de dérivées successives dans I qu'il sera nécessaire.

La tangente au point M_0 à Γ est, rappelons-le, la droite d'équation

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0).$$



Pour préciser la position de Γ par rapport à sa tangente au voisinage de M_0 (au-dessus ? au-dessous ?), on utilise la théorie des développements limités (Leçon n° 10). Pour cela, nous supposerons que les dérivées successives de f ne sont pas toutes nulles au point x_0, ce qui, par malheur, pourrait fort bien arriver :

<u>Exercice</u> 2. Soit $f(x) = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$ si $x \neq 0$, et $f(0)=0$. Montrez que f est indéfiniment dérivable à l'origine, mais que, pour tout entier $k \geq 0$, on a $f^{(k)}(0)=0$.

La fonction $f(x)$ admet, au voisinage de x_0, le développement de Taylor-Young

$$y = f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \cdots\cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \varepsilon(x)(x-x_0)^n$$

où $\lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$

<u>Lemme</u> 1. Soit $M=(x, f(x))$ un point de Γ voisin de M_0, et soit T le point d'abscisse x sur la tangente à Γ au point M_0. On a :

$$\overline{TM} = \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x-x_0)^n + \varepsilon(x)(x-x_0)^n$$

où $\lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$.

<u>Démonstration</u>. En effet $\overline{TM} = f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)]$.

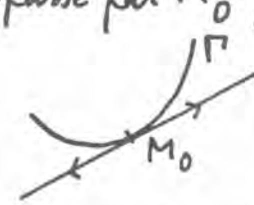
<u>Lemme</u> 2. Soit p le plus petit entier ≥ 2 tel que $f^{(p)}(x_0) \neq 0$. <u>Alors</u> il existe un intervalle ouvert contenant x_0 dans lequel les nombres $\overline{TM}$ et $f^{(p)}(x_0)(x-x_0)^p$ sont de même signe.

Démonstration. $\overline{TM} = \dfrac{f^{(p)}(x_0)}{p!}(x-x_0)^p + \varepsilon(x)(x-x_0)^p$, avec $\lim\limits_{x\to x_0}\varepsilon(x)=0$.
Donc, quand $x \neq x_0$ tend vers x_0, le rapport $\dfrac{\overline{TM}}{f^{(p)}(x_0)(x-x_0)^p}$ tend vers $\dfrac{1}{p!}$.
Par conséquent, pour $|x-x_0|$ assez petit, ce rapport a même signe que sa limite, donc est >0.

Proposition 1. Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$. Soit $x_0 \in I$. Soit p un nombre entier $\geqslant 2$ tel que f soit $p-1$ fois dérivable dans I, tel que $f^{(p)}(x_0)$ existe, et tel que :
$f''(x_0) = f'''(x_0) = \dots = f^{(p-1)}(x_0) = 0$, mais $f^{(p)}(x_0) \neq 0$.
(Autrement dit : p est le plus petit entier $\geqslant 2$ tel que $f^{(p)}(x_0)\neq 0$; remarque : très souvent $p=2$). Alors :

1°) si p est pair, la courbe Γ graphe de f reste localement d'un même côté de sa tangente en M_0 quand M passe par M_0 ; on peut distinguer alors les deux cas :

a) si p est pair et $f^{(p)}(x_0)>0$, la courbe reste localement au-dessus de sa tangente ;



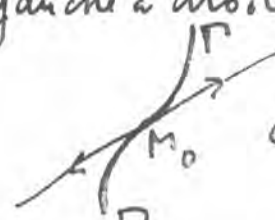
cas a)

b) si p est pair et $f^{(p)}(x_0)<0$, la courbe reste localement au-dessous de sa tangente.

cas b)

2°) Si p est impair, la courbe Γ traverse sa tangente en M_0 quand M passe par M_0. On dit que M_0 est un point d'inflexion. On peut alors distinguer deux cas :

c) si p est impair et $f^{(p)}(x_0)>0$, de gauche à droite la courbe arrive en M_0 sous sa tangente et en sort au-dessus ;



cas c)

d) si p est impair et $f^{(p)}(x_0)<0$, la courbe arrive en M_0 au-dessus de sa tangente et en sort au-dessous.

Démonstration. Elle résulte immédiatement du Lemme 2, et du fait que $(x-x_0)^p$ est :
1°) >0 pour p pair ; 2°) >0 ou <0 pour p impair

cas d)

selon que $x > x_0$ ou $x < x_0$.

Remarque. On voit que $f''(x_0)=0$ est une condition nécessaire d'inflexion, mais non suffisante (contre-exemple : $f(x)=x^4$ pour $x_0=0$). En revanche si $f''(x_0)=0$ et $f'''(x_0)\neq 0$ on a bien une inflexion en M_0. Par exemple, si nous reprenons la fonction $f(x)=x^3-x^2-1$ étudiée au § I, il y a inflexion pour $x_0=\frac{1}{3}$, car $f''(\frac{1}{3})=0$, mais $f'''(x)\equiv 6$ n'est pas nul au point $\frac{1}{3}$.

Exercice 3. A la lumière de la Proposition 1, expliquez les inflexions apparues dans l'Exercice 1.

Exercice 4. Soit $f(x)=\dfrac{x^3}{\sqrt{x+1}-\frac{x}{2}-1}$ pour $x\neq 0$, et $f(0)=0$.

Déterminez la tangente à l'origine au graphe de f et la position de ce graphe localement par rapport à cette tangente.

Exercice 5. Construisez le graphe de e^{-x^2} pour $x\geq 0$; point d'inflexion.

III. Branches infinies

Si on déplace M sur Γ de sorte que la distance de O à M dans $\mathbb{R}^2$ tende vers l'infini, on parcourt une branche infinie de Γ. Ceci peut arriver dans diverses circonstances, dont voici quelques exemples significatifs :

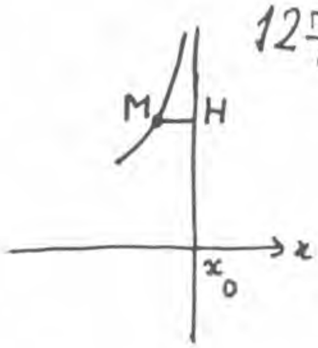
– $x < x_0$ tend vers x_0 et $\displaystyle\lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x)=+\infty$;

– $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)=l$ finie ;

– $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, ou $=-\infty$;

– quand $x\to+\infty$, $f(x)$ a des oscillations arbitrairement grandes (par exemple si $f(x)=x\sin x$).

Nous allons décrire les cas où la branche infinie a un comportement "régulier" où elle manifeste une "tendance", la situation idéale étant celle où il existe une droite (appelée asymptote) dont la branche se rapproche indéfiniment quand M tend vers l'infini.

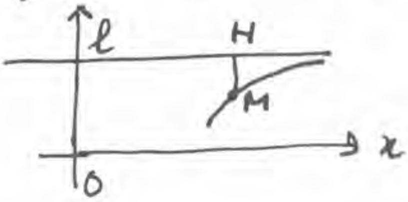


1°) Si, quand $x < x_0$ tend vers x_0, la fonction $f(x)$ tend vers $+\infty$ (ou vers $-\infty$), on dit que Γ a pour *asymptote* la droite (verticale) d'équation $x = x_0$. Remarquons que, quand M s'éloigne à l'infini sur Γ, la distance MH de M à cette droite tend vers 0.

On a une définition analogue pour $x > x_0$, $x \to x_0$, ou pour $x \neq x_0$, $x \to x_0$.

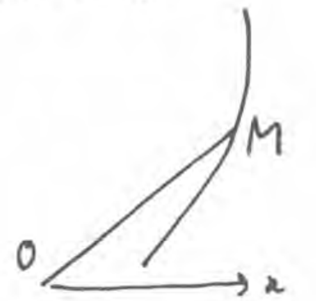
Exemples : $\operatorname{tg} x$ pour $x_0 = \frac{\pi}{2}$; $\operatorname{Argth} x$ pour $x_0 = 1$.

2°) Si, quand $x \to +\infty$ (ou vers $-\infty$), la fonction $f(x)$ a une limite l finie, on dit que Γ a pour *asymptote* la droite (horizontale) d'équation $y = l$. Remarquons que, quand M s'éloigne à l'infini sur Γ, la distance MH de M à cette droite tend vers 0.



Exemples : $1 - \frac{1}{x}$ pour $l = 1$; $\operatorname{th} x$ pour $l = 1$, et pour $l = -1$; $\frac{1}{x}$ pour $l = 0$; e^{-x^2} pour $l = 0$; $\frac{\sin x}{x}$ pour $l = 0$

3°) Supposons désormais qu'on étudie une branche du type $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. (on opérerait de même pour $-\infty$). On cherche d'abord à savoir si la pente $\frac{f(x)}{x}$ de OM a une limite m finie ou infinie. Si donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = m$ existe (finie ou infinie), on dit que la branche infinie admet la *direction asymptotique* de pente m.

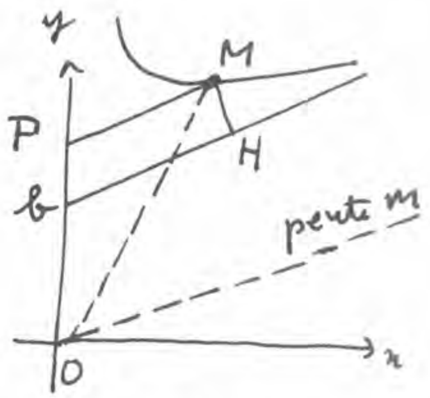


Exemples : $\operatorname{Log} x$ avec $m = 0$; x^2 avec $m = +\infty$; $3x + \operatorname{Log} x$ avec $m = 3$; $\sin x + x$ avec $m = 1$. Mais $x \sin x$ n'a pas de direction asymptotique.

a) Si, quand $x \to +\infty$, et $f(x) \to +\infty$, on a $\lim \frac{f(x)}{x} = +\infty$ ou $-\infty$, on dit que Γ présente une *branche parabolique* de direction verticale.

Exemples : $f(x) = x^2$; $= e^x$; $= \operatorname{sh} x$; $= \operatorname{ch} x$; $= x^\alpha$ pour $\alpha > 1$

b) Désormais plaçons-nous dans le cas où $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, et où il y a une direction asymptotique de pente $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = m$ finie.



La droite de pente m issue du point $M = (x, f(x))$ de Γ a pour équation
$$Y - f(x) = m(X - x),$$
et coupe Oy au point P d'ordonnée
$$\overline{OP} = f(x) - mx.$$
Distinguons trois cas :

i) si, quand $x \to +\infty$, $\overline{OP} = f(x) - mx$ n'a aucune limite, on ne dit rien de plus et on s'en tient là ;

ii) si, quand $x \to +\infty$, $\overline{OP} = f(x) - mx$ tend vers $+\infty$ ou $-\infty$, on dit que Γ présente une <u>branche parabolique</u> dans la direction de pente m ;

iii) si, quand $x \to +\infty$, $\overline{OP} = f(x) - mx$ tend vers une limite finie b, on dit que Γ a pour <u>asymptote</u> la droite d'équation $y = mx + b$. Remarquons que, dans ce cas, quand M s'éloigne à l'infini sur Γ, la distance MH de M à cette droite tend vers 0.

Exemples du cas i) : $f(x) = x + \sin x$, avec $m = 1$; du cas ii) : $\operatorname{Log} x$ ou $\sqrt{x}$ avec $m = 0$; $3x + \operatorname{Log} x$ avec $m = 3$; du cas iii) : $2x + \frac{1}{x}$ avec $m = 2$.

Pour résumer le cas le plus intéressant, soient m et b deux nombres réels ; alors, pour que la droite $y = mx + b$ soit, quand $x \to +\infty$, asymptote à Γ, il faut et il suffit que :
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = m \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx] = b.$$
On remarquera que la deuxième condition à elle seule entraîne la première.

Supposons que, pour x assez grand, on ait un développement :
$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x} + \frac{d}{x^2} + \varepsilon(x)\frac{1}{x^2},$$
où $\lim_{x \to +\infty} \varepsilon(x) = 0$. Alors la droite $y = ax + b$ est asymptote au graphe Γ de f. De plus le signe de c (ou celui de d si c est nul) permet d'étudier la position de Γ par rapport à son asymptote.

<u>Exercice 6</u>. Quand $x \to +\infty$, trouvez l'asymptote du graphe de

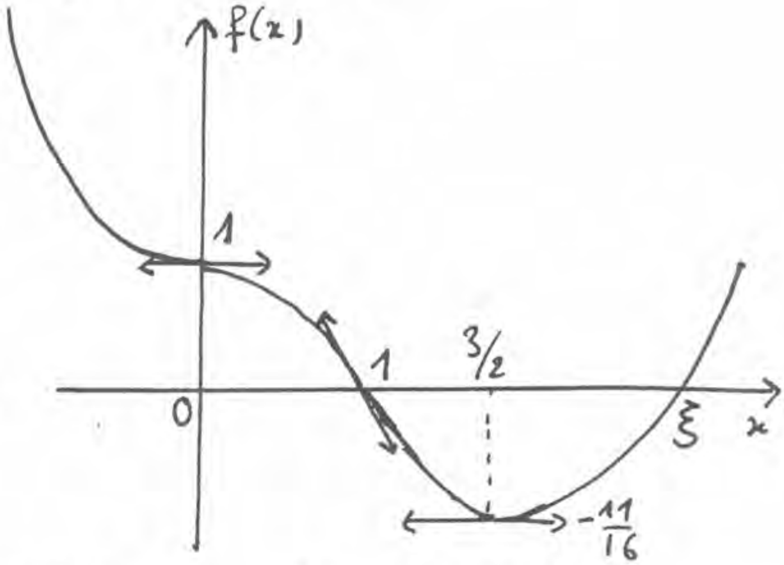
$$f(x) = x\left(\sqrt[3]{x^3+x^2} - \sqrt{x^2+x}\right)$$

et la position de ce graphe par rapport à son asymptote.

IV. Indications sur les Exercices proposés dans cette Leçon

<u>Exercice 1</u>. $f'(x) = 4x^3 - 6x^2$; $f''(x) = 12x(x-1)$.

x	$-\infty$		0		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	$-\frac{11}{16}$ minimum	$\nearrow$	$+\infty$



2 racines réelles si $\lambda > -\frac{11}{16}$;
1 (double) si $\lambda = -\frac{11}{16}$
0 si $\lambda < -\frac{11}{16}$.

$f(1{,}9) = 0{,}314$; $f(1{,}8) = -0{,}166$, donc $1{,}8 < \xi < 1{,}9$.
Le graphe est convexe sur $]-\infty, 0]$ et $[1, +\infty[$, concave sur $[0,1]$.
Inflexions pour $x=0$ et $x=1$.

<u>Exercice 2</u>. Pour $x \neq 0$, $f^{(k)}(x) = \frac{P_k(x)}{Q_k(x)} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$, où P_k et Q_k sont des polynômes ; l'exponentielle l'emporte, donc $\lim_{x\to 0, x\neq 0} \frac{f^{(k)}(x)}{x} = 0 = f^{(k+1)}(0)$

<u>Exercice 4</u>. $f(x) = -8x - 3x^2 + \varepsilon(x)x^2$, où $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$

<u>Exercice 5</u>  inflexion pour $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

<u>Exercice 6</u> $(x^3+x^2)^{\frac{1}{3}} = x\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}} = x\left[1 + \frac{1}{3x} - \frac{1}{9x^2} + \frac{5}{81}\frac{1}{x^3} + \varepsilon(x)\frac{1}{x^3}\right]$

et $(x^2+x)^{\frac{1}{2}} = x\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}} = x\left[1 + \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2} + \frac{1}{16x^3} + \varepsilon_1(x)\frac{1}{x^3}\right]$,

donc :

$$f(x) = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)x + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{5}{81} - \frac{1}{16}\right)\frac{1}{x} + \varepsilon_2(x)\frac{1}{x},$$

soit :

$$f(x) = -\frac{x}{6} + \frac{1}{72} - \frac{1}{1296}\frac{1}{x} + \varepsilon_2(x)\frac{1}{x}.$$

L'asymptote est $y = -\frac{x}{6} + \frac{1}{72}$, et la courbe est sous l'asymptote.

Méthodes numériques de résolution des équations $\varphi(x)=0$

Soit φ une fonction de variable réelle à valeurs réelles. Supposons que, par exemple graphiquement, on ait localisé une racine ξ de l'équation $\varphi(x)=0$ dans un intervalle $[a,b]$, c'est-à-dire supposons qu'on sache déjà qu'il existe un nombre ξ tel que :

$$\varphi(\xi)=0 \quad ; \quad a\leqslant \xi \leqslant b \; ; \quad \varphi(x)\neq 0 \text{ si } x\in[a,b] \text{ mais } x\neq\xi .$$

Dans cette Leçon nous allons, sous certaines hypothèses, apprendre à calculer des valeurs numériques approchées de la racine ξ.

I. Méthode des approximations successives

Pour décrire cette méthode, il vaut mieux mettre l'équation $\varphi(x)=0$ sous la forme :

$$x = f(x)$$

ce qui bien entendu est toujours possible en posant $f(x)=\varphi(x)+x$.

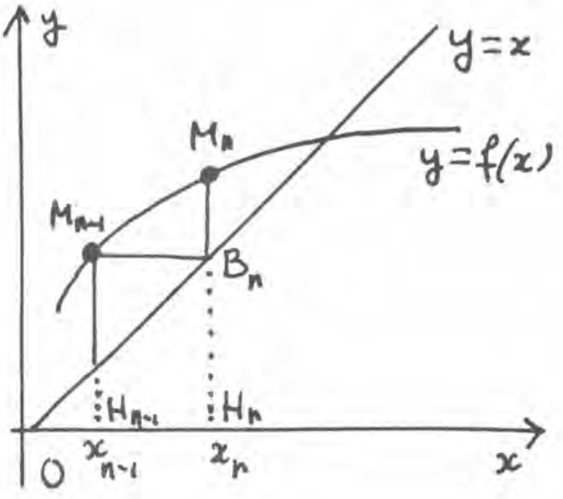
Soient $a<b$ deux nombres réels, et soit f une fonction définie dans $[a,b]$ et prenant ses valeurs dans $[a,b]$: si $x\in[a,b]$, alors $f(x)$ est aussi dans $[a,b]$ et l'on peut calculer $f[f(x)] = f\circ f(x)$.

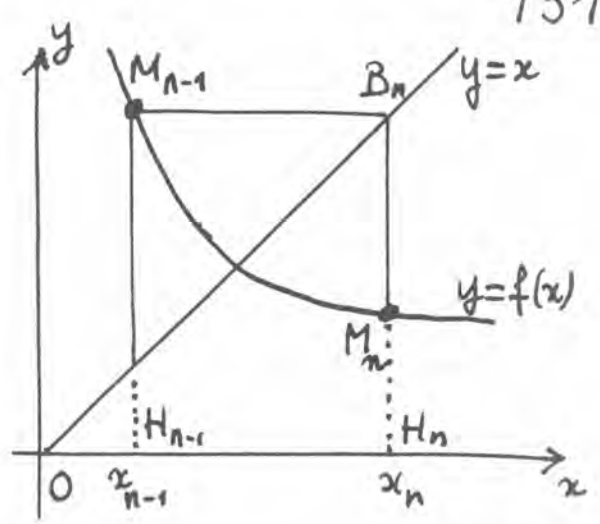
<u>Définition</u>. Soit $x_0\in[a,b]$. On appelle <u>itérés</u> par f à partir de x_0 la suite (x_n) des nombres réels définis par :

$$x_0,\ x_1=f(x_0),\ x_2=f(x_1),\ \ldots\ldots,\ x_n=f(x_{n-1}),\ \ldots\ldots$$

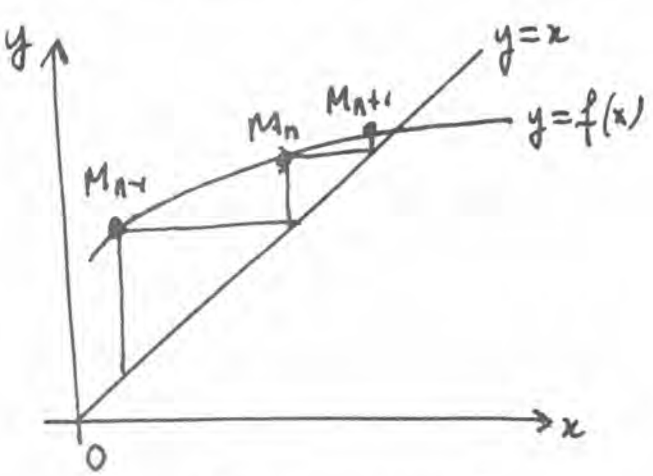
<u>Exemple</u>. Si $f(x)=\cos x$ et $x_0=0$, si l'on dispose d'une calculatrice scientifique(*), la suite des itérés s'obtiendra en appuyant autant de fois de suite qu'on pourra sur la touche COS :
0 ; 1 ; 0,540302306 ; 0,857553216 ; 0,654289791 ; 0,793480359 ; 0,701368774 ; 0,763959683 ; 0,722102425 ; etc.....

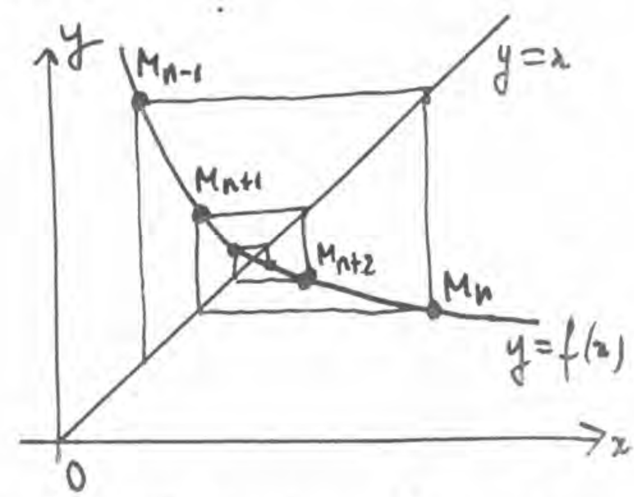
(*) Si on a un ordinateur de poche programmable en BASIC, on écrit un programme avec une boucle et les instructions $x=\cos x$, PRINT x.





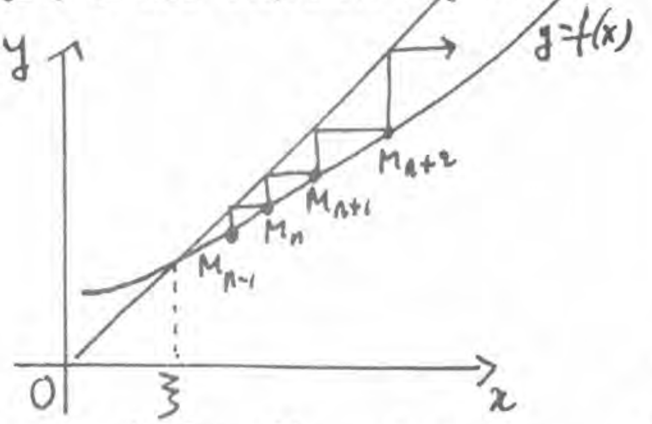
<u>Visualisation graphique</u> : traçons le graphe Γ de f et la première bissectrice $y = x$. Puisque $x_n = f(x_{n-1})$ est l'ordonnée $\overline{H_{n-1}M_{n-1}}$ du point M_{n-1} de Γ qui a pour abscisse x_{n-1}, on peut rabattre cette ordonnée en $\overline{OH_n}$ sur l'axe Ox en utilisant comme appui la première bissectrice, c'est-à-dire en suivant le trajet $M_{n-1}B_nH_n$. A son tour H_n fournit M_n, et ainsi de suite.
On peut suivre la marche de l'itération :

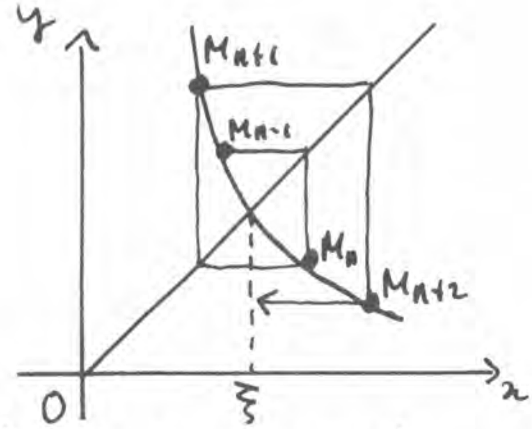




Dans les deux exemples ci-dessus, la suite (M_n) semble se rapprocher de l'intersection de Γ avec la première bissectrice ; en d'autres termes : <u>la suite des itérés x_n par f semble tendre vers la racine ξ de l'équation</u> $x = f(x)$.

Remarquons toutefois que la convergence des x_n vers ξ n'est possible que si la pente de Γ au voisinage de ξ n'est pas trop forte (en fait si elle est < 1 en valeur absolue) ; par exemple, dans les cas suivants :





le procédé visiblement diverge au lieu de tendre vers ξ.

<u>Exercice</u> 1.1) Vérifiez graphiquement que l'équation $x = \cos x$ a une seule racine $\xi > 0$.

2°) On pose $x_0 = 0$ et, pour tout entier $n > 0$, on pose $x_n = \cos(x_{n-1})$. Montrez que : a) pour tout $n \geq 0$, on a $0 \leq x_n \leq 1$, et $x_{2n} \leq x_{2n+1}$; b) la suite (x_{2n}) est croissante, la suite (x_{2n+1}) est décroissante ; c) ces suites ont pour limite commune la racine ξ.

3°) En déduire que $\xi = 0{,}739085133\ldots$

<u>Définition</u>. Soient $a < b$ des nombres réels. Soit f une fonction définie dans $[a,b]$, à valeurs dans $[a,b]$. Soit k un nombre tel que $0 \leq k < 1$ (attention ! k n'a pas le droit d'être égal à 1). On dit que f est <u>contractante</u> de rapport k dans $[a,b]$ si, quels que soient x_1 et x_2 dans $[a,b]$, on a :

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq k\,|x_2 - x_1| \quad .$$

<u>Cas usuel</u>. Supposons f continue dans $[a,b]$ et dérivable dans $]a,b[$. Et supposons que :

$$k = \sup_{a<x<b} |f'(x)| < 1 \quad .$$

Alors f est contractante de rapport k dans $[a,b]$, à cause de la formule des accroissements finis : il existe $\alpha \in]x_1, x_2[$ tel que

$$|f(x_2) - f(x_1)| = |f'(\alpha)|\,|x_2 - x_1| \leq k\,|x_2 - x_1| .$$

<u>Exemple</u>. Dans $[0,1]$ la fonction cosinus est contractante de rapport :

$$k = \sup_{0<x<1} |\sin x| = \sin 1 \leq 0{,}842 .$$

<u>Théorème</u> (dit "des approximations successives" ou "du point fixe").

Soient $a<b$ des nombres réels. Soit f une fonction définie dans $[a,b]$, à valeurs dans $[a,b]$. Soit k un nombre tel que $0\leq k<1$. On suppose que f est contractante de rapport k dans $[a,b]$. Soit x_0 un point initial quelconque dans $[a,b]$. Formons la suite des itérés par f à partir de x_0 :

$x_0,\ x_1=f(x_0),\ x_2=f(x_1),\ \ldots\ldots,\ x_n=f(x_{n-1}),\ \ldots\ldots\ldots$.

Alors :

1°) L'équation $x=f(x)$ a une racine ξ et une seule dans $[a,b]$.

2°) La suite (x_n) converge vers cette racine ξ quand $n\to+\infty$.

3°) Pour tout entier $n>0$ l'erreur commise en remplaçant ξ par x_n est telle que :
$$|\xi-x_n|\leq\frac{k^n}{1-k}|x_1-x_0|.$$

<u>Démonstration</u>. Commençons par prouver que (x_n) a une limite, en vérifiant que cette suite est de Cauchy (cf. Leçon n° 2). Les inégalités de contraction :
$$\begin{cases}|x_2-x_1|\leq k|x_1-x_0|\\ |x_3-x_2|\leq k|x_2-x_1|\\ \text{etc.}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ |x_n-x_{n-1}|\leq k|x_{n-1}-x_{n-2}|\\ |x_{n+1}-x_n|\leq k|x_n-x_{n-1}|\end{cases}$$
donnent, par multiplication membre à membre,
$$(1)\qquad |x_{n+1}-x_n|\leq k^n|x_1-x_0|.$$
Puis, pour tout entier $p>n$, grâce à (1), à l'inégalité triangulaire, et à la formule de la progression géométrique, on obtient :
$$\begin{aligned}|x_{n+p}-x_n|&\leq|x_{n+p}-x_{n+p-1}|+|x_{n+p-1}-x_{n+p-2}|+\cdots+|x_{n+1}-x_n|\\ &\leq\left(k^{n+p-1}+k^{n+p-2}+\cdots+k^n\right)|x_1-x_0|=\\ &=k^n\frac{1-k^p}{1-k}|x_1-x_0|\leq\frac{k^n}{1-k}|x_1-x_0|.\end{aligned}$$

On a ainsi prouvé que, pour tout $m = n + p > n$,

$$(2) \quad |x_m - x_n| \leq \frac{k^n}{1-k} |x_1 - x_0| .$$

Puisque $0 \leq k < 1$, le second membre de (2) tend vers 0 quand $n \to +\infty$, et ceci indépendamment de m. Donc la suite (x_n) est de Cauchy. Par conséquent elle a une limite. Notons ξ cette limite. Puisque, pour tout n, on a : $a \leq x_n \leq b$, on a aussi : $a \leq \xi \leq b$.

Etant contractante, la fonction f est a fortiori continue dans $[a, b]$. Dans l'égalité, valable pour tout n :

$$x_n = f(x_{n-1}) \quad ,$$

faisons tendre n vers $+\infty$. Alors le premier membre tend vers ξ. Mais x_{n-1} tend vers ξ, donc le deuxième membre tend vers $f(\xi)$. Par conséquent :

$$\xi = f(\xi) .$$

Ceci prouve que l'équation $x = f(x)$ a au moins une racine ξ dans $[a, b]$, qui s'obtient comme limite de la suite d'itérés que nous avons considérée.

Mais, d'autre part, l'équation a <u>au plus une</u> racine dans $[a, b]$, car si $\eta = f(\eta)$ est une racine, d'après l'hypothèse de contraction on a :

$$|\xi - \eta| = |f(\xi) - f(\eta)| \leq k |\xi - \eta| ,$$

donc $|\xi - \eta|(1-k) \leq 0$, ce qui, vu que $1 - k > 0$, exige $\xi = \eta$.

Enfin, dans (2), fixons n et faisons tendre m vers $+\infty$. On obtient l'inégalité :

$$|\xi - x_n| \leq \frac{k^n}{1-k} |x_1 - x_0| .$$

<u>Remarque</u>. Quel que soit le point initial x_0, les itérés x_m (qui, bien sûr, dépendent de x_0) convergent vers la (seule et unique) racine ξ. Aussi la méthode est-elle autocorrectrice : si, par aventure, une erreur était commise dans le calcul de l'un des itérés, x_{10}^* au lieu de x_{10} par exemple, cela reviendrait à recommencer l'itération avec le nouveau point de départ $x_0 = x_{10}^*$, et l'on aboutirait quand même au résultat correct.

<u>Exercice 2</u>. Montrez que l'équation $x^3+4x-1=0$ a une seule racine réelle ξ, et que $0<\xi<\frac{1}{4}$. En l'écrivant $x=\frac{1-x^3}{4}=f(x)$, calculez un rapport de contraction k pour f sur $[0,\frac{1}{4}]$. En déduire les 9 premières décimales de ξ. Combien d'itérations, à partir de $x_0=0$, vous sont nécessaires pour que ces décimales soient "stabilisées"? Comparez à l'estimation de l'erreur $|\xi-x_n|$ donnée par le théorème.

Il arrive souvent qu'en écrivant l'équation proposée $\varphi(x)=0$ sous la forme $x=f(x)$ [c'est-à-dire en posant $f(x)=\varphi(x)+x$], on obtienne une fonction f non contractante dans l'intervalle d'étude ; la méthode ne peut s'appliquer en l'état. Mais, plus généralement, on peut transformer l'équation $\varphi(x)=0$ en l'équation :

$$x=f_\lambda(x) \qquad \text{avec} \qquad f_\lambda(x)=x-\frac{\varphi(x)}{\lambda},$$

et choisir la constante λ de sorte que la fonction f_λ ait sa dérivée majorée par un nombre $k<1$ dans l'intervalle d'étude ; alors la méthode s'appliquera à f_λ, et permettra de calculer la racine ξ de $\varphi(x)=0$.

<u>Exemple</u>. Par une étude graphique, on a vu à la Leçon n° 11 que l'équation

$$\varphi(x)=x^3-x^2-1=0$$

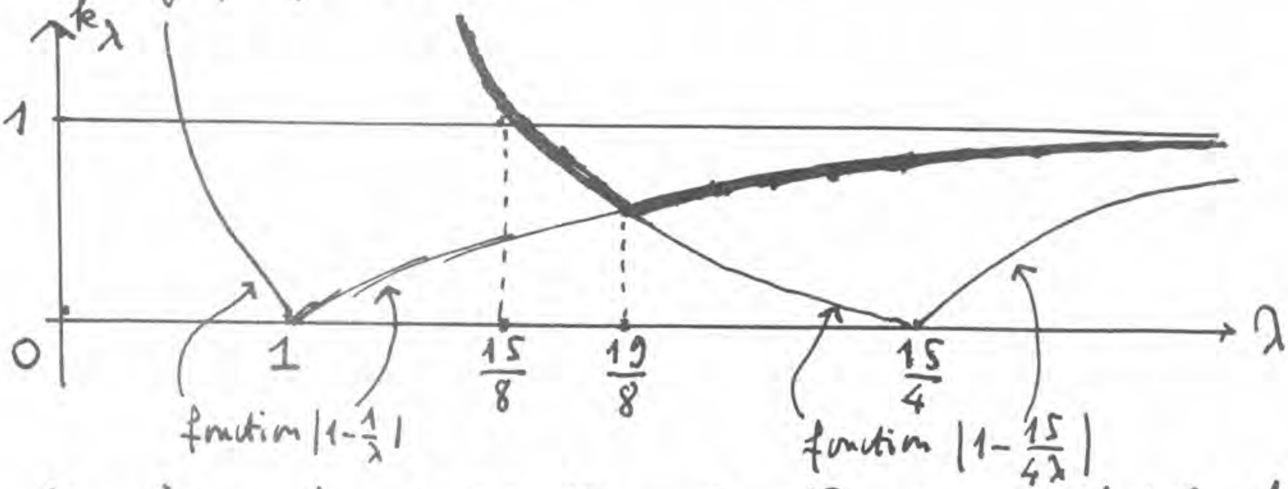
a une racine ξ et une seule telle que $1<\xi<\frac{3}{2}$. Si on réécrit cette équation sous la forme:

$$x=f(x)=x+x^3-x^2-1$$

la fonction f n'est pas contractante, car $|f'(x)|=|3x^2-2x+1|$ est ≥ 2 dans $[1,\frac{3}{2}]$. Plus généralement, réécrivons l'équation $\varphi(x)=0$ sous la forme:

$$x=f_\lambda(x)=x-\frac{x^3-x^2-1}{\lambda}.$$

Alors $f'_\lambda(x)=1-\frac{3x^2-2x}{\lambda}$. Cherchons à choisir $\lambda>0$ tel que $k_\lambda=\sup_{1\leq x\leq\frac{3}{2}}|f'_\lambda(x)|$ soit <1, et même soit le plus petit possible (ce qui rendra la convergence plus rapide). La fonction f'_λ est décroissante sur $[1,\frac{3}{2}]$, donc k_λ est le plus grand des deux nombres $|f'_\lambda(1)|$ et $|f'_\lambda(\frac{3}{2})|$. Autrement dit k_λ est le plus grand des deux nombres $|1-\frac{1}{\lambda}|$ et $|1-\frac{15}{4\lambda}|$. Il est représenté en traits forts sur le graphique suivant :



On y voit que k_λ est <1 dès que $\lambda > \frac{15}{8}$, et que le choix $\lambda = \frac{19}{8}$ est optimal, car il rend k_λ le plus petit possible, à savoir $k_\lambda = \frac{11}{19}$.

Nous sommes ramenés à appliquer la méthode des approximations successives à l'équation :

$$x = f(x) = x - \frac{8}{19}(x^3 - x^2 - 1).$$

Une dernière difficulté se présente : l'intervalle $[1, \frac{3}{2}]$ est mal choisi, car, par exemple, le point $x = \frac{4}{3}$ est dans cet intervalle mais son image $f(\frac{4}{3}) = 1{,}505 > \frac{3}{2}$ n'y est pas. Cette difficulté disparaît en réduisant l'intervalle d'étude au segment $1{,}4 \leq x \leq 1{,}5$. En effet sur ce segment $f'(x)$ est <0, donc f est décroissante. D'autre part $f(1{,}4) = 1{,}491$ et $f(1{,}5) = 1{,}452$. Donc f applique dans lui-même le nouveau segment d'étude, tout en continuant d'y être contractante.

Partant de $x_0 = 1{,}4$, on obtient alors la racine

$$\xi = 1{,}465571232\ldots$$

avec 9 décimales exactes en 25 itérations.

Exercice 3. Par les mêmes considérations, trouver 9 décimales exactes de la plus grande racine réelle de l'équation

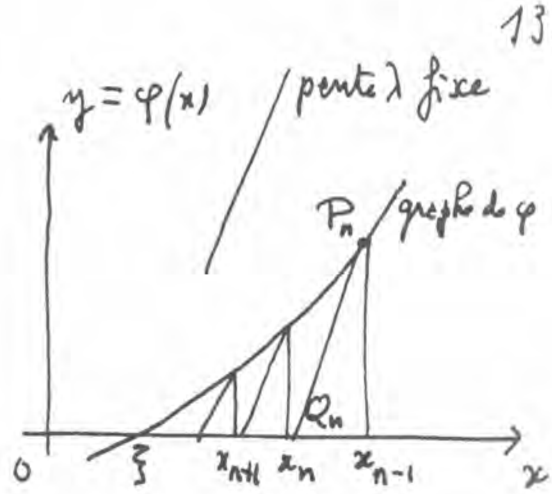
$$x^4 - 2x^3 + 1 = 0,$$

sachant déjà (cf leçon n° 11) qu'elle est entre 1,8 et 1,9.

La méthode décrite dans l'Exemple pour résoudre l'équation $\varphi(x) = 0$ en la ramenant, pour λ convenablement fixé, à l'équation :

$$x = x - \frac{1}{\lambda}\varphi(x) \quad ,$$

consiste à approcher la racine ξ par la suite définie par récurrence par :



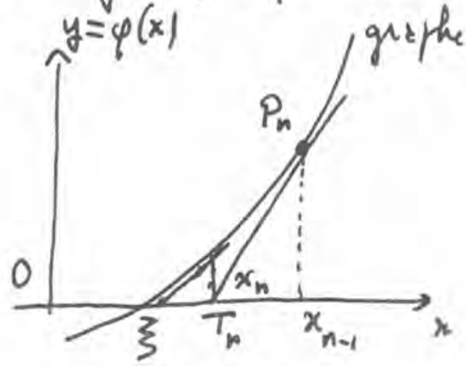
$$x_n = x_{n-1} - \frac{1}{\lambda}\varphi(x_n) .$$

Graphiquement x_n est l'abscisse de l'intersection avec l'axe Ox de la droite de pente λ issue du point de coordonnées $(x_{n-1}, \varphi(x_{n-1}))$. On appelle ce procédé la méthode de Newton-Raphson.

II. La méthode de Newton

C'est une méthode analogue dans son principe, mais, au lieu d'utiliser des segments $P_n Q_n$ de pente fixe, on prend à chaque fois le segment de tangente $P_n T_n$, dont la pente varie avec n. Donc on pose :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\varphi(x_n)}{\varphi'(x_n)} .$$

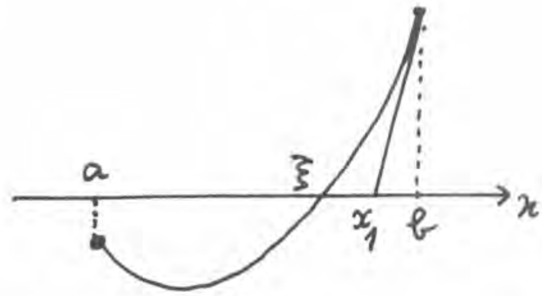


Il revient au même de dire qu'on applique la méthode des approximations successives à l'équation :

$$x = f(x) , \quad \text{avec} \quad f(x) = x - \frac{\varphi(x)}{\varphi'(x)} .$$

Supposons qu'on ait localisé une unique racine ξ de $\varphi(x) = 0$ dans un segment $[a, b]$. Supposons que φ'' existe et garde un signe constant sur $[a, b]$. Alors φ est continue sur $[a, b]$, et $\varphi(a)\varphi(b) < 0$. On prend pour x_0 celle des deux extrémités de $[a, b]$ pour laquelle $\varphi(x)\varphi''(x) > 0$. La figure qui suit a été faite dans le cas où $\varphi(a) < 0$, $\varphi(b) > 0$, et $\varphi''(x) > 0$ donc φ est convexe ;

dans les trois autres cas, le raisonnement qui suit serait analogue. Si $x_0 = b$, la convexité de φ exige que x_1 soit entre ξ et b. Pour la même raison x_2 sera entre ξ et x_1, etc... La suite (x_n) sera décroissante et tendra vers ξ.



Exemple. Reprenons par la méthode de Newton l'équation :

$$\varphi(x) = x^3 - x^2 - 1 = 0 ,$$

où nous avons localisé une racine unique entre $a = 1$ et $b = \frac{3}{2}$. La dérivée seconde $\varphi''(x) = 6x - 2$ est > 0 dans $[a, b]$. De plus $\varphi(a) = -1$ est < 0 et $\varphi(b) = \frac{1}{8} > 0$. Nous partons donc de $x_0 = \frac{3}{2}$, et posons

$$x_n = x_{n-1} - \frac{\varphi(x_{n-1})}{\varphi'(x_{n-1})} = f(x_{n-1}) ,$$

où $f(x) = x - \dfrac{x^3 - x^2 - 1}{3x^2 - 2x}$. On obtient $\xi = 1{,}465571232\ldots$ avec 9 décimales exactes, après seulement trois itérations.

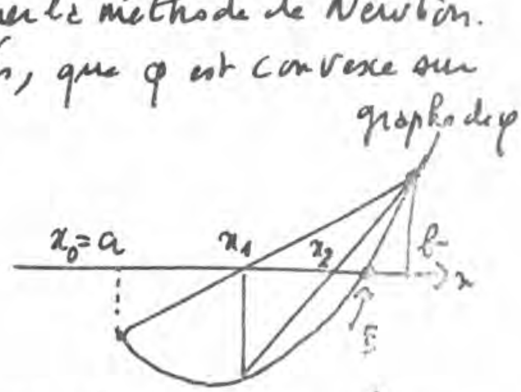
Exercice 4. Par la méthode de Newton calculez 9 décimales du plus petit nombre réel $x > 0$ tel que $\operatorname{tg} x = x$.

III. Méthode de la corde (ou méthode d'interpolation linéaire)

Il n'est pas toujours possible d'obtenir une expression mathématique pour la dérivée φ' de φ. Il se peut aussi que $\varphi'(x)$ soit connu par une formule peu propice au calcul numérique. On ne peut alors évidemment pas appliquer la méthode de Newton.

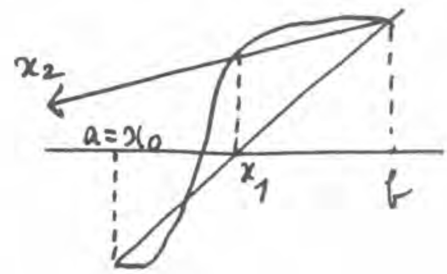
Supposons toujours, pour fixer les idées, que φ est convexe sur $[a, b]$, que $\varphi(a)$ est < 0 et $\varphi(b) > 0$.

Partons de $x_0 = a$, et définissons x_{n+1} comme l'abscisse de l'intersection avec Ox de la corde du graphe de φ qui joint les points $(b, \varphi(b))$ et $(x_n, \varphi(x_n))$. Pour des raisons de convexité, il est clair que la



suite (x_n) est croissante et majorée par b ; elle a donc une limite ξ.
On calcule que
$$x_n = \frac{x_{n-1}\,\varphi(b) - b\,\varphi(x_{n-1})}{\varphi(b) - \varphi(x_{n-1})}.$$
Quand $n \to +\infty$, cette identité conduit à la relation $(\xi - b)\varphi(\xi) = 0$, donc $\varphi(\xi) = 0$.

Remarque. La convexité a joué un rôle essentiel dans ce qui précède. Voici ci-contre un exemple où x_2 ne tombe pas dans l'intervalle utile, quoique x_1 lui-même est déjà très près de la racine ξ.



IV. Indications sur les Exercices proposés dans ce Chapitre.

Exercice 1 a) est vrai pour $n=0$, puis par récurrence on applique le fait que le cosinus d'un nombre compris entre 0 et 1 est toujours compris entre 0 et 1. De plus la fonction cosinus étant décroissante, l'hypothèse de récurrence $x_{2n-2} \le x_{2n-1}$ implique, en appliquant deux fois le cosinus, $x_{2n-1} \ge x_{2n}$, puis $x_{2n} \le x_{2n+2}$.

b) Evidemment $x_0 = 0 \le x_2$, et $x_1 = 1 \ge x_3$. Par hypothèse de récurrence, supposons que $x_{2n-2} \le x_{2n}$ et $x_{2n-3} \ge x_{2n-1}$. En appliquant à ces inégalités deux fois de suite le cosinus, qui est une fonction décroissante, il vient $x_{2n} \le x_{2n+2}$ et $x_{2n-1} \ge x_{2n+1}$.

c) Etant monotones et bornées, ces suites ont des limites ; en fait nous allons voir qu'elles sont adjacentes, c'est-à-dire que
$$\lim_{n\to\infty} (x_{2n+1} - x_{2n}) = 0.$$
En effet, par la formule des accroissements finis,
$$x_{2n+1} - x_{2n} = \cos x_{2n} - \cos x_{2n-1} \le (\sin 1)|x_{2n} - x_{2n-1}| \le$$
$$\le (\sin 1)^2 (x_{2n-1} - x_{2n}) \le \dots \le (\sin 1)^{2n-1}|x_1 - x_0| = k^{2n-1}|x_1 - x_0|$$
tend vers 0, car $k = \sin 1 < 1$.

Donc ces deux suites ont une limite commune ξ ; autrement dit la suite (x_n) tend vers ξ. Quand $n \to \infty$, la relation $x_n = \cos x_{n-1}$ donne $\xi = \cos \xi$, cqfd.

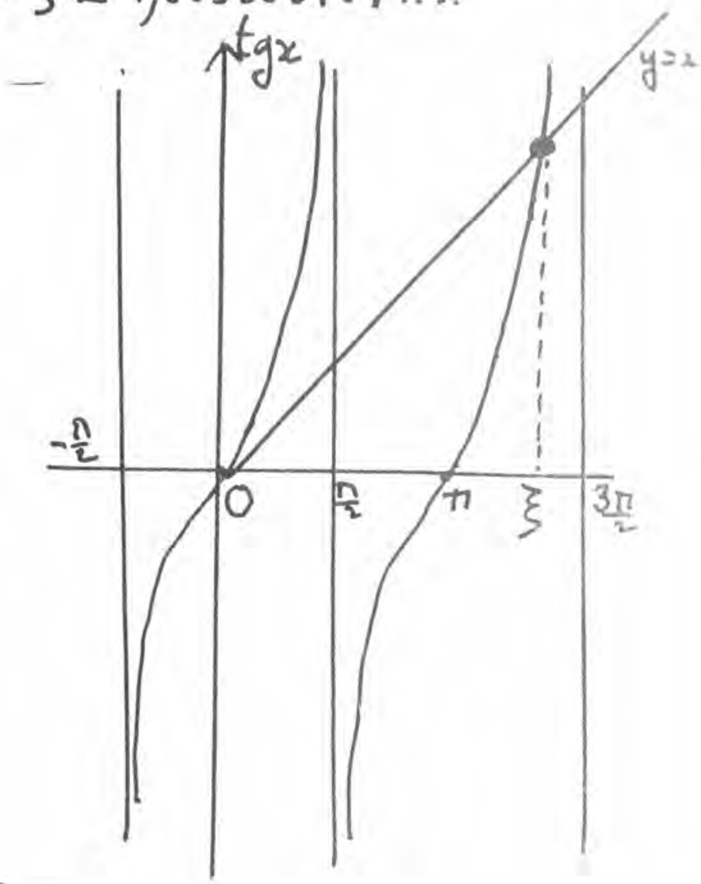
Exercice 2. $\varphi'(x) = 3x^2 + 4 > 0$, donc $\varphi(x)$ croît de $-\infty$ à $+\infty$: une seule racine ξ. On a $\varphi(0) = -1 < 0$ et $\varphi(\frac{1}{4}) = \frac{1}{64} > 0$. Donc $0 < \xi < \frac{1}{4}$. On a $f'(x) = -\frac{3x^2}{4}$, donc $k = |f'(\frac{1}{4})| = \frac{3}{64}$. On obtient $\xi = 0{,}246266172\ldots$ avec 9 décimales exactes au prix de 7 itérations.

Exercice 3. On remplace l'équation par $x = f_\lambda(x) = x - \dfrac{x^4 - 2x^3 + 1}{\lambda}$ pour $1{,}8 < x < 1{,}9$. La valeur optimale est $\lambda = 4{,}82$; elle fournit $k_\lambda = 0{,}195$. On trouve $\xi = 1{,}839286754\ldots$

Exercice 4

La fonction $\varphi(x) = \operatorname{tg} x - x$ a pour dérivée seconde $2\operatorname{tg} x(1 + \operatorname{tg}^2 x)$. La fonction est convexe pour
$$\pi < x < \frac{3\pi}{2}.$$

On a $\varphi(4{,}5) = 0{,}14 > 0$. On applique la méthode de Newton en partant de $x_0 = 4{,}5$ et en posant :
$$x_{n+1} = x_n - \frac{\operatorname{tg} x_n - x_n}{\operatorname{tg}^2 x_n}.$$



On trouve $\xi = 4{,}493409457 9\ldots$