UNIVERSITÉ
DE NANCY 1

CENTRE TÉLÉ-ENSEIGNEMENT
UNIVERSITAIRE
DE NANCY II

analyse

MODULE **AN 02**

CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL A UNE VARIABLE

COURS DE P. EYMARD

DIPLOME D'**E**TUDES **U**NIVERSITAIRES **G**ENERALES

SCIENCES DES STRUCTURES ET DE LA MATIERE
MATHÉMATIQUES PHYSIQUE INFORMATIQUE
SCIENCES DE L'ÉDUCATION

AN 02 Leçon n°2

Aires, intégrales, primitives : une introduction heuristique II

A la leçon précédente nous nous sommes intéressés d'abord à l'aire $a(D)$ de domaines bornés généraux D limités par une courbe (figure 1) ; toutefois nous nous sommes consacrés principalement à ceux de ces domaines qui sont du type parti-

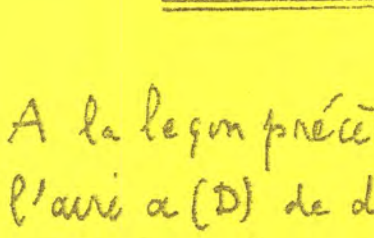


figure 1

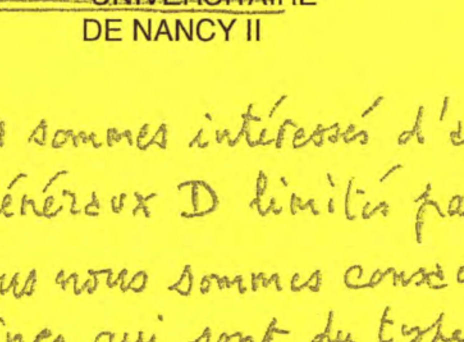


figure 2

culier de "trapèze curviligne" (figure 2), c'est-à-dire limités par le graphe (C) d'une fonction continue $y=f(x)$, l'axe Ox, et deux verticales d'abscisse $x=a$ et $x=b$. Ceci n'était pas, remarquons-le, une limitation essentielle, car, si nous désignons par a et b les abscisses extrêmes des points de D [...] frontière de D (figure

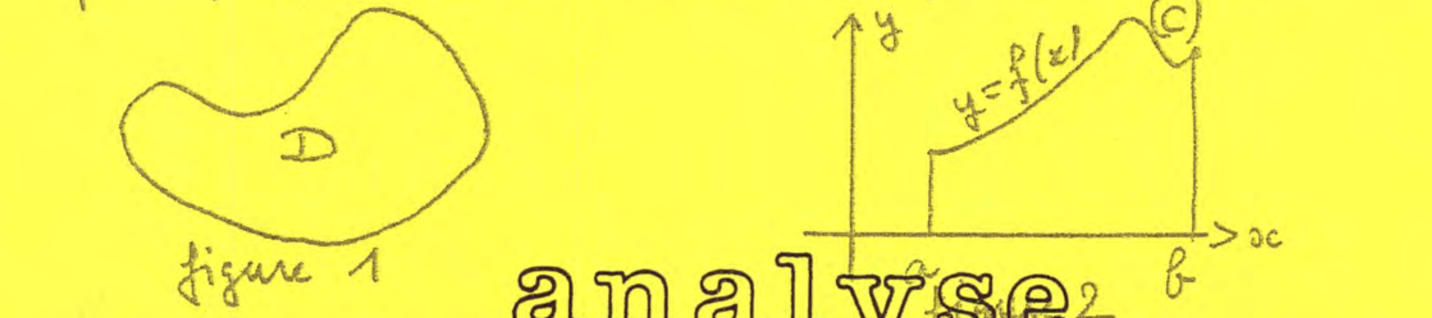


figure 3 figure 4 figure 5

3), on fait immédiatement apparaître (figures 4 et 5) deux domaines D_1 et D_2 du type "trapèze curviligne" tels que $a(D) = a(D_1) - a(D_2)$.

Les considérations heuristiques de la Leçon n° 2 nous ont fait envisager comme très plausible que l'aire du domaine de la

Imprimé par l'atelier de reprographie de l'UHP
Rue du Doyen Marcel Roubault – 54500 Vandoeuvre-les-Nancy
Dépôt : 3e trimestre 1986
n° de la publication : 2-85406-095-4
Le Responsable de la collection : Philippe LOMBARD

Réf. N 501

M.P.I.S.E.
Module AN 02

CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL À UNE VARIABLE RÉELLE

Ceci est un premier jet. On est prié de signaler toute erreur à l'auteur : Pierre EYMARD, Professeur de Mathématiques, Université de NANCY I, BP 239, 54037 VANDOEUVRE.

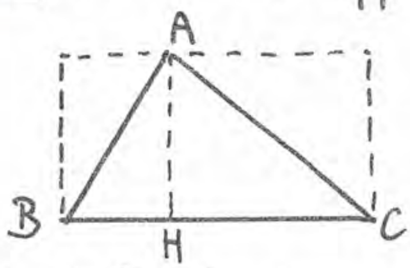
AN02 Leçon n° 1

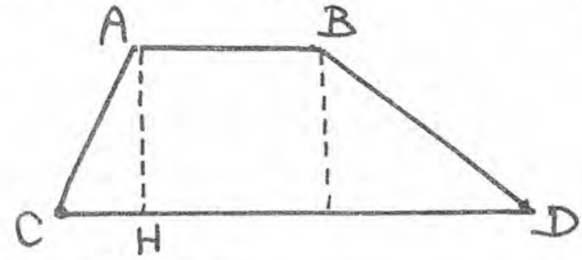
Aires, intégrales, primitives : une introduction heuristique. I

Il est attesté que, dès l'an 2.000 avant J.C., les Egyptiens et les Babyloniens avaient la pratique de la mesure des aires. Le long du Nil les parcelles agricoles étaient taxées selon leur surface. Lorsque l'inondation annuelle enrichissait partiellement les terres, les arpenteurs avaient à déterminer pour chaque lopin quelle surface était perdue.

Tenant pour garanti que l'aire d'un rectangle est le produit des longueurs de ses côtés, ils savaient calculer l'aire des triangles, puis par découpage en triangles ils obtenaient la surface de domaines polygonaux.

Exercice 1. En vous appuyant sur les découpages ci-dessous,





énoncez les règles classiques pour calculer l'aire d'un triangle, d'un trapèze.

Exercice 2. Calculez les aires a_n et A_n des polygones réguliers à n côtés inscrit et exinscrit au cercle de rayon R. Ces polygones se décomposent en n triangles égaux dont un sommet est au centre du cercle. Vous trouverez :

$$a_n = nR^2 \sin\frac{\pi}{n} \cos\frac{\pi}{n} \quad ; \quad A_n = nR^2 \operatorname{tg}\frac{\pi}{n} .$$

Le problème d'évaluer l'aire d'un domaine plan limité par <u>une courbe</u> ne pouvait être valablement abordé avant les Grecs, puisqu'il repose en définitive sur un passage à la limite. Considérons des domaines plans D auxquels on puisse associer un nombre $a(D)$ appelé aire (ou surface) de D. Pour deux tels domaines D_1 et D_2 le bon sens impose les règles suivantes :

1°) si D_1 est contenu dans D_2, alors : $a(D_1) \leq a(D_2)$;

2°) si D_1 et D_2 n'ont aucun point commun, et si on note $D_1 \cup D_2$ le domaine obtenu en réunissant D_1 et D_2, alors :

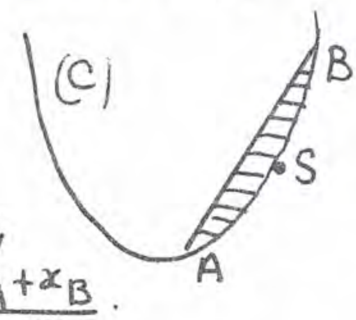
$$a(D_1 \cup D_2) = a(D_1) + a(D_2).$$

Au IV$^{\text{ième}}$ siècle avant J.C., Eudoxe codifia la méthode "d'exhaustion" pour calculer $a(D)$ à partir d'aires (supposées connues) de domaines polygonaux. En termes modernes on peut la décrire comme suit. On introduit une suite (p_n) de domaines

polygonaux inclus dans D, et une suite (P_n) de domaines polygonaux incluant D. Soient $a(p_n)$ l'aire de p_n et $a(P_n)$ l'aire de P_n. Supposons que les deux suites de nombres $(a(p_n))$ et $(a(P_n))$ soient adjacentes, ce qui (cf. AN01, Leçon n°2, IV, p18) signifie que : la suite de nombres $(a(p_n))$ est croissante ; la suite $(a(P_n))$ est décroissante ; la suite différence $(a(P_n) - a(p_n))$ tend vers zéro. Alors les suites $(a(p_n))$ et $(a(P_n))$ ont une limite commune, qu'on note $a(D)$, est qui est l'aire de D.

<u>Exercice</u> 3. Par cette méthode, déduisez de l'Exercice 2 que l'aire du domaine limité par un cercle de rayon R vaut πR^2.

C'est par la méthode d'exhaustion qu'Archimède a calculé <u>l'aire d'un segment de parabole</u>. Dans le plan euclidien soit la parabole (C), courbe d'équation $y = x^2$. Un "segment" de (C) est le domaine compris entre un arc $\widehat{AB}$ de (C) et la corde AB qui le sous-tend. Soit S le "sommet" de ce segment, c'est-à-dire le point de (C) d'abscisse $x_S = \frac{x_A + x_B}{2}$.



Archimède prouva que l'aire du "segment" de base AB vaut les 4/3 de l'aire du triangle ASB. Sa démonstration était géométrique. Nous allons traiter le problème de manière un peu différente, suivant des idées qui apparurent au début du XVII$^{\text{ième}}$ siècle, et qui nous mèneront au cœur du Calcul Intégral.

Etudions d'abord un problème plus simple mais, au fond, équivalent, celui de calculer l'aire $a(D)$ du domaine D compris entre la parabole d'équation $y = f(x) = x^2$, l'axe Ox, et la droite verticale $x = b$, où b est un nombre réel > 0 fixé.

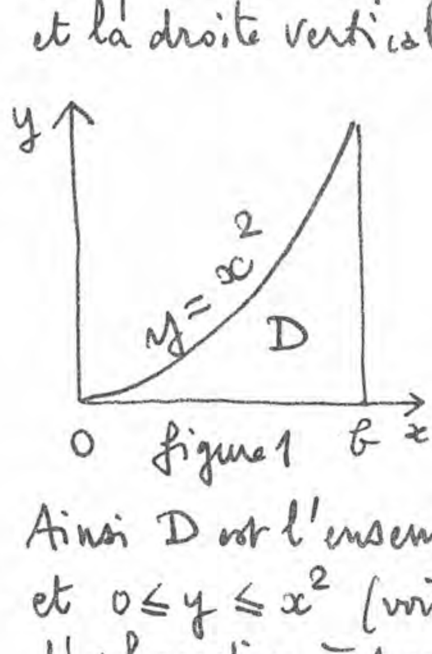


figure 1

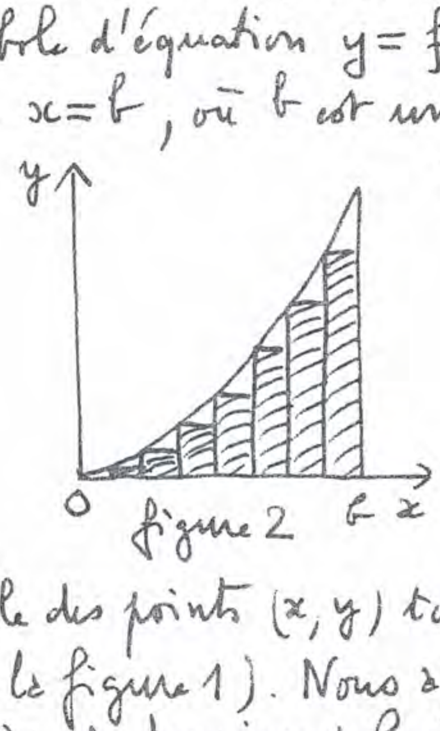


figure 2

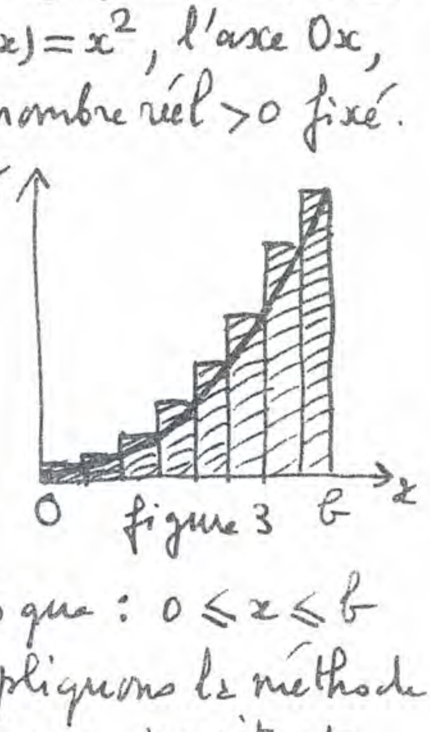


figure 3

Ainsi D est l'ensemble des points (x, y) tels que : $0 \leq x \leq b$ et $0 \leq y \leq x^2$ (voir la figure 1). Nous appliquons la méthode d'exhaustion à partir de domaines polygonaux, inscrits et exinscrits, <u>en escalier</u>, que nous définissons comme suit.

Divisons le segment $[0, b]$ de l'axe Ox en n parties égales ($n = 8$ dans les figures 2 et 3 ci-dessous). Les points de subdivision sont les points d'abscisses :

$$0, \quad \frac{b}{n}, \quad \frac{2b}{n}, \ldots\ldots, \quad \frac{ib}{n}, \ldots\ldots, \frac{(n-1)b}{n}, \quad b$$

c'est-à-dire les $(n+1)$ points $i\frac{b}{n}$, où $i = 0, 1, 2, \ldots, n$. Le domaine en escalier inscrit p_n, hachuré sur la figure 2, est formé de la réunion de $(n-1)$ rectangles de base $\frac{b}{n}$, de hauteur respectivement $f(\frac{b}{n})$, $f(\frac{2b}{n}), \ldots, f(\frac{(n-1)b}{n})$. Le domaine en escalier exinscrit P_n, hachuré sur la figure 3, est formé de la réunion de n rectangles de base $\frac{b}{n}$, de hauteur respectivement $f(\frac{b}{n}), f(\frac{2b}{n}), \ldots, f(\frac{(n-1)b}{n}), f(b)$.

Les aires de ces domaines en escalier sont donc :

$$a(p_n) = \frac{b}{n}\left[f(\tfrac{b}{n}) + f(\tfrac{2b}{n}) + \cdots + f(\tfrac{(n-1)b}{n})\right] = \frac{b}{n}\left[\frac{b^2}{n^2} + \frac{2^2 b^2}{n^2} + \cdots + \frac{(n-1)^2 b^2}{n^2}\right] =$$

$$= \frac{b^3}{n^3}\left[1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2\right] = \frac{b^3}{n^3}\sum_{i=1}^{n-1} i^2 \; ,$$

et

$$a(P_n) = \frac{b}{n}\left[f(\tfrac{b}{n}) + f(\tfrac{2b}{n}) + \cdots + f(\tfrac{(n-1)b}{n}) + f(\tfrac{nb}{n})\right] =$$

$$= \frac{b^3}{n^3}\left[1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2\right] = \frac{b^3}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 .$$

Or la formule suivante est connue, et nous la redémontrerons un peu plus loin sous une forme plus générale :

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} .$$

Par conséquent :

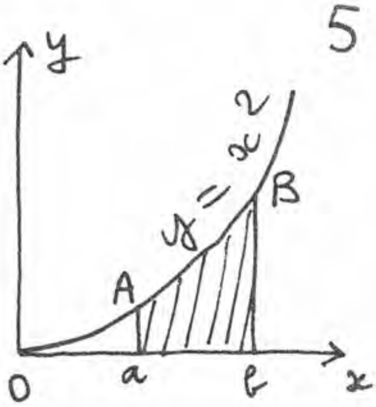
$$a(p_n) = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6\, n^3}\, b^3 \quad \text{et} \quad a(P_n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6\, n^3}\, b^3 .$$

quand $n \to +\infty$, les deux suites $a(p_n)$ et $a(P_n)$ sont adjacentes, et, d'après AN01, Leçon n°2, III, 3°), p.14, elles ont pour limite commune :

$$\boxed{a(D) = \frac{b^3}{3}} \; .$$

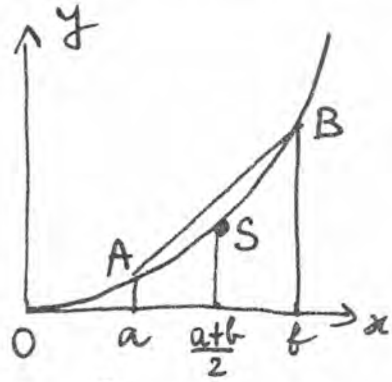
Soient maintenant $a<b$ deux nombres réels $\geqslant 0$, et cherchons l'aire du domaine :

$$a \leq x \leq b \quad ; \quad 0 \leq y \leq x^2$$



hachuré ci-contre. Ce domaine est la différence de deux domaines OBb et OAa du type que nous venons d'étudier. Donc son aire vaut $\boxed{\dfrac{b^3}{3} - \dfrac{a^3}{3}}$.

Déduisons-en le résultat d'Archimède, concernant l'aire σ du segment de parabole sous-tendu par la corde AB. L'aire du trapèze AabB vaut $(b-a)\dfrac{a^2+b^2}{2}$. Donc, par différence,



$$\sigma = (b-a)\frac{a^2+b^2}{2} - \frac{b^3-a^3}{3} = \frac{(b-a)^3}{6}.$$

<u>Exercice 4</u>. Vérifiez que $\dfrac{(b-a)^3}{6}$ est bien égal aux $4/3$ de l'aire du triangle ASB.

<u>Exercice 5</u>. Soit (C) la courbe d'équation $y=x^3$, et soient $a<b$ deux nombres réels $\geqslant 0$. En utilisant la même méthode d'exhaustion par des domaines en escalier inscrits et exinscrits, montrez que l'aire du domaine

$$a \leq x \leq b \quad ; \quad 0 \leq y \leq x^3$$

compris entre (C), l'axe Ox, et les verticales $x=a$ et $x=b$, vaut $\dfrac{b^4-a^4}{4}$. Vous vous appuierez au passage sur la formule

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3 + 2^3 + \cdots\cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

<u>Intermède arithmétique</u> : calcul des sommes

$$s_k = s_k(n) = 1^k + 2^k + 3^k + \cdots + (n-1)^k + n^k ,$$

où $n \geqslant 1$ et $k \geqslant 0$ sont deux nombres entiers donnés.

Nous venons d'utiliser s_2 et s_3. Indiquons comment, n étant fixé, on peut calculer n'importe quel s_k par récurrence à partir de $s_0, s_1, s_2, \dots, s_{k-1}$. Par la formule du binôme de Newton on a :

$$(*)\quad (n+1)^{k+1} = n^{k+1} + (k+1)n^k + C_{k+1}^{k-1} n^{k-1} + \dots + C_{k+1}^{p} n^{p} + \dots + C_{k+1}^{1} n + 1,$$

où les $C_{k+1}^p = \dfrac{(k+1)!}{p!\,(k+1-p)!}$ sont les nombres du triangle arithmétique de Pascal : C_{k+1}^p est le nombre de combinaisons de $(k+1)$ objets p à p.

Au-dessous de la formule $(*)$, écrivons successivement les formules obtenues en y remplaçant n par $n-1$, par $n-2$, ..., par 2, par 1 :

$$\begin{cases} (n+1)^{k+1} = n^{k+1} + (k+1)n^k + C_{k+1}^{k-1} n^{k-1} + \dots + C_{k+1}^{p} n^{p} + \dots + C_{k+1}^{1} n + 1 \\ n^{k+1} = (n-1)^{k+1} + (k+1)(n-1)^k + C_{k+1}^{k-1} (n-1)^{k-1} + \dots + C_{k+1}^{p} (n-1)^{p} + \dots + C_{k+1}^{1} (n-1) + 1 \\ (n-1)^{k+1} = (n-2)^{k+1} + (k+1)(n-2)^k + C_{k+1}^{k-1} (n-2)^{k-1} + \dots + C_{k+1}^{p} (n-2)^{p} + \dots + C_{k+1}^{1} (n-2) + 1 \\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ - \\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ - \\ 3^{k+1} = 2^{k+1} + (k+1)2^k + C_{k+1}^{k-1} 2^{k-1} + \dots + C_{k+1}^{p} 2^{p} + \dots + C_{k+1}^{1} 2 + 1 \\ 2^{k+1} = 1^{k+1} + (k+1)1^k + C_{k+1}^{k-1} 1^{k-1} + \dots + C_{k+1}^{p} 1^{p} + \dots + C_{k+1}^{1} 1 + 1. \end{cases}$$

Puis additionnons toutes ces formules. Après simplifications, il reste :

$$(n+1)^{k+1} = 1^{k+1} + (k+1)s_k + C_{k+1}^{k-1} s_{k-1} + \dots + C_{k+1}^{p} s_p + \dots + C_{k+1}^{1} s_1 + n.$$

En remarquant que $n = s_0$, on en déduit, pour le calcul des $s_k = s_k(n)$, la formule de récurrence due à Blaise Pascal (1654) :

$$\boxed{(k+1)s_k = (n+1)^{k+1} - C_{k+1}^{k-1} s_{k-1} - \dots - C_{k+1}^{p} s_p - \dots - C_{k+1}^{1} s_1 - s_0 - 1}$$

<u>Exemples</u>. Pour $k=1$, la formule s'écrit :

$$2s_1 = (n+1)^2 - s_0 - 1 = (n+1)^2 - n - 1,$$

d'où

$$s_1 = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Pour $k=2$, la formule s'écrit :

$$3s_2 = (n+1)^3 - 3s_1 - s_0 - 1 = (n+1)^3 - 3\,\frac{n(n+1)}{2} - n - 1,$$

d'où

$$s_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Pour $k=3$, la formule s'écrit :

$$4s_3 = (n+1)^4 - 6s_2 - 4s_1 - s_0 - 1 = (n+1)^4 - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) - n - 1,$$

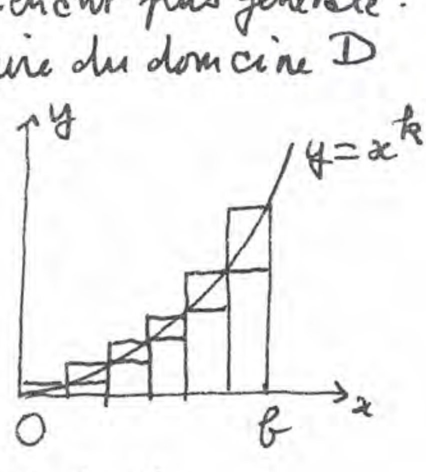
d'où
$$s_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Exercice 6. Calculez s_4.

Sans calculer explicitement les $s_k = s_k(n)$, on peut sur la formule de Pascal obtenir le comportement de $s_k(n)$ lorsque, pour k fixé, n tend vers l'infini. En effet, par récurrence sur k, il est clair sur cette formule que, pour k fixé, $s_k(n)$ est une fonction polynômiale de la variable n, de degré $k+1$, et dont le terme de plus haut degré est $\frac{n^{k+1}}{k+1}$. D'après ANO1, Leçon n°10, I, p 109, on a ainsi obtenu le

Lemme. Pour k fixé, $s_k(n) = 1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k$ est équivalent à $\frac{n^{k+1}}{k+1}$ quand n tend vers $+\infty$.

Par la méthode d'exhaustion déjà utilisée ci-dessus pour $y=x^2$, puis à l'Exercice 5 pour $y=x^3$, calculons maintenant plus généralement, pour n'importe quel entier $k \geq 1$, l'aire du domaine D défini par : $0 \leq x \leq b$; $0 \leq y \leq x^k$.



Subdivisant le segment $[0,b]$ en n parties égales, on obtient des domaines en escalier inscrit p_n et exinscrit P_n, dont les aires sont respectivement :

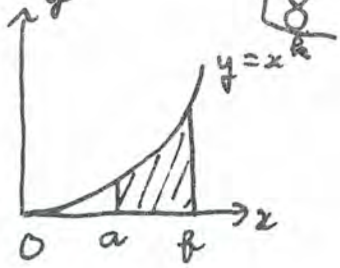
$$a(p_n) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{b}{n}\left(\frac{ib}{n}\right)^k = \frac{b^{k+1}}{n^{k+1}} \sum_{i=1}^{n-1} i^k = \frac{b^{k+1}}{n^{k+1}} s_k(n-1) \quad ;$$

$$a(P_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{b}{n}\left(\frac{ib}{n}\right)^k = \frac{b^{k+1}}{n^{k+1}} \sum_{i=1}^{n} i^k = \frac{b^{k+1}}{n^{k+1}} s_k(n).$$

Or, d'après le Lemme, quand $n \to +\infty$ on a :

$$s_k(n-1) \sim \frac{(n-1)^{k+1}}{k+1} \sim \frac{n^{k+1}}{k+1}, \quad \text{et} \quad s_k(n) \sim \frac{n^{k+1}}{k+1},$$

donc $\lim\limits_{n\to\infty} a(p_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} a(P_n) = \frac{b^{k+1}}{k+1}$. Par suite $a(D) = \frac{b^{k+1}}{k+1}$.



Plus généralement on voit, par différence, que l'aire du domaine

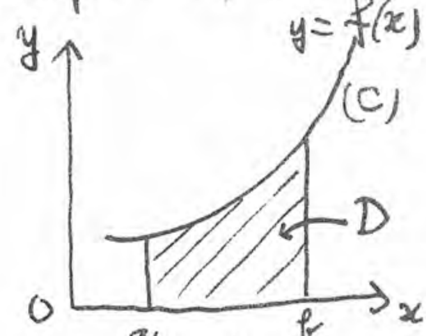
$$a \leq x \leq b \quad ; \quad 0 \leq y \leq x^k$$

vaut $\boxed{\dfrac{b^{k+1}}{k+1} - \dfrac{a^{k+1}}{k+1}}$.

Résumons. Soient $a < b$ deux nombres réels. Soit $f(x)$ l'une des fonctions $f(x) = x^k$, où l'on choisit pour k n'importe quel entier $1, 2, 3, \ldots$. A la fonction $f(x) = x^k$ associons la fonction $F(x) = \dfrac{x^{k+1}}{k+1}$. Alors l'aire comprise entre le graphe de $y = f(x)$, l'axe Ox, et les verticales $x = a$ et $x = b$, vaut $F(b) - F(a)$.

Tâchons maintenant de faire preuve d'un peu d'intuition. Quelle relation générale (c'est-à-dire indépendante de k) lie la fonction $f(x) = x^k$ à la fonction $F(x) = \dfrac{x^{k+1}}{k+1}$ qui lui est associée ? Il apparaît que $f(x)$ est la dérivée de $F(x)$; autrement dit $F(x) = \dfrac{x^{k+1}}{k+1}$ est une primitive sur $[a, b]$ de la fonction $f(x) = x^k$. Mais ce fait, ainsi constaté sur les fonctions monômes x^k, ne serait-il pas général ? Il nous vient l'idée que pourrait être vraie la conjecture suivante.

Conjecture : Soit $f(x)$ une fonction continue pour $a \leq x \leq b$. Soit (C) son graphe dans un repère orthonormé Oxy. Alors l'aire du domaine D compris entre (C), l'axe Ox, et les verticales $x = a$ et $x = b$, est donnée par la formule :



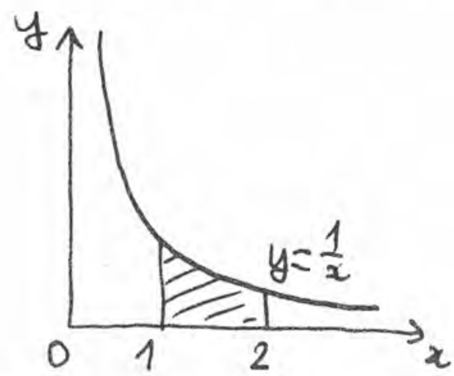
$$a(D) = F(b) - F(a),$$

où F est une primitive de f sur $[a, b]$, c'est-à-dire une fonction $F(x)$ telle que sa dérivée $F'(x)$ soit égale à $f(x)$ pour tout $x \in [a, b]$.

Remarquons que deux primitives distinctes de f ne différant que d'une constante additive, elles donneront la même valeur à la différence $F(b) - F(a)$. (cf AN01, Leçon n°6, IV, p70).

Nous verrons plus loin, à la Leçon n° 3, que cette conjecture est en fait un théorème. Ainsi nous aurions pu éviter le calcul arithmétique des sommes $S_k(n)$ pour obtenir les aires associées aux fonctions $f(x)=x^k$, car nous serions bien d'avance que $\frac{x^{k+1}}{k+1}$ est une primitive de x^k.

Pour prendre conscience du vaste champ ainsi ouvert au Calcul, faites maintenant, en admettant le bien-fondé de la Conjecture, les exercices suivants.



Exercice 7. Calculez l'aire comprise entre le graphe de la fonction $f(x)=\frac{1}{x}$, l'axe Ox, et les deux verticales d'abscisses $a=1$ et $b=2$.

Solution: $F(x)=\mathrm{Log}\,x$ est une primitive de $f(x)=\frac{1}{x}$. Donc cette aire vaut :

$F(2)-F(1)=\mathrm{Log}\,2-\mathrm{Log}\,1=\mathrm{Log}\,2=0,69314\ldots$

Exercice 8. Même question pour :

a) $y=\cos x$; $a=0$, $b=\frac{\pi}{2}$.

b) $y=\sin x$; $a=0$, $b=\frac{2\pi}{3}$.

c) $y=x^4-x^2+2x+1$; $a=1$, $b=2$.

d) $y=\sqrt{x}$; $a=0$, $b>0$ quelconque.

e) $y=x^\alpha$, où α est réel fixé $\neq -1$; $0<a<b$ quelconques.

f) $y=e^x$; $a=0$, $b=2$.

g) $y=2^x$; $a=0$, $b=3$.

h) $y=\mathrm{Log}\,x$; $a=1$, $b=3$. (Remarquez que $x\,\mathrm{Log}\,x-x$ est une primitive de $\mathrm{Log}\,x$)

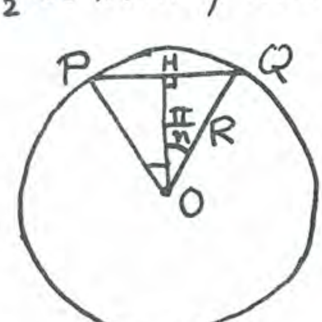
i) $y=1+\mathrm{tg}^2 x$; $a=0$, $b=\frac{\pi}{4}$.

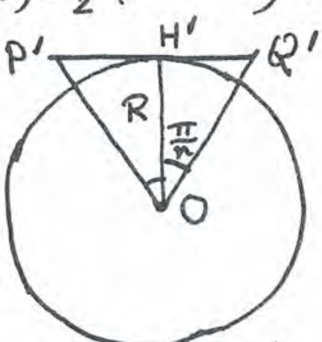
j) $y=\frac{1}{1+x^2}$; $a=0$, $b=\sqrt{3}$.

k) $y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Solutions des Exercices proposés dans cette Leçon

Exercice 1. Aire $(ABC) = \frac{1}{2} BC \times AH$; aire $(ABDC) = \frac{1}{2}(AB+CD) \times AH$.





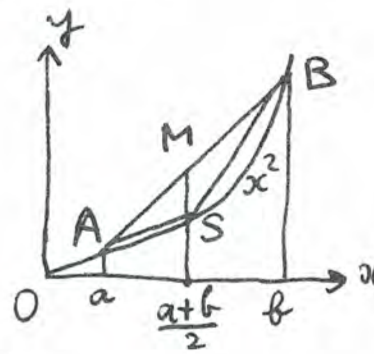
Exercice 2. Dans les figures ci-contre, PQ et P'Q' sont respectivement des côtés du polygone régulier à n côtés inscrit et exinscrit. Soient H et H' les milieux de PQ et P'Q'. Dans les triangles rectangles OHQ et OH'Q', on a les relations trigonométriques :

$$OH = R\cos\frac{\pi}{n}\ ,\quad HQ = R\sin\frac{\pi}{n}\ ;\quad OH' = R\ ,\quad H'Q' = R\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{n}\ ,$$

qui permettent de calculer les aires des triangles OHQ et OH'Q', respectivement $\frac{1}{2}R^2\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}$ et $\frac{1}{2}R^2\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{n}$. Il y a $2n$ tels triangles dans chaque polygone, donc

$$a_n = nR^2\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n} \qquad \text{et} \qquad A_n = nR^2\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{n}.$$

Exercice 3. D'après AN01, Leçon n°10, p109, quand $n \to +\infty$, $\frac{\pi}{n} \to 0$, donc $\cos\frac{\pi}{n} \to 1$, et $\sin\frac{\pi}{n} \sim \frac{\pi}{n}$, $\mathrm{tg}\frac{\pi}{n} \sim \frac{\pi}{n}$. Par conséquent $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} A_n = \pi R^2$.



Exercice 4. Les triangles ASM et BSM ont même base SM et même hauteur $\frac{b-a}{2}$. La longueur de SM est $\frac{a^2+b^2}{2} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{4}$, obtenue par différence des ordonnées de M et de S.

Donc : aire (triangle ASB) = 2 aire (triangle ASM) =

$$= 2\,\frac{b-a}{4}\,\frac{(b-a)^2}{4} = \frac{(b-a)^3}{8} = \frac{3}{4}\,\frac{(b-a)^3}{6} = \frac{3}{4}\ \text{aire (segment de parabole)}.$$

Exercice 5. Pour $f(x) = x^3$, on commence la démonstration comme pour x^2.

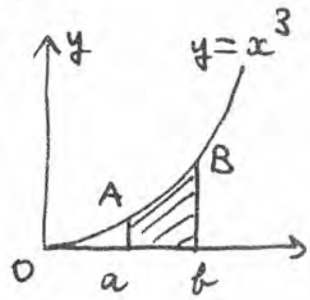
Puis

$$a(p_n) = \frac{b}{n}\left[f\left(\frac{b}{n}\right) + f\left(\frac{2b}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{(n-1)b}{n}\right)\right] = \frac{b}{n}\left[\frac{b^3}{n^3} + \frac{2^3b^3}{n^3} + \cdots + \frac{(n-1)^3b^3}{n^3}\right]$$

donc $$a(p_n) = \frac{b^4}{n^4}\left(1^3 + 2^3 + \cdots + (n-1)^3\right) = \frac{b^4}{n^4}\,\frac{n^2(n-1)^2}{4},$$

et de même.

$$a(P_n)=\frac{b^4}{n^4}\left(1^3+2^3+\dots+n^3\right)=\frac{b^4}{n^4}\,\frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$



Quand $n\to\infty$, les suites $a(p_n)$ et $a(P_n)$ tendent toutes deux vers $\frac{b^4}{4}$. Ainsi: aire $(ObB)=\frac{b^4}{4}$. De même: aire $(OaA)=\frac{a^4}{4}$. Donc:

$$\text{aire }(abBA)=\frac{b^4-a^4}{4}.$$

Exercice 6. $5s_4=(n+1)^5-10s_3-10s_2-5s_1-s_0-1=$

$$=(n+1)^5-5\,\frac{n^2(n+1)^2}{2}-5\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{3}-5\,\frac{n(n+1)}{2}-n-1=$$

$$=(n+1)\left(n^4+4n^3+6n^2+4n+1-\frac{5}{2}n^3-\frac{5}{2}n^2-\frac{10}{3}n^2-\frac{5}{3}n-\frac{5}{2}n-1\right)$$

$$=(n+1)\left(n^4+\frac{3}{2}n^3+\frac{1}{6}n^2-\frac{1}{6}n\right)=\frac{n(n+1)}{6}\left(6n^3+9n^2+n-1\right),$$

d'où $$s_4=\frac{n(n+1)}{30}\left(6n^3+9n^2+n-1\right).$$

Exercice 8.

Si $f(x)=$	$a=$	$b=$	une primitive $F(x)$ de $f(x)$ est	donc l'aire demandée vaut $F(b)-F(a)$, c'est-à-dire
$\cos x$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\sin x$	1
$\sin x$	0	$\frac{2\pi}{3}$	$-\cos x$	$3/2$
x^4-x^2+2x+1	1	2	$\frac{x^5}{5}-\frac{x^3}{3}+x^2+x$	$118/15$
$\sqrt{x}$	0	$b>0$	$\frac{2}{3}x\sqrt{x}$	$\frac{2}{3}b\sqrt{b}$
x^α, où α réel $\neq -1$	$a>0$	$b>a$	$x^{\alpha+1}/\alpha+1$	$\frac{b^{\alpha+1}-a^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
e^x	0	2	e^x	$e^2-1=6{,}38906\ldots$
2^x	0	3	$\frac{1}{\mathrm{Log}\,2}2^x$	$7/\mathrm{Log}\,2=10{,}09887\ldots$
$\mathrm{Log}\,x$	1	3	$x\,\mathrm{Log}\,x-x$	$3\,\mathrm{Log}\,3-2=1{,}29584\ldots$
$1+\mathrm{tg}^2x$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\mathrm{tg}\,x$	1
$\frac{1}{1+x^2}$	0	$\sqrt{3}$	$\mathrm{Arctg}\,x$	$\pi/3$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\mathrm{Arcsin}\,x$	$\pi/6$

AN 02 Leçon n°2

Aires, intégrales, primitives : une introduction heuristique. II

A la leçon précédente nous nous sommes intéressés d'abord à l'aire $a(D)$ de domaines bornés généraux D limités par une courbe (figure 1) ; toutefois nous nous sommes consacrés principalement à ceux de ces domaines qui sont du type parti-

figure 1

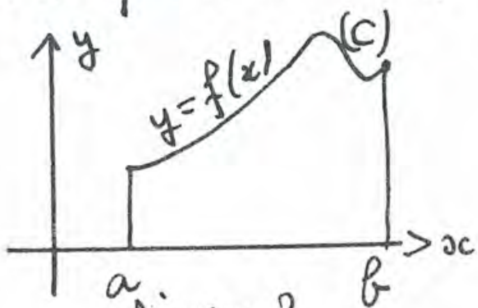


figure 2

culier de "trapèze curviligne" (figure 2), c'est-à-dire limités par le graphe (C) d'une fonction continue $y=f(x)$, l'axe Ox, et deux verticales d'abscisse $x=a$ et $x=b$. Ceci n'était pas, remarquons-le, une limitation essentielle, car, si nous désignons par a et b les abscisses extrêmes des points de D, en coupant en deux la frontière de D (figure

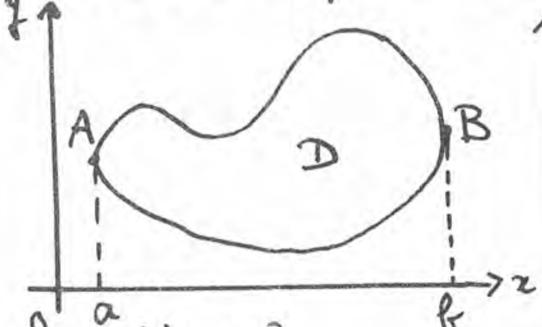


figure 3

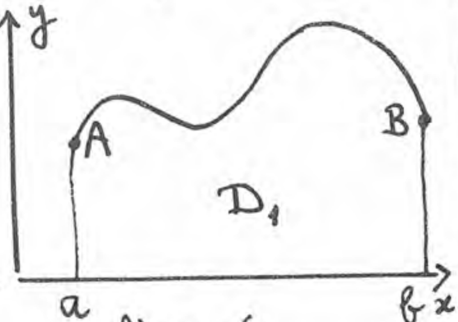


figure 4

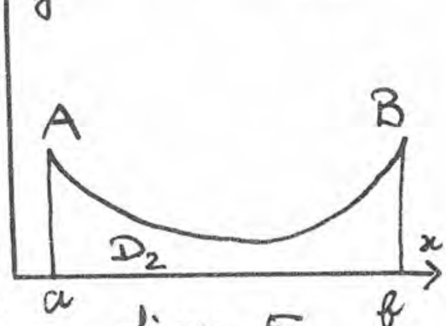
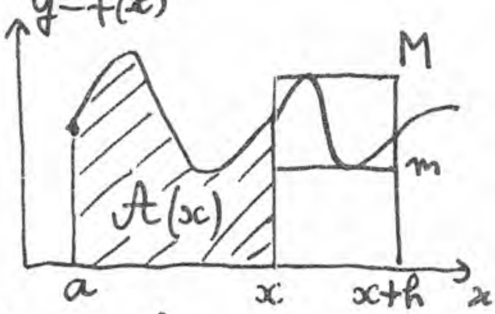


figure 5

3), on fait immédiatement apparaître (figures 4 et 5) deux domaines D_1 et D_2 du type "trapèze curviligne" tels que $a(D) = a(D_1) - a(D_2)$.

Les considérations heuristiques de la Leçon n°2 nous ont fait envisager comme très plausible que <u>l'aire du domaine de la</u>

figure 2 soit égale à $F(b)-F(a)$, où $F(x)$ est une quelconque primitive de la fonction f. Ce qui suit maintenant est presque une démonstration de cette conjecture.



Pour tout x entre a et b, notons $\mathcal{A}(x)$ l'aire comprise entre le graphe de f, l'axe Ox, et les verticales d'abscisse a et d'abscisse x. Soit M la plus grande valeur prise par f entre x et $x+h$, et m la plus petite valeur prise par f entre x et $x+h$, où h est un nombre $\neq 0$ assez petit pour que $x+h$ soit entre a et b. Le graphe de f entre x et $x+h$ est enserré entre les deux rectangles qui ont pour base le segment $[x, x+h]$, et pour hauteurs m et M respectivement. Donc

$$hm \leqq \mathcal{A}(x+h) - \mathcal{A}(x) \leqslant hM,$$

c'est-à-dire :

$$m \leqslant \frac{\mathcal{A}(x+h) - \mathcal{A}(x)}{h} \leqslant M.$$

Puisque la fonction f est continue, le théorème des valeurs intermédiaires (AN01, Leçon n°5, III, Thm 3, p 53) assure que f prend, sur $[x, x+h]$, toute valeur comprise entre m et M ; en particulier il existe un nombre ξ tel que $x \leqq \xi \leqslant x+h$, et tel que :

$$\frac{\mathcal{A}(x+h) - \mathcal{A}(x)}{h} = f(\xi).$$

Quand $h \neq 0$ tend vers 0, le nombre ξ tend vers x, donc $f(\xi)$ tend vers $f(x)$, par continuité de f, et par suite : la fonction $\mathcal{A}(x)$ est dérivable au point x, et sa dérivée vaut $f(x)$. Ainsi $\mathcal{A}(x)$ est l'une des primitives de $f(x)$ sur $[a,b]$. Si $F(x)$ est une primitive quelconque de $f(x)$, il existe une constante C telle que $F(x) = \mathcal{A}(x) + C$, cf AN01, Leçon n°5, IV, p 70. L'aire comprise entre le graphe de f, l'axe Ox, et les verticales d'abscisse a et d'abscisse b, vaut donc :

$$\mathcal{A}(b) - \mathcal{A}(a) = F(b) - F(a).$$

Pourquoi ai-je dit que ceci n'était que "presque" une démonstration de la conjecture ? C'est que, jusqu'à présent, nous avons fait comme si nous étions sûrs que les aires considérées existent. Mais il y a des fonctions continues dont le graphe est très compliqué et échappe à toute intuition géométrique. En tout état de cause nous devrons logiquement démontrer un jour que la méthode d'exhaustion, par les domaines polygonaux en escalier inscrits et exinscrits, est générale, s'applique à toute fonction continue f sur $[a,b]$, c'est-à-dire que, pour toute telle f, les aires de ces domaines ont une limite commune, quand "l'écart" de la subdivision de $[a,b]$ utilisée pour les construire tend vers zéro. Ce sera alors cette limite qui définira rigoureusement l'aire du trapèze curviligne délimité par le graphe de f, l'axe Ox, et les verticales $x=a$ et $x=b$.

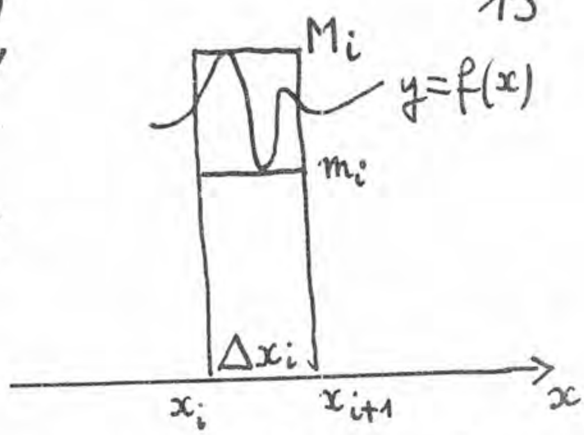
Cette construction un peu abstraite sera développée en toute rigueur à la Leçon suivante. Cependant, dès à présent, expliquons-en les étapes, ce qui rendra naturel d'introduire, pour l'aire en question, la notation de Leibniz $\int_a^b f(x)dx$, et de passer à la notion formelle d'intégrale, sans référence obligatoire au contexte géométrique d'aire.

Soient $a<b$ deux nombres réels, et soit $f(x)$ une fonction à valeurs réelles, définie et continue pour $a \leq x \leq b$. Appelons subdivision de $[a,b]$ toute succession finie σ de points du segment $[a,b]$, d'origine a, d'extrémité b :

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_i < x_{i+1} < \cdots < x_{n-1} < x_n = b .$$

L'entier n dépend de la subdivision σ considérée ; il est destiné à devenir très grand. Adoptons les notations suivantes :

$\Delta x_0 = x_1 - x_0$, $\Delta x_1 = x_2 - x_1, \ldots, \Delta x_i = x_{i+1} - x_i, \ldots, \Delta x_{n-1} = x_n - x_{n-1}$,



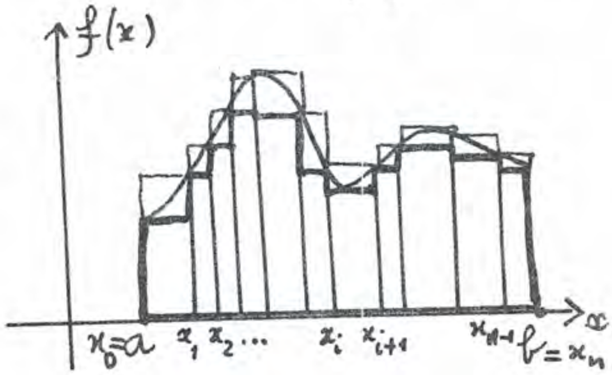
où la lettre Δ fait penser à "différence", et appelons écart de la subdivision σ le plus grand de ces nombres Δx_i. Pour une subdivision σ donnée, et, pour tout $i=0,1,2,\ldots,n-1$, soit m_i la borne inférieure de $f(x)$ quand x parcourt le segment $[x_i, x_{i+1}]$, et soit M_i la borne supérieure de $f(x)$ quand x parcourt ce segment $[x_i, x_{i+1}]$.

Formons les deux sommes :

$$s_\sigma(f) = m_0(x_1-x_0) + m_1(x_2-x_1) + \cdots + m_{n-1}(x_n-x_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i ,$$

$$S_\sigma(f) = M_0(x_1-x_0) + M_1(x_2-x_1) + \cdots + M_{n-1}(x_n-x_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i ,$$

qu'on appelle les sommes de Riemann (inférieure et supérieure) de f associées à la subdivision σ. Géométriquement ces sommes sont les aires des domaines polygonaux en escalier, inscrit et exinscrit au graphe de f,



domaines construits sur la subdivision σ (sur la figure ci-dessus, la frontière du domaine en escalier inscrit est en traits forts).

A la Leçon n° 3 nous démontrerons les faits suivants :

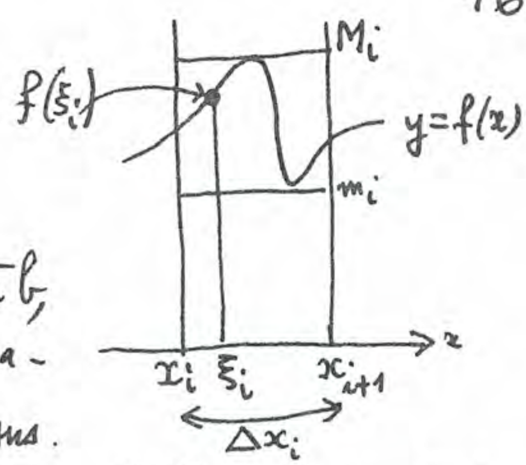
1°) quand on considère l'ensemble de toutes les subdivisions σ de $[a,b]$ possibles, les nombres $s_\sigma(f)$ ont une borne supérieure s, et les nombres $S_\sigma(f)$ ont une borne inférieure S.

2°) $s=S$.

3°) Pour chaque subdivision σ donnée, choisissons de manière arbitraire un nombre ξ_i dans chaque segment $[x_i, x_{i+1}]$ de σ, et formons la somme

$$f(\xi_0)(x_1-x_0) + f(\xi_1)(x_2-x_1) + \cdots + f(\xi_{n-1})(x_n-x_{n-1}) = \sum_i f(\xi_i)\Delta x_i .$$

Alors, quand on fait varier σ de sorte que son écart tende vers zéro,



ces sommes ont pour limite le nombre $s = S$ du 2°) :

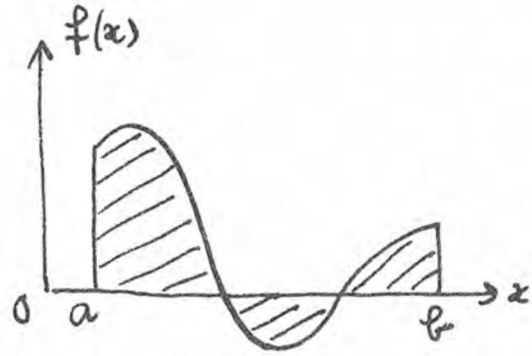
$$\lim_{\text{écart}(\sigma)\to 0} \sum_i f(\xi_i)\Delta x_i = s = S .$$

<u>Définition</u>. On appelle <u>intégrale</u> de f de a à b, et on note $\int_a^b f(x)dx$, le nombre $s = S$ qui apparaît dans les assertions 1°), 2°), 3°) ci-dessus.

Dans cette notation il ne faut pour l'instant attribuer aucun sens précis au symbole $f(x)dx$. La notation $\int_a^b f(x)dx$ forme un tout, indivisible. On aurait pu tout aussi bien noter:

$\int_a^b f(t)dt$ ou $\int_a^b f(\xi)d\xi$ ou $\int_a^b f$ ou $\mathrm{Int}(f; a, b)$ ou $\mathcal{A}(f; a, b)$, etc...

Cependant la notation de Leibniz $\int_a^b f(x)dx$, qui modélise en quelque sorte le passage à la limite des $\sum_i f(\xi_i)\Delta x_i$, a elle seule a permis, dans l'histoire du Calcul Différentiel et Intégral, des progrès très rapides, que ne pouvaient fournir les notations inadaptées des disciples de Newton.



Par <u>définition</u>, l'aire comprise entre le graphe de f, l'axe Ox, et les verticales $x = a$ et $x = b$, <u>est</u> le nombre $\int_a^b f(x)dx$ défini ci-dessus. Naturellement cette aire est algébrique : c'est-à-dire que les parties du graphe situées <u>au-dessous</u> de Ox donnent une contribution <u>négative</u> au calcul de l'aire.

A la Leçon n° 3 on prouvera aussi le théorème suivant :

4°) Si f est une fonction définie et continue sur $[a, b]$, la fonction

$$x \longmapsto F(x) = \int_a^x f(x)dx$$

est dérivable sur $[a, b]$, et sa dérivée $F'(x)$ est égale à $f(x)$ pour tout $x \in [a, b]$.

Il en résultera que : <u>toute fonction f continue sur $[a,b]$ a des primitives sur $[a,b]$</u>, ce qui n'était pas du tout évident a priori, et qu'on a la <u>formule</u> :

$$(*) \qquad \boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)} \; ,$$

où F est une primitive quelconque de f sur $[a,b]$. Ainsi sera démontrée la conjecture de la Leçon n°1.

Cette dernière formule, qu'on appelle parfois la formule fondamentale du Calcul différentiel et intégral, est due à Newton et Leibniz.

A cause de cette formule, la tradition a imposé, pour désigner <u>l'ensemble des primitives</u> de f, la notation $\int f(x)\,dx$, qu'on appelle aussi <u>l'intégrale indéfinie</u> de f. Par contre la notation $\int_a^b f(x)\,dx$, où les "bornes" a et b sont cette fois précisées, est parfois qualifiée d'intégrale "définie".

Par exemple, C désignant une constante non précisée,

$$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C \quad ; \quad \int \cos x\,dx = \sin x + C \; ;$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{Arctg} x + C \quad ; \quad \int \operatorname{Log} x\,dx = x \operatorname{Log} x - x + C \; ,$$

sont des intégrales indéfinies, c'est-à-dire des primitives.

Pour nous habituer à la notation de Leibniz des intégrales définies, utilisons-la pour réécrire les résultats obtenus aux Exercices 7 et 8 de la Leçon n° 1. On a trouvé :

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} = \operatorname{Log} 2 \quad ; \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = 1 \quad ; \quad \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \sin x\,dx = \frac{3}{2} \; ;$$

$$\int_1^2 (x^4 - x^2 + 2x + 1)\,dx = \frac{118}{15} \; ; \quad \int_0^b \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3} b\sqrt{b} \; ; \quad \int_a^b x^\alpha\,dx = \frac{b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}}{\alpha+1} \; ;$$

$$\int_0^2 e^x\,dx = e^2 - 1 \; ; \quad \int_0^3 2^x\,dx = \frac{7}{\operatorname{Log} 2} \quad ; \quad \int_1^3 \operatorname{Log} x\,dx = 3\operatorname{Log} 3 - 2 \; ;$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \operatorname{tg}^2 x)\,dx = 1 \; ; \quad \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{3} \quad ; \quad \int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{6} \; .$$

Vous avez calculé ces intégrales par la formule fondamentale (*), parce qu'à chaque fois vous connaissiez explicitement une primitive $F(x)$ de la fonction $f(x)$ que vous aviez à intégrer. Mais il arrive souvent qu'on ne sache pas exprimer, par une formule simple à partir de fonctions connues, les primitives d'une fonction continue $f(x)$ donnée. Par exemple les fonctions e^{-x^2} ou $\sqrt{1+x^3}$, comme toute fonction continue, ont des primitives, mais on ne sait pas (et d'ailleurs on ne peut pas) écrire explicitement ces primitives à l'aide des fonctions classiques. Cependant, dans ces cas, en utilisant l'approximation par les sommes de Riemann, on pourra quand même obtenir des valeurs numériques approchées du nombre $\int_a^b f(x)\,dx$ aussi précises qu'on voudra. Ainsi, ici comme souvent en mathématiques, un approfondissement théorique se révèle avoir aussi des applications pratiques.

Exercice 1. Pour tout entier $n \geqslant 2$ on introduit la subdivision σ_n du segment $[0,1]$ en n parties égales, c'est-à-dire par les points :

$$0 = x_0,\ x_1 = \frac{1}{n},\ x_2 = \frac{2}{n}, \dots,\ x_i = \frac{i}{n}, \dots,\ x_{n-1} = \frac{n-1}{n},\ x_n = 1.$$

En faisant successivement $n=2$, $n=10$, $n=50$, $n=100$, $n=150$, $n=200$, trouvez, à l'aide d'une machine programmable, les valeurs s_n et S_n des sommes de Riemann inférieure et supérieure de la fonction e^{-x^2} relatives à la subdivision σ_n. On programmera donc le calcul de

$$s_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e^{-\frac{i^2}{n^2}} \qquad \text{et} \qquad S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} e^{-\frac{i^2}{n^2}},$$

car la fonction e^{-x^2} est décroissante sur $[0,1]$. En déduire que, si on pose $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx \cong 0{,}75$, on commet une erreur inférieure à $\frac{5}{1000}$.

Exercice 2. Traitez les mêmes questions pour la fonction $\sqrt{1+x^3}$. Déduisez-en que $\int_0^1 \sqrt{1+x^3}\,dx \cong 1{,}11$, avec une erreur inférieure à $\frac{3}{1000}$.

Inversement on peut utiliser le Calcul intégral pour obtenir <u>la limite de certaines suites</u> de nombres réels, quand celles-ci présentent la forme (à vrai dire très particulière) de sommes de Riemann. Soit f une fonction continue sur, par exemple, le segment $[0,1]$, et considérons la suite de terme général

$$u_n = \frac{1}{n}\left[f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\dots+f\left(\frac{i}{n}\right)+\dots+f\left(\frac{n-1}{n}\right)+f(1)\right].$$

Introduisons comme ci-dessus la subdivision σ_n en n parties égales de $[0,1]$, donc $\Delta x_i = \frac{1}{n}$ pour tout $i=0,1,\dots,n-1$. En posant $\xi_i = \frac{i+1}{n}$, on voit que $u_n = \sum_i f(\xi_i)\Delta x_i$. Quand n tend vers $+\infty$, l'écart $\frac{1}{n}$ de σ_n tend vers 0 ; on peut appliquer la propriété 3°) des pages 15-16, et l'on obtient que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \int_0^1 f(x)\,dx$.

Ainsi, pour toute fonction f continue sur $[0,1]$:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\dots+f\left(\frac{i}{n}\right)+\dots+f\left(\frac{n-1}{n}\right)+f\left(\frac{n}{n}\right)\right] = \int_0^1 f(x)\,dx.}$$

<u>Exemple</u> : cherchons la limite, quand $n\to+\infty$, de la suite

$$u_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}\left(\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\dots+\sqrt{n}\right).$$

Elle s'écrit :

$$u_n = \frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{1}{n}}+\sqrt{\frac{2}{n}}+\sqrt{\frac{3}{n}}+\dots+\sqrt{\frac{n-1}{n}}+\sqrt{\frac{n}{n}}\right),$$

et donc a pour limite le nombre $\int_0^1 \sqrt{x}\,dx = F(1)-F(0)$, où F est une primitive de $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$; or $F(x) = \frac{x^{3/2}}{3/2} = \frac{2}{3}x\sqrt{x}$ est une telle primitive, donc $\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{2}{3}$.

<u>Exercice</u> 3. Trouvez la limite, quand $n\to+\infty$, de $u_n = \frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\dots+\frac{1}{2n}$.

<u>Exercice</u> 4. On pose $u_n = \frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+4}+\dots+\frac{1}{n^2+i^2}+\dots+\frac{1}{2n^2}$.

Trouvez la limite de la suite $n u_n$.

<u>Exercice</u> 5. Trouvez la limite de la suite $u_n = \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!\,n^n}}$ en étudiant $\operatorname{Log} u_n$.

Pour terminer cette leçon, il est commode pour la suite d'introduire dès à présent la notation différentielle pour les dérivées. Si $y = y(x)$ est une fonction dérivable, on a noté $y'(x)$ sa dérivée, et étudié les propriétés de cette notion à la Leçon n°6 de AN01. Depuis Leibniz on adopte souvent pour la dérivée la notation

$$y'(x) = \frac{dy}{dx},$$

qu'il faut considérer comme un tout : ni dy ni dx n'ont de signification par eux-mêmes, et $\frac{dy}{dx}$ n'est pas le quotient de deux nombres. Simplement $\frac{dy}{dx}$ est une autre manière, conventionnelle, d'écrire la fonction $y'(x)$, dérivée de la fonction $y(x)$.

On sait que $y'(x) = \lim\limits_{h \neq 0, h \to 0} \frac{y(x+h) - y(x)}{h}$. Si on pose $\Delta y = y(x+h) - y(x)$ et $h = x+h-x = \Delta x$, alors Δx est "l'accroissement" de x quand on passe de x au point voisin $x+h$, et Δy est l'accroissement correspondant de y. Ainsi a-t-on $y'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, ce qui rend assez naturelle la notation $\frac{dy}{dx}$.

Avec cette notation, les règles de dérivation établies en AN01, Leçon n°6, prennent la forme suivante, où f et g sont des fonctions dérivables, et λ une constante :

$$\frac{d(f+g)}{dx} = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx} \quad ; \quad \frac{d(\lambda f)}{dx} = \lambda \frac{df}{dx} \quad ;$$

$$\frac{d(fg)}{dx} = f\frac{dg}{dx} + g\frac{df}{dx} \quad ; \quad \frac{d\left(\frac{f}{g}\right)}{dx} = \frac{g\frac{df}{dx} - f\frac{dg}{dx}}{g^2}$$

Un moyen mnémotechnique pour retenir ces règles sous une forme encore plus simple consiste à chasser les dénominateurs dx, ce qui donne :

$$dy = y'(x)\,dx \quad ; \quad d(f+g) = df + dg \quad ; \quad d(\lambda f) = \lambda df \quad ;$$

$$d(fg) = f\,dg + g\,df \quad ; \quad d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\,df - f\,dg}{g^2}.$$

La notation différentielle se révèle commode pour calculer les dérivées des fonctions composées (ou l'effet d'un <u>changement de variable</u>) et des fonctions réciproques. En effet les propositions 1 et 2 de AnO1, Leçon n°6, II, p63-64, prennent la forme suivante

1°) Si $f = f(y)$ et si $y = y(x)$, et si on pose $F(x) = f(y(x))$, alors
$$\frac{dF}{dx} = \frac{df}{dy}\frac{dy}{dx}.$$

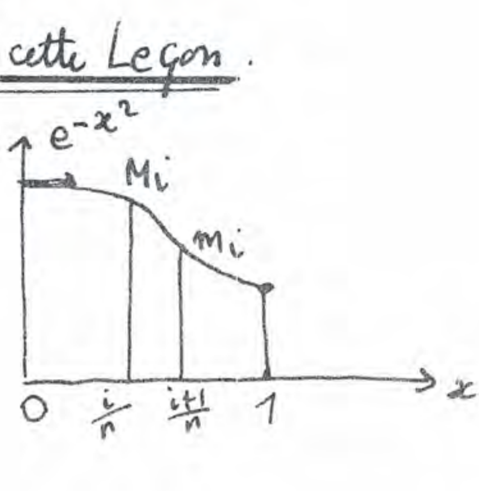
2°) Si $y = y(x)$ est dérivable strictement monotone, et si $x = x(y)$ est sa fonction réciproque, alors
$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}.$$

Nous appuyant sur ce formalisme, retrouvons la formule pour la dérivée de $\text{Arc}\sin x$, déjà obtenue en AN01, Leçon n°6, p64. On a $y = \text{Arc}\sin x$ si et seulement si $x = \sin y$. Or la dérivée du sinus étant le cosinus, on a : $dx = \cos y \, dy$, ou
$$dy = \frac{1}{\cos y}dx = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}dx = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx. \text{ Donc :}$$
$$(\text{Arc}\sin x)' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

<u>Exercice 6</u>. Utilisez ce formalisme pour retrouver les formules donnant les dérivées des fonctions $\text{Arctg}\,x$, $\text{Argsh}\,x$, $\text{Argth}\,x$ (cf. AN01, Leçons n°6 et n°9).

<u>Solutions des exercices proposés dans cette Leçon</u>.

<u>Exercice 1</u>. Entre 0 et 1 la fonction e^{-x^2} est décroissante, donc
$$m_i := \sup_{\frac{i}{n} \leq x \leq \frac{i+1}{n}} e^{-x^2} = e^{-\frac{(i+1)^2}{n^2}} \quad \text{et}$$



$M_i = \sup\limits_{\frac{i}{n} \leq x \leq \frac{i+1}{n}} e^{-x^2} = e^{-\frac{i^2}{n^2}}$. Ceci justifie les formes données à s_n et S_n dans le texte. On trouve :

n	2	10	50	100	150	200
s_n	0,5733	0,7146	0,7405	0,7437	0,7447	0,7452
S_n	0,8894	0,7778	0,7531	0,7500	0,7489	0,7484

.

Exercice 2. Cette fois la fonction $\sqrt{1+x^3}$ est croissante entre 0 et 1, donc $s_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=0}^{n-1}\sqrt{1+\frac{i^3}{n^3}}$, et $S_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{1+\frac{i^3}{n^3}} = s_n + \frac{\sqrt{2}-1}{n}$, d'où :

n	2	10	50	100	150	200
s_n	1,0303	1,0916	1,1073	1,1094	1,1101	1,1104
S_n	1,2374	1,1330	1,1156	1,1135	1,1128	1,1125

.

Exercice 3 $u_n - \frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} = \frac{1}{n}\left[\frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{1+\frac{2}{n}} + \cdots + \frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right]$
$= \frac{1}{n}\left[f(\frac{1}{n}) + f(\frac{2}{n}) + \cdots + f(\frac{n}{n})\right]$, avec $f(x) = \frac{1}{1+x}$. Donc (puisque $\frac{1}{n} \to 0$), $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = F(1) - F(0)$, avec $F(x) = \mathrm{Log}\,(1+x)$. Donc $\lim u_n = \mathrm{Log}\,2$.

Exercice 4. $nu_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n^2}} + \frac{1}{1+\frac{4}{n^2}} + \cdots + \frac{1}{1+\frac{n^2}{n^2}}\right) =$
$= \frac{1}{n}\left(f(\frac{1}{n}) + f(\frac{2}{n}) + \cdots + f(\frac{n}{n})\right)$, avec $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Donc nu_n tend vers $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \mathrm{Arctg}\,1 - \mathrm{Arctg}\,0 = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 5. $\mathrm{Log}\,u_n = \frac{1}{n}\mathrm{Log}\frac{(n+1)(n+2)\ldots(2n)}{n^n} =$
$= \frac{1}{n}\left[\mathrm{Log}(1+\frac{1}{n}) + \mathrm{Log}(1+\frac{2}{n}) + \cdots + \mathrm{Log}(1+\frac{n}{n})\right]$ tend vers $\int_1^2 \mathrm{Log}\,x\,dx$, qui vaut $F(2) - F(1)$, avec $F(x) = x\,\mathrm{Log}\,x - x$, donc tend vers $2\mathrm{Log}\,2 - 1$.
Donc u_n tend vers $e^{2\mathrm{Log}2 - 1} = 4/e$.

Exercice 6. Si $y = \mathrm{Arctg}\,x$, alors $x = \mathrm{tg}\,y$, donc $dx = (1+\mathrm{tg}^2 y)\,dy = (1+x^2)\,dy$. Par suite $(\mathrm{Arctg}\,x)' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$.
Si $y = \mathrm{Argsh}\,x$, alors $x = \mathrm{sh}\,y$, donc $dx = \mathrm{ch}\,y\,dy = \sqrt{1+\mathrm{sh}^2 y}\,dy =$
$= \sqrt{1+x^2}\,dy$. Par suite $(\mathrm{Argsh}\,x)' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
On procède de même pour $y = \mathrm{Argth}\,x$.

Théorie de l'intégrale des fonctions continues d'une variable réelle

Les deux premières leçons avaient pour but de décrire intuitivement les débuts de la théorie en suivant plus ou moins l'ordre historique de sa découverte, mais sans chercher à ce stade la rigueur mathématique des démonstrations. Elles ont fait apparaître le lien étroit entre le calcul des intégrales et celui des primitives, l'intégration apparaissant en quelque sorte comme l'opération inverse de la dérivation, grâce à la formule de Newton et Leibniz :

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(x)\,dx = f(x) .$$

Elles ont révélé de plus que l'intégrale est l'outil mathématique adapté au calcul des aires, et l'on pressent qu'elle pourrait avoir bien d'autres applications pratiques, en intervenant chaque fois qu'il s'agira de calculer la somme des mesures d'une infinité d'éléments eux-mêmes de mesure infiniment petite.

Nous allons maintenant justifier par des <u>démonstrations</u> les faits 1), 2), 3) et 4) énoncés à la Leçon n° 2, pages 15, 16 et 17. Le lecteur qui serait rebuté par les démonstrations un peu abstraites pourra d'ailleurs se contenter de la compréhension intuitive apportée par les Leçons n° 1 et n° 2, donc omettre de lire les démonstrations du § 1 ci-dessous, et se reporter directement à la suite de la théorie, au § 2, page 29.

1. La définition de l'intégrale

Soient $a < b$ deux nombres réels, et soit $f = f(x)$ une fonction, à valeurs réelles, définie et continue quand la variable réelle x parcourt le segment $[a, b]$. Nous avons défini à la Leçon n° 2, pages 14 et 15, ce que nous entendons par <u>subdivision</u> σ de $[a,b]$, par <u>écart</u> d'une telle subdivision, et par <u>sommes de Riemann inférieure</u> et <u>supérieure</u> de f associées à σ, notées $s_\sigma(f)$ et $S_\sigma(f)$. Avant tout relisez maintenant soigneusement ces définitions. Puisque, pour tout $i=0,1,\dots,n-1$, on a évidemment $m_i \leq M_i$, on peut énoncer le

<u>Lemme 1</u>. Pour toute subdivision σ donnée, on a l'inégalité :

$$s_\sigma(f) \leq S_\sigma(f).$$

Nous allons améliorer substantiellement cette remarque.

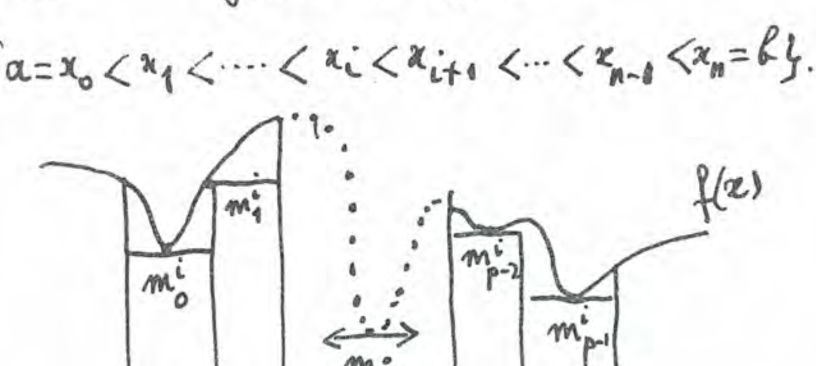
<u>Définition</u>. Une subdivision σ' est dite <u>plus fine</u> qu'une subdivision σ si, parmi les points de subdivision de σ', il y a notamment tous les points de subdivision de σ, plus éventuellement d'autres.

<u>Lemme 2</u>. Si la subdivision σ' est plus fine que la subdivision σ, on a les inégalités :

$$s_\sigma(f) \leq s_{\sigma'}(f) \quad \text{et} \quad S_{\sigma'}(f) \leq S_\sigma(f).$$

<u>Démonstration</u>: Soit $\sigma = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_i < x_{i+1} < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}$.

Le segment $[x_i, x_{i+1}]$ de la subdivision σ est remplacé, quand on passe de σ à la subdivision plus fine σ', par un nombre fini, disons p, de nouveaux segments :



$$[x_i = y_0^i, y_1^i], [y_1^i, y_2^i], \dots\dots, [y_{p-2}^i, y_{p-1}^i], [y_{p-1}^i, y_p^i = x_{i+1}].$$

La borne inférieure m_k^i de $f(x)$ sur chacun de ces nouveaux segments $[y_k^i, y_{k+1}^i]$ est évidemment supérieure ou égale à la borne inférieure générale m_i de $f(x)$ sur tout le segment $[x_i, x_{i+1}]$. Donc la contribution de $[x_i, x_{i+1}]$ à la somme de Riemann $s_{\sigma'}(f)$, à savoir:

$$m_0^i(y_1^i - y_0^i) + m_1^i(y_2^i - y_1^i) + \cdots\cdots + m_{p-2}^i(y_{p-1}^i - y_{p-2}^i) + m_{p-1}^i(y_p^i - y_{p-1}^i)$$

est $\geqslant m_i(y_1^i - y_0^i + y_2^i - y_1^i + \cdots + y_{p-1}^i - y_{p-2}^i + y_p^i - y_{p-1}^i) =$

$$= m_i(x_{i+1} - x_i),$$

c'est-à-dire est supérieure ou égale à la contribution de $[x_i, x_{i+1}]$ à la somme de Riemann $s_\sigma(f)$. En additionnant cette remarque sur tous les indices $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$, on obtient l'inégalité $s_\sigma(f) \leqslant s_{\sigma'}(f)$. On démontre de même l'inégalité $S_{\sigma'}(f) \leqslant S_\sigma(f)$.

<u>Lemme</u> 3. Si σ_1 et σ_2 sont deux subdivisions quelconques, on a :

$$s_{\sigma_1}(f) \leqslant S_{\sigma_2}(f).$$

<u>Démonstration</u>. Soit en effet σ' la subdivision de $[a,b]$ obtenue en juxtaposant, en réunissant, les points de subdivision de σ_1 et ceux de σ_2. La subdivision σ' est à la fois plus fine que σ_1 et plus fine que σ_2. D'après les lemmes 1 et 2, on a :

$$s_{\sigma_1}(f) \leqslant s_{\sigma'}(f) \leqslant S_{\sigma'}(f) \leqslant S_{\sigma_2}(f),$$

donc $s_{\sigma_1}(f) \leqslant S_{\sigma_2}(f)$.

Depuis AN01, Leçon n°5, III, Thm 2, p 52, nous savons que la fonction f est <u>bornée</u> sur $[a,b]$, donc qu'il existe deux constantes m et M telles que : pour tout $x \in [a,b]$, on a : $m \leqslant f(x) \leqslant M$. De plus, d'après le théorème de Heine (ibid, Thm 4, p 54), la fonction f est <u>uniformément continue</u> sur $[a,b]$: pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que :

$a \leqslant x \leqslant b$, $a \leqslant x' \leqslant b$, $|x' - x| \leqslant \eta$ impliquent $|f(x') - f(x)| \leqslant \varepsilon$.

Ce dernier fait va jouer un rôle fondamental.

<u>Proposition</u> 1. Soit f une fonction continue sur $[a,b]$, à valeurs réelles. Quand on considère l'ensemble de toutes les subdivisions σ de $[a,b]$ possibles, l'ensemble des nombres $s_\sigma(f)$ a une borne supérieure s, et l'ensemble des nombres $S_\sigma(f)$ a une borne inférieure

S. De plus $s = S$.

<u>Démonstration</u>. Pour toute subdivision $\sigma = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b\}$,

$$s_\sigma(f) = m_0(x_1 - x_0) + m_1(x_2 - x_1) + \dots + m_{n-2}(x_{n-1} - x_{n-2}) + m_{n-1}(x_n - x_{n-1})$$

est $\leq M(x_1 - x_0 + x_2 - x_1 + \dots + x_{n-1} - x_{n-2} + x_n - x_{n-1}) = M(b-a)$. Ainsi, quand σ varie, l'ensemble des nombres $s_\sigma(f)$ est <u>majoré</u> par la constante $M(b-a)$; d'après AN 01, Leçon n°2, IV, p16, cet ensemble de nombres $s_\sigma(f)$ a donc une borne supérieure, que nous notons s. Ceci signifie, rappelons-le, que ce nombre s a, et est le seul à avoir, les deux propriétés suivantes :

$1)_1$ pour toute subdivision σ, on a : $s_\sigma(f) \leq s$;

$2)_1$ pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une subdivision σ telle que :

$$s_\sigma(f) \geqslant s - \varepsilon.$$

De même, quand σ varie, l'ensemble des nombres

$$S_\sigma(f) = M_0(x_1 - x_0) + M_1(x_2 - x_1) + \dots + M_{n-2}(x_{n-1} - x_{n-2}) + M_{n-1}(x_n - x_{n-1})$$

est <u>minoré</u> par la constante $m(b-a)$; il a donc une borne inférieure que nous notons S, et qui est caractérisée par les deux propriétés :

$1)_2$ pour toute subdivision σ, on a : $S \leqslant S_\sigma(f)$;

$2)_2$ pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une subdivision σ telle que :

$$S_\sigma(f) \leq S + \varepsilon.$$

Montrons que $s \leqq S$. En effet si, par l'absurde, on avait $S < s$, on poserait $s - S = 3\varepsilon$. D'après $2)_1$ et $2)_2$, on pourrait choisir une subdivision σ_1 et une subdivision σ_2 telles que :

$$S_{\sigma_2}(f) \leqslant S + \varepsilon = s - 2\varepsilon < s - \varepsilon \leqslant s_{\sigma_1}(f),$$

donc telles que $S_{\sigma_2}(f) < s_{\sigma_1}(f)$, ce qui contredirait le Lemme 3.

Montrons qu'en fait $s = S$. En effet si, par l'absurde, on avait $s < S$, on poserait $S - s = 2\varepsilon(b-a)$. On choisirait, d'après le théorème de Heine, un $\eta > 0$ tel que $|x' - x| \leq \eta$ implique $|f(x') - f(x)| \leq \varepsilon$. On subdiviserait $[a, b]$ en un nombre fini de segments de longueur $\leq \eta$, ce qui est évidemment possible, avec au plus

$\mathrm{Ent}\left(\frac{b-a}{\eta}\right)+1$ tels segments ; notons :

$$\sigma=\{a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_i<x_{i+1}<\cdots<x_{n-1}<x_n=b\}$$

la subdivision ainsi obtenue ; chaque $[x_i\ ,x_{i+1}]$ est de longueur $\leq\eta$.
De plus les bornes $m_i=\inf\limits_{x_i\leq x\leq x_{i+1}} f(x)$ et $M_i=\sup\limits_{x_i\leq x\leq x_{i+1}} f(x)$ sont "atteintes" :
il existe $c_i\in[x_i,x_{i+1}]$ et $d_i\in[x_i,x_{i+1}]$ tels que $m_i=f(c_i)$, $M_i=f(d_i)$ (cf AN01, Leçon n°5, III, Thm 2, p52). Ainsi, d'après le théorème de Heine et le choix de η, a-t-on, pour tout $i=0,1,2,\dots,n-1$:

$$M_i-m_i=f(d_i)-f(c_i)\leq\varepsilon.$$

Donc

$$S_\sigma(f)-s_\sigma(f)=\sum_{i=0}^{n-1}(M_i-m_i)\Delta x_i\leqslant\varepsilon\sum_{i=0}^{n-1}\Delta x_i=\varepsilon(b-a)<2\varepsilon(b-a)=S-s.$$

Mais, d'après 1)$_1$ et 2)$_1$, on a

$$S\leqslant S_\sigma(f)\qquad\text{et}\qquad s\geqslant s_\sigma(f).$$

On aurait donc finalement :

$$S-s\leqslant S_\sigma(f)-s_\sigma(f)<S-s,$$

donc $S-s<S-s$, ce qui est absurde.

<u>Définition</u> Soient $a<b$ deux nombres réels, et soit f une fonction continue réelle sur $[a,b]$. On appelle <u>intégrale</u> de f <u>de a à b</u>, et on note $\int_a^b f(x)dx$, le nombre $s=S$ de la Proposition 1.

$[a,b]$ s'appelle l'intervalle d'intégration ; a et b les bornes d'intégration ; a la borne supérieure, et b la borne inférieure.

<u>Proposition 2</u>. Pour chaque subdivision $\sigma=\{a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b\}$ de $[a,b]$, choisissons de manière arbitraire un nombre ξ_i dans chaque segment $[x_i\ ,x_{i+1}]$ de la subdivision σ, et formons la somme :

$$f(\xi_0)(x_1-x_0)+f(\xi_1)(x_2-x_1)+\cdots\cdots+f(\xi_{n-1})(x_n-x_{n-1})=\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Alors, quand on fait varier σ de sorte que son écart (qui est le $\max\limits_i\Delta x_i$) tende vers 0, cette somme a pour limite le nombre $\int_a^b f(x)dx$. De manière précise, quel que soit $\varepsilon>0$,

il existe $\eta > 0$ tel que, pour toute subdivision d'écart $\leq \eta$, on ait :
$$\left| \int_a^b f(x)dx - \sum_i f(\xi_i)\Delta x_i \right| \leq \varepsilon .$$

<u>Démonstration</u>. Puisque $m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i$, on a évidemment
$$(1) \qquad s_\sigma(f) \leq \sum_i f(\xi_i)\Delta x_i \leq S_\sigma(f).$$
Or l'application du théorème de Heine, à la fin de la démonstration de la Proposition 1, a montré que, pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe $\eta > 0$ tel que, dès lors que l'écart d'une subdivision σ est $\leq \eta$, on a que $S_\sigma(f) - s_\sigma(f) \leq \varepsilon$. Puisque
$$(2) \qquad s_\sigma(f) \leq s = \int_a^b f(x)dx = S \leq S_\sigma(f) ,$$
il résulte aussitôt de (1) et (2) que, pour une telle subdivision σ,
$$\left| \int_a^b f(x)dx - \sum_i f(\xi_i)\Delta x_i \right| \leq \varepsilon .$$

<u>Corollaire</u>. Soit une fonction f, à valeurs réelles, définie et continue sur $[a,b]$. Alors le nombre $\int_a^b f(x)dx$ est, quand $n \to +\infty$, la limite de la suite :
$$u_n(f) = \frac{b-a}{n}\left[f(a) + f\left(a + \frac{b-a}{n}\right) + f\left(a + 2\frac{b-a}{n}\right) + \dots + f\left(a + (n-1)\frac{b-a}{n}\right) + f(b) \right],$$
c'est-à-dire de la suite :
$$u_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right) .$$

<u>Démonstration</u>. Dans la Proposition 2, il suffit de se restreindre aux subdivisions σ_n de $[a,b]$ en n parties <u>égales</u>, donc d'écart $\frac{b-a}{n}$, écart qui tend vers zéro quand n tend vers $+\infty$, et de poser $\xi_i = (i+1)\frac{b-a}{n}$ pour $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$. Le terme excédentaire $\frac{b-a}{n} f(a)$ dans $u_n(f)$ – placé là pour des raisons esthétiques – ne compte pas puisqu'il tend vers 0.

2. Premières propriétés de l'intégrale

Nous retrouvons ici tous nos lecteurs, à la fois ceux qui ont étudié attentivement le § 1 et ceux qui, peu enclins aux raisonnements abstraits, ont préféré omettre de le lire. Que ces derniers se rassurent : ils ont pu assimiler, aux Leçons n° 1 et n° 2, les résultats du § 1 de façon pragmatique, et n'auront aucune peine à poursuivre le déroulement de la théorie, désormais plus facile. Cependant, qu'ils lisent d'abord l'énoncé du Corollaire ci-dessus p 28, dont ils ont déjà eu, à la page 19 Leçon n° 2, l'expérience du cas particulier $a=0$, $b=1$.

Extensions de la définition

1°) Jusqu'à présent nous avons défini et étudié $\int_a^b f(x)dx$ lorsque $a<b$. Si maintenant $b<a$, nous poserons par définition :

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx .$$

De plus nous conviendrons que :

$$\int_a^a f(x)dx = 0 .$$

On voit facilement que le Corollaire p 28 continue d'être valable dans ces nouvelles conditions.

2°) Jusqu'à présent les valeurs $f(x)$ de f étaient supposées réelles. Si, plus généralement, la fonction f, définie et continue sur $[a,b]$, est à valeurs complexes, on peut poser :

$$f(x) = f_1(x) + i\, f_2(x) ,$$

où $i=\sqrt{-1}$, où $f_1(x)$ et $f_2(x)$ sont les parties réelle et imaginaire du nombre complexe $f(x)$. Alors f_1 et f_2 sont des fonctions définies et continues sur $[a,b]$, à valeurs réelles. Nous poserons par définition :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f_1(x)dx + i\int_a^b f_2(x)dx .$$

C'est un nombre complexe. On voit tout de suite que le Corollaire p28, c'est-à-dire la formule :

$$(*)\quad \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} u_n(f) = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$$

continue d'être valable plus généralement pour les f à valeurs complexes.

Proposition 3 (linéarité de l'intégrale). Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$, à valeurs complexes, et soit λ une constante complexe. On a les formules :

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

et

$$\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda\int_a^b f(x)\,dx.$$

Démonstration. Il est évident que, pour tout entier $n\geq 1$,

$$u_n(f+g) = u_n(f)+u_n(g) \quad ; \quad u_n(\lambda f) = \lambda u_n(f).$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient le résultat grâce à la formule $(*)$.

Proposition 4. (intégration des inégalités) Soient deux nombres réels a et b tels que $a\leq b$.

1) Soit f une fonction continue sur $[a,b]$, à valeurs réelles. On suppose que, pour tout $x\in[a,b]$, on a $f(x)\geq 0$. Alors :

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0.$$

2) Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$, à valeurs réelles. On suppose que, pour tout $x\in[a,b]$, on a : $f(x)\leq g(x)$. Alors :

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$

3) Soit f une fonction continue sur $[a,b]$, à valeurs réelles. Soient m et M deux constantes réelles telles que, pour tout $x\in[a,b]$, on ait : $m\leq f(x)\leq M$. Alors :

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a).$$

4) Soit f une fonction continue sur $[a,b]$, à valeurs réelles. Alors il existe au moins un nombre $\xi \in [a,b]$ tel que :
$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,f(\xi) \quad .$$
5) Soit f une fonction continue sur $[a,b]$, à valeurs complexes. Alors :
$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx .$$
6) (<u>inégalité de la moyenne</u>). Soit f une fonction continue sur $[a,b]$, à valeurs complexes. Alors :
$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq (b-a) \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)| .$$

<u>Démonstrations</u>

1) Pour tout entier $n \geq 1$, on a $u_n(f) \geq 0$. Donc $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \geq 0} u_n(f)$ est un nombre ≥ 0.

2) Il suffit d'appliquer le 1°) en y remplaçant f par $g-f$, puis d'utiliser la linéarité de l'intégrale (Proposition 3).

3) Soit $\mathbb{1}$ la fonction identique à 1 sur $[a,b]$. Il est clair que $\int_a^b \mathbb{1}(x)\,dx = b-a$. De plus, par hypothèse, pour tout $x \in [a,b]$,
$$m\,\mathbb{1}(x) \leq f(x) \leq M\,\mathbb{1}(x) .$$
Il suffit d'intégrer cette double inégalité, et d'appliquer le 2°).

4) Si on pose $\inf_{a \leq x \leq b} f(x) = m$ et $\sup_{a \leq x \leq b} f(x) = M$, le nombre $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ est, d'après 3°), compris entre m et M. D'après le théorème des valeurs intermédiaires (AN01, Leçon n°5, Thm 3, p 53), ce nombre est l'une des valeurs prises par f ; autrement dit il existe $\xi \in [a,b]$ tel que $f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$.

5) Soit $|f|$ la fonction définie par $|f|(x) = |f(x)|$ = le module du nombre complexe $f(x)$. La fonction $|f|$ est continue sur $[a,b]$, comme composée des deux fonctions continues $y = f(x)$, et $y \mapsto |y|$.

Par l'inégalité triangulaire des modules,

$$|u_n(f)| = \frac{b-a}{n}\left|\sum_{k=0}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\right| \leqslant \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n}\left|f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\right| = u_n(|f|).$$

Quand $n \to \infty$, on obtient, d'après (*), l'inégalité annoncée.

6) Puisque $|f|$ est à valeurs réelles, on peut lui appliquer 4) : il existe $\xi \in [a,b]$ tel que :

$$\int_a^b |f(x)|\,dx = (b-a)|f(\xi)|.$$

Or $|f(\xi)| \leqslant \sup\limits_{a\leq x\leq b} |f(x)|$, donc 6) résulte de 5).

<u>Proposition</u> 5 (partition de l'intervalle d'intégration). Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs complexes. Soient a, b, c trois nombres appartenant à I. Alors :

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

<u>Démonstration</u>. Si $a=b$ ou $a=c$ ou $b=c$, la formule est évidente. Supposons donc a, b et c deux à deux distincts. On peut aussi supposer f réelle, car la formule à démontrer est linéaire en f. Dans un <u>premier cas</u>, supposons $a<b<c$. Soit

$$\sigma = \{a = x_0 < x_1 < \cdots\cdots < x_i < x_{i+1} < \cdots\cdots < x_{n-1} < x_n = c\}$$

une subdivision quelconque de $[a,c]$; soit p l'indice tel que $x_p \leq b < x_{p+1}$. À σ nous associons

$$\sigma_1 = \{a = x_0 < x_1 < \cdots\cdots < x_p \leqslant b\},$$

qui est une subdivision de $[a,b]$, et

$$\sigma_2 = \{b < x_{p+1} < x_{p+2} < \cdots\cdots < x_{n-1} < x_n = c\},$$

qui est une subdivision de $[b,c]$, ainsi que les sommes

$$s = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1})(x_{i+1}-x_i) \quad ;$$

$$s_1 = \sum_{i=0}^{p-1} f(x_{i+1})(x_{i+1}-x_i) + f(b)(b-x_p) \quad ;$$

$$s_2 = \sum_{i=p}^{n-1} f(x_{i+1})(x_{i+1}-x_i) - f(x_{p+1})(b-x_p).$$

Quand l'écart $\operatorname{Max}_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)$ de σ tend vers zéro,

$$s-(s_1+s_2)=(b-x_p)\left[f(x_{p+1})-f(b)\right]$$

tend vers 0, car f est bornée. Mais, d'après la Proposition 2, le premier membre $s-(s_1+s_2)$ tend vers :

$$\int_a^c f(x)\,dx-\left(\int_a^b f(x)\,dx+\int_b^c f(x)\,dx\right),$$

qui est donc nul. Les <u>cinq autres cas</u> possibles pour les positions relatives de a, b, c se ramènent immédiatement au premier cas. Si, par exemple, $a<c<b$, on vient de montrer que $\int_a^b=\int_a^c+\int_c^b$. Or $\int_c^b=-\int_b^c$. Donc $\int_a^c=\int_a^b-\int_c^b=\int_a^b+\int_b^c$.

§ 3. Le théorème fondamental du Calcul différentiel et intégral

Dans la notation $\int_a^b f(x)\,dx$, seuls comptent la fonction f et le choix des bornes a et b. Le choix de la notation x pour la variable, dans $f(x)\,dx$, n'a par contre aucune importance ; on aurait tout aussi bien pu écrire $f(t)\,dt$ ou $f(\xi)\,d\xi$ etc..., donc

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b f(t)\,dt=\int_a^b f(u)\,du=\int_a^b f(\xi)\,d\xi=\text{etc...}$$

sont autant de notations possibles pour désigner le même nombre, à savoir l'intégrale de la fonction f de a à b. L'énoncé qui suit sera plus clair si on adopte la notation $f(t)\,dt$ plutôt que $f(x)\,dx$.

<u>Théorème</u>. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et soit f une fonction continue sur I, à valeurs complexes. Fixons x_0 dans I, et faisons varier x dans I ; considérons la fonction

$$x\longmapsto F(x)=\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$$

définie dans I, "intégrale fonction de sa borne supérieure". <u>Cette</u>

fonction F est dérivable en tout point x de I, et sa dérivée $F'(x)$ est égale à $f(x)$. Autrement dit :

$$\frac{d}{dx}\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = f(x).$$

Démonstration. Nous l'avons déjà quasiment faite sous forme géométrique au début de la leçon n° 2, p 13, mais reprenons-la à l'intérieur de la théorie. Par linéarité on peut supposer f réelle. Soit x fixé dans I, et h un nombre réel $\neq 0$ tel que $x+h \in I$. D'après les propositions 5, et 4, 4'), on a :

$$F(x+h)-F(x) = \int_{x_0}^{x+h} f(t)\,dt - \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = \int_{x}^{x+h} f(t)\,dt = h\,f(\xi),$$

où ξ est situé entre x et $x+h$. Autrement dit :

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(\xi).$$

Or, quand $h \neq 0$ tend vers zéro, ξ tend vers x, donc par continuité $f(\xi)$ tend vers $f(x)$.

Corollaire 1. Toute fonction continue sur un intervalle de $\mathbb{R}$ admet des primitives sur cet intervalle.

En effet, si f est continue sur I, et si $x_0 \in I$, on vient de voir que $x \mapsto \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ est une telle primitive.

Corollaire 2. Soit f une fonction continue dans un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs complexes. Supposons qu'on connaisse explicitement une primitive F de f dans I. Alors on a, pour $a \in I$ et $b \in I$, la formule :

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)}\ .$$

Démonstration. Posons $G(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. D'après le théorème, G est une primitive de f, tout comme F. Donc il existe une constante C telle que, pour tout $x \in I$, on ait $G(x) = F(x) + C$.

On a notamment : $C = G(a) - F(a) = G(b) - F(b)$, donc

$$F(b) - F(a) = G(b) - G(a) = G(b) = \int_a^b f(t)\,dt .$$

Notation. On posera souvent : $F(b) - F(a) = \left[F(x)\right]_a^b$, ou $= \left[F(x)\right]_{x=a}^{x=b}$.

Exemples. $\displaystyle\int_a^b (x^3 + 2x)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} + x^2\right]_a^b = \frac{b^4 - a^4}{4} + b^2 - a^2$.

$$\int_2^3 \mathrm{Log}\,x\,dx = \left[x \,\mathrm{Log}\,x - x\right]_{x=2}^{x=3} = \left(\mathrm{Log}\,\frac{27}{4}\right) - 1 .$$

Intégrale indéfinie

L'ensemble de toutes les primitives d'une fonction f sur un intervalle donné s'appelle l'intégrale indéfinie de f, et est noté

$$\int f(x)\,dx$$

sans indication de bornes ; par exemple :

$$\int x^4\,dx = \frac{x^5}{5} + C \quad ; \quad \int \cos x\,dx = \sin x + C \ ;$$

$$\int \mathrm{Log}\,x\,dx = x\,\mathrm{Log}\,x - x + C , \text{ pour } x > 0 \ ; \text{ etc}\ldots ,$$

où C est une constante arbitraire non précisée. En revanche $\int_a^b f(x)\,dx$ s'appelle une intégrale définie. On prendra garde qu'une intégrale définie est un nombre, alors qu'une intégrale indéfinie est une infinité de fonctions, qui diffèrent deux à deux par une constante. Ces notations sont d'ailleurs cohérentes avec le Corollaire 2 ci-dessus, qui peut encore se lire :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[\int f(x)\,dx\right]_a^b .$$

Ce Corollaire montre le grand intérêt, pour le calcul des intégrales définies, qu'il y aurait à perfectionner le Calcul des primitives. C'est à quoi nous allons employer les trois Leçons suivantes.

Calcul des primitives :

I. Intégration par parties. Changement de variable.

Dans cette Leçon et dans les suivantes nous allons expliquer des techniques, voire des recettes, pour trouver explicitement de plus en plus de primitives, ce qui est important pour deux raisons :

1°) comme il est apparu aux Leçons précédentes, la connaissance d'une primitive $F(x)$ d'une fonction f continue dans un intervalle I permet, quels que soient $a \in I$ et $b \in I$, de calculer immédiatement l'intégrale définie $\int_a^b f(x)\,dx$ par la formule :

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) ;$$

2°) comme on le verra dans la deuxième moitié de ce fascicule, calculer les primitives de f, c'est résoudre l'équation différentielle du type le plus simple qui soit, à savoir :

$$y' = f(x) ;$$

d'autres équations différentielles plus compliquées, comme nous le verrons, voient leur résolution en définitive ramenée à des "quadratures", c'est-à-dire à des calculs de primitives.

§1. Tableau des primitives usuelles immédiates.

Chaque fois qu'on connaît explicitement la dérivée $f(x)$ d'une fonction $F(x)$, on peut énoncer ce résultat à l'envers et écrire :

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C ,$$

formule équivalente à : $F'(x) = f(x)$. Les calculs de dérivées effectués en AN 01 nous permettent de dresser aussitôt le tableau suivant où, sauf indication contraire, les formules sont valables sur $\mathbb{R}$ tout entier.

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad , \text{ si } n \text{ est un entier } \geqslant 0 \; ;$$

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad , \text{ si } \alpha \in \mathbb{R} \, , \, \alpha \neq -1 \, , \text{ pour } x > 0 \; ;$$

$$\int \frac{dx}{x} = \begin{cases} \operatorname{Log} x + C & , \text{ pour } x > 0 \\ \operatorname{Log}(-x) + C & , \text{ pour } x < 0 \end{cases} \; ;$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C \quad ; \quad \int \cos x \, dx = \sin x + C \; ;$$

$$\int e^x dx = e^x + C \quad ; \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\operatorname{Log} a} + C \, , \text{ si } a > 0 \, , \, a \neq 1 \; ;$$

$$\int \operatorname{sh} x \, dx = \operatorname{ch} x + C \quad ; \quad \int \operatorname{ch} x \, dx = \operatorname{sh} x + C \; ;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{Arc\,sin} x + C \quad , \text{ pour } |x| < 1 \; ;$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{Arc\,tg} x + C \; ;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{Arg\,sh} x + C = \operatorname{Log}\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + C \; ;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{Arg\,ch} x + C = \operatorname{Log}\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) + C \, , \text{ si } x > 1 \; ;$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \begin{cases} \operatorname{Arg\,th} x = \dfrac{1}{2} \operatorname{Log} \dfrac{1+x}{1-x} + C & , \text{ si } |x| < 1 \, , \\ \dfrac{1}{2} \operatorname{Log} \dfrac{x+1}{x-1} + C & , \text{ si } |x| > 1 \; ; \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int (1 + \operatorname{tg}^2 x) \, dx = \operatorname{tg} x + C \, , \text{ si } x \in \left] -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right[\, , \text{ où } k \text{ est un entier} \; ;$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{cotg} x + C \, , \text{ si } x \in \left] k\pi, (k+1)\pi \right[\, , \text{ où } k \text{ est un entier} \; ;$$

$$\int \operatorname{Log} x \, dx = x \operatorname{Log} x - x + C \, .$$

A la Leçon n° 1, Exercice 8, nous avons déjà eu l'occasion d'exploiter par avance ce tableau pour le calcul d'intégrales définies. Prenez un peu de temps ici pour réviter cet Exercice.

§ 2. Primitives se ramenant facilement aux primitives usuelles.

a) par linéarité : Si f et g sont deux fonctions continues, et λ une constante, et si F est une primitive de f et G une primitive de g, on a :

$$(F+G)' = F' + G' = f + g \quad ; \quad \text{et } (\lambda F)' = \lambda F' = \lambda f ,$$

donc :

$$\int [f(x)+g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx \quad ; \quad \int \lambda f(x)\,dx = \lambda \int f(x)\,dx ,$$

égalités qui s'entendent à une constante additive près.

Exemple 1. Les primitives du polynôme de degré n :

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots\cdots + a_1 x + a_0 \quad , \quad a_n \neq 0 ,$$

sont les polynômes de degré $n+1$:

$$\int f(x)\,dx = \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n} x^n + \cdots\cdots + a_1 \frac{x^2}{2} + a_0 x + C .$$

Exemple 2. Pour calculer $\int \frac{dx}{1-x^4}$ pour $|x|<1$, remarquons que $\frac{1}{1-x^4}$ se décompose en la somme

$$\frac{1}{1-x^4} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1-x^2} \right)$$

de fonctions figurant dans le tableau des primitives usuelles, d'où

$$\int \frac{dx}{1-x^4} = \frac{1}{2} \operatorname{Arctg} x + \frac{1}{4} \operatorname{Log} \frac{1+x}{1-x} + C .$$

Cette méthode de décomposition d'une fraction rationnelle en la somme de fractions rationnelles assez simples pour être intégrées directement sera présentée de façon systématique à la Leçon n° 5.

Exemple 3. Pour trouver les primitives de tg^2x pour $|x|<\frac{\pi}{2}$, écrivons
$$tg^2x = (1+tg^2x) - 1,$$
et remarquons que la fonction $1+tg^2x$ figure dans le tableau; on obtient:
$$\int tg^2x\,dx = tg x - x + C.$$

Exercice 1. Trouver deux constantes A et B telles que:
$$\frac{x^3-x^2+x}{x^2+1} = Ax+B+\frac{1}{x^2+1}.$$
En déduire $\int \frac{x^3-x^2+x}{x^2+1}dx$.

b) par translation ou homothétie sur la variable: Soit k une constante réelle $\neq 0$. Les formules de dérivation:
$[(x+k)^\alpha]' = \alpha(x+k)^{\alpha-1}$, pour $\alpha\neq-1$; $[\operatorname{Log}(x+k)]' = \frac{1}{x+k}$;
$[\sin(kx)]' = k\cos(kx)$; $[\cos(kx)]' = -k\sin(kx)$; $(e^{kx})' = ke^{kx}$;
etc..., quand on les lit à l'envers, permettent de généraliser légèrement certaines primitives usuelles:
$$\int (x+k)^\alpha dx = \frac{(x+k)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \text{ pour } \alpha\neq-1,\ x>-k;$$
$$\int \frac{dx}{x+k} = \operatorname{Log}(x+k)+C, \text{ pour } x>-k;$$
$$\int \sin(kx)dx = \frac{-\cos(kx)}{k}+C \ ; \ \int \cos(kx)dx = \frac{\sin(kx)}{k}+C;$$
$$\int e^{kx}dx = \frac{e^{kx}}{k}+C;\ \text{etc...}$$

Exercice 2. Pour $a>0$, dérivez $\operatorname{Arc\,sin}\frac{x}{a}$ et $\operatorname{Arc\,tg}\frac{x}{a}$. Déduisez-en: $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ pour $|x|<a$, et $\int\frac{dx}{a^2+x^2}$.

Exercice 3. Calculez $\int\cos^2x\,dx$ et $\int\sin^2x\,dx$ en utilisant les formules $\cos^2x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ et $\sin^2x = \frac{1-\cos 2x}{2}$.

Exemple 4. Soit à calculer $\int \cos 2x \cos 3x \, dx$. D'après AN01, Leçon n°4, p41, on peut transformer le produit $\cos 2x \cos 3x$ en une somme :

$$\cos 2x \cos 3x = \frac{\cos(3x+2x) + \cos(3x-2x)}{2} = \frac{\cos 5x + \cos x}{2},$$

d'où $\int \cos 2x \cos 3x \, dx = \frac{1}{2}\int \cos 5x \, dx + \frac{1}{2}\int \cos x \, dx = \frac{\sin 5x}{10} + \frac{\sin x}{2} + C.$

Exercice 4. Calculez $\int \sin x \sin 2x \sin 3x \, dx$.

c) grâce à la formule de dérivation d'une puissance ou d'un logarithme :

Si $f(x)$ se présente de façon évidente sous la forme $f(x) = [u(x)]^{\alpha} u'(x)$, où $u(x)$ est toujours > 0 et $\alpha \neq -1$, alors $f(x)$ est la dérivée de la fonction $\frac{[u(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1}$, donc $\int f(x) dx = \frac{[u(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$.

De même si, de façon évidente, $f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$, où $u(x) > 0$, alors $f(x)$ est la dérivée de $\text{Log}[u(x)]$, donc $\int f(x) dx = \text{Log}[u(x)] + C$.

Exemples 5. Comme $\frac{1}{x}$ est la dérivée de $\text{Log}\, x$, on a :

$$\int \frac{\text{Log}\, x}{x} dx = \frac{1}{2}(\text{Log}\, x)^2 + C, \quad \text{pour } x > 0 ;$$

et

$$\int \frac{dx}{x \,\text{Log}\, x} = \text{Log}(\text{Log}\, x) + C, \quad \text{pour } x > 1.$$

Exercice 5. Calculez $\int \text{tg}\, x \, dx$; $\int \frac{x^3}{x^4+1} dx$; $\int \frac{\text{Arctg}\, x}{1+x^2} dx$.

§ 3. Intégration par parties.

Partons de la formule de dérivation d'un produit :

$$[u(x) v(x)]' = u(x) v'(x) + v(x) u'(x),$$

c'est-à-dire de la formule :

$$u(x) v'(x) = -v(x) u'(x) + [u(x) v(x)]',$$

et prenons les primitives des deux membres. Nous obtenons la

<u>Proposition 1</u>. Soient u et v deux fonctions définies dans un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs complexes, et admettant dans I des dérivées $u'(x)$ et $v'(x)$ continues. Alors on a dans I la formule

$$\int u(x)v'(x)dx = -\int v(x)u'(x)dx + u(x)v(x) \quad ,$$

égalité valable à une constante additive près, et quels que soient $a\in I$, $b\in I$, on a la formule (exacte) :

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = -\int_a^b v(x)u'(x)dx + \Big[u(x)v(x)\Big]_{x=a}^{x=b} .$$

La deuxième formule se déduit de la première grâce au Corollaire 2 de la Leçon n° 3.

Soit à calculer $\int f(x)dx$. Il arrive qu'on puisse mettre $f(x)$ sous la forme $f(x) = u(x)v'(x)$, que l'intégrale $\int f(x)dx = \int u(x)v'(x)dx$ paraisse a priori difficile à calculer, mais que l'intégrale $\int v(x)u'(x)dx$ soit évidente. Les formules ci-dessus (dites d'intégration par parties) résoudront alors le problème.

<u>Exemple 6</u>. $\int x\cos x\,dx$ se présente sous la forme $\int u(x)v'(x)dx$ à condition de poser :

$$\begin{array}{l} u(x) = x \\ v'(x) = \cos x \end{array} \;;\; \begin{array}{l} u'(x) = 1 \\ v(x) = \sin x \end{array} \;;\; u(x)v(x) = x\sin x .$$

Donc : $\int x\cos x\,dx = -\int v(x)u'(x)dx + u(x)v(x) =$

$= -\int \sin x\,dx + x\sin x = \cos x + x\sin x + C$.

<u>Exemple 7</u>. $\int \mathrm{Arctg}\,x\,dx$ se présente sous la forme $\int u(x)v'(x)dx$ à condition de poser :

$$\begin{array}{l} u(x) = \mathrm{Arctg}\,x \\ v'(x) = 1 \end{array} \;;\; \begin{array}{l} u'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} \\ v(x) = x \end{array} \;;\; u(x)v(x) = x\,\mathrm{Arctg}\,x .$$

Donc : $\int \mathrm{Arctg}\,x\,dx = -\int v(x)u'(x)dx + u(x)v(x)$, c'est-à-dire :

$$\int \mathrm{Arctg}\,x\,dx = -\int \frac{x}{1+x^2}\,dx + x\,\mathrm{Arctg}\,x .$$

Mais, $2x$ étant la dérivée de $1+x^2$, on a $\displaystyle\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx = \mathrm{Log}(1+x^2)+C$,
donc

$$\int \mathrm{Arctg}\,x\,dx = -\frac{1}{2}\mathrm{Log}(1+x^2) + x\,\mathrm{Arctg}\,x + C .$$

Exemple 8. Soit à calculer $I = \displaystyle\int_1^2 x^\alpha \mathrm{Log}\,x\,dx$, pour $\alpha \neq -1$.

En posant :

$$u(x) = \mathrm{Log}\,x \quad ; \quad u'(x) = \frac{1}{x} \quad ; \quad u(x)v(x) = \frac{x^{\alpha+1}\mathrm{Log}\,x}{\alpha+1},$$
$$v'(x) = x^\alpha \qquad\qquad v(x) = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

on a :

$$I = \int_1^2 u(x)v'(x)\,dx = -\int_1^2 u'(x)v(x)\,dx + \Big[u(x)v(x)\Big]_{x=1}^{x=2} =$$

$$= -\int_1^2 \frac{x^\alpha}{\alpha+1}\,dx + \left[\frac{x^{\alpha+1}\mathrm{Log}\,x}{\alpha+1}\right]_{x=1}^{x=2} = \left[-\frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2} + \frac{x^{\alpha+1}\mathrm{Log}\,x}{\alpha+1}\right]_{x=1}^{x=2} =$$

$$= \frac{1}{(\alpha+1)^2}\left[(\alpha+1)2^{\alpha+1}\mathrm{Log}\,2 + 1 - 2^{\alpha+1}\right].$$

Exemple 9. Soit à calculer, pour $k \neq 0$ et α réels,

$$I = \int e^{kx}\cos(\alpha x)\,dx \quad \text{et} \quad J = \int e^{kx}\sin(\alpha x)\,dx .$$

Intégrons I par parties en posant :

$$u(x) = \cos(\alpha x) \quad ; \quad u'(x) = -\alpha\sin(\alpha x) \quad ; \quad u(x)v(x) = \frac{e^{kx}\cos(\alpha x)}{k}.$$
$$v'(x) = e^{kx} \qquad\qquad v(x) = \frac{e^{kx}}{k}$$

Il vient :

1) $$I = \int \frac{e^{kx}}{k}\alpha\sin(\alpha x)\,dx + \frac{e^{kx}\cos(\alpha x)}{k} = \frac{\alpha}{k}J + \frac{e^{kx}\cos(\alpha x)}{k}.$$

Intégrons J par parties en posant :

$$u(x) = \sin(\alpha x) \quad ; \quad u'(x) = \alpha\cos(\alpha x) \quad ; \quad u(x)v(x) = \frac{e^{kx}\sin(\alpha x)}{k}.$$
$$v'(x) = e^{kx} \qquad\qquad v(x) = \frac{e^{kx}}{k}$$

Il vient :

2) $$J = -\int \frac{e^{kx}}{k}\alpha\cos(\alpha x)\,dx + \frac{e^{kx}\sin(\alpha x)}{k} = -\frac{\alpha}{k}I + \frac{e^{kx}\sin(\alpha x)}{k}.$$

Des relations (1) et (2), linéaires en I et J, on déduit :

$$\begin{cases} I = \int e^{kx}\cos(\alpha x)\,dx = \dfrac{e^{kx}}{k^2+\alpha^2}\left[k\cos(\alpha x)+\alpha\sin(\alpha x)\right] \\ J = \int e^{kx}\sin(\alpha x)\,dx = \dfrac{e^{kx}}{k^2+\alpha^2}\left[k\sin(\alpha x)-\alpha\cos(\alpha x)\right] \end{cases}$$

Exercice 6. n étant un entier ≥ 0, calculez $\int_0^\pi t^2\cos(nt)\,dt$.

§4. Calcul des intégrales de Wallis

Pour tout entier $n \geq 0$, posons $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$. On a déjà $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$, et $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = \left[-\cos x\right]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} = 1$. Soit $n \geq 2$. En intégrant I_n par parties, nous allons obtenir une relation de récurrence entre I_n et I_{n-2}. En effet :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1}x\,\sin x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} u(x)v'(x)\,dx,$$

si on pose : $u(x) = \sin^{n-1}x$; $u'(x) = (n-1)\sin^{n-2}x\cos x$, $v'(x) = \sin x$; $v(x) = -\cos x$,

donc
$$I_n = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} v(x)u'(x)\,dx + \left[u(x)v(x)\right]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} =$$

$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}x\cos^2 x\,dx + \left[-\sin^{n-1}x\cos x\right]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} =$$

$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}x\,(1-\sin^2 x)\,dx = (n-1)\left(I_{n-2}-I_n\right),$$

d'où la relation, valable pour tout entier $n \geq 2$,

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

Supposant d'abord $n = 2p$ pair, on a successivement :

$$I_{2p} = \frac{2p-1}{2p} I_{2p-2} = \frac{2p-1}{2p}\,\frac{2p-3}{2p-2} I_{2p-4} = \dots = \frac{2p-1}{2p}\,\frac{2p-3}{2p-2}\cdots\frac{3}{4}\,\frac{1}{2} I_0$$

d'où
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p}x\,dx = \frac{\pi}{2}\,\frac{1.3.5\dots(2p-1)}{2.4.6\cdots(2p)} = \frac{\pi}{2}\,\frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}.$$

Puis, supposant $n = 2p+1$ impair, on a :

$$I_{2p+1} = \frac{2p}{2p+1} I_{2p-1} = \frac{2p}{2p+1}\frac{2p-2}{2p-1} I_{2p-3} = \dots = \frac{2p}{2p+1}\frac{2p-2}{2p-1}\dots\frac{4}{5}\frac{2}{3} I_1 \text{ , d'où}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p+1} x \, dx = \frac{2.4.6.\dots(2p)}{3.5.7\dots(2p+1)} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$$

<u>Exercice</u> 7. Pour n entier ≥ 0, on pose $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \cos x \, dx$. En intégrant deux fois par parties, établir, pour $n \geq 2$, une relation entre J_n et J_{n-2}. En déduire les valeurs de J_0, J_1, J_2, J_3, J_4.

§ 5. <u>Changement de variable dans le calcul des intégrales.</u>

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, et soit $x = \varphi(t)$ une fonction, définie dans J, qui prend ses valeurs dans I, et qui admet dans J une dérivée première continue $\varphi'(t)$. Soit $f = f(x)$ une fonction, à valeurs complexes, définie et continue dans I, et soit $F = F(x)$ une primitive de f dans I. On a vu en AN01, Leçon n°5, II, Corollaire de la Proposition 1, p63, que la fonction composée $F \circ \varphi = F[\varphi(t)]$ admet dans J une dérivée première continue, qui est donnée par la formule :

$$(F \circ \varphi)' = (F' \circ \varphi)\,\varphi' = (f \circ \varphi)\,\varphi'$$

Ainsi si F est une primitive de f sur I, la fonction $F \circ \varphi$ est une primitive de $(f \circ \varphi)\varphi'$ sur J. Autrement dit :

<u>Proposition</u> 2. Si l'on considère d'une part les primitives $\int f(x) dx$ (qui sont des fonctions de la variable x, définies sur I), et d'autre part les primitives $\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$ (qui sont des fonctions de la variable t, définies sur J), on obtient les secondes en posant $x = \varphi(t)$ dans les premières :

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt \quad \text{si } x = \varphi(t).$$

Il peut arriver que les secondes primitives soient plus faciles à calculer que les premières. Une fois obtenues, elles fourniront les premières en revenant de la variable t à la variable x. On dit alors qu'on a calculé $\int f(x)dx$ grâce au <u>changement de variable</u> $x=\varphi(t)$.

<u>Exemple</u> 10. Calculons les primitives de $\sqrt{1-x^2}$ sur $I=[-1,+1]$. On pose $x=\sin t$, donc $x'=\cos t$, et $dx=x'dt=\cos t\, dt$, où t varie sur $J=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. D'après la Proposition 2,

$$\int\sqrt{1-x^2}\,dx=\int\sqrt{1-\sin^2 t}\,\cos t\,dt=\int\cos^2 t\,dt=\int\frac{1+\cos 2t}{2}dt=$$
$$=\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}+C.$$

Il faut revenir à la variable x. Comme $x=\sin t$, et $-\frac{\pi}{2}\leq t\leq\frac{\pi}{2}$, on a : $t=\mathrm{Arc}\sin x$, et $\sin 2t=2\sin t\cos t=2x\sqrt{1-x^2}$. Donc:

$$\int\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\mathrm{Arc}\sin x+\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+C.$$

<u>Exercice</u> 8. Calculez $\int\frac{\cos^5 x}{\sin x}dx$ en posant $\sin x=t$.

Avec les hypothèses et les notations de la Proposition 2, soient α et β deux points de J, et $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$ leurs images par φ dans I. Puisque $(F\circ\varphi)$ est une primitive de $(f\circ\varphi)\varphi'$ et F une primitive de f, d'après la leçon n° 3, Corollaire 2, on a

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt=F\circ\varphi(\beta)-F\circ\varphi(\alpha)=F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)\,dx$$

On obtient ainsi <u>la formule du changement de variable</u> pour les intégrales <u>définies</u> :

<u>Proposition</u> 3. Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, et soit $x=\varphi(t)$ une fonction, définie dans J, qui prend ses valeurs dans I, et qui admet dans J une dérivée première continue $\varphi'(t)$. Soit $f=f(x)$ une fonction, à valeurs complexes, définie et continue dans I. Soient a et b deux points de I, et supposons qu'il existe deux points α et β de J tels que $a=\varphi(\alpha)$ et $b=\varphi(\beta)$. Alors:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt}\,.$$

Sur cette formule observons que, pour calculer $\int_a^b f(x)\,dx$ par le changement de variable $x=\varphi(t)$, il faut procéder à 3 modifications : 1) remplacer x par $\varphi(t)$ dans $f(x)$; 2°) remplacer dx par $\varphi'(t)\,dt$; 3°) remplacer les bornes a et b d'intégration en x par les bornes α et β en t, qui fourniraient a et b par le changement de variable $x=\varphi(t)$, c'est-à-dire telles que $\varphi(\alpha)=a$ et $\varphi(\beta)=b$. Remarquons que l'opération 2°) est facilitée par la notation différentielle de Leibniz : $dx=\varphi'(t)\,dt$ si $x=\varphi(t)$.

Exemple 11. Soit n un entier ≥ 0. Montrons que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx\,.$$

Dans l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx$, faisons le changement de variable $x=\frac{\pi}{2}-t$, donc $x'=-1$, et $dx=-dt$. Enfin les bornes $x=0$ et $x=\frac{\pi}{2}$ sont les images des bornes $t=\frac{\pi}{2}$ et $t=0$. Donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \left[\cos\left(\tfrac{\pi}{2}-t\right)\right]^n(-dt) = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^n t\,dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx\,.$$

Ces intégrales (de Wallis) ont été calculées au § 4 ci-dessus.

Exercice 9. Calculez $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+e^x}$.

§6. Solutions des exercices proposés dans cette Leçon

Exercice 1. $x^3-x^2+x = x^3+x-x^2-1+1 = x(x^2+1)-(x^2+1)+1$, donc $\dfrac{x^3-x^2+x}{x^2+1} = x-1+\dfrac{1}{x^2+1}$, et $\displaystyle\int \frac{x^3-x^2+x}{x^2+1}\,dx = \frac{x^2}{2}-x+\mathrm{Arctg}\,x+C$.

Exercice 2. $\left(\operatorname{Arc\,sin}\frac{x}{a}\right)' = \frac{1}{a}\,\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$, et

$\left(\operatorname{Arctg}\frac{x}{a}\right)' = \frac{1}{a}\,\frac{1}{1+\frac{x^2}{a^2}} = \frac{a}{a^2+x^2}$. Donc :

$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \operatorname{Arc\,sin}\frac{x}{a} + C$, pour $|x|<a$; $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{Arctg}\frac{x}{a} + C$.

Exercice 3. $\int \cos^2 x\,dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C$;

$$\int \sin^2 x\,dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C.$$

Exercice 4. $\sin x \sin 2x \sin 3x = \frac{\cos x - \cos 3x}{2}\sin 3x = \frac{\cos x \sin 3x}{2} - \frac{\sin 6x}{4} =$

$= \frac{1}{4}(\sin 4x + \sin 2x) - \frac{\sin 6x}{4}$, donc :

$\int \sin x \sin 2x \sin 3x\,dx = \frac{\cos 6x}{24} - \frac{\cos 4x}{16} - \frac{\cos 2x}{8} + C$.

Exercice 5. $\int \operatorname{tg} x\,dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}\,dx = -\operatorname{Log}(\cos x) + C = \operatorname{Log}\frac{1}{\cos x} + C$

dans tout intervalle où $\cos x$ est toujours >0 ;

$\int \frac{x^3}{x^4+1}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{4x^3}{x^4+1}\,dx = \frac{1}{4}\operatorname{Log}(x^4+1) + C$;

$\int \frac{\operatorname{Arctg} x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}(\operatorname{Arctg} x)^2 + C$.

Exercice 6. $a_0 = \int_0^\pi t^2\,dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_{t=0}^{t=\pi} = \frac{\pi^3}{3}$, et, si $n>0$, par une double intégration par parties :

$${}_n = \int_0^\pi t^2\cos(nt)\,dt = -\int_0^\pi 2t\,\frac{\sin(nt)}{n}\,dt + \left[\frac{t^2\sin(nt)}{n}\right]_{t=0}^{t=\pi} =$$

$$= -\frac{2}{n}\int_0^\pi t\sin(nt)\,dt = -\frac{2}{n}\left(\int_0^\pi \frac{\cos(nt)}{n}\,dt - \left[t\,\frac{\cos(nt)}{n}\right]_{t=0}^{t=\pi}\right) =$$

$$= -\frac{2}{n^3}\left[\sin(nt)\right]_{t=0}^{t=\pi} + \frac{2}{n^2}\left[t\cos(nt)\right]_{t=0}^{t=\pi} = \frac{2}{n^2}\left[t\cos(nt)\right]_{t=0}^{t=\pi} =$$

$$= \frac{2}{n^2}\,\pi\cos(n\pi) = (-1)^n\,\frac{2\pi}{n^2}.$$

Exercice 7. Si $n \geq 2$, on a, en intégrant deux fois par parties,

$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \cos x\, dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} n x^{n-1} \sin x\, dx + \left[x^n \sin x\right]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} =$$

$$= -n \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^{n-1} \sin x\, dx + \left(\frac{\pi}{2}\right)^n =$$

$$= -n \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1) x^{n-2} \cos x\, dx - \left[x^{n-1}\cos x\right]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} \right) + \left(\frac{\pi}{2}\right)^n =$$

$$= -n(n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^{n-2} \cos x\, dx + \left(\frac{\pi}{2}\right)^n,$$ d'où la relation de récurrence :

$$J_n = -n(n-1) J_{n-2} + \left(\frac{\pi}{2}\right)^n.$$

Directement $J_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx = \left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$, et $J_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x\, dx = \left[\cos x + x \sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1$ d'après l'Exemple 6, p 41. Puis par la relation de récurrence :

$$J_2 = -2 J_0 + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - 2\,;$$

$$J_4 = -12 J_2 + \left(\frac{\pi}{2}\right)^4 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^4 - 12\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + 24\,;$$

$$J_3 = -6 J_1 + \left(\frac{\pi}{2}\right)^3 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^3 - 3\pi + 6.$$

Exercice 8. On pose $\sin x = t$, c'est-à-dire $x = \text{Arc}\sin t$, donc $x' = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{\cos x}$, d'où $dx = \frac{1}{\cos x} dt$, et $\cos x\, dx = dt$. Ainsi :

$$\int \frac{\cos^5 x}{\sin x} dx = \int \frac{(1-\sin^2 x)^2}{\sin x} \cos x\, dx = \int \frac{(1-t^2)^2}{t} dt =$$

$$= \int \frac{1+t^4-2t^2}{t} dt = \int \left(\frac{1}{t} + t^3 - 2t\right) dt = \text{Log}\, t + \frac{t^4}{4} - t^2 + C =$$

$$= \text{Log}(\sin x) + \frac{\sin^4 x}{4} - \sin^2 x + C.$$

Exercice 9. On pose $e^x = t$, $x = \text{Log}\, t$, $dx = \frac{dt}{t}$; alors $x=0$ pour $t=1$ et $x=1$ pour $t=e$, donc

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+e^x} = \int_1^e \frac{dt}{t(1+t)}.$$ Or $\frac{1}{t(1+t)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}$, donc

$$I = \int_1^e \frac{dt}{t} - \int_1^e \frac{dt}{1+t} = \left[\text{Log}\, t - \text{Log}(1+t)\right]_{t=1}^{t=e} = 1 + \text{Log}\frac{2}{1+e}.$$

Calcul des primitives

II. Primitives des fractions rationnelles

Une fraction (ou fonction) rationnelle est une fonction quotient de deux (fonctions-) polynômes, que nous supposerons ici à coefficients réels :

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_p x^p + a_{p-1}x^{p-1} + \cdots\cdots + a_1 x + a_0}{b_q x^q + b_{q-1} x^{q-1} + \cdots\cdots + b_1 x + b_0} ,$$

où les a_i et les b_j sont des constantes réelles, avec $a_p \neq 0$, $b_q \neq 0$, et où $p =$ le degré de P et $q =$ le degré de Q sont des nombres entiers $\geqslant 0$. Par exemple :

$$3x^2 + x - 1 \quad ; \quad \frac{1}{x^5+1} \quad ; \quad \frac{9x^7 - 2x + \frac{5}{3}}{(x^2+x-3)^3} \quad ; \quad \frac{\sqrt{2}\,x - 1}{x - \sqrt{3}}$$

sont quatre fractions rationnelles.

Nous allons donner le moyen de calculer les primitives de n'importe quelle fraction rationnelle. Nous le ferons d'abord pour quelques types de fractions rationnelles élémentaires, puis nous verrons que n'importe quelle fraction rationnelle peut se décomposer comme somme d'éléments simples, c'est-à-dire de fractions rationnelles élémentaires.

§1. Primitives des fractions rationnelles élémentaires ou "éléments simples".

Ce sont par définition les fractions rationnelles de l'un des trois types suivants :

a) les polynômes (ou fractions rationnelles "entières") :

$$f(x) = a_p x^p + a_{p-1} x^{p-1} + \cdots\cdot + a_1 x + a_0 .$$

b) les éléments simples de première espèce, c'est-à-dire les fractions rationnelles de la forme :

$$f(x) = \frac{C}{(x-a)^q} ,$$

où a et C sont des constantes réelles, et q un entier ≥ 1.

c) les <u>éléments simples de seconde espèce</u>, c'est-à-dire les fractions rationnelles de la forme :

$$f(x) = \frac{Ax+B}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^q} \quad ,$$

où α et β sont deux constantes réelles, $\beta \neq 0$, où q est un entier ≥ 1, et où A et B sont deux constantes.

a) Il n'y a aucune difficulté à calculer les <u>primitives d'un polynôme</u>. Nous savons déjà que :

$$\int (a_p x^p + a_{p-1}x^{p-1} + \dots + a_1 x + a_0)\,dx = \frac{a_p}{p+1}x^{p+1} + \frac{a_{p-1}}{p}x^p + \dots + a_1\frac{x^2}{2} + a_0 x + C.$$

b) <u>Primitives des éléments simples de première espèce</u> $\int \frac{dx}{(x-a)^q}$.

Soit a un nombre réel fixé. Distinguons deux cas :

— si $q=1$, on a déjà vu que :

$$\int \frac{dx}{x-a} = \begin{cases} \mathrm{Log}(x-a)+C & \text{si } x>a \\ \mathrm{Log}(a-x)+C & \text{si } x<a \end{cases} ,$$

résultat qu'on écrira de façon plus ramassée :

$$\boxed{\int \frac{dx}{x-a} = \mathrm{Log}|x-a| + C} \text{, pour } x \neq a.$$

— si $q>1$, on sait que $\frac{1}{(x-a)^q} = (x-a)^{-q}$ est la dérivée de $\frac{(x-a)^{-q+1}}{-q+1}$, c'est-à-dire de $\frac{1}{1-q}\,\frac{1}{(x-a)^{q-1}}$, donc :

$$\boxed{\text{si } q>1, \quad \int \frac{dx}{(x-a)^q} = \frac{1}{1-q}\,\frac{1}{(x-a)^{q-1}} + C} \text{, pour } x>a \text{ et } x<a.$$

Par exemple : $\int \frac{dx}{(x-1)^2} = -\frac{1}{x-1} + C$; $\int \frac{dx}{(x-4)^3} = -\frac{1}{2}\frac{1}{(x-4)^2} + C$.

c) <u>Primitives des éléments simples de seconde espèce</u> :

Soit $f(x) = \frac{Ax+B}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^q}$ une telle fraction rationnelle, où $\alpha, \beta \neq 0,$

A et B sont des constantes réelles, et q un entier ≥ 1. Faisons le changement de variable $\frac{x-\alpha}{\beta} = t$, c'est-à-dire $x = \alpha + \beta t$, donc $dx = \beta\, dt$. D'après la Leçon no 4, Proposition 3, p45,

$$\int \frac{Ax+B}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^q}\, dx = \int \frac{Ax+B}{\left[\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^2+1\right]^q \beta^{2q}}\, dx = \int \frac{A(\alpha+\beta t)+B}{(t^2+1)^q}\, \frac{dt}{\beta^{2q-1}} =$$

$$= \int \frac{Ct+D}{(t^2+1)^q}\, dt \,, \quad \text{avec:}$$

$C = A\beta^{2-2q}$ et $D = (A\alpha+B)\beta^{1-2q}$. Ceci nous ramène à calculer les deux intégrales :

$$\int \frac{t\, dt}{(t^2+1)^q} \qquad \text{et} \qquad \int \frac{dt}{(t^2+1)^q}\,.$$

La première $\int \frac{t\, dt}{(t^2+1)^q}$ est facile à calculer car, $2t$ étant la dérivée de t^2+1, en posant $u(t) = t^2+1$, on a :

$$\frac{t}{(t^2+1)^q} = \frac{1}{2} u'(t)\,[u(t)]^{-q} = \text{la dérivée de} \begin{cases} \frac{1}{2} \operatorname{Log} u(t) \text{ si } q=1\,; \\ \frac{1}{2} \frac{[u(t)]^{-q+1}}{-q+1} \text{ si } q>1. \end{cases}$$

Donc:

$$\boxed{\int \frac{t\, dt}{(t^2+1)^q} = \begin{cases} \frac{1}{2} \operatorname{Log}(t^2+1) + C\,, \text{ si } q=1\,; \\ \frac{1}{2(1-q)}\, \frac{1}{(t^2+1)^{q-1}} + C\,, \text{ si } q>1. \end{cases}}\,.$$

Il reste à calculer la primitive la moins commode, surtout quand q est grand, à savoir :

$$I_q = \int \frac{dt}{(1+t^2)^q}\,.$$

Pour $q=1$, il suffit de consulter le tableau des primitives usuelles:

$$I_1 = \int \frac{dt}{t^2+1} = \operatorname{Arctg} t + C\,.$$

Pour $q>1$, nous allons chercher une formule de récurrence, ramenant le calcul de I_q à celui de I_{q-1}, supposé déjà effectué.

Intégrons $I_{q-1} = \int \frac{dt}{(t^2+1)^{q-1}}$ par parties, en posant :

$$u(t) = (t^2+1)^{-q+1} \qquad u'(t) = 2(1-q)\,t\,(t^2+1)^{-q}$$

$$v'(t) = 1 \qquad v(t) = t$$

Il vient :

$$I_{q-1} = 2(q-1)\int \frac{t^2\,dt}{(t^2+1)^q} + \frac{t}{(t^2+1)^{q-1}} .$$

Or :

$$\int \frac{t^2\,dt}{(t^2+1)^q} = \int \frac{t^2+1-1}{(t^2+1)^q}\,dt = \int \frac{dt}{(t^2+1)^{q-1}} - \int \frac{dt}{(t^2+1)^q} = I_{q-1} - I_q .$$

Ainsi
$$I_{q-1} = 2(q-1)\left(I_{q-1} - I_q\right) + \frac{t}{(t^2+1)^{q-1}} ,$$

d'où la formule de récurrence, pour q entier ≥ 2 :

$$\boxed{I_q = \frac{2q-3}{2q-2}\, I_{q-1} + \frac{1}{2q-2}\,\frac{t}{(t^2+1)^{q-1}}} ,$$

où, rappelons-le, $I_q = \int \frac{dt}{(t^2+1)^q}$.

Sachant que $I_1 = \operatorname{Arctg} t + C$, on obtient ainsi :

$$I_2 = \int \frac{dt}{(t^2+1)^2} = \frac{1}{2}\operatorname{Arctg} t + \frac{1}{2}\,\frac{t}{t^2+1} + C ,$$

$$I_3 = \int \frac{dt}{(t^2+1)^3} = \frac{3}{8}\operatorname{Arctg} t + \frac{3}{8}\,\frac{t}{t^2+1} + \frac{1}{4}\,\frac{t}{(t^2+1)^2} + C ,$$

et ainsi de suite.

<u>Exercice</u> 1. 1°) Trouvez une racine réelle évidente au polynôme
$$x^3 - 2x^2 + x - 2 .$$
quelles sont les deux autres racines ?

2°) Déterminez trois constantes réelles A, B, C telles que :

$$\frac{3x^2 - 5x + 3}{x^3 - 2x^2 + x - 2} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+1} .$$

3°) Calculez $\int \frac{3x^2 - 5x + 3}{x^3 - 2x^2 + x - 2}\,dx$.

§2. Décomposition des fractions rationnelles en éléments simples

Nous venons de voir, à l'Exercice 1, que la fraction rationnelle d'apparence assez compliquée : $\dfrac{3x^2-5x+3}{x^3-2x^2+x-2}$

peut s'écrire en fait sous la forme de somme d'éléments simples :

$$\frac{3x^2-5x+3}{x^3-2x^2+x-2} = \frac{1}{x-2} + \frac{2x-1}{x^2+1},$$

décomposition qui permet d'en calculer facilement les primitives. Pour trouver les dénominateurs de ces éléments simples, nous avons été amenés à calculer les racines 2, i et $-i$ du dénominateur de la fraction rationnelle proposée. Ce fait est général : toute fraction rationnelle $\frac{P(x)}{Q(x)}$ peut être décomposée comme somme d'éléments simples, eux-mêmes liés aux racines du dénominateur $Q(x)$. Cette décomposition est un théorème d'Algèbre, exposé en détail dans un autre module de ce cours (   ). Nous nous contenterons donc ici d'en décrire l'énoncé, sans en redonner la démonstration.

Soit $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ une fraction rationnelle, où P est un polynôme de d° p, et Q un polynôme de d° q, à coefficients réels. Nous supposons connues les racines de $Q(x)$, avec leurs ordres de multiplicité. Nous supposons $f(x)$ mise sous forme irréductible, c'est-à-dire qu'aucune racine de Q n'est une racine de P ; si ce n'était pas le cas, on s'y ramènerait en divisant P et Q par des facteurs communs. Alors une racine d'ordre k de Q s'appelle aussi un <u>pôle d'ordre k</u> de f. Ces pôles se décomposent en deux espèces :

1.) les racines <u>réelles</u> $a_1, a_2, \dots, a_n$ de Q ; elles sont supposées, dans cette numérotation deux à deux distinctes, mais chacune a un <u>ordre de multiplicité</u> entier ≥ 1, que nous notons p_1 pour a_1, p_2 pour

$a_2, \dots, p_n$ pour a_n ;

2°) les racines complexes non réelles de Q, à savoir :

$\alpha_1+i\beta_1$, $\alpha_1-i\beta_1$; $\alpha_2+i\beta_2$, $\alpha_2-i\beta_2$; ...... ; $\alpha_m+i\beta_m$, $\alpha_m-i\beta_m$.

où les α_i et β_i sont des nombres réels, les β_i sont $\neq 0$, et où $i=\sqrt{-1}$.

On a regroupé deux par deux les racines complexes conjuguées $\alpha \pm i\beta$, car, Q ayant ses coefficients réels, si z est racine d'ordre k, alors $\bar{z}$ est aussi racine d'ordre k de Q. Dans cette numérotation, les racines sont supposées deux à deux distinctes, mais chacune a un ordre de multiplicité : q_1 pour $\alpha_1+i\beta_1$ et pour $\alpha_1-i\beta_1$, ..., q_m pour $\alpha_m+i\beta_m$ et $\alpha_m-i\beta_m$.

Avec ces notations le polynôme $Q(x)=b_q x^q + b_{q-1}x^{q-1}+\dots+b_1x+b_0$ se factorise sous la forme :

$$Q(x)=b_q\,(x-a_1)^{p_1}(x-a_2)^{p_2}\cdots(x-a_n)^{p_n}\left[x-(\alpha_1+i\beta_1)\right]^{q_1}\left[x-(\alpha_1-i\beta_1)\right]^{q_1}\cdots\left[x-(\alpha_m+i\beta_m)\right]^{q_m}$$

ou, encore, en remarquant que :

$$\left[x-(\alpha+i\beta)\right]\left[x-(\alpha-i\beta)\right]=(x-\alpha)^2+\beta^2,$$

sous la forme :

$$Q(x)=b_q\,(x-a_1)^{p_1}(x-a_2)^{p_2}\cdots(x-a_n)^{p_n}\left[(x-\alpha_1)^2+\beta_1^2\right]^{q_1}\cdots\left[(x-\alpha_m)^2+\beta_m^2\right]^{q_m}.$$

Ces notations générales étant fixées, rappelons que :

a) la fraction rationnelle $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ a une partie entière $E(x)$, qui est le polynôme quotient de P par Q pour la division euclidienne (selon les puissances décroissantes) des polynômes ; de manière précise, il existe un polynôme $E(x)$ et un polynôme $R(x)$ uniques tels que :

$$P(x)=Q(x)\,E(x)+R(x)\quad,\qquad d^\circ R<d^\circ Q.$$

Si $d^\circ P<d^\circ Q$, on a $E(x)\equiv 0$. Sinon

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=E(x)+\frac{R(x)}{Q(x)}$$

apparaît comme la somme d'un polynôme (facile à intégrer) et d'une fraction rationnelle où le d° du numérateur est $<$ d° du dénominateur.

b) pour *chaque* pôle réel a, d'ordre k, la fraction rationnelle $f(x)$ a une *partie polaire de première espèce* relative au pôle a :

$$f_a(x) = \frac{C_k}{(x-a)^k} + \frac{C_{k-1}}{(x-a)^{k-1}} + \cdots + \frac{C_1}{x-a} \; ,$$

où $C_1, C_2, \dots, C_k$ sont des constantes réelles précises ;

c) pour *chaque* couple de pôles complexes conjugués non réels $\alpha \pm i\beta$, d'ordre h, la fraction rationnelle $f(x)$ a *une partie polaire de seconde espèce* relative aux pôles $\alpha \pm i\beta$:

$$f_{\alpha \pm i\beta}(x) = \frac{A_h x + B_h}{[(x-\alpha)^2 + \beta^2]^h} + \frac{A_{h-1}x + B_{h-1}}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{h-1}} + \cdots + \frac{A_1 x + B_1}{(x-\alpha^2) + \beta^2} \; ,$$

où $A_1, A_2, \dots, A_h$; $B_1, B_2, \dots, B_h$ sont des constantes réelles précises.

Le théorème de décomposition énonce, avec les notations des pages 53-54 pour les pôles, que $f(x)$ s'écrit d'une façon et d'une seule :

$$f(x) = E(x) + f_{a_1}(x) + \cdots + f_{a_n}(x) + f_{\alpha_1 \pm i\beta_1}(x) + \cdots + f_{\alpha_m \pm i\beta_m}(x) \; ,$$

comme somme de sa partie entière, et de parties polaires relatives à ses divers pôles. Pour résumer :

Théorème. Soit $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ une fraction rationnelle irréductible. Soient $a_1, \dots, a_n$ les racines réelles de Q, et $p_1, \dots, p_n$ leurs ordres de multiplicité. Soient $\alpha_1 \pm i\beta_1, \dots, \alpha_m \pm i\beta_m$ les racines complexes non réelles de Q, et $q_1, \dots, q_m$ leurs ordres de multiplicité. Soit $E(x)$ la partie entière de $f(x)$. Il existe des constantes réelles *uniques* :

$$\begin{cases} C_1^{p_1}, C_1^{p_1-1}, \dots, C_1^1 \; ; \; C_2^{p_2}, C_2^{p_2-1}, \dots, C_2^1 \; ; \dots ; \; C_n^{p_n}, C_n^{p_n-1}, \dots, C_n^1 \; ; \\ A_1^{q_1}, A_1^{q_1-1}, \dots, A_1^1 \; ; \; A_2^{q_2}, A_2^{q_2-1}, \dots, A_2^1 \; ; \dots ; \; A_m^{q_m}, A_m^{q_m-1}, \dots, A_m^1 \; ; \\ B_1^{q_1}, B_1^{q_1-1}, \dots, B_1^1 \; ; \; B_2^{q_2}, B_2^{q_2-1}, \dots, B_2^1 \; ; \dots ; \; B_m^{q_m}, B_m^{q_m-1}, \dots, B_m^1 \; , \end{cases}$$

telles que :

$$f(x) = E(x) +$$
$$+ \frac{C_1^{p_1}}{(x-a_1)^{p_1}} + \frac{C_1^{p_1-1}}{(x-a_1)^{p_1-1}} + \cdots\cdots + \frac{C_1^1}{(x-a_1)}$$
$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ \frac{C_n^{p_n}}{(x-a_n)^{p_n}} + \frac{C_n^{p_n-1}}{(x-a_n)^{p_n-1}} + \cdots\cdots + \frac{C_n^1}{x-a_n}$$
$$+ \frac{A_1^{q_1}x + B_1^{q_1}}{[(x-\alpha_1)^2+\beta_1^2]^{q_1}} + \frac{A_1^{q_1-1}x + B_1^{q_1-1}}{[(x-\alpha_1)^2+\beta_1^2]^{q_1-1}} + \cdots + \frac{A_1^1 x + B_1^1}{(x-\alpha_1)^2+\beta_1^2}$$
$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ \frac{A_m^{q_m}x + B_m^{q_m}}{[(x-\alpha_m)^2+\beta_m^2]^{q_m}} + \frac{A_m^{q_m-1}x + B_m^{q_m-1}}{[(x-\alpha_m)^2+\beta_m^2]^{q_m-1}} + \cdots + \frac{A_m^1 x + B_m^1}{(x-\alpha_m)^2+\beta_m^2}.$$

Ne soyez pas effrayés par cette avalanche d'indices, inévitable pour l'énoncé général. Dans les cas particuliers, exemples et exercices, les choses seront beaucoup plus simples, et la pratique du calcul des constantes A, B, C s'acquiert facilement à l'usage. On se débrouille pour calculer ces constantes par la méthode des coefficients indéterminés, c'est-à-dire en donnant suffisamment de valeurs particulières à x pour obtenir suffisamment d'équations linéaires en les A, B, C pour déterminer ces constantes. Quelques astuces simplificatrices seront signalées au passage.

Exemple 1. Calculons $\displaystyle\int \frac{x^4+2}{(x-1)(x-2)(x-3)}\,dx$.

Puisque $d^\circ P = 4 \geqslant d^\circ Q = 3$, il y a une partie entière $E(x) \not\equiv 0$, que nous calculons en divisant suivant les puissances décroissantes le polynôme x^4+2 par le polynôme
$$(x-1)(x-2)(x-3) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

$$\begin{array}{r|l} x^4 + 2 & x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \\ \cline{2-2} -x^4 + 6x^3 - 11x^2 + 6x & x + 6 \\ \cline{1-1} 6x^3 - 11x^2 + 6x + 2 & \\ -6x^3 + 36x^2 - 66x + 36 & \\ \cline{1-1} 25x^2 - 60x + 38 & \end{array}$$

d'où $E(x) = x+6$, et $R(x) = 25x^2 - 60x + 38$ dont en fait on n'a pas besoin. La fraction rationnelle a de plus 3 pôles $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, et $a_3 = 3$, qui sont tous trois réels et d'ordre 1. Le théorème nous assure donc qu'il existe trois constantes réelles C_1, C_2 et C_3 telles que :

$$\frac{x^4+2}{(x-1)(x-2)(x-3)} = x+6 + \frac{C_1}{x-1} + \frac{C_2}{x-2} + \frac{C_3}{x-3}.$$

Voici une astuce pour déterminer C_1 : on multiplie les deux membres par $x-1$, et ensuite on fait $x=1$; il reste

$$\left(\frac{x^4+2}{(x-2)(x-3)}\right)_{x=1} = C_1 \quad , \text{ donc } \quad C_1 = \frac{3}{2}.$$

De même, multiplions les deux membres par $x-2$, puis faisons $x=2$; il vient $C_2 = -18$. Multiplions les deux membres par $x-3$, puis faisons $x=3$; il vient $C_3 = \frac{83}{2}$. La décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle est donc :

$$\frac{x^4+2}{(x-1)(x-2)(x-3)} = x+6 + \frac{3}{2}\frac{1}{x-1} - 18\frac{1}{x-2} + \frac{83}{2}\frac{1}{x-3}.$$

Par conséquent :

$$\int \frac{x^4+2}{(x-1)(x-2)(x-3)}\,dx = \frac{x^2}{2} + 6x + \frac{3}{2}\operatorname{Log}|x-1| - 18\operatorname{Log}|x-2| + \frac{83}{2}\operatorname{Log}|x-3| + C.$$

<u>Exercice 2</u>. Calculez $\displaystyle\int \frac{x^3\,dx}{x^2-7x+10}$.

<u>Exemple 2</u>. Calculons $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4+1}$. Puisque $d^\circ P = 0 < d^\circ Q = 4$, la partie entière est $\equiv 0$. Les pôles sont les racines 4-ièmes de -1, à savoir $\alpha_1 \pm i\beta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \pm i\frac{1}{\sqrt{2}}$, et $\alpha_2 \pm i\beta_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \pm i\frac{1}{\sqrt{2}}$; ils sont

d'ordre 1. D'après le théorème de décomposition, il existe quatre constantes réelles A_1, B_1, A_2, B_2 telles que :

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{A_1 x + B_1}{\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}} + \frac{A_2 x + B_2}{\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}} .$$

Voici une astuce pour déterminer d'un seul coup A_1 et B_1 : multiplions les deux membres par $\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}$, puis faisons $x = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$. Il reste :

$$\left(\frac{1}{\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}}\right)_{x=\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}} = A_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + B_1 ,$$

c'est-à-dire $\quad \dfrac{1-i}{4} = \dfrac{A_1}{\sqrt{2}} + B_1 + i\dfrac{A_1}{\sqrt{2}}$, d'où

$A_1 = -\frac{\sqrt{2}}{4}$ et $B_1 = \frac{1}{2}$. D'autre part, changer x en $-x$ ne change pas le premier membre, et permute les dénominateurs au second membre, d'où $A_2 = -A_1$ et $B_2 = B_1$, donc $A_2 = \frac{\sqrt{2}}{4}$ et $B_2 = \frac{1}{2}$.
On obtient finalement la décomposition en éléments simples :

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}-x}{(\sqrt{2}x-1)^2+1} + \frac{\sqrt{2}+x}{(\sqrt{2}x+1)^2+1}\right) .$$

On intègre ces éléments simples de deuxième espèce par les changements de variable indiqués au § 1, ici $\sqrt{2}x - 1 = t$ et $\sqrt{2}x + 1 = t$, et, après calculs, on obtient la formule :

$$\int \frac{dx}{1+x^4} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\left[\operatorname{Log}\frac{1+x\sqrt{2}+x^2}{1-x\sqrt{2}+x^2} + 2\operatorname{Arctg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}\right] + C .$$

<u>Exercice 3</u>. Montrez que :

$$\int \frac{dx}{1+x^2+x^4} = \frac{1}{4\sqrt{3}}\left[\sqrt{3}\operatorname{Log}\frac{1+x+x^2}{1-x+x^2} + 2\operatorname{Arctg}\frac{x\sqrt{3}}{1-x^2}\right] + C,$$

sans dériver le second membre !

<u>Exemple 3</u>. Calculons $\displaystyle\int \frac{dx}{[(x-1)(x^2+1)]^2}$.

La fraction rationnelle $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2(x^2+1)^2}$ a sa partie entière $\equiv 0$, a un pôle réel $a=1$ qui est d'ordre 2, et deux pôles imaginaires conjugués $\pm i$, qui sont d'ordre 2. Le théorème de décomposition assure qu'il existe 6 constantes réelles A, B, C, D, E, F telles que :

$$\frac{1}{(x-1)^2(x^2+1)^2} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2} + \frac{Ex+F}{x^2+1} .$$

Multiplions les deux membres par $(x-1)^2$, et faisons $x=1$; il vient : $A = \frac{1}{4}$.

Multiplions les deux membres par $(x^2+1)^2$, puis faisons $x=i$; il vient : $Ci+D = \frac{1}{(i-1)^2} = \frac{i}{2}$, d'où $C = \frac{1}{2}$ et $D=0$.

Donc nous savons déjà que :

$$\frac{1}{(x-1)^2(x^2+1)^2} = \frac{1}{4}\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{1}{2}\frac{x}{(x^2+1)^2} + \frac{Ex+F}{x^2+1}$$

Multiplions les deux membres par x, puis faisons tendre x vers $+\infty$; il vient : $B+E=0$.

Dans les deux membres, faisons $x=0$; il vient : $F-B = \frac{3}{4}$. Nous savons maintenant que :

$$\frac{1}{(x-1)^2(x^2+1)^2} = \frac{1}{4}\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{1}{2}\frac{x}{(x^2+1)^2} + \frac{-Bx+B+\frac{3}{4}}{x^2+1} .$$

Enfin, en faisant $x=2$ dans les deux membres, on trouve $B = -\frac{1}{2}$.
On a ainsi trouvé la décomposition en éléments simples :

$$\frac{1}{(x-1)^2(x^2+1)^2} = \frac{1}{4}\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{2}\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\frac{x}{(x^2+1)^2} + \frac{1}{4}\frac{2x+1}{x^2+1} ,$$

d'où l'on déduit immédiatement :

$$\int\frac{dx}{(x-1)^2(x^2+1)^2} = -\frac{1}{4}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\operatorname{Log}|x-1| - \frac{1}{4}\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{4}\operatorname{Log}(x^2+1) + \frac{1}{4}\operatorname{Arctg} x + C.$$

Exercice 4. Calculez $\displaystyle\int\frac{dx}{(x+1)^3(x^2+1)}$.

Exercice 5. Pour a et b réels et $a \neq b$, calculez $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{(x-a)^2(x-b)}$.

§ 3. Solution des exercices proposés dans cette Leçon.

Exercice 1 1) $x^3-2x^2+x-2 = x^2(x-2)+(x-2) = (x-2)(x^2+1)$
a pour racine 2, et $\pm i$, où $i=\sqrt{-1}$.

2) $\dfrac{A}{x-2} + \dfrac{Bx+C}{x^2+1} = \dfrac{(A+B)x^2+(C-2B)x+A-2C}{x^3-2x^2+x-2}$ sera égal à

$\dfrac{3x^2-5x+3}{x^3-2x^2+x-2}$ ssi $A+B=3$, $C-2B=-5$, $A-2C=3$, donc ssi
$A=1$, $B=2$, $C=-1$.

3) $\displaystyle\int \frac{3x^2-5x+3}{x^3-2x^2+x-2}\,dx = \int\frac{dx}{x-2} + \int\frac{2x}{x^2+1} - \int\frac{dx}{x^2+1} =$

$= \mathrm{Log}\,|x-2| + \mathrm{Log}(x^2+1) - \mathrm{Arctg}\,x + C.$

Exercice 2. Le quotient de la division de x^3 par $x^2-7x+10$ est $E(x) = x+7$. Les racines du trinôme $x^2-7x+10$ sont 2 et 5; elles sont réelles et d'ordre 1. On a donc la décomposition en éléments simples:

$$\frac{x^3}{x^2-7x+10} = x+7+\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-5}.$$

Multipliant les deux membres par $x-2$, puis faisant $x=2$, il vient: $A = \left(\dfrac{x^3}{x-5}\right)_{x=2} = -\dfrac{8}{3}$. De même, multipliant les deux membres par $x-5$, puis faisant $x=5$, il vient $B = \left(\dfrac{x^3}{x-2}\right)_{x=5} = \dfrac{125}{3}$. Donc

$$\frac{x^3}{x^2-7x+10} = x+7-\frac{8}{3}\,\frac{1}{x-2}+\frac{125}{3}\,\frac{1}{x-5}.$$

Par conséquent:

$$\int\frac{x^3\,dx}{x^2-7x+10} = \frac{x^2}{2}+7x-\frac{8}{3}\mathrm{Log}\,|x-2|+\frac{125}{3}\mathrm{Log}\,|x-5|+C.$$

Exercice 3. En résolvant l'équation bicarrée $1+x^2+x^4=0$, on voit que ses 4 racines sont complexes non réelles, et sont:

$$\alpha_1 \pm i\beta_1 = \frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad ; \quad \alpha_2\pm i\beta_2 = -\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

qui sont des pôles d'ordre un. Le théorème de décomposition assure l'existence de 4 constantes A, B, C, D telles que:

$$\frac{1}{1+x^2+x^4} = \frac{Ax+B}{(2x-1)^2+3} + \frac{Cx+D}{(2x+1)^2+3} .$$

En changeant x en $-x$, on voit que $C=-A$ et $D=B$. Puis, en faisant $x=0$, on trouve $B=2$. Enfin, en faisant $x=2$, on trouve $A=-2$, d'où la décomposition en éléments simples :

$$\frac{1}{1+x^2+x^4} = \frac{-2x+2}{(2x-1)^2+3} + \frac{2x+2}{(2x+1)^2+3} .$$

Cherchons les primitives du second élément simple ; celles du premier s'en déduisent par le changement de variable $x \mapsto -x$.

$$\int \frac{2x+2}{(2x+1)^2+3}\,dx = \int \frac{2x+1}{(2x+1)^2+3}\,dx + \int \frac{dx}{(2x+1)^2+3} =$$

$$= \frac{1}{4}\,\mathrm{Log}\left[(2x+1)^2+3\right] + \frac{1}{2\sqrt{3}} \int \frac{d\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1} \quad , \text{d'où}$$

$$\int \frac{2x+2}{(2x+1)^2+3}\,dx = \frac{1}{4}\,\mathrm{Log}\left[4(1+x+x^2)\right] + \frac{1}{2\sqrt{3}}\,\mathrm{Arctg}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C .$$

Dans cette intégrale, changeons x en $-x$, donc dx en $-dx$; il vient :

$$\int \frac{-2x+2}{(2x-1)^2+3}\,dx = -\frac{1}{4}\,\mathrm{Log}\left[4(1-x+x^2)\right] - \frac{1}{2\sqrt{3}}\,\mathrm{Arctg}\,\frac{-2x+1}{\sqrt{3}} + C .$$

En additionnant les deux éléments simples, et en utilisant la formule :

$$\mathrm{Arctg}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}} - \mathrm{Arctg}\,\frac{-2x+1}{\sqrt{3}} = \mathrm{Arctg}\,\frac{x\sqrt{3}}{1-x^2} ,$$

qui est conséquence de la formule classique :

$$\mathrm{tg}\,(a-b) = \frac{\mathrm{tg}\,a - \mathrm{tg}\,b}{1+\mathrm{tg}\,a\,\mathrm{tg}\,b} ,$$

on obtient finalement :

$$\int \frac{dx}{1+x^2+x^4} = \frac{1}{4}\,\mathrm{Log}\,\frac{1+x+x^2}{1-x+x^2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\,\mathrm{Arctg}\,\frac{x\sqrt{3}}{1-x^2} + C .$$

<u>Exercice 4</u>. $\frac{1}{(x+1)^3(x^2+1)}$ admet -1 pour pôle triple, et $\pm i$ pour

pôles simples. On a donc la décomposition :

$$\frac{1}{(x+1)^3(x^2+1)} = \frac{A}{(x+1)^3} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x+1} + \frac{Dx+E}{x^2+1}.$$

En multipliant par $(x+1)^3$, puis faisant $x=-1$, on trouve $A=\frac{1}{2}$.
En multipliant par x^2+1, puis faisant $x=i$, on trouve

$$Di+E = \frac{1}{(i+1)^3} = \frac{1}{8}(1-i)^3 = -\frac{1+i}{4},$$

donc $D=E=-\frac{1}{4}$. Reportant ces résultats, multipliant par x, puis faisant tendre x vers ∞, on trouve $C=\frac{1}{4}$. Enfin, en faisant $x=0$, on trouve $B=\frac{1}{2}$. Donc :

$$\frac{1}{(x+1)^3(x^2+1)} = \frac{1}{2}\frac{1}{(x+1)^3} + \frac{1}{2}\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{4}\frac{1}{x+1} - \frac{1}{4}\frac{x+1}{x^2+1},$$

qui s'intègre en :

$$\int \frac{dx}{(x+1)^3(x^2+1)} = -\frac{1}{4}\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{2}\frac{1}{x+1} + \frac{1}{4}\operatorname{Log}|x+1| - \frac{1}{8}\operatorname{Log}(x^2+1) - \frac{1}{4}\operatorname{Arctg} x + C.$$

Exercice 5. On a :

$$\frac{x}{(x-a)^2(x-b)} = \frac{A}{(x-a)^2} + \frac{B}{x-a} + \frac{C}{x-b}.$$

Multipliant par $(x-a)^2$ et faisant $x=a$, on trouve $A=\frac{a}{a-b}$.
Multipliant par $x-b$ et faisant $x=b$, on trouve $C=\frac{b}{(b-a)^2}$. Multipliant par x, puis faisant tendre x vers ∞, on trouve $B=-C$. Donc :

$$\frac{x}{(x-a)^2(x-b)} = \frac{a}{a-b}\frac{1}{(x-a)^2} + \frac{b}{(a-b)^2}\left(\frac{1}{x-b} - \frac{1}{x-a}\right),$$

formule qui s'intègre en :

$$\int \frac{dx}{(x-a)^2(x-b)} = \frac{a}{b-a}\frac{1}{x-a} + \frac{b}{(b-a)^2}\operatorname{Log}\left|\frac{x-b}{x-a}\right| + C.$$

Calcul des primitives :

III. Fonctions se ramenant à des fractions rationnelles

§1. Primitives de fonctions rationnelles en e^x

Révisez d'abord l'Exercice 9 de la Leçon n°4, page 46. Plus généralement, pour calculer $\int \frac{P(e^x)}{Q(e^x)}dx$, où P et Q sont deux polynômes, on fait le changement de variable :

$$e^x = t \,, \quad \text{donc } x = \operatorname{Log} t \,, \quad x' = \frac{1}{t} \,, \quad dx = \frac{1}{t}dt \,;$$

d'après la Proposition 2 de la Leçon n° 4, page 44, on a :

$$\int \frac{P(e^x)}{Q(e^x)}dx = \int \frac{P(t)}{t\,Q(t)}dt \,,$$

avec $t = e^x$: on s'est ramené à intégrer une fraction rationnelle en t.

Exemple 1. Soit à calculer $\int \frac{dx}{2+\operatorname{ch}x}dx$. De la formule $\operatorname{ch}x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$, on déduit que $\frac{1}{2+\operatorname{ch}x} = \frac{2e^x}{e^{2x}+4e^x+1}$. Donc, en posant $e^x = t$:

$$I = \int \frac{dx}{2+\operatorname{ch}x} = \int \frac{2e^x\,dx}{e^{2x}+4e^x+1} = \int \frac{2\,dt}{t^2+4t+1} .$$

Or t^2+4t+1 a pour racines $-2\pm\sqrt{3}$, et on a la décomposition :

$$\frac{2}{t^2+4t+1} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{t+2-\sqrt{3}} - \frac{1}{t+2+\sqrt{3}}\right).$$

Donc : $$I = \int \frac{2\,dt}{t^2+4t+1} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{dt}{t+2-\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{dt}{t+2+\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{Log}\frac{t+2-\sqrt{3}}{t+2+\sqrt{3}} + C = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{Log}\frac{e^x+2-\sqrt{3}}{e^x+2+\sqrt{3}} + C.$$

Exercice 1. Calculez $\int \frac{dx}{(e^x-1)^2}$.

§2. Primitives de fonctions rationnelles en $\sin x$ et $\cos x$

Soit $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$, où g et h sont des combinaisons linéaires de produits de $\sin x$ et $\cos x$; par exemple :

$$f(x) = \frac{\cos^3 x \sin^2 x + \cos x + \sin^5 x \cos^2 x}{3\sin^2 x - \cos x + \cos^3 x \sin x}.$$

D'une manière générale nous nous intéressons dans ce paragraphe aux fonctions de la forme

$$f(x) = R(\cos x, \sin x) = \frac{P(\cos x, \sin x)}{Q(\cos x, \sin x)},$$

où

$$R(u,v) = \frac{P(u,v)}{Q(u,v)}$$

est le quotient de deux polynômes à deux variables :

$$P(u,v) = \sum_{p+q\leq n} a_{p,q}\, u^p v^q \quad \text{et} \quad Q(u,v) = \sum_{p+q\leq m} b_{p,q}\, u^p v^q .$$

Pour intégrer une telle fonction $R(\cos x, \sin x)$, on fait le changement de variable $\boxed{\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t}$, pour $t \in \mathbb{R}$ et $-\pi < x < \pi$;

donc : $x = 2\operatorname{Arctg} t$, $\quad x' = \dfrac{2}{1+t^2}$, $\quad dx = \dfrac{2\,dt}{1+t^2}$.

De plus on utilise les formules :

$$\cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

et l'on obtient :

$$\int R(\cos x, \sin x)\,dx = \int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\,dt .$$

Puisque $R(u,v)$ est rationnelle en u et v, et puisque $u = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ et $v = \dfrac{2t}{1+t^2}$ sont évidemment rationnelles en t, on est ramené à chercher les primitives de la fonction $R\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}, \dfrac{2t}{1+t^2}\right)\dfrac{2}{1+t^2}$, qui est une fraction rationnelle en la variable t ; on sait le faire.

Exemple 2. Calculons les primitives de $\dfrac{1}{5+4\cos x}$ sur l'intervalle $]-\pi, \pi[$. En posant $tg\frac{x}{2} = t$, on a :

$$\int \frac{dx}{5+4\cos x} = \int \frac{1}{5+4\frac{1-t^2}{1+t^2}} \, \frac{2}{1+t^2} dt = 2\int \frac{dt}{t^2+9} = \frac{2}{3}\int \frac{d\left(\frac{t}{3}\right)}{\left(\frac{t}{3}\right)^2+1} =$$

$$= \frac{2}{3} \operatorname{Arctg}\frac{t}{3} + C = \frac{2}{3}\operatorname{Arctg}\left(\frac{1}{3} tg\frac{x}{2}\right) + C .$$

Exercice 2 Calculez $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x}$ et $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x}$.

Dans certains cas particuliers, il y a des changements de variables plus rapidement simplificateurs que $tg\frac{x}{2} = t$. Il faut savoir que, si l'on pose :

$$f(x) = R(\sin x, \cos x) \quad ,$$

où $R = R(u, v)$ est une fonction rationnelle des deux variables u et v, alors :

1°) Si la fonction $f(x)$ est impaire, c'est-à-dire telle que $f(-x) \equiv -f(x)$, le changement de variable $\boxed{\cos x = t}$ ramène le calcul de $\int f(x)dx$ à celui des primitives d'une fraction rationnelle en t.

2°) Si la fonction $f(x)$ vérifie l'identité $f(\pi - x) \equiv -f(x)$, le changement de variable $\boxed{\sin x = t}$ est le bon.

3°) Si la fonction $f(x)$ vérifie l'identité $f(x+\pi) = f(x)$, le changement de variable $\boxed{tg x = t}$ est le bon.

Exemple 3. Soit $I = \displaystyle\int \frac{dx}{\sin^3 x}$. La fonction $\dfrac{1}{\sin^3 x}$ est impaire.

Posons :

$\cos x = t$, donc $\sin^2 x = 1 - t^2$, et $dt = -\sin x \, dx$; donc :

$$I = -\int \frac{-\sin x \, dx}{\sin^4 x} = -\int \frac{dt}{(1-t^2)^2}$$

. On décompose :

$$\frac{1}{(1-t^2)^2} = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{(1-t)^2} + \frac{1}{(1+t)^2} + \frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right],$$

d'où : $4I = \frac{1}{1-t} - \frac{1}{1+t} + \mathrm{Log}\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C$, c'est-à-dire

$$I = \frac{1}{2}\,\frac{\cos x}{\sin^2 x} + \frac{1}{4}\,\mathrm{Log}\,\frac{1+\cos x}{1-\cos x} + C.$$

<u>Exercice 3</u>. Ramenez le calcul de $\int \frac{dx}{a\cos^2 x + 2b\sin x\cos x + c\sin^2 x}$ à la recherche des primitives de la fraction rationnelle :

$$\frac{1}{a+2bt+ct^2}.$$

Pour $a=16$, $b=-5$ et $c=1$, achevez le calcul.

<u>Exercice 4</u>. Calculez $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\sin x + 2}\,dx$.

§3. <u>Calcul de $\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$, où $R(x,y)$ est une fonction rationnelle à 2 variables</u>; où a, b, c, d sont réels, et où m est un entier $\geqslant 2$.

On se limite naturellement ici à des intervalles de variation de x où le radical a un sens. On fait le changement de variable

$\boxed{t = \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}}$, donc $t^m = \frac{ax+b}{cx+d}$, et $x = \frac{dt^m - b}{a - ct^m}$;

$x' = mt^{m-1}\,\frac{ad-bc}{(a-ct^m)^2}$. Par conséquent :

$$\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx = \int R\left(\frac{dt^m-b}{a-ct^m}, t\right) \frac{ad-bc}{(a-ct^m)^2}\, m t^{m-1}\, dt.$$

On est ramené à calculer les primitives d'une fraction rationnelle en t.

<u>Exemple 4</u>. Calculons :

$$I = \int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,\frac{dx}{x}.$$

On pose : $t = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$, donc $t^2 = \frac{x-1}{x+1}$, $x = \frac{1+t^2}{1-t^2}$,

$dx = \frac{4t}{(1-t^2)^2}\,dt$, d'où :

$$I = \int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,\frac{dx}{x} = \int \frac{4t^2}{(1+t^2)(1-t^2)}\,dt = \int 2\left(\frac{1}{1-t^2} - \frac{1}{1+t^2}\right)dt =$$

$$= \mathrm{Log}\left|\frac{1+t}{1-t}\right| - 2\,\mathrm{Arctg}\,t + C = \mathrm{Log}\left|x+\sqrt{x^2-1}\right| - 2\,\mathrm{Arctg}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + C,$$

formule valable pour $x>1$ ou pour $x<-1$.

Exercice 5. Calculez $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt[3]{x}}$.

§ 4. Calcul de $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$, où $R(x,y)$ est une fonction rationnelle à deux variables, et où $a \neq 0$, b et c sont réels.

On se limite aux intervalles de variation de x pour lesquels le trinôme ax^2+bx+c est >0. En mettant ce trinôme sous la forme canonique usuelle :

$$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2}\right],$$

et en posant $x + \frac{b}{2a} = ku$ pour une constante k convenablement choisie, on met le radical $\sqrt{ax^2+bx+c}$ sous l'une des trois formes :

$$\sqrt{1-u^2}, \qquad \sqrt{1+u^2}, \qquad \sqrt{u^2-1}.$$

Dans le premier cas, l'intégrale proposée a été ainsi ramenée à une forme du type $\int R(u, \sqrt{1-u^2})\,du$, où R est rationnelle. Le changement de variable $u = \sin\theta$ la transforme en

$$\int R(\sin\theta, \cos\theta)\cos\theta\,d\theta,$$

du type étudié au § 2.

Dans le second cas, l'intégrale proposée est ramenée à une forme du type $\int R(u, \sqrt{1+u^2})\,du$, où R est rationnelle. En posant $u = \mathrm{sh}\,t$, elle devient

$$\int R(\mathrm{sh}\,t, \mathrm{ch}\,t)\,\mathrm{ch}\,t\,dt = \int R\left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}, \frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)\frac{e^t+e^{-t}}{2}\,dt,$$

du type étudié au § 1.

Dans le troisième cas, l'intégrale proposée est ramenée à une forme du type $\int R(u, \sqrt{u^2-1})\,du$, où R est rationnelle. En posant $u = \operatorname{ch} t$, elle devient

$$\int R(\operatorname{ch} t, \pm \operatorname{sh} t)\operatorname{sh} t\,dt = \int R\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}, \pm\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)\frac{e^t-e^{-t}}{2}\,dt,$$

du type étudié au § 1.

Remarque. Les intégrales du type $\int R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)\,dx$, en particulier celles qui apparaissent dans les deuxième et troisième cas ci-dessus, peuvent être ramenées à des intégrales de fractions rationnelles de deux manières :

a/ soit en passant en e^x grâce aux formules :

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x-e^{-x}}{2},$$

ce qui nous ramène au § 1 ;

b/ soit en procédant pour les fonctions hyperboliques comme on l'a fait au § 2 pour les fonctions circulaires, c'est-à-dire en faisant le changement de variable :

$$\operatorname{th}\frac{x}{2} = t \; ; \quad dx = \frac{2}{1-t^2}\,dt \; ; \quad \operatorname{ch} x = \frac{1+t^2}{1-t^2} \; ; \quad \operatorname{sh} x = \frac{2t}{1-t^2},$$

d'où $\displaystyle\int R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)\,dx = \int R\left(\frac{2t}{1-t^2}, \frac{1+t^2}{1-t^2}\right)\frac{2}{1-t^2}\,dt$,

qui est l'intégrale d'une fraction rationnelle en t. D'ailleurs, si $f(x) = R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)$ est impaire, le changement de variable $\operatorname{ch} x = t$ sera encore plus efficace, et si elle est paire, $\operatorname{sh} x = t$.

Exemple 5. Calculons $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4x+3}}$, pour $x > 3$.

$x^2-4x+3 = (x-2)^2-1$, donc, si on pose, pour $t > 0$:

$$x-2 = \operatorname{ch} t \; ; \quad dx = \operatorname{sh} t\,dt \; ; \quad x = 2+\operatorname{ch} t \; ; \quad \sqrt{x^2-4x+3} = +\operatorname{sh} t,$$

on a :

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4x+3}} = \int \frac{dt}{2+\operatorname{ch} t} = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{Log}\frac{e^t+2-\sqrt{3}}{e^t+2+\sqrt{3}} + C,$$

comme on l'a calculé à l'exemple 1, page 63.

Pour revenir à la variable x, remarquons que $x-2=\operatorname{ch}t$ pour $t>0$ équivaut à : $t=\operatorname{Argch}(x-2)=\operatorname{Log}\left(x-2+\sqrt{x^2-4x+3}\right)$, donc à $e^t=x-2+\sqrt{x^2-4x+3}$, ce qui conduit à la formule :

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-4x+3}}=\frac{1}{\sqrt3}\operatorname{Log}\frac{x-\sqrt3+\sqrt{x^2-4x+3}}{x+\sqrt3+\sqrt{x^2-4x+3}}+C,$$

pour $x>3$.

<u>Exercice 6</u>. Calculez $\int\sqrt{2+2x-x^2}\,dx$.

<u>Exercice 7</u>. Montrez que le changement de variable $x=\dfrac{1+t^2}{3-t^2}$ ramène l'intégrale $\displaystyle\int\frac{dx}{x\sqrt{3x^2+2x-1}}$ à celle d'une fraction rationnelle très simple. En déduire la valeur de l'intégrale.

§ 5. Solutions des exercices proposés dans cette Leçon

<u>Exercice 1</u>. En posant $e^x=t$, donc $x=\operatorname{Log}t$ et $dx=\frac{dt}{t}$,

$$\int\frac{dx}{(e^x-1)^2}=\int\frac{dt}{t(t-1)^2}=\int\left(\frac{A}{t}+\frac{B}{(t-1)^2}+\frac{C}{t-1}\right)dt=$$

$$=\int\left(\frac1t+\frac{1}{(t-1)^2}-\frac{1}{t-1}\right)dt=\operatorname{Log}t-\frac{1}{t-1}-\operatorname{Log}|t-1|+C$$

$$=x-\frac{1}{e^x-1}-\operatorname{Log}|e^x-1|+C$$

<u>Exercice 2</u>. Puisque $\frac{1}{\sin x}$ est impaire, on pose $\cos x=t$. On a

$$\int\frac{dx}{\sin x}=-\int\frac{-\sin x\,dx}{\sin^2x}=-\int\frac{dt}{1-t^2}=-\frac12\operatorname{Log}\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+C=$$

$$=\frac12\operatorname{Log}\frac{1-\cos x}{1+\cos x}+C=\operatorname{Log}\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C$$

En changeant x en $\frac{\pi}{2}+x$, on en déduit :

$$\int\frac{dx}{\cos x}=\operatorname{Log}\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C.$$

Exercice 3. La fonction étant invariante par le changement de x en $\pi + x$, on pose $\operatorname{tg} x = t$, donc $dt = (1+\operatorname{tg}^2 x)\,dx = \dfrac{dx}{\cos^2 x}$.

On $I = \displaystyle\int \frac{dx}{a\cos^2 x + 2b\sin x\cos x + c\sin^2 x} = \int \frac{1}{a + 2b\operatorname{tg} x + c\operatorname{tg}^2 x}\frac{dx}{\cos^2 x} =$

$$= \int \frac{dt}{a + 2bt + ct^2}.$$

Pour $a = 16$, $b = -5$ et $c = 1$, $a + 2bt + ct^2 = t^2 - 10t + 16$ a pour racines 2 et 8, et l'on calcule que

$$\frac{1}{t^2 - 10t + 16} = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{t-8} - \frac{1}{t-2}\right),$$

donc $I = \dfrac{1}{6}\operatorname{Log}\left|\dfrac{t-8}{t-2}\right| + C = \dfrac{1}{6}\operatorname{Log}\left|\dfrac{\operatorname{tg} x - 8}{\operatorname{tg} x - 2}\right| + C$.

Exercice 4. On fait le changement de variable $\sin x = t$, $dt = \cos x\,dx$, donc $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\sin x + 2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1-\sin^2 x)\cos x\,dx}{\sin x + 2} = \int_0^1 \frac{1-t^2}{2+t}\,dt.$

On $\dfrac{1-t^2}{2+t} = -t + 2 - \dfrac{3}{2+t}$. Donc $I = \displaystyle\int_0^1 \left(-t + 2 - \frac{3}{2+t}\right)dt =$

$$= \left[-\frac{t^2}{2} + 2t - 3\operatorname{Log}(2+t)\right]_{t=0}^{t=1} = \frac{3}{2} + 3\operatorname{Log}\frac{2}{3} = 0{,}2535\ldots$$

Exercice 5. Posons $\sqrt[3]{x} = t$, donc $x = t^3$, et $dx = 3t^2\,dt$. On a

$$I = \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt[3]{x}} = \int \frac{3t^2\,dt}{(t^3+1)\,t}\,dt = \int \frac{3t}{t^3+1}\,dt.$$

On
$$\frac{3t}{t^3+1} = -\frac{1}{t+1} + \frac{t+1}{t^2 - t + 1}, \text{ donc}$$

$$I = -\int \frac{dt}{t+1} + \int \frac{t+1}{t^2-t+1}\,dt = -\operatorname{Log}(t+1) + \int \frac{t+1}{t^2-t+1}\,dt$$

En écrivant $t^2 - t + 1 = \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$, et en appliquant les idées exposées à la Leçon n° 5, § 1, p 51-52, on trouve que

$$\int \frac{t+1}{t^2-t+1}\,dt = \frac{1}{2}\operatorname{Log}(t^2 - t + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctg}\frac{2t-1}{\sqrt{3}} + C$$

Finalement :

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt[3]{x}} = -\operatorname{Log}\left(\sqrt[3]{x}+1\right) + \frac{1}{2}\operatorname{Log}\left(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x}+1\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctg}\frac{2\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{3}} + C.$$

Exercice 6. $2+2x-x^2 = 1-(x-1)^2$, donc, en posant

$$x-1 = \sin\theta \quad , \quad \theta = \operatorname{Arc\,sin}(x-1) \quad , \quad dx = \cos\theta\, d\theta ,$$

$$\int\sqrt{2+2x-x^2}\,dx = \int\sqrt{1-\sin^2\theta}\,\cos\theta\, d\theta = \int \cos^2\theta\, d\theta =$$

$$= \int \frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta = \frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4} + C = \frac{\theta}{2} + \frac{\sin\theta\cos\theta}{2} + C =$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{Arcsin}(x-1) + \frac{1}{2}(x-1)\sqrt{2+2x-x^2} + C, \quad \text{pour } |x-1|<1$$

Exercice 7. Si $x = \dfrac{1+t^2}{3-t^2}$, on a $dx = \dfrac{8t}{(3-t^2)^2}\,dt$,
et

$$3x^2+2x-1 = \frac{3(1+t^2)^2 + 2(1+t^2)(3-t^2) - (3-t^2)^2}{(3-t^2)^2} = \frac{16t^2}{(3-t^2)^2}.$$

Donc

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{3x^2+2x-1}} = \int\frac{8t\;dt}{(3-t^2)^2\,\frac{1+t^2}{3-t^2}\,\frac{4t}{3-t^2}} = \int\frac{2\,dt}{1+t^2} = 2\operatorname{Arctg} t + C$$

Pour revenir à la variable x, remarquons que

$$t^2 = \frac{3x-1}{x+1} ,$$

donc $$\int\frac{dx}{x\sqrt{3x^2+2x-1}} = 2\operatorname{Arctg}\sqrt{\frac{3x-1}{x+1}} + C$$

pourvu que x soit dans l'un des deux intervalles $x<-1$ ou $x > \frac{1}{3}$, condition pour que le radical, dans l'intégrale proposée, ait un sens.

Calcul numérique des intégrales

Soit f une fonction continue sur un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$. Si l'on connaît une primitive explicite F de f, la formule fondamentale

$$(*) \qquad \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

permet d'obtenir immédiatement la valeur de l'intégrale définie $I = \int_a^b f(x)\,dx$. Nous en avons vu de nombreux exemples dans les précédentes Leçons, et les trois dernières d'entre elles étaient précisément consacrées à enrichir, par des techniques appropriées, le stock des fonctions f pour lesquelles nous savons calculer leurs primitives explicitement.

Quoique l'existence théorique de primitives soit assurée pour n'importe quelle fonction f continue (Leçon n° 3, Corollaire 1, page 34), il n'en reste pas moins que, pour maintes f importantes, on n'a aucun moyen d'exprimer concrètement leurs primitives à l'aide de fonctions connues ; pour ces f la formule $(*)$ n'est d'aucune utilité pour calculer $\int_a^b f(x)\,dx$. Par exemple les fonctions :

$$\int e^{-x^2}dx \quad ; \quad \int \sqrt{1+x^3}\,dx \quad ; \quad \int \frac{dx}{\sqrt{2-\sin^2 x}} \quad ; \quad \int \frac{\sin x}{x}\,dx$$

ne peuvent être exprimées en termes de fonctions élémentaires.

Même quand F est explicitement connue, on peut souhaiter trouver une valeur approchée de $F(b)-F(a)$ par une méthode numérique de calcul de $\int_a^b f(x)\,dx$, par exemple pour dresser une table de valeurs de la fonction F. C'est ainsi que les formules :

$$\operatorname{Log} 2 = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} \qquad \text{ou} \qquad \pi = 4\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

pourraient être envisagées pour calculer des décimales des nombres remarquables $\operatorname{Log} 2$ ou π, ou, plus généralement, la formule $\operatorname{Log} x = \int_0^x \frac{dt}{1+t}$ pour construire une table numérique de logarithmes.

Dans cette Leçon nous allons étudier quelques méthodes pratiques pour trouver des valeurs numériques approchées du nombre $I = \int_a^b f(x)dx$. Ces méthodes se ramènent toutes au fond à deux principes :

<u>Premier principe</u>. Prendre une subdivision

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_k < x_{k+1} < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

de $[a,b]$, choisir un ξ_k dans chaque $[x_k, x_{k+1}]$, et écrire :

$$\int_a^b f(x)dx \cong f(\xi_0)\Delta x_0 + f(\xi_1)\Delta x_1 + \cdots + f(\xi_{n-1})\Delta x_{n-1},$$

où $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$, et où le signe $\cong$ signifie "approximativement égal à". D'après la Leçon n°3, Proposition 2, page 27, on sait que l'erreur ainsi commise peut être rendue arbitrairement petite, pourvu que les Δx_k soient assez petits.

<u>Second principe</u>. Remplacer la fonction $f(x)$ par une fonction $g(x)$ proche de $f(x)$, mais dont la primitive G soit, elle, explicitement connue, et écrire :

$$\int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b g(x)dx = G(b) - G(a).$$

Si on sait que
$$\sup_{a \le x \le b} |f(x) - g(x)| \le \varepsilon,$$

alors l'inégalité de la moyenne (Leçon n°3, Proposition 4, 6°), page 31) assure que l'erreur ainsi commise :

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx \right| = \left| \int_a^b [f(x) - g(x)]dx \right|$$

est $\le \varepsilon(b-a)$.

Maintenant révisez soigneusement les Exercices 1 et 2 de la Leçon n°2, page 18, où nous avions appliqué le Premier principe pour obtenir les valeurs approchées :

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx \cong 0,75 \quad \text{et} \quad \int_0^1 \sqrt{1+x^3} \cong 1,11.$$

§1. <u>Utilisation de la formule de Taylor</u>

Reprenons le calcul de $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ par une méthode plus efficace, qui s'appuie sur le Second principe. En AN01, Leçon n°7, Thm 3, page 90, nous avons vu grâce à la formule de Taylor que, pour tout x réel tel que $|x| \leq A$, et, pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$\left| e^{x} - \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right) \right| \leq e^{A} \frac{A^{n+1}}{(n+1)!} .$$

Faisons $A = 1$, et remplaçons x par $-x^2$, nous voyons que, pour tout x tel que $|x| \leq 1$ (et donc tel que $|-x^2| \leq 1$) et tout entier $n \geq 1$, on a :

$$\left| e^{-x^2} - \left(1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}\right) \right| \leq \frac{e}{(n+1)!} .$$

Autrement dit sur $[0,1]$ la fonction $f(x) = e^{-x^2}$ est remplaçable par le polynôme $g(x) = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}$ au prix d'une erreur $\varepsilon \leq \frac{e}{(n+1)!}$. Les primitives G de g sont :

$$G(x) = x - \frac{x^3}{1!\,3} + \frac{x^5}{2!\,5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n!\,(2n+1)} + C ,$$

donc, d'après l'inégalité de la moyenne,

$$\left| \int_0^1 e^{-x^2} dx - \int_0^1 g(x)\, dx \right| = \left| \int_0^1 e^{-x^2} dx - G(1) + G(0) \right|$$

est $\leq (1-0)\,\varepsilon \leq \frac{e}{(n+1)!}$. Par suite,

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \cong 1 - \frac{1}{1!\,3} + \frac{1}{2!\,5} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!\,(2n+1)} ,$$

l'erreur étant en valeur absolue inférieure à $\frac{e}{(n+1)!}$. Par exemple, pour $n = 7$, on aura :

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \cong 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} - \frac{1}{1320} + \frac{1}{9360} - \frac{1}{75.600}$$

c'est-à-dire

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \cong 0,7468228\ldots$$

avec une erreur inférieure à 4×10^{-6}.

<u>Exercice 1</u>. Soit à calculer $I = \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$.

1°) En appliquant la formule de Taylor à $\sin x$, montrez que, pour tout $|x| \leq 1$ et pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} + \varepsilon_n(x) ,$$

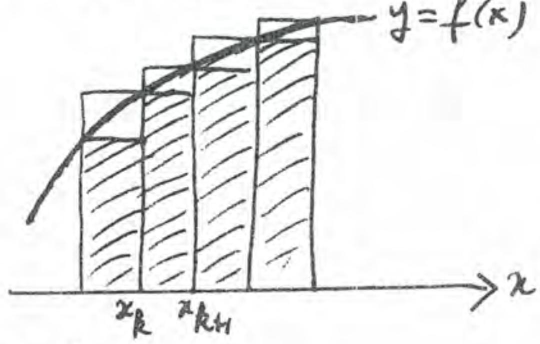
où $|\varepsilon_n(x)| \leq \frac{1}{(2n+3)!}$.

2) En prenant successivement $n = 2, 3, 4$, obtenir des valeurs numériques qui encadrent I de façon de plus en plus précise.

Exercice 2. Soit $F(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$. Dressez une table de valeurs numériques de $F(x)$ avec 3 décimales exactes pour $x=0$; $x=0,1$; $x=0,2$; $x=0,3$; $x=0,4$; $x=0,5$; $x=0,6$; $x=0,7$; $x=0,8$; $x=0,9$; $x=1$.

§ 2. La méthode des rectangles

C'est la méthode que nous avons utilisée dans les Exercices 1 et 2 de la Leçon n° 2, page 18. Elle sert surtout quand la fonction $f(x)$ est réelle monotone : supposons f croissante pour fixer les idées. Prenons une subdivision de $[a,b]$ en n parties égales :



$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k < x_{k+1} < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$,

où $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$ pour $k = 0, 1, \ldots, n$.

On a $\Delta x_k = \frac{b-a}{n}$ pour tout k, et, vu que f est croissante, on a l'encadrement :

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\,\Delta x_k \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1})\,\Delta x_k\,,$$

c'est-à-dire : $$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right).$$

L'écart entre les deux termes extrêmes de cette double inégalité vaut

$$\frac{b-a}{n}\left[\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) - \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\right] = \frac{b-a}{n}[f(b)-f(a)].$$

On peut donc poser (par exemple) par excès :

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \cong \frac{b-a}{n}\left[f\left(a+\frac{b-a}{n}\right) + f\left(a+2\frac{b-a}{n}\right) + \cdots + f\left(a+(n-1)\frac{b-a}{n}\right) + f(b)\right]}$$

en commettant une erreur inférieure à $\frac{(b-a)[f(b)-f(a)]}{n}$. Cette erreur peut être rendue petite pourvu que n soit assez grand, mais elle ne décroît qu'à l'ordre de $\frac{1}{n}$, donc très lentement, ce qui rend la méthode peu performante.

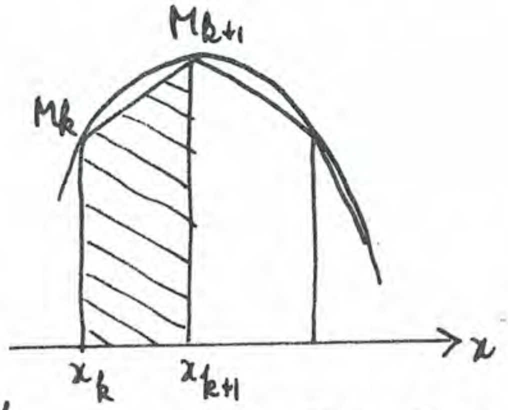
Exemple 1. Appliquons la méthode des rectangles avec $n = 10$ pour calculer $\text{Log}\,2 = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}$. Ceci revient à écrire :

$$\text{Log}\,2 \cong \frac{1}{10}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{10}} + \frac{1}{1+\frac{2}{10}} + \cdots\cdots + \frac{1}{1+\frac{9}{10}} + \frac{1}{1+1}\right) =$$

$$= \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} + \frac{1}{17} + \frac{1}{18} + \frac{1}{19} + \frac{1}{20},$$

d'où la valeur approchée $\text{Log}\,2 \cong 0,668$. Sachant (par ailleurs ...) que $\text{Log}\,2 = 0,693147181\ldots$, nous sommes loin de compte.

§ 3. La méthode des trapèzes



Si $a < x_1 < x_2 < \cdots < x_k < x_{k+1} < \cdots < b$ est une subdivision de $[a, b]$, et si on pose :

$$\int_a^b f(x)\,dx \sim \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2} \Delta x_k,$$

on est en harmonie avec le Premier principe, car le théorème des valeurs intermédiaires (AN 01, Leçon n°5, Thm 3, p 53) assure qu'il existe un $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$ tel que $\frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2} = f(\xi_k)$.

De plus, $\frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2} \Delta x_k$ est, quand f est positive, l'aire du trapèze qui a pour sommets les points M_k et M_{k+1} du graphe de f d'abscisses x_k et x_{k+1}, ainsi que leurs projections orthogonales sur Ox, et l'on approche en somme l'aire de la courbe par la somme des aires de ces trapèzes.

Usuellement les segments de la subdivision sont d'égales longueurs : $\Delta x_k = \frac{b-a}{n}$ pour tout k ; autrement dit $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$ pour $k = 0, 1, 2, \ldots, n$. Dans ce cas la méthode des trapèzes consiste à écrire :

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{b-a}{n}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2} + f\left(a+\frac{b-a}{n}\right) + f\left(a+2\frac{b-a}{n}\right) + \cdots + f\left(a+(n-1)\frac{b-a}{n}\right)\right]}.$$

<u>Exemple 2</u>. Appliquons la méthode des trapèzes avec $n=10$ pour calculer $\operatorname{Log} 2 = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}$. Ceci revient à écrire :

$$\operatorname{Log} 2 \sim \frac{1}{10}\left(\frac{1+\frac{1}{2}}{2} + \frac{1}{1+\frac{1}{10}} + \frac{1}{1+\frac{2}{10}} + \cdots\cdots + \frac{1}{1+\frac{9}{10}}\right) =$$

$$= \frac{3}{40} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} + \frac{1}{17} + \frac{1}{18} + \frac{1}{19} = 0{,}6937\ldots$$

Cette fois les trois premières décimales sont exactes.

Une méthode de calcul numérique qui n'est pas assortie d'une estimation de l'erreur ne sert pas à grand chose, car dans ce cas quelle confiance peut-on accorder aux décimales qu'on affirme ? Pour obtenir une <u>majoration de l'erreur commise en appliquant la méthode des trapèzes</u>, nous utiliserons le Lemme suivant.

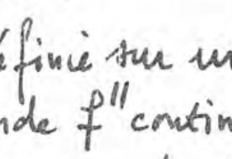
<u>Lemme 1</u>. Soit f une fonction à valeurs réelles, définie sur un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, et admettant une dérivée seconde f'' continue sur $[a,b]$. Soient m et M deux nombres réels tels que, pour tout $x \in [a,b]$, on ait :

$$m \leq f''(x) \leq M.$$

Alors on a l'inégalité :

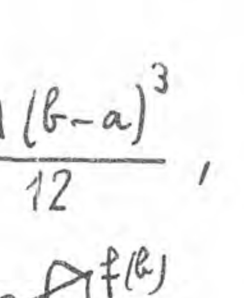
$$\frac{m(b-a)^3}{12} \leq \frac{b-a}{2}\left[f(a)+f(b)\right] - \int_a^b f(x)\,dx \leq \frac{M(b-a)^3}{12},$$

qui donne un encadrement de l'erreur qu'on commet en remplaçant $\int_a^b f(x)\,dx$ par "l'aire du trapèze" construit sur $[a,b]$ et la "corde" $(f(a), f(b))$.



<u>Démonstration</u>. Introduisons la fonction auxiliaire

$$h(x) = f(x) + \frac{m}{2}(x-a)(b-x).$$



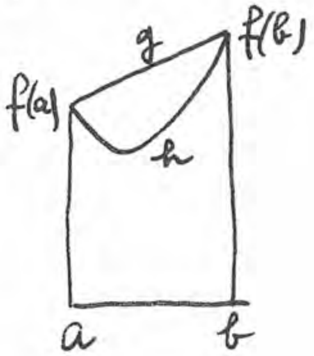
La fonction h prend les mêmes valeurs que f aux points a et b, et, pour tout $x \in [a,b]$, vérifie :

$$h''(x) = f''(x) - m \geq 0.$$

D'après AN01, Leçon n°6, VI, p77, la fonction h est convexe sur $[a,b]$. Soit d'autre part :

$$g(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

la fonction du 1er degré, dont le graphe est la corde qui joint les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$. L'intégrale $\int_a^b g(x)dx = (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$ n'est autre que l'aire du trapèze, et, conformément au Second principe, le tiers médian de la double inégalité à démontrer n'est autre que l'erreur $\int_a^b [g(x)-f(x)]dx$. Or, puisque h est convexe, la corde est au-dessus de l'arc du graphe de h (cf. ibid. Proposition 6, page 74). On a donc : $h(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in [a,b]$.



Par conséquent :

$$\int_a^b h(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \frac{m}{2}\int_a^b (x-a)(b-x)dx \leq \int_a^b g(x)dx .$$

Or, on calcule sans peine que :

$$\int_a^b (x-a)(b-x)dx = \frac{(b-a)^3}{6},$$

donc

$$\int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx \geq \frac{m}{12}(b-a)^3,$$

ce qui est la première moitié de la double inégalité. Pour démontrer la deuxième moitié, il suffit d'appliquer ce qu'on vient de prouver à la fonction $(-f)$.

Appliquons ce lemme en y remplaçant a par $a+k\frac{b-a}{n}$, b par $a+(k+1)\frac{b-a}{n}$, donc $b-a$ par $\frac{b-a}{n}$, et sommons les inégalités obtenues quand l'indice k va de 0 à $n-1$, nous obtenons :

Proposition 1. Soient $a<b$ deux nombres réels. Soit f une fonction à valeurs réelles, définie et admettant une dérivée seconde f'' continue sur $[a,b]$. Soient m et M des constantes telles que : $m \leq f''(x) \leq M$ pour tout $x \in [a,b]$. Pour tout entier $n \geq 1$, la méthode des trapèzes, conformément à la formule du haut de la page 77, substitue

à la valeur exacte (mais inconnue) $\int_a^b f(x)dx$ la valeur approchée (mais calculable) :

$$S_n(f) = \frac{b-a}{n}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\right].$$

Pour l'erreur ainsi commise on a l'encadrement :

$$m\frac{(b-a)^3}{12n^2} \leqslant S_n(f) - \int_a^b f(x)dx \leqslant M\frac{(b-a)^3}{12n^2}.$$

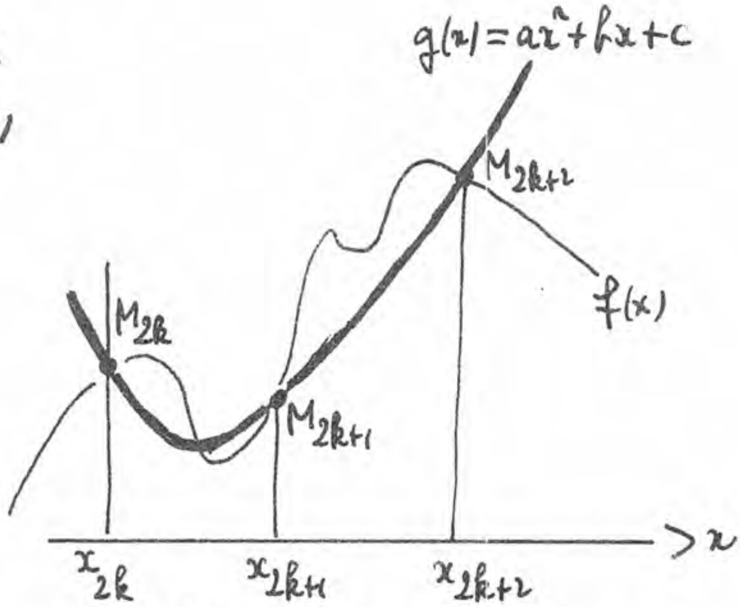
En particulier la valeur absolue de l'erreur est $\leqslant \dfrac{(b-a)^3}{12n^2} \sup\limits_{a\leq x\leq b} |f''(x)|$.

<u>Exemple 2 revisité</u>. Pour $f(x) = \frac{1}{1+x}$, on a $f''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$, donc $\sup\limits_{0\leq x\leq 1} |f''(x)| = 2$. Avec $a=0$ et $b=1$, pour $n=10$, l'erreur dans le calcul de $\operatorname{Log} 2$ par la méthode des trapèzes ne doit pas être, d'après la Proposition 1, supérieure à $\frac{2}{1200} = \frac{1}{600}$. Or nous avons en effet constaté directement que trois décimales étaient exactes.

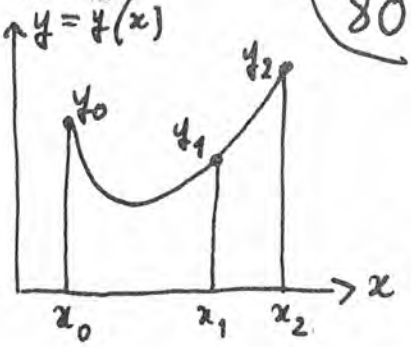
<u>Exercice 3</u>. Calculez $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ par la méthode des trapèzes avec $n=10$. Discutez l'erreur.

§ 4. <u>La méthode de Simpson</u>

Dans la méthode des trapèzes, on remplaçait les arcs M_kM_{k+1} du graphe de f par leurs cordes. Dans la méthode de Simpson, chaque arc $M_{2k}M_{2k+2}$ de ce graphe, d'abscisses extrêmes x_{2k} et x_{2k+2} (points d'une subdivision de $[a,b]$), est



remplacé par l'unique <u>arc de parabole</u> d'équation $y = ax^2+bx+c$, qui passe par les trois points $(x_{2k}, f(x_{2k}))$, $(x_{2k+2}, f(x_{2k+2}))$ et $(x_{2k+1}, f(x_{2k+1}))$, où $x_{2k+1} = \frac{x_{2k}+x_{2k+2}}{2}$ est le <u>milieu</u> de $[x_{2k}, x_{2k+2}]$.



<u>Lemme</u> 2. Soient trois nombres réels $x_0 < x_1 < x_2$, et trois valeurs réelles y_0, y_1, y_2. Alors il existe un trinôme

$$y(x) = ax^2 + bx + c$$

et un seul tel que:

$$y(x_0) = y_0 \quad ; \quad y(x_1) = y_1 \quad ; \quad y(x_2) = y_2 .$$

<u>Démonstration</u>: a, b et c sont solutions du problème si et seulement si:

1) $ax_0^2 + bx_0 + c = y_0$; $ax_1^2 + bx_1 + c = y_1$; $ax_2^2 + bx_2 + c = y_2$,

système de 3 équations linéaires à 3 inconnues a, b, c. Par soustractions on voit que la recherche de a et b équivaut au système:

$$a(x_0 - x_1) + b = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1} \quad ; \quad a(x_0 - x_2) + b = \frac{y_0 - y_2}{x_0 - x_2}$$

qui a une solution unique en a, à savoir $a = \dfrac{(y_0 - y_1)(x_0 - x_2) - (y_0 - y_2)(x_0 - x_1)}{(x_0 - x_1)(x_1 - x_2)(x_2 - x_0)}$, donc une solution unique en b. On en déduit alors c de manière unique par la première des relations (1).

<u>Lemme 3</u>. Soient $x_0 < x_2$ deux nombres réels, et supposons que $x_1 = \dfrac{x_0 + x_2}{2}$ soit l'abscisse du <u>milieu</u> du segment $[x_0, x_2]$. Alors, pour tout trinôme $y(x) = ax^2 + bx + c$, on a la formule:

$$\int_{x_0}^{x_2} y(x)\,dx = \frac{x_2 - x_0}{6}\left[y(x_0) + 4y(x_1) + y(x_2) \right].$$

<u>Démonstration.</u> Les deux membres de la formule étant linéaires en y, il suffit de la vérifier dans les 3 cas suivants:

$$y(x) \equiv x^2 \quad ; \quad y(x) \equiv x \quad ; \quad y(x) \equiv 1 .$$

Si $y(x) \equiv 1$, il s'agit de voir que:

$$x_2 - x_0 = \frac{x_2 - x_0}{6}\left[1 + 4 + 1\right] ;$$

c'est évident.

Si $y(x) \equiv x$, il s'agit de voir que:

$$\frac{x_2^2}{2} - \frac{x_0^2}{2} = \frac{x_2 - x_0}{6}\left[x_0 + 4\,\frac{x_0 + x_2}{2} + x_2\right] ;$$

c'est non moins vrai.

Si $y(x) \equiv x^2$, il s'agit de voir que:

$$\frac{x_2^3}{3} - \frac{x_0^3}{3} = \frac{x_2 - x_0}{6}\left[x_0^2 + 4\left(\frac{x_0+x_2}{2}\right)^2 + x_2^2\right],$$

ce qui se vérifie facilement en développant le second membre.

<u>Remarque</u>. Vous rapprocherez la formule du Lemme 2 de l'expression par Archimède de l'aire du segment de parabole (Leçon n° 1, Exercice 4).

Après ces deux lemmes, nous pouvons <u>décrire la méthode de Simpson</u>. Soit f une fonction, à valeurs réelles, définie et continue sur un segment $[a,b]$. Subdivisons $[a,b]$ en un nombre <u>pair</u> $2n$ de segments, par la subdivision :

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots\cdots < x_{2k} < x_{2k+1} < x_{2k+2} < \cdots\cdots < x_{2n-1} < x_{2n} = b,$$

où l'on suppose de plus que : $x_1 = \frac{x_0+x_2}{2}$ est le milieu de $[x_0, x_2]$, $x_3 = \frac{x_2+x_4}{2}$ est le milieu de $[x_2, x_4]$, ..., etc..., $x_{2n-1} = \frac{x_{2n-2}+x_{2n}}{2}$ est le milieu de $[x_{2n-2}, x_{2n}]$. Sur <u>chaque</u> segment $[x_{2k}, x_{2k+2}]$ on remplace l'arc de courbe d'équation $y = f(x)$ par l'arc de parabole $y = g(x) = ax^2 + bx + c$ qui passe par les trois points du graphe de f qui ont pour abscisses x_{2k}, $x_{2k+1} = \frac{x_{2k}+x_{2k+2}}{2}$, x_{2k+2}. Ainsi, pour tout $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, on remplace, d'après le Lemme 2,

$$\int_{x_{2k}}^{x_{2k+2}} f(x)\,dx \qquad \text{par} \qquad \frac{x_{2k+2} - x_{2k}}{6}\left[f(x_{2k}) + 4f(x_{2k+1}) + f(x_{2k+2})\right].$$

Puis on somme ce procédé en faisant aller k de 0 à $n-1$. On a donc remplacé $\int_a^b f(x)\,dx$ par $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{x_{2k+2}-x_{2k}}{6}\left[f(x_{2k}) + 4f(x_{2k+1}) + f(x_{2k+2})\right]$.

Usuellement la subdivision de $[a,b]$:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{2k} < x_{2k+1} < x_{2k+2} < \cdots < x_{2n-1} < x_{2n} = b$$

est en $2n$ parties <u>égales</u>, donc $x_{2k+2} - x_{2k} = \frac{b-a}{n}$ pour tout k, avec, toujours, la condition $x_{2k+1} = \frac{x_{2k}+x_{2k+2}}{2}$. La méthode de Simpson consiste alors à écrire, en posant $x_i = a + i\frac{b-a}{2n}$ pour $i = 1, 2, \ldots, 2n-1$,

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{b-a}{6n}\left[f(a) + f(b) + 2f(x_2) + 2f(x_4) + \cdots + 2f(x_{2n-2}) + 4f(x_1) + 4f(x_3) + \cdots\cdots + 4f(x_{2n-1})\right]}$$

Exemple 3. Appliquons la méthode de Simpson avec $2n=10$ pour calculer $\operatorname{Log} 2 = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}$. Ceci revient à écrire :

$$\operatorname{Log} 2 \cong \frac{1}{30}\left[1+\frac{1}{2}+\frac{20}{12}+\frac{20}{14}+\frac{20}{16}+\frac{20}{18}+\frac{40}{11}+\frac{40}{13}+\frac{40}{15}+\frac{40}{17}+\frac{40}{19}\right],$$

soit :

$$\operatorname{Log} 2 \cong 0,6931502\ldots$$

Les 5 premières décimales sont exactes.

Majoration de l'erreur. On peut démontrer (mais nous ne le ferons pas ici) que, si f admet une dérivée quatrième $f^{(IV)}$ continue sur $[a,b]$, l'erreur commise dans l'application de la méthode de Simpson est majorée par $\frac{(b-a)^5}{2880\, n^4} \sup_{a\le x\le b} |f^{(IV)}(x)|$.

Le comportement en $\frac{1}{n^4}$ assure une très bonne approximation ; encore faut-il pouvoir calculer et majorer la dérivée quatrième de f.

Exercice 4. Combien de décimales exactes de $\pi = 3,14159265\ldots$ obtenez-vous par la méthode de Simpson appliquée à $\pi = 4\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$?

§ 5. Solutions des Exercices proposés dans cette Leçon

Exercice 1. En AN01, Leçon n° 6, V, page 72, on a vu que :

$$\left|\sin x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots\cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)\right| \leq \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!}.$$

Il en résulte que, pour tout $x \neq 0$,

$$\left|\frac{\sin x}{x} - \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + \cdots\cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}\right)\right| \leq \frac{|x|^{2n}}{(2n+3)!},$$

inégalité encore valable pour $x=0$, si l'on convient, par continuité, que $\left(\frac{\sin x}{x}\right)_{x=0} = 1$. Pour $|x| \leq 1$ on a donc

$$\left|\frac{\sin x}{x} - \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + \cdots\cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}\right)\right| \leq \frac{1}{(2n+3)!}.$$

En intégrant cette inégalité entre 0 et 1, on peut écrire :

$$I = \int_0^1 \frac{\sin x}{x}\, dx \cong 1 - \frac{1}{3!\,3} + \frac{1}{5!\,5} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!(2n+1)}$$

avec une erreur $\leq \frac{1}{(2n+3)!}$ en valeur absolue, ce qui donne :

– pour $n=2$, $I \cong 1-\frac{1}{18}+\frac{1}{600} = 0{,}946111111$

– pour $n=3$, $I \cong 1-\frac{1}{18}+\frac{1}{600}-\frac{1}{35.280} = 0{,}946082766$

– pour $n=4$, $I \cong 1-\frac{1}{18}+\frac{1}{600}-\frac{1}{35.280}+\frac{1}{3.265.920} = 0{,}946083073$

cette dernière valeur (par excès) étant certainement juste à $\frac{1}{11!} = 25\times 10^{-9}$ près.

Exercice 2 (suite de l'Exercice 1). On a, comme à l'Exercice 1, pour $|x|\leq 1$,
$\left| \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt - \left(x-\frac{x^3}{3!3}+\frac{x^5}{5!5}\right)\right| \leq \frac{1}{7!} = \frac{1}{5040}$, donc il suffit de calculer les valeurs du polynôme $x-\frac{x^3}{18}+\frac{x^5}{600}$ pour avoir trois décimales exactes de $F(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$. Par un programme très simple sur calculatrice, on trouve la table :

x	$F(x)$		x	$F(x)$		x	$F(x)$
0	0		0,4	0,396		0,8	0,772
0,1	0,099		0,5	0,493		0,9	0,860
0,2	0,199		0,6	0,588		1	0,946
0,3	0,298		0,7	0,681			

Exercice 3. $\int_0^1 e^{-x^2}dx \cong \frac{1}{10}\left(\frac{1+\frac{1}{e}}{2}+\sum_{k=1}^{n-1} e^{-\frac{k^2}{100}}\right) = 0{,}7462\ldots$ Or, si $f(x)=e^{-x^2}$, on a $f''(x)=(4x^2-2)e^{-x^2}$, et $f'''(x)=4x(3-2x^2)$. Donc f'' est croissante sur $[0,1]$, donc minimum pour $x=0$, maximum pour $x=1$. On en déduit que, pour $0\leq x\leq 1$, on a : $-2\leq f''(x)\leq \frac{2}{e}$. D'après la Proposition 1, on a : $-\frac{2}{1200} \leq S_{10}(f)-\int_0^1 e^{-x^2}dx \leq \frac{2}{e}\,\frac{1}{1200}$. On est sûr que la valeur approchée 0,7462 introduit une erreur ε limitée par l'encadrement $-\frac{1}{600}\leq \varepsilon \leq \frac{1}{e}\,\frac{1}{600}$. En fait on a démontré au §1 par une autre méthode que $\int_0^1 e^{-x^2}dx = 0{,}746822\ldots$

Exercice 4. La méthode de Simpson appliquée à $\pi = 4\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$, avec $2n=10$, conduit à écrire :

$$\frac{\pi}{4} \cong \frac{1}{30}\left[1+\frac{1}{2}+\frac{200}{104}+\frac{200}{116}+\frac{200}{136}+\frac{200}{164}+\frac{400}{101}+\frac{400}{109}+\frac{400}{125}+\frac{400}{149}+\frac{400}{181}\right],$$

d'où $\pi \cong \underline{3{,}1415926}15$, avec 7 décimales exactes.

AN 02 Leçon n° 8

Equations différentielles linéaires du premier ordre

Souvent un problème concret fourni par l'Analyse, la Géométrie, la Mécanique ou la Physique, se ramène à déterminer une fonction inconnue $y = y(x)$, définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, sachant qu'elle satisfait à une équation différentielle (ici du premier ordre, pour commencer), c'est-à-dire à une relation donnée, qui lie la fonction $y(x)$ elle-même, sa dérivée $y'(x)$, et la variable x. Prenons d'abord quelques exemples.

Exemple 1. Soit l'équation différentielle

$$(1) \qquad y' + 2xy - x = 0 .$$

On appelle solution de cette équation sur un intervalle I toute fonction $y = y(x)$ définie et dérivable sur I telle que, si on désigne par $y'(x)$ sa dérivée, on ait pour tout $x \in I$ l'égalité :

$$y'(x) + 2x\,y(x) - x = 0 .$$

Par exemple nous allons vérifier que

$$(2) \qquad y(x) = \frac{1}{2} + e^{-x^2}$$

est une solution de l'équation (1) sur $I = \mathbb{R}$ tout entier. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $\quad y'(x) = -2xe^{-x^2}$, $\quad$ donc :

$$y' + 2xy - x = -2xe^{-x^2} + 2x\left(\frac{1}{2} + e^{-x^2}\right) - x = 0 .$$

Mais cette fonction (2) est seulement une solution particulière de (1). Il y a d'autres solutions particulières de (1), par exemple :

$$y(x) \equiv \frac{1}{2} \qquad \text{ou} \qquad y(x) = \frac{1}{2} + 3e^{-x^2} .$$

Exercice 1. Vérifiez que, pour toute constante réelle C, la fonction

$$(3) \qquad y(x) = \frac{1}{2} + Ce^{-x^2}$$

est une solution de l'équation différentielle (1) sur $\mathbb{R}$.

Un peu plus loin dans cette leçon, nous aurons le moyen de démontrer que, réciproquement, toute solution $y=y(x)$ de (1) est de la forme (3), c'est-à-dire que, si $y=y(x)$ est une quelconque solution particulière de

$$(1) \quad y' + 2xy - x = 0\,,$$

alors il existe une constante réelle C telle que:

$$(3) \quad y(x) = \frac{1}{2} + Ce^{-x^2}.$$

On dira alors que la formule (3), où C est une constante arbitraire, représente la solution générale de (1).

Sur cet Exemple 1, nous constatons un phénomène quasi général: une équation différentielle du premier ordre a, sauf exceptions, une infinité de solutions, représentée par une formule où figure une constante arbitraire. Nous avons déjà rencontré ce fait dans la recherche des primitives d'une fonction continue $f(x)$ donnée, ce qui après tout équivaut à résoudre l'équation différentielle d'un type très simple: $y' = f(x)$. Si $F(x)$ est une primitive particulière de $f(x)$, la solution générale est $y(x) = F(x) + C$.

Souvent on demande de trouver une solution particulière $y=y(x)$ satisfaisant à une condition initiale donnée, à savoir de prendre une valeur y_0 donnée pour une valeur précise x_0 de la variable. Par exemple, pour trouver une solution $y(x)$ de (1) telle que $y(0)=1$, en faisant $x=0$ dans (3), on trouve

$$1 = \frac{1}{2} + C\,,$$

d'où $C = \frac{1}{2}$, et $y(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-x^2}$ est la solution cherchée.

Exercice 2. Vérifiez que:

$y=y(x)$ ci-dessous	est solution de l'équation différentielle
$y = e^x$	$y' - y = 0$ sur $\mathbb{R}$
$y = e^{ax}$, où $a \in \mathbb{R}$	$y' - ay = 0$ sur $\mathbb{R}$
$y = \dfrac{2-x^2}{x^3}$	$y' + \dfrac{3xy+2}{x^2} = 0$ sur $]0,+\infty[$ et sur $]-\infty,0[$

.

Exercice 3. Vérifiez que :

les $y=y(x)$ ci-dessous	sont, quelle que soit C, solutions de l'équation différentielle
$y = Ce^{x}$	$y'-y=0$ sur $\mathbb{R}$
$y = Ce^{ax}$	$y'-ay=0$ sur $\mathbb{R}$
$y = -\frac{x}{3}+\frac{C}{3x^2}$	$xy'+2y+x$ sur $]0,+\infty[$ et sur $]-\infty,0[$
$y=\sqrt{1+Ce^{-x^2}}$	$yy'+xy^2=x$ sur $\mathbb{R}$ si C est ≥ 0 ; pour $\lvert x\rvert < \sqrt{\mathrm{Log}(-C)}$ si $C<0$.
$y=\frac{x+C}{1-Cx}$	$y'=\frac{1+y^2}{1+x^2}$ sur $]\frac{1}{C},+\infty[$ et sur $]-\infty,\frac{1}{C}[$

Exercice 4. Indiquez une solution $y=y(x)$ pour $x>0$ de l'équation différentielle $xy'+2y+x=0$, qui satisfasse à la condition initiale $y(1)=0$.

Les difficultés techniques que nous avons rencontrées dans le calcul des primitives font prévoir que la résolution d'une équation différentielle peut être un problème très compliqué. Cependant nous verrons que pour certains types d'équations, on peut aboutir à une solution complète.

Définitions. Une équation différentielle du premier ordre est dite linéaire si elle est de la forme :

$$(E) \qquad y' = a(x)\,y + f(x) \quad ,$$

où $a=a(x)$ et $f=f(x)$ sont deux fonctions données, continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. La fonction $a(x)$ s'appelle le coefficient ; la fonction $f(x)$ s'appelle le second membre de l'équation (E).

Si $a(x)\equiv 0$, on retrouve le calcul des primitives.

Une équation du type

$$(E_0) \qquad y' = a(x)\,y \quad ,$$

où $f(x)\equiv 0$ est dite linéaire homogène (ou sans second membre).

Si on donne une équation (E) avec second membre, l'équation

(E_0) est appelée équation homogène (ou sans second membre) associée à l'équation (E). Nous verrons en effet que la résolution de (E) passe par l'étape de la résolution de (E_0).

Essayons de découvrir la théorie par une succession progressive d'exemples et de cas particuliers.

Exemple 2. Soit d'abord l'équation très simple :

$$(4) \qquad y' = ay$$

où a est une constante réelle donnée, c'est-à-dire une équation sans second membre à coefficient constant. Une solution évidente de (4) est $y_0(x) = e^{ax}$; plus généralement, pour toute constante réelle C, la fonction $y(x) = Ce^{ax}$ est solution de (4). Nous allons prouver qu'il n'y en a pas d'autres.

Proposition 1. Soit a une constante réelle donnée. La solution générale de l'équation différentielle $y' = ay$ est $y(x) = Ce^{ax}$, où C est une constante arbitraire ; cette solution est valable sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Démonstration. Transformons le problème de trouver toutes les solutions de (4) en changeant de fonction inconnue. Introduisons une nouvelle fonction inconnue $z = z(x)$ liée à $y = y(x)$ par :

$$(5) \qquad y(x) = y_0(x)\, z(x) = e^{ax} z(x).$$

À quelle relation équivalente à (4) satisfait $z = z(x)$? Pour le savoir, dérivons (5) :

$$(6) \qquad y'(x) = a e^{ax} z(x) + e^{ax} z'(x),$$

et reportons (5) et (6) dans (4) :

$$a e^{ax} z + e^{ax} z' = a e^{ax} z.$$

Ainsi $y' = ay$ équivaut à $e^{ax} z' = 0$, donc à $z' = 0$. Pour que $y(x)$ soit solution de (4), il faut et il suffit que $z' \equiv 0$, c'est-à-dire que $z(x) = C$, où C est une constante. Donc, d'après (5), pour cela il faut et il suffit que $y(x) = Ce^{ax}$.

<u>Exemple 3</u>. Soit a un nombre réel donné, non nul. Pour résoudre l'équation

$$(7) \quad y' = ay + x \quad ,$$

qui est à coefficient <u>constant</u>, mais <u>avec</u> second membre $f(x) = x$, essayons le même changement de fonction inconnue

$$(5) \quad y(x) = e^{ax} z(x) \, ,$$

qui prend appui sur la solution particulière $y_0(x) = e^{ax}$ de l'équation <u>sans</u> second membre associée à (7). On a :

$$\begin{cases} y' = ae^{ax} z + e^{ax} z' \\ ay + x = ae^{ax} z + x \end{cases} ,$$

donc (7) équivaut à : $e^{ax} z' = x$, c'est-à-dire à $z'(x) = x e^{-ax}$, donc à

$$z(x) = \int x e^{-ax} \, dx,$$

ou encore, par intégration par parties, à :

$$z(x) = -\frac{e^{-ax}}{a^2} - \frac{x e^{-ax}}{a} + C .$$

En reportant dans (5), on obtient la solution générale de (7) :

$$y(x) = Ce^{ax} - \frac{x}{a} - \frac{1}{a^2} \quad ,$$

valable sur $\mathbb{R}$ tout entier.

<u>Exemple</u> 4. Soit a un nombre réel $\neq 0$. Abordons l'équation

$$(8) \quad y' = ay + \frac{1}{x} \qquad (x > 0)$$

par la même méthode, en posant $y = e^{ax} z$. On obtient que (8) équivaut à :

$$z(x) = \int \frac{e^{-ax}}{x} \, dx .$$

Or on ne sait pas (et d'ailleurs on ne peut pas) exprimer cette intégrale indéfinie à l'aide des fonctions classiques. Nous devons donc nous contenter de dire que la solution générale de (8) est

$$y(x) = e^{ax} \int \frac{e^{-ax}}{x} \, dx = Ce^{ax} + e^{ax} G(x) ,$$

où $G(x)$ est une primitive de $\frac{e^{-ax}}{x}$, et C une constante arbitraire.

Nous n'avons pu faire mieux que ramener la résolution de (8) à une "quadrature", c'est-à-dire à un calcul d'intégrale, calcul que nous pourrons toujours continuer numériquement par les méthodes de la Leçon n° 7.

Exercice 5. Une fonction $y = y(x)$ définie et dérivable pour $x > 0$ satisfait aux conditions :

pour tout $x > 0$, $\quad y' + y = \frac{1}{x}$; et $y(1) = 0$.

1) Montrez que $\quad y(x) = e^{-x} \int_1^x \frac{e^t}{t} dt$.

2) Calculez $y(2)$ avec une erreur inférieure à 10^{-2}.

Exemple 5. Soit a une constante réelle donnée, et soit $f(x)$ une fonction définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Considérons l'équation :

$$(9) \qquad y' = ay + f(x),$$

à coefficient constant, mais à second membre quelconque.
En posant $y = e^{ax} z$, donc $y' = ae^{ax} z + e^{ax} z'$, on voit que (9) équivaut à : $e^{ax} z' = f(x)$, donc à $z' = e^{-ax} f(x)$, c'est-à-dire à :

$$z(x) = \int e^{-ax} f(x) dx = G(x) + C,$$

où $G(x)$ est une primitive particulière de la fonction $e^{-ax} f(x)$.
On a obtenu la

Proposition 2. Soit a une constante réelle, et soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

1) La solution générale sur I de l'équation

$$(9) \qquad y' = ay + f(x)$$

est donnée par la formule

$$y(x) = e^{ax} \int e^{-ax} f(x) dx = Ce^{ax} + e^{ax} G(x),$$

où $G(x)$ est une primitive particulière quelconque de la fonction $e^{-ax} f(x)$, et où C est une constante arbitraire.

2°) quels que soient $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$ fixés, il existe une solution $y = y(x)$ et une seule de (9) sur I qui satisfasse à la condition initiale $y(x_0) = y_0$, à savoir :

$$y(x) = y_0 e^{a(x-x_0)} + e^{ax} \int_{x_0}^{x} e^{-at} f(t)\,dt .$$

<u>Remarque</u> : Le 2°) s'obtient à partir du 1°), où l'on choisit la primitive $G(x) = \int_{x_0}^{x} e^{-at} f(t)\,dt$, puis où on détermine la constante C par la condition $y(x_0) = y_0$, donc $C = y_0 e^{-ax_0}$.

<u>Exercice 6</u>. Prenons ici comme variable t (= le temps) plutôt que x. Un "mécanisme" reçoit un signal d'entrée périodique :

$$f(t) = A_0 \sin(\omega t)$$

d'amplitude A_0, de fréquence ω, et restitue en réponse un signal de sortie $y = y(t)$, solution de l'équation différentielle :

$$k y' + y = f(t),$$

où k est une constante > 0 dépendant du mécanisme. Montrez que le signal de sortie vaut :

$$y(t) = A_1 \sin(\omega t - \varphi) + C e^{-\frac{t}{k}},$$

où C est une constante, et où :

$$A_1 = \frac{A_0}{\sqrt{1+k^2\omega^2}} , \qquad \varphi = \mathrm{Arctg}\,(k\omega) .$$

Ainsi, à l'exception du terme transitoire rapidement petit $Ce^{-\frac{t}{k}}$, le signal de sortie est essentiellement périodique, de même période ω que le signal d'entrée, mais avec une différence de phase φ, et une perte d'amplitude $\frac{A_1}{A_0} = \frac{1}{\sqrt{1+k^2\omega^2}}$.

Nous allons maintenant plus généralement étudier les équations différentielles linéaires à <u>coefficient</u> $a(x)$ <u>variable</u>, en commençant par celles qui n'ont pas de second membre.

Exemple 6. Soit $a = a(x)$ une fonction définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Considérons l'équation différentielle

$$(E_0) \qquad y' = a(x)\, y .$$

Pour deviner la forme des solutions, supposons pour un moment que $y(x)$ soit >0. Alors en écrivant (10) sous la forme $\frac{y'}{y} = a(x)$, c'est-à-dire $(\mathrm{Log}\, y(x))' = a(x)$, donc $\mathrm{Log}\, y(x) = \int a(x)dx$, c'est-à-dire $y(x) = \exp[\int a(x) dx]$, on considère comme raisonnable l'énoncé suivant :

Proposition 3. Soit $a = a(x)$ une fonction définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit $A(x)$ une primitive particulière de $a(x)$ sur I. La solution générale de l'équation homogène

$$(E_0) \qquad y' = a(x)\, y$$

sur I est donnée par la formule $y(x) = C e^{A(x)}$, où C est une constante arbitraire.

Démonstration. Si $y(x) = Ce^{A(x)}$, alors $y'(x) = C A'(x) e^{A(x)} = C a(x) e^{A(x)} = a(x) \cdot Ce^{A(x)} = a(x) y(x)$; donc toute fonction $y = Ce^{A(x)}$ est bien une solution de (E_0). Réciproquement, soit $y = y(x)$ une solution quelconque de (E_0). Introduisons $z = z(x)$ telle que : $y = e^{A(x)} z$, donc telle que $y' = A'(x)e^{A(x)} z + e^{A(x)} z' = a(x) y + e^{A(x)} z'$. Puisque $y' = a(x) y$, nécessairement $z' \equiv 0$ sur I ; donc il existe une constante C telle que $z(x) \equiv C$ sur I, donc telle que $y(x) = Ce^{A(x)}$.

Corollaire. Quels que soient $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$ donnés, il existe une solution et une seule de l'équation :

$$(E_0) \qquad y' = a(x)\, y$$

sur I, qui satisfasse à la condition initiale $y(x_0) = y_0$, à savoir

$$y(x) = y_0 \exp \int_{x_0}^{x} a(t)\, dt \quad .$$

Exercice 7. Trouvez la fonction $y=y(x)$ dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(x^2+1)\,y' = y$; et $y(0)=1$.

Cas général de l'équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficient variable et avec second membre :

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et soit $a = a(x)$ et $f = f(x)$ deux fonctions données, à valeurs réelles, définies et continues sur I. Soit à résoudre sur I l'équation différentielle :

$$(E) \qquad y' = a(x)\,y + f(x) .$$

On procède en deux temps :

1°) On résout d'abord l'équation :

$$(E_0) \qquad y' = a(x)\,y$$

sans second membre associée à (E), qui, comme on vient de le voir, a pour solution générale sur I :

$$(10) \qquad y(x) = C\,e^{A(x)} ,$$

où $A(x)$ est une primitive sur I du coefficient $a(x)$.

2°) On effectue, au vu de la formule (10), le changement de fonction inconnue,

$$(11) \qquad y(x) = z(x)\,e^{A(x)} ,$$

d'où : $y' = A'(x)\,e^{A(x)} z + e^{A(x)} z' = a(x)\,y + e^{A(x)} z'$.

On en tire que $y = y(x)$ est solution de (E) si et seulement si :

$$e^{A(x)} z' = f(x) ,$$

c'est-à-dire si et seulement si $z(x) = \int e^{-A(x)} f(x)\,dx$. En reportant dans (11), on obtient le :

Théorème. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soient $a = a(x)$ et $f = f(x)$ deux fonctions données, à valeurs réelles, définies et continues sur I. Soient $A(x)$ une primitive de $a(x)$ sur I, et soit $G(x)$ une primitive de $e^{-A(x)} f(x)$ sur I. Alors :

1°) La solution générale sur I de l'équation différentielle :

$$(E) \qquad y' = a(x)\,y + f(x)$$

est donnée par la formule :

$$y(x) = e^{A(x)} \int e^{-A(x)} f(x)\,dx = C e^{A(x)} + e^{A(x)} G(x) \quad .$$

2°) Pour tout $x_0 \in I$ et tout $y_0 \in \mathbb{R}$ fixés, il existe une solution et une seule de (E) qui satisfasse à la condition initiale $y(x_0) = y_0$, à savoir :

$$y(x) = y_0\, e^{A(x) - A(x_0)} + e^{A(x)} \int_{x_0}^{x} e^{-A(t)} f(t)\,dt \quad .$$

<u>Corollaire</u>. La solution générale de l'équation différentielle :

$$(E) \qquad y' = a(x)\,y + f(x)$$

est la somme de la solution générale de l'équation différentielle

$$(E_0) \qquad y' = a(x)\,y$$

homogène associée à (E), et d'une solution particulière (quelconque) de (E).

Ce corollaire est une paraphrase du 1°) du Théorème ci-dessus, compte-tenu de la Proposition 3.

<u>Exercice</u> 8. Soit l'équation proposée à l'Exemple 1 :

$$(1) \qquad y' + 2xy - x = 0 \quad .$$

1°) Remarquez que $y(x) \equiv \frac{1}{2}$ est une solution évidente de (1).

2°) Déduisez-en, d'après le Corollaire, que la solution générale de (1) est :

$$y(x) = \frac{1}{2} + C e^{-x^2} \quad .$$

Mentionnons un moyen mnémotechnique, consacré par la tradition, pour résoudre pratiquement les équations du type (E), à savoir la méthode (bizarrement appelée) de <u>variation de la constante</u>. Ce n'est qu'un moyen plus rapide de mémoriser les deux temps 1°) et 2°) de la démonstration du Théorème p 92. La charnière entre ces deux temps se situe entre les relations (10) et (11), quand on décide de passer de la solution générale de (E_0), à savoir :

$$(10) \qquad y(x) = C e^{A(x)}$$

à un changement de fonction inconnue pour résoudre (E), à savoir :

$$(11) \qquad y(x) = z(x) e^{A(x)}$$

En somme on décide de poser $C = z(x)$, c'est-à-dire de <u>faire varier</u> la constante d'intégration C de l'équation homogène (E_0) associée à (E). Avec un peu de pratique, on fait l'économie de la notation $z(x)$ et, une fois arrivé à (10), on pose carrément, dans (10), $C = C(x)$ qu'on reporte dans (E) ; c'est-à-dire on pose :

$$y(x) = C(x) e^{A(x)}, \quad \text{donc} \quad y'(x) = C'(x) e^{A(x)} + A'(x) C(x) e^{A(x)}$$

d'où, en reportant dans (E),

$$C'(x) e^{A(x)} + \underbrace{a(x) C(x) e^{A(x)}} = \underbrace{a(x) C(x) e^{A(x)}} + f(x)$$

et donc $$C'(x) = e^{-A(x)} f(x),$$

c'est-à-dire : $C(x) = \int e^{-A(x)} f(x)\, dx$, et $y(x) = e^{A(x)} \int e^{-A(x)} f(x)\, dx$.

<u>Exemple 7</u>. Cherchons la solution générale de l'équation différentielle :

$$(E) \qquad y' \sin x - y \cos x + \cos^2 x = 0$$

pour $0 < x < \pi$. Considérons l'équation homogène associée :

$$(E_0) \qquad y' = \frac{\cos x}{\sin x} y .$$

Une primitive $A(x)$ de $a(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$ sur $]0, \pi[$ est $\operatorname{Log}(\sin x)$. Donc la solution générale de (E_0) est $y = C e^{\operatorname{Log}(\sin x)} = C \cdot \sin x$. "Faisons varier" la constante C, c'est-à-dire faisons dans (E) le changement de fonction inconnue :

$$y(x) = C(x) \sin x \qquad . \text{ Il vient :}$$

$$(C' \sin x + C \cos x) \sin x - C \sin x \cos x + \cos^2 x = 0, \quad \text{ou}$$

$$C'(x) = -\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = 1 - \frac{1}{\sin^2 x},$$

c'est-à-dire $C(x) = x + \cot g\, x + K$, où K est une constante. La solution générale de (E) sur $]0, \pi[$ est donc :

$$y(x) = K \sin x + x \sin x + \cos x,$$

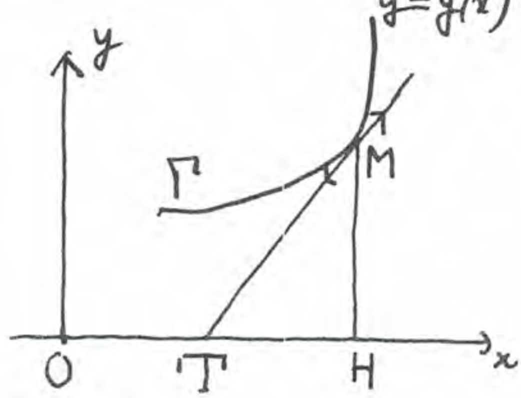
où K est une constante arbitraire.

<u>Exercice</u> 9. Trouvez une fonction $y = y(x)$ dérivable sur $]-1, +1[$, solution sur cet intervalle de l'équation différentielle :

$$(1-x^2)\, y' + 2xy = (x+1)^2,$$

et telle que $y(0) = 1/2$.

<u>Exercice</u> 10. Quelles sont les courbes Γ, d'équation $y = y(x)$ en axes orthonormés, telles que, si H désigne la projection orthogonale sur Ox d'un point quelconque M de Γ, et T l'intersection de la tangente en M à Γ avec Ox, on ait constamment T au milieu de OH ?



<u>Solutions des Exercices proposés dans cette Leçon</u>

<u>Exercices</u> 1, 2 et 3. Il suffit de dériver les $y = y(x)$ proposés, et de reporter dans les équations différentielles indiquées. On remarquera que les 3 équations différentielles de l'Exercice 2, et les 3 premières de l'Exercice 3 sont <u>linéaires</u> ; les deux dernières de l'Exercice 3 ne sont pas linéaires ; cependant la quatrième le devient en posant $y^2 = z$, d'où $yy' = \frac{z'}{2}$.

<u>Exercice</u> 4. D'après l'Exercice 3, les fonctions $y = -\frac{x}{3} + \frac{C}{3x^2}$ sont solutions de $xy' + 2y + x = 0$ sur $]0, +\infty[$. On aura $y(1) = 0$ si $0 = -\frac{1}{3} + \frac{C}{3}$, donc si $C = 1$. Donc $y = -\frac{x}{3} + \frac{1}{3x^2}$ est la fonction cherchée.

<u>Exercice</u> 5. 1°) $y_0(x) = e^{-x}$ étant solution de l'équation homogène associée $y' + y = 0$, on fait le changement de fonction inconnue $y = e^{-x} z$, donc $y' = -e^{-x} z + e^{-x} z'$. L'équation proposée équivaut

à $e^{-x}z' = \frac{1}{x}$, donc à $z' = \dfrac{e^{x}}{x}$, c'est-à-dire à $z = \int \dfrac{e^{x}}{x}\,dx =$

$= \displaystyle\int_1^x \frac{e^t}{t}\,dt + C$. La solution générale de l'équation proposée est

$$y(x) = Ce^{-x} + e^{-x}\int_1^x \frac{e^t}{t}\,dt .$$

La condition $y(1)=0$ exige $C=0$, donc $y(x) = e^{-x}\displaystyle\int_1^x \frac{e^t}{t}\,dt$.

2°) Calculons numériquement $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{e^t}{t}\,dt$ par la méthode de la formule de Taylor (Leçon n° 7, § 1). D'après AN 01, Leçon n° 7, Thm 3, page 90, pour tout nombre réel t tel que $|t| \leq 2$, on a :

$$\left| e^t - \left(1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \cdots + \frac{t^n}{n!}\right)\right| \leqslant e^2 \frac{|t|^{n+1}}{(n+1)!} ,$$

En particulier, pour $1 \leq t \leq 2$, et pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$\left| \frac{e^t}{t} - \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{1!} + \frac{t}{2!} + \cdots + \frac{t^{n-1}}{n!}\right)\right| \leqslant e^2 \frac{t^n}{(n+1)!} .$$

Intégrons les deux membres de cette inégalité entre 1 et 2 :

$$\left| \int_1^2 \frac{e^t}{t}\,dt - \left(\operatorname{Log} t + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!\,2} + \cdots + \frac{t^n}{n!\,n}\right)_{t=1}^{t=2} \right| \leqslant e^2 \frac{2^{n+1}-1}{(n+1)!\,(n+1)} .$$

Or, pour $n=7$, on calcule que $e^2 \dfrac{2^8-1}{8!\,8} = 0{,}00584 < 10^{-2}$. Avec l'approximation demandée, nous avons donc :

$$\int_1^2 \frac{e^t}{t}\,dt \simeq \operatorname{Log} 2 + \frac{2-1}{1!} + \frac{2^2-1}{2!\,2} + \cdots + \frac{2^7-1}{7!\,7} =$$

$$= \operatorname{Log} 2 + 1 + \frac{3}{4} + \frac{7}{12} + \frac{15}{96} + \frac{31}{600} + \frac{63}{4320} + \frac{127}{35.280} \simeq 3{,}25 .$$ Puis

$$y(2) = 3{,}25\, e^{-2} = 0{,}44 .$$

<u>Exercice 6</u>. Soit l'équation : (E) $ky' + y = A_0 \sin(\omega t)$. L'équation sans second membre associée : (E_0), $ky' + y = 0$, a pour solution générale $y = Ce^{-t/k}$. Le changement de fonction inconnue :

$$y = z e^{-t/k} , \text{ donc } y' = -\tfrac{1}{k} e^{-t/k} z + e^{-t/k} z',$$

dans (E) conduit à l'équation :

$$k e^{-t/k} z' = A_0 \sin(\omega t),$$

donc, d'après la formule obtenue Leçon n°4, Exemple 9, p 43, à :

$$z(t) = \frac{A_0}{k}\int e^{t/k}\sin(\omega t)\,dt = \frac{A_0 e^{t/k}}{k\left(\frac{1}{k^2}+\omega^2\right)}\left[\frac{1}{k}\sin(\omega t) - \omega\cos(\omega t)\right] + C =$$

$$= \frac{A_0}{\sqrt{1+k^2\omega^2}}e^{t/k}\left[\frac{1}{\sqrt{1+k^2\omega^2}}\sin(\omega t) - \frac{k\omega}{\sqrt{1+k^2\omega^2}}\cos(\omega t)\right] + C =$$

$= A_1 e^{t/k}\sin(\omega t - \varphi) + C$, avec les notations de l'énoncé, d'où

$$y(t) = A_1 \sin(\omega t - \varphi) + C e^{-t/k}.$$

<u>Exercice 7</u>. On a $a(x) = \frac{1}{x^2+1}$ donc $A(x) = \operatorname{Arctg} x$, et $y(x) = C e^{\operatorname{Arctg} x}$. Puisque $y(0)=1$, il faut $C=1$, donc $y = e^{\operatorname{Arctg} x}$.

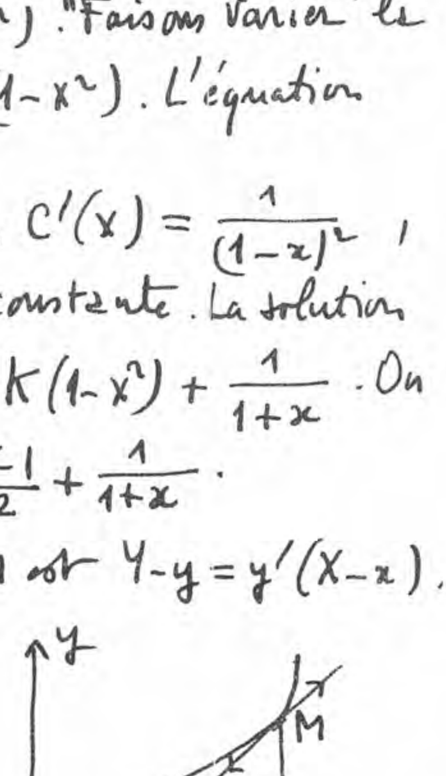
<u>Exercice 8</u>. 2°) $a(x) = -2x$, donc $A(x) = -x^2$. La solution de l'équation homogène associée est Ce^{-x^2}.

<u>Exercice 9</u>. L'équation homogène associée $y' = \frac{-2x}{1-x^2}y$ a pour solution générale $y = Ce^{\operatorname{Log}(1-x^2)} = C(1-x^2)$. "Faisons varier" la constante C, c'est-à-dire posons $y(x) = C(x)(1-x^2)$. L'équation proposée équivaut à :

$$(1-x^2)^2\,C'(x) = (1+x)^2, \text{ c'est-à-dire à : } C'(x) = \frac{1}{(1-x)^2},$$

donc à $C(x) = \frac{1}{1-x} + K$, où K est une constante. La solution générale de l'équation proposée est $y(x) = K(1-x^2) + \frac{1}{1+x}$. On a $y(0) = \frac{1}{2}$ pour $K = -\frac{1}{2}$, donc $y(x) = \frac{x^2-1}{2} + \frac{1}{1+x}$.

<u>Exercice 10</u>. L'équation de la tangente en M est $Y - y = y'(X-x)$. Pour $Y=0$, on obtient $\overline{OT} = X = x - \frac{y}{y'}$. Le problème équivaut à résoudre l'équation différentielle : $x - \frac{y}{y'} = \frac{x}{2}$, c'est-à-dire $y' = \frac{2}{x}y$. La solution générale en est $y(x) = Cx^2$. Les courbes cherchées sont les paraboles de sommet O, d'axe Oy. On en déduit une construction géométrique des tangentes aux paraboles.



Equations différentielles linéaires du deuxième ordre

Une équation différentielle du deuxième ordre est une relation entre la variable x, la fonction inconnue $y = y(x)$ et ses dérivées première $y'(x)$ et seconde $y''(x)$. En Physique, en Mécanique, la plupart des phénomènes naturels obéissent à des équations du deuxième ordre. Par exemple la Dynamique du point matériel repose sur la loi de Newton $\vec{F} = m\vec{\Gamma}$, où m est la masse, la variable t est le temps, où l'accélération $\vec{\Gamma}$ s'obtient en dérivant deux fois la position par rapport à t, et où la force $\vec{F}$ dépend en général de t, de la position, et de la vitesse (c'est-à-dire de la dérivée première de la position).

Nous nous limiterons dans cette Leçon aux équations linéaires, avec une théorie complète seulement pour celles qui sont à coefficients constants.

§1. Définitions

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Une équation différentielle linéaire du deuxième ordre sur I est une équation du type :

$$(E) \qquad a(x)\,y'' + b(x)\,y' + c(x)\,y = f(x),$$

où $a = a(x)$, $b = b(x)$, $c = c(x)$, $f = f(x)$ sont des fonctions continues sur I, et où $a(x)$ n'est jamais nulle sur I.

Les fonctions $a(x)$, $b(x)$ et $c(x)$ s'appellent les coefficients, la fonction $f(x)$ s'appelle le second membre de (E).

Si $f(x) \equiv 0$, l'équation :

$$(E_0) \qquad a(x)\,y'' + b(x)\,y' + c(x)\,y = 0$$

est dite linéaire homogène (ou sans second membre).

Si une équation (E) est donnée, l'équation (E_0) obtenue en remplaçant $f(x)$ par 0 dans (E) s'appelle l'équation homogène (ou sans second membre) associée à (E). La résolution de (E) passe en effet par l'étude préalable de (E_0).

Proposition 1. Soient $y = y_1(x)$ et $y = y_2(x)$ deux solutions particulières de l'équation homogène (E_0). Alors, pour tout choix des constantes C_1 et C_2, la fonction

$$y(x) = C_1\, y_1(x) + C_2\, y_2(x)$$

est une solution de (E_0).

Démonstration. Par hypothèse on a, pour tout $x \in I$,

$$\begin{cases} a(x)\, y_1'' + b(x)\, y_1' + c(x)\, y_1 = 0 \\ a(x)\, y_2'' + b(x)\, y_2' + c(x)\, y_2 = 0 \end{cases}$$

Multiplions la première relation par C_1, la deuxième par C_2, et additionnons ; on obtient que, pour tout $x \in I$,

$$a(x)\, y'' + b(x)\, y' + c(x)\, y = 0 ,$$

où $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$.

§2. Quelques exemples d'équations linéaires à coefficients constants et sans second membre.

Exemple 1. L'équation $\qquad y'' - y = 0$

admet $y_1(x) = e^x$ comme solution évidente, mais aussi $y_2(x) = e^{-x}$. Donc, pour tout choix des constantes C_1 et C_2, la formule

$$y(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x}$$

fournit une solution de cette équation, dépendant de deux constantes arbitraires. Nous saurons bientôt montrer que cette formule donne en fait la solution générale de l'équation sur $\mathbb{R}$.

Exemple 2. Plus généralement, soit α un nombre réel non nul donné, et considérons l'équation différentielle :

$$y'' - \alpha^2 y = 0 \quad .$$

Elle a deux solutions évidentes $y_1(x) = e^{\alpha x}$ et $y_2(x) = e^{-\alpha x}$, donc plus généralement :

$$y(x) = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{-\alpha x}$$

est solution, pour tout choix des constantes C_1 et C_2 ; nous verrons bientôt que c'est la solution générale sur $\mathbb{R}$.

<u>Exercice 1</u>. Vérifiez que l'équation $y'' - 5y' + 6y = 0$ a les deux solutions particulières $y_1(x) = e^{2x}$ et $y_2(x) = e^{3x}$. En déduire une solution $y = y(x)$ qui soit telle que $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

Cet exercice illustre l'idée suivante : s'agissant d'équations différentielles du deuxième ordre, les <u>conditions initiales</u> usuelles, qui déterminent la solution $y = y(x)$, consistent à imposer, pour une certaine valeur x_0 donnée de la variable, des valeurs précises $y(x_0)$ et $y'(x_0)$ aux fonctions y et y' au point x_0. Dans la phrase qui précède, le mot "déterminent" n'a pas été employé innocemment. Il y a là en effet une illustration mathématique du principe du <u>déterminisme</u>. Si on suppose avoir noté le 14 Juillet 1900 les positions et les vitesses de tous les corps célestes, les équations différentielles de la Mécanique newtonienne nous permettent de déterminer sans ambiguïté les positions qu'auront ces corps le 14 Juillet 2.900.

<u>Exemple</u> 3. L'équation différentielle sur $\mathbb{R}$:

$$(1) \qquad y'' + y = 0$$

admet les deux solutions évidentes sur $\mathbb{R}$:

$$y_1(x) = \sin x \quad ; \quad y_2(x) = \cos x \quad ,$$

et donc, plus généralement, les solutions :

$$(2) \quad y(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x \quad ,$$

quel que soit le choix des constantes C_1 et C_2. Réciproquement, nous allons prouver la

<u>Proposition</u> 2. La solution générale sur $\mathbb{R}$ de l'équation :

$$(1) \qquad y'' + y = 0$$

est :

$$(2) \qquad y(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x ,$$

où C_1 et C_2 sont deux constantes arbitraires.

<u>Démonstration</u>. Soit $y = y(x)$ une solution quelconque de (1) sur $\mathbb{R}$. Posons $C_1 = y'(0)$ et $C_2 = y(0)$, et formons la différence

$$f(x) = y(x) - C_1 \sin x - C_2 \cos x .$$

Nous allons montrer que $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En dérivant (1) indéfiniment, on obtient que la fonction $y(x)$ est indéfiniment dérivable, et que :

$$y'' = -y \;,\; y''' = -y' \;,\; y^{(IV)} = -y'' = y \;,\; y^{(V)} = y' \;,\; y^{(VI)} = y'' , \text{etc...}$$

donc que, pour tout entier $n \geq 0$,

$$(3) \qquad y^{(2n)}(x) = (-1)^n y(x) \qquad ; \qquad y^{(2n+1)}(x) = (-1)^n y'(x) ,$$

et, en particulier,

$$y^{(2n)}(0) = (-1)^n C_2 \qquad ; \qquad y^{(2n+1)}(0) = (-1)^n C_1 .$$

Comme les fonctions $y = \sin x$ et $y = \cos x$ satisfont aussi aux relations (3), nous en déduisons sans peine que <u>la fonction $f(x)$ a toutes ses dérivées successives nulles à l'origine</u> : $f^{(k)}(0) = 0$ pour tout entier $k \geq 0$. Soit x <u>fixé</u> $\in \mathbb{R}$, et soit M le plus grand des deux nombres :

$$\sup_{|t| \leq |x|} | y(t) | \qquad \text{et} \qquad \sup_{|t| \leq |x|} | y'(t) | .$$

On a : $\left| f^{(k)}(t) \right| \leq \left| y^{(k)}(t) \right| + |y'(0)| + |y(0)| \leq 3M$ pour tout t tel que $|t| \leq |x|$, et pour tout entier $k \geq 0$. Donc en appliquant à la fonction $f(x)$ entre 0 et x la formule de Taylor (AN01, leçon n°6, Théorème 2, p 71) à un ordre n <u>quelconque</u>, on obtient :

$$\left| f(x) - \left[f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \cdots\cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \right] \right| = \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|\,|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

où ξ est entre 0 et x, c'est-à-dire, vu que les $f^{(k)}(0)$ sont tous nuls :

$$|f(x)| \leqq 3M \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} .$$

Dans cette inégalité, x et donc M sont fixés indépendamment de n. Quand $n \to +\infty$, le deuxième membre tend vers 0 (cf. AN01, Leçon n°2, III, p15). Donc le premier membre ne peut qu'être nul.

<u>Corollaire</u>. Soit β un nombre réel $\neq 0$ donné. L'équation :

$$(3) \qquad y'' + \beta^2 y = 0$$

a pour solution générale sur $\mathbb{R}$:

$$(4) \qquad y(x) = C_1 \sin(\beta x) + C_2 \cos(\beta x) ,$$

où C_1 et C_2 sont deux constantes arbitraires.

<u>Démonstration</u>. Posons $\beta x = t$, et $y(x) = z(\beta x) = z(t)$. Pour ce changement de variable et de fonction, on a :

$$y'(x) = z'(t)\frac{dt}{dx} = \beta z'(t) \quad \text{puis} \quad y''(x) = \beta z''(t)\frac{dt}{dx} = \beta^2 z''(t).$$

Donc (3) équivaut à :

$$z''(t) + z(t) = 0 ,$$

dont la solution générale est : $z(t) = C_1 \sin t + C_2 \cos t$, d'où (4).

<u>Exemple</u> 4. Soient α et β deux nombres réels $\neq 0$ donnés. Cherchons à fabriquer une équation différentielle homogène du second ordre à coefficients constants, qui soit satisfaite par la fonction :

$$y(x) = e^{\alpha x} \sin(\beta x) .$$

On a :

$$y'(x) = e^{\alpha x}\left[\alpha \sin(\beta x) + \beta \cos(\beta x)\right]$$

$$y''(x) = e^{\alpha x}\left[(\alpha^2 - \beta^2)\sin(\beta x) + 2\alpha\beta\cos(\beta x)\right] .$$

En ajoutant à la dernière de ces trois relations la seconde, multipliée par -2α, puis la première, multipliée par $\alpha^2+\beta^2$, on élimine $\sin(\beta x)$ et $\cos(\beta x)$ et l'on obtient :

$$(5) \qquad y'' - 2\alpha y' + (\alpha^2+\beta^2)y = 0,$$

équation qui admet donc comme solution particulière la fonction

$$(6) \qquad y(x) = e^{\alpha x}\sin(\beta x).$$

Exercice 2. Vérifiez que $y(x) = e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ est une autre solution particulière de (5).

§ 3. Théorie de l'équation différentielle du deuxième ordre linéaire à coefficients constants sans second membre.

Soit l'équation

$$(7) \qquad ay'' + by' + cy = 0,$$

où a, b et c sont trois constantes réelles données, et où $a \neq 0$.

Une tentative pour trouver à (7) des solutions du type e^{rx}, où r est une constante réelle, conduit à reporter dans (7) :

$$y = e^{rx}, \qquad y' = re^{rx}, \qquad y'' = r^2e^{rx},$$

d'où

$$(ar^2+br+c)e^{rx} = 0.$$

La tentative aboutira donc si on choisit pour r une racine réelle (s'il en existe) de l'équation du second degré :

$$(8) \qquad ar^2+br+c = 0.$$

Définition. L'équation algébrique du second degré (8), d'inconnue r, s'appelle équation caractéristique de l'équation différentielle (7).

Les exemples du § 2 nous ont préparés à recevoir l'énoncé du

Théorème. Soient $a \neq 0$, b et c trois constantes réelles. Soit l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$:

$$(7) \qquad ay'' + by' + cy = 0,$$

d'équation caractéristique :

$$(8) \qquad ar^2+br+c = 0.$$

1°) Si $\boxed{b^2-4ac>0}$, l'équation caractéristique a deux racines réelles distinctes r_1 et r_2 ; dans ce cas la solution générale de (7) sur $\mathbb{R}$ est :

$$\boxed{y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}} ,$$

où C_1 et C_2 sont des constantes arbitraires.

2°) Si $\boxed{b^2-4ac=0}$, l'équation caractéristique a une racine réelle double $r = -\frac{b}{2a}$; dans ce cas la solution générale de (7) sur $\mathbb{R}$ est :

$$\boxed{y(x) = e^{rx}\left(C_1 x + C_2\right)} ,$$

où C_1 et C_2 sont des constantes arbitraires.

3°) Si $\boxed{b^2-4ac<0}$, l'équation caractéristique a deux racines complexes non réelles imaginaires conjuguées $\alpha \pm i\beta$, où α et β sont réels, $\beta \neq 0$ et où $i = \sqrt{-1}$; dans ce cas la solution générale de (7) sur $\mathbb{R}$ est :

$$\boxed{y(x) = e^{\alpha x}\left(C_1 \sin(\beta x) + C_2 \cos(\beta x)\right)} .$$

Démonstration.

1°) Supposons $b^2-4ac>0$, et faisons dans (7) le changement de fonction inconnue :

$$y = e^{r_1 x} z \quad ; \quad y' = e^{r_1 x}(r_1 z + z') \; ; \; y'' = e^{r_1 x}(r_1^2 z + 2r_1 z' + z'') .$$

On obtient l'équation différentielle en z équivalente à (7) :

$$a z'' + (2ar_1 + b) z' + (ar_1^2 + br_1 + c) z = 0 ,$$

c'est-à-dire

$$a z'' + (2ar_1 + b) z' = 0 ,$$

qui est linéaire homogène du premier ordre pour la fonction inconnue z', et a pour solution générale :

$$z'(x) = C\, e^{-(2r_1 + \frac{b}{a})x}$$

donc

$$z(x) = C_2\, e^{-(2r_1+\frac{b}{a})x} + C_1 ,$$

où C_1 et $C_2 = -\dfrac{C}{2r_1 + b/a}$ sont deux constantes arbitraires.

Vu que $r_1+r_2=-\frac{b}{a}$, donc $-\left(2r_1+\frac{b}{a}\right)=r_2-r_1$, on obtient la solution générale de (7) sous la forme :

$$y(x)=e^{r_1x}z(x)=e^{r_1x}\left[C_2e^{(r_2-r_1)x}+C_1\right]=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}.$$

2°) Supposons $b^2-4ac=0$, et faisons dans (7) le changement de fonction inconnue :

$$y=e^{rx}z \quad ; \quad y'=e^{rx}(rz+z') \; ; \; y''=e^{rx}(r^2z+2rz'+z''),$$

où $r=-\frac{b}{2a}$. L'équation différentielle en z équivalente à (7) :

$$az''+(2ar+b)z'+(ar^2+br+c)z=0$$

est simplement : $\qquad z''=0,$

dont la solution générale est $z(x)=C_1x+C_2$. Ainsi la solution générale de (7) est-elle : $y(x)=e^{rx}(C_1x+C_2)$.

3°) Supposons $b^2-4ac<0$, et faisons dans (7) le changement de fonction inconnue :

$$y=e^{\alpha x}z \; ; \; y'=e^{\alpha x}(\alpha z+z') \; ; \; y''=e^{\alpha x}(\alpha^2z+2\beta z'+z''),$$

où $\alpha=\frac{1}{2}\left[\alpha+i\beta+\alpha-i\beta\right]=-\frac{b}{2a}$, car α est la demi-somme des racines de (8). L'équation différentielle en z équivalente à (7) :

$$az''+(2a\alpha+b)z'+(a\alpha^2+b\alpha+c)z=0$$

est simplement : (9) $\qquad z''+\beta^2z=0,$

car : — on vient de voir que $2a\alpha+b=0$;

— le produit $\frac{c}{a}$ des racines $\alpha\pm i\beta$ valant $\alpha^2+\beta^2$, on a :

$$a\left(\alpha^2+\frac{b}{a}\alpha+\frac{c}{a}\right)=a\left(\alpha^2-2\alpha^2+\alpha^2+\beta^2\right)=a\beta^2.$$

Au Corollaire de la Proposition 2, page 102, nous avons vu que la solution générale de (9) est :

$$z(x)=C_1\sin(\beta x)+C_2\cos(\beta x).$$

Il en résulte que la solution générale de (7) est :

$$y(x)=e^{\alpha x}\left[C_1\sin(\beta x)+C_2\cos(\beta x)\right].$$

Exercice 3. Trouvez les solutions générales des équations :

$$y'' + y' - y = 0 \qquad \text{et} \qquad y'' + y' + y = 0 .$$

Exercice 4. Trouvez la solution $y = y(x)$ de l'équation différentielle $y'' + 2y' + y = 0$, qui est telle que $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$.

§4. Une méthode pour résoudre l'équation avec second membre (E) quand on connaît une solution particulière jamais nulle de l'équation sans second membre (E_0).

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Reprenons l'équation générale avec second membre et à coefficients variables :

$$(E) \qquad a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = f(x)$$

où a, b, c et f sont des fonctions continues sur I, et $a(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$. Supposons connue une solution particulière $y_0(x)$ de l'équation sans second membre associée à (E) :

$$(E_0) \qquad a(x)y_0''(x) + b(x)y_0'(x) + c(x)y_0(x) = 0 .$$

Pour résoudre (E), faisons le changement de fonction inconnue : $y(x) = y_0(x)z(x)$. Pour qu'il ait un sens, nous supposons que $y_0(x)$ n'est jamais nulle sur I, sinon $z(x) = \frac{y(x)}{y_0(x)}$ ne serait pas même définie aux points où $y_0(x)$ s'annulerait. En reportant dans (E) :

$$y = y_0 z \;, \quad y' = y_0' z + y_0 z' \;, \quad y'' = y_0'' z + 2y_0' z' + y_0 z''$$

on obtient l'équation différentielle en z équivalente à (E) :

$$a y_0 z'' + (2a y_0' + b y_0) z' + (a y_0'' + b y_0' + c y_0) z = f(x),$$

c'est-à-dire, compte-tenu de (E_0),

$$(10) \qquad a(x)y_0(x)\, z'' + [2a(x)y_0'(x) + b(x)y_0(x)]\, z' = f(x),$$

équation linéaire du premier ordre pour la fonction inconnue z'. Nous avons appris à la Leçon n°8 à trouver la solution générale d'une telle équation, ou tout au moins à ramener le problème à deux quadratures. En effectuant ce travail sur (10), on aboutit à une formule du type :

$$z'(x) = \varphi(x) + C\psi(x).$$

Une dernière quadrature fournit $z(x) = \int[\varphi(x) + C\psi(x)]dx$

et : (11) $\qquad y(x) = y_0(x)\left[\Phi(x) + C\,\Psi(x) + D\right]$,

où C et D sont deux constantes arbitraires : (11) est la solution générale de (E).

Remarque. Si on dispose d'une solution particulière $y_0(x)$ de (E_0) qui s'annule parfois sur I, on pourra appliquer la méthode sur tout sous-intervalle J de I où $y_0(x)$ ne s'annule pas, obtenant ainsi la solution générale de (E) sur J.

Exemple 5. Cherchons la solution générale de l'équation à coefficients constants, mais avec second membre :

$$(12) \qquad y'' - 5y' + 6y = \sin x.$$

L'équation caractéristique de (E_0) est $r^2 - 5r + 6 = 0$; elle a pour racines 2 et 3. Nous prendrons $y_0(x) = e^{2x}$, qui n'est jamais nulle sur $\mathbb{R}$, et qui est une solution de $y'' - 5y' + 6y = 0$.

Posons : $y = e^{2x}z$; $y' = e^{2x}(2z + z')$; $y'' = e^{2x}(4z + 4z' + z'')$.

En reportant dans (12), on obtient l'équation en z équivalente à (12) :

$$(13) \qquad z'' - z' = e^{-2x}\sin x.$$

Pour résoudre (13), linéaire du premier ordre en z', la méthode de variation de la constante conduit à poser :

$$z' = C(x)e^x, \qquad z'' = C'(x)e^x + C(x)e^x,$$

ce qui rend (13) équivalente à

$$C'(x) = e^{-3x}\sin x,$$

donc, d'après les formules de la leçon n°4, Exemple 9, page 43, à :

$$C(x) = \frac{e^{-3x}}{10}(-3\sin x - \cos x) + C_1$$

d'où

$$z'(x) = C_1 e^x + \frac{e^{-2x}}{10}(-3\sin x - \cos x).$$

D'après les mêmes formules, on en déduit que :

$$z(x) = C_1 e^{x} + \frac{e^{-2x}}{10}(\sin x + \cos x) + C_2,$$

puis enfin que :

$$y(x) = C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x} + \frac{1}{10}(\sin x + \cos x),$$

où C_1 et C_2 sont des constantes arbitraires.

Exercice 5. Soit l'équation à coefficients variables :

$$(14) \qquad (x^2-1)y'' - 2xy' + 2y = \frac{(x+1)^2}{x}.$$

Vérifiez que $y_0(x) = x$ est une solution de l'équation homogène associée à (14). En déduire la solution générale de (14) pour $x > 1$.

§ 5. Recherche directe de solutions particulières d'équations à coefficients constants ayant certains seconds membres.

Commençons par une remarque très simple :

Proposition 3. Soit $y_1(x)$ une solution particulière de l'équation avec second membre :

$$(E) \qquad a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = f(x)$$

Alors la solution générale de l'équation avec second membre (E) s'obtient en ajoutant à $y_1(x)$ la solution générale de l'équation sans second membre :

$$(E_0) \qquad a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0$$

associée à (E).

Démonstration. Retranchons de (E) l'hypothèse :

$$a(x)y_1'' + b(x)y_1' + c(x)y_1 = f(x).$$

On obtient : $\quad a(x)[y''-y_1''] + b(x)[y'-y_1'] + c(x)[y-y_1] = 0.$

Ainsi y est solution de (E) si et seulement si $y-y_1$ est solution de (E_0), ce qu'il fallait démontrer.

De plus la recherche de solutions particulières de l'équation (E) pourra être morcelée, si le second membre se présente sous forme d'une somme de fonctions plus simples :

Proposition 4. Soit l'équation :

$$(E) \quad a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_p(x)$$

Supposons que, pour tout $k = 1, 2, \ldots, p$, on connaisse une solution particulière $y_k(x)$ de l'équation :

$$(E_k) \quad a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = f_k(x).$$

Alors la fonction :

$$y(x) = y_1(x) + y_2(x) + \cdots + y_p(x)$$

est une solution particulière de (E).

Démonstration. Il suffit d'additionner les hypothèses :

$$\begin{cases} a(x)y_1'' + b(x)y_1' + c(x)y_1 = f_1(x) \\ a(x)y_2'' + b(x)y_2' + c(x)y_2 = f_2(x) \\ \text{etc.} \cdots\cdots \\ a(x)y_p'' + b(x)y_p' + c(x)y_p = f_p(x). \end{cases}$$

Revenons maintenant aux équations avec second membre, mais à coefficients constants :

$$(15) \quad ay'' + by' + cy = f(x)$$

où $a \neq 0$, b et c sont des constantes réelles. Bien sûr nous savons, d'après le Théorème p.103-104, trouver des solutions explicites de l'équation sans second membre associée à (15), puis, si $y_0(x)$ est l'une d'elles, ramener, par le changement de fonction $y(x) = y_0(x)z(x)$, la résolution de (15) à trois quadratures (voir le § 4). Cependant, pour certaines formes particulières (mais très fréquentes dans les applications à la Physique) du second membre $f(x)$, on connaît d'avance la forme d'une solution particulière $y_1(x)$ de (15), on peut préciser une telle y_1 par une méthode de coefficients indéterminés, puis appliquer la Proposition 3, pour obtenir la solution générale de (15).

Nous dressons ci-après une liste de cas où il en est ainsi, sans en donner ici la justification générale. Vous pourrez l'utiliser comme une liste de recettes pour les Exercices posés en cours de route.

Soit donc (15) $ay'' + by' + cy = f(x)$ $(a \neq 0)$

une équation à coefficients constants, et soit :

$$(16) \quad ar^2 + br + c = 0$$

l'équation caractéristique de l'équation homogène associée à (15).

1°) Si $f(x)$ est un polynôme de degré n, l'équation (15) a une solution particulière polynôme $y_1(x)$ dont le degré est :

n si $c \neq 0$; $n+1$ si $c = 0$ et $b \neq 0$; $n+2$ si $b = c = 0$.

D'ailleurs, dans ce dernier cas ($b = c = 0$), l'équation est simplement $y'' = \frac{f(x)}{a}$ = un polynôme de degré n ; il suffit de prendre pour y_1 la primitive d'une primitive de ce polynôme.

Dans les autres cas on trouve $y_1(x)$ par la méthode des coefficients indéterminés. Si par exemple $c \neq 0$, on pose :

$$y_1(x) = A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \dots + A_1 x + A_0,$$

qu'on dérive deux fois. On reporte dans (15), dont le premier membre devient ainsi un polynôme de degré n. En identifiant, coefficient par coefficient, ce polynôme à $f(x)$, on obtient successivement les valeurs de $A_n, A_{n-1}, \dots, A_1, A_0$.

Exercice 6. Déterminez un trinôme du second degré

$$y(x) = Ax^2 + Bx + C$$

tel que $$y'' - 5y' + 6y = x^2$$

2°) Si $f(x) = e^{kx}$, où k est un nombre réel, l'équation (15) admet la solution particulière :

$$y_1(x) = \frac{e^{kx}}{ak^2 + bk + c}, \text{ ou } = \frac{x e^{kx}}{2ak + b}, \text{ ou } = \frac{x^2 e^{kx}}{2a}$$

selon que k n'est pas racine, ou est racine simple, ou est racine double, de (16).

<u>Exercice 7</u>. Quelle est la solution générale de l'équation :

$$y'' - 5y' + 6y = e^{2x} \quad ?$$

3°) Si $f(x) = Q(x)e^{kx}$, où k est un nombre réel et où Q est un polynôme de degré n, l'équation (15) admet une solution particulière du type $y_1(x) = P(x)e^{kx}$, où $P(x)$ est un polynôme qui a pour degré :

$$\begin{cases} n & \text{si } k \text{ n'est pas racine de l'équation caractéristique (16);} \\ n+1 & \text{si } k \text{ est racine simple de (16) ;} \\ n+2 & \text{si } k \text{ est racine double de 16.} \end{cases}$$

<u>Exercice 8</u>. Trouvez une solution particulière de l'équation :

$$y'' + 2y' + y = xe^{-x}.$$

Déduisez-en la solution générale.

4°) Si $f(x) = e^{\alpha x}[C\sin(\beta x) + D\cos(\beta x)]$, où α, β, C et D sont des nombres réels, et $\beta \neq 0$, l'équation (15) admet une solution particulière du type :

$y_1(x) = e^{\alpha x}[A\sin(\beta x) + B\cos(\beta x)]$, si $\alpha \pm i\beta$ ne sont pas racines de (16);

$y_1(x) = xe^{\alpha x}[A\sin(\beta x) + B\cos(\beta x)]$, si $\alpha \pm i\beta$ sont racines de (16).

<u>Exercice 9</u>. Trouvez une solution particulière de l'équation :

$$y'' - 2y' + 2y = e^{x}\sin x \quad .$$

5°) Si $f(x) = Q(x)e^{\alpha x}[C\sin(\beta x) + D\cos(\beta x)]$, où α, β, C, D sont des nombres réels, $\beta \neq 0$, et où Q est un polynôme de degré n, alors l'équation (15) admet une solution particulière du type :

$$y_1(x) = P(x)e^{\alpha x}[A\sin(\beta x) + B\cos(\beta x)],$$

où P est un polynôme de degré n, ou $n+1$, selon que $\alpha \pm i\beta$ n'est pas, ou est, racine de l'équation caractéristique (16)

<u>Exercice 10</u>. Trouvez la solution générale de l'équation

$$y'' - 2y' + 2y = xe^{x}\sin x - \tfrac{1}{2}e^{x}\cos x \,.$$

<u>Rassemblons en une seule rubrique</u> les cinq cas particuliers de seconds membres $f(x)$ cités ci-dessus :

Soit : $$f(x) = Q(x)\, e^{\alpha x} \left(C \sin(\beta x) + D \cos(\beta x) \right),$$

où : $\begin{cases} Q \text{ est un polynôme de degré } n \text{ (éventuellement } n=0\text{)} ; \\ \alpha, \beta, C \text{ et } D \text{ sont des nombres réels (éventuellement nuls).} \end{cases}$

Alors l'équation différentielle à coefficients constants, où $a \neq 0$,

$$(15) \qquad ay'' + by' + cy = f(x),$$

d'équation caractéristique associée :

$$(16) \qquad ar^2 + br + c = 0,$$

a une solution particulière du type :

$$(17) \qquad y_1(x) = P(x)\, e^{\alpha x} \left(A \sin(\beta x) + B \cos(\beta x) \right),$$

où $P(x)$ est un polynôme qui a pour degré :

$\begin{cases} n \text{ si } \alpha + i\beta \text{ n'est pas racine de (16)} ; \\ n+1 \text{ si } \alpha + i\beta \text{ est racine simple de (16)} ; \\ n+2 \text{ si : } \quad \beta = 0 \text{ et } \alpha \text{ est racine double de (16).} \end{cases}$

Les constantes A et B et les coefficients du polynôme $P(x)$ dans (17) s'obtiennent par la <u>méthode des coefficients indéterminés</u>.

§6. <u>Applications à la Physique et à la Mécanique</u>.

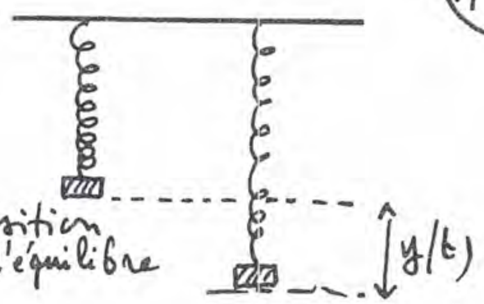
Désignons la variable par t (= le temps) plutôt que par x. Soit un système physique ou mécanique dont la situation à l'instant t est repérée par les valeurs $y = y(t)$ d'un certain paramètre (écart par rapport à une position d'équilibre, différence de potentiel électrique etc...). Il arrive souvent que l'évolution du système obéisse à une équation différentielle du type :

$$(18) \qquad m\, y''(t) + 2c\, y'(t) + k^2\, y(t) = f(t),$$

où $m > 0$, $c \geq 0$ et k sont des constantes réelles.

<u>Exemple 6</u>. Une masse m suspendue par un ressort est

soumise :



- à une force de rappel $-k^2y(t)$ proportionnelle à l'écart $y(t)$ vis-à-vis de sa position d'équilibre ;
- à une force de frottement $-2cy'(t)$, due à la résistance du milieu, proportionnelle et de sens inverse à la vitesse ;
- à une force extérieure $f(t)$ [pesanteur, oscillations forcées].

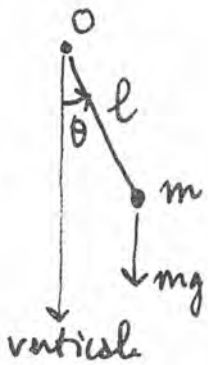
Alors (18) ne fait que traduire l'équation fondamentale de la Dynamique :

$$m\vec{\Gamma} = \vec{F}$$

par :

$$my'' = -2cy' - k^2y + f(t) .$$

<u>Exemple</u> 7. Un pendule simple de masse m a de faibles oscillations par rapport à la verticale, d'angle $\theta(t)$, avec résistance du milieu. L'équation du mouvement est :



$$m\ell\theta''(t) = -mg\sin\theta - 2c\theta'(t)$$

où ℓ est la longueur du pendule et g l'accélération de la pesanteur. Si θ est petit on remplace $\sin\theta$ par θ, d'où l'équation du type (18) :

$$m\theta'' + \frac{mg}{\ell}\theta + 2c\theta' = 0$$

<u>Exemple</u> 8. La décharge d'un condensateur de capacité C dans un circuit de résistance R, d'inductance L, se traduit pour la différence de potentiel $y(t)$ par l'équation :

$$Ly''(t) + Ry'(t) + \frac{1}{C}y(t) = f(t),$$

où le second membre $f(t)$ dépend des forces électriques extérieures appliquées au circuit.

Reprenons l'étude de l'équation :

$$(18) \qquad my''(t) + 2cy'(t) + k^2y(t) = f(t)$$

en en dégageant les circonstances notables du point de vue physique ou mécanique. L'équation caractéristique associée :

$$(19) \qquad m r^2 + 2 c r + k^2 = 0$$

a ses racines soient réelles négatives, soient non réelles complexes conjuguées. Posons :

$$h = \frac{c}{m} \quad ; \quad \lambda = \frac{k}{\sqrt{m}} .$$

I. Mouvement libre, non forcé, c'est-à-dire tel que $\boxed{f(t) \equiv 0}$.

Les racines de (19) étant :

$$\begin{cases} r = -h \pm i \sqrt{\lambda^2 - h^2} & \text{si} \quad 0 \leq h \leq \lambda \\ r = -h \pm \sqrt{h^2 - \lambda^2} & \text{si} \quad h \geq \lambda \end{cases} ,$$

on est amené à distinguer quatre cas.

Cas ①. Si $h = 0$ (pas de frottement), on a $r = \pm i \lambda$, donc

$$y(t) = A \sin(\lambda t - \varphi) .$$

Il s'agit d'un mouvement oscillatoire simple, de fréquence

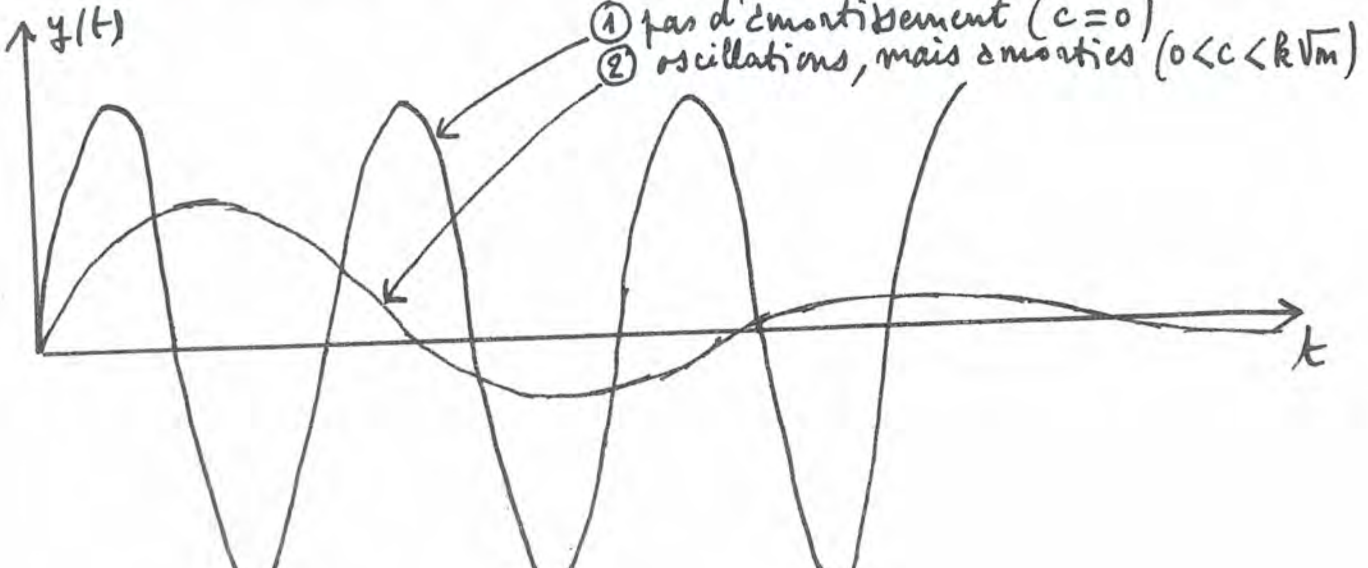
$$\lambda = \frac{k}{\sqrt{m}} ,$$

qui est la fréquence propre, naturelle, du système.

Cas ②. Si $0 < h < \lambda$ (frottement faible), on a $r = -h \pm i\sqrt{\lambda^2 - h^2}$,

donc :
$$y(t) = A e^{-ht} \sin(\beta t - \varphi) ,$$

où $\beta = \sqrt{\lambda^2 - h^2}$. On a un mouvement oscillatoire amorti de fréquence $\beta = \sqrt{\lambda^2 - h^2}$ moindre que la fréquence naturelle λ



<u>Cas ③</u>. Si $h = \lambda$ (amortissement <u>critique</u>), (18) a la racine double $r = -h$, donc :

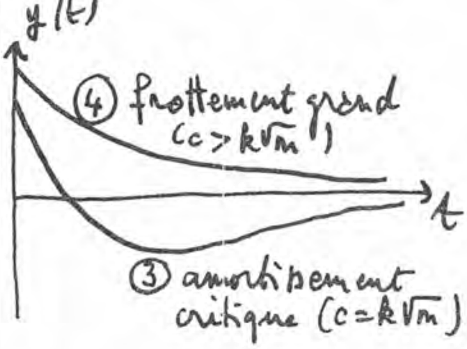
$$y(t) = e^{-ht}\,(C_1 t + C_2).$$

<u>Cas ④</u>. Si $h > \lambda$. En posant :

$r_1 = h + \sqrt{h^2-\lambda^2}$, $r_2 = h - \sqrt{h^2-\lambda^2}$,

on a $r_1 > 0$, $r_2 > 0$ et :

$$y(t) = C_1 e^{-r_1 t} + C_2 e^{-r_2 t}.$$



Dans les cas ③ et ④, <u>il n'y a plus d'oscillations</u>, le frottement étant trop important. Avec une décroissance exponentielle, le mouvement tend vers un retour à l'équilibre.

II. <u>Mouvement forcé</u> ($\boxed{f(t) \not\equiv 0}$).

Nous nous contenterons d'étudier le cas (fréquent) d'une excitation périodique

$$f(t) = A_0 \sin(\omega t)$$

de fréquence ω, d'amplitude A_0.

Supposons d'abord qu'on n'a pas à la fois $\lambda = \omega$ et $c = 0$. Alors $i\omega$ n'est pas racine de (19). Donc (18) a une solution particulière du type :

$$y_1(t) = A_1 \sin(\omega t - \varphi) ,$$

où on calcule que :

$$A_1 = \frac{\lambda^2 A_0}{\sqrt{(\lambda^2-\omega^2)^2 + 4\omega^2 h^2}} \quad ; \quad tg\,\varphi = \frac{2\omega h}{\lambda^2-\omega^2}.$$

Ainsi, à la sortie du système, un mouvement vibratoire $y_1(t)$ <u>de même période ω que l'excitation</u> se superpose à l'un des mouvements libres précédemment étudiés (cas ① à ④). Mais, sauf si $c = 0$, ce mouvement libre est transitoire et finit par être négligeable pour cause d'amortissement. Le <u>facteur d'amplification</u> $\frac{A_1}{A_0}$ est d'autant plus grand que h est petit. Pour h assez petit donné, il passe par un maximum quand le fréquence d'excitation ω passe par une certaine valeur (facile à calculer), appelée fréquence de <u>résonance</u>. Si le frottement est nul ($h=0$), le facteur d'amplification $\frac{A_1}{A_0}$ devient infini quand la fréquence d'excitation ω est égale à la fréquence λ, fréquence propre du système : c'est le phénomène de <u>résonance pure</u>. Si h (c'est-à-dire le frottement) est grand, le facteur $\frac{A_1}{A_0}$ est <1 ; les amplitudes sont diminuées, spécialement pour les grandes fréquences.

§ 7. Solutions des Exercices proposés dans ces deux Leçons.

<u>Exercice</u> 1. Si $y=e^{2x}$, on a : $y'=2e^{2x}$ et $y''=4e^{2x}$. Donc $y''-5y'+6y=(4-10+6)e^{2x}=0$. De même, si $y=e^{3x}$, on a : $y'=3e^{3x}$ et $y''=9e^{3x}$. Donc $y''-5y'+6y=(9-15+6)e^{3x}=0$. Plus généralement toute $y(x)=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$ est solution. Pour avoir $y'(0)=0$ et $y(0)=1$, il suffit que : $2C_1+3C_2=0$ et $C_1+C_2=1$, c'est-à-dire $C_1=3$, $C_2=-2$. Donc $y(x)=3e^{2x}-2e^{3x}$.

<u>Exercice</u> 2. Si
$$y(x)=e^{\alpha x}\cos(\beta x)$$
$$y'(x)=e^{\alpha x}\left[\alpha\cos(\beta x)-\beta\sin(\beta x)\right],$$
$$y''(x)=e^{\alpha x}\left[(\alpha^2-\beta^2)\cos(\beta x)-2\alpha\beta\sin(\beta x)\right]$$
il est clair que : $y''-2\alpha y'+(\alpha^2+\beta^2)y=0$.

<u>Exercice</u> 3. L'équation caractéristique de $y''+y'-y=0$ est $r^2+r-1=0$; elle a deux racines réelles distinctes $\frac{-1\pm\sqrt5}{2}$. La solution générale de l'équation différentielle $y''+y'-y=0$ est donc :
$$y(x)=e^{-x/2}\left[C_1e^{\frac{\sqrt5}{2}x}+C_2e^{-\frac{\sqrt5}{2}x}\right].$$

L'équation caractéristique de $y''+y'+y=0$ est $r^2+r+1=0$; elle a deux racines complexes conjuguées $-\frac12\pm i\frac{\sqrt3}{2}$. La solution générale de l'équation différentielle $y''+y'+y=0$ est donc :
$$y(x)=e^{-x/2}\left[C_1\sin\tfrac{\sqrt3}{2}x+C_2\cos\tfrac{\sqrt3}{2}x\right].$$

<u>Exercice</u> 4. L'équation caractéristique de $y''+2y'+y=0$ est

$r^2+2r+1=0$; elle a -1 comme racine double. La solution générale de l'équation différentielle est donc: $y=e^{-x}(C_1x+C_2)$

Pour que $y(0)=1$ et $y'(0)=3$, il faut et il suffit que $C_2=1$ et $C_1-C_2=3$, donc que $C_1=4$ et $C_2=1$. Donc: $y(x)=e^{-x}(4x+1)$.

Exercice 5. Si $y_0(x)=x$, on a $y_0'=1$ et $y_0''=0$, donc:

$$(x^2-1)y_0''-2xy_0'+2y_0=-2x+2x=0.$$

Posons dans (14):

$$y=y_0(x)z=xz \quad ; \quad y'=z+xz' \quad ; \quad y''=2z'+z''.$$

Alors (14) équivaut à:

$$(20) \qquad x(x^2-1)z''-2z'=\frac{(x+1)^2}{x}.$$

(20) est une équation linéaire du premier ordre en z'. On résout d'abord l'équation sans second membre associée à (20):

$$z''=\frac{2}{x(x^2-1)}z'=\left(-\frac{2}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}\right)z',$$

qui a pour solution générale:

$$z'=C\,e^{\operatorname{Log}(x-1)+\operatorname{Log}(x+1)-2\operatorname{Log}x}$$

c'est-à-dire: $(21) \qquad z'=C\dfrac{(x^2-1)}{x^2}$.

Puis on "fait varier" la constante C dans (21), c'est-à-dire on pose:

$$z'(x)=C(x)\frac{x^2-1}{x^2}$$

dans (20), qui, après ce changement de fonction, devient:

$$x(x^2-1)C'(x)\frac{x^2-1}{x^2}=\frac{(x+1)^2}{x},$$

c'est-à-dire: $C'(x)=\dfrac{1}{(x-1)^2}$, donc $C(x)=-\dfrac{1}{x-1}+C_1$,

où C_1 est une constante arbitraire. En reportant dans (21):

$$z'=C_1\frac{x^2-1}{x^2}-\frac{x+1}{x^2}, \text{ donc } z(x)=C_1\left(x+\frac{1}{x}\right)-\operatorname{Log}x+\frac{1}{x}+C_2,$$

d'où enfin, en revenant à la fonction inconnue initiale $y=xz$:

$$y(x)=C_1(x^2+1)+C_2x+1-x\operatorname{Log}x,$$

Exercice 6. Si $y = Ax^2+Bx+C$, on a : $y' = 2Ax+B$ et $y'' = 2A$, donc $y''-5y'+6y = 6Ax^2+(6B-10A)x+2A-5B+6C$ sera identique à x^2 si et seulement si :

$$6A=1 \;;\quad 6B-10A=0 \;;\quad 2A-5B+6C=0\,,$$

donc pour $A=\frac{1}{6}$, $B=\frac{5}{18}$, $C=\frac{19}{108}$.

Exercice 7. 2 est racine simple de l'équation caractéristique $r^2-5r+6=0$. L'équation a donc pour solution particulière $-xe^{2x}$. L'autre racine caractéristique est 3 ; l'équation sans second membre a pour solution générale $C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$. L'équation proposée a pour solution générale : $y(x) = C_1e^{2x}+C_2e^{3x} - xe^{2x}$.

Exercice 8. -1 est racine double de l'équation caractéristique $r^2+2r+1=0$. La solution générale de l'équation sans second membre est $e^{-x}(C_1x+C_2)$. On sait d'autre part qu'il y a une solution particulière de l'équation avec second membre de la forme $y=(Ax^3+Bx^2+Cx+D)e^{-x}$. On peut même supposer $C=D=0$ car le morceau $(Cx+D)e^{-x}$ s'incorpore à la solution de l'équation sans second membre. En reportant $y=(Ax^3+Bx^2)e^{-x}$ dans l'équation, on trouve $A=\frac{1}{6}$ et $B=0$. Donc l'équation proposée a $y_1(x)=\frac{x^3}{6}e^{-x}$ comme solution particulière, et comme solution générale :

$$y(x) = e^{-x}\left(\frac{x^3}{6}+C_1x+C_2\right).$$

Exercice 9. $1+i$ est racine de l'équation caractéristique $r^2-2r+2=0$. L'équation a une solution particulière du type :

$$y_1(x) = xe^{x}(A\cos x+B\sin x).$$

En reportant on trouve $A=-\frac{1}{2}$ et $B=0$. Donc $y_1(x) = -\frac{x}{2}e^{x}\cos x$.

Exercice 10. Après calculs on trouve la solution particulière :

$$y_1(x) = -\frac{x^2}{4}\cos x\,,$$

d'où la solution générale $y(x) = e^{x}\left[\left(C_1-\frac{x^2}{4}\right)\cos x + C_2\sin x\right]$.

Courbes définies par un paramétrage

Le Calcul différentiel et intégral a des applications intéressantes à la géométrie des courbes, planes ou gauches. Les courbes que nous savons étudier jusqu'à présent (AN 01, Leçon n° 11) sont planes, et définies par une équation du type $y = f(x)$, dans laquelle y figure de façon très particulière. Avant d'étudier de nouvelles applications géométriques de l'Analyse, il est bon d'élargir le champ, en disposant d'une définition des courbes où la variable principale ne soit plus forcément l'abscisse x, mais un paramètre t – qui sera, par exemple, le temps, dans certaines courbes trajectoires en Mécanique – dont dépend le point $M = M(t)$ quand on suit sa variation sur la courbe. Analytiquement la courbe sera donnée par deux fonctions

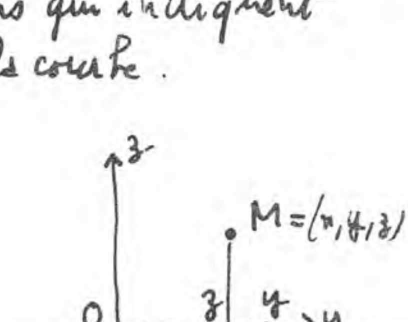
$$x = x(t) \quad ; \quad y = y(t)$$

si elle est plane, et par trois fonctions

$$x = x(t) \; ; \quad y = y(t) \; ; \quad z = z(t)$$

si elle est dans l'espace à trois dimensions, fonctions qui indiquent comment évoluent les coordonnées du point sur la courbe.

§ 1. Définition et premiers exemples



Le plan $\mathbb{R}^2$ est muni de son système d'axes de référence Ox, Oy. Simultanément nous traiterons les questions dans l'espace $\mathbb{R}^3$ à trois dimensions, avec son trièdre de référence $Oxyz$. Un point M de $\mathbb{R}^2$ (resp. de $\mathbb{R}^3$) est repéré par ses coordonnées cartésiennes : $M = (x, y)$ (resp. $M = (x, y, z)$)

Soit I un intervalle (non vide et non réduit à un point) de $\mathbb{R}$, pris comme intervalle de variation du paramètre t. On appelle arc de courbe continu dans le plan $\mathbb{R}^2$ la donnée de deux fonctions continues sur I :

(1) $\quad x = x(t) \quad ; \quad y = y(t)$.

Quand t varie dans I, le point $M = M(t)$ de coordonnées $(x(t), y(t))$ décrit un graphe dans $\mathbb{R}^2$. Les relations (1) s'appellent les équations paramétriques de ce graphe. Si les fonctions $x = x(t)$ et $y = y(t)$ admettent des dérivées premières $x'(t)$ et $y'(t)$ continues sur I on dit que l'arc est de classe C^1. Remarquons aussi qu'un sens de parcours direct est automatiquement défini sur l'arc, qui consiste à suivre $M = M(t)$ dans le sens des t croissants.

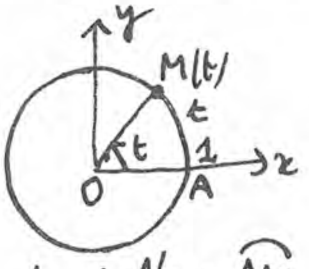
De même on définit les arcs de courbes continus dans $\mathbb{R}^3$, en ajoutant la troisième coordonnée, par les équations paramétriques :

$$x = x(t) \quad ; \quad y = y(t) \quad ; \quad z = z(t)$$

où t parcourt I ; ceux qui sont de classe C^1 ; et le sens de parcours direct.

Exemple 1. Dans $\mathbb{R}^2$, si on prend comme paramètre t l'abscisse x elle-même, alors poser $x = t$, $y = y(t)$ revient à étudier la courbe d'équation $y = y(x)$ au sens de AN01, Leçon n° 11. La théorie que nous nous apprêtons à développer va donc englober la précédente.

Exemple 2. Soit $\mathbb{R}^2$ euclidien, donc Oxy orthonormé. On a vu en AN01, Leçon n°4, que les coordonnées d'un point quelconque M du cercle trigonométrique (de centre O, de rayon un) s'expriment en fonction de la longueur t de l'arc $\widehat{AM}$ [ou, ce qui revient au même, de la mesure t de l'angle $(\vec{Ox}, \vec{OM})$] par les formules :

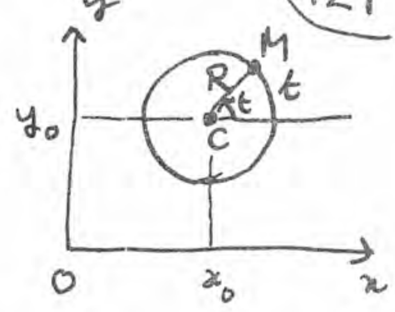


$$x = \cos t \quad ; \quad y = \sin t, \qquad (0 \leq t < 2\pi).$$

Ces formules sont les équations paramétriques du cercle de centre O, de rayon un, cercle dont l'équation cartésienne est par ailleurs :

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Plus généralement, soit $\Omega = (x_0, y_0)$ un point de $\mathbb{R}^2$, et R un nombre > 0. Le cercle de centre Ω, de rayon R, ensemble des points M dont la distance à C vaut R, a pour équation cartésienne :



$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$$

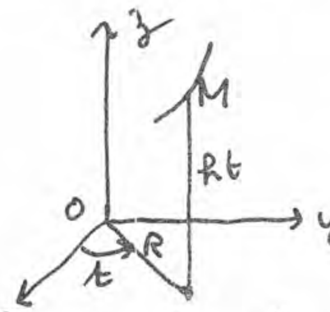
et pour équations paramétriques :

$x=x_0+R\cos t$, $y=y_0+R\sin t$; $0\leq t<2\pi$.

<u>Exemple</u> 3. Dans $\mathbb{R}^3$ on donne un point $M_0=(x_0,y_0,z_0)$ et un vecteur non nul $\vec{V}=(\alpha,\beta,\gamma)$. La <u>droite</u> D <u>passant par</u> M_0, <u>de direction</u> $\vec{V}$, ensemble des points $M=(x,y,z)$ tels que $\overrightarrow{M_0M}$ est proportionnel à $\vec{V}$, donc tels qu'il existe $t\in\mathbb{R}$ vérifiant $\overrightarrow{M_0M}=t\vec{V}$, a pour équations paramétriques :

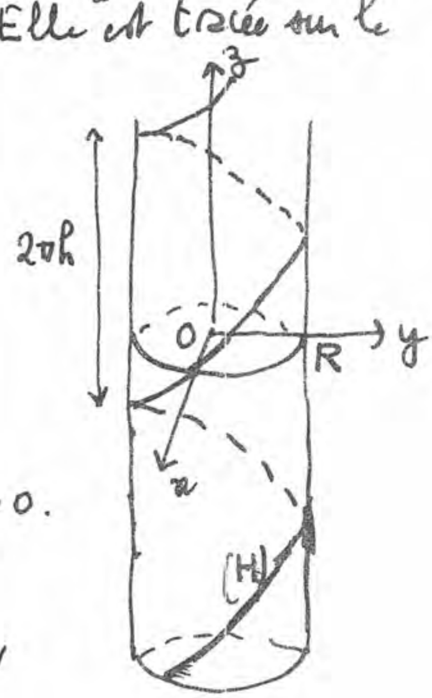
$x=x_0+\alpha t$, $y=y_0+\beta t$, $z=z_0+\gamma t$, où $-\infty<t<+\infty$.

<u>Exemple</u> 4. Dans $\mathbb{R}^3$ euclidien, soit la courbe (H) d'équations paramétriques :



$x=R\cos t$, $y=R\sin t$, $z=ht$,

où $-\infty<t<+\infty$, et où R et h sont deux constantes >0 données. Cette courbe est appelée <u>hélice</u> circulaire, de rayon R, de <u>pas</u> $2\pi h$. Elle est tracée sur le cylindre $x^2+y^2=R^2$. On obtient une <u>spire</u> de l'hélice en faisant varier t sur $[0,2\pi[$ seulement, les autres spires s'en déduisent par des translations $2\pi nh$, où $n\in\mathbb{Z}$, parallèlement à Oz.



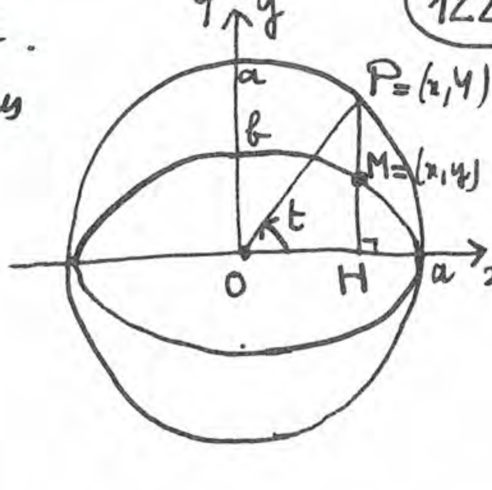
<u>Exemple</u> 5. Soit $\mathbb{R}^2$ euclidien. Soient $a>b>0$. La courbe d'équations paramétriques :

$x=a\cos t$, $y=b\sin t$; $0\leq t<2\pi$,

c'est-à-dire d'équation cartésienne

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

est l'<u>ellipse</u> de centre O, d'axes de symétrie Ox, Oy, de longueur



de grand axe $2a$, de longueur de petit axe $2b$.
Si on considère le cercle d'équations paramétriques

$$x = a\cos t, \quad Y = a\sin t,$$

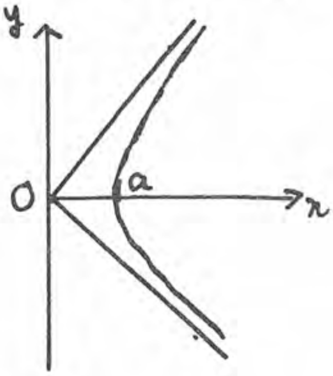
on passe du point $P=(x,Y)$ de ce cercle au point $M=(x,y)$ de l'ellipse qui a même abscisse x que P, en remplaçant Y par $y=\frac{b}{a}Y$, c'est-à-dire par une "affinité" d'axe Ox, de rapport $\frac{b}{a}$.

<u>Exemple</u> 6. Soit $\mathbb{R}^2$ euclidien. Soient a et b deux nombres réels >0.
La courbe d'équations paramétriques :

$x = a\,\mathrm{ch}\,t$, $y = b\,\mathrm{sh}\,t$; $-\infty < t < +\infty$

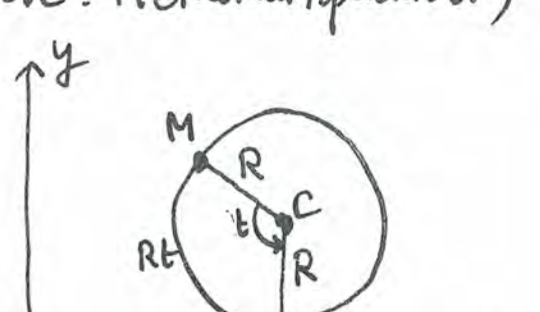
est l'une des deux branches (celle qui correspond aux $x>0$) de l'<u>hyperbole</u> d'équation cartésienne :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$



Elle est asymptote aux demi-droites $y = \pm\frac{b}{a}x$, $x>0$.

<u>Exemple</u> 7. Une roue de bicyclette roulant sur un sol horizontal, on s'intéresse à la courbe décrite par la valve. Mathématiquement, dans $\mathbb{R}^2$ euclidien, un cercle de rayon R "roule sans glisser" sur l'axe Ox, ce qui signifie que, un point M étant marqué sur ce cercle, au cours du mouvement on a constamment :



$$\overline{OI} = \text{longueur de l'arc } MI \text{ sur le cercle.}$$

Si C est le centre du cercle, I son point de contact avec Ox, prenons comme paramètre : $t=$ l'angle $(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CI})$. Alors l'arc $\widehat{MI}$ est de longueur Rt, donc constamment $\overline{MI} = Rt$. En projetant sur les axes l'égalité vectorielle :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{CM},$$

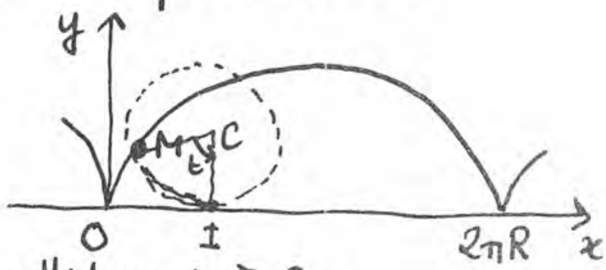
on trouve les équations paramétriques de la trajectoire de M :

$$x = Rt + R\cos\left(\frac{3\pi}{2} - t\right) \quad ; \quad y = R + R\sin\left(\frac{3\pi}{2} - t\right),$$

c'est-à-dire :

$$x = R(t - \sin t) \quad ; \quad y = R(1 - \cos t) \quad ; \quad -\infty < t < +\infty.$$

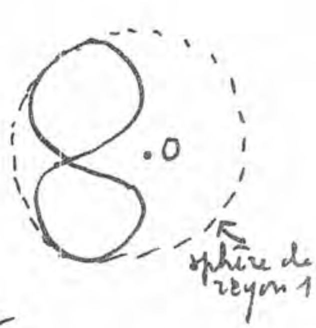
Cette courbe est la <u>cycloïde</u>. De Blaise Pascal déjà elle a fait l'objet d'une étude célèbre (cf. ses oeuvres complètes dans la collection "L'Intégrale"). Quand t varie entre 0 et 2π, le point M décrit une <u>arche</u> de la cycloïde, les autres arches s'en déduisent par des translations de valeur $2n\pi R$, où $n \in \mathbb{Z}$, parallèlement à Ox.



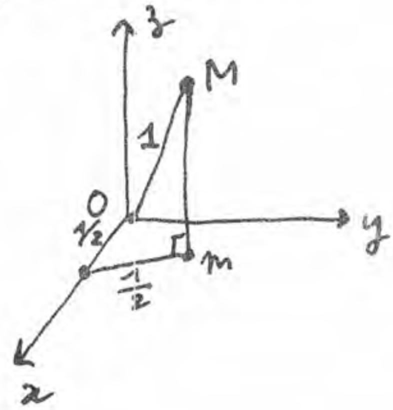
<u>Exemple</u> 8. Dans $\mathbb{R}^3$ euclidien, la courbe d'équations paramétriques :

$$x = \cos^2 t, \quad y = \cos t \sin t, \quad z = \sin t,$$

où $0 \leq t < 2\pi$, est l'intersection de la sphère $x^2+y^2+z^2=1$ de centre O, de rayon 1, avec le cylindre circulaire $x^2+y^2-x=0$ (dont la projection sur xOy est le cercle de centre $(\frac{1}{2}, 0)$, de rayon $\frac{1}{2}$). On l'appelle la <u>fenêtre de Viviani</u>. Elle a la forme d'un huit gauchi pour épouser la forme de la sphère sur laquelle elle est tracée.



C'est l'ensemble des points M de cette sphère, dont la projection horizontale m est à distance $1/2$ du point $(1/2, 0, 0)$.



§2. <u>Tangente. Etude au voisinage d'un point.</u>

1°) <u>Tangente en un point régulier.</u>

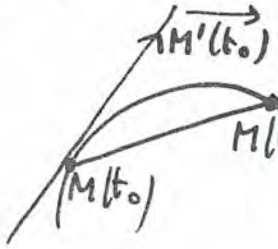
Plaçons-nous dans $\mathbb{R}^3$ pour fixer les idées ; si la courbe est plane, dans $\mathbb{R}^2$, le lecteur n'aura qu'à omettre tout ce qui concerne la troisième coordonnée. Soit Γ :

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \qquad ; \; t \in I$$

un arc de courbe de classe C^1. On dit que le point $M(t_0)$ sur Γ est régulier si l'un au moins des trois nombres $x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)$ n'est pas nul. Dans ce cas, le vecteur de composantes $(x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$ est noté $\frac{\overrightarrow{dM}}{dt_0}$ ou $\overrightarrow{M'(t_0)}$ et appelé le vecteur tangent à Γ au point $M(t_0)$. La droite issue du point $M(t_0)$ et ayant pour direction $\overrightarrow{M'(t_0)}$ s'appelle la tangente à Γ au point $M(t_0)$.

Proposition 1. Si le point $M(t_0)$ est régulier, la tangente à Γ au point $M(t_0)$ est la position limite, quand $t \in I$, $t \neq t_0$, tend vers t_0, de la droite $M(t_0)M(t)$, qui joint le point $M(t_0)$ au point voisin $M(t)$.

Démonstration. En effet cette droite pivote autour du point $M(t_0)$ tout en portant le vecteur $\frac{\overrightarrow{M(t_0)M(t)}}{t - t_0}$, dont les composantes :



$$\frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}, \quad \frac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0}, \quad \frac{z(t) - z(t_0)}{t - t_0}$$

tendent vers les composantes $(x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$ du vecteur fixe $\frac{\overrightarrow{dM}}{dt_0}$.

Des équations paramétriques de cette tangente sont :

$$x = x(t_0) + x'(t_0)(t - t_0) \; ; \quad y = y(t_0) + y'(t_0)(t - t_0) \; ; \; z = z(t_0) + (t - t_0) z'(t_0).$$

Si la courbe est plane, l'équation cartésienne de la tangente est :

$$[x - x(t_0)]\, y'(t_0) - [y - y(t_0)]\, x'(t_0) = 0,$$

et celle de la normale, c'est-à-dire de la perpendiculaire à la tangente, menée du point $M(t_0)$, est :

$$[x - x(t_0)]\, x'(t_0) + [y - y(t_0)]\, y'(t_0) = 0.$$

Exemples 9) La normale au cercle :

$$x = R\cos t, \quad y = R\sin t \qquad (0 \leq t < 2\pi)$$

au point $M = M(t)$ est la droite d'équation cartésienne en (X, Y) :

$$-(X - R\cos t) R\sin t + (Y - R\sin t) R\cos t = 0,$$

c'est-à-dire

$$Y\cos t - X\sin t = 0.$$

Elle passe par le centre O du cercle.

10) Le vecteur tangent à l'<u>hélice</u> circulaire :

$x = R\cos t$, $y = R\sin t$, $z = ht$ $(-\infty < t < +\infty)$

au point $M = M(t)$ a pour composantes :

$-R\sin t$, $R\cos t$, h

et pour longueur $\sqrt{R^2+h^2}$. Son produit scalaire avec le vecteur unitaire $(0,0,1)$ de l'axe Oz vaut :

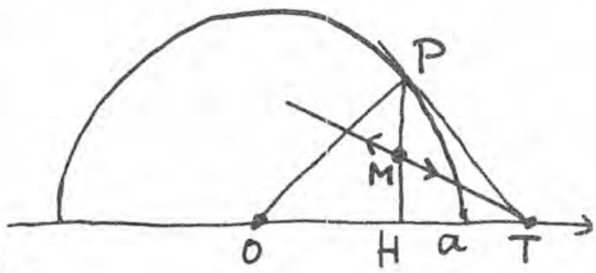
$$(-R\sin t)0 + (R\cos t)0 + h.1 = h.$$

On en déduit que la tangente à l'hélice fait avec la direction de Oz l'angle constant $\theta = \text{Arc}\cos \frac{h}{\sqrt{R^2+h^2}}$.

11) La tangente MT à l'<u>ellipse</u>

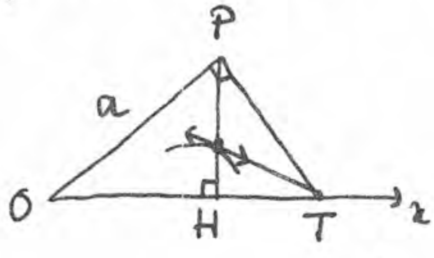
$x = a\cos t$, $y = b\sin t$ $(0 \le t < 2\pi)$

au point $M = M(t)$ a pour équation cartésienne en X, Y :



$$(X - a\cos t)b\cos t + (Y - b\sin t)a\sin t = 0.$$

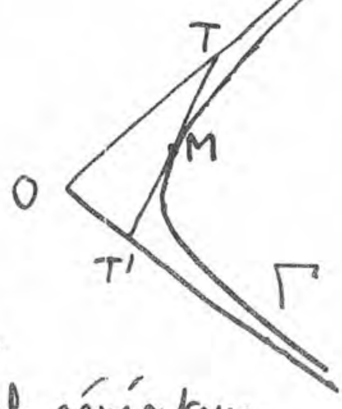
Elle coupe Ox en un point T d'abscisse X obtenue pour $Y=0$, donc telle que $X\cos t = a$, par conséquent au même point T de Ox où passe la tangente au cercle de centre O, de rayon a, au point P de même abscisse que M, dont M est l'image par l'affinité d'axe Ox, de rapport $\frac{b}{a}$. Cette remarque fournirait une construction géométrique de la tangente à l'ellipse au point courant M.



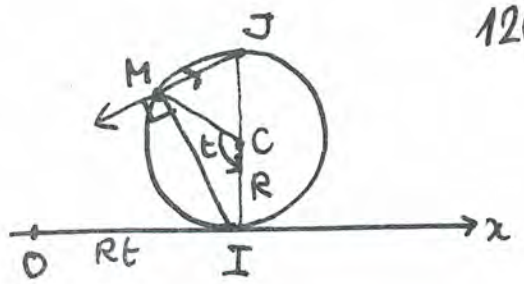
<u>Exercice 1</u>. Soit la branche d'<u>hyperbole</u> Γ :

$x = a\,\text{ch}\,t$, $y = b\,\text{sh}\,t$; $-\infty < t < +\infty$.

Vérifiez que la tangente au point courant M de Γ coupe les asymptotes en deux points T et T' tels que M soit le milieu du segment TT'.



<u>Exercice 2</u> Vérifiez que la normale en M à la <u>cycloïde</u> passe par le point de contact I du cercle générateur



avec Ox. Par conséquent la tangente en M à la cycloïde passe par le point J diamétralement opposé à I sur ce cercle.

Exercice 3. Montrez que la fenêtre de Viviani :

$$x = \cos^2 t, \quad y = \cos t \sin t, \quad z = \sin t \qquad (0 \leq t < 2\pi)$$

a un "point double" obtenu pour $t = 0$ et $t = \pi$, et que les deux tangentes en ce point double se coupent à angle droit.

2) Etude au voisinage d'un point (éventuellement singulier) d'une courbe plane.

Soit une courbe plane Γ d'équations paramétriques :

$$x = x(t), \quad y = y(t) \qquad (t \in I)$$

que nous étudions au voisinage d'un point $t_0 \in I$. Nous supposerons que les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ ont sur I autant de dérivées successives $x^{(k)}(t)$ et $y^{(k)}(t)$ qu'il sera nécessaire. Nous notons $\overrightarrow{M^{(k)}(t)}$ le vecteur de composantes $(x^{(k)}(t), y^{(k)}(t))$. On peut écrire les deux formules de Taylor-Young (cf. AN01, Leçon n° 10, Thm 1) :

$$\begin{cases} x(t_0+h) = x(t_0) + \dfrac{h}{1!}x'(t_0) + \cdots\cdots + \dfrac{h^n}{n!}x^{(n)}(t_0) + \varepsilon_1(h)\,h^n \\ y(t_0+h) = y(t_0) + \dfrac{h}{1!}y'(t_0) + \cdots\cdots + \dfrac{h^n}{n!}y^{(n)}(t_0) + \varepsilon_2(h)\,h^n \end{cases},$$

où $\varepsilon_1(h)$ et $\varepsilon_2(h)$ tendent vers 0 quand $h \neq 0$ tend vers 0, sous forme d'une seule formule de Taylor-Young vectorielle :

$$\overrightarrow{M(t_0)M(t_0+h)} = \frac{h}{1!}\overrightarrow{M'(t_0)} + \frac{h^2}{2!}\overrightarrow{M''(t_0)} + \cdots + \frac{h^n}{n!}\overrightarrow{M^{(n)}(t_0)} + h^n\,\vec{\varepsilon}(h),$$

où le vecteur $\vec{\varepsilon}(h)$ tend vers 0 quand $h \neq 0$ tend vers 0.

Ceci dit, supposons (ce qui est le cas usuel) que les vecteurs dérivées successives $\overrightarrow{M^{(k)}(t_0)}$ ne sont pas tous nuls. Soit p le plus petit entier ≥ 1 tel que $\overrightarrow{M^{(p)}(t_0)} \neq \vec{0}$. Supposons de plus que les $\overrightarrow{M^{(k)}(t_0)}$ pour $k > p$ ne sont pas tous colinéaires à $\overrightarrow{M^{(p)}(t_0)}$. Soit

q le plus petit entier $> p$ tel que $\overrightarrow{M^{(q)}}(t_0)$ soit non colinéaire à $\overrightarrow{M^{(p)}}(t_0)$. Le vecteur $\overrightarrow{M^{(p)}}(t_0)$ s'appelle le <u>vecteur tangent</u> à Γ au point $M(t_0)$; la droite issue de $M(t_0)$ qui porte ce vecteur s'appelle <u>la tangente</u> à Γ au point $M(t_0)$. Bien entendu ces définitions généralisent, au cas où p n'est plus nécessairement égal à 1, celles de la p.124.

Posons : $\vec{e} = \overrightarrow{M^{(p)}}(t_0)$; $\vec{f} = \overrightarrow{M^{(q)}}(t_0)$.

Alors il existe des constantes $\lambda_{p+1}, \lambda_{p+2}, \ldots, \lambda_{q-1}$ telles que :

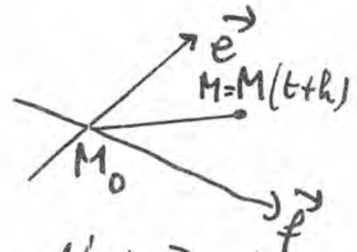
$$\overrightarrow{M^{(k)}}(t_0) = \lambda_k \vec{e} \quad \text{pour } p+1 \leq k \leq q-1,$$

et la formule de Taylor-Young au voisinage de $M(t_0)$ s'écrit :

$$(2) \qquad \overrightarrow{M(t_0)M(t_0+h)} = \frac{h^p}{p!}\left(1 + \frac{\lambda_{p+1}}{(p+1)!}h + \cdots + \frac{\lambda_{q-1}}{(q-1)!}h^{q-1}\right)\vec{e} + \frac{h^q}{q!}\vec{f} + h^{q+1}\overrightarrow{\varepsilon(h)},$$

où $\vec{\varepsilon}(h)$ tend vers 0 quand $h \to 0$, $h \neq 0$.

Pour étudier la courbe au voisinage de $M_0 = M(t_0)$, prenons un repère d'origine M_0 et d'axes $\vec{e}$, $\vec{f}$. Si ξ et η sont les coordonnées de $M = M(t+h)$ dans ce repère, on a d'après (2) :



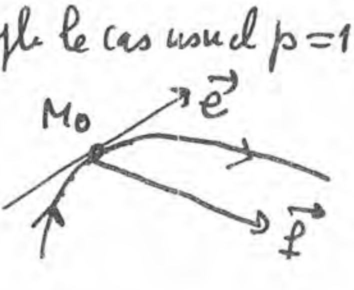
$$(3) \qquad \xi = \frac{h^p}{p!}\left(1 + \varepsilon_1(h)\right) \ ; \ \eta = \frac{h^q}{q!}\left(1 + \varepsilon_2(h)\right),$$

où $\varepsilon_1(h)$ et $\varepsilon_2(h)$ tendent vers 0 quand $h \neq 0$ tend vers 0. On en déduit la

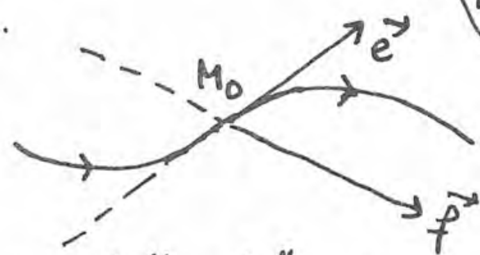
<u>Proposition</u> 2. 1°) La tangente à Γ au point $M(t_0)$ est la position limite de la droite qui joint $M(t_0)$ au point voisin $M(t_0+h)$, quand $h \neq 0$ tend vers 0. (Rappelons que cette tangente porte le vecteur $\vec{e}$).

2°) La position de Γ au voisinage du point $M_0 = M(t_0)$ dépend du couple d'entiers (p, q). On distingue 4 cas :

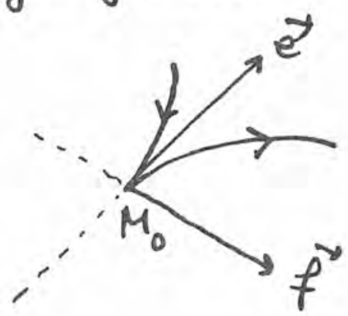
<u>Premier cas</u> : p impair, q pair (par exemple le cas usuel $p=1$, $q=2$). Alors la courbe reste d'un même côté de la tangente, le côté indiqué par $\vec{f}$.



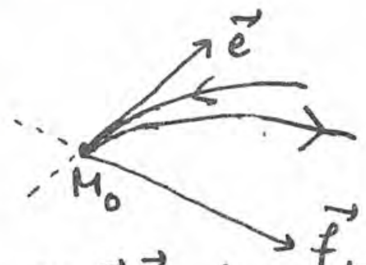
<u>Deuxième cas</u> : p impair, q impair. On a un <u>point d'inflexion</u> ; la courbe traverse sa tangente en M_0. Une condition nécessaire (pas suffisante) pour qu'il en soit ainsi est que, pour $t=t_0$, on ait : $x'y''-y'x''=0$.



<u>Troisième cas</u> : p pair, q impair. On a un <u>rebroussement de première espèce</u> ; la courbe traverse sa tangente, mais en restant d'un même côté de $\vec{f}$ (le côté indiqué par $\vec{e}$).



<u>Quatrième cas</u> : p pair, q pair. On a un <u>rebroussement de deuxième espèce</u> ; la courbe reste d'un même côté de $\vec{f}$, mais sans traverser sa tangente.



<u>Démonstrations</u>. Elle est maintenant facile, compte-tenu de (3). Dans le repère $M_0\vec{e}\vec{f}$, la pente $\frac{\eta}{\xi}$ de la droite M_0M est équivalente à $\frac{q!}{p!}h^{q-p}$, donc tend vers 0, quand $h\neq 0$ tend vers 0, ce qui prouve le 1°). Pour prouver le 2°), on remarque que, quand h passe par 0 du négatif au positif, d'après (3), pour h assez petit, ξ a le signe de h^p et η celui de h^q, ce qui, selon les parités de p et de q, fournit les quatre cas analysés au 2°).

<u>Remarque sur les branches infinies de Γ</u>.

Il se produit, pour une courbe plane Γ d'équations paramétriques $x=x(t)$, $y=y(t)$, une <u>branche infinie</u> lorsque, pour $t>t_0$, $t\to t_0$, ou pour $t<t_0$, $t\to t_0$, ou pour $t\to+\infty$, ou pour $t\to-\infty$, l'une au moins des deux fonctions $x(t)$, $y(t)$ tend vers $\pm\infty$. Ces branches s'étudient selon les principes énoncés en AN 01, Leçon n° 11 : recherche des directions asymptotiques (notamment par l'étude de $\lim \frac{y(t)}{x(t)}$), des branches paraboliques, et des asymptotes.

Exercice 4. Etudier et construire la courbe d'équations paramétriques

$$x = t^3(3t-2) \quad ; \quad y = t(t-1) \qquad (t \in \mathbb{R})$$

Notamment mettre en évidence le point d'inflexion, le point de rebroussement, et les branches paraboliques.

Exercice 5. Etudier les branches infinies de :

$$x = \frac{t(3t^2-1)}{4(1-t^2)} \quad , \quad y = \frac{t^4}{2(1-t^2)} \quad , \text{ où } t \in \mathbb{R}, t \neq \pm 1.$$

§ 3. Longueur d'un arc de courbe

Nous avons déjà rencontré cette question à propos de la longueur d'un arc de cercle (AN 01, Leçon n°4), notion qui est à la base de la trigonométrie et de la définition du nombre π. Le calcul intégral en donne une solution générale.

Soit Γ : $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, où $a \leq t \leq b$, un arc de courbe de classe C^1 dans $\mathbb{R}^3$, où le paramètre t varie sur un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$. Si σ est une subdivision de $[a,b]$:

$$\sigma = \{ a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b \},$$

considérons les points $M(t_0), M(t_1), \ldots, M(t_{n-1}), M(t_n)$ sur Γ. La ligne polygonale $M(t_0)M(t_1)\ldots M(t_{n-1})M(t_n)$ inscrite dans Γ a pour longueur euclidienne la somme des longueurs de ses côtés, c'est-à-dire :

$$S_\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} \left([x(t_{i+1})-x(t_i)]^2 + [y(t_{i+1})-y(t_i)]^2 + [z(t_{i+1})-z(t_i)]^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Or, d'après la formule des accroissements finis (AN01, Leçon n°6, p 69), il existe dans chaque $[t_i, t_{i+1}]$ des nombres ξ_i, η_i, ζ_i tels que :

$$x(t_{i+1})-x(t_i) = (t_{i+1}-t_i)x'(\xi_i) \quad ; \quad y(t_{i+1})-y(t_i) = (t_{i+1}-t_i)y'(\eta_i) ;$$

$$z(t_{i+1})-z(t_i) = (t_{i+1}-t_i)z'(\zeta_i).$$

Ainsi :

$$S_\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1}-t_i) \left([x'(\xi_i)]^2 + [y'(\eta_i)]^2 + [z'(\zeta_i)]^2 \right)^{1/2}.$$

En suivant les principes développés à la Leçon n°3, on pourrait montrer que, quand l'écart $\operatorname{Max}_i(t_{i+1}-t_i)$ de la subdivision σ tend vers 0, alors S_σ a pour limite $\int_a^b \left([x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2 \right)^{1/2} dt$.

Il est donc naturel de poser les

Définitions. 1°) Soit Γ un arc de classe C^1 dans $\mathbb{R}^3$ euclidien :

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \quad , \text{ où } a \leq t \leq b .$$

On appelle longueur de Γ le nombre :

$$\ell(\Gamma) = \int_a^b \left([x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2 \right)^{\frac{1}{2}} dt .$$

2°) Soit Γ un arc de classe C^1 dans $\mathbb{R}^2$ euclidien :

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad , \text{ où } a \leq t \leq b .$$

On pose :

$$\ell(\Gamma) = \int_a^b \left([x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 \right)^{1/2} dt .$$

Si plus particulièrement Γ est donné par $y = y(x)$, où $a \leq x \leq b$, on pose :

$$\ell(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2(x)} \, dx .$$

Exemple 12. Calculons la longueur de l'arche de cycloïde :

$$x = R(t - \sin t) \quad , \quad y = R(1 - \cos t) \quad , \quad 0 \leq t < 2\pi .$$

On a $\quad x' = R(1 - \cos t) \quad , \quad y' = R \sin t \quad ,$

donc : $x'^2 + y'^2 = R^2 \left[(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t \right] = 2R^2(1 - \cos t) = 4R^2 \sin^2 \frac{t}{2}$.

Par suite : $\ell(\Gamma) = \int_0^{2\pi} 2R \sin \frac{t}{2} \, dt = 4R \left[-\cos \frac{t}{2} \right]_{t=0}^{t=2\pi} = 8R$

Exercice 6. Calculez la longueur d'une spire d'hélice circulaire.

Exemple 13. La longueur d'un arc d'ellipse Γ

$$x = a \cos t \quad , \quad y = b \sin t \quad ; \quad 0 \leq t \leq \varphi$$

où $0 < \varphi \leq 2\pi$ est donné, s'exprime par l'intégrale "elliptique" :

$$\ell(\Gamma) = \int_0^{\varphi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} \, dt ,$$

qu'on ne peut pas ramener à des fonctions élémentaires, mais pour lesquelles il existe des tables numériques.

Exercice 7. Montrez que la longueur de la fenêtre de Viviani s'exprime par une intégrale elliptique.

§ 4. Solutions des exercices proposés dans cette Leçon.

Exercice 1. La tangente au point $M(t) = (a\,\mathrm{ch}\,t, b\,\mathrm{sh}\,t)$ de la branche d'hyperbole a pour équation :

$$a\,\mathrm{sh}\,t\,Y - b\,\mathrm{ch}\,t\,X + ab = 0 .$$

Elle coupe l'asymptote $Y = \frac{b}{a}X$ au point $T = \left(\frac{a}{\mathrm{ch}\,t - \mathrm{sh}\,t}, \frac{b}{\mathrm{ch}\,t - \mathrm{sh}\,t}\right)$ $= (ae^t, be^t)$. Elle coupe l'asymptote $Y = -\frac{b}{a}X$ au point $T' = \left(\frac{a}{\mathrm{ch}\,t + \mathrm{sh}\,t}, \frac{b}{\mathrm{ch}\,t+\mathrm{sh}\,t}\right) = (ae^{-t}, be^{-t})$. Puisque $\mathrm{ch}\,t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$ et $\mathrm{sh}\,t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$, il est clair que M est le milieu du segment TT'.

Exercice 2. On vérifie que l'équation de la normale :

$$[X - R(t - \sin t)](1 - \cos t) + [Y - R(1 - \cos t)]\sin t = 0$$

est satisfaite par les coordonnées $X = Rt$, $Y = 0$ du point I.

Exercice 3. Pour $t = 0$ et pour $t = \pi$, la fenêtre de Viviani passe par le même point $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$ de $\mathbb{R}^3$. Mais le vecteur tangent :

$$x' = -2\sin t\cos t, \qquad y' = \cos^2 t - \sin^2 t, \qquad z' = \cos t$$

est $(0, 1, 1)$ pour $t = 0$, et $(0, 1, -1)$ pour $t = \pi$. Ces deux vecteurs tangents ont leur produit scalaire nul.

Exercice 4.

$$\begin{aligned}
x &= t^3(3t-2) \;; & y &= t(t-1) \\
x' &= 6t^2(2t-1) \;; & y' &= 2t-1 \\
x'' &= 36t\left(t-\tfrac{1}{3}\right) \;; & y'' &= 2 \\
x''' &= 12(6t-1) \;; & y''' &= 0 .
\end{aligned}$$

On a le tableau de variations :

t	$-\infty$		0		$1/2$		1		$+\infty$
x'		$-$	0	$-$	0			$+$	
y'		$-$		$-$	0			$+$	
x	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-1/16$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-1/4$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

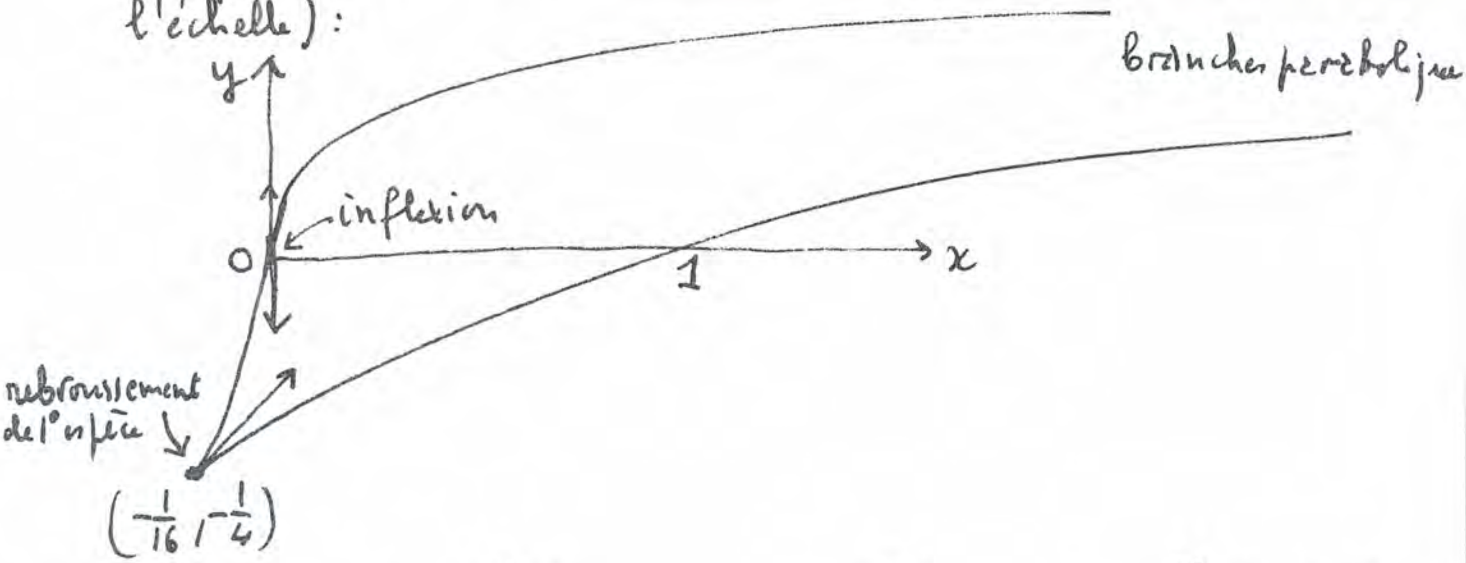
On a $\overrightarrow{M'}(0) = (0,-1)$, $\overrightarrow{M''}(0) = (0,-2)$, $\overrightarrow{M'''}(0) = (-12, 0)$

donc le point O est point d'inflexion $(p=1, q=3)$, de pente verticale.

Pour $t=\frac{1}{2}$, on a $\overrightarrow{M'}(\frac{1}{2})=\vec{0}$, $\overrightarrow{M''}(\frac{1}{2})\neq\vec{0}$ et $\overrightarrow{M'''}(\frac{1}{2})$ non colinéaire à $\overrightarrow{M''}(\frac{1}{2})$, donc, pour $t=\frac{1}{2}$, le point $(-\frac{1}{16}, -\frac{1}{4})$ est un rebroussement de première espèce, où la tangente est de pente $\frac{2}{3}$.

Quand $t\to\pm\infty$, $x(t)$ et $y(t)$ tendent vers $+\infty$, mais $\frac{y(t)}{x(t)}$ tend vers 0. On a donc deux branches paraboliques de direction Ox.

L'aspect de la courbe est le suivant (on n'a pas cherché à respecter l'échelle) :



Exercice 5. 1°) Si $t\to+\infty$, $x\sim-\frac{3}{4}t$ et $y\sim-\frac{t^2}{2}$ tendent vers $-\infty$, alors que $\frac{y}{x}$ tend vers $+\infty$: branche parabolique Oy.

2°) Si $t\to-\infty$, x tend vers $+\infty$ et y vers $-\infty$, alors que $\frac{y}{x}$ tend vers $-\infty$: branche parabolique Oy.

3°) Si $t\to1$, x et y deviennent infinis, et $\frac{y}{x}=\frac{2t^3}{3t^2-1}$ tend vers 1, alors que $\frac{y}{x}-1=\frac{2t^3-3t^2+1}{3t^2-1}$ tend vers 0. La courbe admet la première bissectrice comme asymptote.

4°) Si $t\to-1$, x et y tendent vers ∞, et $\frac{y}{x}$ vers -1, alors que $\frac{y}{x}+1=\frac{2t^3+3t^2-1}{3t^2-1}$ tend vers 0 : deuxième bissectrice comme asymptote.

Exercice 6. $\int_0^{2\pi}\sqrt{R^2+h^2}\,dt = 2\pi\sqrt{R^2+h^2}$.

Exercice 7. $\int_0^{2\pi}(\sin^2 2t+\cos^2 2t+\sin^2 t)^{1/2}\,dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{2\sin^2 t+\cos^2 t}\,dt$.

Résolution de quelques types d'équations différentielles du premier ordre non linéaires

Une équation différentielle générale du premier ordre :

$$(1) \qquad F(x, y, y') = 0$$

a, le plus souvent, une famille de solutions $y = y(x\,;C)$ dépendant d'une constante arbitraire. Nous l'avons constaté à la Leçon n°8 dans le cas très particulier des équations linéaires. Les courbes représentatives des solutions de (1), qu'on appelle les <u>courbes intégrales</u> de (1), forment donc en général une famille à un paramètre de courbes dans le plan. Ce point de vue géométrique éclaire souvent la nature de l'équation (1).

<u>Exercice 1</u>. Montrez que, pour une équation linéaire,

$$y' = a(x)y + b(x),$$

si x_0 est fixé, les tangentes aux points d'abscisse x_0 des diverses courbes intégrales passent par un point fixe.

Quand (1) n'est plus linéaire, il n'est pas toujours possible de présenter les solutions sous forme résolue en y :

$$y = y(x\,;C),$$

et, pour les exprimer, on doit souvent faire appel à des équations cartésiennes d'un type plus compliqué :

$$\varphi(x, y\,; C) = 0,$$

ou à des équations paramétriques :

$$x = x(t\,;C) \qquad , \qquad y = y(t\,;C) .$$

Dans cette Leçon nous verrons quelques types d'équations du premier ordre non linéaires, dont on peut trouver les solutions ou, tout au moins, ramener leur recherche à des quadratures.

§1. <u>Equations à variables séparées</u>.

Ce sont les équations du type

$$(2) \qquad a(y)\, y' = b(x) \qquad ,$$

où $a = a(y)$ est continue dans un intervalle J de variation de y, et $b = b(x)$ est continue dans un intervalle I de variation de x. Soit $A(y)$ une primitive de $a(y)$ sur J, et $B(x)$ une primitive de $b(x)$ sur I. Soit $y = y(x)$ une fonction dérivable dans un sous-intervalle S de I, telle que, quand on reporte $y(x)$ et $y'(x)$ dans (2), on obtienne une identité pour tout $x \in S$. Alors $y = y(x)$ est une solution de (2) dans S. Or, vu le théorème de dérivation d'une fonction composée, le premier membre de (2) :

$$a(\,y(x)\,)\; y'(x)$$

est ainsi devenu la dérivée dans S de la fonction $A\big(y(x)\big)$, et le deuxième membre est la dérivée de $B(x)$ dans S. Ainsi (2) est équivalente à :

$$(3) \qquad A(y) = B(x) + C,$$

où C est une constante arbitraire. La formule (3) présente les solutions de (2) sous forme d'équation cartésienne des courbes intégrales. On ira plus vite en utilisant pour (2) la notation différentielle :

$$(2) \qquad a(y)\,dy = b(x)\,dx,$$

et en prenant les primitives des deux membres sous la forme :

$$\int a(y)\,dy = \int b(x)\,dx,$$

qui équivaut à (3).

<u>Exemple</u> 1. Cherchons les solutions de l'équation :

$$(4) \qquad (1-x^2)\,y'^2 = 1-y^2$$

dans le carré $-1 < x < 1$; $-1 < y < 1$. En séparant les variables elle s'écrit :

$$\pm \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

et a pour solutions :

$$\pm \int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

c'est-à-dire : $\pm \operatorname{Arc\,sin} y = \operatorname{Arc\,sin} x + C$.

En prenant les sinus des deux membres, il vient :

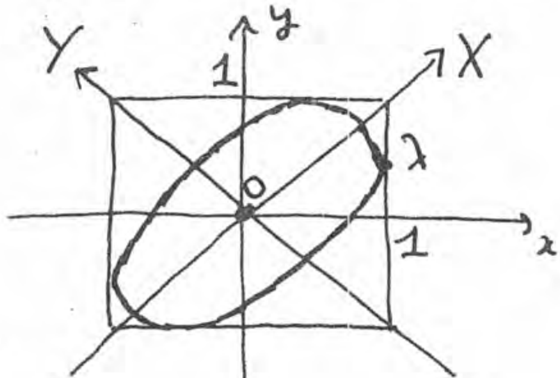
$$\pm y = x \cos C + \cos(\operatorname{Arc\,sin} x) \sin C,$$

ou $\pm y = x \cos C + \sqrt{1-x^2} \sin C$,

ce qui, en posant $\cos C = \lambda$, donne :

$$(5) \qquad x^2 + y^2 - 2\lambda xy = 1 - \lambda^2$$

où $|\lambda| < 1$. La famille des courbes intégrales dans le carré $-1 < x, y < 1$ dépend du paramètre λ, et leur équation cartésienne est (5). Prenons comme nouveaux axes de coordonnées OX et OY les bissectrices de Ox et Oy, c'est-à-dire faisons le changement de coordonnées



$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(X - Y), \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}}(X+Y).$$

Alors (5) devient :

$$(6) \qquad \frac{X^2}{1+\lambda} + \frac{Y^2}{1-\lambda} = 1,$$

où on reconnaît l'équation d'une <u>ellipse</u> d'axes de symétrie OX, OY, tangente aux quatre côtés du carré (car la droite $x=1$ coupe la courbe (5) en deux points confondus au point $(1, \lambda)$).

<u>Exercice</u> 2. Séparez les variables dans l'équation différentielle

$$y' = e^{x+y}.$$

Déduisez-en la solution générale.

§2. <u>Equations où y ne figure pas</u>.

Soit une équation du type

$$(7)\quad F(x, y') = 0.$$

Supposons qu'on sache exprimer les coordonnées (X, Y) du point courant de la courbe d'équation cartésienne $F(X, Y) = 0$ par des équations paramétriques: $\quad X = \varphi(t), \qquad Y = \psi(t).$

Le long des courbes intégrales on aura:

$$x = \varphi(t) \quad , \quad \frac{dy}{dx} = \psi(t).$$

$x = \varphi(t)$ étant déjà fonction de t, on fait apparaître y aussi comme fonction de t, en remarquant que $\frac{dx}{dt} = \varphi'(t)$, donc que:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = \psi(t)\varphi'(t),$$

et

$$y(t) = \int \psi(t)\varphi'(t)\,dt.$$

Si donc $G(t)$ est une primitive particulière de $\psi(t)\varphi'(t)$, les courbes intégrales de (7) seront données par les équations paramétriques:

$$x = \varphi(t) \quad , \quad y = \int \psi(t)\varphi'(t)\,dt = G(t) + C,$$

où C est une constante arbitraire. Les courbes intégrales se déduisent de l'une d'elles par des translations parallèles à Oy.

Exemple 2. Soit l'équation:

$$(8)\quad y'^3 - x^2 y' + x^4 = 0.$$

On trouve des équations paramétriques de la courbe:

$$Y^3 - X^2 Y + X^4 = 0$$

en posant $Y = tX$, d'où:

$$X = t - t^3 \quad , \quad Y = t^2 - t^4.$$

Dans (8) on pose donc: $x = t - t^3$ et $y' = \frac{dy}{dx} = t^2 - t^4$,

d'où $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = (t^2 - t^4)(1 - 3t^2) = 3t^6 - 4t^4 + t^2.$

L'équation (8) a donc pour courbes intégrales celles qui ont pour équations paramétriques:

$$x = t - t^3 \quad ; \quad y = 3\frac{t^7}{7} - 4\frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3} + C.$$

§ 3. Equations où x ne figure pas.

Ce sont les équations du type :

$$(9) \qquad F(y', y) = 0 .$$

Supposons qu'on connaisse une représentation paramétrique de la courbe d'équation cartésienne $F(X, Y) = 0$ sous la forme

$$X = \varphi(t) \quad , \qquad Y = \psi(t) .$$

Le long des courbes intégrales, on aura :

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(t) \qquad , \qquad y = \psi(t) .$$

$y = \psi(t)$ étant déjà fonction connue de t, faisons apparaître x aussi comme fonction de t, en remarquant que $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\varphi(t)}$ et $\frac{dy}{dt} = \psi'(t)$, donc :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dy}\frac{dy}{dt} = \frac{\psi'(t)}{\varphi(t)} ,$$

d'où :

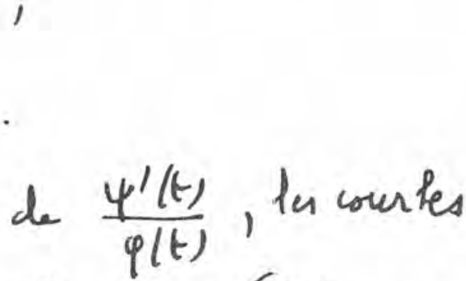
$$x(t) = \int \frac{\psi'(t)}{\varphi(t)} dt .$$

Si $H(t)$ est une primitive particulière de $\frac{\psi'(t)}{\varphi(t)}$, les courbes intégrales de (9) sont données par les équations paramétriques :

$$x = \int \frac{\psi'(t)}{\varphi(t)} dt = H(t) + C \qquad ; \qquad y = \psi(t) .$$

Elles se déduisent de l'une d'elles par des translations parallèles à Ox.

Exemple 3. Dans $\mathbb{R}^2$ euclidien cherchons les courbes appelées tractrices, c'est-à-dire, pour un nombre réel $a > 0$ donné, celles qui sont telles que : $\quad MT = a \quad$ où T désigne l'intersection avec Ox de la tangente au point courant M de la courbe.



Comme $\overline{OT} = x - \frac{y}{y'}$, la condition imposée se traduit par l'équation différentielle : $y^2 + \frac{y^2}{y'^2} = a^2$, ou encore :

$$(10) \qquad y'^2(a^2-y^2) = y^2 .$$

Posons $y = a\sin t$. Alors, d'après (10), $\quad y' = \frac{dy}{dx} = \varepsilon \operatorname{tg} t$

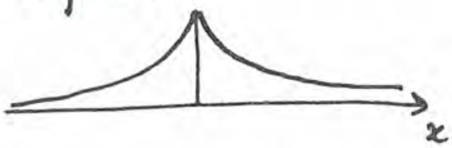
où $\varepsilon = \pm 1$, donc:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dy}\frac{dy}{dt} = \frac{\varepsilon a \cos t}{\operatorname{tg} t} = \frac{\varepsilon a \cos^2 t}{\sin t} = \frac{\varepsilon a (1-\sin^2 t)}{\sin t}$$

et $\quad x(t) = \varepsilon a \left(\int \frac{dt}{\sin t} - \int \sin t \, dt \right) = \varepsilon a \left[\operatorname{Log} \left| \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right| + \cos t + C \right].$

Les tractrices ont donc pour équations paramétriques:

$$\begin{cases} x = \pm a \left[\operatorname{Log} \left| \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right| + \cos t + C \right] \\ y = a \sin t \end{cases}$$



où $0 < t < \pi$.

<u>Exercice</u> 3. Résoudre l'équation:

$$y'^4 - y'^2 y + y^3 = 0$$

§ 4. Equations homogènes en x, y

Considérons d'abord le cas particulier d'une équation du type:

$$(11) \qquad y' = F\left(\frac{y}{x}\right).$$

On pose $y = tx$, et l'on détermine x, puis y, en fonction de t.

En effet, d'après (11),

$$F(t) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx} x + t ,$$

d'où l'équation à variables séparées entre x et t:

$$F(t) = \frac{dt}{dx} x + t$$

ou

$$\frac{dx}{x} = \frac{dt}{F(t)-t} .$$

Si $G(t)$ est une primitive particulière de $\frac{1}{F(t)-t}$, les courbes intégrales de (11) auront pour équations paramétriques:

$$x = e^{\int \frac{dt}{F(t)-t}} = C e^{G(t)} , \quad y = C t e^{G(t)} .$$

Elles se déduisent de l'une d'elle par homothéties de centre O.

Plus généralement, si on a une équation du type :

$$(12) \qquad F\left(y', \frac{y}{x}\right) = 0,$$

et si on connaît une représentation paramétrique de la courbe $F(X,Y)=0$:

$$X = \varphi(t) \quad ; \quad Y = \psi(t),$$

(12) équivaut à :

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(t) \quad ; \quad y = x\,\psi(t).$$

De la deuxième de ces relations, on tire :

$$\frac{dy}{dx} = \psi(t) + x\,\psi'(t)\frac{dt}{dx},$$

et en égalant à la première, on obtient, pour déterminer x en fonction de t, l'équation à variables séparées :

$$\frac{dx}{x} = \frac{\psi'(t)\,dt}{\varphi(t)-\psi(t)}.$$

Si $G(t)$ est l'une des primitives $\int \frac{\psi'(t)\,dt}{\varphi(t)-\psi(t)}$, on obtient les solutions de (12) sous la forme :

$$x = C e^{G(t)} \quad , \quad y = C\,\psi(t)\,e^{G(t)}.$$

<u>Exercice 4</u>. Trouvez les solutions de l'équation différentielle :

$$x y'(2y-x) = y^2,$$

et déterminez la nature des courbes intégrales.

§5. Equations de Bernoulli

C'est une équation du type

$$(13) \qquad y' + P(x)\,y + Q(x)\,y^{\alpha} = 0$$

où P et Q sont des fonctions continues, et α un nombre réel donné.
Si α n'est pas entier, on supposera $y(x)>0$ dans le domaine d'étude.
Si $\alpha=0$ ou $\alpha=1$, l'équation est linéaire, et relève de la leçon n° 8.
Supposons donc $\alpha \neq 0$ et $\alpha \neq 1$.

On peut écrire (13)

$$\frac{y'}{y^{\alpha}} + P(x)\frac{1}{y^{\alpha-1}} + Q(x) = 0$$

et alors le changement de fonction $z = \frac{1}{y^{\alpha-1}}$ la transforme en l'équation :

$$\frac{1}{1-\alpha} z' + P(x) z + Q(x) = 0,$$

qui, pour la nouvelle fonction inconnue $z = z(x)$, est linéaire, et se résoud par les méthodes de la Leçon n° 8.

Exemple 4. Si dans l'équation :

$$(14) \qquad y' + 2y + 2xy\sqrt{y} = 0,$$

on pose $z = \frac{1}{\sqrt{y}}$, donc $z' = -\frac{1}{2}\frac{1}{y\sqrt{y}} y'$, après l'avoir divisée par $y\sqrt{y}$ on constate que (14) équivaut à l'équation linéaire :

$$z' = z + x,$$

dont la solution générale est : $z(x) = Ce^{x} - x - 1$, ce qui donne pour (14) les solutions :

$$y(x) = \frac{1}{(Ce^{x} - x - 1)^2}.$$

Exercice 5. Résolvez l'équation :

$$x^4 y' - x^3 y - y^3 = 0.$$

Remarque. On rencontre des équations du type :

$$(15) \qquad y' = a(x) y^2 + b(x) y + c(x),$$

dites de Riccati. On ne peut en général les ramener à des quadratures. Mais, si l'on en connaît par ailleurs une solution particulière $y_1(x)$, alors le changement de fonction :

$$y = y_1 + z$$

ramène (15) à l'équation :

$$z' = (2ay_1 + b) z + a z^2,$$

qui est de Bernoulli.

§6. Equations linéaires en x et y (Lagrange et Clairaut).

Soit une équation du type

(16) $\quad y = x\, a(y') + b(y')$,

éventuellement très compliquée en y', mais du premier degré en x et en y. Ces équations sont dites de <u>Lagrange</u>. Posons $y' = t$, et cherchons à calculer x en fonction de t, d'où on déduira par (16) y en fonction de t :

(17) $\quad y = x\, a(t) + b(t)$.

Dérivons (17) par rapport à x :

$$t = y' = \frac{dy}{dx} = a(t) + [x a'(t) + b'(t)]\frac{dt}{dx} ,$$

donc :

(18) $\quad [t - a(t)]\dfrac{dx}{dt} = a'(t) x + b'(t)$.

On distingue alors deux cas :

<u>1er cas</u> : $a(t) \not\equiv t$. Alors (18) est une équation <u>linéaire</u> pour la fonction inconnue $x = x(t)$. On résout cette équation par les méthodes de la Leçon n° 8, ce qui donne $x = x(t, C)$ avec une constante arbitraire, puis $y(t)$ par (17). On a ainsi des équations paramétriques pour les courbes intégrales.

<u>2ième cas</u> : $a(t) \equiv t$. On a alors affaire à une équation :

(19) $\quad y = x y' + b(y')$

dite de <u>Clairaut</u>. Dans ce cas l'équation (18) dégénère en

$$x = - b'(t)$$

ce qui, joint à (17), $\quad y = -t\,[b'(t)] \quad + b(t)$,

fournit les équations paramétriques d'une seule courbe Γ, qui est d'ailleurs une courbe intégrale de (19). Mais il est d'autre part évident que, pour toute constante λ, la droite (D_λ) d'équation $\quad y = \lambda x + b(\lambda)$

est aussi solution de (19). Ces solutions nous avaient échappé dans le changement de fonction, car, dans le cas de (19), $y' = t = \lambda$

Ainsi l'équation de Clairaut (19) a pour solutions :

1°) la famille à un paramètre des droites (D_λ) : $y = \lambda x + f(\lambda)$.

2°) la courbe Γ d'équations paramétriques :

$$x = -f'(t) \quad , \quad y = -t\,f'(t) + f(t)$$

Cette dernière est dite l'intégrale singulière de (19). On peut remarquer que chaque (D_λ) est tangente à Γ, qui, comme on dit, est ainsi l'enveloppe de la famille (D_λ).

Remarque. Dans cette Leçon, en ce qui concerne la recherche de toutes les solutions des équations étudiées, nous n'avons pas déployé la même rigueur qu'aux Leçons 8, 9 et 10. Au hasard des changements de fonctions, il nous est certainement arrivé de laisser échapper une ou deux intégrales singulières.

Exercice 6. Trouvez les solutions des équations

$$y = x y'^2 + 1$$

$$y = x y' + y'^2 .$$

§ 7. Solutions des Exercices proposés dans cette Leçon

Exercice 1. D'après la Leçon n° 8, la solution générale d'une équation linéaire se présente sous la forme

$$y(x) = \varphi(x) + C\,\psi(x),$$

où φ et ψ sont des fonctions particulières, et C une constante arbitraire.

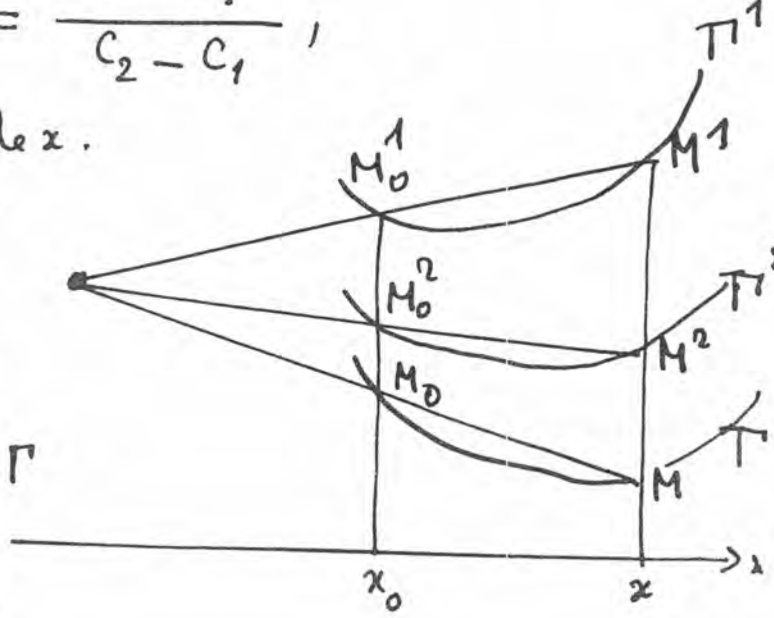
Soient deux solutions particulières correspondant à $C = C_1$ et $C = C_2 \neq C_1$. Si $y^1(x)$ et $y^2(x)$ sont ces solutions, et si $y(x)$ est une solution quelconque, on a les relations :

$$\begin{cases} y^1(x) = \varphi(x) + C_1\,\psi(x) \\ y^2(x) = \varphi(x) + C_2\,\psi(x) \\ y(x) = \varphi(x) + C\,\psi(x) \end{cases}$$

En éliminant $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ entre ces 3 relations, on obtient

$$(20) \qquad \frac{y(x)-y^1(x)}{y^2(x)-y^1(x)} = \frac{C-C_1}{C_2-C_1},$$

une constante indépendante de x.



Soit x_0 fixé, et x variable. Soient M_0^1, M_0^2, M_0 les points d'abscisse x_0, et M^1, M^2, M les points d'abscisse x, sur les courbes intégrales Γ_1, Γ_2 et Γ correspondant aux constantes C_1, C_2 et C. Compte-tenu de (20), on a :

$$\frac{\overline{M_0^1 M_0}}{\overline{M_0^1 M_0^2}} = \frac{\overline{M^1 M}}{\overline{M^1 M^2}}.$$

Le théorème de Thalès assure donc que les trois cordes $M_0^1 M^1$, $M_0^2 M^2$ et $M_0 M$ sont concourantes. Quand $x \neq x_0$ tend vers x_0, on obtient que, quelle que soit la courbe intégrale Γ, la tangente à Γ en M_0 passe par le point d'intersection des tangentes à Γ_1 en M_0^1 et à Γ_2 en M_0^2.

<u>Exercice 2</u>. On a : $y' = e^x e^y$, c'est-à-dire $e^{-y}dy = e^x dx$, équation à variables séparées, dont la solution générale est :

$$\int e^{-y}dy = \int e^x dx, \text{ c'est-à-dire : } \quad e^x + e^{-y} = C.$$

<u>Exercice 3</u>. La courbe d'équation cartésienne

$$X^4 - X^2Y + Y^3 = 0,$$

si on pose $Y = tX$, admet pour équations paramétriques

$$X = t^3 - t, \qquad Y = t^4 - t^2.$$

Ceci nous amène à poser, dans l'équation différentielle :

$$y'^4 - y'^2 y + y^3 = 0,$$

$y(t) = t^4 - t^2$, et $y' = \frac{dy}{dx} = t^3 - t$, donc

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dy}\frac{dy}{dt} = \frac{1}{t^3-t}(4t^3-2t) = 2\,\frac{2t^2-1}{t^2-1} = 4 + \frac{2}{t^2-1},$$

d'où : $x = 4t + \mathrm{Log}\left|\frac{1-t}{1+t}\right| + C$, $y = t^4 - t^2$.

Exercice 4. On peut traiter cette équation comme une équation homogène en x, y (le faire ! c'est-à-dire poser $y = tx$ etc...), mais aussi remarquer qu'elle s'écrit : $x\left[(y^2)'\right] - y^2 = x^2$, donc devient linéaire par le changement de fonction $y^2 = z$:

$$xz' - z = x^2,$$

d'où l'on déduit que les courbes intégrales ont pour équations :

$$y(y-x) = Cx.$$

Ce sont des hyperboles qui, pour $C = 0$, dégénèrent en deux droites.

Exercice 5. L'équation $x^4y' - x^3y - y^3 = 0$ est de Bernoulli. En posant $\frac{1}{y^2} = z$, elle équivaut à l'équation linéaire

$$\frac{1}{2}x^4z' + x^3z = -1.$$

On la résout par la méthode de variation de la constante, et on trouve $z = \frac{2}{x^3} + \frac{C}{x^4}$. Donc $y^2 = \frac{x^4}{2x+C}$.

Exercice 6. 1°) L'équation de Lagrange $y = xy'^2 + 1$ se résout en posant $y' = t$, donc $y = xt^2 + 1$, et par suite :

$$t = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = t^2 + 2t\frac{dt}{dx}, \text{ d'où}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2t}{t-t^2} = \frac{2}{1-t}, \text{ et } x = 2\,\mathrm{Log}|1-t| + C.$$

Les courbes intégrales ont pour équations paramétriques :

$$x = 2\,\mathrm{Log}|1-t| + C \quad ; \quad y = 1 + 2t^2\,\mathrm{Log}|1-t| + Ct^2.$$

2°) L'équation de Clairaut $y = xy' + 1$ admet pour intégrale générale la famille de droites $y = \lambda x + 1$, et pour intégrale singulière leur enveloppe, le point $(x = 0, y = 1)$, qui, n'étant pas une courbe, n'est pas une véritable solution —