UNIVERSITÉ
DE NANCY I

CENTRE
DE TÉLÉ-ENSEIGNEMENT
UNIVERSITAIRE
DE NANCY II

RETOUR SUR LE THÉORÈME DE DESARGUES

188 - Nous allons montrer (à titre d'exercice) comment la notion de produit vectoriel peut servir à étudier la configuration rencontrée dans la première partie, à propos du théorème de Desargues.

algèbre et géométrie

fig. 166

MODULE AG 1 :

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE ET CALCUL VECTORIEL

(DEUXIÈME PARTIE)

COURS DE PH. LOMBARD

Considérons, dans un plan $\mathcal{P}$ de l'espace, deux triangles ABC et A'B'C' dont les couples de côtés homologues déterminent, comme sur la figure 166, des points α, β, γ.

Il s'agit de montrer que α, β, γ sont alignés si et seulement si les droites AA', BB' et CC' concourent en un point Ω situé dans $\mathcal{P}$.

Nous supposons l'origine O du repère en dehors de $\mathcal{P}$ et nous caractérisons les points A, B, C, etc. de la configuration par les vecteurs $\vec{OA}$, $\vec{OB}$, $\vec{OC}$, etc. qui les joignent

DIPLOME D'ÉTUDES UNIVERSITAIRES GÉNÉRALES

SCIENCES DES STRUCTURES ET DE LA MATIÈRE
MATHÉMATIQUE PHYSIQUE INFORMATIQUE
SCIENCES DE L'ÉDUCATION

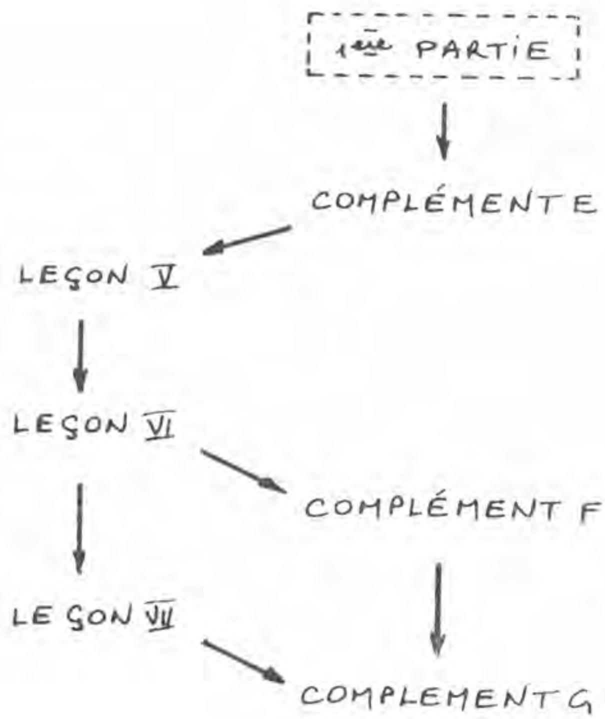
la maquette de la couverture a été réalisée par le L.E.P. Cyfflé - NANCY

© Édité et imprimé par l'**Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques** - (Université de Nancy I - Faculté des Sciences) -
B.P. 239 - 54506 VANDOEUVRE-les-NANCY CEDEX
Dépôt légal : 2e trimestre 1986
n° de la publication : 2-85406-092-X
Le Responsable de la collection : Philippe LOMBARD

Réf. N 520$_2$

AVERTISSEMENT

Cette deuxième partie du cours correspondant au module AG1 est composée de trois LEÇONS et de trois COMPLÉMENTS dont le lien logique est (dans ses grandes lignes) le suivant.



Comme pour le premier fascicule, le contenu des COMPLÉMENTS n'est pas aux programme du module.

Leur lecture est déconseillée avant celle des LEÇONS.

TABLE DES MATIÈRES
DE LA
DEUXIÈME PARTIE

RAPPELS SUR LES VECTEURS

109 – Nous partirons de la notion de vecteur lié :

DÉFINITION 1 : on appelle VECTEUR LIÉ (ou encore BIPOINT), un segment orienté du plan ou de l'espace ; c'est-à-dire la donnée de deux points, distincts ou non, dont l'un sera désigné comme ORIGINE, l'autre comme EXTRÉMITÉ du segment considéré.

. Un vecteur lié d'origine A et d'extrémité B sera noté $\overrightarrow{AB}$ et schématisé par un segment fléché (cf. figure ci-contre).

On dira qu'un vecteur lié est NUL si son extrémité et son origine sont confondues. On dira qu'il est NON NUL dans le cas contraire.

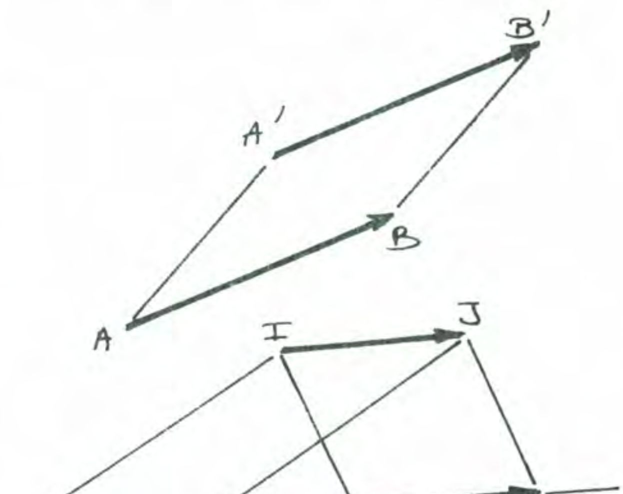


fig. 113

DÉFINITION 2 : On dit que deux vecteurs liés $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ sont ÉQUIPOLLENTS si l'on est dans l'un des cas suivants :

(i) $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ sont tous deux nuls,

(ii) ABB'A' est un parallélogramme non dégénéré,

(iii) A, B, A', B' sont sur une même droite et il existe $\overrightarrow{IJ}$ non situé sur celle-ci et tel que ABJI et A'B'JI soient des parallélogrammes non dégénérés. (cf. fig. 113)

Comme on le voit, cette définition demande de traiter à part le cas des vecteurs liés COLINÉAIRES, c'est-à-dire le cas où les deux vecteurs sont portés par une même droite. On notera au passage que le cas (iii) aurait pu aussi s'énoncer : "deux vecteurs liés colinéaires sont dits équipollents s'ils sont tous deux équipollents à un même vecteur qui n'est pas sur la même droite".

110 - Ce genre de difficulté se retrouve dans toutes les propriétés de l'équipollence.

Ainsi, pour vérifier qu'un vecteur lié $\vec{AB}$ est toujours équipollent à lui-même, il faut se référer au cas (iii) de la définition ... et donc démontrer que l'on peut trouver un vecteur lié $\vec{IJ}$ tel que ABJI soit un vrai parallélogramme.

Bien entendu c'est immédiat. Signalons de même deux propriétés qui relèvent de ce genre de vérification :

PROPOSITION 1 : si deux vecteurs liés sont équipollents et ont même origine, alors ils ont même extrémité.

PROPOSITION 2 : soit $\vec{AB}$ un vecteur lié et soit A' un point quelconque, il existe un point B' tel que $\vec{A'B'}$ soit équipollent à $\vec{AB}$.

Démonstrations :

1° soient $\vec{AB}$ et $\vec{AB'}$ deux vecteurs équipollents de même origine, montrons que B = B'.

Si les vecteurs sont nuls, le résultat est acquis d'avance. Sinon, il est clair que leur équipollence relève du cas (iii) :

A, B, B' sont sur une même droite $\mathcal{D}$ (fig. 114) et il existe I et J tels que ABJI et AB'JI soient des parallélogrammes.

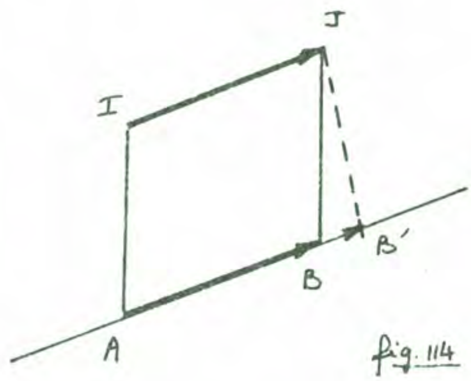


fig. 114

Mais alors JB et JB' sont toutes deux parallèles à AI. Donc B = B'.

2° Pour prouver la proposition 2, il suffit de trouver un point B' qui convienne.

Si A' n'est pas aligné avec A et B c'est immédiat en considérant les parallèles à AB et AA' menées par A' et B. Si en revanche A' est sur la droite AB, on réitèrera deux fois cette construction en ayant choisi un point intermédiaire hors de la droite.

Exercice 104 : montrer que si A' n'est pas aligné avec A et B il existe exactement un point B' tel que $\vec{AB}$ soit équipollent à $\vec{A'B'}$.
Expliquer pourquoi l'unicité de B' est difficile à prouver dans le cas où A' est aligné avec les deux points A et B.

Exercice 105 : on suppose dans cet exercice que l'on ignore tout du théorème de Thalès et même de la notion de milieu. On suppose seulement connu le théorème de Desargues.

Soit ABCD un parallélogramme non dégénéré et soit O le point d'intersection des diagonales. On mène par O les parallèles aux côtés AB et AD ; elles coupent AD, BC, AB et DC en K, L, M, N respectivement.

1° montrer que les triangles AMK et CNL sont homologiques et que KM est parallèle à LN,

2° montrer que KMLN est un parallélogramme.

3° montrer que DB est parallèle à KM et NL en utilisant les triangles KDN et MBL.

4° déduire de ce qui précède que $\vec{DO}$ et $\vec{OB}$ sont des vecteurs équipollents.

5° trouver sur la figure tous les vecteurs équipollents à $\vec{KO}$, puis tous les vecteurs équipollents à $\vec{AJ}$ si J est l'intersection de AC et KM.

[on justifiera toutes les équipollences, sans oublier que l'on ne sait pas encore que la relation est transitive]

111 - Le résultat fondamental pour la notion d'équipollence est le suivant :

THÉORÈME 1 : si $\vec{AB}$ et $\vec{A'B'}$ sont équipollents, alors tout vecteur lié $\vec{A''B''}$ qui est équipollent à $\vec{AB}$ est aussi équipollent à $\vec{A'B'}$.

Ceci revient à dire que la relation d'équipollence est une relation d'équivalence sur l'ensemble des vecteurs liés. Il s'agit en effet de la transitivité de la relation et les propriétés de symétrie et de réflexivité sont immédiates.

Avant de démontrer le théorème 1, montrons tout de suite comment il permet de renforcer la proposition 2 :

PROPOSITION 2' : soit $\vec{AB}$ un vecteur lié et soit A' un point quelconque, il existe un point B' et un seul tel que $\vec{A'B'}$ soit équipollent à $\vec{AB}$.

En effet, si $\vec{A'B'}$ et $\vec{A'B''}$ étaient deux solutions, ces deux vecteurs liés seraient équipollents à $\vec{AB}$, donc équipollents entre eux d'après le théorème.

Il s'agirait alors de vecteurs équipollents ayant même origine, ils auraient aussi même extrémité d'après la proposition 1.

Le § suivant est consacré à la démonstration du théorème, il est conseillé de le passer en première lecture.

112 - La démonstration du théorème 1 est fastidieuse, elle met cependant en jeu des notions importantes.

Nous envisageons de multiples cas :

1º $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ ne sont pas sur une même droite et $\overrightarrow{A''B''}$ n'est colinéaire avec aucun de ces deux vecteurs. (cf. fig. 115)

a- supposons tout d'abord que les trois vecteurs ne soient pas dans un même plan. Il est clair sur l'hypothèse que $A''B''$ et $A'B'$ sont parallèles, il suffit donc de montrer que $A''A'$ est parallèle à $B''B'$. Mais cela résulte du fait que ces deux droites sont les intersections du plan $A'B'A''B''$ avec les deux plans parallèles déterminés par $AA'A''$ et $BB'B''$.

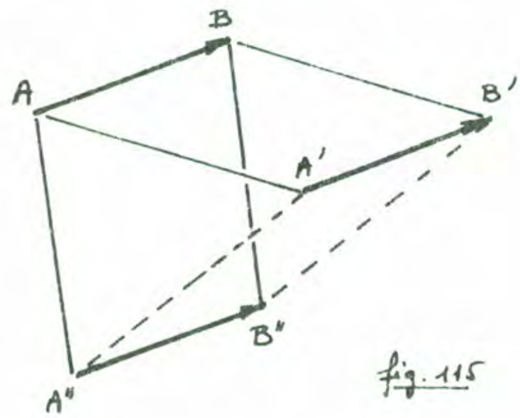


fig. 115

b- envisageons maintenant le cas où les trois vecteurs sont dans un même plan (on peut considérer que la figure 115 est encore valable si on la regarde comme une figure plane)

Par hypothèse, les triangles $AA'A''$ et $BB'B''$ sont homologiques puisque AB, $A'B'$ et $A''B''$ sont parallèles. Comme d'autre part (AA'', BB'') et (AA', BB') sont des couples de côtés parallèles, le <u>théorème de Desargues</u> permet de conclure que le couple $(A'A'', B'B'')$ est aussi un couple de côtés parallèles et c'est ce qu'il fallait démontrer.

Avant d'aller plus loin, nous énonçons sous forme de <u>lemme</u> un argument que nous utiliserons plusieurs fois :

<u>LEMME</u> : soient $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A'B'}$ deux vecteurs équipollents qui sont portés par une même droite $\mathcal{D}$. Supposons qu'ils soient équipollents (par hypothèse (iii)) à un vecteur $\overrightarrow{IJ}$, alors on peut remplacer $\overrightarrow{IJ}$ par un vecteur $\overrightarrow{I'J'}$ (qui lui est équipollent) et qui n'est situé ni sur $\mathcal{D}$ ni sur la droite IJ.

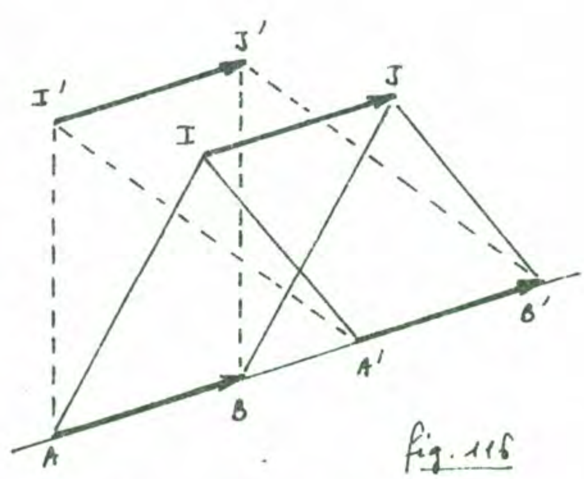


fig. 116

<u>Démonstration</u> : c'est une conséquence directe de ce que nous venons de démontrer dans le 1º). En effet, puisque $\overrightarrow{I'J'}$ n'est colinéaire ni avec $\overrightarrow{IJ}$ ni avec $\overrightarrow{AB}$, on a par hypothèse :

$\overrightarrow{I'J'}$ équipollent à $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{IJ}$ équipollent à $\overrightarrow{AB}$

donc $\overrightarrow{I'J'}$ est équipollent à $\overrightarrow{AB}$. Il l'est aussi à $\overrightarrow{A'B'}$ par analogie.

2° $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ ne sont pas sur une même droite et $A''B''$ est colinéaire avec l'un deux.

a- si $\overrightarrow{A''B''}$ est colinéaire avec $\overrightarrow{A'B'}$ il lui est automatiquement équipollent car les hypothèses équivalent alors à la condition (iii) de la définition 2, dans laquelle $\overrightarrow{AB}$ joue le rôle de $\overrightarrow{IJ}$.

b- supposons donc $\overrightarrow{A''B''}$ colinéaire avec $\overrightarrow{AB}$ et équipollent à celui-ci via un vecteur lié $\overrightarrow{IJ}$.

Comme on le voit sur la figure ci-contre, si $\overrightarrow{IJ}$ n'est pas colinéaire avec $\overrightarrow{A'B'}$, on peut utiliser la transitivité démontrée au 1° et on a (en simplifiant la notation) :

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{IJ} \sim \overrightarrow{AB},\\ \overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{A'B'}\end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{IJ} \sim \overrightarrow{A'B'},$$

et de nouveau :

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{IJ} \sim \overrightarrow{A'B'}\\ \overrightarrow{A''B''} \sim \overrightarrow{IJ}\end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{A'B'} \sim \overrightarrow{A''B''}.$$

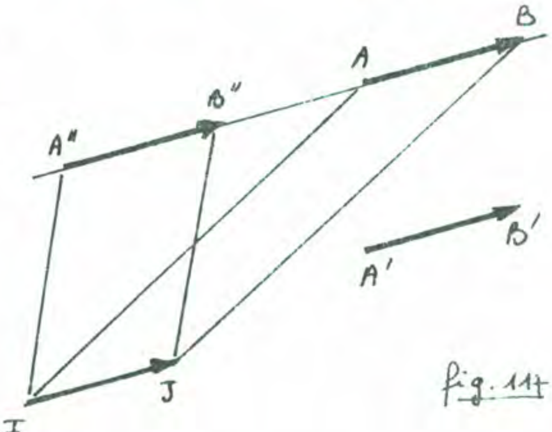


fig. 117

Ceci achève donc la démonstration dans ce cas. Si, en revanche $\overrightarrow{IJ}$ est colinéaire avec $\overrightarrow{A'B'}$ le raisonnement ne peut plus s'appliquer. On appliquera donc le <u>lemme</u> à $\overrightarrow{A''B''}$ et $\overrightarrow{AB}$ de façon à remplacer $\overrightarrow{IJ}$ par un vecteur $\overrightarrow{I'J'}$ convenable.

3° $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ sont sur une même droite.

a- le cas où $\overrightarrow{A''B''}$ n'est pas colinéaire à ces deux vecteurs revient au cas du 2° b en échangeant les rôles de $\overrightarrow{A''B''}$ et de $\overrightarrow{A'B'}$.

b- le seul cas non traité est celui où les trois vecteurs sont sur une même droite.

En utilisant au besoin le <u>lemme</u>, on peut supposer que la situation est celle qui est schématisée sur la figure 118. On utilisera alors la transitivité déjà démontrée au 1°) :

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{I'J'} \sim \overrightarrow{AB}\\ \overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{IJ}\end{array}\right\} \overrightarrow{I'J'} \sim \overrightarrow{IJ},$$

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{A''B''} \sim \overrightarrow{I'J'}\\ \overrightarrow{I'J'} \sim \overrightarrow{IJ}\end{array}\right\} \overrightarrow{A''B''} \sim \overrightarrow{IJ}$$

fig. 118

Donc les deux vecteurs liés (colinéaires $\overrightarrow{A''B''}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ sont tous deux équipollents à $\overrightarrow{IJ}$. Par définition, il sont donc équipollents.

Le théorème est démontré.

113 - THÉORÈME 2 : Soient $\vec{AB}$ et $\vec{A'B'}$ deux vecteurs liés, ces deux vecteurs sont équipollents si et seulement si $\vec{AA'}$ et $\vec{BB'}$ le sont.

Démonstration : la vérification est immédiate si les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{A'B'}$ ne sont pas sur une même droite (cf. par exemple, fig 113). Le cas où $\vec{AB}$ et $\vec{A'B'}$ sont colinéaires est loin d'être évident (du moins dans le contexte où nous nous plaçons) et nous démontrons tout d'abord le :

LEMME : soient $\vec{AB}$, $\vec{BC}$ deux vecteurs liés colinéaires et soit α non situé sur la même droite.

Si on suppose les équipollences :

$\vec{AB} \sim \vec{\beta\gamma}$ et $\vec{BC} \sim \vec{\alpha\beta}$

alors $\vec{AC}$ est équipollent à $\vec{\alpha\gamma}$.

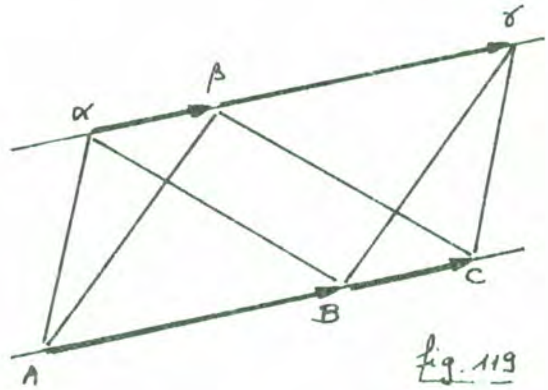


fig. 119

Démonstration : comme on le voit sur la figure 119, l'hexagone $A\alpha B\gamma C\beta$ vérifie les hypothèses du théorème de Pappus. Dès lors comme les couples de côtés $(A\beta, B\gamma)$ et $(\alpha B, \beta C)$ sont parallèles, il en va de même de $A\alpha$ et $C\gamma$. cqfd.

Revenons alors à la démonstration du théorème : considérons que les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{A'B'}$ colinéaires sont équipollents via un vecteur $\vec{IJ}$ et construisons K de telle sorte que $\vec{JK}$ soit équipollent à $\vec{BA'}$.

Nous pouvons appliquer le lemme à IJK et à BA'B' et il en résulte que $\vec{BB'}$ est équipollent à $\vec{IK}$.

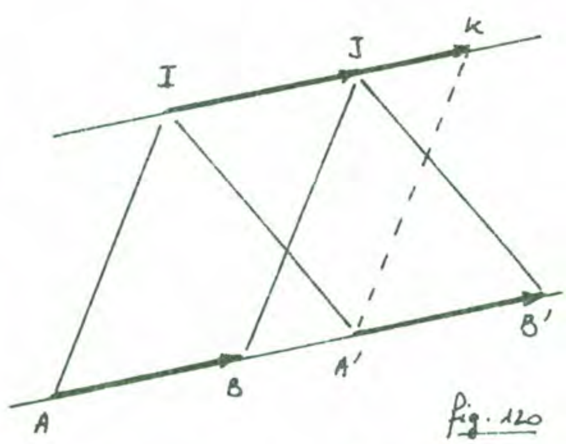


fig. 120

Ceci montre bien que $\vec{AA'}$ et $\vec{BB'}$ sont équipollents (via $\vec{IK}$). Il reste à montrer la réciproque, c'est-à-dire que si $\vec{AA'}$ et $\vec{BB'}$ sont équipollents alors $\vec{AB}$ et $\vec{A'B'}$ le sont. Mais il est clair qu'il suffit d'appliquer la propriété directe en échangeant les lettres.

Exercice 106 : [on se replace dans le contexte de l'exercice 105]

On se donne des points A, B, C, D, O non alignés tels que l'on ait les équipollences $\vec{AO} \sim \vec{OC}$ et $\vec{DO} \sim \vec{OB}$. Montrer, en utilisant seulement les propriétés connues jusqu'ici que ABCD est un parallélogramme [utiliser le point I tel que le quadrilatère AODI soit un parallélogramme et écrire les équipollences connues entre les vecteurs de la figure]

VECTEURS ET TRANSLATIONS

114 - COMPOSITION DES VECTEURS LIÉS. Considérons deux vecteurs liés de même origine $\vec{OA}$ et $\vec{OB}$ et supposons tout d'abord que O, A et B ne soient pas alignés.

On appelle SOMME (ou encore RÉSULTANTE) des vecteurs (liés) $\vec{OA}$ et $\vec{OB}$ le vecteur (lié) $\vec{OC}$ tel que le quadrilatère OACB soit un parallélogramme.

On notera : $\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{OB}$.

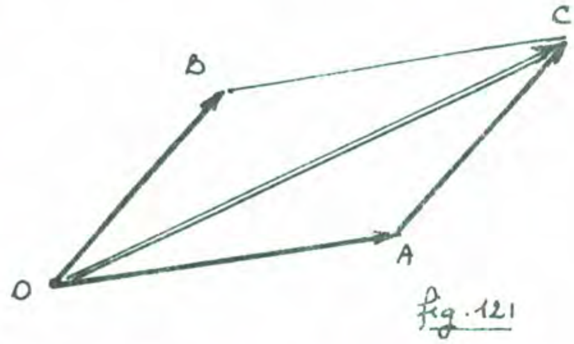


fig. 121

Il est clair sur la figure 120 (et sur les définitions) qu'il reviendrait au même de dire que C est le point tel que $\vec{AC}$ soit équipollent à $\vec{OB}$.

Il est tout aussi évident que l'ordre choisi sur $\vec{OA}$ et $\vec{OB}$ n'a pas d'importance.

Supposons maintenant que les vecteurs $\vec{OA}$ et $\vec{OB}$ sont colinéaires. Nous définissons la somme de $\vec{OA}$ et $\vec{OB}$ (toujours notée $\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{OB}$) de la façon suivante :

C est le (seul) point tel que $\vec{AC}$ soit équipollent à $\vec{OB}$.

Il est bien sûr moins immédiat que la somme ne dépend pas de l'ordre des vecteurs mais c'est précisément une conséquence du lemme démontré au § 113.

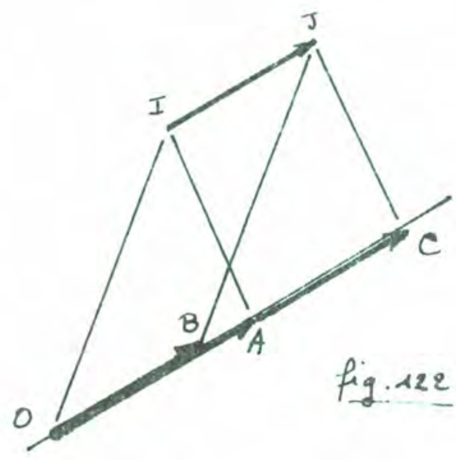


fig. 122

115 - THÉORÈME 3 : considérons deux vecteurs liés $\vec{OA}$ et $\vec{OB}$ d'origine O et deux vecteurs liés $\vec{O'A'}$, $\vec{O'B'}$ d'origine O', que nous supposerons équipollents à $\vec{OA}$ et $\vec{OB}$ respectivement.

Alors la somme $\vec{OC}$ de $\vec{OA}$ et $\vec{OB}$ est un vecteur équipollent à la somme $\vec{O'C'}$ de $\vec{O'A'}$ et $\vec{O'B'}$.

Démonstration : [nous laissons le soin de faire la figure au lecteur]

D'après le théorème 2 il faut démontrer que $\vec{OO'}$ est équipollent à $\vec{CC'}$.

Mais comme $\vec{OA}$ est équipollent à $\vec{O'A'}$ on sait que $\vec{OO'}$ est équipollent à $\vec{AA'}$. D'autre part la définition de la somme implique que $\vec{AC}$, $\vec{OB}$ sont équipollents, ainsi que $\vec{A'C'}$ et $\vec{O'B'}$. D'après le théorème 1 on a donc les équipollences :

$$\vec{AC} \sim \vec{A'C'} \iff \vec{AA'} \sim \vec{CC'} \implies \vec{OO'} \sim \vec{CC'}.$$

COROLLAIRE : muni de l'addition, l'ensemble des vecteurs liés d'origine O est un groupe commutatif.

Démonstration : la seule difficulté réside dans la vérification de l'associativité de l'addition. En effet, la commutativité a été signalée au § 114, l'élément neutre est manifestement le vecteur nul $\overrightarrow{OO}$ et l'élément symétrique d'un vecteur lié $\overrightarrow{OA}$ est le (seul) vecteur $\overrightarrow{OB}$ qui soit équipollent à $\overrightarrow{AO}$...

Pour démontrer que la somme de trois vecteurs liés $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ est bien associative nous établirons le :

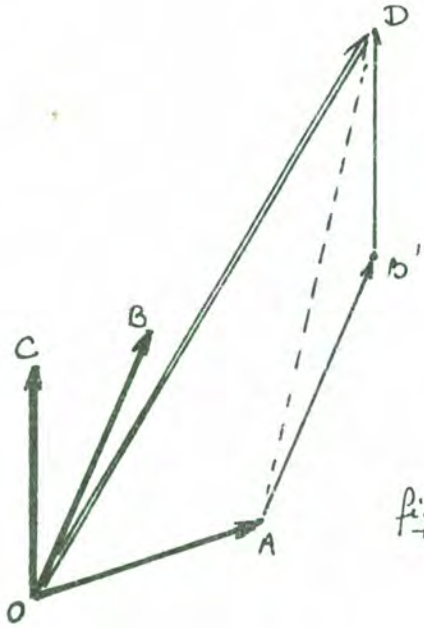


fig.123

LEMME : si $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ sont trois vecteurs liés d'origine O, la somme

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$$

est obtenue en construisant les points B' et D tels que $\overrightarrow{AB'}$ soit équipollent à $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{B'D}$ soit équipollent à $\overrightarrow{OC}$. (cf. fig. 123)

En effet, par définition $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AD'}$ si on définit $\overrightarrow{AD'}$ comme étant le vecteur lié d'origine A équipollent à $\overrightarrow{OC}$. Donc, d'après le théorème 3, $\overrightarrow{AD}$ et $(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$ sont équipollents et la construction de $\overrightarrow{OD}$ n'est autre que celle de $\overrightarrow{OA} + (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$

Le lemme est donc établi et il entraîne l'associativité de l'addition :

$$\overrightarrow{OA} + (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) + \overrightarrow{OC}$$

car la construction de la somme de droite correspond (fig. 123) à :

$$(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD}$$

116 - REMARQUES.

1° il est très important de noter qu'en termes de vecteurs liés, tous les points permettent de définir le groupe des vecteurs liés d'origine ce point. Il y a donc une infinité de groupes distincts suivant le choix de l'origine.


fig. 124

Cependant, on peut dire que ces groupes sont "les mêmes à équipollence près" (grâce au théorème 3) et c'est là une difficulté inhérente à la notion même de vecteur. Considérons par exemple la simple figure 124 : la construction la plus pratique du vecteur $\vec{OB} - \vec{OA}$ consiste à s'intéresser au vecteur $\vec{AB}$. On ne peut cependant pas dire que $\vec{AB}$ <u>est</u> la différence $\vec{OB} - \vec{OA}$, mais seulement que c'est un vecteur lié <u>équipollent</u> à celle-ci.

On sait qu'une façon de résoudre la difficulté est de ne plus faire la distinction entre des vecteurs liés qui sont équipollents et donc d'introduire une notion nouvelle : celle de <u>vecteurs libres</u>. Nous allons y revenir.

2° le lemme du paragraphe précédent constitue ce qu'il est convenu d'appeler la RELATION DE CHASLES. Il est difficile de ne pas se demander si cette auguste paternité relève du canular ou témoigne d'une invention authentique ... Nous l'ignorons.

117 - TRANSLATIONS. Une autre façon de présenter la démarche que nous avons suivie en définissant la somme des vecteurs liés consiste à considérer des <u>applications</u> de l'espace dans lui-même :

DÉFINITION 3 : on appelle TRANSLATION associée à un vecteur lié $\vec{OA}$ l'application qui associe à tout point M le point M' tel que $\vec{MM'}$ soit équipollent au vecteur $\vec{OA}$.

Les propriétés suivantes sont immédiates :

PROPOSITION 3 :

(i) les translations associées à deux vecteurs équipollents sont les mêmes applications de l'espace dans lui-même. Inversement si des translations correspondant à des vecteurs $\vec{OA}$ et $\vec{O'A'}$ sont égales, alors $\vec{OA}$ est équipollent à $\vec{O'A'}$.

(ii) la translation correspondant aux vecteurs nuls est l'application identique.

(iii) si $\vec{OA}$ et $\vec{OB}$ sont deux vecteurs liés de même origine, la translation correspondant au vecteur $\vec{OA} + \vec{OB}$ est la composée des translations correspondant à $\vec{OA}$ et $\vec{OB}$.

(iv) toute translation est une bijection, son application inverse est la translation associée au symétrique du vecteur lié correspondant.

Nous laissons la rédaction des démonstrations au lecteur à titre d'exercice.

Plus intéressant géométriquement, on a le :

THÉORÈME 4 : Une application T de l'espace dans lui-même est une translation si et seulement si :

1° pour toute droite $\mathcal{D}$ l'image $T(\mathcal{D})$ est une droite parallèle à $\mathcal{D}$,

2° T n'a pas de point fixe, sauf si T est l'identité.

L'application T est alors caractérisée par l'image d'un point.

118 - <u>Démonstration du théorème 4</u>. Vérifions tout d'abord que la translation associée à un vecteur $\overrightarrow{OA}$ remplit les conditions annoncées : pour cela, il suffit de remarquer que si M et N sont deux points quelconques d'images $t(M)$ et $t(N)$, alors $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{t(M)t(N)}$ sont <u>équipollents</u>. C'est en effet une conséquence directe de la définition et du théorème 3, puisque $\overrightarrow{Mt(M)}$ et $\overrightarrow{Nt(N)}$ sont tous deux équipollents à $\overrightarrow{OA}$.

Cela étant, il est clair que les images de trois points alignés P, Q, R sont sur une droite parallèle à la droite PQ.

Il reste à montrer que l'image d'une droite est bien égale à une droite toute entière : on utilisera pour cela la translation associée au vecteur symétrique.

Considérons, réciproquement, une application T qui ne soit pas l'identité et vérifie les conditions 1° et 2° du théorème.

Soit O un point quelconque et soit $A = T(O)$ son image.

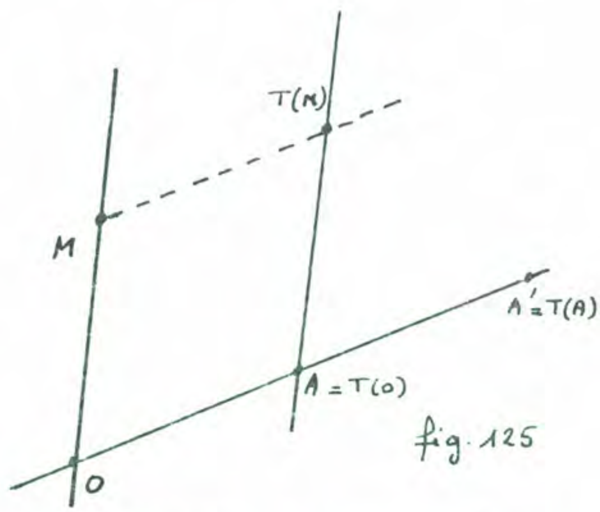


fig. 125

1°) la droite OA est globalement invariante car son image est, par hypothèse, une droite qui lui est parallèle et qui doit passer par T(O).

2°) soit M un point situé <u>hors de la droite OA</u>.

L'image T(M) de M est située sur la parallèle à OM menée par A puisque l'image de la droite OM est une droite parallèle à celle-ci. [les quatre points O,A,M,T(M) sont donc coplanaires]

Pour montrer que la droite MT(M) est parallèle à la droite OA il nous reste à voir que ces deux droites ne se coupent pas. Or, pour la même raison que OA, la droite M.T(M) est globalement invariante, dès lors le point d'intersection de OA et MT(M) sera <u>fixe</u> par T. Ce qui est contraire à l'hypothèse 2).

3°) Nous venons donc de montrer que OA.T(M).M est un parallélogramme, c'est-à-dire <u>que</u> pour tout M non situé sur la droite OA les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{MT(M)}$ sont équipollents.

Cela prouve que T coïncide avec la translation associée à $\overrightarrow{OA}$ au moins en dehors de la droite OA et il reste à montrer que si N est sur cette droite NT(M) est encore équipollent à $\overrightarrow{OA}$: il suffit pour cela de répéter le raisonnement en faisant jouer à M le rôle du point A.

119 - On voit finalement que les translations sont des <u>transformations géométriques</u> qui peuvent être caractérisées de façon simple.

Elles sont d'autre part en relation naturelle avec les vecteurs et la proposition 3 revient à dire qu'elles forment un groupe commutatif qui est "identique" à chacun des groupes de vecteurs liés que l'on peut définir une fois que l'on a choisi une origine.

On dit de façon précise que chacun de ces groupes est isomorphe au groupe des translation. On retrouve par là même le fait que tous les groupes de vecteurs liés qui correspondent aux différents choix possibles du point origine sont isomorphes entre eux.

La notion de VECTEUR LIBRE est une autre façon d'exprimer les liens qui unissent tous ces ensembles:

DÉFINITION 4: on appelle VECTEUR LIBRE toute classe d'équivalence de l'ensemble des vecteurs liés pour la relation d'équipollence.

Cela revient donc à dire que se donner un vecteur libre c'est envisager toute une famille de vecteurs liés équipollents entre eux et que chacun de ces vecteurs liés sera susceptible de "représenter" le vecteur libre considéré.

Reprenons par exemple la figure 114 et supposons que $\vec{OA}$ et $\vec{OB}$ sont les représentants des vecteurs libres notés $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on pourra dire que le vecteur lié $\vec{AB}$ est un représentant du vecteur libre $\vec{u}-\vec{v}$.

Il est clair en effet que l'addition se définit de façon naturelle sur l'ensemble des vecteurs libres grâce au théorème 3. Nous laisserons le lecteur rédiger la démonstration du.

THÉORÈME 5: Pour la loi d'addition, les vecteurs libres forment un groupe commutatif qui est isomorphe aux différents groupes de vecteurs liés de même origine ainsi qu'au groupe des translations.

120 - REMARQUE. Tout ce que nous venons de dire est valable dans l'espace et il est clair que la théorie peut se restreindre à un plan.

On peut aussi parler des vecteurs (ou des translations) d'une droite. On redéfinit ainsi de façon "géométrique" l'addition des "segments orientés" ou, si l'on préfère, des nombres réels. La situation bien connue sur la droite permet d'ailleurs d'illustrer la différence entre les notions de vecteurs liés et de vecteurs libres:

Si l'on choisit une origine O sur une droite, des points M et N de celle-ci peuvent être automatiquement associés aux vecteurs liés $\vec{OM}$ et $\vec{ON}$ et on parle parfois de la "somme" des points M et N pour désigner l'extrémité du vecteur lié d'origine O qui est égal à $\vec{OM}+\vec{ON}$.

Au contraire, si on parle en termes d'abscisse on se ramène au groupe additif des nombres réels, c'est-à-dire aux vecteurs libres de la droite.

Exercice 107 : On considère un segment AB que l'on suppose être une diagonale commune à deux parallélogrammes AIBK et AJBL.

Montrer que la droite IJ est parallèle à la droite LK. En déduire en utilisant le théorème de Desargues que AB IK et JL sont concourantes.

Démontrer, en utilisant les résultats des exercices 105 et 106, ainsi que la question précédente, que le milieu d'un segment AB peut être défini comme le seul point O tel que $\vec{AO}$ soit équipollent à $\vec{OB}$.

Justifier enfin dans ce contexte que deux vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont équipollents si et seulement si les segments AD et BC ont même milieu.

Exercice 108 : [La notion de milieu est celle qui a été utilisée à l'exercice précédent, c'est-à-dire que l'on s'efforcera de tout traduire en termes d'équipollence de vecteurs]

On considère un triangle ABC et on se propose de redémontrer à l'aide des vecteurs les propriétés des médianes. On désigne par I, J, K les milieux des côtés AB, BC et CA.

1° Montrer (en utilisant la « relation de Charles » et la définition des milieux) que les vecteurs $\vec{BJ}$ et $\vec{IK}$ sont équipollents

2° En appliquant le même raisonnement au triangle formé par B, C et le point d'intersection G de BK et IC montrer que $\vec{IK}$ est équipollent au vecteur $\vec{\beta\gamma}$ joignant les milieux de BG et GC et donc que G est milieu de $I\gamma$ et $K\beta$.

3° Déduire des résultats précédents que $\vec{GA}+\vec{GB}+\vec{GC}=\vec{0}$
[écrire que $\vec{GB}+\vec{GA}+\vec{GC}=\vec{GB}+(\vec{GK}+\vec{KA})+\vec{GC}=\vec{GB}+\vec{GK}+\vec{CK}+\vec{GC}$)

4° Utiliser cette relation pour redémontrer le fait que G est sur AI et donc que les médianes sont concourantes

Exercice 109 : Soit ABCD un tétraèdre, montrer que les segments joignant les milieux des couples d'arêtes opposées se coupent en leurs milieux
[utiliser la question 1°) de l'exercice précédent]

Exercice 110 : Soit T une application de l'espace dans lui-même, qui n'a pas de point fixe et dont l'image n'est pas réduite à une seule droite.

On suppose que, chaque fois que A, B, C sont des points situés sur une même droite $\mathcal{D}$, leurs images sont sur une droite parallèle à $\mathcal{D}$.

Montrer (en se ramenant à la démonstration du théorème 4) que T est une translation.

VECTEURS ET HOMOTHÉTIES.

121 - Nous nous fixerons désormais un point O de l'espace et une droite Δ passant par O.

Comme nous l'avons dit à la remarque du § 120, nous pourrons considérer indifféremment les points de Δ, les abscisses de ces points ou même les vecteurs liés admettant ces points pour extrémités et O pour origine commune.

Nous désignerons comme d'habitude l'abscisse d'un point M par une lettre minuscule comme x, y, a, b, etc. et nous choisirons un point A distinct de O, d'abscisse 1.

122 - HOMOTHÉTIES. Nous partirons d'une définition géométrique:

DÉFINITION 5: on appelle HOMOTHÉTIE DE CENTRE O toute application H de l'espace dans lui-même, telle que:

1° toute droite $\mathcal{D}$ a pour image $H(\mathcal{D})$ une droite parallèle à $\mathcal{D}$.

2° O est laissé fixe par H.

Signalons comme exemple évident celui de l'application identique et montrons tout de suite le:

THÉORÈME 6: pour tout point A' de la droite Δ qui est distinct de O, il existe une et une seule homothétie de centre O qui envoie A sur A'.

Démonstration: donnons-nous un point A' sur Δ qui soit distinct de A et cherchons à construire une homothétie qui envoie A sur A' et laisse O fixe.

Pour tout point M non situé sur Δ l'image est déterminée sans ambiguïté: la droite OM ayant une image parallèle à elle-même sera obligatoirement globalement invariante (puisque O est fixe) et la droite MA aura pour image la parallèle menée par A'.

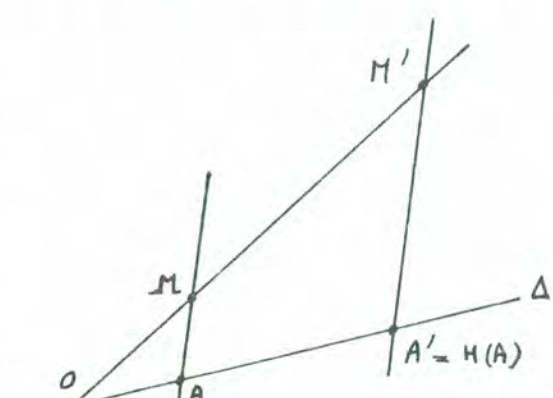


fig. 126

L'image M' de M devra donc être le point d'intersection de ces deux droites. Il n'est donc pas difficile de définir H sur le complémentaire de Δ et il reste donc deux questions à résoudre:

a - prolonger H aux points de Δ autres que A et O,

b - montrer que l'application ainsi construite vérifie bien la condition 1) de la définition 5.

a) Pour prolonger H aux points de Δ, il suffit d'interpréter la figure 126 en considérant que l'image du point M est connue et qu'il s'agit de caractériser l'image d'un point donné sur Δ. Il est clair que le raisonnement est identique. Dès lors, pour définir les images des points de Δ, il suffit d'utiliser un point arbitraire hors de Δ, de déterminer son image et de revenir ensuite à Δ à partir de ce point.

Nous devons montrer le :

LEMME : la construction de l'application H sur Δ ne dépend pas du point choisi comme intermédiaire.

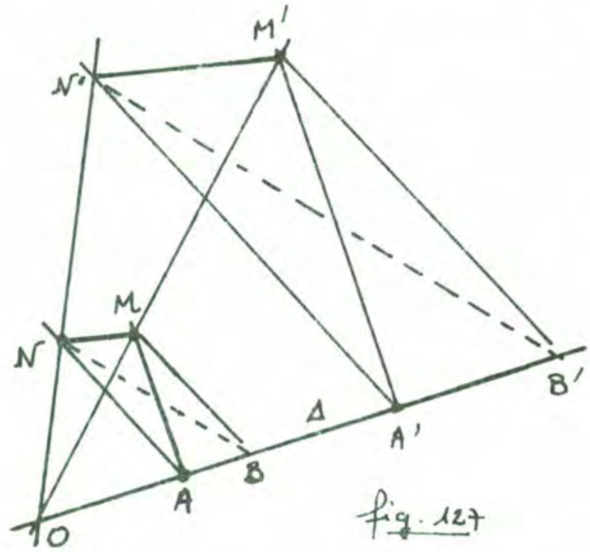


fig. 127

démonstration : opérons d'abord la construction à l'aide d'un point M d'image M' : on tracera MB et la parallèle à MB menée par M'. Son intersection avec Δ fournissant l'image B' de B.

Soit alors un point N, hors de Δ et de la droite OM. On construira de même son image N' à partir de A et A', puis on mènera la parallèle à NB passant par N'. Tout revient à montrer que cette droite passe aussi par B'.

Or, par hypothèse, les triangles NAM et N'A'M' sont homologiques et les couples de côtés (NA, N'A') et (MA, M'A') sont parallèles. Le théorème de Desargues [ou le raisonnement habituel si l'on est dans l'espace ...] implique que NM est parallèle à N'M'. Une deuxième application de Desargues aux triangles NBM et N'B'M' permet de conclure.

Les points N, M fournissent donc la même image pour B ; il reste à envisager le cas où N, M seraient alignés avec O : mais tous deux fournissent la même image que n'importe quel point situé hors de la droite OM, donc les deux constructions donnent bien le même résultat.

b) Le théorème 6 sera démontré lorsque l'on aura vérifié qu'une droite a pour image une droite parallèle à elle-même. C'est une conséquence du théorème de Desargues. Comme il n'y a pas d'idée nouvelle et que celles qui ont servi à la démonstration du lemme suffisent, nous laissons la rédaction de ce point au lecteur.

On notera pour terminer que l'énoncé du théorème affirme l'unicité de l'homothétie construite. Ceci est une conséquence immédiate de la figure 126.

Il s'ensuit en particulier que l'ensemble des homothéties de centre O correspond à l'ensemble des points A' de Δ distincts de O.

123 – RAPPORT D'HOMOTHÉTIE. Intéressons-nous à l'action des homothéties sur les vecteurs :

THÉORÈME 7 : soit H une homothétie de centre O. Pour tous vecteurs liés $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{PQ}$ de l'espace qui sont équipollents, les images $\overrightarrow{H(M)H(N)}$ et $\overrightarrow{H(P)H(Q)}$ sont des vecteurs liés équipollents.

[c'est immédiat puisque les homothéties conservent le parallélisme et transforment donc les parallélogrammes en des parallélogrammes]

Cette remarque implique qu'une homothétie de centre O opère sur :

1° les points de l'espace,

2° les vecteurs liés d'origine O,
[on associera à $\overrightarrow{OM}$ le vecteur lié $\overrightarrow{OH(M)}$]

3° les vecteurs libres de l'espace.
[on associera à un vecteur $\vec{u}$ représenté (par exemple) par $\overrightarrow{MN}$ le vecteur $\vec{v}$ représenté par $\overrightarrow{H(M)H(N)}$]

Nous conserverons dans la suite les conventions de notation suivantes :

1° soit H l'homothétie de centre O qui envoie A sur A'. Si A est d'abscisse 1 et A' d'abscisse λ, nous noterons toujours par H(B) l'image d'un point B et, si son abscisse sur Δ est égale à x, le point H(B) est le point d'abscisse $\lambda . x$.

2° Étant donné un vecteur lié d'origine O (par exemple $\overrightarrow{OB}$) nous noterons $\overrightarrow{OH(B)} = \lambda . \overrightarrow{OB}$

3° Nous ferons de même pour les vecteurs libres : nous noterons $\lambda \vec{u}$ le vecteur libre correspondant à $\vec{u}$ dans l'homothétie H.

Le scalaire λ s'appellera le rapport de l'homothétie H et, si l'on veut préciser que H est l'homothétie de centre O et de rapport λ nous utiliserons l'écriture $H(O;\lambda)$.

124 – REMARQUE. Nous laissons au lecteur le soin de retrouver, à titre d'exercice, les justifications géométriques de toutes les propriétés bien connues sur les opérations. Rappelons simplement (s'il en était besoin...) que, pour l'addition et la multiplication, les abscisses des points de Δ forment un CORPS COMMUTATIF.

Exercice 111 : justifier géométriquement l'égalité :

$$\forall \lambda,\ \forall \vec{u}, \vec{v} \qquad \lambda.(\vec{u}+\vec{v}) = \lambda.\vec{u} + \lambda\vec{v}$$

Exercice 112 : montrer que la commutativité du produit (pour les homothéties de centre O) se ramène au théorème de Pappus démontré au § 35.

125 - COMPOSITION DES HOMOTHÉTIES. Nous avons envisagé jusqu'ici les homothéties de centre O, il est clair que tout ce que nous avons dit s'applique sans aucun changement lorsque l'on envisage une origine différente.

A cet égard l'action induite sur les vecteurs libres est intéressante car elle ne dépend pas de l'origine choisie:

PROPOSITION 4 : soient O et O' deux points de l'espace, si $H(O;\lambda)$ est une homothétie de centre O et de rapport λ, il existe une et une seule homothétie K de centre O' qui opère de la même façon sur les vecteurs libres.

Démonstration : considérons en effet la translation T de vecteur $\overrightarrow{OO'}$ et sa translation inverse T^{-1} (de vecteur $\overrightarrow{O'O}$). Posons :

$$K = T \circ H \circ T^{-1},$$

il est clair que l'application composée envoie toute droite $\mathcal{D}$ sur une droite parallèle à $\mathcal{D}$ puisque c'est une propriété de T^{-1}, H et T. On a d'autre part :

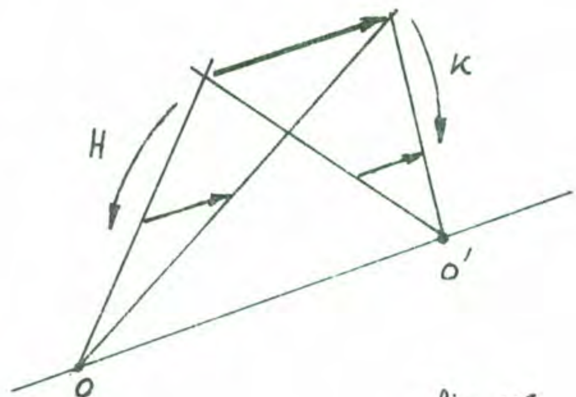


fig. 128

$$K(O') = T\left[H\left[T^{-1}(O')\right]\right] = T\left[H\left[O\right]\right] = T\left[O\right] = O'$$

donc O' est fixe par K, si bien que K est une homothétie de centre O'.

Comme enfin les translations ne modifient pas les vecteurs libres, K opère de façon identique à H sur ceux-ci.

Bien évidemment H et K ont donc le même rapport et nous désignerons aussi K par $H(O';\lambda)$. Cela étant précisé nous pouvons montrer le :

THÉORÈME 8 : Soient $H(O;\lambda)$ et $H'(O';\mu)$ des homothéties quelconques, alors l'application composée

$$K = H \circ H'$$

est une homothétie de rapport égal à $\lambda.\mu$ et dont le centre est un point aligné avec O et O' si $\lambda\mu$ est différent de 1. C'est une translation si $\lambda\mu = 1$.

Démonstration : dans tous les cas, la composée possède la propriété d'envoyer toute droite $\mathcal{D}$ sur une droite qui lui est parallèle. En revenant aux définitions on voit donc que la composée est soit une translation, soit une homothétie.

Pour faire la distinction, il suffit de considérer l'action de

K sur les vecteurs libres :

- si $\lambda\mu = 1$, K ne peut opérer que comme une <u>translation</u> (ou comme une homothétie de rapport 1)

- si $\lambda\mu \neq 1$, K est forcément une <u>homothétie</u> et possède par conséquent un point fixe et un seul.

Désignons par O" ce point fixe, centre de l'homothétie K, il est facile de voir qu'une droite est globalement invariante par K si et seulement si elle passe par O".

Or la droite OO' est globalement invariante par K puisqu'elle est invariante à la fois par H et par H'. Elle passe donc par O", c'est-à-dire que les trois centres sont alignés.

126 - La situation générale correspondant à la composition d'homothéties est la suivante :

Si H' est l'homothétie de centre P qui envoie A sur B et H l'homothétie de centre Q qui envoie B sur C, alors le produit

$$K = H \circ H'$$

est l'homothétie de centre R (aligné avec P et Q) qui envoie A sur C.

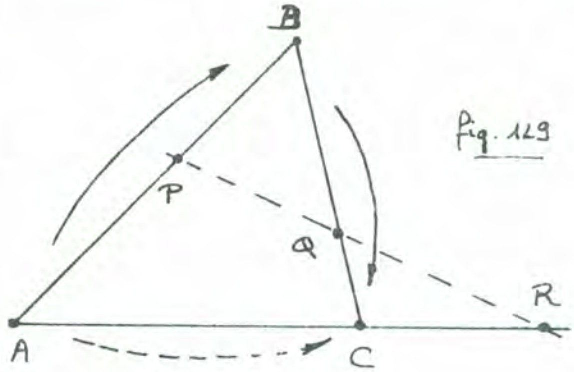


fig. 129

R est donc l'intersection des droites PQ et AC. Mais on notera surtout la relation entre les rapports :

- H' est de rapport égal à $\frac{\overline{PB}}{\overline{PA}}$,

- H est de rapport $\frac{\overline{QC}}{\overline{QB}}$.

Donc K a pour rapport le produit $\frac{\overline{QC}}{\overline{QB}} \cdot \frac{\overline{PB}}{\overline{PA}}$ mais aussi $\frac{\overline{RC}}{\overline{RA}}$.

On voit donc que l'on a :

$$\frac{\overline{RA}}{\overline{RC}} \cdot \frac{\overline{QC}}{\overline{QB}} \cdot \frac{\overline{PB}}{\overline{PA}} = 1,$$

qui n'est autre que la relation du <u>théorème de Menelaüs</u>. Le lecteur pourra rédiger une démonstration de ce théorème fondée sur cette remarque.

<u>Exercice 113</u> : on se donne deux triangles dont les côtés sont deux à deux parallèles. Montrer qu'il existe une homothétie qui transforme l'un dans l'autre.
[utiliser le théorème de Desargues]

Exercice 114 : on se donne trois cercles extérieurs l'un à l'autre et de rayons différents.

1º trouver toutes les homothéties possibles entre ces cercles pris deux à deux en précisant leurs centres et leurs rapports (il y a 6 possibilités)

2º préciser les relations d'alignement entre les centres de ces homothéties en les reliant aux relations de composition qu'il est possible d'établir entre celles-ci.

Exercice 115 : on appelle ensemble des dilatations l'ensemble formé par les translations et par les homothéties (de centre quelconque)
Montrer que les dilatations forment un groupe non commutatif.

Exercice 116 : soit ABC un triangle quelconque. On désigne par I, J, K les milieux des côtés BC, CA et AB, par H l'orthocentre de ABC et par O l'orthocentre de IJK.

1º montrer que O est le centre du cercle circonscrit à ABC.

2º on désigne par $\mathcal{H}$ l'homothétie qui envoie ABC sur IJK (cf. exercice 113). Préciser son centre et son rapport.

3º en remarquant que $\mathcal{H}$ envoie l'orthocentre de ABC sur l'orthocentre de IJK, montrer que les points H et O sont alignés avec le centre de gravité G de ABC, puis montrer que le centre du cercle circonscrit à IJK est le milieu de HO.

4º montrer que $\overrightarrow{HA} = -2\,\overrightarrow{OI}$ et en déduire que le milieu de HA est le point diamétralement opposé à I sur le cercle circonscrit à IJK.

5º montrer que les pieds des hauteurs du triangle ABC appartiennent au cercle IJK.
[utiliser la question précédente et la propriété d'un angle droit inscrit]

[REMARQUE : le cercle IJK s'appelle le CERCLE D'EULER du triangle ABC, ou encore le cercle des 9 points]

Exercice 117 : donner une démonstration de la proposition 1 du §3 (cf. Leçon I) reposant sur les propriétés de l'homothétie

VECTEURS ET PROJECTIONS.

127 – Nous rappellerons pour terminer le lien entre les diverses opérations que nous venons de définir sur les vecteurs et les projections.

Toutes les applications de projection que nous envisagerons seront définies sur l'espace tout entier et nous considérerons deux cas:

– les projections sur une droite $\mathcal{D}$ parallèlement à une direction de plan Π,

– les projections sur un plan $\mathcal{P}$ parallèlement à une direction de droite Δ.

Les énoncés qui suivent utilisent le langage des vecteurs libres. Le lecteur pourra les adapter, à titre d'exercice, dans le langage des vecteurs liés.

128 – PROPOSITION 5 : soient deux vecteurs liés représentant un même vecteur libre $\vec{u}$, leurs images dans une projection représentent un même vecteur libre $\vec{v}$.

Démonstration : il faut donc démontrer que si $\vec{AB}$ et $\vec{A'B'}$ sont deux vecteurs équipollents, leurs projections $\vec{ab}$ et $\vec{a'b'}$ sont des vecteurs équipollents. Nous traiterons le cas de la projection sur une droite, l'autre cas est analogue.

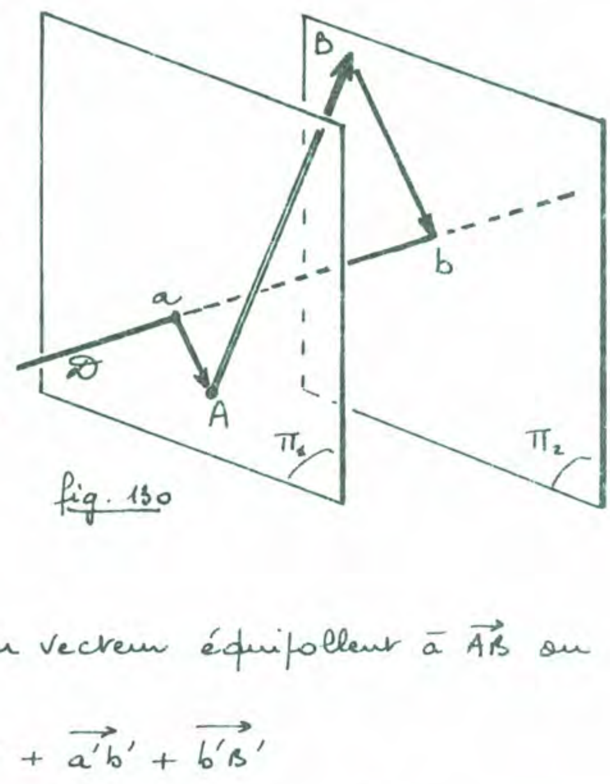


fig. 130

Considérons un vecteur lié $\vec{AB}$ et sa projection sur la droite $\mathcal{D}$ parallèlement aux plans Π_1 et Π_2. Si a et b sont les projections de A et B, on peut écrire la somme des vecteurs libres:

$$\vec{AB} = \vec{Aa} + \vec{ab} + \vec{bB}.$$

Si maintenant $\vec{A'B'}$ est un vecteur équipollent à $\vec{AB}$ on aura de façon analogue :

$$\vec{A'B'} = \vec{A'a'} + \vec{a'b'} + \vec{b'B'}$$

et donc :

$$\vec{Aa} + \vec{bB} - \vec{A'a'} - \vec{b'B'} = \vec{a'b'} - \vec{ab}, \qquad (1)$$

égalité dans laquelle nous avons fait figurer : à gauche des vecteurs portés par la direction de plan Π, à droite des vecteurs portés par la droite $\mathcal{D}$.

Il est clair que la résultante du premier membre de (1) est portée par Π alors que la résultante du second membre est portée par $\mathcal{D}$. L'égalité (1) exprimant une égalité entre vecteurs libres, c'est-à-dire une équipollence entre vecteurs liés, n'est donc possible que si ses deux membres sont nuls.

On a donc bien $\vec{ab}$ équipollent à $\vec{a'b'}$ et c'est ce que nous voulions démontrer.

129 - L'intérêt de la proposition 5 est clair : on peut traiter des projections en termes de vecteurs libres. Notons cependant que nous avons démontré au passage un résultat tout aussi important :

THÉORÈME 9 : soit Π un plan et soit $\mathcal{D}$ une droite qui n'est pas contenue dans celui-ci.

Pour tout vecteur $\vec{AB}$ de l'espace, il existe un unique vecteur $\vec{u}$ porté par Π et un unique vecteur $\vec{v}$ porté par $\mathcal{D}$ tels que :

$$\vec{AB} = \vec{u} + \vec{v}.$$

Ces deux vecteurs s'obtiennent en projetant $\vec{AB}$, sur Π parallèlement à $\mathcal{D}$ et sur $\mathcal{D}$ parallèlement à Π

Nous laissons au lecteur le soin d'écrire la démonstration en adaptant celle de la proposition 5. Il pourra aussi énoncer le théorème correspondant en géométrie plane.

130 - La propriété fondamentale des projections vis-à-vis des opérations sur les vecteurs se résume en disant que toute projection (parallèle) induit une application linéaire sur les vecteurs libres ; cela signifie que les relations suivantes sont vraies :

PROPOSITION 6 :

1° si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs libres quelconques et si p est une projection sur un plan ou sur une droite, on a :

$$p(\vec{u}+\vec{v}) = p(\vec{u})+p(\vec{v})$$

2° si $\vec{u}$ est un vecteur et si λ est un scalaire :

$$p(\lambda.\vec{u}) = \lambda.\ p(\vec{u})$$

3° si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs et si λ et μ sont des scalaires :

$$p(\lambda.\vec{u}+\mu.\vec{v}) = \lambda.p(\vec{u})+\mu.p(\vec{v})$$

En fait, la troisième relation résume les deux autres : si elle est vraie on retrouve la première en faisant $\lambda = \mu = 1$ et la seconde en faisant μ ou $\vec{v}$ nul.

Inversement les deux premières propriétés impliquent la troisième, puisque l'on peut développer :

$$p(\lambda\vec{u} + \mu.\vec{v}) = p(\lambda\vec{u}) + p(\mu.\vec{v}) = \lambda.p(\vec{u}) + \mu.p(\vec{v})$$

en n'utilisant à partir des relations du 1°) et du 2°).

Démontrons directement la propriété 3) ; pour cela nous utiliserons un argument important en calcul vectoriel : donnons-nous les vecteurs et les scalaires $\vec{u}, \vec{v}, \lambda, \mu$ et une projection p qui soit (par exemple) la projection sur une droite $\mathcal{D}$ parallèlement à un plan Π.

Nous introduisons la projection "complémentaire" q sur le plan Π parallèlement à $\mathcal{D}$ et nous pouvons donc écrire, conformément au théorème 9 :

$$(1) \qquad \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} = p(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) + q(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v})$$

Mais en appliquant la même décomposition à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ pris séparément, on a aussi :

$$(2) \qquad \vec{u} = p(\vec{u}) + q(\vec{u})$$

$$(3) \qquad \vec{v} = p(\vec{v}) + q(\vec{v})$$

Multiplions ces deux relations par λ et μ respectivement et ajoutons-les :

$$(4) \qquad \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} = \left[\lambda.p(\vec{u}) + \mu.p(\vec{v})\right] + \left[\lambda.q(\vec{u}) + \mu.q(\vec{v})\right].$$

Il reste à comparer (1) et (4) qui sont toutes deux des écritures du vecteur $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ comme somme d'un vecteur porté par $\mathcal{D}$ et d'un vecteur porté par Π.

L'unicité de la décomposition (théorème 9) entraîne immédiatement la relation cherchée.

131 - EXEMPLES.

1°) La proposition 6 est en fait la généralisation naturelle, en termes de la théorie des vecteurs, du <u>théorème de Thalès</u>.

Considérons en effet trois points alignés A, B, C et leurs projections A', B', C' sur une droite $\mathcal{D}$, parallèlement à un plan Π (cf. fig. 131)

Comme les vecteurs $\vec{BC}$ et $\vec{BA}$ sont colinéaires il existe un scalaire λ tel que $\overrightarrow{BC} = \lambda . \overrightarrow{BA}$. Dès lors, la propriété 2) de la proposition 6 implique :

$$\overrightarrow{B'C'} = \lambda . \overrightarrow{B'A'}.$$

Traduisons cela en termes de mesures algébriques sur la droite AB et sur la droite $\mathcal{D}$, il vient :

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{BA}} = \lambda = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{B'A'}}.$$

Ceci n'est autre que la relation de proportionnalité du théorème de Thalès.

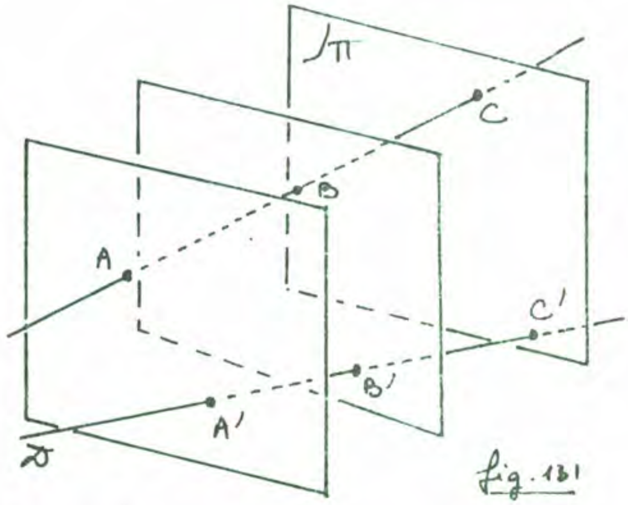


fig. 131

2°) De la même façon que le théorème de Thalès joue un rôle fondamental dans la première partie de ce cours, la proposition 6 jouera un rôle fondamental dans le point de vue qui nous intéresse maintenant : celui du calcul vectoriel.

Considérons un vecteur $\overrightarrow{OM}$ et trois droites non coplanaires passant par O : Ox, Oy, Oz.

Désignons par m_1 la projection de M sur Ox parallèlement au plan (Oy, Oz) et par m'_1 la projection de M sur ce plan parallèlement à Ox.

On a : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om_1} + \overrightarrow{Om'_1}$
et si on recommence l'opération en projetant m'_1 sur Oy et Oz et que l'on définit ainsi les points m_2 et m_3, on a :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om_1} + \overrightarrow{Om_2} + \overrightarrow{Om_3}.$$

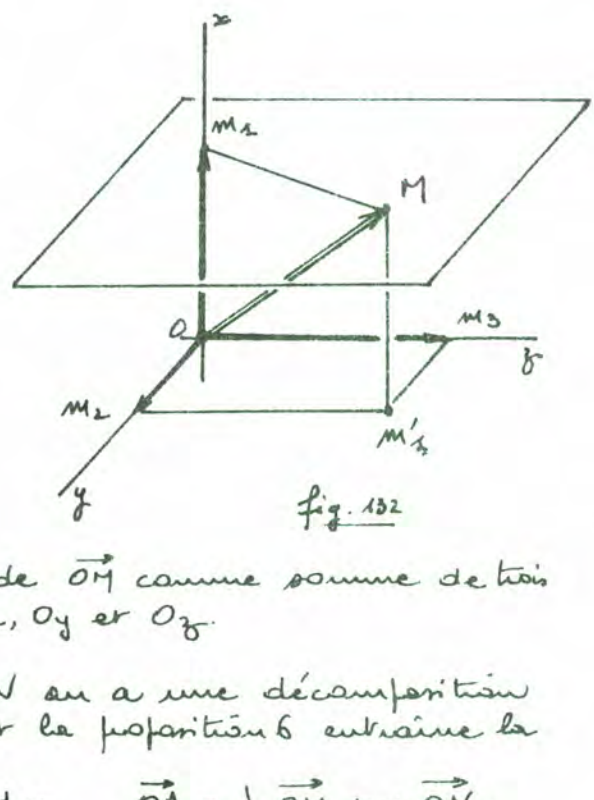


fig. 132

C'est la seule décomposition possible de $\overrightarrow{OM}$ comme somme de trois vecteurs appartenant aux droites Ox, Oy et Oz.

Si l'on part d'un autre point N on a une décomposition analogue : $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{On_1} + \overrightarrow{On_2} + \overrightarrow{On_3}$ et la proposition 6 entraîne la règle suivante :

Etant donné le point A tel que $\overrightarrow{OA} = \lambda . \overrightarrow{OM} + \mu \overrightarrow{ON}$,
la décomposition par projections :

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{Oa_1} + \overrightarrow{Oa_2} + \overrightarrow{Oa_3}$$

n'est autre que :

$$\overrightarrow{OA} = \left(\lambda \overrightarrow{Om_1} + \mu \overrightarrow{On_1}\right) + \left(\lambda \overrightarrow{Om_2} + \mu \overrightarrow{On_2}\right) + \left(\lambda \overrightarrow{Om_3} + \mu \overrightarrow{On_3}\right).$$

ÉQUATIONS

DE DROITES ET DE PLANS

132 – Nous nous placerons désormais dans l'espace (ou dans le plan) muni d'un repère cartésien.

Rappelons que dans un tel repère, tout point M est déterminé par ses projections sur les axes.

S'il s'agit du plan (cf. fig. 133) chacune de ces projections est la projection sur l'un des deux axes parallèlement à l'autre.

S'il s'agit de l'espace, le point M est projeté sur chacun des axes parallèlement au plan déterminé par les deux autres axes. C'est un exercice facile de vérifier qu'une telle projection m_1 peut aussi être obtenue en projetant d'abord M sur un plan (par exemple xOy), puis en projetant le point m' obtenu sur Ox parallèlement à Oy. (cf. fig. 134)

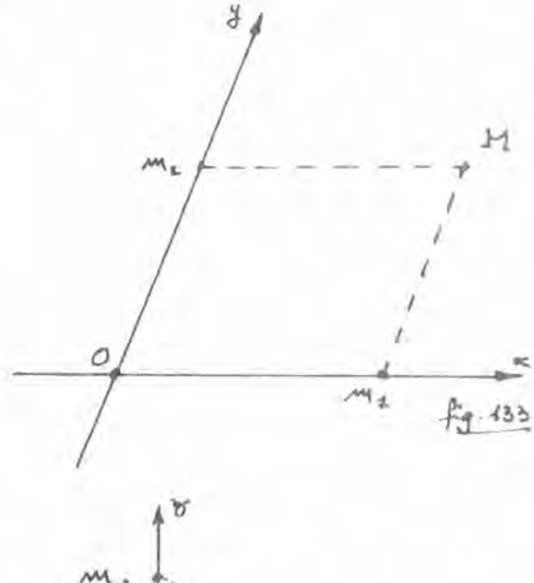


fig. 133

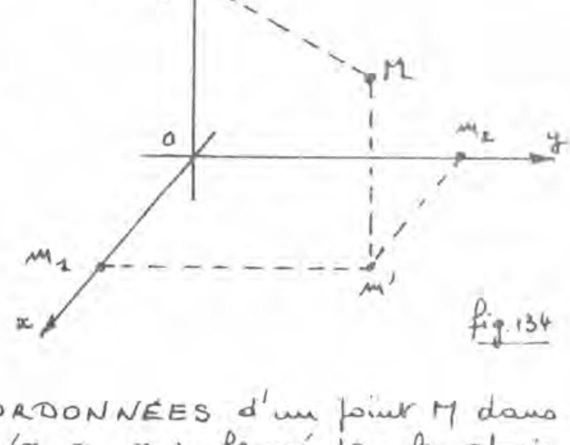


fig. 134

Cela étant, on peut choisir un vecteur unitaire sur chacun des axes du repère et caractériser les projections de M par leurs abscisses.

DÉFINITION : On appelle COORDONNÉES d'un point M dans un repère (Ox, Oy, Oz) le triplet (x_1, x_2, x_3) formé par les abscisses des projections de M sur les axes.

Dans le cas de la géométrie plane, les coordonnées d'un point M seront évidemment réduites à un couple (x_1, x_2) correspondant aux abscisses des deux projections de M. Les nombres x_1 et x_2 s'appellent alors respectivement l'ABSCISSE et l'ORDONNÉE de M.

133 - Considérons maintenant un vecteur lié $\overrightarrow{AB}$. Soient (a_1, a_2, a_3) les coordonnées de l'origine A et (b_1, b_2, b_3) les coordonnées de l'extrémité B.

Si $\overrightarrow{A'B'}$ est un vecteur lié équipollent à $\overrightarrow{AB}$, les coordonnées (a'_1, a'_2, a'_3) et (b'_1, b'_2, b'_3) de A' et B' vérifient :

$$b'_1 - a'_1 = b_1 - a_1,$$
$$b'_2 - a'_2 = b_2 - a_2,$$
$$b'_3 - a'_3 = b_3 - a_3.$$

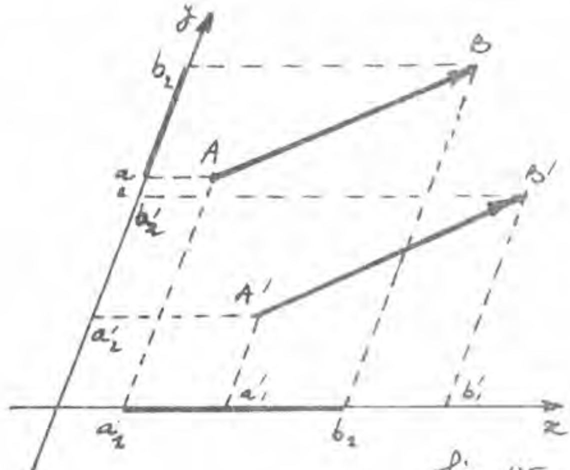


fig 135

C'est-à-dire que l'on peut énoncer la :

PROPOSITION 1 : Étant donné un vecteur lié $\overrightarrow{AB}$, le triplet

$$(X_1, X_2, X_3) = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$$

ne dépend que de la classe d'équivalence de $\overrightarrow{AB}$ pour la relation d'équipollence, c'est-à-dire du vecteur libre représenté par $\overrightarrow{AB}$.

Les nombres X_1, X_2 et X_3 s'appellent les COMPOSANTES du vecteur $\overrightarrow{AB}$ dans le repère choisi.

Désignons par $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$ les vecteurs unitaires choisis sur les axes Ox, Oy et Oz, on aura :

(1) $$\overrightarrow{AB} = X_1 . \vec{\imath} + X_2 . \vec{\jmath} + X_3 \vec{k}$$

134 - Il est clair que les coordonnées d'un point ou les composantes d'un vecteur dépendent du choix du repère : que ce soit des axes (et même de leur ordre) ou que ce soit des vecteurs unitaires choisis sur ceux-ci.

On notera donc souvent par $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ un repère pour bien préciser le choix qui a été fait pour les vecteurs de chacun des axes.

Une fois le repère fixé, on peut considérer l'application qui associe à tout point le triplet [ou le couple s'il s'agit de géométrie plane] formé par ses coordonnées.

On établit ainsi une bijection entre l'espace et l'ensemble $\mathbb{R}^3$, ou encore entre le plan et l'ensemble $\mathbb{R}^2$. Le point de vue adopté en géométrie analytique consiste à ramener l'étude des propriétés du plan ou de l'espace à celle des propriétés algébriques de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$.

En particulier, une partie quelconque du plan ou de l'espace correspondra à une partie de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ formée de couples (x_1, x_2) ou de triplets (x_1, x_2, x_3) assujettis à vérifier certaines conditions.

Lorsque ces conditions peuvent s'exprimer par des relations de nature algébrique, on dit qu'elles constituent l'ÉQUATION de la partie géométrique considérée. Nous nous bornerons dans ce module à l'étude des équations très simples des droites et des plans.

135 - Un deuxième point de vue intéressant est attaché à la notion de composantes des vecteurs :

Ici encore, le choix d'un repère détermine une bijection avec $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire que l'on peut "identifier" un vecteur libre avec le couple (ou le triplet) formé par ses composantes.

Désignons de façon précise par $\mathcal{V}(E)$ et $\mathcal{V}(P)$ les ensembles de vecteurs libres de l'espace et du plan. Le choix des repères détermine les applications :

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(E) &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \vec{u} &\longmapsto (x_1, x_2, x_3) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(P) &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \vec{v} &\longmapsto (x_1, x_2) \end{aligned}$$

qui permettent de traduire les problèmes géométriques sur les vecteurs en problèmes numériques ou algébriques sur les composantes.

Rappelons que cette correspondance bénéficie des deux propriétés fondamentales suivantes (que nous énoncerons pour E) :

PROPOSITION 2.

1° si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs de composantes (x_1, x_2, x_3) et (y_1, y_2, y_3) alors les composantes de $\vec{u}+\vec{v}$ sont

$$(x_1+y_1,\ x_2+y_2,\ x_3+y_3).$$

2° si $\vec{u}$ a pour composantes (x_1, x_2, x_3) et si λ est un nombre, alors $\lambda.\vec{u}$ a pour composantes :

$$(\lambda x_1,\ \lambda x_2,\ \lambda x_3).$$

136 - REMARQUE. Comme on le voit, il y a là une possibilité d'ambiguïté : l'ensemble $\mathbb{R}^3$ [ou $\mathbb{R}^2$ si l'on est en géométrie plane] peut être rapporté à l'ensemble des POINTS de la géométrie si l'on parle en termes de "coordonnées", il peut aussi être rapporté à l'ensemble des VECTEURS LIBRES si l'on parle en termes de "composantes".

On retrouve la même difficulté que sur une droite, lorsque les nombres de $\mathbb{R}$ peuvent représenter des "abscisses" (donc des points) ou des "mesures algébriques" (c'est-à-dire des vecteurs de la droite considérée)

Cette difficulté est malheureusement irréductible et donne souvent naissance à deux démarches assez incompatibles entre elles :

- si l'on remarque que tout point M peut être assimilé au vecteur $\overrightarrow{OM}$, on peut ne plus faire de différence explicite entre les deux points de vue et n'utiliser que le langage des coordonnées ou que le langage des composantes,

- si l'on veut au contraire insister sur la distinction entre les deux points de vue, on peut marquer la différence en utilisant un vocabulaire qui met l'accent sur des structures bien séparées : l'ensemble des points deviendra un ESPACE AFFINE, l'ensemble des vecteurs un ESPACE VECTORIEL. Ainsi $\mathbb{R}^3$ sera tantôt regardé comme un espace affine, tantôt comme un espace vectoriel.

Dans ce cours, nous continuerons à opérer une distinction conceptuelle entre points et vecteurs mais nous éviterons cependant d'utiliser systématiquement le langage des espaces affines et vectoriels.

137 - CHANGEMENTS DE REPÈRES. Considérons que l'espace (ou le plan) soit rapporté initialement à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, [ou à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$] et donnons-nous un nouveau repère que nous supposerons caractérisé par :

- l'origine O' de coordonnées (a_1, a_2, a_3) dans le repère initial,
- les vecteurs unitaires de composantes :

$$\vec{i}' = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$$
$$\vec{j}' = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$$
$$\vec{k}' = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$$

dans le repère initial.

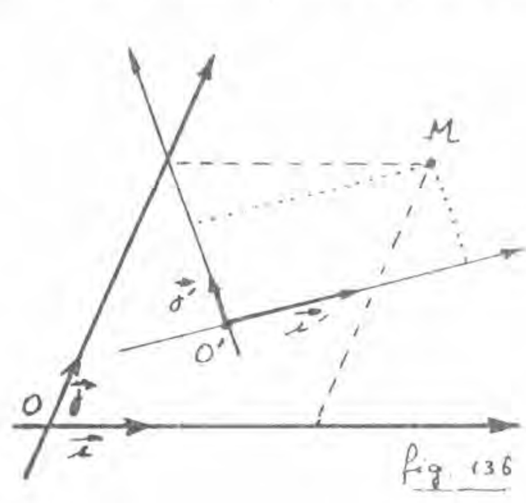


fig. 136

Le problème du changement de repère est de déterminer les coordonnées d'un point M (ou les composantes d'un vecteur $\vec{u}$) dans le nouveau repère en fonction des coordonnées (ou des composantes) dans l'ancien. Mais il est en fait plus simple d'écrire la relation inverse :

Soit un vecteur $\vec{u}$ de composantes (x_1, x_2, x_3) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, d'après la relation (1) du § 133, on a

$$(1') \qquad \vec{u} = x_1 . \vec{i} + x_2 . \vec{j} + x_3 \vec{k}$$

et si (x'_1, x'_2, x'_3) sont les composantes de $\vec{u}$ dans $(O', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$.

$$(2) \qquad \vec{u} = x'_1 . \vec{i}' + x'_2 . \vec{j}' + x'_3 . \vec{k}'$$

Donc en appliquant (1') à $\vec{i}'$, $\vec{j}'$ et $\vec{k}'$, il vient :

$$\vec{u} = x'_1 (\alpha_1 . \vec{i} + \alpha_2 . \vec{j} + \alpha_3 . \vec{k}) + x'_2 (\beta_1 . \vec{i} + \beta_2 . \vec{j} + \beta_3 . \vec{k}) + x'_3 (\gamma_1 . \vec{i} + \gamma_2 . \vec{j} + \gamma_3 . \vec{k})$$

ou encore en regroupant :

$$(3) \quad \vec{u} = (\alpha_1 . x'_1 + \beta_1 . x'_2 + \gamma_1 . x'_3) \vec{i} + (\alpha_2 . x'_1 + \beta_2 x'_2 + \gamma_2 x'_3) \vec{j} + (\alpha_3 . x'_1 + \beta_3 . x'_2 + \gamma_3 . x'_3) . \vec{k}$$

En comparant à (1') on obtient la :

PROPOSITION 3. dans un changement de repère, les anciennes composantes (x_1, x_2, x_3) d'un vecteur $\vec{u}$ s'écrivent en fonction des nouvelles composantes (x'_1, x'_2, x'_3) sous la forme :

$$(4) \qquad \begin{cases} x_1 = \alpha_1 . x'_1 + \beta_1 . x'_2 + \gamma_1 . x'_3 \\ x_2 = \alpha_2 . x'_1 + \beta_2 . x'_2 + \gamma_2 . x'_3 \\ x_3 = \alpha_3 . x'_1 + \beta_3 . x'_2 + \gamma_3 . x'_3 \end{cases}$$

où $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ désignent les composantes des vecteurs du nouveau repère, exprimées dans l'ancien.

On aura d'autre part en ce qui concerne les coordonnées.

PROPOSITION 4. dans un changement de repère, les anciennes coordonnées (y_1, y_2, y_3) d'un point M s'écrivent en fonction des nouvelles coordonnées (y'_1, y'_2, y'_3) sous la forme :

$$(5) \qquad \begin{cases} y_1 = \alpha_1 . y'_1 + \beta_1 . y'_2 + \gamma_1 . y'_3 + a_1 \\ y_2 = \alpha_2 . y'_1 + \beta_2 . y'_2 + \gamma_2 . y'_3 + a_2 \\ y_3 = \alpha_3 . y'_1 + \beta_3 . y'_2 + \gamma_3 . y'_3 + a_3 \end{cases}$$

où $\alpha_1, \dots, \gamma_3$ ont la signification de la proposition 3 et où (a_1, a_2, a_3) sont les coordonnées de la nouvelle origine dans l'ancien repère.

Nous laissons au lecteur la démonstration de la proposition 4 : il suffit de se ramener au calcul fait pour la vérification de la proposition 3 en écrivant au préalable que :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}.$$

138 - REMARQUE. Lorsque l'on désire obtenir explicitement les nouvelles coordonnées d'un point en fonction des anciennes, il convient donc d'"inverser" les relations (5) pour tirer les valeurs de y'_1, y'_2, y'_3 en fonction de y_1, y_2, y_3.

Nous n'entrerons pas ici dans l'étude systématique de ce problème (qui fait l'objet du module AG2) et nous renvoyons aux exercices pour l'étude de cas particuliers.

On notera cependant que, la plupart du temps, les formules précédentes suffisent à traiter les problèmes qui se posent en "géométrie analytique". En effet, si on s'intéresse à une partie de l'espace donnée par son <u>équation</u> dans un repère, on cherchera le plus souvent à déterminer son équation dans un nouveau repère.

Pour l'obtenir il suffit de remplacer, dans l'ancienne équation, les anciennes coordonnées par leurs expressions en fonction des nouvelles : on aboutit ainsi à une relation entre les nouvelles coordonnées qui constitue la nouvelle équation cherchée.

139 - EXEMPLE 1 : Plaçons-nous dans un plan et dans un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ tel que les vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ soient de longueur 1.

Nous choisissons comme nouveau repère (cf. fig 137) le repère $(O, \vec{\imath}', \vec{\jmath}')$ dont les axes sont les bissectrices de l'ancien et dont les vecteurs $\vec{\imath}'$ et $\vec{\jmath}'$ sont choisis de telle sorte qu'ils se projettent tous deux sur $\vec{\imath}$ parallèlement à Oy.

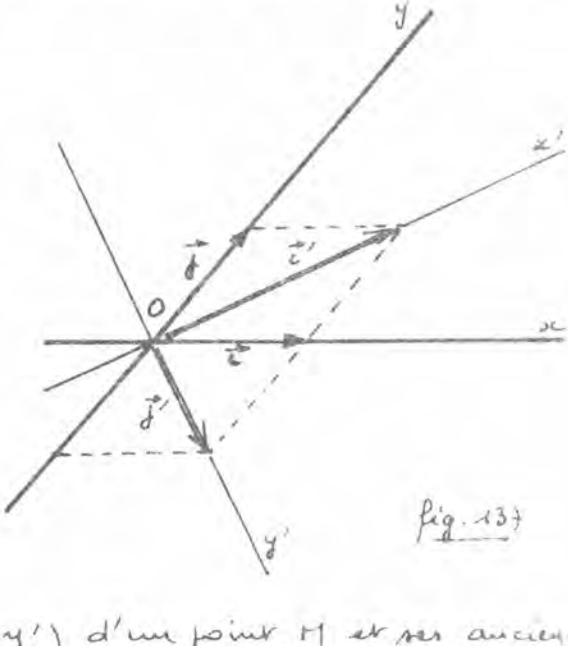


fig. 137

Cela implique que les composantes de $\vec{\imath}'$ et $\vec{\jmath}'$ dans l'ancien repère vérifient :

$$\vec{\imath}' = \alpha_1 \vec{\imath} + \alpha_2 \vec{\jmath} = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$$
$$\vec{\jmath}' = \beta_1 \vec{\imath} + \beta_2 \vec{\jmath} = \vec{\imath} - \vec{\jmath}$$

Les nouvelles coordonnées (y'_1, y'_2) d'un point M et ses anciennes coordonnées (y_1, y_2) sont donc liées par la relation :

$$(6) \qquad \begin{cases} y_1 = y'_1 + y'_2 \\ y_2 = y'_1 - y'_2 \end{cases}$$

Considérons la partie du plan [c'est ici une courbe] caractérisée par l'équation :

$$(E) \qquad y_1 \cdot y_2 = 1$$

dans le repère initial et cherchons sa nouvelle équation ; on remplacera simplement dans (E) les variables y_1 et y_2 par les expressions (6) :

$$(E') \qquad 1 = (y'_1 + y'_2)(y'_1 - y'_2) = {y'_1}^2 - {y'_2}^2$$

140 - EXEMPLE 2 : une famille très importante de repères est constituée par les REPÈRES ORTHONORMÉS. Rappelons qu'il s'agit (dans le plan ou dans l'espace) de tous les repères tels que :

a- les vecteurs $\vec{i}, \vec{j}, (\vec{k})$ sont de longueur 1,

b- les vecteurs $\vec{i}, \vec{j}, (\vec{k})$ sont deux à deux perpendiculaires.

Il est facile de se convaincre qu'un changement de repère se résume ici à une translation et une rotation des axes.

Nous reviendrons, dans des exercices ultérieurs, sur les formules du changement de coordonnées entre deux repères orthonormés de l'espace à trois dimensions. Le cas du plan est cependant à retenir :

Considérons un nouveau repère qui soit obtenu en faisant tourner le repère initial d'un angle θ.

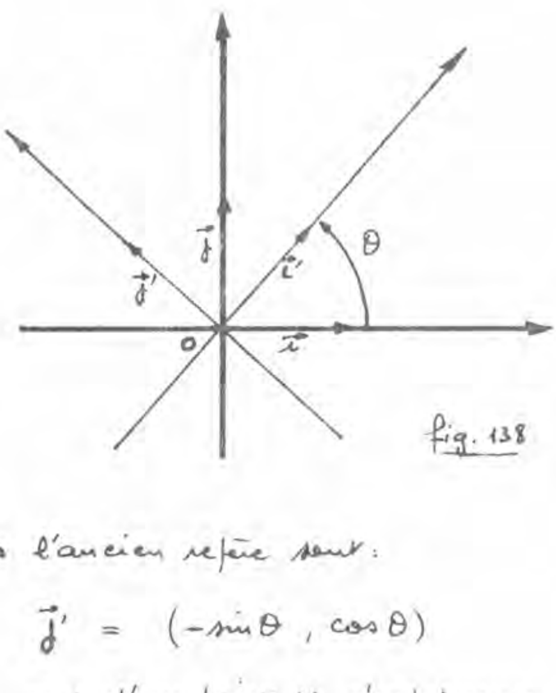


fig. 138

Les composantes de $\vec{i}'$ et $\vec{j}'$ dans l'ancien repère sont :

$$\vec{i}' = (\cos\theta, \sin\theta), \qquad \vec{j}' = (-\sin\theta, \cos\theta)$$

Donc les <u>anciennes coordonnées</u> (x_1, x_2) d'un point M s'expriment en fonction des <u>nouvelles</u> (x'_1, x'_2) par les relations :

$$(7) \qquad \begin{cases} x_1 = \cos\theta \cdot x'_1 + \sin\theta \cdot x'_2 \\ x_2 = -\sin\theta \cdot x'_1 + \cos\theta \cdot x'_2 \end{cases}$$

Les formules inverses s'obtiennent en résolvant le système ou simplement en appliquant la rotation d'angle $-\theta$:

$$(7') \qquad \begin{cases} x'_1 = \cos\theta \cdot x_1 - \sin\theta \cdot x_2 \\ x'_2 = \sin\theta \cdot x_1 + \cos\theta \cdot x_2 \end{cases}$$

Exercice 118 : on se place dans un repère quelconque du plan et on considère un triangle ABC donné par ses sommets :

$$A = (a, a'), \quad B = (b, b'), \quad C = (c, c')$$

a) donner les coordonnées des milieux des côtés,
b) donner, pour chaque médiane les coordonnées du point qui est situé aux deux tiers de celle-ci en partant du sommet.
Mêmes questions en considérant un triangle donné dans l'espace.

Exercice 119 : on se place dans un repère quelconque de l'espace et on considère un tétraèdre ABCD :

$$A = (a_1, a_2, a_3), \quad B = (b_1, b_2, b_3), \quad C = (c_1, c_2, c_3), \quad D = (d_1, d_2, d_3)$$

a) donner les coordonnées des milieux des arêtes et des centres de gravité de chaque face [cf exercice précédent]
b) vérifier que les milieux des segments qui joignent les milieux de deux arêtes opposées quelconques sont les mêmes.
c) on désigne par G le point précédent. Montrer que G est situé sur chacune des droites qui joignent un sommet au centre de gravité de la face opposée.
d) on définit le nouveau repère $(G, \vec{GA}, \vec{GB}, \vec{GC})$. Quelles sont les coordonnées des sommets du tétraèdre dans ce repère ?

Exercice 120 : on se place dans un repère orthonormé.
1° en utilisant les sommets d'un cube [cf. Leçon III] donner les coordonnées des sommets d'un tétraèdre régulier dont le centre G [cf. exercice 119] soit l'origine du repère.
2° opérer un changement de repère tel que la nouvelle origine soit le centre d'une des faces du tétraèdre.

Exercice 121 : inverser les formules (6) de l'exemple donné au § 138, de façon à exprimer les nouvelles coordonnées en fonction des anciennes.
Dessiner la courbe dont l'équation est donnée à la fin de ce paragraphe.

ÉQUATIONS DE DROITES DANS LE PLAN.

La majeure partie de cette question est considérée comme déjà connue du lecteur. Le but de la rédaction (succincte) est donc essentiellement de constituer une introduction à la question des équations de droites et de plan dans l'espace.

141 - PROPOSITION 5 : soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan, dans lequel les coordonnées d'un point M seront notées (x,y), l'équation d'une droite est de la forme :

$$ax + by + c = 0 \qquad (8)$$

Réciproquement, toute équation de ce type, dans laquelle a et b ne sont pas tous deux nuls, est l'équation d'une droite.

De plus deux équations représentent la même droite si et seulement si l'une se déduit de l'autre par multiplication par un scalaire.

<u>Démonstration</u> : considérons tout d'abord, la droite $\mathcal{D}$ passant par les points $A = (\alpha, \alpha')$ et $B = (\beta, \beta')$. Un point M de coordonnées (x,y) est sur $\mathcal{D}$ si et seulement si le vecteur $\vec{AM}$ est colinéaire au vecteur $\vec{AB}$. Les composantes de ces deux vecteurs sont :

$(x-\alpha, y-\alpha')$ et $(\beta-\alpha, \beta'-\alpha')$

La condition peut s'écrire en disant qu'il existe un scalaire λ tel que :

$$\begin{cases} (x-\alpha) = \lambda.(\beta-\alpha) \\ (y-\alpha') = \lambda.(\beta'-\alpha') \end{cases}$$

mais aussi en écrivant que

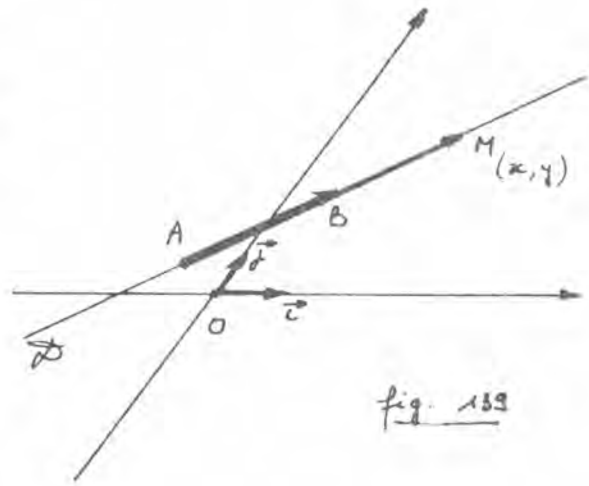


fig. 139

$$\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha} = \frac{y-\alpha'}{\beta'-\alpha'} \qquad (9)$$

En développant cette égalité il vient :

$$(\beta'-\alpha').x - (\beta-\alpha).y + (\alpha'\beta - \alpha\beta') = 0 \qquad (9')$$

L'équation d'une droite est donc bien de la forme (8). Partons inversement de l'équation $ax + by + c = 0$ où nous supposerons que a et b ne sont pas tous deux nuls et cherchons deux points particuliers de l'ensemble correspondant :

1° si a, b, c ne sont pas nuls les points de coordonnées :

$$\left(0, -\frac{c}{b}\right) \quad \text{et} \quad \left(-\frac{c}{a}, 0\right)$$

conviennent,

2° si $a = 0$, alors comme b n'est pas nul, on pourra prendre :

$$\left(0, -\frac{c}{b}\right) \qquad \text{et} \qquad \left(1, -\frac{c}{b}\right),$$

3° si b ou c = 0, on prendra :

$$\left(-\frac{c}{a}, 0\right) \qquad \text{et} \qquad \left(-\frac{c+b}{a}, 1\right).$$

Nous laissons le lecteur vérifier que, dans ces trois cas, la formule (9') donne bien l'équation $ax+by+c=0$ comme équation de la droite passant par les deux points choisis. Il pourra ainsi en déduire la fin de la démonstration de la proposition 5

142 - Les calculs suggérés ci-dessus sont en fait à retenir comme justifications de règles pratiques permettant de déterminer des équations de droites dans des cas concrets :

(1) DROITE PASSANT PAR DEUX POINTS DONNÉS : la droite AB déterminée par les points $A=(\alpha,\alpha')$ et $B=(\beta,\beta')$ a pour équation :

$$\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha} = \frac{y-\alpha'}{\beta'-\alpha'}, \quad \text{ou encore : } (\beta'-\alpha').x - (\beta-\alpha)y + (\alpha'\beta-\alpha\beta') = 0$$

(2) DROITE PASSANT PAR UN POINT ET PARALLÈLE À UN VECTEUR DONNÉ (ou À UNE DROITE DONNÉE).

La réponse à cette question repose sur le calcul aboutissant aux formules (9) et (9') du § 141. On voit en effet que les coefficients de x et y dans (9') correspondent aux composantes du vecteur $\vec{AB}$. On peut donc énoncer la :

PROPOSITION 6 : une droite d'équation

$$ax + by + c = 0$$

est parallèle au vecteur de composantes $(-b, a)$. On dit que ce vecteur est un VECTEUR DIRECTEUR de la droite considérée.

Cela étant, la solution au problème posé est facile :

- la droite qui passe par le point (x_0, y_0) et qui est parallèle au vecteur (α, β) a pour équation :

$$(x-x_0).\beta = (y-y_0)\alpha \quad \text{ou encore} \quad \beta x - \alpha y - (\beta x_0 - \alpha y_0) = 0$$

- la droite qui passe par le point (x_0, y_0) et qui est parallèle à la droite d'équation $ax+by+c=0$ a même vecteur directeur :

$$(x-x_0)(a) = (y-y_0)(-b) \quad \text{ou} \quad ax + by - (ax_0 + by_0) = 0$$

143 - REMARQUE : rappelons au passage deux cas particuliers bien connus des formules ci-dessus :

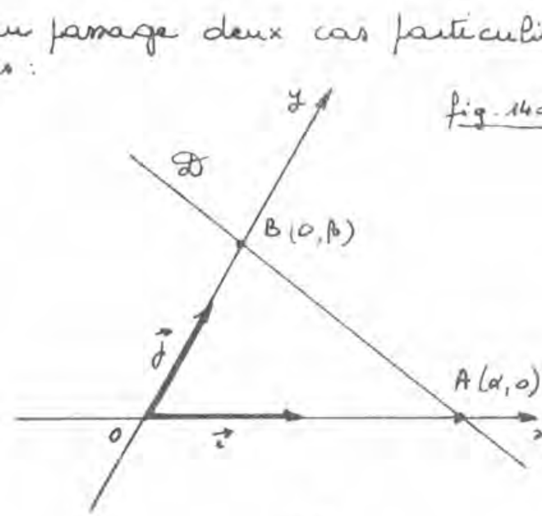


fig. 140

(1') si une droite $\mathcal{D}$ coupe les axes du repère aux points A et B de coordonnées

$$A = (\alpha, 0) \qquad B = (0, \beta)$$

son équation est :

$$\beta x + \alpha y - \alpha\beta = 0$$

ou, si aucun de ces points n'est confondu avec l'origine :

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1$$

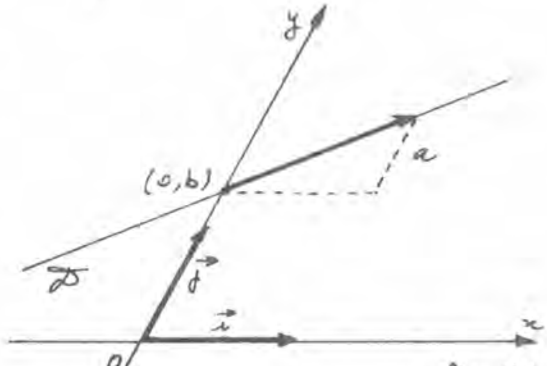


fig. 141

(2') lorsque l'équation d'une droite $\mathcal{D}$ peut être mise sous la forme

$$y = ax + b$$

elle est caractérisée par :

1° le fait qu'elle passe par le point $(0, b)$ [c'est le point où elle coupe l'axe Oy, b s'appelle aussi " l'ordonnée à l'origine]

2° le fait qu'elle est parallèle au vecteur (directeur) de composantes $(1, a)$. [a s'appelle alors la "pente" de la droite $\mathcal{D}$ et deux droites sont parallèles si et seulement si elles ont même pente]

144 - Intéressons-nous à la recherche de l'intersection de deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

Si les équations respectives de ces droites sont

$$ax + by + c = 0 \qquad \text{et} \qquad a'x + b'y + c' = 0,$$

il est clair que la recherche du point d'intersection revient à la résolution du <u>système</u> :

$$(10) \qquad \begin{cases} ax + by = -c \\ a'x + b'y = -c' \end{cases}$$

Ce système aura une solution et une seule (x_0, y_0) représentant les coordonnées du point d'intersection des deux droites si celles-ci ne sont pas parallèles. C'est-à-dire si elles ont des vecteurs directeurs non colinéaires. En écrivant que les composantes de ces vecteurs ne doivent pas être proportionnelles on obtient donc la condition :

$$(11) \qquad ab' - a'b \neq 0.$$

Au contraire, si cette condition n'est pas réalisée, les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles (ou confondues) et on a la possibilité de deux cas :

a) $ab' = a'b$ mais les deux équations ne sont pas proportionnelles : les droites sont distinctes et le système (10) n'a aucune solution.

b) les deux équations sont proportionnelles et en fait $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont confondues.

145 - Considérons maintenant la donnée de trois droites $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{D}''$ et cherchons à déterminer dans quel cas elles sont concourantes. Tout revient évidemment à chercher si le système

$$(12) \quad \begin{cases} ax + by = -c \\ a'x + b'y = -c' \\ a''x + b''y = -c'' \end{cases}$$

formé par les trois équations possède une solution (x_0, y_0)

Si elle existe, cette solution fournira les coordonnées du point commun aux trois droites.

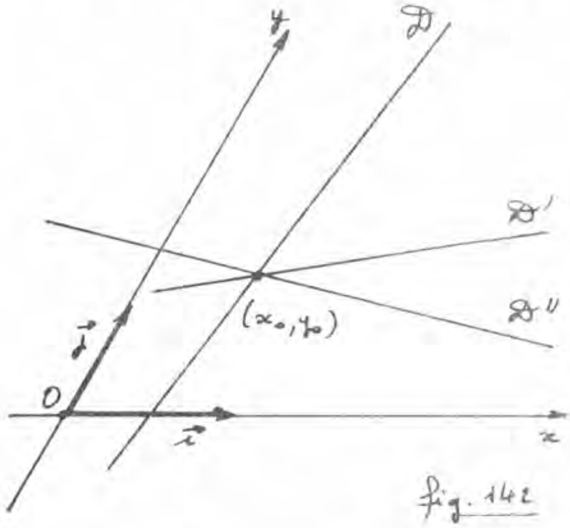


fig. 142

THÉORÈME 1 : pour que le système (12) admette au moins une solution, il faut et il suffit que l'une des équations s'écrive comme COMBINAISON LINÉAIRE des deux autres et que celles-ci ne correspondent pas à des droites parallèles

Démonstration : supposons que les deux premières équations du système (12) ne correspondent pas à des droites parallèles, c'est-à-dire que $(ab' - ba')$ soit différent de zéro.

En résolvant le système formé par ces deux premières équations on trouve donc les coordonnées (x_0, y_0) du point d'intersection de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$:

$$x_0 = \frac{bc' - b'c}{ab' - ba'}, \qquad y_0 = \frac{ca' - ac'}{ab' - ba'}$$

Mais il est facile de vérifier que l'on peut toujours écrire a'' et b'' sous la forme :

$$a'' = \left[\frac{a''b' - b''a'}{ab' - ba'}\right] . a + \left[\frac{ab'' - ba''}{ab' - ba'}\right] . a'$$

et

$$b'' = \left[\frac{a''b' - b''a'}{ab' - ba'}\right] . b + \left[\frac{ab'' - ba''}{ab' - ba'}\right] . b'$$

Or si l'on écrit maintenant que le point de coordonnées (x_0, y_0) appartient à la droite D'', cela signifie que ces deux coordonnées vérifient la troisième équation du système (12). On obtient, en remplaçant :

$$c'' = \left[\frac{a''b' - b''a'}{ab' - ba'}\right] . c + \left[\frac{ab'' - ba''}{ab' - ba'}\right] . c'$$

Traduisons : nous venons de montrer que si l'on pose :

$$\lambda = \frac{a''b' - b''a'}{ab' - ba'} \quad \text{et} \quad \mu = \frac{ab'' - ba''}{ab' - ba'},$$

alors

$$a'' = \lambda a + \mu a', \qquad b'' = \lambda b + \mu b', \qquad c'' = \lambda c + \mu c'.$$

En d'autres termes, la troisième équation s'écrit :

$$a''x + b''y + c'' = \lambda[ax + by + c] + \mu[a'x + b'y + c'] = 0$$

c'est précisément dire qu'elle est combinaison linéaire des deux premières.

Le reste de la démonstration est laissé au lecteur.

146 - REMARQUES. On dit que des droites concourantes forment un FAISCEAU. Ainsi deux droites sécantes en un point M déterminent le faisceau formé par toutes les droites qui passent par M.

Le théorème 1 entraine que pour obtenir l'équation d'une droite appartenant au faisceau déterminé par deux droites dont on connait les équations, il suffit de chercher parmi les combinaisons linéaires de ces deux équations.

Par extension, on peut dire que deux droites parallèles déterminent aussi un faisceau : il s'agira de la famille des droites dont l'équation s'écrit comme combinaison linéaire des deux autres. On trouve évidemment de cette façon les droites parallèles aux droites données, c'est-à-dire les droites qui sont "concourantes" avec celles-ci en un même point à l'infini.

Donnons un exemple d'application du théorème 1.

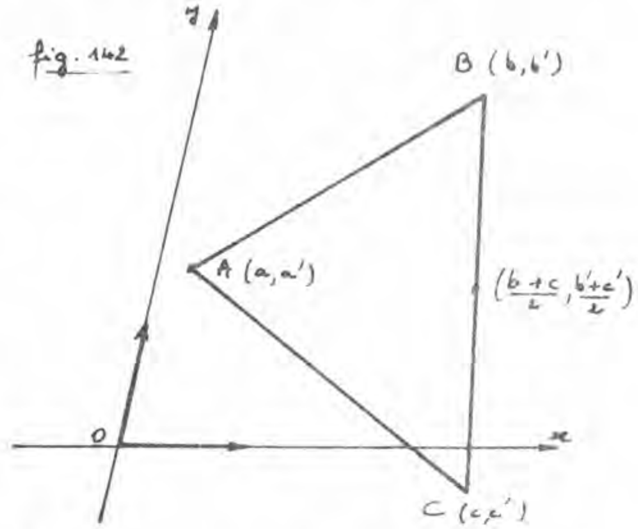
147 - Considérons (dans un repère quelconque) le triangle ABC dont les sommets ont pour coordonnées :

$$A = (a, a'), \qquad B = (b, b'), \qquad C = (c, c').$$

En appliquant la formule (9') du §141 on obtient l'équation de la droite AB :

$$(b'-a')x-(b-a)y+(a'b-ab')=0$$

fig. 142



par échange des lettres, l'équation de AC est :

$$(c'-a')x-(c-a)y+(a'c-ac')=0$$

Si nous cherchons maintenant l'équation de la médiane issue du sommet A, il suffit — d'après le théorème 1 — de trouver des valeurs de λ et μ telles que l'équation :

$$0=\lambda\left[(b'-a')x-(b-a)y+(a'b-ab')\right]+\mu\left[(c'-a')x-(c-a)y+(a'c-ac')\right]$$

soit vérifiée par les coordonnées du milieu de BC. Mais pour les valeurs $x=\frac{1}{2}(b+c)$, $y=\frac{1}{2}(b'+c')$, on a :

$$0=\lambda\left[(a'b-ab')+(b'c-bc')+(c'a-a'c)\right]+\mu\left[(ab'-a'b)+(c'b-cb')+(a'c-ac')\right]$$

Il est donc clair que $\lambda=1$ et $\mu=1$ conviennent.

Récapitulons en tenant compte de l'ordre des points qui a servi à écrire les équations des droites :

Si on désigne par $E_{AB}=0$, $E_{CA}=0$ et $E_{BC}=0$ les équations des côtés, on aura :

- pour la médiane issue de A : $E_{AB}-E_{CA}=0$
- pour la médiane issue de B : $E_{BC}-E_{AB}=0$
- pour la médiane issue de C : $E_{CA}-E_{BC}=0$

Ecrites sous cette forme, on voit que la somme des équations des trois médianes est nulle.

Cela signifie que l'une d'entre elles s'écrit comme l'opposée de la somme des deux autres. C'est-à-dire comme combinaison linéaire.

On redémontre ainsi de façon analytique la concourance des médianes.

Exercice 122: déterminer les équations des droites passant par les couples de points suivants :

$(1,1)$ et $(3,2)$ $(1,4)$ et $(4,-2)$ $(0,-4)$ et $(\frac{3}{2},0)$

Ces droites sont-elles concourantes?

Exercice 123 : on considère les points A, B, C dont les coordonnées sont :

$A = (1,2)$ $\quad$ $B = (5,0)$ $\quad$ $C = (6,3)$

a) déterminer les coordonnées du point D tel que ABCD soit un parallélogramme

b) écrire les équations des côtés de ce parallélogramme ainsi que les équations des diagonales.

c) vérifier que le point d'intersection I des diagonales est le milieu de AC et BD.

d) parmi les six équations trouvées au b), quelles sont celles qui peuvent s'écrire comme combinaisons linéaires de deux autres ?

Préciser ces combinaisons linéaires.

e) déterminer l'équation de la droite joignant I au milieu J de AB en écrivant qu'elle est combinaison linéaire des équations de AC et BD

f) montrer que la droite IJ passe par le milieu de DC et qu'elle est parallèle à AD et BC

Exercice 124 : on considère un triangle ABC. Trouver l'équation de la droite joignant les milieux I et J de AB et AC des deux façons suivantes :

a) calculer les coordonnées de I et J et utiliser la méthode (1) du § 142.

b) utiliser la méthode (2) du § 142 en écrivant que la droite cherchée passe par I et admet $\vec{BC}$ comme vecteur directeur.

Exercice 125 : dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on considère les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ d'équations :

$$\mathcal{D} : \quad x + y + 1 = 0$$
$$\mathcal{D}' : \quad x - y = 0$$

Choisir un vecteur directeur $\vec{i}'$ de $\mathcal{D}$ et un vecteur directeur $\vec{j}'$ de $\mathcal{D}'$.

Déterminer les équations des axes du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ dans le repère formé par $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ munies des vecteurs $\vec{i}'$ et $\vec{j}'$.

ÉQUATIONS DE PLANS DANS L'ESPACE.

148 - Nous nous plaçons désormais dans l'espace muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et nous désignerons les coordonnées d'un point M par les lettres (x, y, z).

L'analogue de la proposition 5 fournit l'équation d'un PLAN :

PROPOSITION 7. Pour qu'une partie de l'espace soit un plan, il faut et il suffit que son équation soit de la forme :

$$ax + by + cz + d = 0 \qquad (13)$$

De plus deux telles équations représentent le même plan si et seulement si leurs coefficients sont proportionnels.

<u>Démonstration</u> : considérons trois points A, B, C non alignés du plan $\mathcal{P}$ et désignons par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$.

L'un au moins des vecteurs $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ n'est pas parallèle à $\mathcal{P}$ [disons $\vec{k}$] et on peut donc dire que

$$(A, \vec{u}, \vec{v}, \vec{k})$$

est un repère de l'espace. Soient (X, Y, Z) les coordonnées d'un point M dans ce repère.

Il est possible de caractériser le plan $\mathcal{P}$ de deux façons :

1°) on peut dire que M est dans $\mathcal{P}$ si et seulement si $\vec{AM}$ s'écrit sous la forme

$$\vec{AM} = X.\vec{u} + Y\vec{v},$$

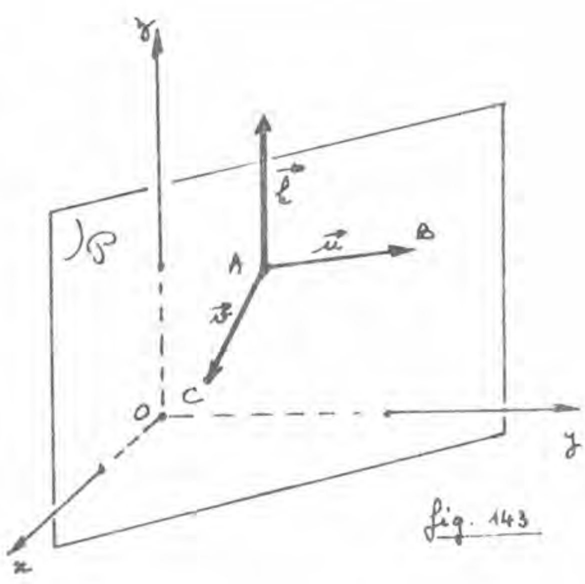


fig. 143

2°) on peut dire aussi que $\mathcal{P}$ est le plan d'équation $Z = 0$ dans le repère $(A, \vec{u}, \vec{v}, \vec{k})$.

Nous n'utiliserons pour le moment que le deuxième point de vue : considérons $(A, \vec{u}, \vec{v}, \vec{k})$ comme "ancien repère" et $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ comme "nouveau repère", les formules de changement de coordonnées seront de la forme (5) [cf. § 137] et on aura en particulier

$$Z = ax + by + cz + d$$

Il suffit donc d'écrire que $\mathcal{P}$ est caractérisé par la condition

$$Z = 0$$

pour obtenir l'équation (13).

149 - EXEMPLE. La méthode utilisée dans la démonstration laisse entier le problème de la détermination des coefficients explicites de l'équation d'un plan. Nous reviendrons sur cette question au cours de la leçon suivante, mais nous allons nous placer dans un cas particulier pour montrer comment on pouvait détailler les calculs précédents :

PROPOSITION 8. Le plan $\mathcal{P}$ qui coupe les axes du repère aux points :

$$A = (a, 0, 0),$$
$$B = (0, b, 0),$$
$$C = (0, 0, c),$$

avec $abc \neq 0$, admet comme équation :

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \qquad (14)$$

[comparer au résultat du § 143]

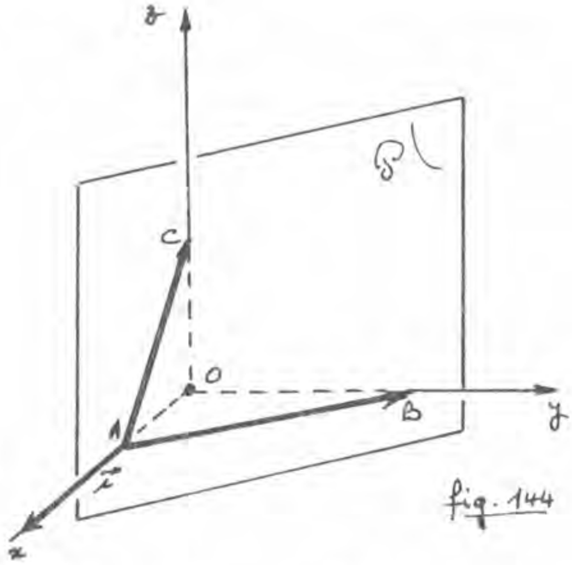


fig. 144

Démonstration :

Dans le repère $(A, \vec{AB}, \vec{AC}, \vec{i})$ l'équation de $\mathcal{P}$ est $Z = 0$. Appelons "nouveau repère" le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, il s'agit d'exprimer les coordonnées et composantes de ce repère dans "l'ancien".

Mais par hypothèse :

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = b\vec{j} - a\vec{i} \ ; \quad \vec{AC} = \vec{OC} - \vec{OA} = c\vec{k} - a\vec{i}$$

Donc on a :

1°) $\vec{i} = 0.\vec{AB} + 0.\vec{AC} + 1.\vec{i} \quad \rightsquigarrow \quad \vec{i} = (0, 0, 1)$

2°) $\vec{j} = \frac{1}{b}.\vec{AB} + 0.\vec{AC} + \frac{a}{b}\vec{i} \quad \rightsquigarrow \quad \vec{j} = (\frac{1}{b}, 0, \frac{a}{b})$

3°) $\vec{k} = 0.\vec{AB} + \frac{1}{c}.\vec{AC} + \frac{a}{c}\vec{i} \quad \rightsquigarrow \quad \vec{k} = (0, \frac{1}{c}, \frac{a}{c})$

pour les composantes des vecteurs dans "l'ancien repère" $(A, \vec{AB}, \vec{AC}, \vec{i})$, et comme $\vec{AO} = -a\vec{i}$, les coordonnées de O sont :

$$O = (0, 0, -a)$$

Finalement la formule (5) du paragraphe 137 donne

$$Z = 1.x + \frac{a}{b}y + \frac{a}{c}z - a$$

et l'équation $Z = 0$ s'écrit bien sous la forme (14).

150 - REMARQUE. On notera, a posteriori, que l'équation (14) est bien vérifiée lorsque l'on remplace (x, y, z) par les coordonnées de A, B et C. On peut, de façon générale, chercher à déterminer les coefficients en écrivant que trois points donnés annulent l'é-

équation et procéder par identification. On aboutit en général à un système de trois équations...

151 – Cherchons à quelles conditions un vecteur (libre) est parallèle à un plan donné, $\mathcal{P}$, d'équation :
$$ax + by + cz + d = 0.$$

Si (α, β, γ) sont les composantes du vecteur $\vec{u}$, alors pour tout point (x_0, y_0, z_0) appartenant à $\mathcal{P}$, le point de coordonnées $(x_0+\alpha, y_0+\beta, z_0+\gamma)$ doit encore être dans $\mathcal{P}$.

On peut donc écrire que les deux points [qui sont les extrémités d'un vecteur lié représentant $\vec{u}$] vérifient l'équation de $\mathcal{P}$:

$$a x_0 + b y_0 + c z_0 + d = 0$$

$$a(x_0+\alpha) + b(y_0+\beta) + c(z_0+\gamma) + d = 0$$

et on obtient par différence :

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = 0. \qquad (15)$$

On vérifierait de même la réciproque et nous pouvons finalement énoncer la :

PROPOSITION 9 : étant donné le plan d'équation :
$$ax + by + cz + d = 0,$$
la condition nécessaire et suffisante pour qu'un vecteur de composantes (α, β, γ) soit parallèle à ce plan est donnée par
$$a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$$

152 – Notons quelques applications de cette remarque :

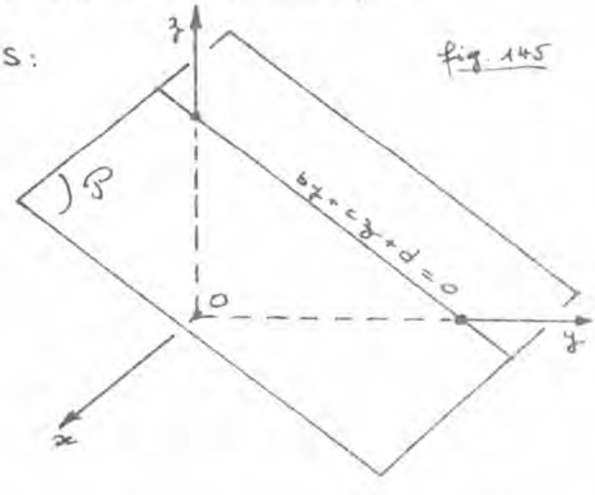


fig. 145

(1) PLANS PARALLÈLES AUX AXES :
Soit [par exemple] un plan $\mathcal{P}$ parallèle à l'axe Ox.
Nous pouvons appliquer la proposition précédente au vecteur $\vec{i} = (1, 0, 0)$, donc l'équation
$$ax + by + cz + d = 0$$
de $\mathcal{P}$ vérifie
$$a \cdot 1 = 0$$
c'est-à-dire que le coefficient de x est nul. [on aurait une condition analogue avec un autre axe]
Ici l'équation de $\mathcal{P}$ <u>ne dépend pas de x</u> : elle se réduit à l'équation de la droite intersection avec yOz.

(2) PLANS PARALLÈLES : la proposition 9 permet de montrer un critère de parallélisme entre deux plans :

PROPOSITION 10 : deux plans d'équations respectives :

$$ax + by + cz + d = 0 \qquad a'x + b'y + c'z + d' = 0$$

sont parallèles si et seulement si le triplet (a', b', c') est proportionnel au triplet (a, b, c) ; c'est-à-dire s'il existe un scalaire λ tel que $a' = \lambda a$, $b' = \lambda b$, $c' = \lambda c$.

<u>Démonstration</u> : il est clair, en premier lieu, que si (a, b, c) et (a', b', c') sont proportionnels, les deux plans admettent les mêmes vecteurs parallèles [cf. proposition 9]. Ils sont donc parallèles.

Réciproquement, supposons que tout vecteur parallèle au premier des deux plans soit parallèle au second.

Comme ce plan coupe au moins deux des plans déterminés par les axes du repère, il contient au moins deux vecteurs de la forme :

$$(0, \beta, \gamma), \qquad (\alpha', 0, \gamma'), \qquad (\alpha'', \beta'', 0).$$

Nous supposons qu'il contient les deux premiers. Nous pouvons donc traduire les hypothèses en utilisant la proposition 9 :

$$\begin{aligned} b\beta + c\gamma &= 0 \\ a\alpha' + c\gamma' &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} b'\beta + c'\gamma &= 0 \\ a'\alpha' + c'\gamma' &= 0 \end{aligned}$$

On déduit de là $\frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ et que $\frac{a}{a'} = \frac{c}{c'}$, ce qui est la propriété cherchée.

<u>Exercice 126</u> : on considère un tétraèdre ABCD. En se plaçant dans le repère $(A, \vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})$, donner les équations des quatre plans constituant les faces du tétraèdre ainsi que des six plans déterminés par une des arêtes et le milieu de l'arête opposée.
Montrer que ces six derniers plans ont un point commun.

<u>Exercice 127</u> : dessiner, dans un repère orthonormé, le plan d'équation $x + y + z = 0$.
Préciser ses intersections avec les plans xOy, yOz, zOx.

<u>Exercice 128</u> : On suppose qu'un plan $\mathcal{P}$ coupe le plan xOz suivant la droite d'équation $x - z = 0$ et qu'il coupe le plan yOz suivant la droite d'équation $y - 2z = 0$.

Montrer que l'équation de $\mathcal{P}$ est donnée par

$$2x + y - 2z = 0$$

Trouver l'équation du plan parallèle à $\mathcal{P}$ et passant par le point de coordonnées $(1, -1, 3)$.

ÉQUATIONS DE DROITES DANS L'ESPACE

Si, dans un plan muni d'un repère, une droite est représentée par une équation, il n'en va pas de même dans l'espace. Nous avons vu en effet que la généralisation naturelle de l'équation d'une droite correspond à la donnée d'un plan. En fait, nous allons voir que pour représenter une droite de l'espace il faut toujours faire appel à au moins deux équations.

153 - REPRÉSENTATION PARAMÉTRIQUE. Une première façon de représenter analytiquement une droite $\mathcal{D}$ dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ consiste à caractériser $\mathcal{D}$ par deux éléments :

1° la donnée d'un POINT par ses coordonnées. Par exemple
$$A = (x_0, y_0, z_0)$$
2° la donnée d'un VECTEUR porté par $\mathcal{D}$ (ou parallèle à $\mathcal{D}$). Ce vecteur, disons $\vec{u}$, sera donné par ses composantes :
$$\vec{u} = (\alpha, \beta, \gamma)$$

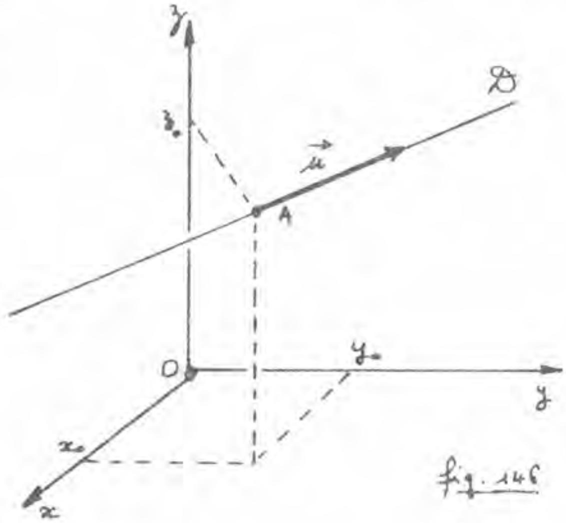


fig. 146

Cela étant, nous disons que le point M de coordonnées (x, y, z) appartient à $\mathcal{D}$ si et seulement si le vecteur $\vec{AM}$ est colinéaire à $\vec{u}$, c'est-à-dire s'il existe un scalaire λ tel que

$$(16) \qquad \vec{AM} = \lambda . \vec{u} \iff \begin{cases} x = \lambda\alpha + x_0 \\ y = \lambda\beta + y_0 \\ z = \lambda\gamma + z_0 \end{cases}$$

On obtient ainsi tous les points de $\mathcal{D}$ en faisant varier λ. Cette représentation est appelée REPRÉSENTATION PARAMÉTRIQUE de la droite $\mathcal{D}$, le vecteur $\vec{u}$ est un VECTEUR DIRECTEUR de $\mathcal{D}$.

On notera que la représentation (16) est loin d'être unique : elle dépend du choix du point A et du choix de $\vec{u}$.

154 - EXEMPLE : considérons la droite $\mathcal{D}$ passant par les points A et B de coordonnées :
$$A = (1, 1, 1), \qquad B = (3, -1, 0).$$
Nous pouvons nous servir du point A et du vecteur directeur $\vec{AB}$ qui a pour composantes $\vec{u} = (2, -2, -1)$.

L'équation (16) devient :
$$\vec{AM} = \lambda . \vec{AB} \iff \begin{cases} x = 2\lambda + 1 \\ y = -2\lambda + 1 \\ z = -\lambda + 1 \end{cases}$$

155 - Si l'on veut représenter une droite par une "équation cartésienne" [c'est-à-dire par une expression ne faisant intervenir que les coordonnées] il faut considérer l'INTERSECTION de deux plans qui contiennent cette droite.

Ainsi, deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ d'équations respectives :
$$ax + by + cz + d = 0, \qquad a'x + b'y + c'z + d' = 0,$$
définissent [s'ils ne sont pas parallèles] la droite dont les points vérifient le système :

$$(17) \qquad \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

C'est ce système que nous considérerons comme constituant une "équation" de la droite intersection.

Prenons à titre d'exemple l'axe Ox : il faut, pour le caractériser, la conjonction de deux conditions :

$$\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

mais il n'est pas possible de réduire ce système à une seule équation.

Nous allons voir comment on peut passer de ce type de représentation à la représentation paramétrique évoquée précédemment.

156 - PASSAGE D'UNE REPRÉSENTATION CARTÉSIENNE À UNE REPRÉSENTATION PARAMÉTRIQUE.

Considérons par exemple la droite $\mathcal{D}$ donnée par les équations :

$$\begin{cases} x + y + 2z + 1 = 0 \\ 2x - y + z - 2 = 0 \end{cases}$$

Nous pouvons écrire ce système sous la forme :

$$\begin{cases} x + y = -2z - 1 \\ 2x - y = -z + 2 \end{cases}$$

et donc calculer x et y en fonction de z. Ajoutons membre à membre, il vient

$$3x = -3z + 1,$$

soit :

$$x = -z + \frac{1}{3}$$

En reportant dans la première équation :

$$y = -z - \frac{4}{3}$$

On posera alors $z = \lambda$ et on obtiendra les trois relations :
$$x = -\lambda + \frac{1}{3}, \qquad y = -\lambda - \frac{4}{3}, \qquad z = \lambda$$

C'est la représentation paramétrique de $\mathcal{D}$ analogue à (16) et on peut en conclure :

1° que $\mathcal{D}$ passe par le point de coordonnées $\left(\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}, 0\right)$ (obtenu pour $\lambda = 0$)

2° qu'un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est le vecteur de composantes $(-1, -1, 1)$

157 - PASSAGE D'UNE REPRÉSENTATION PARAMÉTRIQUE À UNE REPRÉSENTATION CARTÉSIENNE.

Nous partirons de la droite $\mathcal{D}$ du § 154, de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 2\lambda + 1 \\ y = -2\lambda + 1 \\ z = -\lambda + 1 \end{cases}$$

Il s'agit de trouver deux plans [les plus simples possibles] qui contiennent $\mathcal{D}$.

Considérons, pour commencer, la projection de $\mathcal{D}$ sur xOy. C'est la droite d'équations :

$$\begin{cases} x = 2\lambda + 1 \\ y = -2\lambda + 1 \\ [z = 0] \end{cases}$$

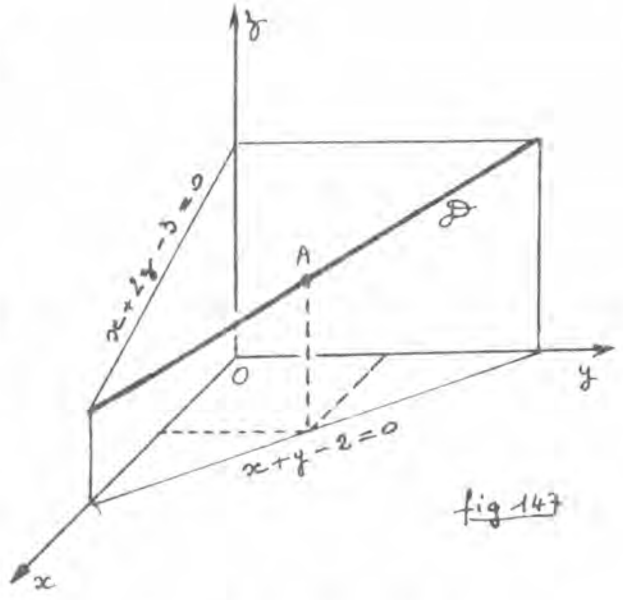


fig 147

Dans le plan xOy, on peut éliminer λ entre les expressions de x et y, il vient en faisant la somme :

$$x + y - 2 = 0$$

Ceci est [dans le plan xOy] l'équation de la droite projection de $\mathcal{D}$. C'est aussi, dans l'espace tout entier, l'équation du plan vertical contenant $\mathcal{D}$.

On peut opérer de façon analogue en projetant $\mathcal{D}$ sur xOz et, en éliminant λ entre x et z on obtiendra l'équation

$$x + 2z - 3 = 0$$

du plan parallèle à Oy contenant $\mathcal{D}$.

Finalement, une représentation cartésienne de $\mathcal{D}$ est donnée par le système :

$$\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x + 2z - 3 = 0 \end{cases}$$

158 - FAISCEAUX DE PLANS. Considérons trois plans P_1, P_2, P_3 donnés par leurs équations (dans un même repère) et intéressons-nous à leur intersection.

Le problème consiste évidemment en la discussion et la résolution du système formé par les trois équations de ces plans :

$$(18) \qquad \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \\ a''x + b''y + c''z + d'' = 0 . \end{cases}$$

La résolution de ce système est facile : il suffit par exemple de calculer x et y en fonction de z dans deux équations, puis de reporter dans la troisième.

Nous supposerons que les plans P_1, P_2, P_3 sont deux à deux non parallèles. Trois cas sont alors possibles :

1°) <u>les trois plans ont un point commun unique</u>. [c'est le cas général].

Exprimer x et y en fonction de z dans les deux premières équations revient à chercher une représentation paramétrique de la droite intersection de P_1 et P_2.

Si on reporte dans la troisième, on trouve l'intersection de cette droite avec le plan P_3.

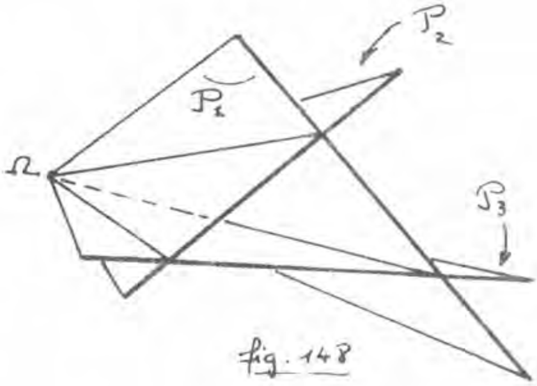


fig. 148

2°) <u>les trois plans n'ont aucun point commun</u>.

C'est le cas où les intersections des plans pris deux à deux sont des droites parallèles.

<u>Exemple</u> :

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - y - z = -1 \\ 2x - 2y = 1 \end{cases}$$

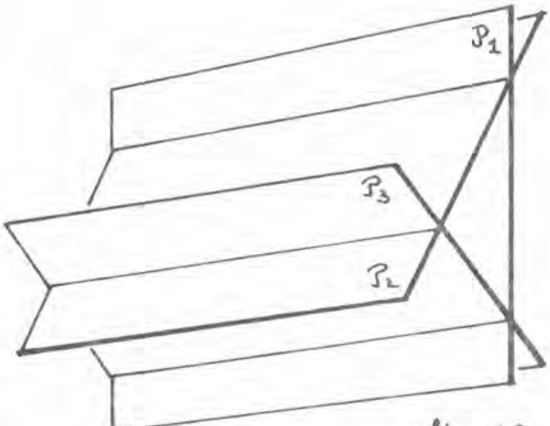


fig. 149

3°) <u>l'intersection est une droite</u>, c'est-à-dire que l'intersection de P_1 et P_2 est contenue dans P_3.

<u>Exemple</u> :

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + y - z = 0 \\ x - y - 2z = -1 \end{cases}$$

Ce phénomène est analogue à celui que nous avons rencontré avec les droites concourantes,

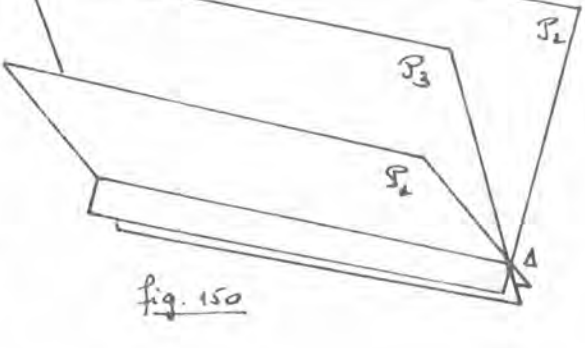


fig. 150

On démontre d'ailleurs de la même façon que le théorème 1 le :

THÉORÈME 2 : Soient P_1 et P_2 deux plans non parallèles, pour qu'un plan P_3 contienne l'intersection de ces deux plans, il faut et il suffit que son équation soit une combinaison linéaire des équations de P_1 et P_2.

On dit alors que P_3 appartient au FAISCEAUX de plans déterminé par P_1 et P_2.

On notera que dans l'exemple ci-dessus, l'équation de P_3 est la différence de celle de P_2 et de celle de P_1.

159 - APPLICATION : donnons-nous un point A de coordonnées (α, β, γ) et cherchons l'équation du plan P passant par A et contenant la droite $\mathcal{D}$ d'équations :

$$(19) \qquad \begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d'. \end{cases}$$

Le plan cherché appartient au faisceau déterminé par les plans formant l'équation de $\mathcal{D}$.

Son équation est donc une combinaison

$$\lambda(ax + by + cz - d) + \mu(a'x + b'y + c'z - d') = 0$$

des deux équations (19). Il suffit de choisir λ et μ pour que (α, β, γ) vérifient l'équation obtenue.

<u>Exemple</u> : trouver le plan déterminé par le point $A = (1, 1, -1)$ et la droite $\mathcal{D}$:

$$\begin{cases} x + y + z = -1 \\ x + 2y - z = 1. \end{cases}$$

On cherchera λ et μ pour que

$$(20) \qquad \lambda(x + y + z + 1) + \mu(x + 2y - z - 1) = 0$$

soit vérifiée par $x = 1$, $y = 1$, $z = -1$.

Si on prend $\lambda = 1$ et que l'on reporte $(x, y, z) = (1, 1, -1)$ dans (20), il vient :

$$1(1 + 1 - 1 + 1) + \mu(1 + 2 + 1 - 1) = 0$$

soit $\mu = -\frac{2}{3}$

L'équation cherchée peut donc s'écrire :

$$(x + y + z + 1) - \frac{2}{3}(x + 2y - z - 1) = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{5}{3}z + \frac{5}{3} = 0$$

EXERCICES

129 - Déterminer l'intersection des plans d'équations :

$$2x - 2y + z = 1 \qquad x - 4y + z = -2 \qquad x - 2y + 2z = 1$$

130 - Trouver un vecteur directeur de l'intersection des plans

$$2x - y - z - 1 = 0 \qquad x + y - 2z + 1 = 0$$

Etudier l'intersection de ces deux plans avec le plan d'équation

$$x - 2y + z + 1 = 0$$

131 - Déterminer l'équation du plan passant par le point de coordonnées $(1, 2, -1)$ et parallèle au plan d'équation $x + y + z = 0$.

Déterminer ensuite l'équation du plan passant par ce point et contenant la droite commune aux plans

$$-x + y + z = 1. \qquad x - y + z = 1.$$

132 - Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par le point de coordonnées $(1, 2, 3)$ et de vecteur directeur le vecteur $(1, 1, 1)$

a) donner une représentation paramétrique de $\mathcal{D}$,

b) donner une équation cartésienne de $\mathcal{D}$,

c) trouver de deux façons différentes l'intersection de $\mathcal{D}$ avec le plan d'équation $x - y + z + 1 = 0$

133 - Reprendre l'exercice 126 en utilisant la notion de faisceau de plans et une méthode analogue à celle du paragraphe 147.

134 - Montrer que les deux droites $\mathcal{D}$ et Δ d'équations

$$(\mathcal{D}) \begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases} \qquad (\Delta) \begin{cases} x + y + \frac{1}{2} = 0 \\ x - y + 2z + \frac{1}{3} = 0 \end{cases}$$

sont parallèles.

Trouver l'équation du plan passant par $\mathcal{D}$ et Δ

134 - La droite $(\mathcal{D})$ de l'exercice précédent est-elle coplanaire avec la droite admettant pour représentation

$$x = 1 - \lambda \quad , \quad y = 1 + \lambda \quad , \quad z = 2\lambda \quad ?$$

135 - On considère le plan muni d'un repère $(A, \vec{AB}, \vec{AC})$ et on se donne des points P et R de coordonnées respectives $(p, 0)$ et $(0, r)$

1° trouver les coordonnées du point d'intersection de la droite BC et de la droite RP. [on suppose dans la suite ces droites sécantes et on désigne par Q leur intersection]

2° On définit les points I, J, K tels que :

$\vec{AI} = \vec{AP} + \vec{AR}$, $\vec{BK} = \vec{BQ} + \vec{BP}$, $\vec{CJ} = \vec{CR} + \vec{CQ}$.

Déterminer les coordonnées de I, J et K

3° Vérifier que I, J, K sont sur une même droite.
[comparer à l'exercice 14]

136 - On considère un plan muni d'un repère $(A, \vec{AB}, \vec{AC})$ et les points L, N, M de coordonnées respectives $(\frac{2}{3}, 0)$; $(0, \frac{4}{5})$ et $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$.

1° Vérifier que M est sur la droite BC,

2° montrer que AM, BN et CL sont concourantes,

3° Calculer les coordonnées des points P, Q, R intersections respectives des couples de droites (AB ; MN), (BC ; LN) et (AC ; LM),

4° Montrer que P, Q, R sont trois points alignés.
[comparer à la figure 12]

137 - Reprendre l'exercice 2 (cf. p. 3) en se plaçant dans un repère convenable.

138 - On dispose d'un ordinateur programmable en BASIC et muni d'un écran graphique. On suppose que l'instruction

PSET (X, Y)

affiche à l'écran le point de coordonnées (X, Y) dans un repère où X peut varier de 0 à 319 et Y de 0 à 199.

On considère le programme suivant, dans lequel nous supposons [pour simplifier] que les données vérifient toujours les conditions :

$$X_1 \geqslant X_0 \;,\quad Y_1 > Y_0 \;,\quad (X_1 - X_0) \leq (Y_1 - Y_0).$$

```
10 CLS
20 INPUT X0, Y0 : PSET (X0, Y0) : INPUT X1, Y1
30 X = X0 : Y = Y0 : DX = X1 - X0 : DY = Y1 - Y0
40 T = INT (DY / 2)
100 T = T - DX : Y = Y + 1
110 IF T >= 0 THEN GOTO 130
120 T = T + DY : X = X + 1
130 PSET (X, Y)
140 IF Y = Y1 THEN END
150 GOTO 100
```

Quel est le résultat de ce programme ? Expliquer son fonctionnement.

Quel est l'utilité de la ligne 40 ?

139 - [représentation paramétrique d'un plan]

On se place dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace et on désigne par $\mathcal{P}$ le plan d'équation

$$x + y + z = 1.$$

Soient A, B, C les points où $\mathcal{P}$ coupe les axes Ox, Oy et Oz du repère.

1° dessiner le plan $\mathcal{P}$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

2° on considère, <u>dans $\mathcal{P}$</u>, le repère déterminé par l'origine A et les vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{AC}$.

En écrivant qu'un point M de $\mathcal{P}$ tel que

$$\vec{AM} = \lambda . \vec{AB} + \mu . \vec{AC}$$

a pour coordonnées (λ, μ) dans le repère $(A, \vec{AB}, \vec{AC})$, trouver les coordonnées de M dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ en fonction de λ et μ.

3° Trouver la condition sur les coordonnées (λ, μ) d'un point M de $\mathcal{P}$ pour qu'il appartienne à l'intersection de $\mathcal{P}$ avec le plan Π d'équation $2x + y - z = 2$.

Préciser cette intersection en la dessinant dans le repère $(A, \vec{AB}, \vec{AC})$.

4° Chercher les points d'intersection a, b, c de Π avec les axes du repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et préciser l'intersection de Π avec $\mathcal{P}$ en l'étudiant cette fois dans le repère $(a, \vec{ab}, \vec{ac})$ du plan Π.

140 - On se place dans un repère orthonormé de l'espace : $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On désigne par Ω le point de coordonnées $(0, 0, 1)$ et par $\mathcal{P}$ le plan d'équation $y = 1$.

1° Soient a, b, c, d quatre réels vérifiant la relation.

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1.$$

On considère les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ de composantes :

$$\vec{u} = (a^2+b^2-d^2-c^2 \ , \ 2(bc+ad) \ , \ 2(bd-ac))$$
$$\vec{v} = (\ 2(bc-ad), \ a^2-b^2+c^2-d^2, \ 2(ab+cd))$$
$$\vec{w} = (\ 2(ac+bd), \ 2(cd-ab), \ a^2-b^2-c^2+d^2)$$

et le point O' de coordonnées (α, β, γ).

Déterminer, en fonction des coordonnées d'un point M dans le repère $(O', \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, les coordonnées de ce même point dans le repère initial.

2°. Trouver, en fonction des coordonnées d'un point M dans le repère $(O', \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, les coordonnées du point d'intersection de ΩM avec le plan $\mathcal{P}$.

3°. On considère les huit points suivants, dont les coordonnées sont exprimées dans le repère $(O', \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$:

$A = (1, -1, 1)$ $B = (-1, -1, 1)$ $C = (-1, 1, 1)$ $D = (1, 1, 1)$
$E = (1, -1, -1)$ $F = (-1, -1, -1)$ $G = (-1, 1, -1)$ $H = (1, 1, -1)$

Déterminer l'intersection de chaque droite joignant Ω à l'un de ces points avec le plan $\mathcal{P}$.

4°. La situation précédente est en fait celle de la figure 62 de la page 68.

Ecrire un programme permettant de visualiser sur un écran graphique la figure obtenue sur $\mathcal{P}$.
[on choisira des valeurs convenables pour (α, β, γ) et pour l'unité ...].

PRODUIT SCALAIRE

PRODUIT VECTORIEL

160 - Qu'il s'agisse de géométrie plane ou de géométrie dans l'espace, les notions de produit scalaire et de produit vectoriel fournissent des outils très puissants pour compléter les méthodes de calcul introduites au cours de la leçon précédente.

Nous allons voir en effet que, dans la plupart des cas, l'utilisation de ces formules permet de déterminer simplement l'équation de droites et de plans. Prenons un exemple :

Si A, B, C sont trois points non alignés de l'espace qui sont donnés par leurs coordonnées :

$$A = (a, b, c) \qquad B = (a', b', c') \qquad C = (a'', b'', c'')$$

la seule méthode dont nous disposons pour le moment qui permette de déterminer l'équation du plan $\mathcal{P}$ passant par ces points consiste à poser que l'équation de $\mathcal{P}$ est de la forme

$$(1) \qquad \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0,$$

puis à chercher les coefficients $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ de telle façon que les coordonnées de A, B, C vérifient (1)...

Nous renvoyons le lecteur aux paragraphes qui suivent pour découvrir une méthode plus directe.

La seule restriction que nous imposerons à tout le contenu de la présente leçon est la suivante :

TOUS LES REPÈRES CONSIDÉRÉS SONT SUPPOSÉS ORTHONORMÉS.

LA NOTION DE PRODUIT SCALAIRE

161 – Considérons deux vecteurs liés de même origine $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ et soit $\mathcal{P}$ le plan contenant ces deux vecteurs.

On appelle PRODUIT SCALAIRE de $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ le <u>nombre</u> noté

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC}$$

qui est donné par :

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos\theta, \tag{2}$$

où AB et AC sont les longueurs respectives de $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ et où θ désigne l'angle de $\mathcal{P}$ déterminé par ces vecteurs : $\theta = (\vec{AB}, \vec{AC})$.

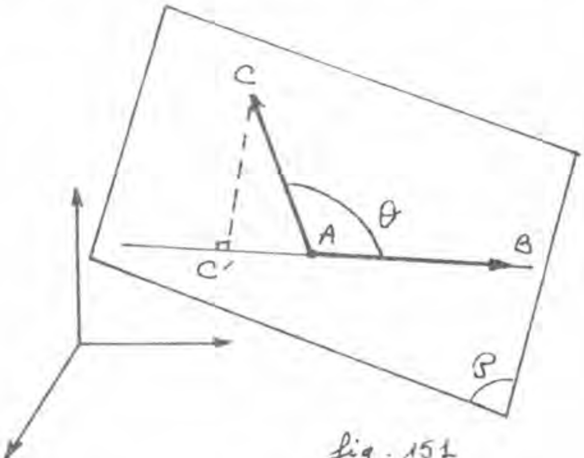


fig. 151

Donnons tout de suite une définition équivalente : le produit scalaire peut aussi s'écrire :

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \overline{AB} \cdot \overline{AC'} \tag{3}$$

si l'on désigne par C' la projection orthogonale de C sur la droite portant le vecteur $\vec{AB}$.

Il est clair en effet sur la formule (2) et la figure 151 que $\overline{AC'} = AC \cdot \cos\theta$ si la droite AB est orientée de telle sorte que $\overline{AB}$ soit positif. La formule (3) est donc valable dans ce cas et il suffit alors de remarquer qu'un changement d'orientation sur AB ne change pas le résultat.

Cela étant, on notera que le produit scalaire de $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne change pas si l'on remplace ces vecteurs par des vecteurs équipollents.

La notion de produit scalaire peut aussi bien être considérée comme une propriété relative aux <u>vecteurs libres</u>. Nous ne ferons pas de différence dans la suite de cette leçon.

Nous ne ferons pas non plus de différence entre le cas de la géométrie plane et le cas de la géométrie dans l'espace : il est évident sur la définition de $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ que l'on peut très bien restreindre toute la théorie en ne s'intéressant qu'aux vecteurs d'un plan $\mathcal{P}$ fixé. Mais en réalité les propriétés que nous étudierons sont exactement les mêmes si l'on envisage directement les vecteurs de l'espace.

Nous signalerons simplement lors des applications les cas où nous traiterons de géométrie plane.

162 - PROPOSITION 1 : Soient $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ deux vecteurs non nuls :

1° le produit scalaire $\vec{AB}.\vec{AC}$ est égal au produit scalaire $\vec{AC}.\vec{AB}$.

2° le produit scalaire $\vec{AB}.\vec{AC}$ est nul si et seulement si les droites AB et AC sont perpendiculaires,

3° le signe de $\vec{AB}.\vec{AC}$ est fonction de l'angle déterminé par les deux vecteurs : le produit scalaire est positif si l'angle est aigu (ou nul), il est négatif si l'angle est obtus (ou plat).

Démonstration : toutes ces propriétés sont immédiates sur la formule (2) du paragraphe précédent.

Notons au passage les deux cas particuliers évoqués dans la troisième assertion de l'énoncé :

- si $\vec{AB} = \vec{AC}$, on a : $\vec{AB}.\vec{AC} = +AB^2$

- si $\vec{AB} = -\vec{AC}$, on a : $\vec{AB}.\vec{AC} = -AB^2$

163 - La propriété fondamentale pour le calcul du produit scalaire réside dans ce que l'on appelle sa BILINÉARITÉ :

PROPOSITION 2 : si $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{AD}$ sont des vecteurs quelconques (de l'espace ou du plan) et si λ, μ sont deux nombres réels :

$$\vec{AB}.(\vec{AC}+\vec{AD}) = (\vec{AB}.\vec{AC}) + (\vec{AB}.\vec{AD}) \tag{4}$$

et, plus généralement :

$$\vec{AB}.(\lambda\vec{AC}+\mu\vec{AD}) = \lambda(\vec{AB}.\vec{AC}) + \mu(\vec{AB}.\vec{AD}) \tag{4'}$$

Démonstration : il s'agit cette fois encore d'une conséquence immédiate de la définition, mais ici on utilise la formulation donnée par l'identité (3) du paragraphe 161 : la proposition ci-dessus n'exprime rien d'autre que le fait que les projections sur une droite conservent la somme de deux vecteurs ou la multiplication d'un vecteur par un scalaire.

La formule (4') correspond (par définition) à la LINÉARITÉ du produit scalaire par rapport au deuxième facteur.

Si l'on tient compte par ailleurs de la première assertion de la proposition 1, la même propriété est vraie sur le premier facteur.

Notons les conséquences immédiates des propositions précédentes :

164 - COROLLAIRE 1 : Le produit scalaire possède les mêmes propriétés de factorisation (commutativité, distributivité) que le produit des nombres réels :

$$(5) \qquad (\lambda.\vec{u} + \mu.\vec{v}).(\alpha.\vec{s} + \beta.\vec{t}) = \alpha\lambda.\vec{u}.\vec{s} + \beta\lambda.\vec{u}.\vec{t} + \mu\alpha.\vec{v}.\vec{s} + \beta\mu.\vec{v}.\vec{t}$$

et plus particulièrement, on peut écrire les analogues des identités classiques :

$$(\vec{AB} + \vec{AC})^2 = (\vec{AB} + \vec{AC}).(\vec{AB} + \vec{AC}) = (\vec{AB})^2 + 2\,\vec{AB}.\vec{AC} + (\vec{AC})^2$$

ou même :

$$\vec{AB}^2 - \vec{AC}^2 = (\vec{AB} + \vec{AC}).(\vec{AB} - \vec{AC}).$$

EXEMPLE : Considérons un triangle quelconque ABC, du plan ou de l'espace.

Si on écrit que

$$\vec{BC} = \vec{BA} + \vec{AC},$$

on obtient en calculant $\vec{BC}^2$:

$$\vec{BC}^2 = (\vec{BA} + \vec{AC})^2 = \vec{BA}^2 + 2\vec{BA}.\vec{AC} + \vec{AC}^2.$$

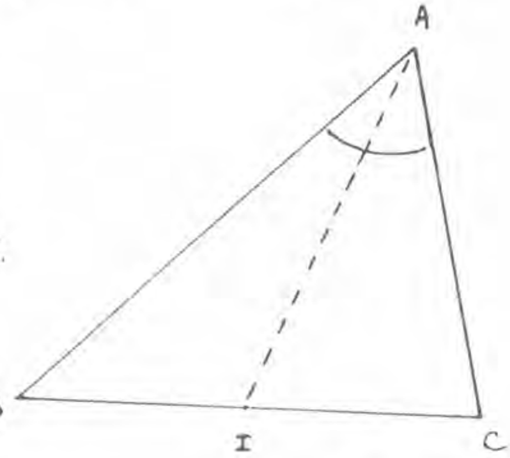


fig. 152

Notons alors les longueurs des côtés AB, BC et CA par c, a et b, on trouve l'identité classique :

$$(6) \qquad a^2 = c^2 + b^2 - 2\,bc\cos\hat{A}.$$

[Rappelons d'ailleurs au passage que dans le cas où le triangle ABC est rectangle en A, cette égalité redonne le théorème de PYTHAGORE.]

Si d'autre part on fait intervenir le milieu I de BC dans

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,\vec{AB}.\vec{AC},$$

on peut écrire :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,(\vec{AI} + \vec{IB}).(\vec{AI} + \vec{IC}).$$

Cela donne en développant :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,(AI)^2 + 2\left(\frac{IB}{2}\right)^2$$

soit :

$$(7) \qquad 2(AI)^2 = b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2}.$$

Cette dernière identité est connue sous le nom de "théorème de la médiane". Elle permet en effet d'exprimer une médiane en fonction des longueurs des côtés.

Nous laissons le soin au lecteur de voir, à titre d'exercice, ce qu'elle donne dans un triangle rectangle en A.

165 - COROLLAIRE 2 : Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de composantes respectives (x, y, z) et (x', y', z'), alors on a :

$$(8) \qquad \vec{u}.\vec{v} = x.x' + y.y' + z.z'$$

Démonstration : écrivons que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ et de même que $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$; en utilisant le corollaire 1 il vient :

$$\vec{u}.\vec{v} = xx'.\vec{i}^2 + yy'.\vec{j}^2 + zz'\vec{k}^2$$
$$(8') \qquad + (xy' + yx')\vec{i}.\vec{j} + (yz' + zy')\vec{j}.\vec{k} + (zx' + xz')\vec{i}.\vec{k}$$

Mais d'après la proposition 1, comme le repère est orthonormé, on a

$$\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1 \qquad \text{et} \qquad \vec{i}.\vec{j} = \vec{j}.\vec{k} = \vec{k}.\vec{i} = 0$$

ce qui donne finalement la formule (8) du corollaire.

On notera que si le repère n'est pas orthonormé la formule (8') ne se simplifie qu'en tenant compte des longueurs des vecteurs de base et de leurs produits scalaires mutuels.

Par ailleurs, il est clair qu'en géométrie plane l'expression (8) du produit scalaire se réduit aux deux premiers termes.

166 - COROLLAIRE 3 : dans tout repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, les composantes (x, y, z) d'un vecteur $\vec{u}$ sont données par :

$$x = \vec{u}.\vec{i}, \qquad y = \vec{u}.\vec{j}, \qquad z = \vec{u}.\vec{k}$$

Démonstration : montrons par exemple que la première coordonnée de $\vec{u}$ est égale au produit scalaire avec le vecteur $\vec{i}$:

Il suffit d'écrire $\vec{u}$ sous la forme $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, on obtient :

$$\vec{u}.\vec{i} = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}).\vec{i} = x\vec{i}^2 + y\,\vec{j}.\vec{i} + z\,\vec{k}.\vec{i}$$

et le corollaire résulte de la proposition 1.

<u>Exercice 141</u> : on considère un tétraèdre ABCD et on suppose que les arêtes AB, CD sont perpendiculaires, ainsi que les arêtes AC, BD.

Montrer que les arêtes BC et AD sont, elles aussi, perpendiculaires.

[calculer $\vec{BC}\cdot\vec{AD}$ en faisant intervenir les relations $\vec{BC} = \vec{BA} + \vec{AC}$ et $\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{BD}$]

<u>Exercice 142</u> : On se place dans le plan et on considère un triangle quelconque ABC, de centre de gravité noté G.

[on rappelle que $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = 0$]

1°) soit M un point du plan, montrer que

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3\,MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$$

[utiliser le fait que $MA^2 = \vec{MA}^2 = (\vec{MG} + \vec{GA})^2 \ldots$]

2°) cette formule est-elle encore valable dans l'espace? Peut-on la généraliser au cas d'un tétraèdre?

<u>Exercice 143</u> : On reprend les notations de l'exercice 140 p 165.

1° vérifier (en calculant leurs produits scalaires mutuels) que les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ déterminent bien un repère orthonormé.

2° En utilisant le corollaire 3 ci-dessus, exprimer les composantes des vecteurs $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$

3° En déduire les formules de changement de repères inverses de celles qui sont demandées à la question 1) de l'exercice 140.

Que remarque-t-on?

<u>Exercice 144</u> : montrer que si l'on désigne par la notation $\|\vec{u}\|$ la longueur d'un vecteur, alors on a :

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = 2\,(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2)$$

quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace.

En déduire que dans un parallélogramme la somme des carrés des diagonales est égale à la somme des carrés des côtés.

APPLICATIONS À LA GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

167 - ÉQUATIONS NORMALES. Plaçons-nous tout d'abord en géométrie plane et considérons [dans un repère orthonormé] un vecteur $\vec{u}$ de composantes:

$$\vec{u} = (a, b).$$

Cherchons l'équation de la droite $\mathcal{D}$ perpendiculaire à $\vec{u}$ et passant par le point A de coordonnées (x_0, y_0).

Il est clair qu'un point M de coordonnées (x, y) est sur $\mathcal{D}$ si et seulement si sa projection sur la droite support de $\vec{u}$ coïncide avec celle de A.

Cela revient à dire que:

$$\vec{u} \cdot \overrightarrow{OM} = \vec{u} \cdot \overrightarrow{OA}.$$

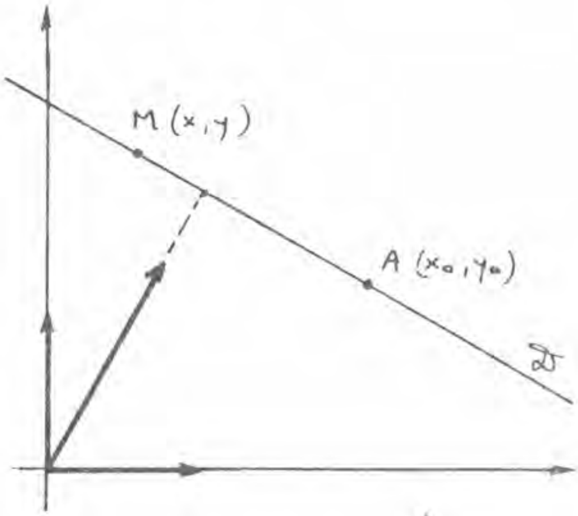


fig 153

On a donc, en passant aux coordonnées:

PROPOSITION 3 : l'équation de la droite $\mathcal{D}$ passant par le point de coordonnées (x_0, y_0) et perpendiculaire au vecteur (a, b) est donnée par:

$$ax + by - (ax_0 + by_0) = 0$$

168 - REMARQUE : en comparant ce résultat à la forme générale de l'équation des droites:

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0,$$

on voit que le couple (α, β) représente toujours les composantes d'un vecteur perpendiculaire à la droite considérée. On dit que c'est un VECTEUR NORMAL à la droite.

Il est clair d'autre part que la proposition 3 se généralise:

PROPOSITION 3' : dans un repère orthonormé de l'espace, l'équation du plan passant par le point de coordonnées (x_0, y_0, z_0) et perpendiculaire au vecteur (a, b, c) est donnée par:

$$ax + by + cz - (ax_0 + by_0 + cz_0) = 0.$$

169 - DISTANCES ET PROJECTIONS. Considérons un repère orthonormé de l'espace et donnons-nous un plan $\mathcal{P}$ d'équation :

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0.$$

On peut évidemment supposer (α, β, γ) différent du triplet $(0,0,0)$, c'est-à-dire $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \neq 0$.

Etant donné un point quelconque M de l'espace, dont les coordonnées sont (x_0, y_0, z_0), nous nous proposons de trouver la <u>projection orthogonale</u> m de M sur le plan $\mathcal{P}$, ainsi que la <u>distance</u> de M à $\mathcal{P}$.

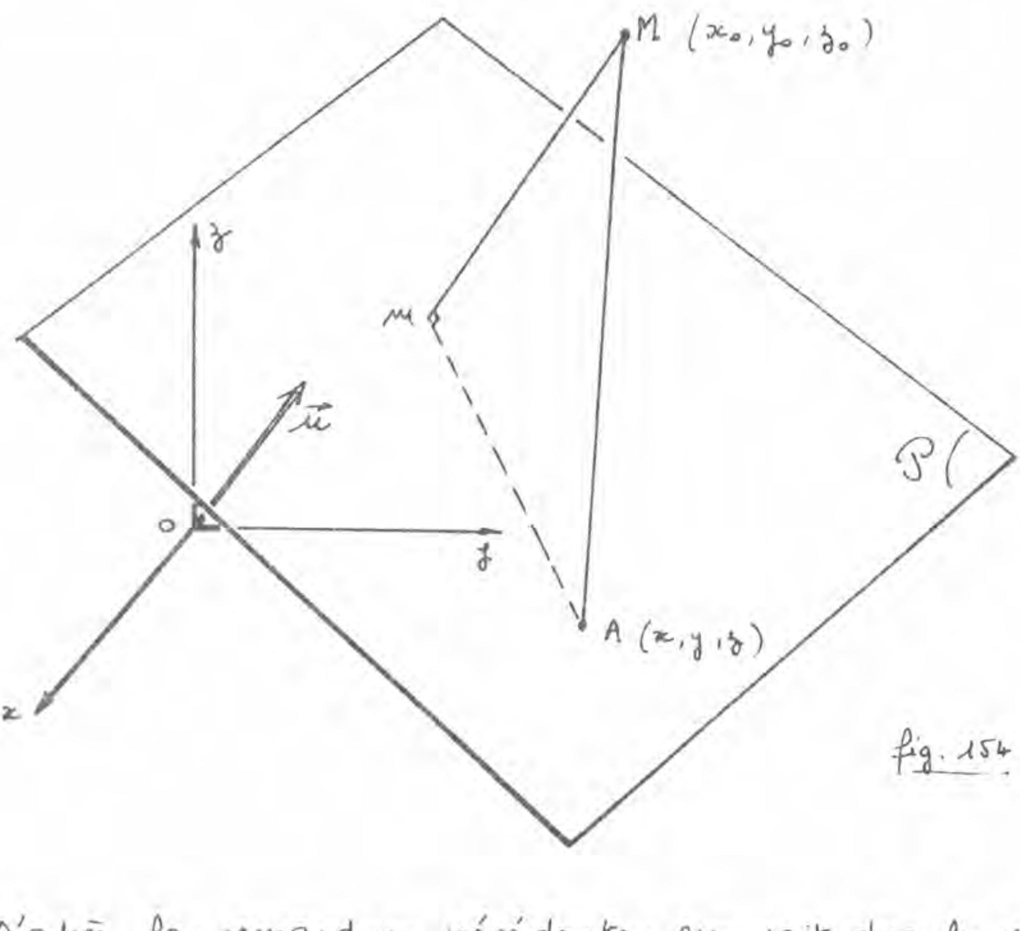


fig. 154

D'après la remarque précédente, on sait que le vecteur $\vec{u}\,(\alpha, \beta, \gamma)$ est <u>perpendiculaire</u> au plan $\mathcal{P}$. Le point m est donc tel que $\overrightarrow{Mm}$ soit <u>colinéaire</u> à $\vec{u}$.

D'autre part, si A est un point quelconque de $\mathcal{P}$ on aura :

(9) $$\vec{u} \cdot \overrightarrow{Mm} = \vec{u} \cdot \overrightarrow{MA}.$$

Mais soient (x, y, z) les coordonnées d'un tel point A, le produit scalaire $\vec{u} \cdot \overrightarrow{MA}$ vaut :

$$\vec{u} \cdot \overrightarrow{MA} = \alpha(x-x_0) + \beta(y-y_0) + \gamma(z-z_0)$$

et comme (x, y, z) vérifie l'équation de $\mathcal{P}$, il reste :

$$\vec{u} \cdot \vec{MA} = -(\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0 + \delta)$$

Comparons à (9) : le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{Mm}$ s'exprime donc uniquement en fonction des coordonnées de M.

Comme il vaut par ailleurs :

$$\vec{u} \cdot \vec{Mm} = \overline{u} \cdot \overline{Mm}$$

on a en particulier la :

PROPOSITION 4 : la distance du point $M(x_0, y_0, z_0)$ au plan d'équation

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$$

est donnée par :

$$d(M, \mathcal{P}) = \frac{|\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0 + \delta|}{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^{1/2}}.$$

Nous laisserons au lecteur le soin d'adapter ce résultat à la géométrie plane, en "oubliant" la troisième coordonnée.

Le raisonnement précédent permet en outre de déterminer le point m :

Il suffit en effet d'écrire les deux conditions que nous avons rencontrées :

1) $\vec{Mm}$ est colinéaire à $\vec{u}$: donc $\vec{Mm} = \lambda \cdot \vec{u}$ et si (a, b, c) sont les coordonnées de m on a :

$$a - x_0 = \lambda \cdot \alpha, \qquad b - y_0 = \lambda \cdot \beta, \qquad c - z_0 = \lambda \cdot \gamma.$$

2) $\vec{u} \cdot \vec{Mm} = -(\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0 + \delta)$.

On voit en reportant les trois premières égalités dans la dernière que

$$\lambda = -\frac{\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0 + \delta}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$$

et nous pouvons résumer le résultat dans la :

PROPOSITION 5 : la projection du point $M(x_0, y_0, z_0)$ sur le plan d'équation

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$$

est le point de coordonnées :

$$\left(x_0 - \alpha \cdot \frac{(\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0 + \delta)}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2},\ y_0 - \beta \frac{(\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0 + \delta)}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2},\ z_0 - \gamma \cdot \frac{(\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0 + \delta)}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} \right)$$

170 - PROBLÈMES D'ORTHOGONALITÉ. Nous avons vu aux paragraphes 167 et 168 comment le produit scalaire permet d'écrire qu'un plan est perpendiculaire à une direction.

Nous allons maintenant nous intéresser au cas de deux plans perpendiculaires entre eux :

PROPOSITION 6 : soient deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ d'équations

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$$

et

$$a x + b y + c z + d = 0,$$

alors $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont deux plans perpendiculaires si et seulement si

$$\alpha a + \beta b + \gamma c = 0.$$

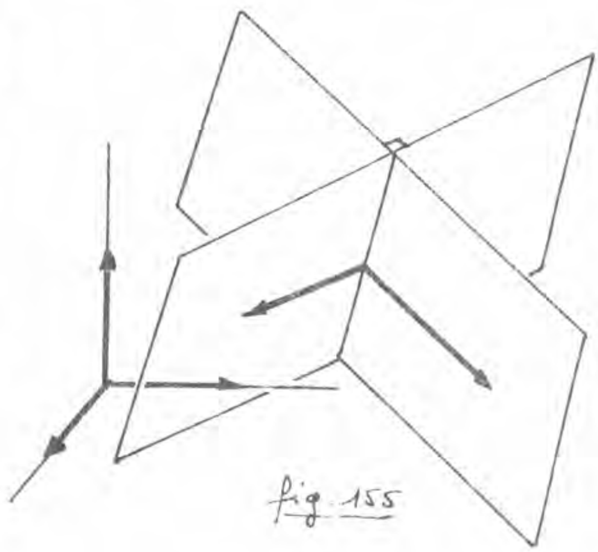


fig. 155

Démonstration : les vecteurs de composantes (α, β, γ) et (a, b, c) sont des vecteurs normaux aux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$. Ces deux plans sont donc perpendiculaires si et seulement si ces vecteurs sont orthogonaux.

La condition de la proposition 6 n'étant rien d'autre que celle qui consiste à écrire que le produit scalaire est nul, la démonstration est achevée.

171 - REMARQUE : en géométrie plane on a évidemment une condition analogue exprimant que deux droites sont perpendiculaires :

Deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont perpendiculaires si et seulement si leurs équations :

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0$$

et

$$a x + b y + c = 0$$

vérifient la condition $\alpha a + \beta b = 0$.

Nous laissons au lecteur le soin de voir que ceci correspond à la condition bien connue sur les "pentes" de ces droites lorsque les équations sont données sous la forme

$$y = a x + b.$$

Exercice 145 : Trouver l'équation de la droite perpendiculaire au vecteur $(1,-2)$ et passant par le point de coordonnées $(-3,-4)$.
Dessiner cette droite.

Exercice 146 : soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation
$$2x - y + 3 = 0.$$
Trouver l'équation de la droite $\mathcal{D}'$ perpendiculaire à $\mathcal{D}$ et passant par l'origine.
Déterminer ensuite les distances à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ du point M de coordonnées $(1,1)$.

Exercice 147 : Soient Δ et Δ' les droites d'équations
$$x + 2y - 1 = 0$$
et
$$x - 3y + 2 = 0$$
Soit A le point d'intersection de ces deux droites.
En utilisant les paragraphes 145 et 146, déterminer l'équation de la droite passant par A et perpendiculaire à Δ.
Trouver ensuite les projections orthogonales de l'origine du repère sur les trois droites passant par le point A.

Exercice 148 : le plan d'équation $x+y+z=0$ est-il perpendiculaire à la droite donnée par :
$$\begin{cases} x - 2y + z + 2 = 0 \\ -3x + y - z + 1 = 0. \end{cases}$$

Exercice 149 : On considère la droite Δ intersection des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ d'équations :
$$\begin{cases} x - y + z + 1 = 0 \\ x + y - z + 2 = 0 \end{cases}$$
En utilisant le théorème 2 de la leçon V, déterminer l'équation du plan $\mathcal{P}''$ contenant Δ et perpendiculaire à $\mathcal{P}$.

Déterminer ensuite les distances à $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}''$ du point M de coordonnées $(1,1,-1)$.

Montrer enfin que ces deux distances permettent de trouver la distance de M à la droite Δ.

LA NOTION DE PRODUIT VECTORIEL

172 - On ne définit, à proprement parler, le PRODUIT VECTORIEL de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ que dans le cas de la géométrie dans l'espace.

L'opération consiste à associer au couple $\vec{u}, \vec{v}$ un nouveau vecteur $\vec{w}$ noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$, dont la définition dépend de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et aussi de l'orientation habituellement choisie dans l'espace.

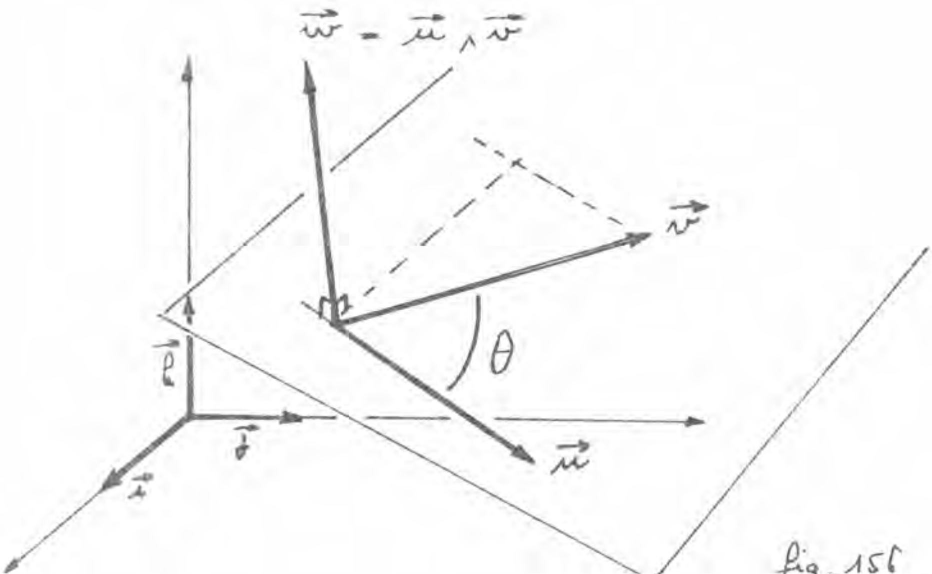


fig. 156

Soient donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires de l'espace.

Par définition, leur produit vectoriel $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ est le vecteur tel que :

1°) $\vec{w}$ est porté par la perpendiculaire au plan déterminé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
[il est donc perpendiculaire à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$]

2°) la longueur de $\vec{w}$ est égale au produit

$$\|\vec{w}\| = \|\vec{u}\| . \|\vec{v}\| . |\sin\theta|$$

où θ est l'angle déterminé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$,

3°) le sens de $\vec{w}$ est déterminé de telle sorte que le trièdre $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ soit DIRECT, c'est-à-dire orienté comme le trièdre de référence $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

173 - REMARQUE : On prendra garde au fait que $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ dépend de l'ordre choisi sur les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

Si on calcule $\vec{v} \wedge \vec{u}$ en revenant à la définition précédente, les points 1°) et 2°) ne changent pas. C'est-à-dire que $(\vec{v} \wedge \vec{u})$ a même support et même longueur que $(\vec{u} \wedge \vec{v})$.

En revanche, on devra avoir $(\vec{v}, \vec{u}, \vec{v} \wedge \vec{u})$ orienté comme $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, ceci implique que $\vec{v} \wedge \vec{u}$ soit de sens opposé au vecteur $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$.

En résumé :

$$-(\vec{v} \wedge \vec{u}) = \vec{u} \wedge \vec{v}$$

On notera d'autre part que la définition ne s'applique pas si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. En fait, on pose alors $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$, ce qui est cohérent avec le 2e point de la définition.

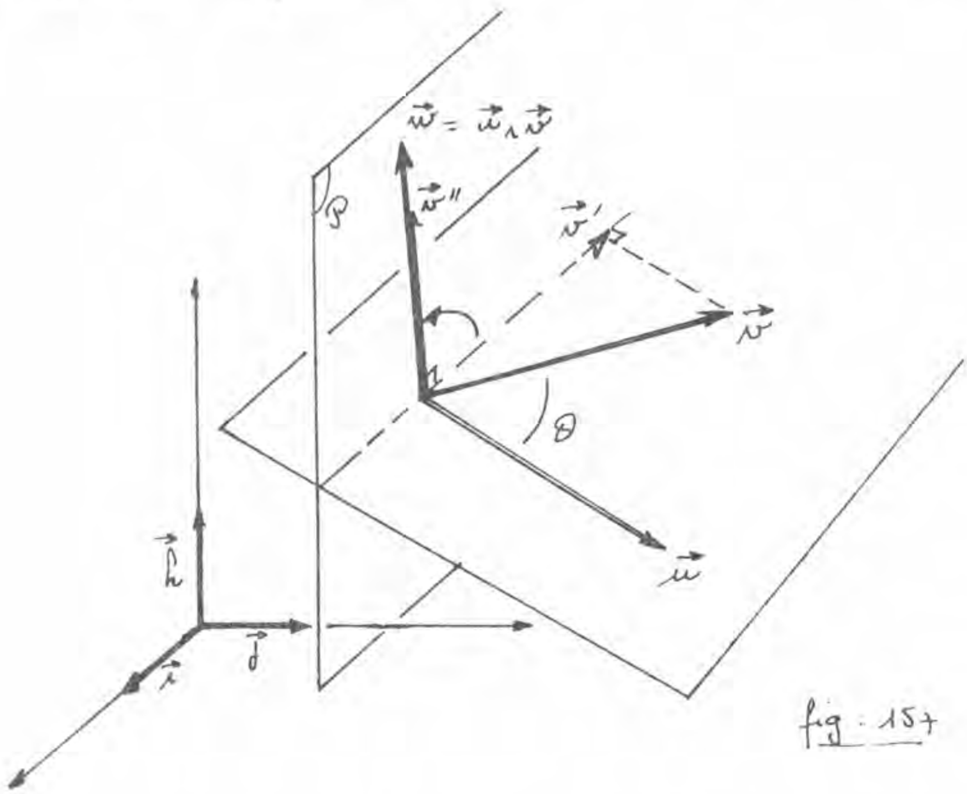


fig : 157

Signalons pour terminer une autre interprétation de la définition : la figure 156 peut être regardée comme nous l'avons montré sur la figure 157, en faisant apparaître le plan P perpendiculaire à $\vec{u}$.

On construit alors $\vec{w}$ de la façon suivante :

1°) on construit $\vec{v}'$ projection de $\vec{v}$ sur P. Sa longueur est égale à $\|\vec{v}\| . |\sin \theta|$,

2°) on fait tourner $\vec{v}'$ de 90° autour de $\vec{u}$ dans le sens direct,

3°) $\vec{w}$ est obtenu en multipliant $\vec{v}''$ par $\|\vec{u}\|$.

174 - PROPOSITION 7. Le produit vectoriel possède les propriétés suivantes :

1°) pour tout couple de vecteurs, on a

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = - \vec{v} \wedge \vec{u}$$

2°) pour tout couple de vecteurs et tout scalaire λ :

$$\vec{u} \wedge (\lambda \vec{v}) = \lambda . (\vec{u} \wedge \vec{v})$$

3°) pour tout triplet $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$:

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$$

<u>Démonstration</u> : seule la troisième propriété est difficile. Pour

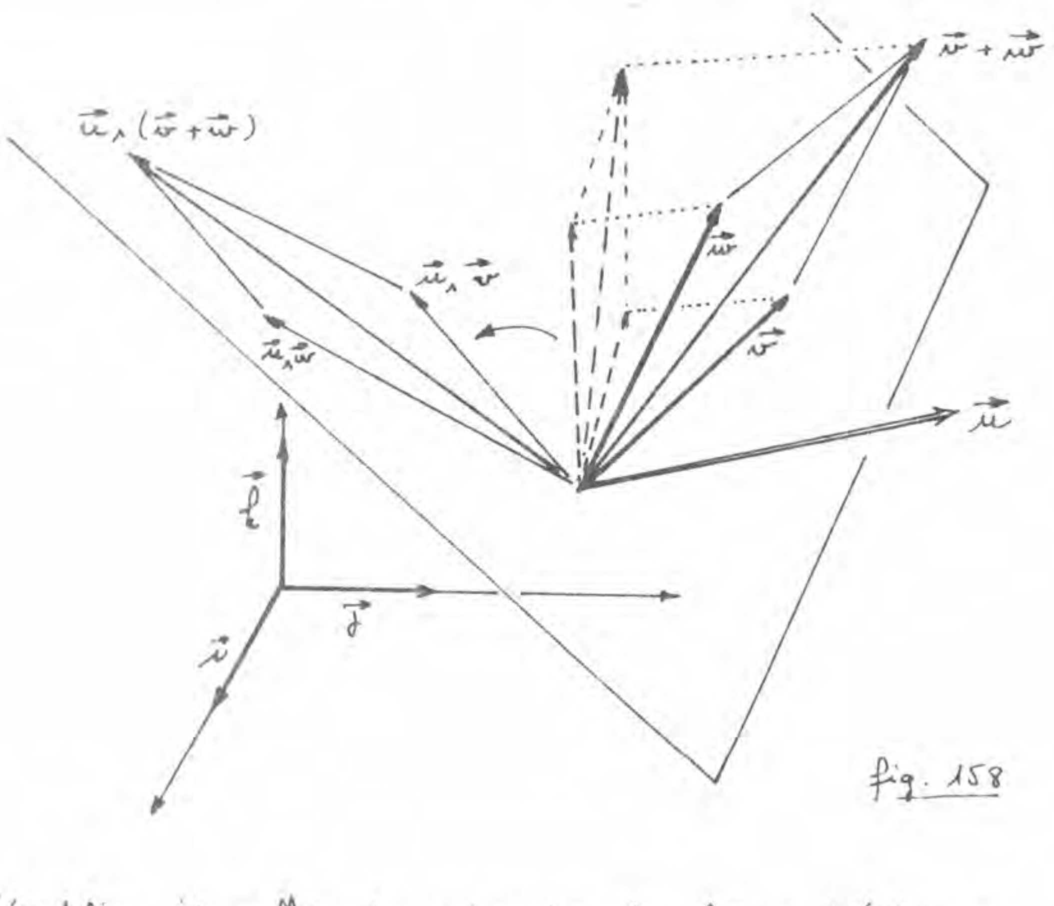


fig. 158

l'établir, il suffit de reprendre la figure précédente en faisant apparaître, comme ci-dessus, la transformation qui fait passer d'un vecteur $\vec{A}$ à son produit $\vec{u} \wedge \vec{B}$.

Comme on l'a vu, le résultat est situé dans le plan perpendiculaire à $\vec{u}$ et s'obtient par projection, rotation puis homothétie.

Toutes ces opérations sont bien compatibles avec l'addition des vecteurs.

175 - REMARQUE. La proposition 7 implique en particulier que le produit vectoriel possède les mêmes propriétés de distributivité que le produit scalaire.

On peut par exemple développer un produit composé :

$$(\lambda\vec{u}+\mu\vec{v})\wedge(\alpha\vec{s}+\beta\vec{t}) = \lambda\alpha.\vec{u}\wedge\vec{s} + \lambda\beta.\vec{u}\wedge\vec{t} + \mu\alpha.\vec{v}\wedge\vec{s} + \mu\beta.\vec{v}\wedge\vec{t}$$

On prendra garde aux deux particularités suivantes.

1°) le produit vectoriel est ANTI-COMMUTATIF, c'est-à-dire que l'on doit changer de signe si on permute les facteurs

2°) tous les produits du type $\vec{u}\wedge\vec{u}$ sont nuls et, plus généralement, un produit vectoriel est nul si (et seulement si) les facteurs sont colinéaires.

Développons à titre d'exemple $(\vec{u}+\vec{v})\wedge(\vec{u}-\vec{v})$:

$$(\vec{u}+\vec{v})\wedge(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}\wedge\vec{u} - \vec{u}\wedge\vec{v} + \vec{v}\wedge\vec{u} - \vec{v}\wedge\vec{v}$$

Il reste uniquement :

$$(\vec{u}+\vec{v})\wedge(\vec{u}-\vec{v}) = -2.\vec{u}\wedge\vec{v}.$$

On se gardera enfin de croire que le produit vectoriel est associatif...

176 - PROPOSITION 8. Soient (x,y,z) et (x',y',z') les coordonnées dans un repère orthonormé des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Leur produit vectoriel est donné par :

$$(10)\qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} yz' - y'z \\ zx' - z'x \\ xy' - x'y \end{vmatrix}$$

Démonstration : écrivons $\vec{u} = x.\vec{i}+y.\vec{j}+z.\vec{k}$ et $\vec{v} = x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k}$ et développons le produit comme dans la remarque précédente en éliminant les carrés $\vec{i}\wedge\vec{i}$, $\vec{j}\wedge\vec{j}$ et $\vec{k}\wedge\vec{k}$, qui sont nuls :

$$\vec{u}\wedge\vec{v} = (xy'-yx')\vec{i}\wedge\vec{j} + (xz'-zx')\vec{i}\wedge\vec{k} + (yz'-zy')\vec{j}\wedge\vec{k}$$

Il reste ensuite à calculer les produits $\vec{i}\wedge\vec{j}$, $\vec{i}\wedge\vec{k}$ et $\vec{j}\wedge\vec{k}$. C'est un exercice simple de vérifier sur la définition géométrique qu'il valent respectivement $\vec{k}$, $-\vec{j}$ et $-\vec{i}$.

177 – On peut retenir la formule précédente en notant tout d'abord que la première composante du produit vectoriel s'obtient comme différence des produits en croix selon le schéma suivant :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{w}$$

Les deux autres composantes du produit s'obtiennent ensuite par <u>permutation circulaire</u> sur les composantes de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ respectivement.

<u>Exercice 150</u> : Calculer le produit vectoriel des vecteurs $\vec{u} = (1, -1, 3)$ et $\vec{v} = (2, 1, -1)$.
Trouver un vecteur $\vec{w}$ permettant de montrer que le produit vectoriel n'est pas associatif, c'est-à-dire que l'on a (en général) :

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} \neq \vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$$

<u>Exercice 151</u> : On considère les trois vecteurs :

$\vec{u}\ (0, 2, -1)$, $\quad \vec{v}\ (1, -1, 1)$, $\quad \vec{w}\ (3, 1, 0)$

Comparer $\vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w})$ et $\vec{v} \cdot (\vec{w} \wedge \vec{u})$.

On pose en outre $\vec{t} = (2, -4, 3)$. Vérifier que

$$\vec{t} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) = 0$$

En déduire que les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{t}$ sont dans un même plan en interprétant géométriquement ce produit scalaire.

<u>Exercice 152</u> : calculer tous les produits vectoriels des vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ pris deux à deux si ces trois vecteurs sont ceux qui sont définis dans l'exercice 140 de la page 165.

<u>Exercice 153</u> : soient $\vec{u}\ (\alpha, \beta, \gamma)$ et $\vec{v}\ (a, b, c)$ deux vecteurs quelconques.
Expliquer pourquoi on doit avoir :

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) + (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = (\vec{u} \cdot \vec{u})(\vec{v} \cdot \vec{v})$$

APPLICATIONS A LA GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

178 - ÉQUATIONS DE PLANS. Cherchons à déterminer l'équation d'un plan $\mathcal{P}$ passant par un point et parallèle à deux vecteurs donnés $\vec{u}, \vec{v}$ de composantes :

$$\vec{u} = (\alpha, \beta, \gamma),$$
$$\vec{v} = (a, b, c).$$

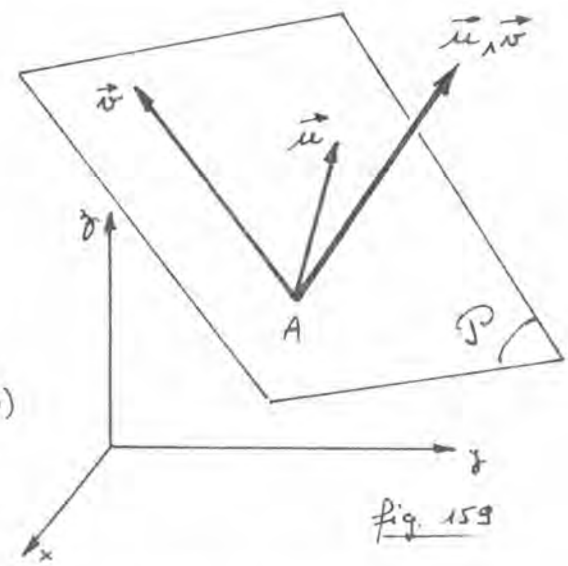


fig. 159

Le produit vectoriel permet de répondre simplement à cette question : le vecteur

$$\vec{u}\wedge\vec{v} = (\beta c - b\gamma, \gamma a - c\alpha, \alpha b - a\beta)$$

est en effet un <u>vecteur normal</u> au plan $\mathcal{P}$. Il suffit donc de poser l'équation de $\mathcal{P}$ sous la forme :

$$(\beta c - b\gamma)x + (\gamma a - c\alpha)y + (\alpha b - a\beta)z + \delta = 0$$

et de chercher le dernier coefficient δ pour que le plan vérifie la condition supplémentaire

179 - Considérons à titre d'exemple le plan $\mathcal{P}$ passant par les points :

$$A = (1, 1, -1) \qquad B = (2, 0, 3) \qquad C = (-1, 2, 1)$$

Ecrire l'équation de ce plan revient ainsi à écrire que le point M de coordonnées (x, y, z) est dans $\mathcal{P}$ si et seulement si le vecteur $\overrightarrow{AM}$ est orthogonal au produit vectoriel de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Autrement dit si le produit scalaire suivant est nul :

$$\overrightarrow{AM} \cdot (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) = 0$$

Calculons $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ à l'aide de la formule (10) :

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -10 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

L'équation de $\mathcal{P}$ est donc :

$$-6(x-1) - 10(y-1) - (z+1) = 0.$$

180 - PROBLÈMES DE DROITES. Revenons, pour commencer, sur le problème de base de la représentation d'une droite de l'espace : celle-ci est donnée soit sous forme paramétrique, soit comme intersection de deux plans. (cf. leçon I)

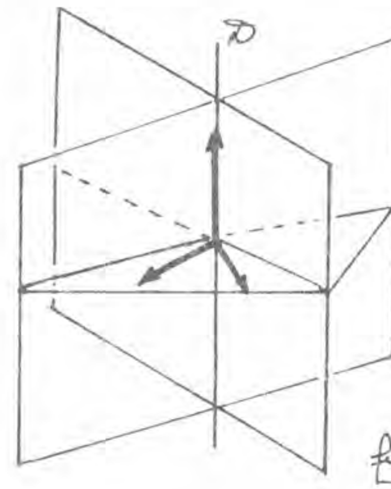


fig. 160

Un problème qui se pose souvent est donc de trouver un vecteur directeur d'une droite $\mathcal{D}$ donnée par son équation

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0 \\ ax + by + cz + d = 0 \end{cases}$$

Nous utiliserons pour cela les remarques suivantes :

1°) (α, β, γ) et (a, b, c) sont deux vecteurs perpendiculaires aux plans dont $\mathcal{D}$ est l'intersection.

2°) le produit vectoriel de ces deux vecteurs étant orthogonal à chacun d'eux, il constitue un vecteur parallèle à la droite $\mathcal{D}$.

Reprenons par exemple la droite du § 156 donnée par le système :

$$\begin{cases} x + y + 2z + 1 = 0 \\ 2x - y + z - 2 = 0 \end{cases}$$

On obtient un vecteur directeur en calculant :

$$(1, 1, 2) \wedge (2, -1, 1) = (3, 3, -3)$$

On pourra comparer le résultat à celui du § 156.

181 - DROITES SÉCANTES. Donnons-nous deux droites de l'espace et posons-nous le problème suivant :
"comment vérifier si ces droites sont dans un même plan ?".

Nous supposerons ces droites données sous forme paramétrique :

$$\mathcal{D} : \begin{cases} x = a + \alpha t \\ y = b + \beta t \\ z = c + \gamma t \end{cases} \qquad \mathcal{D}' : \begin{cases} x = a' + \alpha' t \\ y = b' + \beta' t \\ z = c' + \gamma' t \end{cases}$$

et nous schématiserons le problème par la figure 161, où A est le point (a, b, c), A' le point (a', b', c') et où les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont déterminées en outre par leurs vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$, de composantes respectives (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$.

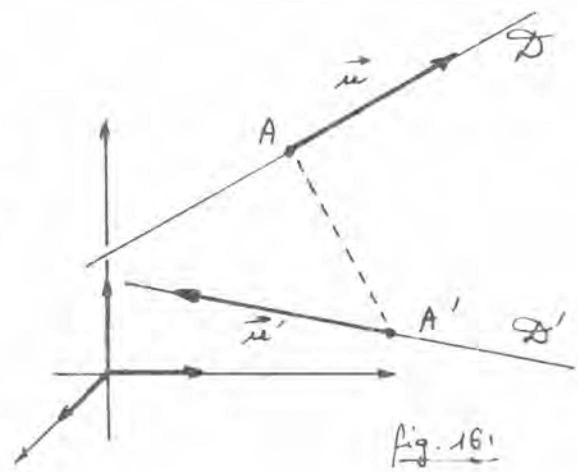


fig. 161

Il est clair sur la figure que les deux droites données sont coplanaires si les trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{u}'$ et $\overrightarrow{AA'}$ sont situés dans un même plan.

Pour traduire une telle condition, on utilise le produit vectoriel de la même façon qu'au §§ 178-179.

Calculons $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{u}'$, il suffira ensuite d'écrire que ce vecteur qui, par construction, est orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ est aussi orthogonal à $\overrightarrow{AA'}$.

La condition sera donc :

$$\overrightarrow{AA'} \cdot \vec{w} = \overrightarrow{AA'} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{u}') = 0,$$

il suffit ensuite de la traduire en termes de coordonnées pour obtenir la relation cherchée.

$$(a'-a)(\beta\gamma' - \beta'\gamma) + (b'-b)\cdot(\gamma\alpha' - \gamma'\alpha) + (c'-c)(\alpha\beta' - \alpha'\beta) = 0$$

182 - Exemple : cherchons à titre d'exercice si la droite $\mathcal{D}$ étudiée au paragraphe 180 est sécante ou non avec la droite $\mathcal{D}'$ d'équation paramétrique :

$$\mathcal{D}' : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 3t \end{cases}$$

Nous connaissons déjà un vecteur directeur de $\mathcal{D}$: c'est le vecteur $\vec{u} = (3, 3, -3)$. Nous pouvons pour simplifier le remplacer par le vecteur colinéaire $(1, 1, -1)$.

Il reste à trouver un point A appartenant à $\mathcal{D}$: nous laisserons au lecteur le soin de vérifier que le point A de coordonnées $(\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}, 0)$ convient.

Cela étant nous poserons $A' = (1, 2, 0)$ et $\vec{u}' = (1, -1, 3)$ et la condition ci-dessus donne :

$$\overrightarrow{AA'} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{u}') = -12,$$

ce qui montre que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne sont pas coplanaires.

183 - REMARQUE : reprenons la figure 161 sans changer les vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ des deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$, mais mais regardons le calcul du produit scalaire

$$\overrightarrow{AA'} . (\vec{u} \wedge \vec{u}')$$

en supposant que A et A' aient été remplacés par deux autres points M et M' de $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$.

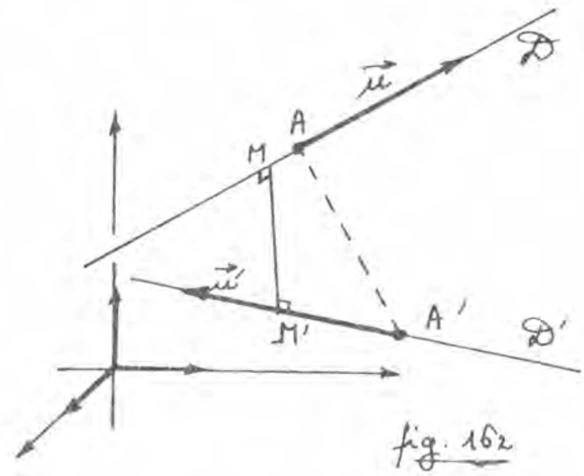


fig. 162

On aurait donc calculé :

$$\overrightarrow{MM'} . (\vec{u} \wedge \vec{u}')$$

ou encore

$$\overrightarrow{MM'} . (\vec{u} \wedge \vec{u}') = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'M'}) . (\vec{u} \wedge \vec{u}') = \overrightarrow{MA} . (\vec{u} \wedge \vec{u}') + \overrightarrow{AA'} . (\vec{u} \wedge \vec{u}') + \overrightarrow{A'M'} . (\vec{u} \wedge \vec{u}')$$

Or, comme $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{A'M'}$ sont coplanaires avec $\vec{u}$ et $\vec{u}'$, il reste :

$$\overrightarrow{MM'} . (\vec{u} \wedge \vec{u}') = \overrightarrow{AA'} . (\vec{u} \wedge \vec{u}'),$$

si bien que le résultat ne dépend pas des points choisis.

Il est en particulier normal que si les droites sont coplanaires le produit obtenu soit nul, puisque l'on peut alors choisir M et M' confondus...

Mais revenons au cas général, et supposons (comme sur la figure 162) que la droite MM' soit la perpendiculaire commune à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

Dès lors, $\overrightarrow{MM'}$ et $(\vec{u} \wedge \vec{u}')$ ont même direction et on peut donc considérer que la valeur absolue du produit scalaire

$$\overrightarrow{MM'} . (\vec{u} \wedge \vec{u}')$$

se réduit au produit des longueurs : $\|\overrightarrow{MM'}\| . \|(\vec{u} \wedge \vec{u}')\|$

Comme MM' représente la distance entre les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$, nous venons de prouver la :

PROPOSITION 9 : si $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont deux droites de l'espace données respectivement par un point et un vecteur directeur $(A ; \vec{u})$ et $(A' ; \vec{u}')$, alors la distance entre $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ s'obtient par la formule :

$$d(\mathcal{D}, \mathcal{D}') = \frac{|\overrightarrow{AA'} . (\vec{u} \wedge \vec{u}')|}{\sqrt{(\vec{u} \wedge \vec{u}') . (\vec{u} \wedge \vec{u}')}}$$

APPLICATIONS AU CALCUL DE VOLUMES

184 – Jusqu'ici nous avons essentiellement utilisé le produit vectoriel dans des questions où il nous suffisait de savoir s'il était nul ou non, ou même s'il était orthogonal ou non à une direction donnée.

Revenons sur sa définition et intéressons-nous à l'interprétation géométrique du "module" (c'est-à-dire de la longueur) du produit $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

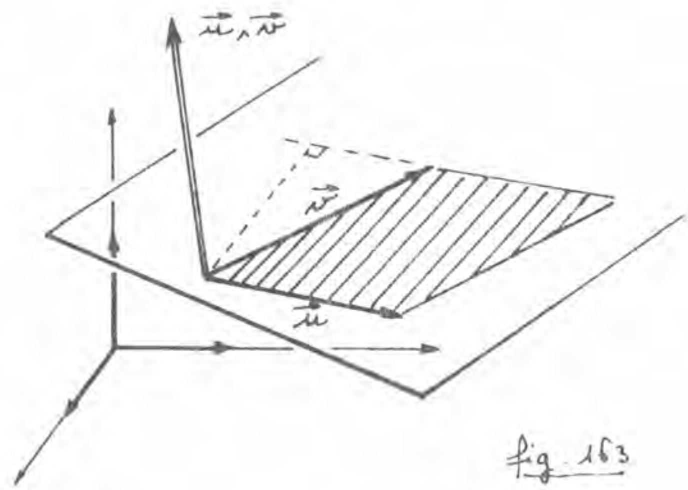


fig. 163

On voit sur la figure 163 que, puisque

$$\|(\vec{u} \wedge \vec{v})\| = \|\vec{u}\| . \|\vec{v}\| . |\sin \theta|$$

la longueur de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ n'est rien d'autre que l'AIRE du parallélogramme construit sur les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

En effet, $\|\vec{v}\| . |\sin \theta|$ est précisément la hauteur de ce parallélogramme lorsque l'on choisit de faire apparaître $\vec{u}$ comme base.

185 – Ainsi le produit vectoriel fournit un moyen pour calculer l'aire d'un parallélogramme à partir des composantes des côtés.

En remarquant que l'aire d'un triangle est la moitié de celle du parallélogramme construit à partir de deux côtés quelconques, on obtient la :

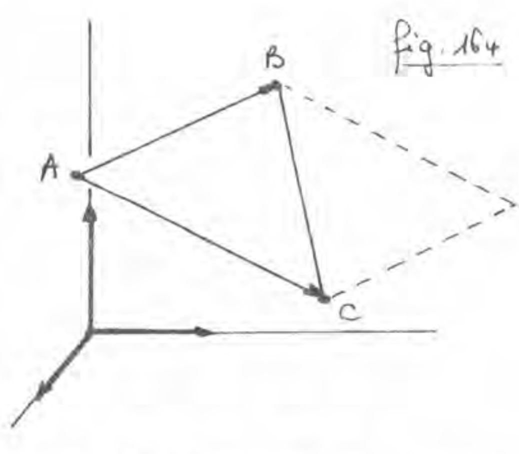


fig. 164

PROPOSITION 10 : l'aire d'un triangle ABC de l'espace est donnée par :

$$\text{Aire}(ABC) = \frac{1}{2} \| \vec{AB} \wedge \vec{AC} \| ,$$

donc si les coordonnées des sommets A, B, C sont respectivement : $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$ on aura :

(11) $\text{Aire}(ABC) = \frac{1}{2}\sqrt{[\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2]}$, où α, β, γ désignent les composantes du produit vectoriel $(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1) \wedge (x_3-x_1, y_3-y_1, z_3-z_1)$

186 – REMARQUE : le principe de ce calcul s'applique aussi à la géométrie plane.

En effet si ABC est un triangle du plan dont les sommets ont pour coordonnées $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ et $C(x_3, y_3)$, il suffit d'appliquer la proposition précédente aux points :

$$A(x_1, y_1, 0), \qquad B(x_2, y_2, 0), \qquad C(x_3, y_3, 0)$$

Nous laissons au lecteur le soin d'écrire la formule obtenue dans ce cas simple.

187 – Signalons enfin l'application suivante du produit vectoriel au calcul du volume :

PROPOSITION 11 : Soit $ABCD$ un tétraèdre de l'espace.

Le volume de ce tétraèdre est donné par le produit scalaire :

(12) $\frac{1}{6}\left| \vec{AB} \cdot (\vec{AC} \wedge \vec{AD}) \right|$.

Dans lequel on a choisi les points de façon arbitraire, de façon à faire apparaître les trois arêtes issues d'un même sommet.

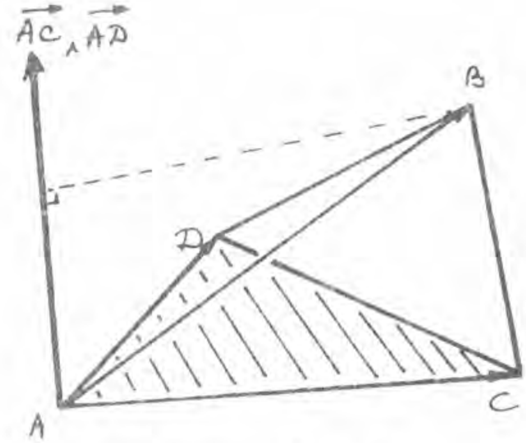


fig. 165

Démonstration : On sait qu'en considérant $ABCD$ comme une pyramide de sommet B et de base ACD, le volume est égal au tiers du produit de la hauteur par l'aire de la base.

Or $\frac{1}{2}(\vec{AC} \wedge \vec{AD})$ est un vecteur de longueur égale à la surface de base, il est facile de voir d'autre part que multiplier cette longueur par la hauteur revient précisément à prendre le produit scalaire avec $\vec{AB}$ ...

[Le produit scalaire d'un vecteur avec un produit vectoriel a souvent été rencontré jusqu'ici. On l'appelle PRODUIT MIXTE des trois vecteurs considérés. Nous reviendrons sur cette notion dans le complément F]

RETOUR SUR LE THÉORÈME DE DESARGUES.

188 - Nous allons montrer (à titre d'exercice) comment la notion de produit vectoriel peut servir à étudier la configuration rencontrée dans la première partie, à propos du théorème de Desargues.

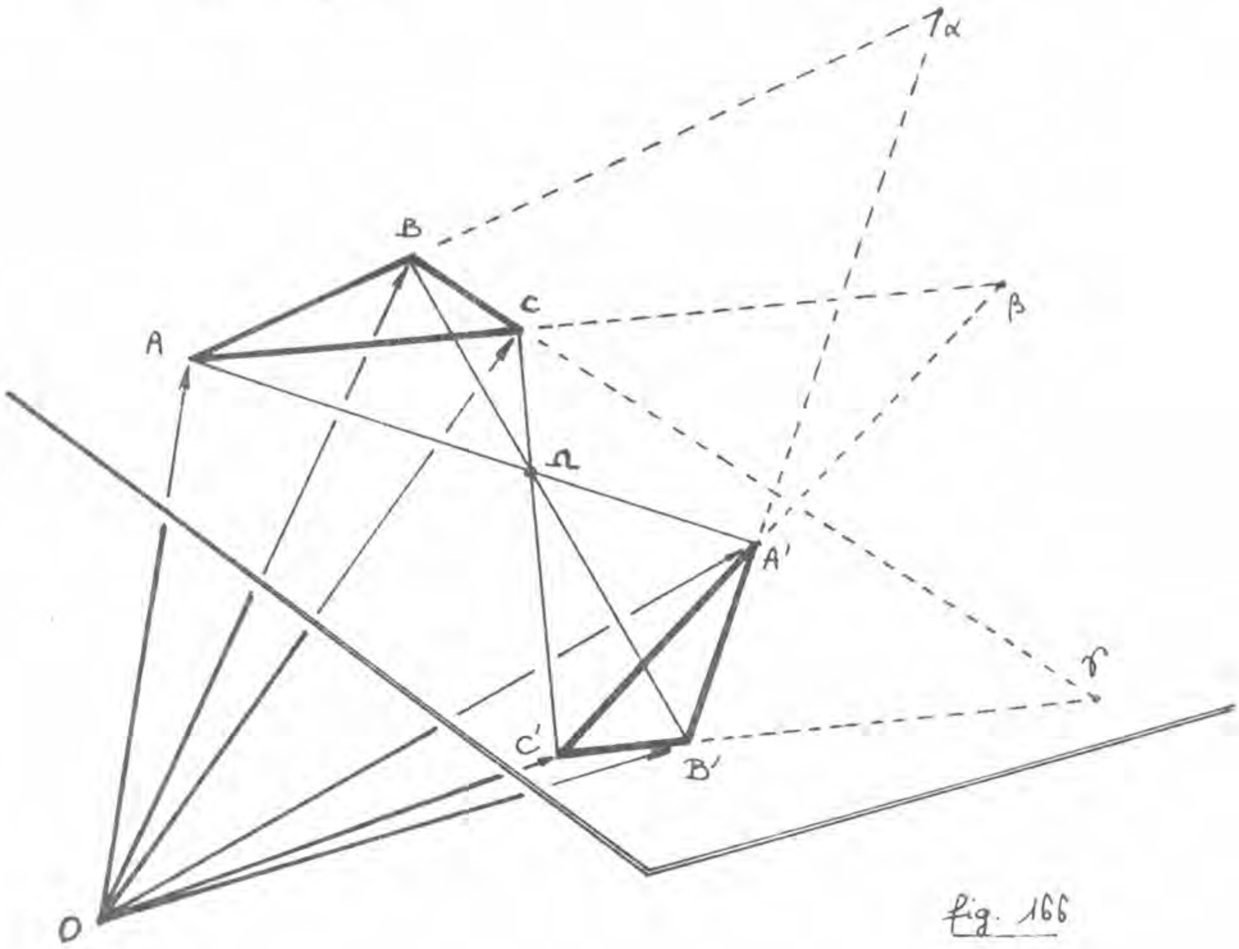


fig. 166

Considérons, dans un plan $\mathcal{P}$ de l'espace, deux triangles ABC et A'B'C' dont les couples de côtés homologues déterminent, comme sur la figure 166, des points α, β, γ.

Il s'agit de montrer que α, β, γ sont alignés si et seulement si les droites AA', BB' et CC' concourent en un point Ω situé dans $\mathcal{P}$.

Nous supposerons l'origine O du repère en dehors de $\mathcal{P}$ et nous caractériserons les points A, B, C, etc. de la configuration par les vecteurs $\vec{OA}$, $\vec{OB}$, $\vec{OC}$, etc. qui les joignent à l'origine.

189- Nous commencerons par traduire les propriétés de la figure :

1°) <u>Concourance de AA', BB' et CC'</u> : si l'on s'intéresse aux plans qui s'appuient sur ces droites et passent par l'origine O, dire que AA', BB', CC' admettent le point Ω comme point commun revient exactement à dire que les plans OAA', OBB' et OCC' ont en commun une droite $O\Omega$ (Ω appartenant à $\mathcal{P}$)

Il est clair que les vecteurs normaux à ces plans sont alors tous trois perpendiculaires à $O\Omega$, donc que ces vecteurs normaux sont coplanaires.

Mais nous avons déjà rencontré cette situation :

LEMME 1 : $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs coplanaires si et seulement si

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) = 0$$

[cf. par exemple le § 181]

Utilisons cette caractérisation avec des vecteurs normaux aux plans qui nous intéressent [et qui s'obtiennent par produits vectoriels] nous aurons le :

LEMME 2 : sur la figure 166 la concourance des droites AA', BB', CC' implique :

$$(\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OA'}) \cdot \left((\overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{OB'}) \wedge (\overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{OC'}) \right) = 0 \qquad (15)$$

2°) <u>Alignement de α, β et γ</u> : il suffit d'écrire que les vecteurs $\overrightarrow{O\alpha}$, $\overrightarrow{O\beta}$, $\overrightarrow{O\gamma}$ sont coplanaires en utilisant le lemme 1.

En fait nous cherchons d'abord à exprimer ces vecteurs (ou des vecteurs qui leur sont colinéaires) en fonction de A, B, C, etc :

LEMME 3 : le produit vectoriel composé

$$(\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}) \wedge (\overrightarrow{OA'} \wedge \overrightarrow{OB'})$$

est colinéaire à $\overrightarrow{O\alpha}$

On obtient de même (en permutant) des vecteurs colinéaires à $\overrightarrow{O\beta}$ et $\overrightarrow{O\gamma}$.

Démonstration : la droite $O\alpha$ est l'intersection des plans OAB et OA'B' et les vecteurs $(\vec{OA} \wedge \vec{OB})$, $(\vec{OA'} \wedge \vec{OB'})$ sont des vecteurs normaux à ces plans. Il suffit donc de se reporter au § 180.

Revenons donc à l'alignement de α, β, γ, en utilisant les lemmes 1 et 3, nous avons :

LEMME 4 : sur la figure 166 l'alignement des points α, β, γ équivaut à la relation :

$$(14)\quad 0 = \left[(\vec{OA} \wedge \vec{OB}) \wedge (\vec{OA'} \wedge \vec{OB'}) \right] \cdot \left[\left[(\vec{OB} \wedge \vec{OC}) \wedge (\vec{OB'} \wedge \vec{OC'}) \right] \wedge \left[(\vec{OC} \wedge \vec{OA}) \wedge (\vec{OC'} \wedge \vec{OA'}) \right] \right]$$

190 - DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE DESARGUES
Si nous voulons montrer que la concourance des droites AA', BB', CC' implique l'alignement de α, β, γ, tout revient donc à montrer que la relation (13) implique la relation (14)

Nous allons indiquer (à titre d'exercice rappelons-le!) comment un calcul de ce type peut être mené à bien.

Commençons par établir la formule dite "du double produit vectoriel" :

PROPOSITION 12 : soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ trois vecteurs quelconques, on a :

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}.$$

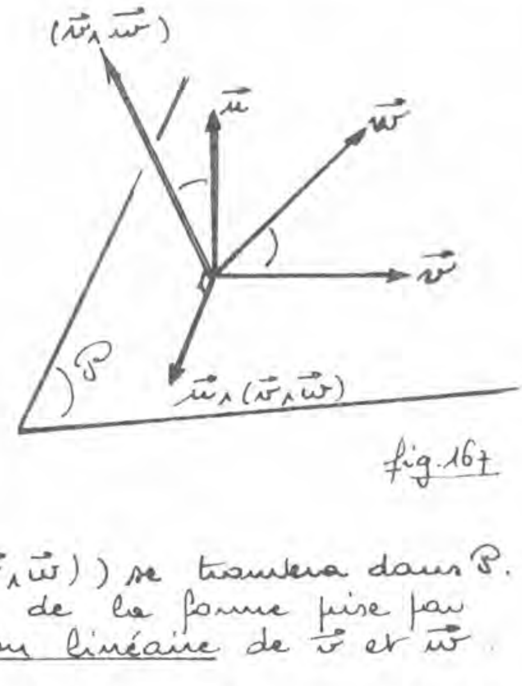


fig. 167

Démonstration : désignons par $\mathcal{P}$ le plan des vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$, le produit $(\vec{v} \wedge \vec{w})$ est perpendiculaire à ce plan.

Donc, quel que soit le vecteur $\vec{u}$, le produit $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$ (qui doit être perpendiculaire à $(\vec{v} \wedge \vec{w})$) se trouvera dans $\mathcal{P}$.

On voit ainsi une explication de la forme prise par $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$: c'est une combinaison linéaire de $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

Pour vérifier l'exactitude de la formule avancée, il suffit d'utiliser les composantes dans un repère et... de faire le calcul.

On choisira évidemment un repère adapté à la situa-

tion et on supposera donc que le plan P de la figure 167 coïncide avec le plan xOy du repère.
Nous poserons donc :

$$\vec{v} = (x_1, y_1, 0), \qquad \vec{w} = (x_2, y_2, 0), \qquad \vec{u} = (x_3, y_3, z_3).$$

Il vient :

$$(\vec{v} \wedge \vec{w}) = (0, 0, x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

d'où :

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = \left(y_3(x_1 y_2 - x_2 y_1), -x_3(x_1 y_2 - x_2 y_1), 0 \right).$$

Comme d'autre part :

$$(\vec{u} . \vec{w}) \vec{v} = (x_2 x_3 + y_2 y_3)\,(x_1, y_1, 0)$$

et

$$(\vec{u} . \vec{v}) \vec{w} = (x_1 x_3 + y_1 y_3)\,(x_2, y_2, 0),$$

il est clair que la formule de la proposition 12 est vraie.

Cela étant, calculons un produit de la forme :

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge (\vec{a}' \wedge \vec{b}'),$$

en posant $\vec{u} = (\vec{a} \wedge \vec{b})$ et $\vec{v} = \vec{a}'$, $\vec{w} = \vec{b}'$. La proposition 12 implique :

$$(15) \quad (\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge (\vec{a}' \wedge \vec{b}') = \left[(\vec{a} \wedge \vec{b}) . \vec{b}' \right] \vec{a}' - \left[(\vec{a} \wedge \vec{b}) . \vec{a}' \right] \vec{b}'.$$

Formule dans laquelle, soulignons-le, les quantités entre [ ] sont des <u>nombres</u>.

Un peu de courage, l'utilisation de cette formule (15) et des propositions 2 et 7 de cette leçon, permettront au lecteur de vérifier maintenant le

LEMME 5 : pour tout système de vecteurs $\vec{a}, \vec{b}, \ldots, \vec{b}', \vec{c}'$ on a :

$$\left[(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge (\vec{a}' \wedge \vec{b}') \right] . \left[\left[(\vec{b} \wedge \vec{c}) \wedge (\vec{b}' \wedge \vec{c}') \right] \wedge \left[(\vec{c} \wedge \vec{a}) \wedge (\vec{c}' \wedge \vec{a}') \right] \right] =$$

$$(16) \quad \left\{ \vec{a} . (\vec{b} \wedge \vec{c}) \right\} \times \left\{ \vec{a}' . (\vec{b}' \wedge \vec{c}') \right\} \times \left\{ (\vec{a} \wedge \vec{a}') . \left[(\vec{b} \wedge \vec{b}') \wedge (\vec{c} \wedge \vec{c}') \right] \right\}$$

Il est alors immédiat que la démonstration du théorème est achevée : il suffit de se reporter aux formules (13) et (14) des lemmes 2 et 4.
Donnons pour terminer quelques indications pour la vé-

rification du lemme 5.

191 - On peut procéder de la façon suivante :

1°) Partant du premier membre de (16), on peut appliquer la formule (15) sur chacun des trois crochets.

Si on schématise le résultat en mettant de côté les scalaires on obtient une expression de la forme :

$$[\lambda_1 \vec{a}' + \mu_1 \vec{b}'] \cdot \left[[\lambda_2 \vec{b}' + \mu_2 \vec{c}'] \wedge [\lambda_3 \vec{c}' + \mu_3 \vec{a}'] \right]$$

Une telle formule se développe à l'aide des propositions 2 et 7 (qui assurent la "linéarité" sur chaque facteur) et on obtient une combinaison de produits mixtes :

$$\alpha \left\{ \vec{a}' . (\vec{b}' \wedge \vec{c}') \right\} + \beta \left\{ \vec{a}' . (\vec{b}' \wedge \vec{a}') \right\} + \gamma \left\{ \vec{a}' . (\vec{c}' \wedge \vec{c}') \right\} + \dots$$

Or tous les $\{\dots\}$ dans lesquels figure deux fois un même vecteur sont nuls (cf. proposition 11) et on aboutit finalement à l'expression.

$$\left\{ \vec{a}' . (\vec{b}' \wedge \vec{c}') \right\} \times \left\{ [(\vec{a} \wedge \vec{b}) . \vec{b}'] [(\vec{b} \wedge \vec{c}) . \vec{c}'] [(\vec{c} \wedge \vec{a}) . \vec{a}'] - [(\vec{a} \wedge \vec{b}) . \vec{a}'] [(\vec{b} \wedge \vec{c}) . \vec{b}'] [(\vec{c} \wedge \vec{a}) . \vec{c}'] \right\}$$

2°) Notons $\mathscr{C}(a,b,c,a',b',c')$ le deuxième $\{\dots\}$ de la formule précédente.

Le lemme 5 sera démontré si on établit l'égalité.

$$\mathscr{C}(a,\dots,c') = \left\{ \vec{a} . (\vec{b} \wedge \vec{c}) \right\} \times \left\{ (\vec{a} \wedge \vec{a}') . [(\vec{b} \wedge \vec{b}') \wedge (\vec{c} \wedge \vec{c}')] \right\}$$

C'est facile si on considère les deux membres de cette égalité comme des fonctions de la variable (vectorielle) $\vec{a}'$.

Il s'agit en effet dans les deux cas d'une fonction qui dépend <u>linéairement</u> de $\vec{a}'$ et il suffit donc de vérifier que l'on a bien égalité quand $\vec{a}'$ est l'un des vecteurs de base d'un repère quelconque.

On choisira par exemple $\vec{a}'$ successivement égal à $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$. C'est alors un exercice simple de voir que l'égalité a lieu dans ces trois cas.

EXERCICES

154 – On considère les vecteurs $\vec{e}_1 = (1,-1,0)$; $\vec{e}_2 = (1,1,-1)$ et $\vec{e}_3 = (1,1,2)$

Vérifier que ces vecteurs sont deux à deux orthogonaux.

Utiliser le produit vectoriel de $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ pour montrer que le repère $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est de même orientation que le repère $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$.

155 – On pose $\vec{u} = (0,1,-1)$ et $\vec{v} = (-1,-1,-1)$. Vérifier que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux. Puis trouver les vecteurs $\vec{u}', \vec{v}'$ qui sont unitaires et colinéaires à $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Compléter $\{\vec{u}', \vec{v}'\}$ de façon à obtenir la base d'un repère orthonormé.

156 – Soient A, B, C trois points quelconques de l'espace.

1°) montrer (en écrivant $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$ et $\vec{AC} = \vec{OC} - \vec{OA}$) que l'on a :

$$\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \vec{OA} \wedge \vec{OB} + \vec{OB} \wedge \vec{OC} + \vec{OC} \wedge \vec{OA}$$

2°) dans le cas où A, B, C sont situés dans le plan xOy, comment peut-on interpréter cette relation comme la somme des aires de certains triangles ?

157 – On se place dans le plan xOy et on considère le triangle ABC de sommets :

$$A = (a, a'), \qquad B = (b, b'), \qquad C = (c, c').$$

Montrer que l'aire de ABC est donnée par :

$$\mathcal{A}ire\,(ABC) = \frac{1}{2} \left| a(b'-c') + b(c'-a') + c(a'-b') \right|$$

158 – Dans le plan xOy, on considère le triangle ABC de sommets :

$$A = (1,2), \qquad B = (-1,-1), \qquad C = (2,-1)$$

1°) calculer l'angle $\theta = (\vec{AB}, \vec{AC})$ en cherchant $\sin\theta$ et $\cos\theta$ à l'aide du produit vectoriel et du produit scalaire.

2°) calculer l'aire de ABC.

3°) en déduire la longueur de la hauteur issue du sommet A.

159- On considère le tétraèdre $A=(1,0,1)$; $B=(2,3,1)$; $C=(1,1,0)$, $D=(2,2,3)$

1°) calculer le volume de ABCD,
2°) calculer l'aire de chaque face,
3°) trouver la distance du sommet A au plan BCD en procédant des deux façons suivantes:
a) déduire cette distance des deux questions précédentes,
b) chercher l'équation du plan BCD et utiliser la proposition 4.
4°) Quels sont les points de l'axe Oz qui sont à la distance 17 de la droite AB.

160- Trouver l'équation du plan $M=(2,1,0)$, $N=(3,1,4)$ $P=(2,0,1)$.
Déterminer l'angle des vecteurs $\vec{MN}$, $\vec{NP}$.
Trouver un vecteur directeur de l'intersection du plan MNP avec le plan d'équation: $x-y=2$.

161- On considère la droite $\mathcal{D}$ d'équation:

$$\mathcal{D} = \begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y-z=0 \end{cases}$$

1°) trouver une équation paramétrique de cette droite.
2°) t désignant le paramètre dans l'équation précédente et $M(t)$ le point de $\mathcal{D}$ correspondant, trouver les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{M(t)P}$ si P est le point $(1,1,1)$
3°) Chercher la valeur de t pour laquelle $\vec{MP}$ est perpendiculaire à $\mathcal{D}$.
4°) Chercher la valeur de t pour laquelle la fonction

$$t \mapsto \|\overrightarrow{M(t)P}\|^2$$

atteint son minimum.

162- On se donne les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ de représentations paramétriques:

$$\mathcal{D} = \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = -\lambda \\ z = 1-\lambda \end{cases} \qquad \mathcal{D}' = \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 1 \\ z = -\lambda \end{cases}$$

1°) déterminer la distance d entre ces deux droites,
2°) Donner un vecteur directeur de la perpendiculaire commune à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

163 – Déterminer des équations cartésiennes et paramétriques de la droite $\mathcal{D}$ passant par $A = (1, 0, 1)$ et $B = (2, 3, 1)$; ainsi que de la droite $\mathcal{D}'$ passant par $C = (1, 1, 0)$ et $D = (2, 2, 3)$

Trouver un vecteur directeur $\vec{u}$ de la perpendiculaire commune à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

Déterminer ensuite une équation du plan $\mathcal{P}$ contenant $\mathcal{D}$ et parallèle à $\vec{u}$.

Trouver l'intersection de $\mathcal{P}$ avec $\mathcal{D}'$ et en déduire une équation (cartésienne ou paramétrique) de la perpendiculaire commune à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

164 – On considère le tétraèdre ABCD donné par

$A = (1, 1, 0)$, $B = (1, 0, 1)$, $C = (0, 1, 1)$, $D = (2, 2, 2)$

1°) montrer que chacune des arêtes est orthogonale à l'arête opposée.

2°) Déterminer les projections A', B', C', D' de chaque sommet sur la face opposée.

3°) Vérifier que les quatre droites AA', BB', CC' et DD' sont concourantes, déterminer les coordonnées de leur point commun H.

165 – On désigne par Δ l'axe de l'espace qui passe par O et qui porte le vecteur de composantes $(1, 2, -1)$.

On considère la rotation $\mathcal{R}$ d'axe Δ et d'angle $\frac{\pi}{2}$ [dans le sens direct relativement à Δ]

Trouver l'image d'un vecteur $\vec{e}$ perpendiculaire à Δ et d'origine O.
[on utilisera le produit $\vec{u} \wedge \vec{e}$ en tenant compte des longueurs des vecteurs considérés]

On se donne un vecteur $\vec{v}$ d'origine O, non nécessairement perpendiculaire à Δ.

1°) montrer que si l'on pose $\vec{w} = \dfrac{(\vec{u} \cdot \vec{v})}{\|\vec{u}\|^2}\, \vec{u}$, alors

$$\vec{v} = \vec{w} + (\vec{v} - \vec{w})$$

est une décomposition de $\vec{v}$ comme somme d'un vecteur porté par Δ et d'un vecteur perpendiculaire à Δ.

2°) en déduire l'image de $\vec{v}$ par la rotation $\mathcal{R}$.

3°) trouver les images des vecteurs $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ par $\mathcal{R}$.

166 - On considère l'axe Δ portant le vecteur $\vec{u}$ de composantes $(2, 1, 1)$ et la rotation ρ d'axe Δ et d'angle $\theta = \frac{\pi}{3}$ [dans le sens direct relativement à Δ]

1°) montrer que si $\vec{v}$ est un vecteur quelconque d'origine O, alors l'image $\vec{w} = \rho(\vec{v})$ est caractérisée par les conditions suivantes :

a) $\|\vec{w}\| = \|\vec{v}\|$, [condition qui revient à $\vec{v}.\vec{v} = \vec{w}.\vec{w}$]

b) $\vec{u}.\vec{v} = \vec{u}.\vec{w}$

c) $\left[\vec{v} - \frac{(\vec{u}.\vec{v})}{\|\vec{u}\|^2}.\vec{u}\right] \wedge \left[\vec{w} - \frac{(\vec{u}.\vec{w})}{\|\vec{u}\|^2}.\vec{u}\right] = \left[\|\vec{v}\|^2 - \frac{(\vec{u}.\vec{v})^2}{\|\vec{u}\|^2}\right]\frac{\sin\theta}{\|\vec{u}\|}.\vec{u}$

2°) En déduire les images des vecteurs $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ par la rotation ρ.

167 - On désigne par $\mathcal{V}$ l'ensemble des vecteurs de l'espace et on pose

$$E = \mathbb{R} \times \mathcal{V}$$

$$E = \{(\alpha, \vec{u}) \; ; \; \alpha \in \mathbb{R}, \vec{u} \in \mathcal{V}\}.$$

On définit sur E la loi de composition suivante

$$(\alpha, \vec{u}) * (\beta, \vec{v}) = (\alpha\beta - \vec{u}.\vec{v} \; , \; \alpha\vec{v} + \beta\vec{u} + \vec{u}\wedge\vec{v})$$

1°) montrer que la loi de composition $*$ confère une structure de groupe (non commutatif) à l'ensemble E privé de l'élément $(0, \vec{0})$.

[on montrera que la loi $*$ est associative, que le couple $(1, \vec{0})$ est élément neutre et on cherchera l'inverse de $(\alpha, \vec{u})$ sous la forme $(\lambda\alpha, -\lambda\vec{u})$]

2°) on considère les trois éléments suivants de E :

$$a = (0, \vec{u}) \qquad b = (0, \vec{v}) \qquad c = (0, \vec{w})$$

Montrer que

$$a*b*c = \left(-(\vec{u}\wedge\vec{v}).\vec{w} \; , \; (\vec{w}.\vec{u})\vec{v} - (\vec{v}.\vec{w})\vec{u} - (\vec{u}.\vec{v})\vec{w}\right)$$

Interpréter géométriquement sur les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ la nullité de chacune des deux composantes de $a*b*c$.

3°) On considère l'élément de E défini par

$$r = (\alpha, \vec{u})$$

avec $\alpha^2 + \vec{u}.\vec{u} = 1$.

a) Calculer $r * (0,\vec{x}) * r^{-1}$ pour tout vecteur $\vec{x}$ de $\mathcal{V}$.

b) On pose $r * (0,\vec{x}) * r^{-1} = (0, f(\vec{x}))$. Calculer $f(\vec{x})$ dans les deux cas suivants :
- $\vec{x}$ est colinéaire à $\vec{u}$,
- $\vec{x}$ est perpendiculaire à $\vec{u}$

Calculer enfin dans ce dernier cas $\vec{x} \wedge f(\vec{x})$ et en déduire que f est la rotation d'axe Δ et d'angle θ telle que :
- Δ est l'axe de vecteur directeur $\vec{u}$,
- $\sin\theta = \|\vec{u}\|$.

168 - Dessiner la figure 30 de la page 37 dans un plan $\mathcal{P}$ ne passant pas par l'origine, de la même façon que la figure 89 a été redessinée à la page 189.

On suppose (B,D,F) et (A,C,E) situés sur deux droites et on se propose de montrer que α, β et γ sont alignés, de façon à redémontrer le théorème de Pappus.

1°) montrer, en s'inspirant du § 189 que le résultat cherché sera établi si on montre que les hypothèses impliquent :

$$\left[(\vec{OA}\wedge\vec{OB})\wedge(\vec{OD}\wedge\vec{OE})\right].\left\{\left[(\vec{OF}\wedge\vec{OA})\wedge(\vec{OC}\wedge\vec{OD})\right]\wedge\left[(\vec{OE}\wedge\vec{OF})\wedge(\vec{OB}\wedge\vec{OC})\right]\right\} = 0$$

2°) on note désormais $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ pour désigner un produit du type :

$$(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = \vec{u}.(\vec{v}\wedge\vec{w})$$

Montrer en utilisant la proposition 11 que l'on a toujours

$$(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = (\vec{w},\vec{u},\vec{v})$$

3°) Montrer que si $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d},\vec{e},\vec{f}$ sont six vecteurs on a :

$$\left((\underline{\vec{a}}\wedge\underline{\vec{b}})\wedge(\vec{d}\wedge\vec{e}),\ (\vec{f}\wedge\vec{a})\wedge(\underline{\vec{c}}\wedge\underline{\vec{d}}),\ (\underline{\vec{e}}\wedge\underline{\vec{f}})\wedge(\vec{b}\wedge\vec{c})\right) =$$

$$\left\{(\vec{a},\vec{c},\vec{e})(\vec{d},\vec{e},\vec{b})(\vec{f},\vec{a},\vec{d})(\vec{b},\vec{c},\vec{f}) - (\vec{b},\vec{d},\vec{f})(\vec{d},\vec{e},\vec{a})(\vec{f},\vec{a},\vec{c})(\vec{b},\vec{c},\vec{e})\right\}$$

[développer les doubles produits vectoriels par rapport aux vecteurs soulignés]

4°) conclure.

DÉTERMINANTS D'ORDRE DEUX OU TROIS

192 - LA NOTION D'INDÉPENDANCE. Nous commencerons par poser de façon précise les deux définitions suivantes, qui correspondent à des phénomènes que nous avons souvent rencontrés au cours des chapitres précédents:

DÉFINITION 1 : on dit que le vecteur $\vec{v}$ est COMBINAISON LINÉAIRE des vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ si on peut trouver des nombres λ_1, λ_2 tels que $\vec{v}$ puisse s'écrire

$$\vec{v} = \lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 .$$

Plus généralement, on dit que $\vec{v}$ est combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ si on peut trouver des nombres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ tels que :

$$\vec{v} = \lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 + \dots + \lambda_n \vec{u}_n .$$

On écrit aussi une telle expression : $\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{u}_i$.

EXEMPLES : tout vecteur de l'espace s'écrit comme combinaison linéaire des trois vecteurs $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ formant la base d'un repère. En effet, si $\vec{u}$ a pour composantes (x_1, x_2, x_3) dans ce repère, on a :

$$\vec{u} = x_1 \vec{i} + x_2 \vec{j} + x_3 \vec{k} .$$

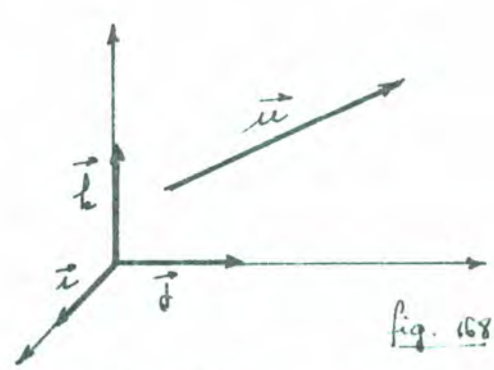


fig. 168

Le même résultat est vrai avec un repère quelconque en géométrie plane, tout vecteur du plan s'écrit comme combinaison linéaire des deux vecteurs $\vec{i}, \vec{j}$ du repère.

En revanche, revenons à l'espace et considérons un plan $\mathcal{P}$ de celui-ci.

Si nous nous fixons un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de ce plan, il est clair que les vecteurs du plan $\mathcal{P}$ peuvent s'écrire comme combinaison linéaire de $\vec{i}$ et $\vec{j}$, alors que les vecteurs qui ne sont pas dans $\mathcal{P}$ ne peuvent pas être écrits sous cette forme.

Citons pour terminer un dernier exemple : si on considère $n = 1$ dans la définition 1, on voit que les seuls vecteurs $\vec{v}$ qui peuvent s'écrire comme combinaison linéaire d'un vecteur donné $\vec{u}_1$ sont de la forme

$$\vec{v} = \lambda_1 \vec{u}_1 ,$$

ce sont donc, en l'occurrence les vecteurs qui sont colinéaires à $\vec{u}_1$.

193 - DÉFINITION 2 : on dit qu'une famille de vecteurs $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ est linéairement indépendante si aucun de ces vecteurs ne peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres.

Dans le cas contraire, on dit que les vecteurs sont linéairement dépendants.

EXEMPLES : 1°) Plaçons nous tout d'abord dans le plan. Considérons deux vecteurs, c'est-à-dire une famille $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$. Si nous supposons ces deux vecteurs non nuls, deux cas sont possibles :

a) $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont colinéaires et alors $\vec{u}_1$ s'écrit $\lambda \vec{u}_2$, donc comme "combinaison" linéaire de $\vec{u}_2$ et la famille n'est pas linéairement indépendante.

b) $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ ne sont pas colinéaires et aucun d'eux n'est "combinaison" de l'autre. Ils forment alors une famille linéairement indépendante.

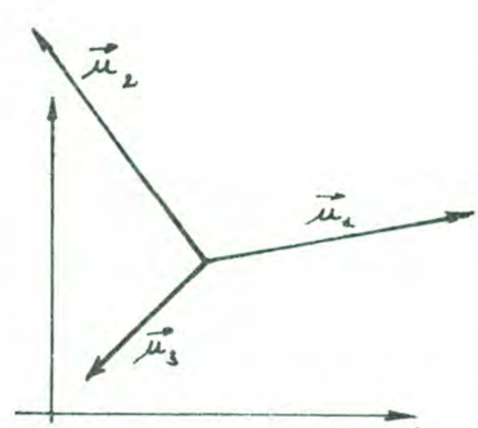


fig. 169

Il est important de noter que si on considère (toujours dans le plan) une famille de trois vecteurs $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$

cette famille est toujours linéairement dépendante. En effet, raisonnons à partir de $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$:

a) si ces deux vecteurs sont colinéaires et non nuls, $\vec{u}_1$ s'écrit $\lambda_2 \vec{u}_2$ et donc on a :

$$\vec{u}_1 = \lambda_2 \vec{u}_2 + \lambda_3 \vec{u}_3 \quad , \quad (\lambda_3 = 0).$$

b) si $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ ne sont pas colinéaires, il déterminent un repère dans lequel $\vec{u}_3$ peut être caractérisé par ses composantes. On aura donc :

$$\vec{u}_3 = x\,\vec{u}_1 + y\,\vec{u}_2 .$$

c) reste le cas où l'un des vecteurs (disons $\vec{u}_1$) est nul. On peut alors écrire :

$$\vec{u}_1 = \lambda_2 \vec{u}_2 + \lambda_3 \vec{u}_3 \quad , \quad (\lambda_2 = \lambda_3 = 0)$$

2°) On retrouve une situation analogue dans l'espace :

a) une famille $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ de deux vecteurs est linéairement indépendante si et seulement si ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires,

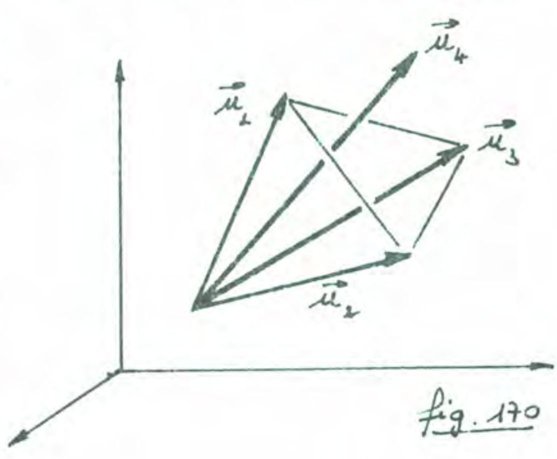


fig. 170

b) trois vecteurs $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ sont linéairement indépendants si et seulement si ils ne sont pas dans un même plan, car d'après ce que nous avons dit au § 192, aucun deux ne peut alors être combinaison linéaire des autres,

c) toute famille $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4\}$ est linéairement dépendante, même si aucun de ces vecteurs n'est dans un des plans déterminés par deux des autres. En effet, même dans ce cas, il suffira de considérer $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ comme un repère et on pourra forcément décomposer $\vec{u}_4$ dans ce repère.

194 - La notion d'indépendance linéaire fera l'objet d'une étude systématique au cours du module AG2.

Nous allons simplement montrer ici comment les notions introduites dans la leçon précédente permettent de définir des "outils" susceptibles d'être utilisés pour répondre à des questions du type :

" les vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ de composantes :

$\vec{u}_1 = (1, -1, 2)$ $\quad$ $\vec{u}_2 = (2, 3, -1)$ $\quad$ $\vec{u}_3 = (-1, -1, 1)$

forment-ils une famille linéairement indépendante ? "

Résolvons le problème à titre d'exemple :

1°) si on cherche à savoir si $\vec{u}_1$ s'écrit comme combinaison linéaire de $\vec{u}_2$ et $\vec{u}_3$, on cherchera si on peut trouver des coefficients λ_2 et λ_3 tels que

$$\vec{u}_1 = \lambda_2 \vec{u}_2 + \lambda_3 \vec{u}_3 .$$

En regardant cette égalité vectorielle composante à composante on obtient un système :

$$\begin{cases} 1 = 2.\lambda_2 - 1.\lambda_3 \\ -1 = 3.\lambda_2 - 1.\lambda_3 \\ 2 = -1.\lambda_2 + 1.\lambda_3 \end{cases}$$

et le problème est alors de savoir si ce système possède un couple (λ_2, λ_3) de solutions.

2°) si c'est le cas la famille est linéairement dépendante, sinon il faudra encore chercher si $\vec{u}_2$ peut se décomposer à partir de $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_3$, ... puis si $\vec{u}_3$ peut se décomposer à partir de $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$.

3°) bien que cette méthode puisse être un peu simplifiée (ce que nous laissons le soin de voir au lecteur à titre d'exercice) il est plus intéressant d'aborder le problème sous l'angle géométrique.

En effet, la question est en fait de savoir si les trois vecteurs donnés sont ou non situés dans un même plan. Or nous avons vu dans la leçon VI (cf. § 178) qu'il suffisait pour cela de voir si le produit :

(1) $$\vec{u}_1 . (\vec{u}_2 \wedge \vec{u}_3)$$

est égal ou non à 0.

On voit ici par un calcul direct simple que les vecteurs donnés sont bien linéairement indépendants puisque la quantité (1) vaut +5 ...

DÉTERMINANTS D'ORDRE DEUX.

195 - Plaçons-nous dans le plan et choisissons un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$. Bien que cela n'ait pas vraiment d'importance, nous supposerons que ce repère est orthonormé [1]

Considérons deux vecteurs $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ donnés par leurs composantes :

$$\vec{u}_1 = (x_1, y_1), \quad \vec{u}_2 = (x_2, y_2).$$

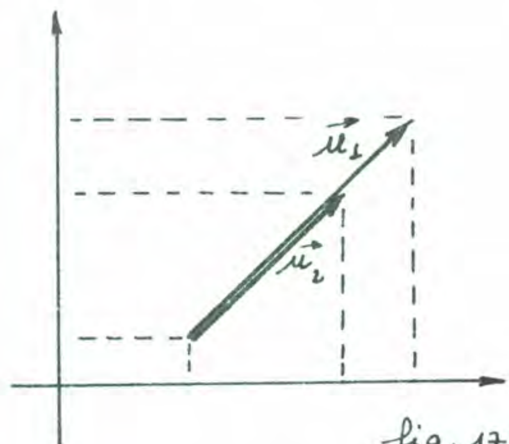


fig. 171

Si l'on cherche un critère permettant de savoir si ces deux vecteurs sont linéairement indépendants ou non, on doit chercher une condition exprimant de façon analytique que ces vecteurs sont ou non colinéaires.

On la proportionnalité des composantes de vecteurs qui sont eux-mêmes proportionnels amène à écrire que

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}, \tag{2}$$

ou mieux, que

$$x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0. \tag{3}$$

Cette dernière expression ne comportant pas de conditions sur y_1 ou y_2.

On pose :

DÉFINITION 3 : On appelle DÉTERMINANT des vecteurs $\vec{u}_1\,(x_1, y_1)$ et $\vec{u}_2\,(x_2, y_2)$ le nombre noté

$$d(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \quad \text{ou encore} \quad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$$

égal à :

$$x_1 y_2 - x_2 y_1.$$

---

(1) seules les propositions 8 et 6 nécessitent vraiment ce genre d'hypothèse.

196- Nous pouvons évidemment énoncer tout de suite la :

PROPOSITION 1 : pour que deux vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ du plan soient linéairement indépendants, il faut et il suffit que l'on ait :

$$d(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \neq 0.$$

Démonstration 1 : comme on l'a dit plus haut la relation

$$d(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$$

revient à la proportionnalité des composantes...

Démonstration 2 : considérons le plan $\mathcal{P}$ et son repère xOy comme le plan xOy de l'espace muni d'un repère à trois dimensions $(Oxyz)$.

Aux vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ correspondent donc de façon naturelle les vecteurs de coordonnées :

$$(x_1, y_1, 0), \qquad (x_2, y_2, 0).$$

Or le PRODUIT VECTORIEL de ces vecteurs est précisément :

$$(x_1, y_1, 0) \wedge (x_2, y_2, 0) = (0, 0, x_1 y_2 - x_2 y_1) = (0, 0, d(\vec{u}_1, \vec{u}_2))$$

Cette remarque suffit pour démontrer la proposition puisque le produit vectoriel de deux vecteurs est nul si et seulement si ceux-ci sont colinéaires.

197 - Cette relation entre "déterminant d'ordre 2" (c'est-à-dire déterminant de deux vecteurs) et produit vectoriel, permet d'énoncer sans démonstration supplémentaire les propriétés suivantes du déterminant :

PROPOSITION 2 : l'application "déterminant", c'est-à-dire l'application :

$$(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \longmapsto d(\vec{u}_1, \vec{u}_2),$$

qui associe à deux vecteurs du plan leur déterminant possède les propriétés suivantes :

1°) quels que soient $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$, $\quad d(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = -d(\vec{u}_2, \vec{u}_1)$

2°) quels que soient les vecteurs $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$ et les scalaires λ, μ on a :

$$d(\vec{u}_1, \lambda\vec{u}_2 + \mu\vec{u}_3) = \lambda\, d(\vec{u}_1, \vec{u}_2) + \mu\, d(\vec{u}_1, \vec{u}_3)$$

et

$$d(\lambda\vec{u}_1 + \mu\vec{u}_2, \vec{u}_3) = \lambda\, d(\vec{u}_1, \vec{u}_3) + \mu\, d(\vec{u}_2, \vec{u}_3).$$

Ces propriétés se résument souvent en disant que d est une fonction BILINÉAIRE (linéaire par rapport à chacune des deux variables) et ANTISYMÉTRIQUE.

PROPOSITION 3 : (interprétation géométrique). Le déterminant $d(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ de deux vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ du plan est égal à l'<u>aire algébrique</u> du parallélogramme construit sur ces deux vecteurs.

Celle-ci est positive si $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ est orienté dans le sens direct, négative dans le cas contraire (exemple (2))

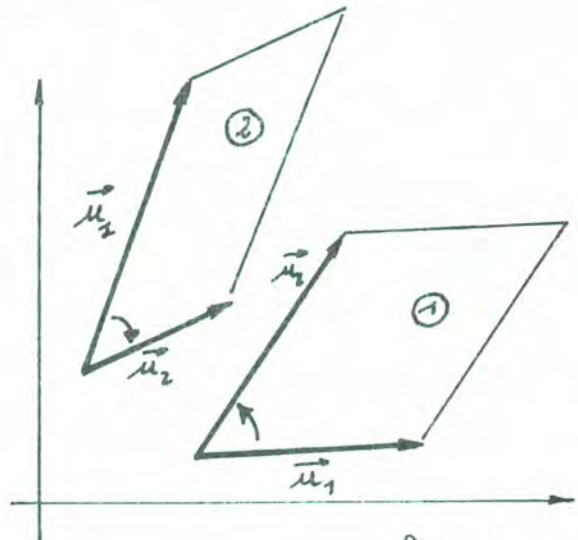


fig. 172

198 - **REMARQUE 1** : il est clair que la proposition 3 ci-dessus n'est rien d'autre que le résultat énoncé dans la proposition 10 de la leçon VI. Arrêtons-nous cependant sur la notion d'aire algébrique que l'on obtient en tenant compte du signe du déterminant.

Considérons un triangle ABC du plan P. Son aire est égale à la valeur absolue de

(4) $\frac{1}{2} \cdot d(\vec{AB}, \vec{AC})$.

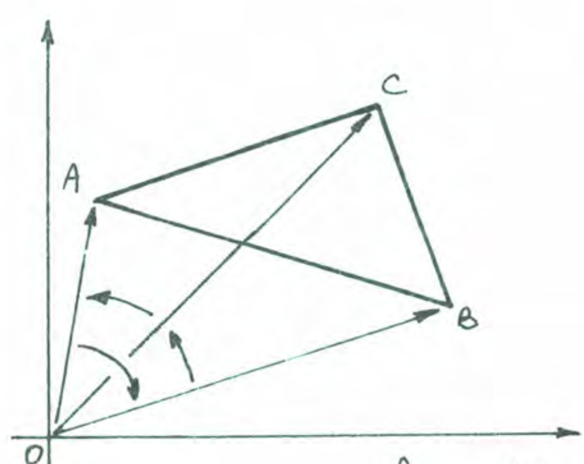


fig. 173

Considérons maintenant la somme des aires algébriques des triangles déterminés par les trois couples $(\vec{OA}, \vec{OB})$, $(\vec{OB}, \vec{OC})$ et $(\vec{OC}, \vec{OA})$.

On obtient la demi-somme des déterminants suivants:

$$(5) \qquad \frac{1}{2}\left[\, d(\vec{OA},\vec{OB}) + d(\vec{OB},\vec{OC}) + d(\vec{OC},\vec{OA})\,\right].$$

Or si, dans l'expression (4), nous remplaçons $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ respectivement par $(\vec{OB}-\vec{OA})$ et $(\vec{OC}-\vec{OA})$ il vient:

$$\frac{1}{2}\, d(\vec{AB},\vec{AC}) = \frac{1}{2}\, d(\vec{OB}-\vec{OA},\ \vec{OC}-\vec{OA})$$
$$= \frac{1}{2}\left[d(\vec{OB},\vec{OC}) - d(\vec{OB},\vec{OA}) - d(\vec{OA},\vec{OC}) + d(\vec{OA},\vec{OA})\right]$$

En notant que $d(\vec{OB},\vec{OA}) = -d(\vec{OA},\vec{OB})$, que $d(\vec{OA},\vec{OC}) = -d(\vec{OC},\vec{OA})$ et que $d(\vec{OA},\vec{OA}) = 0$; on voit finalement que que les expressions (4) et (5) sont identiques.

Cela s'explique sur la figure 173 car les aires algébriques intervenant dans (5) se compensent partiellement si l'on tient compte du signe et il est clair que l'aire de OAB apparaît une fois avec le signe − et une fois avec le signe +.

199 - REMARQUE 2. On prendra garde au fait que le déterminant de deux vecteurs n'est défini que dans le plan.

Il convient de ne pas confondre la notion de produit vectoriel et celle de déterminant.

Dans le premier cas le résultat est un vecteur, dans le second c'est un nombre.

<u>Exercice 169</u>: soit dans le plan $\mathcal{P}$ la rotation ρ de centre O et d'angle θ.
On rappelle que l'image (u,v) de (x,y) est donnée par:

$$\begin{cases} u = x.\cos\theta - y.\sin\theta \\ v = x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$$

Montrer que, pour tout couple $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ de vecteurs on a:

$$d(\rho(\vec{u}_1), \rho(\vec{u}_2)) = d(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$$

<u>Exercice 170</u>: même question avec la symétrie σ:

$$\begin{cases} u = x.\cos 2\theta + y\sin 2\theta \\ v = x.\sin 2\theta - y\cos 2\theta, \end{cases}$$

montrer que

$$d(\sigma(\vec{u}_1), \sigma(\vec{u}_2)) = -d(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$$

DÉTERMINANTS D'ORDRE TROIS

200- Nous nous plaçons désormais dans le cadre de la géométrie dans l'espace.

Nous choisissons une fois pour toutes un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ dans lequel un vecteur $\vec{u}$ sera déterminé par ses composantes, notées (x, y, z).

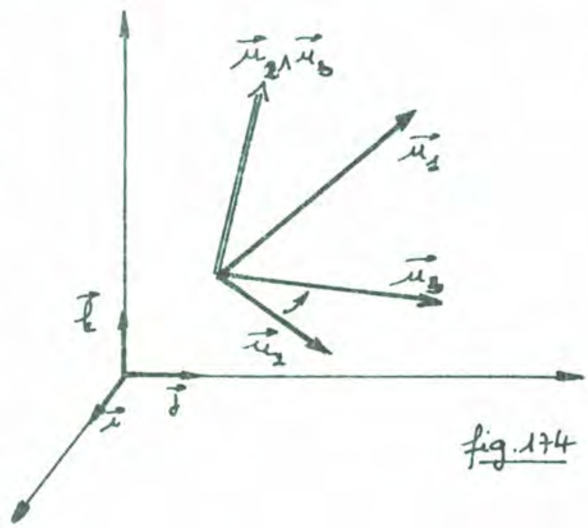


fig. 174

Nous cherchons cette fois une fonction "déterminant" qui serve à exprimer analytiquement l'indépendance linéaire d'un système de trois vecteurs. Nous utiliserons pour cela la notion de "produit mixte" que nous avons déjà rencontrée au cours de la leçon VI, dans laquelle nous avons utilisé ce calcul pour exprimer que trois vecteurs sont ou non coplanaires.

DÉFINITION 4 : on appelle DÉTERMINANT des vecteurs $\vec{u}_1\,(x_1, y_1, z_1)$; $\vec{u}_2\,(x_2, y_2, z_2)$ et $\vec{u}_3\,(x_3, y_3, z_3)$, le nombre noté :

$$d(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3) \quad \text{ou encore} \quad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

et qui est égal à :

$$d(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3) = \vec{u}_1 \cdot (\vec{u}_2 \wedge \vec{u}_3).$$

201- Nous pouvons tout de suite énoncer :

PROPOSITION 4 : pour qu'une famille $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ de vecteurs de l'espace soit linéairement indépendante, il faut et il suffit que l'on ait :

$$d(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3) \neq 0.$$

<u>Démonstration</u> : les vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ sont linéairement dé-

pendants si et seulement si $\vec{u}_1$ est dans le plan déterminé par $\vec{u}_2$ et $\vec{u}_3$.

Cela revient à dire qu'il est orthogonal à $\vec{u}_2 \wedge \vec{u}_3$, donc que le produit scalaire qui apparaît dans la définition de $d(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est nul.

202 - LA RÈGLE DE SARRUS. Si on peut aisément retenir la définition d'un déterminant d'ordre 2 :

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - x_2 y_1 ,$$

il est clair que l'on a affaire à une formule plus compliquée pour les déterminants d'ordre 3.

En effet, en appliquant la définition 4 et en revenant au calcul sur les coordonnées, il vient :

$$(6) \quad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = x_1 y_2 z_3 - x_1 y_3 z_2 - y_1 z_3 x_2 + y_1 x_3 z_2 + z_1 x_2 y_3 - z_1 x_3 y_2 .$$

Un moyen simple de retenir cette formule consiste à remarquer qu'elle contient trois produits affectés du signe "+" et trois du signe "−".

Si on recopie les première et deuxième lignes en-dessous du déterminant initial,

$$(7) \quad \left|\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{array}\right| - \left|\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{array}\right|$$

on s'aperçoit que les produits affectés du signe "+" correspondent aux obliques descendantes et que les autres correspondent aux lignes montantes.

Ce moyen mnémotechnique pour retenir la formule (6) s'appelle la "règle de Sarrus".

203 - Les déterminants d'ordre 3 possèdent des propriétés tout à fait analogues à celles des déterminants d'ordre 2.
Nous commencerons par le pendant de la proposition 2 :

PROPOSITION 5 : La fonction "déterminant", c'est-à-dire l'application :

$$(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3) \longmapsto d(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$$

possède les propriétés suivantes :

1°) si dans la formule $d(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ deux des vecteurs sont égaux, le déterminant est nul,

2°) si dans $d(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ on échange deux vecteurs, le déterminant change de signe,

$$\left[\ \underline{\text{Ex.}} \qquad d(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3) = -\, d(\vec{u}_3, \vec{u}_2, \vec{u}_1)\ \right]$$

3°) si dans $d(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ l'un des vecteurs est une combinaison linéaire, alors le déterminant se décompose linéairement :

$$d(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}, \vec{u}_2, \vec{u}_3) = \lambda\, d(\vec{u}, \vec{u}_2, \vec{u}_3) + \mu\, d(\vec{v}, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$$

$$d(\vec{u}_1, \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}, \vec{u}_3) = \lambda\, d(\vec{u}_1, \vec{u}, \vec{u}_3) + \mu\, d(\vec{u}_1, \vec{v}, \vec{u}_3)$$

$$d(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = \lambda\, d(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}) + \mu\, d(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{v})$$

<u>Démonstration</u> : la première et la dernière propriétés sont immédiates sur la proposition 4 [car une famille où deux vecteurs sont les mêmes n'est pas indépendante] ainsi que sur la définition du déterminant comme "produit mixte" [en ce qui concerne la linéarité lorsque deux des trois vecteurs sont fixés]

Seule la propriété 2°) n'est pas évidente : on voit bien entendu aisément sur la définition

$$d(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3) = \vec{u}_1 \cdot (\vec{u}_2 \wedge \vec{u}_3)$$

que le déterminant change de signe si on échange $\vec{u}_2$ et $\vec{u}_3$. En revanche ce résultat n'est pas immédiat si l'on échange par exemple $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$.
Cela résulte en fait des propriétés 1°) et 3°) : calculons

$$d(\vec{u}_1 + \vec{u}_2, \vec{u}_1 + \vec{u}_2, \vec{u}_3).$$

Comme les deux premiers vecteurs sont les mêmes, le résultat est nul et on peut d'autre part développer par rapport au premier facteur, puis par rapport au deuxième :

$$0 = d(\vec{u}_1, \vec{u}_1, \vec{u}_3) + d(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3) + d(\vec{u}_2, \vec{u}_1, \vec{u}_3) + d(\vec{u}_2, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$$

Il reste évidemment $\quad d(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3) + d(\vec{u}_2, \vec{u}_1, \vec{u}_3) = 0$.

204 - On peut déduire par applications successives de la propriété $\mathcal{P}$) le résultat d'une permutation quelconque des vecteurs sur un déterminant.

On démontre en effet sans peine que chacune des permutations possibles de $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ et $\vec{u}_3$ s'obtient en faisant (au besoin) plusieurs échanges de deux vecteurs.

Ainsi on peut passer de $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ à $(\vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_1)$ en deux étapes.

$$(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3) \to (\vec{u}_2, \vec{u}_1, \vec{u}_3) \to (\vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_1)$$

Comme chacune change le signe du déterminant on démontrera de cette façon le :

COROLLAIRE : une <u>permutation circulaire</u> quelconque sur les vecteurs ne change pas la valeur du déterminant

$$d(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3).$$

205 - Nous énoncerons pour terminer le pendant de la proposition 3, qui n'est autre que le résultat démontré au § 187 de la leçon VI :

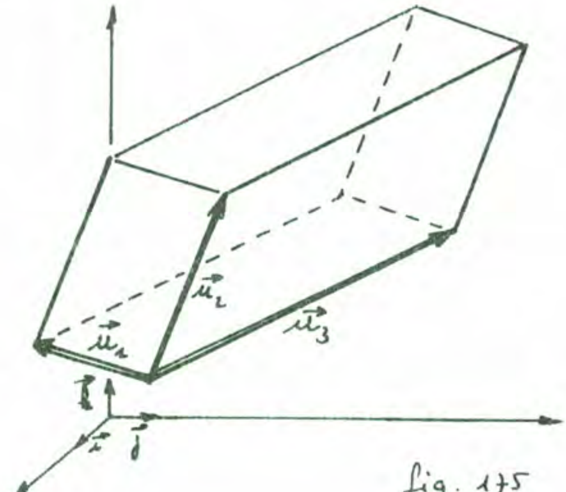


fig. 175

PROPOSITION 6. Soient $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$ trois vecteurs de l'espace.

Le déterminant

$$d(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$$

est égal au volume du parallélépipède oblique construit sur ces trois vecteurs.

Son signe est "+" si le système $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ est orienté comme $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$; le résultat est négatif dans le cas contraire.

Exercice 171 : calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos b \\ 1 & \sin a & \sin b \\ 1 & \operatorname{tg} a & \operatorname{tg} b \end{vmatrix}$$

Exercice 172 : montrer que, pour tout déterminant d'ordre 2 et 3 on a :

$$\begin{vmatrix} x & y \\ z & t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & z \\ y & t \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Exercice 173 : vérifier :

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = x_1 \cdot \begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix} - x_2 \cdot \begin{vmatrix} y_1 & y_3 \\ z_1 & z_3 \end{vmatrix} + x_3 \cdot \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_3 \end{vmatrix}$$

Exercice 174 : on considère un tétraèdre ABCD. Montrer que si O désigne l'origine du repère, on a :

$$d(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}) = -d(\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}) + d(\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OD}) - d(\vec{OA}, \vec{OC}, \vec{OD}) + d(\vec{OB}, \vec{OC}, \vec{OD})$$

Comparer à la remarque du § 198.

Exercice 175 : démontrer que si f est une rotation de l'espace

$$d(f(\vec{u}_1), f(\vec{u}_2), f(\vec{u}_3)) = d(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$$

quels que soient les vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$.

Comment faut-il changer la formule si f est une symétrie par rapport à un plan ?

QUELQUES MÉTHODES DE CALCUL UTILISANT LES DÉTERMINANTS.

1) RECHERCHE D'ÉQUATIONS

206 - L'utilisation la plus simple (et bien connue...) de la notion de déterminant consiste dans l'écriture de la condition d'alignement de trois points A, B, C du plan :

Nous écrirons que ceux-ci sont alignés si et seulement si les deux vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont linéairement dépendants.

En d'autre termes si

$$d(\vec{AB}, \vec{AC}) = 0.$$

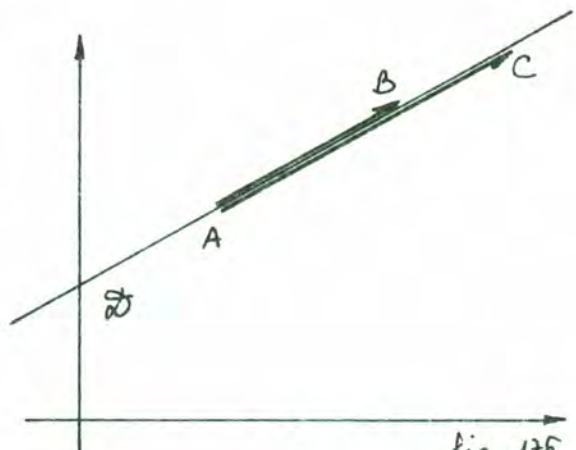


fig. 176

Signalons pour mémoire deux cas de figure utiles pour déterminer l'équation d'une droite dans le plan :

1° DROITE PASSANT PAR DEUX POINTS : pour écrire que $M(x,y)$ appartient à la droite passant par $A(a,a')$ et $B(b,b')$ nous obtiendrons l'équation :

$$d(\vec{AB}, \vec{AM}) = \begin{vmatrix} (b-a) & (x-a) \\ (b'-a') & (y-a') \end{vmatrix} = (b-a)(y-a') - (b'-a')(x-a) = 0$$

2° DROITE PASSANT PAR UN POINT ET PARALLÈLE À UN VECTEUR DONNÉ : la condition pour que le point $M(x,y)$ appartienne à la droite passant par $A(a,a')$ et de vecteur directeur le vecteur $\vec{u}$ de composantes (α, α') s'obtient en écrivant :

$$d(\vec{u}, \vec{AM}) = \begin{vmatrix} \alpha & (x-a) \\ \alpha' & (y-a') \end{vmatrix} = \alpha(y-a') - \alpha'(x-a) = 0$$

207 - Le raisonnement est tout à fait analogue lorsque l'on écrit l'équation d'un plan dans l'espace :

Quatre points A, B, C, D sont dans un même plan si et seulement si $\{\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}\}$ est une famille linéairement dépendante, la condition revient donc à :

$$d(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}) = 0.$$

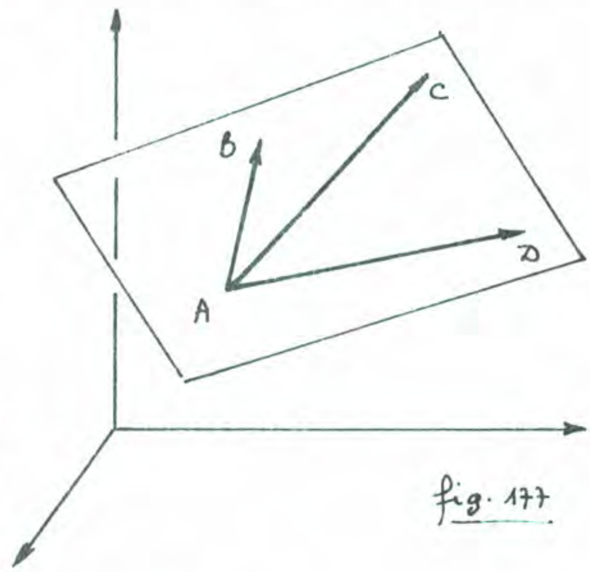


fig. 177

Comme dans le cas précédent, voici deux variantes importantes :

1° PLAN PASSANT PAR TROIS POINTS : pour écrire que $M(x,y,z)$ appartient au plan déterminé par les points $A(a,a',a'')$, $B(b,b',b'')$ et $C(c,c',c'')$ on pose :

$$d(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AM}) = \begin{vmatrix} (b-a) & (c-a) & (x-a) \\ (b'-a') & (c'-a') & (y-a') \\ (b''-a'') & (c''-a'') & (z-a'') \end{vmatrix} = 0$$

2° PLAN PASSANT PAR UN POINT ET PARALLÈLE À DEUX VECTEURS DONNÉS : l'équation du plan passant par A, de coordonnées (a, a', a'') et parallèles à $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, de composantes respectives $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ revient à :

$$d(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{AM}) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & (x-a) \\ \beta_1 & \beta_2 & (y-a') \\ \gamma_1 & \gamma_2 & (z-a'') \end{vmatrix} = 0$$

Dans chacun des deux cas, nous laissons au lecteur le soin d'écrire les équations développées et de comparer aux résultats des leçons V et VI.

208- Nous terminerons ce paragraphe en nous arrêtant sur une méthode d'écriture de la condition d'alignement de trois points qui permet souvent une présentation très symétrique des calculs.

Le point de vue sur lequel repose ce calcul est important et nous conseillons au lecteur de faire la comparaison avec le contenu du COMPLEMENT D.

PROPOSITION 7 : Pour que trois points $A(a,a')$, $B(b,b')$ et $C(c,c')$ du plan soient alignés, il faut et il suffit que l'on ait :

$$(8) \qquad \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 .$$

En particulier, l'équation d'une droite peut s'écrire

$$(9) \qquad \begin{vmatrix} a & b & x \\ a' & b' & y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Démonstration : le calcul repose ici sur une nouvelle façon de regarder le plan $\mathcal{P}$ dans lequel on travaille :

Si nous nous plaçons dans l'espace et si nous considérons que $\mathcal{P}$ est le plan d'équation

$$z = 1 ,$$

il correspond aux points A, B, C, de coordonnées (a,a'), (b,b') et (c,c') dans $\mathcal{P}$, les points de l'espace ayant pour coordonnées $(a,a',1)$, $(b,b',1)$, $(c,c',1)$.

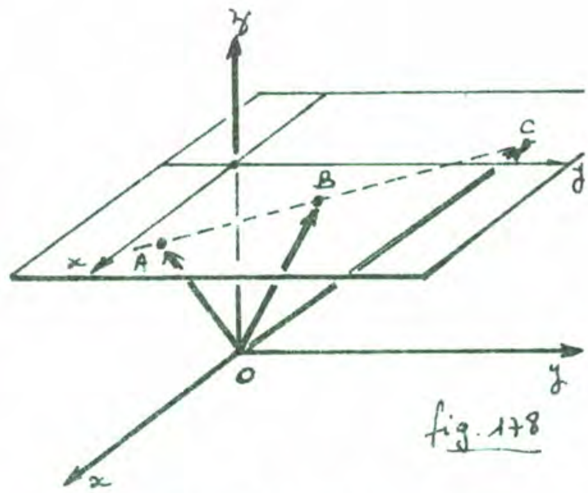


fig. 178

Or il est clair que A, B, C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$ sont dans un même plan. Dès lors, la condition d'alignement revient à la condition de dépendance linéaire de ces vecteurs, donc à :

$$d(\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}) = 0 .$$

On prendra garde que dans la relation (8) la dernière ligne du tableau n'est pas nulle : il est possible de faire le même raisonnement si on se place dans un autre plan du type $z = \lambda$, mais cela n'est pas valable si on se place dans le plan $z = 0$. En effet, si c'était le cas, les vecteurs $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$ seraient dépendants sans aucune condition d'alignement sur A, B, C.

Nous laissons le soin au lecteur de vérifier que (9) se développe bien suivant l'équation de la droite AB.

2) PROBLÈMES D'INTERSECTION

209 - De même que les déterminants peuvent servir à exprimer des conditions d'alignement, il peuvent être utilisés de façon indirecte pour la discussion de questions portant sur l'existence de points d'intersection.

EXEMPLE I : plaçons-nous en géométrie plane et considérons deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ données par leurs équations cartésiennes :

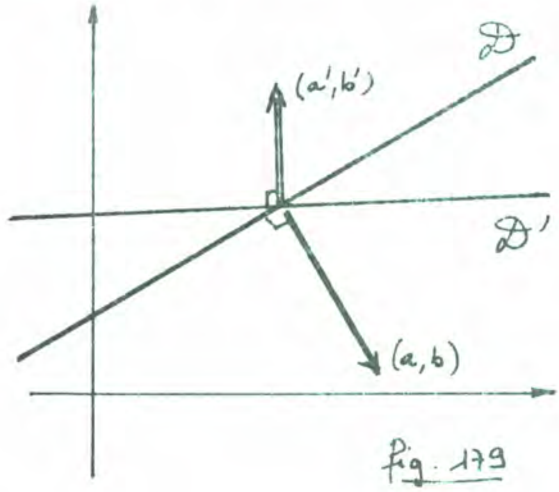


fig. 179

PROPOSITION 8 : si les droites d'équations :

$$\mathcal{D} : \quad ax + by + c = 0$$

$$\mathcal{D}' : \quad a'x + b'y + c' = 0$$

sont telles que $\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} \neq 0$, alors elles se coupent en un point et un seul.

Dans le cas contraire, elles sont parallèles (ou confondues).

Démonstration : (a, b) et (a', b') sont des vecteurs normaux à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$. Si leurs déterminant est non nul, il ne sont pas colinéaires et $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont alors sécantes.

EXEMPLE II : l'analogue de la proposition précédente en géométrie dans l'espace est la :

PROPOSITION 9 : pour que les plans d'équations :

$$\mathcal{P} : ax + by + cz + d = 0$$

$$\mathcal{P}' : a'x + b'y + c'z + d' = 0$$

$$\mathcal{P}'' : a''x + b''y + c''z + d'' = 0$$

se coupent en un point et un seul, il faut et il suffit que :

$$\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} \neq 0 .$$

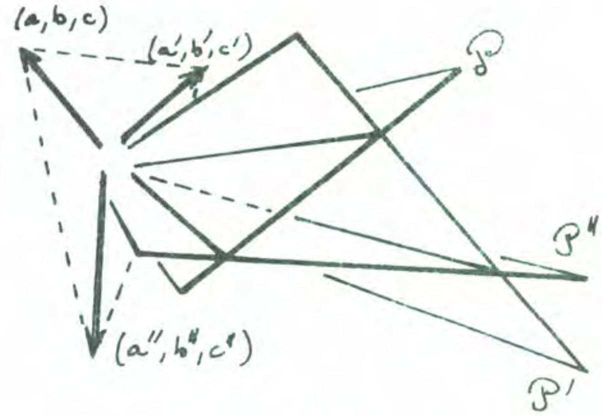


fig. 180

Démonstration : cela revient en effet à écrire que les vecteurs normaux à $\mathcal{P}, \mathcal{P}', \mathcal{P}''$ ne sont pas dans un même plan.

210 - REMARQUE. il est équivalent d'écrire les conditions de la proposition 8 et de la proposition 9 sous une forme (dite "transposée") plus proche des hypothèses : c'est une vérification facile de voir que

$$\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$$

et que

$$\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

On pourrait donc énoncer ces deux propositions en disant :

THÉORÈME. pour que des systèmes de la forme :

$$\begin{cases} ax + by = -c \\ a'x + b'y = -c' \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} ax + by + cz = -d \\ a'x + b'y + c'z = -d' \\ a''x + b''y + c''z = -d'' \end{cases}$$

possèdent une solution et une seule, il faut et il suffit que leurs "déterminants" :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

soient non nuls.

[Nous allons revenir sur la question au § 212, mais nous donnerons encore une situation géométrique où la notion de déterminant est très utile]

211 - PROBLÈMES DE DROITES CONCOURANTES. Considérons trois droites du plan $\mathcal{P}$, données par leurs équations :

$$\mathcal{D} : \quad ax + by + c = 0$$

$$\mathcal{D}' : \quad a'x + b'y + c' = 0$$

$$\mathcal{D}'' : \quad a''x + b''y + c'' = 0$$

La recherche d'un point commun à ces trois droites revient à la résolution du système formé par ces trois équations.

Ce système n'a évidemment de solution que lorsque les droites sont concourantes. Nous allons démontrer le résultat partiel suivant :

PROPOSITION 10 : pour que trois droites du plan, d'équations

$$\mathcal{D}: \quad ax + by + c = 0$$
$$\mathcal{D}': \quad a'x + b'y + c' = 0$$
$$\mathcal{D}'': \quad a''x + b''y + c'' = 0$$

soient CONCOURANTES ou PARALLÈLES, il faut et il suffit que l'on ait

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0 .$$

<u>Démonstration</u> : l'idée est la même qu'au § 208. Le problème

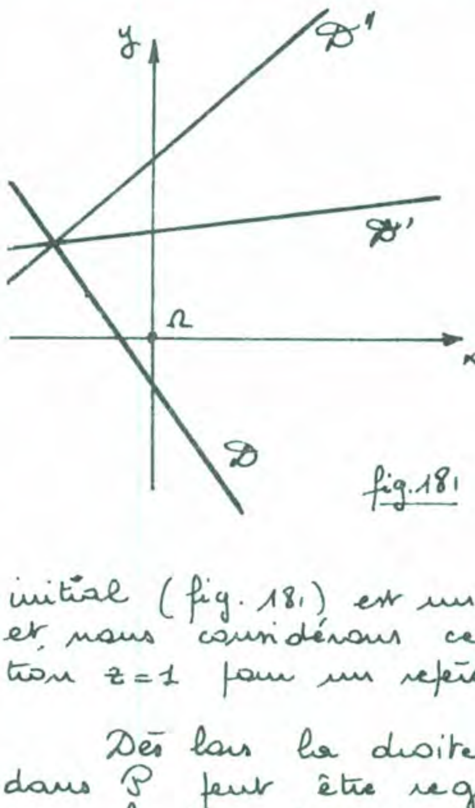


fig. 181

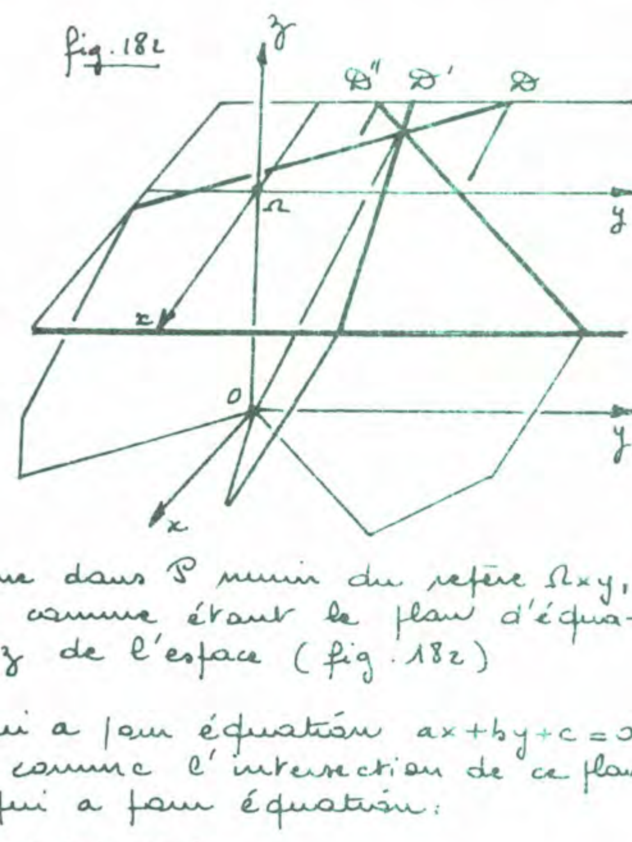


fig. 182

initial (fig. 181) est un problème dans $\mathcal{P}$ muni du repère Ωxy, et nous considérons ce plan comme étant le plan d'équation $z=1$ pour un repère $Oxyz$ de l'espace (fig. 182)

Dès lors la droite $\mathcal{D}$ qui a pour équation $ax+by+c=0$ dans $\mathcal{P}$ peut être regardée comme l'intersection de ce plan avec le plan passant par O qui a pour équation :

$$ax + by + cz = 0 .$$

Il est facile de voir que la concourance ou le parallélisme de $\mathcal{D}, \mathcal{D}', \mathcal{D}''$ équivaut au fait que les plans :

$$ax + by + cz = 0$$
$$a'x + b'y + c'z = 0$$
$$a''x + b''y + c''z = 0$$

ont une droite en commun. Le résultat est donc une conséquence de la proposition 9.

Exercice 176 : On considère (dans le plan) deux points A et B de coordonnées respectives (a,a') et (b,b').
Montrer que le point P de la droite AB tel que

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \lambda \qquad (\lambda \neq 1)$$

a pour coordonnées : $P = \left(\frac{1}{1-\lambda}(a-\lambda b)\,,\ \frac{1}{1-\lambda}(a'-\lambda b')\right)$.

Soit $C=(c,c')$ un troisième point non aligné avec A et B. Déterminer les coordonnées des points Q et R situés respectivement sur BC et CA, tels que :

$$\frac{\overline{QB}}{\overline{QC}} = \mu\ , \qquad \frac{\overline{RC}}{\overline{RA}} = \nu \qquad (\mu, \nu \neq 1)$$

Montrer que ces points sont alignés si et seulement si $\lambda\mu\nu = 1$, de façon à retrouver le théorème de Menelaüs

[Aide : la condition d'alignement s'écrit

$$0 = \begin{vmatrix} \frac{a-\lambda b}{1-\lambda} & \frac{b-\mu c}{1-\mu} & \frac{c-\nu a}{1-\nu} \\ \frac{a'-\lambda b'}{1-\lambda} & \frac{b'-\mu c'}{1-\mu} & \frac{c'-\nu a'}{1-\nu} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

On ne change rien si on multiplie le premier vecteur par $(1-\lambda)$, le second par $(1-\mu)$, le troisième par $1-\nu$. La condition peut donc s'écrire :

$$0 = \begin{vmatrix} a-\lambda b & b-\mu c & c-\nu a \\ a'-\lambda b' & b'-\mu c' & c'-\nu a' \\ 1-\lambda & 1-\mu & 1-\nu \end{vmatrix} = d(\vec{\alpha}-\lambda\vec{\beta}\,,\ \vec{\beta}-\mu\vec{\gamma}\,,\ \vec{\gamma}-\nu\vec{\alpha})$$

si on a désigné par $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ les vecteurs $(a,a',1)$, $(b,b',1)$ et $(c,c',1)$.
En développant on voit qu'il reste :

$$0 = d(\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}) - \lambda\mu\nu \cdot d(\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma})\ ]$$

Exercice 177 : poursuivre l'exercice précédent en déterminant les équations des droites AQ, BR, CP.
Puis montrer (en utilisant le th. 1 du §145) que ces trois droites sont concourantes ou parallèles si et seulement si $\lambda\mu\nu = -1$
[démonstration "analytique" du théorème de Ceva]

3) FORMULES DE CRAMER.

212 – Nous avons vu au § 210 que le calcul de certains déterminants permet de savoir si un système de deux équations et deux inconnues ou de trois équations et trois inconnues possède une solution et une seule.

Un tel système (donc un système de "déterminant" non nul) s'appelle un SYSTÈME DE CRAMER. Nous allons montrer comment on peut calculer les solutions à l'aide de déterminants.

NOTATIONS : si on a affaire au système

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

nous définissons les vecteurs suivants :

$$\vec{C_1}\ (a, a'), \qquad \vec{C_2}\ (b, b'), \qquad \vec{C_3}\ (c, c').$$

Le "déterminant" du système :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = d(\vec{C_1}, \vec{C_2})$$

sera aussi noté Δ ; on a par hypothèse $\Delta \neq 0$.

Si on a affaire au système :

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \\ a''x + b''y + c''z = d'' \end{cases}$$

Nous poserons de même :

$$\vec{C_1}\ (a, a', a''), \qquad \vec{C_2}\ (b, b', b''), \quad \vec{C_3}\ (c, c', c''), \quad \vec{C_4}\ (d, d', d'').$$

et

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = d(\vec{C_1}, \vec{C_2}, \vec{C_3}).$$

Ici encore, nous supposerons $\Delta \neq 0$.

213 - THÉORÈME. Si le "déterminant" Δ du système

$$(S_1)\qquad \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

est non nul, les solutions sont données par :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{c} & b \\ \mathbf{c}' & b' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & \mathbf{c} \\ a' & \mathbf{c}' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}.$$

214 - THÉORÈME. Si le "déterminant" Δ du système

$$(S_2)\qquad \begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \\ a''x + b''y + c''z = d'' \end{cases}$$

est non nul, les solutions sont données par :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{d} & b & c \\ \mathbf{d}' & b' & c' \\ \mathbf{d}'' & b'' & c'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & \mathbf{d} & c \\ a' & \mathbf{d}' & c' \\ a'' & \mathbf{d}'' & c'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}},$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a & b & \mathbf{d} \\ a' & b' & \mathbf{d}' \\ a'' & b'' & \mathbf{d}'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}}.$$

215 - Démonstrations : considérons par exemple le deuxième système.

Avec les notations introduites plus haut et l'identification composante à composante, on voit que x, y, z sont solutions de (S_2) si et seulement si

$$x\,\vec{C}_1 + y\,\vec{C}_2 + z\,\vec{C}_3 = \vec{C}_4$$

Donc si on calcule $d(\vec{C}_4, \vec{C}_2, \vec{C}_3)$ il vient :

$$d(\vec{C}_4, \vec{C}_2, \vec{C}_3) = d(x\vec{C}_1 + y\,\vec{C}_2 + z\,\vec{C}_3\ ,\ \vec{C}_2, \vec{C}_3)$$

$$d(\vec{C}_4, \vec{C}_2, \vec{C}_3) = x\ d(\vec{C}_1, \vec{C}_2, \vec{C}_3) + y\ d(\vec{C}_2, \vec{C}_2, \vec{C}_3) + z\ d(\vec{C}_3, \vec{C}_2, \vec{C}_3).$$

Or les deux derniers déterminants comportent deux vecteurs identiques et sont donc nuls.

Il reste :

$$x\ d(\vec{C}_1, \vec{C}_2, \vec{C}_3) = d(\vec{C}_4, \vec{C}_2, \vec{C}_3)$$

et comme $\Delta \neq 0$, on a finalement :

$$x = \frac{d(\vec{C}_4, \vec{C}_2, \vec{C}_3)}{d(\vec{C}_1, \vec{C}_2, C_3)}$$

qui n'est rien d'autre que la formule de l'énoncé.

Nous laissons le lecteur calculer de même $d(\vec{C}_1, \vec{C}_4, \vec{C}_3)$ et $d(\vec{C}_1, \vec{C}_2, \vec{C}_4)$.

EXERCICES

178 - On considère le système

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 4 \\ x + y - 2z = 0 \\ x + 4y + z = 1 \end{cases}$$

a) résoudre ce système par la méthode de Cramer
b) dessiner dans un repère $O\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}$ les trois plans correspondant aux équations données

179 - montrer que :

$$\begin{vmatrix} 1 & a & -a^2 \\ 1 & b & -b^2 \\ 1 & c & -c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(a-c)(c-b).$$

Résoudre, lorsque $a \neq b$, $b \neq c$, $c \neq a$, le système suivant :

$$\begin{cases} x + ay - a^2 z = a^3 \\ x + by - b^2 z = b^3 \\ x + cy - c^2 z = c^3 \end{cases}$$

180 - On considère le triangle ABC de sommets :

$A\ (1,1)$ $\qquad B\ (-1,-2)$ $\qquad C\ (3,-4)$

a) déterminer les coordonnées des milieux des côtés,
b) trouver les équations des trois médianes en utilisant les déterminants,
c) vérifier, en utilisant la proposition 10, que ces trois médianes sont concourantes

181 - Réécrire la démonstration des §§ 188 — 190 en utilisant la notation sous forme de déterminants.
Même chose avec l'exercice 168...

182 - démontrer que, pour trois vecteurs quelconques de l'espace on a :

$$d(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2, \vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3, \vec{V}_3 \wedge \vec{V}_1) = [d(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3)]^2$$

[utiliser la formule du double produit vectoriel]

BARYCENTRES

216 - La notion de barycentre correspond en premier lieu à la notion physique de CENTRE de GRAVITÉ. Nous allons pour commencer rappeler succinctement les données du problème.

Considérons un solide constitué de masses ponctuelles $M_1, \dots, M_n$ fixées entre elles et subissant chacune une force due à la pesanteur et représentée par un vecteur vertical proportionnel au poids : $\vec{V}_1, \dots, \vec{V}_M$.

Nous supposerons la masse M_1 attirée par une force de "longueur"

$$\|\vec{V}_1\| = \alpha_1,$$

M_2 par une force

$$\|\vec{V}_2\| = \alpha_2,$$

etc.

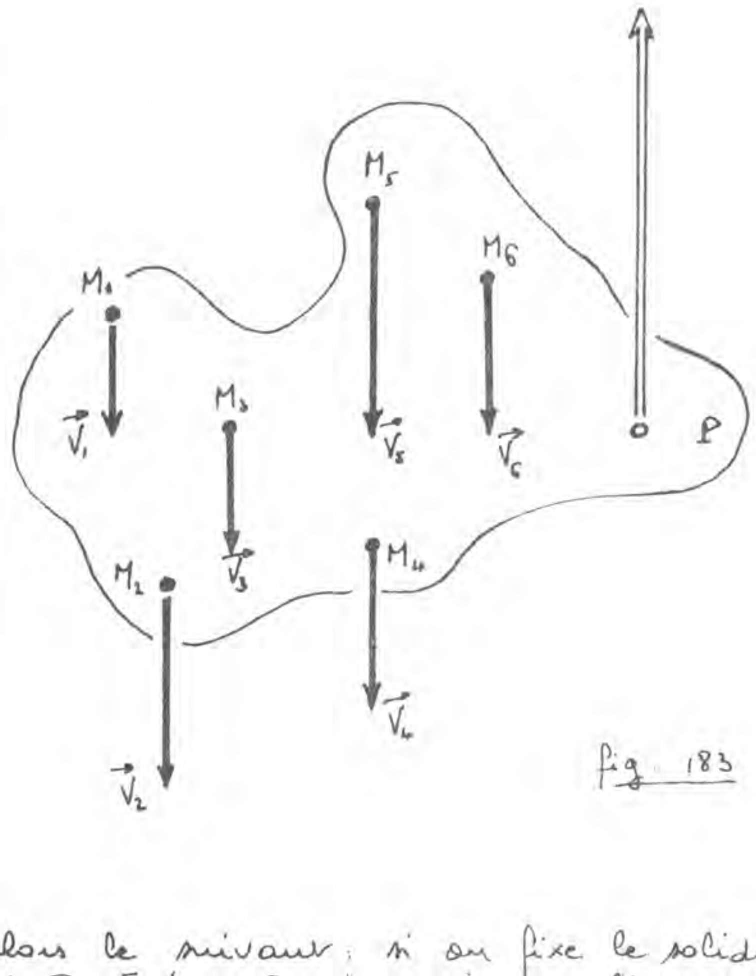


fig. 183

Le problème est alors le suivant : si on fixe le solide considéré en un point P [c'est-à-dire si on applique en ce point une force verticale compensant les poids en présence] comment choisir P pour maintenir l'équilibre total ?

217 - Il est clair que le choix de P envisagé sur la figure précédente ne répondrait pas à la question, car le solide va tourner autour d'un axe perpendiculaire au schéma et passant par P.

Pour étudier la situation, il faut admettre (avec les "physiciens") les principes suivants.

1°) Lorsque l'on considère uniquement la masse située en M_i, la force $\vec{V_i}$ entraînera une rotation autour de l'axe Δ, passant par P et perpendiculaire au plan déterminé par la verticale et le vecteur $\overrightarrow{PM_i}$.

On peut représenter conventionnellement cette rotation par un vecteur $\vec{R_i}$ porté par Δ et dont la longueur et le sens correspondant à la "force" de la rotation.

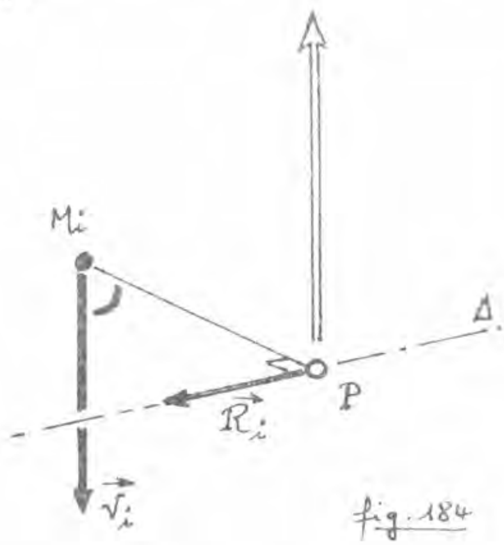


fig. 184

2°) Cette "force" de rotation dépend de l'amplitude de $\vec{V_i}$ et de la distance entre P et la verticale passant par M_i. On admet alors que $\vec{R_i}$ doit être égal à

(1) $$\vec{R_i} = \overrightarrow{PM_i} \wedge \vec{V_i}$$

3°) Si maintenant on est en présence de plusieurs masses et donc si plusieurs forces $\vec{V_i}$, $\vec{V_j}$ s'exercent sur le solide, chacune se traduit par un "vecteur rotation" d'origine P.

On admet comme nouveau principe que l'influence globale de toutes ces forces se résume à <u>une seule rotation</u> qui est elle-même obtenue comme résultante des vecteurs $\vec{R_i}$, $\vec{R_j}$, etc.

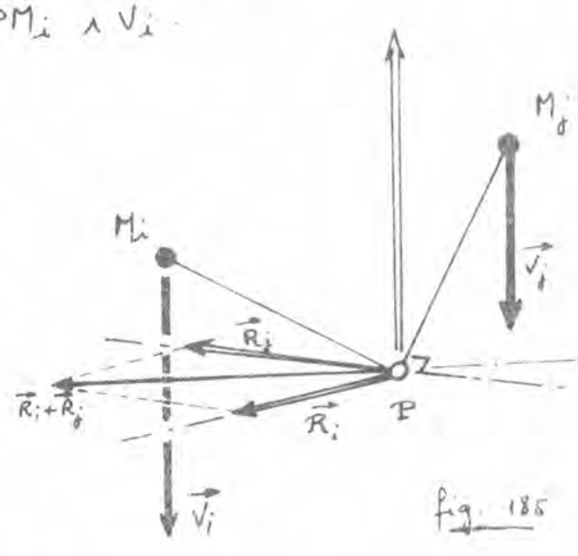


fig. 185

En conclusion, il s'exerce en P une rotation représentée par un vecteur $\vec{R}$, qui s'obtient en calculant

(2) $$\vec{R} = \vec{R_1} + \dots + \vec{R_n} = \overrightarrow{PM_1} \wedge \vec{V_1} + \dots + \overrightarrow{PM_n} \wedge \vec{V_n}$$

218 - Cela étant, si nous tenons compte du fait que les $\vec{V_i}$ sont tous proportionnels à un même vecteur vertical $\vec{h}$, il vient :

$$\vec{R} = \overrightarrow{PM_1} \wedge (\alpha_1 \vec{h}) + \dots + \overrightarrow{PM_n} \wedge (\alpha_n \vec{h})$$

ou encore

$$\vec{R} = \left[\alpha_1 \overrightarrow{PM_1} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{PM_n}\right] \wedge \vec{h}$$

Nous pouvons donc dire que si le produit vectoriel entre $\vec{h}$ et le vecteur entre [...] est nul, alors les forces $\vec{V_i}$ n'entraînent pas de rotation autour de P.

Ceci équivaut à la condition suivante : la résultante

$$\alpha_1 \cdot \overrightarrow{PM_1} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{PM_n} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{PM_i}$$

est colinéaire au vecteur $\vec{h}$.

Mais si nous voulons que, pour le solide de la fig. 183, le point P convienne <u>dans toutes les positions</u>, alors nous choisissons P de telle façon que l'on ait :

$$(3) \qquad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \overrightarrow{PM_i} = \alpha_1 \cdot \overrightarrow{PM_1} + \dots + \alpha_n \cdot \overrightarrow{PM_n} = \vec{0}.$$

DÉFINITION 1 : s'il existe un point G tel que

$$(3') \qquad \alpha_1 \cdot \overrightarrow{GM_1} + \alpha_2 \cdot \overrightarrow{GM_2} + \dots + \alpha_n \cdot \overrightarrow{GM_n} = \vec{0},$$

on dit que G est le BARYCENTRE des points $M_1, M_2, \dots, M_n$ <u>affectés des coefficients</u> $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.

219 - Il nous reste à montrer si l'on peut effectivement trouver un tel point et s'il est unique lorsqu'il existe.

Nous allons pour cela changer de point de vue et aborder le problème sous un angle plus géométrique.

Plaçons-nous dans l'espace et considérons n points :

$$M_1, M_2, \dots, M_n$$

à chacun desquels nous associons un nombre

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n.$$

Choisissons une origine quelconque O et intéressons-nous au vecteur :

$$\vec{u} = \alpha_1 \overrightarrow{OM_1} + \alpha_2 \overrightarrow{OM_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{OM_n}$$

Ce vecteur $\vec{u}$ peut être représenté par un vecteur lié d'origine O et définit donc un nouveau point M, tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$ et donc caractérisé par :

$$\overrightarrow{OM} = \alpha_1 . \overrightarrow{OM_1} + \dots + \alpha_n . \overrightarrow{OM_n} .$$

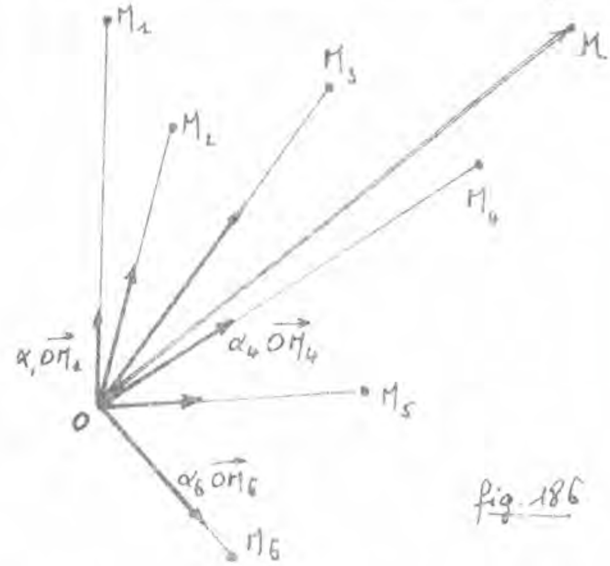


fig. 186

PROPOSITION 1 : Le point M ainsi défini est indépendant du choix de l'origine O lorsque la somme des coefficients $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ est égale à 1 :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 .$$

Démonstration : changeons d'origine et définissons M' pour que

$$\overrightarrow{O'M'} = \alpha_1 \overrightarrow{O'M_1} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{O'M_n}$$

On peut écrire cette relation :

$$(\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OM'}) = \alpha_1 (\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OM_1}) + \dots + \alpha_n (\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OM_n})$$

soit :

$$\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OM'} = [\alpha_1 + \dots + \alpha_n] \overrightarrow{O'O} + (\alpha_1 \overrightarrow{OM_1} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{OM_n})$$

(4) $$\overrightarrow{OM'} = ([\alpha_1 + \dots + \alpha_n] - 1) \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OM} .$$

On voit donc que si $[\alpha_1 + \dots + \alpha_n] = 1$, on a bien $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM}$.

220 - Nous pouvons désormais énoncer le :

THÉORÈME 1 : étant donné n points $M_1, \dots, M_n$ affectés de coefficients $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, si on a :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \neq 0,$$

il existe un point unique G, barycentre des M_i affectés des coefficients α_i.

Ce point G vérifie donc

$$\alpha_1 \overrightarrow{GM_1} + \alpha_2 \overrightarrow{GM_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{GM_n} = \vec{0}$$

et, pour tout point O de l'espace, on a :

(5) $$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{[\alpha_1 + \dots + \alpha_n]} (\alpha_1 . \overrightarrow{OM_1} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{OM_n})$$

Démonstration : supposons, pour commencer, que la somme des coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ soit égale à 1.

Choisissons une origine O quelconque et introduisons le point M tel que

$$\vec{OM} = \alpha_1 \vec{OM_1} + \dots + \alpha_n \vec{OM_n}.$$

D'après la proposition 1, M ne dépend pas de O. On peut donc en conclure :

1°) que si on place l'origine en ce point M, on aura :

$$\vec{MM} = \alpha_1 \vec{MM_1} + \dots + \alpha_n \cdot \vec{MM_n} = \vec{0}.$$

Il suffit donc d'appeler ce point G et on obtient ainsi l'existence du barycentre,

2°) que si on a $O \neq M$, alors

$$\vec{OM} = \alpha_1 \vec{OM_1} + \dots + \alpha_n \vec{OM_n} \neq \vec{0}.$$

Ceci implique l'unicité du barycentre...

Il reste à faire la démonstration lorsque la somme des coefficients n'est pas égale à 1. Mais comme cette somme est non nulle, on peut poser :

$$\alpha'_1 = \frac{\alpha_1}{[\alpha_1 + \dots + \alpha_n]}, \quad \dots \quad , \alpha'_n = \frac{\alpha_n}{[\alpha_1 + \dots + \alpha_n]}.$$

Ces nouveaux coefficients vérifient $\alpha'_1 + \dots + \alpha'_n = 1$ et nous pouvons leur appliquer le raisonnement précédent.

La démonstration du théorème est la même lorsque l'on remarque que :

PROPOSITION 2 : si G est barycentre des points M_i affectés des coefficients α_i, alors il est barycentre des mêmes points M_i, affectés de coefficients α'_i proportionnels aux coefficients initiaux.

Démonstration : c'est évident sur la définition 1

221 - REMARQUE 1. On trouvera dans certains livres la notation

$$G = \alpha_1 M_1 + \alpha_2 M_2 + \dots + \alpha_n M_n$$

pour désigner le barycentre des points M_i affectés des coefficients α_i. On prendra garde que cette écriture, qui correspond en réalité à la formule (5), n'a de sens vectoriel que si $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1$.

222 - REMARQUE 2 : nous laisserons de côté le cas où la somme $\alpha_1 + \dots + \alpha_n$ est égale à zéro. On peut cependant noter que dans ce cas le théorème 1 est complètement inutilisable :

En effet la formule (4) qui a été établie dans la démonstration de la proposition 1 montre que si l'on fait les calculs à partir de deux origines O et O', on a :

$$\vec{O'O} + \vec{OM'} = \vec{OM}$$

soit

$$\vec{O'M'} = \vec{OM}.$$

En d'autres termes, lorsque l'on calcule

$$\alpha_1 \vec{OM_1} + \dots + \alpha_n \vec{OM_n},$$

on trouve le même résultat quel que soit le point O. Ceci est encore vrai, évidemment, si on prend la lettre G à la place de la lettre O, on peut donc énoncer :

PROPOSITION 3 : si les coefficients $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ vérifient

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 0$$

alors ou bien $\alpha_1 \vec{GM_1} + \alpha_2 \vec{GM_2} + \dots + \alpha_n \vec{GM_n} = \vec{0}$ pour tout point G, ou bien aucun point n'est barycentre car la somme $\alpha_1 \vec{GM_1} + \dots + \alpha_n \vec{GM_n}$ est non nulle pour tout point G.

Exercice 183 : on considère quatre points A, B, C, D. Vérifier que

$$\vec{u} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} - 3\vec{OD}$$

et que

$$\vec{v} = \vec{OA} + \vec{OB} - \vec{OC} - \vec{OD}$$

ne dépendent pas de O.

Exercice 184 : soit ABCD un parallélogramme. Montrer que, pour tout point G :

$$\vec{GA} - \vec{GB} + \vec{GC} - \vec{GD} = \vec{0}$$

[faire intervenir les milieux des diagonales]

Exercice 185 : on considère les points A, B, C affectés des coefficients respectifs $-1, +1, +1$.
Vérifier la proposition 1 en effectuant les calculs avec O = A, B et C.

En déduire le barycentre de A, B, C pour les coefficients -1, $+1$, $+1$.

QUELQUES PROPRIÉTÉS

223 - Rappelons tout d'abord une propriété fondamentale (cf. Proposition 2) :

On ne change pas le barycentre de n points $M_1, M_2, \dots, M_n$ en multipliant tous les coefficients $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ par un même scalaire λ.

Ainsi on peut définir le CENTRE DE GRAVITÉ (ou encore ISOBARYCENTRE) d'un système de points par la seule condition que les coefficients qui affectent ces points soient égaux.
On pourra tout aussi bien considérer qu'il s'agit du barycentre des points $M_1, M_2, \dots, M_n$ pour les coefficients

$$\alpha_1 = 1 \ , \ \alpha_2 = 1, \dots \qquad , \alpha_n = 1 \ ,$$

ou pour les coefficients

$$\alpha'_1 = \frac{1}{n} \ , \ \alpha'_2 = \frac{1}{n}, \dots \qquad , \alpha_n = \frac{1}{n}$$

Ce dernier choix permet ainsi d'obtenir une somme des coefficients égale à 1.
On peut d'ailleurs opérer de façon analogue avec n'importe quel système de points et de coefficients, pourvu que la somme $(\alpha_1 + \dots + \alpha_n)$ <u>soit non nulle</u> : nous nous ramènerons de façon assez systématique au cas où la somme des coefficients est 1 en remplaçant les α_i par

$$\alpha'_1 = \frac{\alpha_1}{(\alpha_1 + \dots + \alpha_n)} \ , \qquad \dots \qquad , \alpha'_n = \frac{\alpha_n}{(\alpha_1 + \dots + \alpha_n)}$$

224 - Une deuxième remarque immédiate concerne l'ensemble des points $M_1, M_2, \dots, M_n$.

Il est d'abord évident sur la définition que le barycentre de ces points (affectés de certains coefficients) est <u>indépendant de l'ordre choisi sur ceux-ci</u>.
Seuls comptent les coefficients associés à chaque point et nous noterons souvent le système considéré sous la forme

$$(M_1, \alpha_1) \ , \ (M_2, \alpha_2) \ , \dots \ , (M_n, \alpha_n),$$

de façon à conserver les couples après d'éventuelles permutations sur l'ensemble des points

On peut remarquer de même qu'il est possible d'admettre des répétitions parmi les points $M_1, M_2, \dots, M_n$.

Supposons en effet que l'un des points — par exemple le point M_1 — figure plusieurs fois dans la liste.
On aura par exemple :

$$M_1 = M_i = M_k$$

pour deux autres valeurs i et k des indices. Dès lors, le barycentre cherché sera celui du système :

$$(M_1, \alpha_1), (M_i, \alpha_i), (M_k, \alpha_k), (M_2, \alpha_2), \dots, (M_n, \alpha_n),$$

et comme les trois premiers points sont confondus, on voit tout de suite sur la définition que l'on peut considérer une seule fois le point M_1, à condition de considérer qu'il est affecté du coefficient $(\alpha_1 + \alpha_i + \alpha_k)$

Si, par hypothèse, ce nouveau coefficient se trouvait être nul, on pourra d'ailleurs supprimer le point $(M_1, 0)$ de la liste.

225 - La remarque précédente sur le regroupement des points identiques est en fait un cas particulier du résultat suivant :

PROPOSITION 4 : étant donné un système

$$(M_1, \alpha_1), (M_2, \alpha_2), \dots, (M_n, \alpha_n)$$

pour lesquels le barycentre existe [c'est-à-dire $(\alpha_1 + \dots + \alpha_n) \neq 0$], on ne change pas le barycentre en remplaçant un certain groupe de points par leur barycentre et en affectant celui-ci du coefficient obtenu en faisant la somme des coefficients des points ainsi éliminés.

[REMARQUE : on prendra garde que le barycentre des points choisis doit exister : si on remplace

$$(M_{i_1}, \alpha_{i_1}), (M_{i_2}, \alpha_{i_2}), \dots, (M_{i_p}, \alpha_{i_p})$$

il faut que $\alpha_{i_1} + \alpha_{i_2} + \dots + \alpha_{i_p} \neq 0$]

Démonstration : nous supposerons que l'on groupe les p premiers points, et donc que la somme des p premiers coefficients est non nulle.

La caractérisation du barycentre G du système complet est :

$$\alpha_1 \overrightarrow{GM_1} + \dots + \alpha_p \overrightarrow{GM_p} + \alpha_{p+1} \overrightarrow{GM_{p+1}} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{GM_n} = \vec{0}$$

Cela peut s'écrire, si l'on pose :

$$\alpha'_1 = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \dots + \alpha_p}, \dots, \alpha'_p = \frac{\alpha_p}{\alpha_1 + \dots + \alpha_p},$$

$$(\alpha_1 + \dots + \alpha_p)\left(\alpha'_1 \overrightarrow{GM_1} + \dots + \alpha'_p \overrightarrow{GM_p}\right) + \alpha_{p+1} \overrightarrow{GM_{p+1}} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{GM_n} = \vec{0}$$

On introduisons le point g, barycentre de $M_1, \dots, M_p$ affectés des coefficients $\alpha'_1, \dots, \alpha'_p$ ou, ce qui revient au même, des coefficients proportionnels $\alpha_1, \dots, \alpha_p$.

On a :

$$\alpha'_1 \overrightarrow{GM_1} + \dots + \alpha'_p \overrightarrow{GM_p} = (\alpha'_1 + \dots + \alpha'_p)\overrightarrow{Gg} = \overrightarrow{Gg}.$$

Donc la relation précédente s'écrit

$$(\alpha_1 + \dots + \alpha_p)\overrightarrow{Gg} + \alpha_{p+1} \overrightarrow{GM_{p+1}} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{GM_n} = \vec{0},$$

c'est ce qu'il fallait montrer.

226 - EXEMPLE : appliquons ce qui précède à la recherche de l'isobarycentre d'un tétraèdre ABCD.

Il s'agit de trouver le barycentre du système :

$$(A,1) \quad (B,1) \quad (C,1) \quad (D,1)$$

Groupons les deux premiers points : nous pouvons les remplacer par leur isobarycentre I affecté du coefficient 2 et le système devient

$$(I,2) \quad (C,1) \quad (D,1)$$

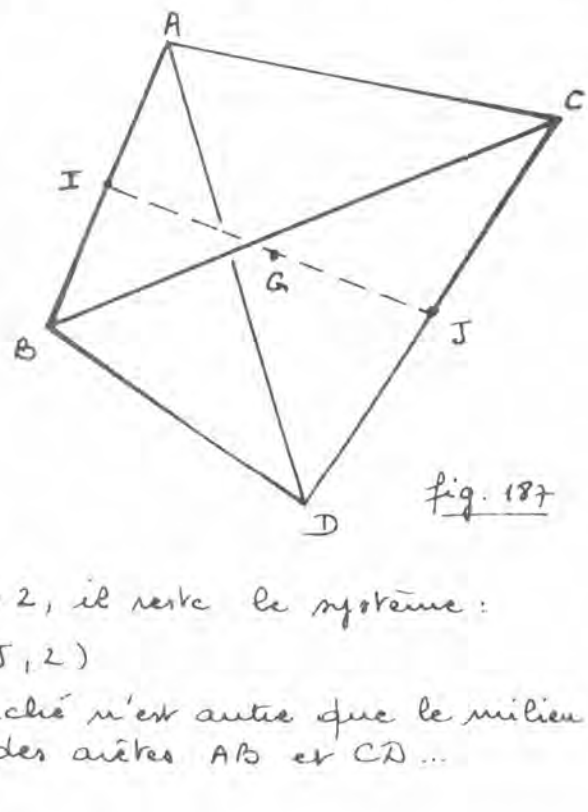


fig. 187

Groupons les deux derniers points et remplaçons-les par leur isobarycentre J, affecté du coefficient 2, il reste le système :

$$(I,2) \qquad (J,2)$$

et on voit que le barycentre cherché n'est autre que le milieu de I, J, eux-mêmes milieux des arêtes AB et CD...

Nous laissons au lecteur le soin de retrouver à partir de là (et aussi en considérant le groupement de trois des quatre points) les propriétés classiques du tétraèdre.

227 - Nous terminerons ces généralités par la proposition suivante :

PROPOSITION 5 : soit $(M_1, \alpha_1), \dots, (M_n, \alpha_n)$ un système de points ayant un barycentre G.

Si $m_1, m_2, \dots, m_n$ sont les projections des points $M_1, M_2, \dots, M_n$ sur un plan ou sur une droite, alors la projection g de G est le barycentre du système de points :

$$(m_1, \alpha_1), (m_2, \alpha_2), \dots, (m_n, \alpha_n).$$

<u>Démonstration</u> : par hypothèse on a :

$$\alpha_1 \overrightarrow{GM_1} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{GM_n} = \vec{0}.$$

Mais comme la projection est compatible avec la multiplication des vecteurs par un scalaire et avec l'addition, on a en projetant :

$$\alpha_1 \overrightarrow{gm_1} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{gm_n} = \vec{0}.$$

Ce n'est autre que la relation caractérisant le barycentre de $m_1, \dots, m_n$ pour les coefficients correspondants.

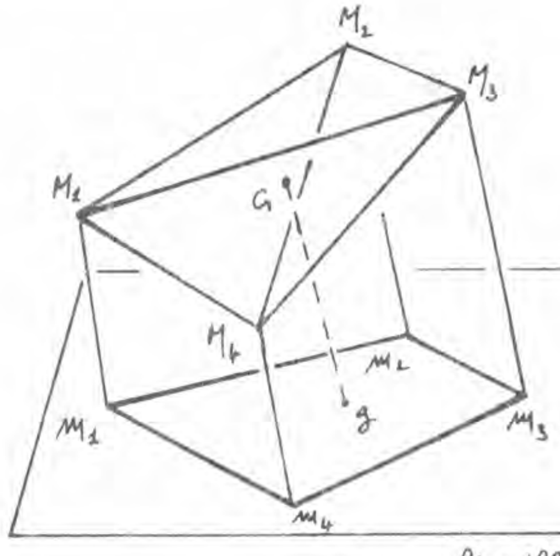


fig. 188

On notera que le principe de démonstration prouve en fait la :

PROPOSITION 5' : soit $(M_1, \alpha_1), \dots, (M_n, \alpha_n)$ un système de points ayant un barycentre G.

Si φ est une transformation géométrique qui est compatible avec la somme des vecteurs et leur multiplication par un scalaire, alors l'image $\varphi(G) = g$ de G est le barycentre du système formé par les images de $M_1, \dots, M_n$:

$$(m_1 = \varphi(M_1), \alpha_1), \dots, (m_n = \varphi(M_n), \alpha_n).$$

Nous allons donner les principales applications de ces résultats.

228 - COORDONNÉES DU BARYCENTRE : La compatibilité des projections avec la notion de barycentre implique :

PROPOSITION 6 : étant donné les points $M_1, \dots, M_n$ affectés des coefficients $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, vérifiant la condition :

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1,$$

alors si les coordonnées du point M_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ sont :

$$M_i = (x_i, y_i, z_i),$$

le barycentre G du système donné a pour coordonnées :

$$x_G = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n, \quad y_G = \alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_n y_n, \quad z_G = \alpha_1 z_1 + \dots + \alpha_n z_n.$$

<u>Démonstration</u> : soit par exemple G_1 la projection de G sur l'axe Ox.

D'après la proposition 5, G_1 est le barycentre des projections $m_1, \dots, m_n$ des points $M_1, \dots, M_n$, pour les mêmes coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.

Mais comme on s'est placé dans le cas où la somme des coefficients est égale à 1, on a :

$$\overrightarrow{OG_1} = \alpha_1 \overrightarrow{Om_1} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{Om_n}$$

[cf. formule (5) du théorème 1].

Comme d'autre part tous les points sont sur l'axe Ox :

$$\overline{OG_1} = \alpha_1 \overline{Om_1} + \dots + \alpha_n \overline{Om_n},$$

ce qui signifie précisément :

$$x_G = \alpha_1 \cdot x_1 + \dots + \alpha_n \cdot x_n.$$

229 - EXEMPLE : les coordonnées de l'isobarycentre d'un système quelconque de points $M_1, \dots, M_n$ sont données par :

$$x_G = \frac{1}{n}(x_1 + \dots + x_n) \qquad y_G = \frac{1}{n}(y_1 + \dots + y_n) \qquad z_G = \frac{1}{n}(z_1 + \dots + z_n)$$

De façon générale, on calculera les coordonnées du barycentre en ramenant les coefficients au cas où la somme est égale à 1.

[cf. § 223].

230 – LOCALISATION DU BARYCENTRE. Les considérations précédentes permettent généralement d'indiquer des propriétés *a priori* du barycentre. En voici quelques exemples.

PROPOSITION 7. Si un système de points $(M_1, \alpha_1), \dots, (M_n, \alpha_n)$ est contenu dans une même droite ou dans un même plan de l'espace, alors le barycentre est lui aussi sur cette droite ou sur ce plan.

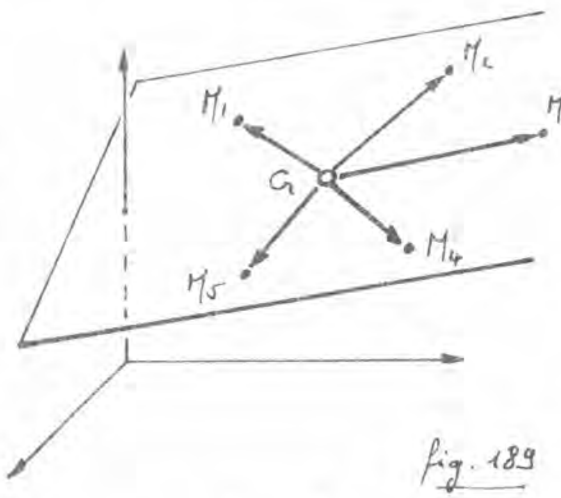


fig. 189

Démonstration : il suffit de considérer la symétrie par rapport à la droite ou par rapport au plan donnés.
Le système de points est fixe par dans cette symétrie, donc la proposition 5' implique que le barycentre est fixe lui aussi. Il est donc nécessairement situé sur la droite, ou sur le plan.

PROPOSITION 8. Si un système $(M_1, \alpha_1), \dots, (M_n, \alpha_n)$ de points affectés de coefficients est invariant par une transformation géométrique compatible avec les opérations sur les vecteurs (rotation, symétrie, etc) alors le barycentre du système donné est fixe dans cette transformation.

Démonstration : c'est une conséquence immédiate de la proposition 5'.

On prendra garde qu'il ne suffit pas que l'ensemble des points $M_1, \dots, M_n$ soit invariant. Il faut en plus que si M_i est transformé en M_j, alors le coefficient α_j soit égal à α_i.

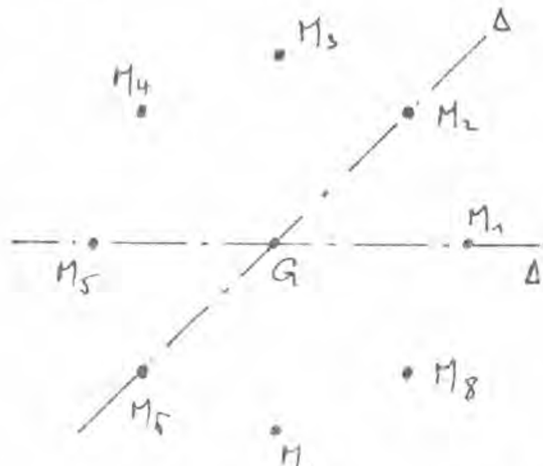


fig. 190

Prenons un exemple classique : si l'on cherche l'isobarycentre d'un polygone régulier, on peut constater que le système de points est invariant par (au moins) deux symétries par rapport à des droites.

Si Δ et Δ' sont les axes de ces symétries, la proposition 8 montre que l'isobarycentre appartient à Δ et à Δ'.

G est alors l'intersection de Δ et Δ'.

231 - Nous signalerons, pour terminer, un aspect de la "localisation" du barycentre qui concerne un cas particulier important.

Considérons n points $M_1, \dots, M_n$ et des coefficients $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ qui soient tous <u>positifs</u>.

Supposons que $\mathcal{P}$ soit un plan de l'espace tel que tous les points $M_1, \dots, M_n$ soient d'un même côté de $\mathcal{P}$. C'est-à-dire que les points appartiennent à un même "demi-espace" par rapport au plan $\mathcal{P}$.

<u>Alors il en va de même pour le barycentre du système considéré.</u>

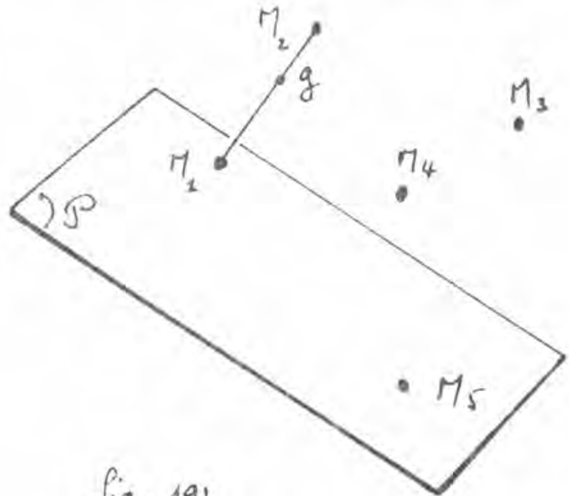


fig. 191

Envisageons en effet le cas où $n=2$, c'est-à-dire où G est le barycentre de deux points M_1, M_2 affectés respectivement de coefficients α_1 et α_2 <u>positifs</u>. Nous pouvons supposer $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ et appliquer la proposition 6 à un repère quelconque d'origine M_1 et admettant $\overrightarrow{M_1M_2}$ comme premier vecteur de base :

Il s'ensuit immédiatement que l'abscisse de G sur cet axe $(M_1, \overrightarrow{M_1M_2})$ est égale à α_2, avec $0 < \alpha_2 < 1$

Dès lors nous pouvons énoncer :

PROPOSITION 9 : le barycentre de deux points affectés de coefficients positifs appartient au segment déterminé par ces deux points.

Cela étant, si M_1, M_2 sont dans un même demi-espace tout le segment M_1M_2 est contenu dans ce demi-espace, donc le barycentre est bien du même côté de $\mathcal{P}$ que M_1 et M_2.

Le résultat se généralise immédiatement en raisonnant par récurrence : supposons le résultat acquis pour n points quelconques et considérons $(n+1)$ points $M_1, M_2, \dots, M_{n+1}$. D'après la proposition 4 le barycentre du système

$$(M_1, \alpha_1), (M_2, \alpha_2), \dots, (M_{n+1}, \alpha_{n+1})$$

est le même que celui du système

$$(g, \alpha_1+\alpha_2), \dots, (M_{n+1}, \alpha_{n+1}),$$

où g est le barycentre de M_1, M_2 affectés des coefficients α_1, α_2.

Mais comme g est lui aussi, d'après ce qui précède, dans le même demi-espace que les autres points, l'hypothèse de récurrence s'applique à ce nouveau groupe de n points et le barycentre est bien du même côté de $\mathcal{P}$.

Nous avons donc démontré la :

PROPOSITION 10 : si $M_1, \dots, M_n$ sont des points situés d'un même côté d'un plan $\mathcal{P}$, alors le barycentre de ces points affectés de n'importe quels coefficients positifs est, lui aussi, du même côté de $\mathcal{P}$.

232 - REMARQUE. Bien évidemment on a un résultat analogue en géométrie plane si on remplace la notion de "demi-espace" par celle de "demi-plan".

Ce genre de résultat s'applique le plus souvent dans la situation suivante :

Considérons un triangle ABC et le barycentre G des points A, B, C relativement à des coefficients α, β, γ positifs

Si on considère maintenant la droite AB, les trois points A, B, C étant situés dans un même demi-plan par rapport à celle-ci, on voit que G est situé dans ce demi-plan.

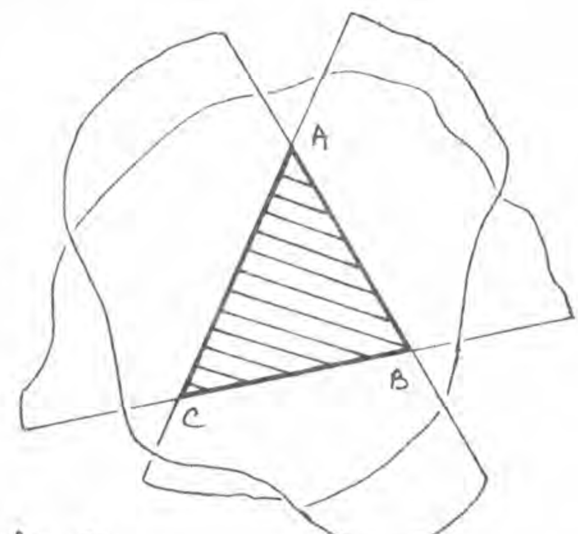


fig. 192

Donc en répétant le raisonnement avec les droites BC et CA, on démontre que G est situé dans chacun des demi-plans déterminés par les côtés du triangle et contenant le sommet opposé.

Cela revient à dire que G est à l'intérieur du triangle ABC...

A titre de corollaire direct de la proposition 10, nous aurons de façon analogue :

PROPOSITION 11 : si ABCD est un tétraèdre de l'espace, tout barycentre du système formé par les sommets affectés de coefficients positifs est situé à l'intérieur du tétraèdre.

Exercice 186: déterminer l'isobarycentre d'un cube, d'un parallélépipède, d'une pyramide à base carrée.
[il s'agit bien entendu de l'isobarycentre du système de points formé par les sommets d'une telle figure]

Exercice 187: dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points M_{ij} de coordonnées

$$M_{ij} = (i, j)$$

telles que les entiers i et j remplissent les conditions suivantes:

$$i \geqslant 0, \quad j \geqslant 0, \quad i+j \leqslant 6.$$

a) représenter sur une figure l'ensemble des points ainsi définis,
b) déterminer l'isobarycentre de ce système de points

Exercice 188: mêmes questions que dans l'exercice précédent avec les points de l'espace:

$$M_{ijk} = (i, j, k),$$

où les entiers i, j, k vérifient les conditions:

$$i \geqslant 0, \ j \geqslant 0, \ k \geqslant 0, \quad i+j+k \geqslant 0.$$

Exercice 189: On considère deux tétraèdres $ABCD$ et $A'B'C'D'$, d'isobarycentres respectifs G et G'.

Montrer que

$$\vec{AA'} + \vec{BB'} + \vec{CC'} + \vec{DD'} = \vec{AB'} + \vec{BC'} + \vec{CD'} + \vec{DA'}$$

en faisant intervenir dans les calculs les points G et G'

Exercice 190: chercher d'autres démonstrations de la proposition 7.

LA NOTION DE COORDONNÉES BARYCENTRIQUES.

233 - Nous nous intéresserons désormais au problème suivant :

"étant donné un certain nombre de points fixes $M_1, M_2, \dots, M_n$, soit G un point donné dans l'espace. Peut-on exprimer G comme barycentre des points $M_1, \dots, M_n$? Quels sont alors (en fonction de G) les coefficients $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ dont il faut affecter les points $M_1, \dots, M_n$?"

Nous commencerons par quelques remarques :

1° si on ne considère que 2 points M_1, M_2, alors les seuls points G pour lesquels le problème a une solution sont des points situés sur la droite M_1, M_2
[cf. PROPOSITION 7]

2° plus généralement, si les points $M_1, \dots, M_n$ sont tous dans un même plan, ou sur une même droite, le problème n'a de solution que pour G appartenant à ce plan ou à cette droite.

3° supposons que pour un point G il soit possible de trouver des coefficients $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ qui conviennent. Alors pour tout λ non nul les coefficients $\lambda\alpha_1, \dots, \lambda\alpha_n$ conviennent aussi. C'est-à-dire que G est aussi barycentre du système :

$$(M_1, \lambda\alpha_1), (M_2, \lambda\alpha_2), \dots, (M_n, \lambda\alpha_n).$$

Cela montre que l'on ne peut envisager le problème de l'unicité des coefficients qu'à un facteur de proportionnalité près.

Si l'on veut une telle unicité, il convient d'imposer une condition supplémentaire, en exigeant par exemple que les coefficients vérifient la condition :

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1.$$

234 - Nous allons montrer le théorème suivant :

THÉORÈME 2 : si A, B, C, D sont quatre points non coplanaires, alors tout point G de l'espace est le barycentre d'un unique système

$$(A, \alpha) \quad (B, \beta) \quad (C, \gamma) \quad (D, \delta)$$

où les coefficients vérifient la condition $\alpha+\beta+\gamma+\delta=1$.

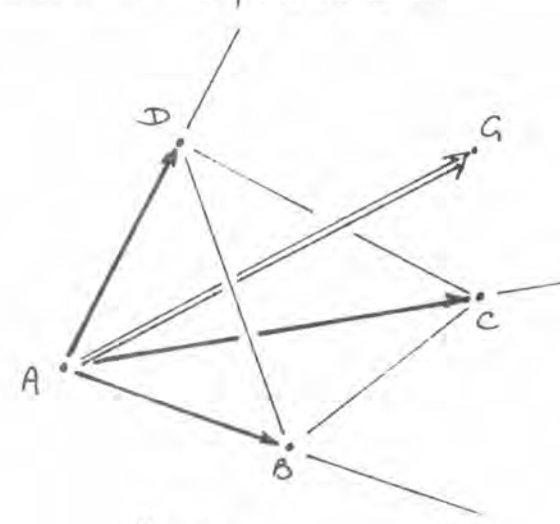


fig. 193

Démonstration : supposons que G soit barycentre de A, B, C, D relativement aux coefficients $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, et supposons de plus $\alpha+\beta+\gamma+\delta=1$.

Si nous appliquons la formule (3) du théorème 1 en choisissant A comme origine, il vient :

$$\overrightarrow{AG} = \beta\,\overrightarrow{AB} + \gamma\,\overrightarrow{AC} + \delta\,\overrightarrow{AD}$$

Mais $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ est un repère dans lequel le vecteur $\overrightarrow{AG}$ se décompose de façon unique. Les coefficients β, γ, δ sont donc entièrement déterminés, ainsi que α puisque $\alpha = 1-\beta-\gamma-\delta$.
Il y aura bien unicité de la solution lorsqu'elle existe.

Cela étant la relation ci-dessus montre aussi que tout point G de l'espace convient. Il suffit en effet d'écrire $\overrightarrow{AG}$ sous la forme

$$\overrightarrow{AG} = \beta\,\overrightarrow{AB} + \gamma\,\overrightarrow{AC} + \delta\,\overrightarrow{AD}$$

en raisonnant dans le repère de la figure 193, puis de poser $\alpha = 1-(\beta+\gamma+\delta)$.

235 - On appelle COORDONNÉES BARYCENTRIQUES d'un point par rapport aux points A, B, C, D le système

$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$$

pour lequel ce point est barycentre de A, B, C, D.

La solution n'étant unique qu'à un coefficient de proportionnalité près, nous supposerons toujours ici que l'on a de plus :

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta = 1.$$

Ainsi, le théorème 2 fournit la solution au problème dans le cadre de la géométrie dans l'espace.

En fait il s'applique sans aucun changement au cas de la géométrie plane ou au cas de la géométrie sur une droite :

Nous pouvons en effet déduire de l'énoncé précédent les deux propositions suivantes :

PROPOSITION 11 : si A, B, C sont trois points non alignés d'un plan $\mathcal{P}$, alors tout point G de ce plan s'écrit de façon unique comme barycentre d'un système

$$(A,\alpha) \qquad (B,\beta) \qquad (C,\gamma)$$

avec la condition $\alpha+\beta+\gamma = 1$.

PROPOSITION 12 : si A, B sont deux points distincts d'une droite $\mathcal{D}$, alors tout point de cette droite s'écrit de façon unique comme barycentre d'un système

$$(A,\alpha) \qquad (B,\beta)$$

avec la condition $\alpha+\beta = 1$

En effet, il suffit de compléter les données pour obtenir quatre points non coplanaires A, B, C, D et d'appliquer le théorème 2 en affectant les points supplémentaires du coefficient 0...

Nous allons détailler le calcul des "coordonnées barycentriques" dans le cas de la droite et plan.

235 - COORDONNÉES BARYCENTRIQUES SUR UNE DROITE.

Soit M un point de la droite $\mathcal{D}$, sur laquelle on a choisi deux points A et B.

Si M s'écrit comme barycentre de A, B affectés des coefficients α et β tels que $\alpha+\beta=1$ on a :

$$\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} = \vec{0}$$

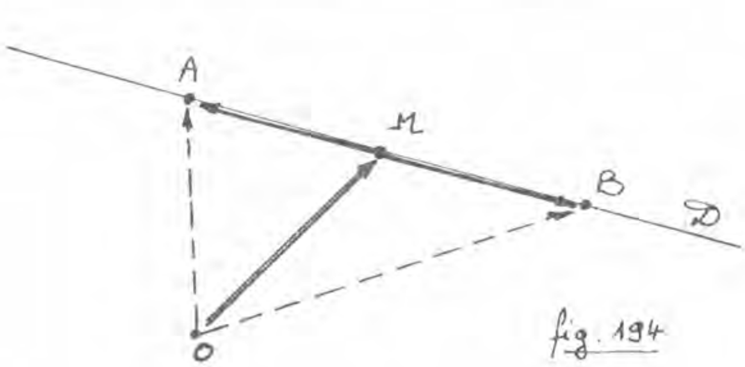


fig. 194

Écrivons cela en utilisant les valeurs algébriques sur $\mathcal{D}$, il vient (lorsque $\beta \neq 0$, c'est-à-dire lorsque M est distinct de A) :

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MA}} = -\frac{\alpha}{\beta}$$

Cela permet de passer de la donnée des coordonnées barycentriques au rapport $\overline{MB}/\overline{MA}$. Inversement :

Si M est le point de $\mathcal{D}$ tel que

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MA}} = \lambda$$

alors ses coordonnées barycentriques par rapport à A et B sont données par :

$$\frac{\alpha}{\beta} = -\lambda = \frac{1-\beta}{\beta} = \frac{1}{\beta} - 1$$

on a donc :

$$\beta = \frac{1}{1-\lambda}, \qquad \alpha = \frac{-\lambda}{1-\lambda}.$$

On notera que, conformément à la proposition 10, le cas où α et β sont positifs correspond aux points situés à l'intérieur du segment AB.

On notera aussi que la relation

$$\alpha\,\overrightarrow{OA} + \beta\,\overrightarrow{OB} = \frac{-\lambda}{1-\lambda}.\overrightarrow{OA} + \frac{1}{1-\lambda}.\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OM}$$

est vraie pour tout point O, qu'il soit ou non situé sur la droite $\mathcal{D}$.

236 - COORDONNÉES BARYCENTRIQUES DANS UN PLAN.

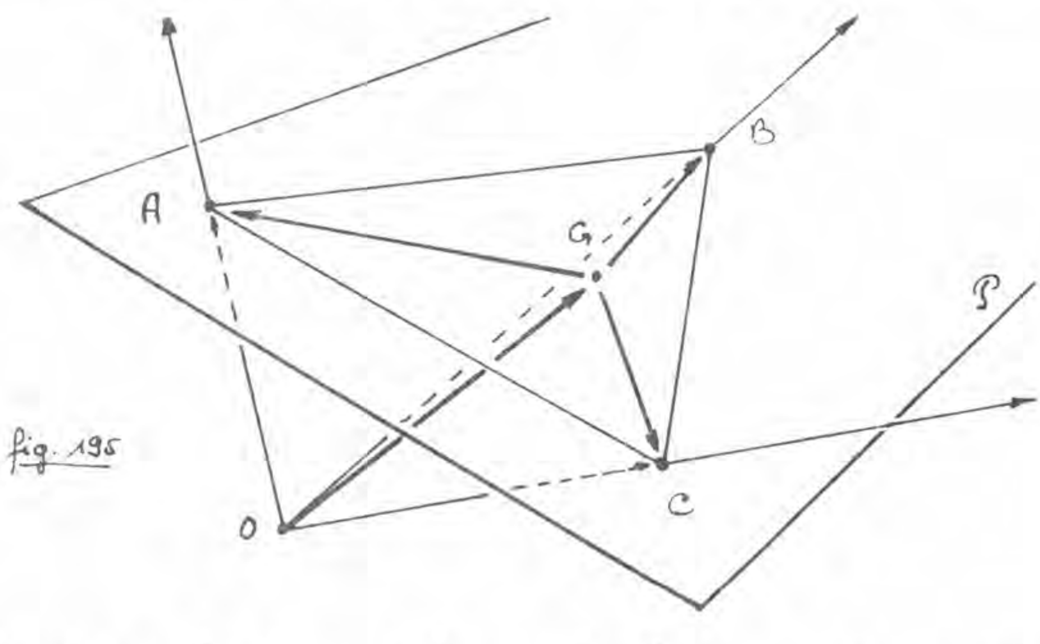


fig. 195

La figure fondamentale est la figure ci-dessus : si G est barycentre de A, B, C pour les coefficients α, β, γ tels que

$$\alpha + \beta + \gamma = 1.$$

[c'est-à-dire si G admet (α, β, γ) comme coordonnées barycentriques par rapport à A, B et C], alors on a les deux relations suivantes

$$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = 0$$

et

$$\overrightarrow{OG} = \alpha\,\overrightarrow{OA} + \beta\,\overrightarrow{OB} + \gamma\,\overrightarrow{OC}$$

La dernière relation étant vraie pour toute origine O de l'espace.

On peut en particulier, comme sur la figure 195, considérer que l'espace est rapporté à un repère

$$(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$$

dans lequel les points seront caractérisés par leurs coordonnées (x, y, z). Dès lors le point G aura pour coordonnées le triplet (x, y, z) tel que :

$$\overrightarrow{OG} = x\,\overrightarrow{OA} + y\,\overrightarrow{OB} + z\,\overrightarrow{OC}.$$

On aura donc $(\alpha, \beta, \gamma) = (x, y, z)$, si bien que les coordonnées barycentriques de G ne sont rien d'autre que ses coordonnées cartésiennes dans le repère de la figure 195.

La condition $\alpha + \beta + \gamma = 1$ correspond tout simplement au fait que

$$x + y + z = 1$$

lorsque G appartient au plan ABC puisque c'est là l'équation du plan ABC dans le repère $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$.

237 - Intéressons-nous, à titre d'exercice, à la situation décrite par la figure 196 :

Considérons un triangle ABC et le point I de coordonnées barycentriques :

$$(\alpha, \beta, \gamma), \qquad \alpha + \beta + \gamma = 1$$

par rapport aux points A, B, C.

Traçons la droite AI et supposons qu'elle coupe BC en P. Comme P est sur la droite BC, nous pouvons considérer ses coordonnées barycentriques par rapport à B, C. Nous les noterons :

$$(b_P, c_P), \qquad b_P + c_P = 1.$$

Cela posé, revenons à la construction du point I comme barycentre du système :

(A,α) (B,β) (C,γ).

On peut le chercher en commençant par grouper B et C et donc I apparaît comme barycentre de A affecté du coefficient α et du barycentre de

(B,β) (C,γ)

affecté du coefficient $(\beta+\gamma)$.

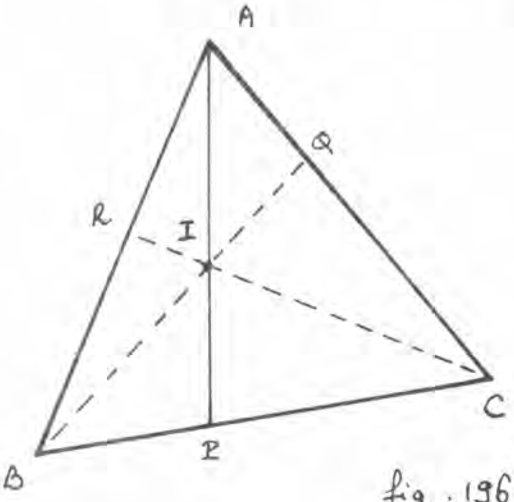


fig. 196

Pour des raisons évidentes d'alignement, ce dernier point n'est autre que P et nous voyons donc que les coordonnées barycentriques de P vérifient :

$$b_P = \lambda\cdot\beta \quad , \quad c_P = \lambda\cdot\gamma \qquad \text{avec} \quad \lambda\,(\beta+\gamma) = 1.$$

Le raisonnement du § 235 montre alors que l'on a :

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} = -\frac{\gamma}{\beta}$$

On aura de même :

$$\frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} = -\frac{\alpha}{\gamma} \quad , \qquad \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = -\frac{\beta}{\alpha}$$

Si nous calculons le produit de ces trois égalités, il vient :

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}}\cdot\frac{\overline{QC}}{\overline{QA}}\cdot\frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = \left(-\frac{\gamma}{\beta}\right)\cdot\left(-\frac{\alpha}{\gamma}\right)\cdot\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right) = -1.$$

Ceci n'est rien d'autre que la condition de concourance des droites AP, BQ et CR exprimée par le <u>théorème de Ceva</u>.

<u>Exercice 191</u> : on considère un triangle ABC et des points P, Q, R situés respectivement sur les côtés BC, CA et AB. On suppose que AP, BQ et CR se coupent en un point I. Déterminer les coordonnées barycentriques de I par rapport à A, B, C en fonction de :

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} = \lambda \qquad \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} = \mu \qquad \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = \nu.$$

EXEMPLES ET APPLICATIONS

238 - Nous allons montrer comment on peut calculer effectivement les coordonnées barycentriques de divers points dans un triangle.

Nous allons montrer auparavant comment il est possible d'utiliser pour cela la notion d'aire :

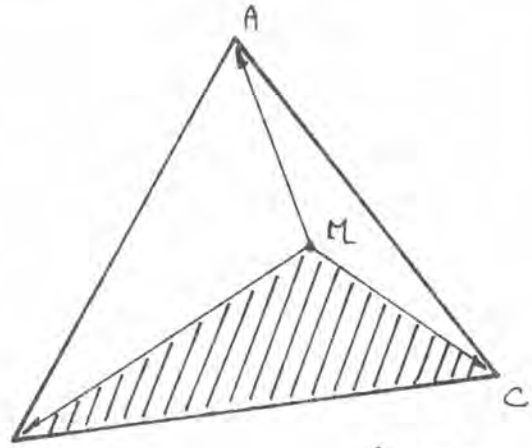


fig. 197

LEMME : soit ABC un triangle non dégénéré et soit M un point du plan de ABC

Alors les coordonnées barycentriques de M par rapport à A, B et C respectivement sont proportionnelles aux aires (algébriques) des triangles :

MBC , MCA , MAB.

Démonstration : désignons par (α, β, γ) les coordonnées de M.

On a donc par hypothèse la relation :

$$\alpha . \overrightarrow{MA} + \beta . \overrightarrow{MB} + \gamma \overrightarrow{MC} = \vec{0} , \qquad \alpha + \beta + \gamma = 1$$

donc si α est nul, M est sur BC et l'aire de MBC est nulle, sinon :

$$\overrightarrow{MA} = -\frac{1}{\alpha} \left(\beta \overrightarrow{MB} + \gamma \overrightarrow{MC} \right)$$

donc

$$\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} = -\frac{\gamma}{\alpha} . \overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MB}$$

On obtient ainsi les trois relations :

$$\begin{cases} \alpha \ \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} = \gamma \ \overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{MC} \\ \beta \ \overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{MA} = \gamma \ \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MC} \\ \beta \ \overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MB} = \alpha \ \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MC} \end{cases}$$

d'où l'on tire aisément qu'il existe un scalaire λ tel que :

$$\alpha = \lambda . \overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{MC} , \qquad \beta = \lambda . \overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MA} , \qquad \gamma = \lambda . \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB}$$

Il reste alors à utiliser la proposition 10 de la leçon VI.

239 - LE CAS DU CENTRE DU CERCLE CIRCONSCRIT. Désignons par O le centre du cercle passant par A, B et C.

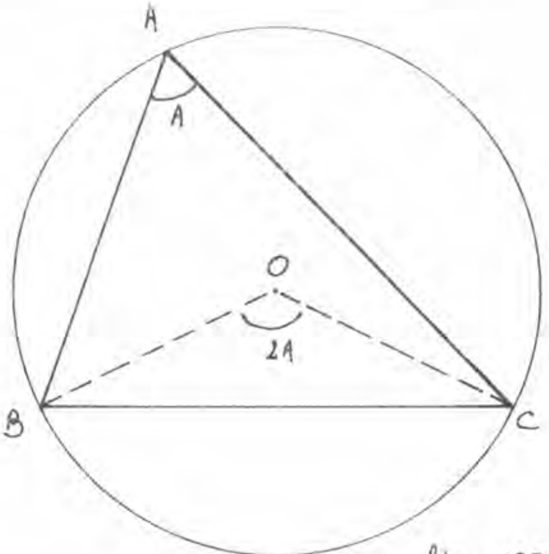


fig. 198

On sait d'après le lemme précédent qu'il faut calculer les aires des triangles OBC, OCA et OAB.

Mais il est clair sur la figure ci-contre que si l'on désigne par R le rayon du cercle, on a :

$$\text{aire}(OBC) = \frac{1}{2} R^2 \sin 2A,$$

et de façon analogue :

$$\text{aire}(OCA) = \frac{1}{2} R^2 \sin 2B,$$

$$\text{aire}(OAB) = \frac{1}{2} R^2 \sin 2C.$$

On peut donc en conclure que les coordonnées barycentriques de O sont proportionnelles à :

$$(\sin 2A \;,\; \sin 2B \;,\; \sin 2C)$$

Pour obtenir des coordonnées de somme égale à 1, il suffit de diviser ces trois nombres par $(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C)$.

<u>Exercice 192</u> : montrer que les coordonnées barycentriques du centre du cercle circonscrit sont égales à :

$$\left(\frac{\cos A}{2 \sin B \sin C} \;,\; \frac{\cos B}{2 \sin A \sin C} \;,\; \frac{\cos C}{2 \sin A \sin B} \right)$$

240 - LE CAS DU CENTRE DU CERCLE INSCRIT. Désignons par r le rayon du cercle inscrit et par Ω son centre.

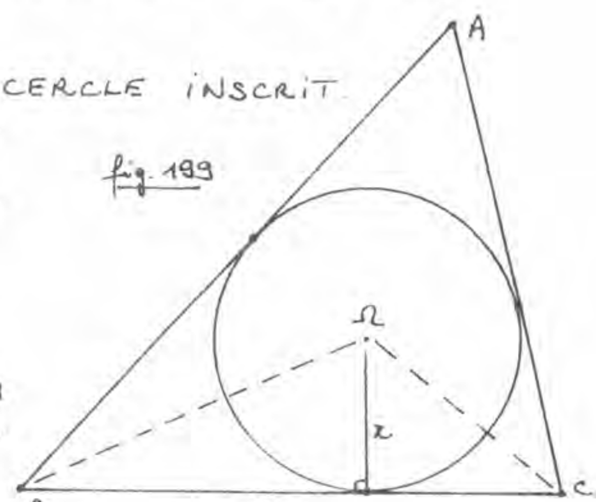


fig. 199

Les aires des triangles ΩBC, ΩCA et ΩAB peuvent se calculer en utilisant leur base et leur hauteur égale à r.

Nous noterons donc, comme d'habitude par a, b, c les longueurs des côtés BC, CA, AB. Les coordonnées barycentriques sont alors proportionnelles à : $(\frac{1}{2} r a, \frac{1}{2} r b, \frac{1}{2} r c)$. Elles valent :

$$\left(\frac{a}{2p} \;,\; \frac{b}{2p} \;,\; \frac{c}{2p} \right), \qquad \text{avec} \quad 2p = a+b+c.$$

Exercice 193 : Retrouver, en utilisant le résultat précédent et le raisonnement du §. 237, la proposition 3 de la Leçon I.

Exercice 194 : montrer que les coordonnées barycentriques du centre du cercle inscrit sont proportionnelles à :

$$(\sin A \ , \sin B \ , \sin C).$$

241 - LE CAS DE L'ORTHOCENTRE. Nous utiliserons les notations de la figure ci-contre :

Nous nous intéressons au triangle ABC, son orthocentre H n'est autre que le centre du cercle circonscrit au triangle A'B'C' obtenu en menant par les sommets A, B, C les parallèles aux côtés opposés.

Désignons par h le pied de la hauteur issue de A. Pour calculer l'aire de HBC, nous devons exprimer Hh. Mais on a dans AHB' :

$$AH = \frac{a}{\operatorname{tg} A}$$

et dans ABh :

$$Ah = c \sin B$$

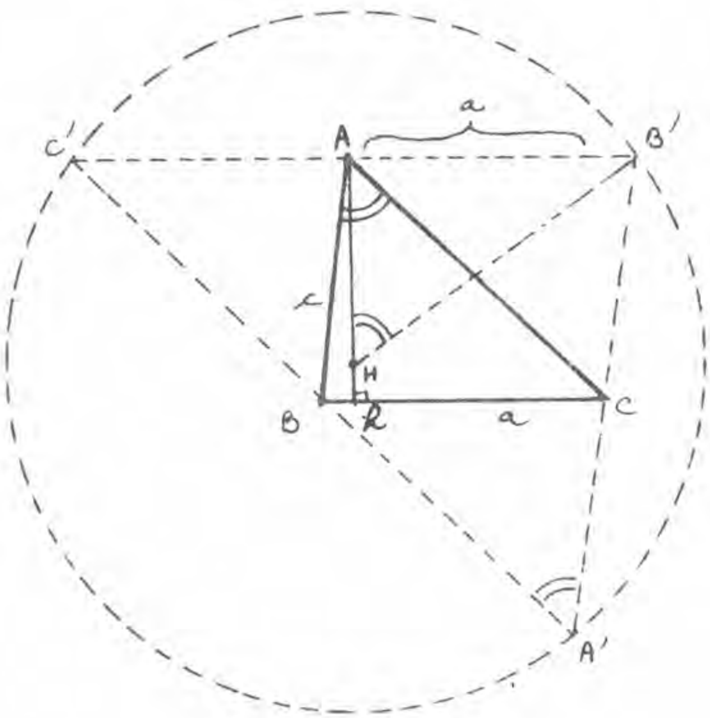


fig. 200

Donc il vient : $\text{aire}(HBC) = \frac{1}{2} Hh \times a = \frac{1}{2} a \left(c \sin B - \frac{a}{\operatorname{tg} A}\right)$.
ou encore :

$$\text{aire}(HBC) = \frac{1}{2} \frac{a}{\sin A} (c \sin B \sin A - a \cos A).$$

Mais on a $\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A}$, donc $c \sin A = a \sin C$. D'où :

$$\text{aire}(HBC) = \frac{1}{2} \frac{a^2}{\sin A} (\sin B . \sin C - \cos A).$$

Ecrivons maintenant que $A = \pi - B - C$, il reste en développant :

$$\text{aire}(HBC) = \frac{1}{2} \frac{a^2}{\sin A} \cos B . \cos C$$

On voit finalement, en permutant, que les coordonnées barycentriques de H sont proportionnelles à :

$$\left(\frac{a^2}{\sin A}\cos B\cos C\ ,\ \frac{b^2}{\sin B}\cos A\cos C\ ,\ \frac{c^2}{\sin C}\cos A\cos B\right)$$

Si nous utilisons de plus le fait que $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$, on obtient aussi que ces coordonnées sont proportionnelles à :

$$(\sin A\cos B\cos C\ ,\ \sin B\cos C\cos A\ ,\ \sin C\cos A\cos B)$$

<u>Exercice 195</u> : montrer que les coordonnées barycentriques de l'orthocentre sont égales à :

$$\left(\frac{\cos B\cos C}{\sin B\sin C}\ ,\ \frac{\cos C\cos A}{\sin C\sin A}\ ,\ \frac{\cos A\cos B}{\sin A\sin B}\right)$$

<u>Exercice 196</u> Montrer que les coordonnées barycentriques du point de LEMOINE du triangle ABC sont proportionnelles à :

$$(a^2\ ,\ b^2\ ,\ c^2)$$

[utiliser la question 1°) de l'exercice 19, ainsi que l'exercice 191.]

<u>Exercice 197</u> : montrer que si l'on désigne par 2p le périmètre de ABC, les coordonnées barycentriques du point de GERGONNE sont proportionnelles à :

$$\left(\frac{1}{p-a}\ ,\ \frac{1}{p-b}\ ,\ \frac{1}{p-c}\right)$$

[cf. exercice 8].

<u>Exercice 198</u> : déterminer les coordonnées barycentriques des centres des cercles exinscrits au triangle ABC

RETOUR SUR LA PERSPECTIVE AXONOMÉTRIQUE

242 - Nous avons vu au cours de la leçon III que le dessin d'un cube en perspective cavalière orthogonale devait remplir certaines conditions.

Nous allons caractériser ces conditions en termes de coordonnées barycentriques.

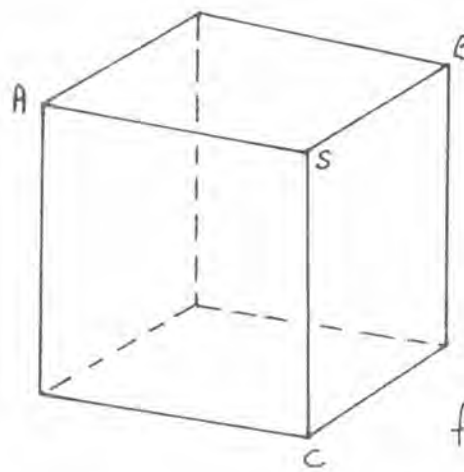


fig. 201

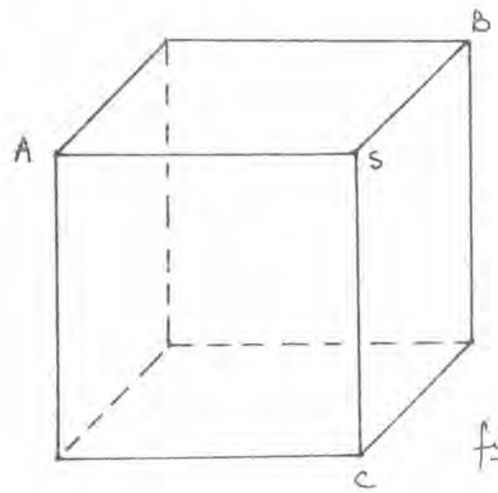


fig. 202

Reprenons par exemple les figures 55 et 56 du §58 reproduites ci-dessus.

Chacune de ces figures peut être entièrement reconstruite si l'on connaît uniquement les points A,B,C et S. Nous allons montrer que la propriété de la figure 201 — [que ne possède pas la figure 202] — qui fait qu'elle représente un cube en projection orthogonale tient en fait dans la position de S par rapport au triangle ABC.

De façon précise, nous allons voir que, dans le cas d'une projection orthogonale du cube, les coordonnées barycentriques de S par rapport à A,B,C sont entièrement déterminées par le triangle ABC lui-même.

243 - Plaçons-nous dans la situation décrite par la figure 203 :

1°) le cube projeté est construit sur les trois vecteurs $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ d'un repère orthonormé de sommet S,

2°) le plan sur lequel on projette orthogonalement est un plan P passant par S, que nous caractériserons par son vecteur normal $\vec{N}$, de composantes (α, β, γ) dans le repère $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Nous supposerons même $\vec{N}$ de longueur 1, c'est-à-dire :

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

3°) Le sommet S du cube se projette évidemment en S sur le plan $\mathcal{P}$. Les points A, B, C sont les projections respectives des extrémités de $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, que nous désignerons par i, j, k.

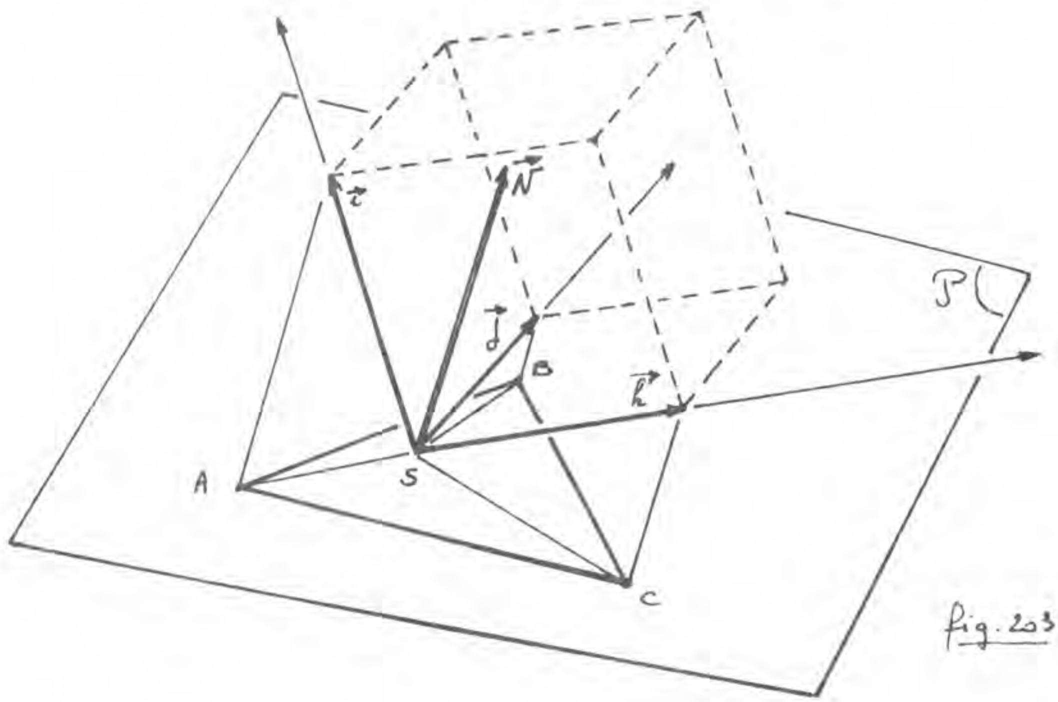


fig. 203

Par hypothèse $\vec{i} \cdot \vec{N} = \alpha$, donc puisque ces vecteurs sont unitaires, la projection de $\vec{i}$ sur $\vec{N}$ est de longueur α.

En d'autres termes $Ai = \alpha$ et, pour des raisons analogues, $Bj = \beta$, $Ck = \gamma$.

Calculons $BC = a$ dans le trapèze $BCkj$; il vient :

$$(kj)^2 = (\gamma - \beta)^2 + BC^2$$

donc
$$2 = (\gamma - \beta)^2 + a^2 .$$

On obtient finalement les trois relations :

$$(S) \quad \begin{cases} (\gamma - \beta)^2 = 2 - a^2 \\ (\alpha - \gamma)^2 = 2 - b^2 \\ (\beta - \alpha)^2 = 2 - c^2 \end{cases}$$

244 - D'autre part on peut aisément trouver les coordonnées barycentriques de S dans ABC.

En effet, celles-ci sont proportionnelles aux aires des triangles SBC, SCA, SAB et ces triangles sont les projections des triangles Sjk, Ski, Sij de surface $\frac{1}{2}$.

Cherchons par exemple l'aire de SBC, projection de Sjk. On a :

$$\text{aire}(SBC) = \text{aire}(Sjk) \times \cos(\vec{i}, \vec{N})$$

soit
$$\text{aire}(SBC) = \frac{1}{2} \cdot \alpha .$$

Il s'ensuit que les coordonnées barycentriques de S sont proportionnelles à

$$(\alpha, \beta, \gamma).$$

Pour les "normaliser" il suffit de calculer $\alpha+\beta+\gamma$. Ceci est possible à partir du système S' en développant les carrés et en ajoutant les trois équations :

$$2(\alpha^2+\gamma^2+\beta^2) - 2\gamma\beta - 2\alpha\gamma - 2\alpha\beta = 6 - (a^2+b^2+c^2)$$

et, comme $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = 1$:

$$2\alpha\beta + 2\beta\gamma + 2\gamma\alpha = a^2+b^2+c^2 - 4$$

mais aussi :

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\gamma\alpha = a^2+b^2+c^2-3$$

soit
$$(\alpha+\beta+\gamma)^2 = a^2+b^2+c^2-3$$

$$(\Sigma) \qquad (\alpha+\beta+\gamma) = \sqrt{a^2+b^2+c^2-3}$$

245 - Nous allons voir que les longueurs a, b, c des côtés du triangle ABC déterminent inversement les coefficients α, β, γ.

Le système (S) impliquent les relations

$$(S') \quad \begin{cases} \alpha - \beta = \varepsilon_1 \sqrt{2-c^2} & (1) \\ \beta - \gamma = \varepsilon_2 \sqrt{2-a^2} & (2) \\ \alpha - \gamma = \varepsilon_3 \sqrt{2-b^2} & (3) = (1)+(2) \end{cases}$$

dans lesquelles $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ peuvent a priori prendre les valeurs ± 1.

En fait les possibilités pour ces valeurs sont limitées pour les raisons suivantes : une identité du type

$$\sqrt{2-a^2} + \sqrt{2-c^2} = \sqrt{2-b^2}$$

implique $\sqrt{2-a^2} \leq \sqrt{2-b^2}$ et $\sqrt{2-c^2} \leq \sqrt{2-b^2}$

D'où l'on tire immédiatement $a \geq b$ et $c \geq b$. Nous laisserons donc le lecteur vérifier à titre d'exercice le :

LEMME : Aux permutations des lettres près les seuls cas possibles sont :

1°) si $a > c > b$, alors $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = (1, 1, 1)$ ou $(-1, -1, -1)$

2°) si $a = c > b$, alors $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = (1, 1, 1)$ ou $(-1, -1, -1)$

3°) si $a > c = b$, alors $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = (1, 1, 1)$ ou $(-1, -1, -1)$ ou $(1, -1, +1)$ ou $(-1, 1, -1)$

4°) si $a = b = c$, alors $a = b = c = \sqrt{2}$ et $\alpha = \beta = \gamma$

Cela étant admis, on tire α, β, γ du système obtenu en prenant les deux première équations de (S') et l'équation (Σ).

$$\begin{cases} \alpha - \beta = \varepsilon_1 \sqrt{2-c^2} \\ \beta - \gamma = \varepsilon_2 \sqrt{2-a^2} \\ \alpha + \beta + \gamma = \sqrt{a^2+b^2+c^2-3} \end{cases}$$

Etudions par exemple le cas $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = +1$; on trouvera :

$$3\alpha = \sqrt{a^2+b^2+c^2-3} + \sqrt{2-b^2} + \sqrt{2-c^2}$$

$$3\beta = \sqrt{a^2+b^2+c^2-3} - \sqrt{2-c^2} + \sqrt{2-a^2}$$

$$3\gamma = \sqrt{a^2+b^2+c^2-3} - \sqrt{2-b^2} - \sqrt{2-a^2}$$

On obtient comme coordonnées barycentriques de S :

$$\left(\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{2-b^2} + \sqrt{2-c^2}}{3\sqrt{a^2+b^2+c^2-3}}, \ \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{2-a^2} - \sqrt{2-c^2}}{3\sqrt{a^2+b^2+c^2-3}}, \ \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2-b^2} + \sqrt{2-a^2}}{3\sqrt{a^2+b^2+c^2-3}}\right).$$

EXERCICES

199 – Déterminer l'isobarycentre de l'ensemble des points du plan qui ont pour coordonnées

$$M_{ij} = (i, j) \qquad 0 \le i, j \in \mathbb{N}$$

où i et j sont des entiers positifs tels que $i+j \le n$.

200 – Déterminer le barycentre des points M_{ij} affectés des coefficients α_{ij}, avec :

a) i, j entiers positifs tels que $0 \le i \le n$, $0 \le j \le i$,

b) $\alpha_{ij} = i - j$.

201 – On considère n points $M_1, M_2, \dots, M_n$ de l'espace et n scalaires $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ tels que $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1$.

a) montrer que si G est le barycentre du système $(M_1, \alpha_1), \dots, (M_n, \alpha_n)$, alors pour tout point M et tout indice $i \in [1, n]$ on a :

$$MM_i^2 = MG^2 + GM_i^2 + 2\,\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{GM_i}$$

b) en déduire que, pour tout point M :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i MM_i^2 = MG^2 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i GM_i^2$$

c) Applications :

1°) déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que la somme

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i MM_i^2$$

soit égale à une constante donnée.

2°) montrer que l'isobarycentre d'un triangle est le point pour lequel la somme des carrés des distances aux sommets est minimum.

202 – On considère n points de l'espace : $M_1, M_2, \dots, M_n$ et n scalaires $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ tels que $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 0$.
On se propose de déterminer l'ensemble des points M de

l'espace tels que :

$$\alpha_1 MM_1^2 + \alpha_2 MM_2^2 + \dots + \alpha_n MM_n^2 = \lambda ,$$

où λ est une constante donnée.

a) on se place pour commencer dans le cas où $n = 2$. En écrivant

$$MM_1^2 - MM_2^2 = (\vec{MM_1} + \vec{MM_2}).(\vec{MM_1} - \vec{MM_2})$$

montrer que l'ensemble des points M qui conviennent est un plan perpendiculaire à M_1M_2.

b) On revient au cas général et on désigne par G_1 le barycentre des (M_i, α_i) pour lesquels α_i est > 0, par G_2 le barycentre des (M_i, α_i) pour lesquels α_j est < 0.

Montrer, en utilisant le a) de l'exercice 201, que

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i MM_i^2 = \alpha (MG_1^2 - MG_2^2) + \mu$$

où α et μ sont des constantes.

En déduire l'ensemble cherché.

203 - On suppose que G est un groupe fini de transformations compatibles avec les opérations sur les vecteurs [Par exemple le groupe des isométries d'un cube]

On considère un point M quelconque de l'espace et on désigne par $M_1, M_2, \dots, M_n$ les images de M par toutes les transformations appartenant à G.

a) montrer que l'ensemble $\{M_1, \dots, M_n\}$ est globalement invariant par toutes les transformations de G.

b) en déduire que l'isobarycentre de $M_1, \dots, M_n$ est laissé fixe par chacune des transformations de G.

204 - On se donne n cercles $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n$ dans le plan, dont on désigne les centres respectifs par $O_1, \dots, O_n$ et les rayons par $r_1, r_2, \dots, r_n$.

On suppose qu'aucune droite du plan [qui ne coupe pas un des cercles] ne sépare ces cercles en deux sous-ensembles disjoints.

Le but de l'exercice est de montrer que l'on peut trouver un cercle $\mathcal{C}$ de rayon $r_1 + r_2 + \dots + r_n$ qui contienne tous les $\mathcal{C}_i$.

1°) on considère deux segments portés par une même droite et on désigne par I_1, I_2 leurs milieux, par $2r_1$, $2r_2$ leurs longueurs.
Montrer que si ces deux segments ont une intersection non vide alors ils sont tous deux contenus dans le segment de longueur $2(r_1+r_2)$ de milieu I, barycentre du système:

$$(I_1, r_1) \quad , (I_2, r_2)$$

2°) montrer [en raisonnant par récurrence] que si n segments portés par une même droite ont pour réunion un segment, alors ils sont tous contenus dans le segment ayant pour milieu le barycentre du système formé par les milieux des segments donnés, affectés des coefficients égaux à leurs longueurs respectives, et ayant pour longueur la somme de ces longueurs.

3°) Montrer que le cercle $\mathcal{C}$ de rayon $r_1+r_2+\dots+r_n$ ayant pour centre le barycentre du système:

$$(O_1, r_1), (O_2, r_2), \dots, (O_n, r_n)$$

répond à la question posée au début de l'énoncé.

205 - On considère un triangle ABC. On désigne par a, b, c les longueurs des côtés BC, CA et AB et par $\mathcal{S}$ l'aire de ABC.

a) montrer qu'il existe un point M et un seul tels que les angles $\widehat{BMC}$, $\widehat{CMA}$, $\widehat{AMB}$ soient égaux

b) on désigne par x, y, z les longueurs MA, MB et MC. Montrer les relations suivantes:

$$(1) \qquad \frac{4\mathcal{S}}{\sqrt{3}} = xy + yz + zx$$

$$(2) \qquad a^2 = y^2 + z^2 + yz$$

$$(3) \qquad b^2 = z^2 + x^2 + zx$$

$$(4) \qquad c^2 = x^2 + y^2 + xy$$

c) Déduire des relations (1) à (4) que l'on a:

$$(5) \qquad a^2+b^2+c^2 + 4\sqrt{3}.\mathcal{S} = 2\,(x+y+z)^2$$

d) On pose $x+y+z = \sigma$. Montrer que x, y, z sont solution du système:

$$\begin{cases} x+y+z = \sigma \\ y - z = \dfrac{c^2-b^2}{\sigma} \\ x - y = \dfrac{b^2-a^2}{\sigma} \end{cases}$$

trouver x, y, z et en déduire les coordonnées barycentriques de M.

APPLICATIONS DE LA NOTION DE BARYCENTRE

Ce chapitre de compléments comporte deux parties indépendantes :

1°) une introduction aux calculs à l'aide des coordonnées barycentriques dans le plan.

2°) une introduction à l'étude de la convexité, traitée à partir de la notion de barycentre.

La première partie suppose la lecture préalable du complément F car nous utilisons les déterminants d'ordre trois. Nous utilisons d'ailleurs plus que le strict contenu de ce complément F et nous admettons sans démonstration le résultat suivant :

Nous avons vu que l'indépendance linéaire de trois vecteurs de l'espace était caractérisée par la non-nullité du déterminant de ces vecteurs.

Toutefois, le déterminant d'ordre trois étant — par définition — un produit mixte, les calculs ont toujours été faits en utilisant un repère orthonormé.

Nous admettons que les mêmes calculs effectués à partir des composantes de vecteurs exprimées dans un repère quelconque possèdent encore les mêmes propriétés. Nous utiliserons donc la formule des déterminants sans que le repère où nous nous placerons soit nécessairement orthonormé.

Une explication de la validité des calculs sera donnée dans les modules ultérieurs.

CALCULS EN COORDONNÉES BARYCENTRIQUES

246 - Rappelons tout d'abord l'interprétation fondamentale des coordonnées barycentriques d'un point M du plan $\mathcal{P}$ par rapport aux sommets A, B, C d'un triangle de référence :

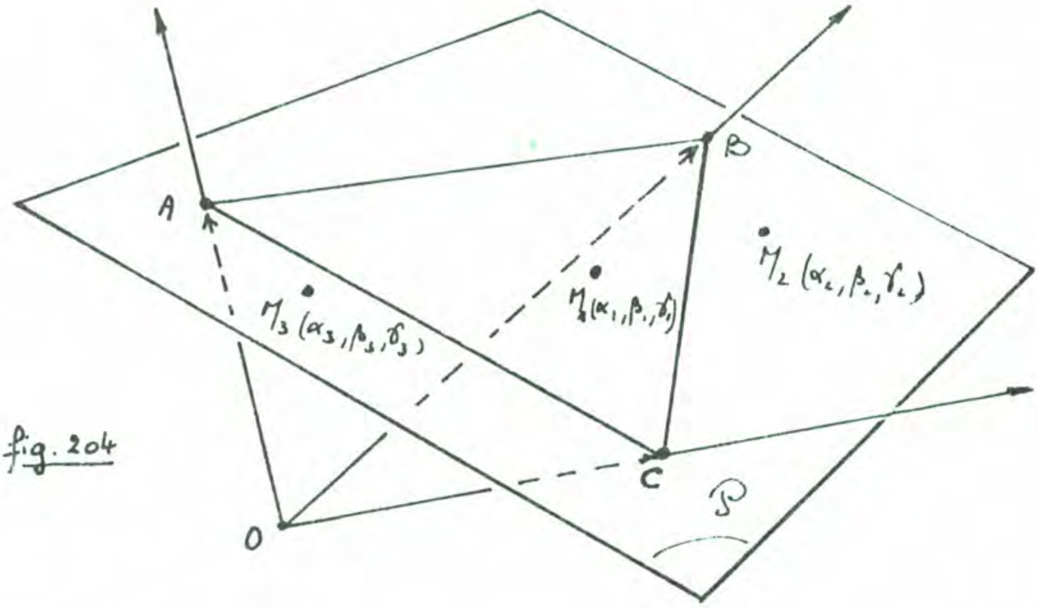


fig. 204

Par hypothèse, nous supposerons toujours que (α, β, γ) vérifient la condition

$$(1) \qquad \alpha + \beta + \gamma = 1,$$

si bien que le triplet (α, β, γ) représente en fait les coordonnées cartésiennes de M dans un repère [quelconque] d'origine O et de vecteurs $\vec{i} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{j} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{k} = \overrightarrow{OC}$.

La relation (1) n'est alors rien d'autre que l'équation du plan ABC.

247 - Il est facile d'exprimer une condition d'alignement de trois points :

PROPOSITION 1 : trois points M_1, M_2, M_3 de coordonnées barycentriques $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ et $(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$ sont alignés si et seulement si

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0$$

Démonstration : l'alignement de M_1, M_2, M_3 équivaut au fait que les vecteurs $\vec{OM_1}, \vec{OM_2}, \vec{OM_3}$ sont dans un même plan, donc linéairement dépendants.

Cela revient bien à dire que $d(\vec{OM_1}, \vec{OM_2}, \vec{OM_3}) = 0$.

248 - UN EXEMPLE. Nous allons appliquer le résultat précédent pour montrer que, dans un triangle ABC, le centre du cercle circonscrit O, l'orthocentre H et le centre de gravité G sont alignés.

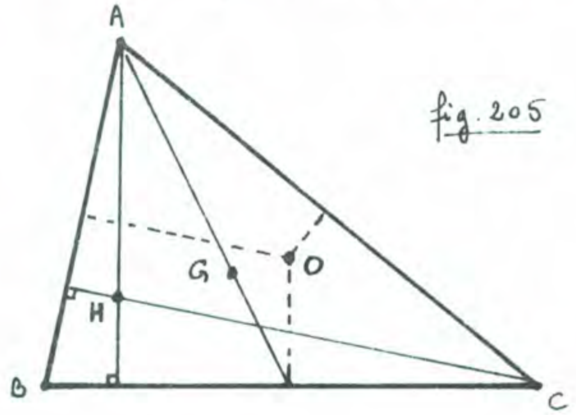


fig. 205

Les coordonnées barycentriques de ces points sont données aux §§ 239 et 241. Mais il est clair que pour montrer que le déterminant est nul on peut utiliser des triplets proportionnels. Nous prendrons donc :

$$G \sim (1, 1, 1)$$

$$O \sim (\sin 2A, \sin 2B, \sin 2C)$$

$$H \sim (\sin A \cos B \cos C, \sin B \cos A \cos C, \sin C \cos A \cos B)$$

Désignons par $\vec{V_1}, \vec{V_2}, \vec{V_3}$ ces vecteurs, il faut montrer que :

$$d(\vec{V_1}, \vec{V_2}, \vec{V_3}) = \begin{vmatrix} 1 & \sin 2A & \sin A \cos B \cos C \\ 1 & \sin 2B & \sin B \cos C \cos A \\ 1 & \sin 2C & \sin C \cos A \cos B \end{vmatrix} = 0 .$$

Mais $\sin 2A = 2 \sin A \cos A = -2 \sin A \cos(B+C) = -2 \sin A [\cos B \cos C - \sin B \sin C]$

On a donc en calculant le vecteur $\vec{V_3} + \frac{1}{2}\vec{V_2}$:

$$\vec{V_3} + \frac{1}{2}\vec{V_2} = (\sin A \sin B \sin C, \sin B \sin C \sin A, \sin C \sin A \sin B)$$

soit :

$$\vec{V_3} + \frac{1}{2}\vec{V_2} = (\sin A \sin B \sin C) . \vec{V_1} .$$

Ces vecteurs sont donc linéairement dépendants. Le déterminant est nul et c'est ce qu'il fallait vérifier.

249 - APPLICATION 1 : LE THÉORÈME DE MENELAÜS. Considérons des points P, Q, R situés respectivement sur les côtés BC, CA, AB du triangle ABC.

Leurs coordonnées barycentriques sont de la forme :

$P = (0, \beta_1, \gamma_1)$, $Q = (\alpha_2, 0, \gamma_2)$, $R = (\alpha_3, \beta_3, 0)$

l'alignement de P, Q, R équivaut donc à :

$$\begin{vmatrix} 0 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & 0 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

soit en développant :

$$\beta_1\gamma_2\alpha_3 + \gamma_1\alpha_2\beta_3 = 0.$$

Mais (β_1, γ_1) sont les coordonnées barycentriques de P par rapport aux points B, C. On a donc, d'après ce qui a été dit au § 235 :

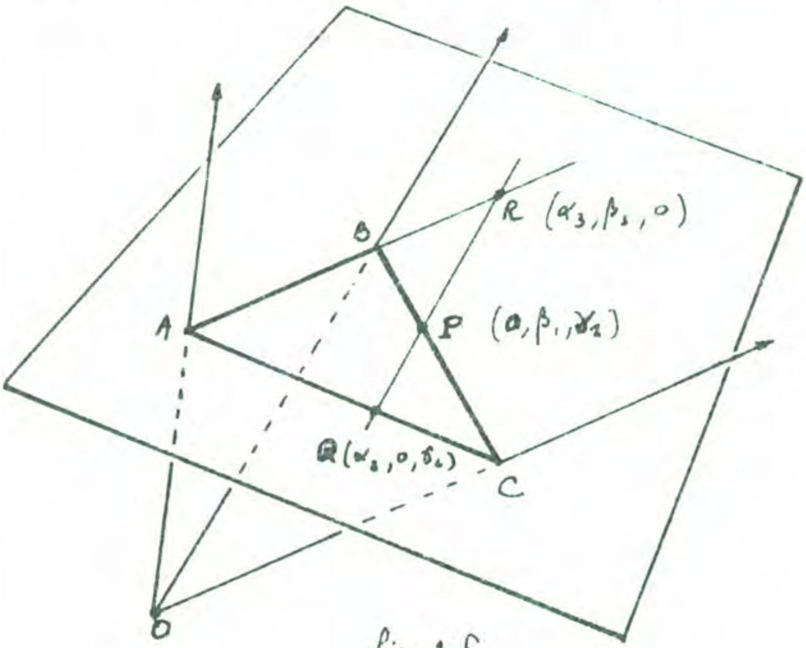


fig. 206

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} = -\frac{\gamma_1}{\beta_1} \quad \text{et de même :} \quad \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} = -\frac{\alpha_2}{\gamma_2}, \quad \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = -\frac{\beta_3}{\alpha_3}.$$

Finalement :

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \cdot \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = -\frac{\gamma_1 \cdot \alpha_2 \cdot \beta_3}{\beta_1 \cdot \gamma_2 \cdot \alpha_3} = -1.$$

On retrouve ainsi le théorème de Menelaüs.

250 - APPLICATION 2 : ÉQUATION D'UNE DROITE : écrivons qu'un point M de coordonnées barycentriques (x, y, z) est aligné avec les points $M_1 = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ et $M_2 = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$.

On a :

$$\begin{vmatrix} x & \alpha_1 & \alpha_2 \\ y & \beta_1 & \beta_2 \\ z & \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix} = 0$$

Ce qui donne en développant.

$$x(\beta_1\gamma_2 - \gamma_1\beta_2) + y(\alpha_2\gamma_1 - \alpha_1\gamma_2) + z(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1) = 0$$

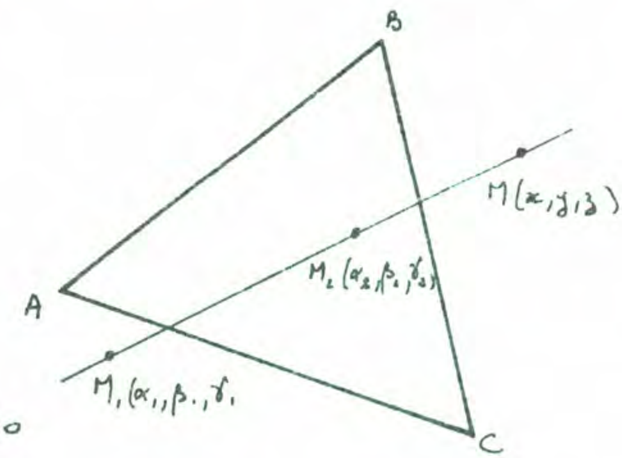


fig. 207

On voit ainsi que l'équation d'une droite en coordonnées barycentriques s'écrit :

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0 \quad (2)$$

On notera que cette équation doit en fait être jointe à la condition

$$x + y + z = 1$$

La droite apparaît comme l'intersection du plan ABC avec un plan passant par l'origine.

Remarquons enfin que, parmi les équations du type de (2), il n'est pas possible d'avoir de droite correspondant à :

$$x + y + z = 0 .$$

Elle correspondrait en effet au plan passant par O et parallèle à $\mathcal{P}$...

251 - EXEMPLES :

1°) cherchons l'équation de la médiane issue de A. Elle passe par $A = (1, 0, 0)$ et par le milieu de BC de coordonnées barycentriques $(0, 1/2, 1/2)$. On a donc :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1/2 & y \\ 0 & 1/2 & z \end{vmatrix} = 0 \quad \text{soit :} \quad z - y = 0 .$$

2°) cherchons l'équation de la hauteur issue de A. Il faut écrire qu'elle passe par A et l'orthocentre H, soit :

$$\begin{vmatrix} 1 & \sin A \cos B \cos C & x \\ 0 & \sin B \cos C \cos A & y \\ 0 & \sin C \cos A \cos B & z \end{vmatrix} = 0 \quad \text{d'où :} \quad z(\sin B \cos C) - y(\sin C \cos B) = 0$$

ou encore :

$$z \cdot \operatorname{tg} B - y \cdot \operatorname{tg} C = 0 .$$

<u>Exercice 206</u> : écrire les équations des médiatrices de ABC en utilisant le fait qu'elles passent par le centre du cercle circonscrit et le milieu des côtés.

<u>Exercice 207</u> : écrire les équations des bissectrices en utilisant les coordonnées barycentriques du centre du cercle inscrit.

<u>Exercice 208</u> : déterminer l'équation de la droite passant par l'orthocentre, le centre de gravité et le centre du cercle circonscrit.

252 - En utilisant les résultats du complément F nous pouvons maintenant donner une caractérisation des droites concourantes ou parallèles :

PROPOSITION 2 : si les équations en coordonnées barycentriques de trois droites $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$, $\mathcal{D}_3$ sont :

$$\mathcal{D}_1 : \ u_1 x + v_1 y + w_1 z, \quad \mathcal{D}_2 : u_2 x + v_2 y + w_2 z = 0, \quad \mathcal{D}_3 : u_3 x + v_3 y + w_3 z = 0$$

Alors, pour que $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$ soient concourantes ou parallèles, il faut et il suffit que :

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0$$

Démonstration : cela revient à écrire que les plans passant par O et correspondant aux droites $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$ passent par une même droite [cf. complément F. § 209. proposition 9].

De même, en écrivant que les plans passant par O et correspondant à deux droites ont, avec le plan parallèle à $\mathcal{P}$, une intersection égale à une droite, nous obtiendrons la :

PROPOSITION 3 : deux droites d'équations :

$$\mathcal{D}_1 : \ u_1 x + v_1 y + w_1 z = 0, \quad \mathcal{D}_2 : \ u_2 x + v_2 y + w_2 z = 0$$

sont parallèles si et seulement si :

$$\begin{vmatrix} 1 & u_1 & u_2 \\ 1 & v_1 & v_2 \\ 1 & w_1 & w_2 \end{vmatrix} = 0$$

253 - APPLICATION 1 : LE THÉORÈME DE CEVA. Reprenons des points P, Q, R comme sur la figure 208 et cherchons les équations des droites AP, BQ et CR. On a :

$$AP : \begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & \beta_1 & y \\ 0 & \gamma_1 & z \end{vmatrix} = \beta_1 z - \gamma_1 y = 0$$

$$BQ : \begin{vmatrix} 0 & \alpha_2 & x \\ 1 & 0 & y \\ 0 & \gamma_2 & z \end{vmatrix} = \gamma_2 x - \alpha_2 z = 0$$

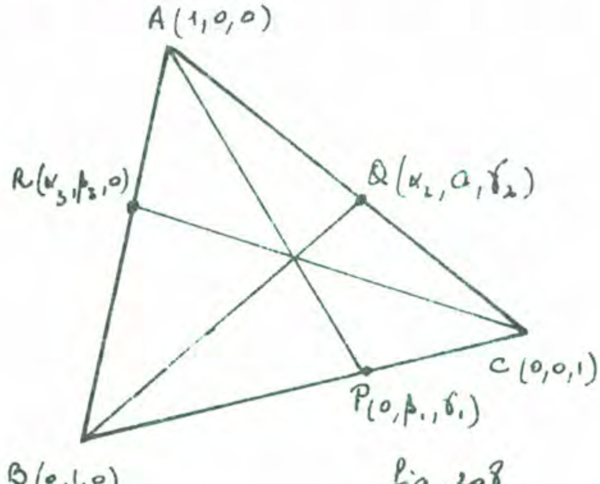


fig. 208

et de même : $$RC = \begin{vmatrix} 0 & \alpha_3 & x \\ 0 & \beta_3 & y \\ 1 & 0 & z \end{vmatrix} = \beta_3 x - \alpha_3 y = 0$$

Dès lors ces trois droites sont concourantes ou parallèles si et seulement si :

$$\begin{vmatrix} 0 & \gamma_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & 0 & -\alpha_3 \\ -\beta_1 & -\alpha_2 & 0 \end{vmatrix} = -\alpha_2\beta_3\gamma_1 + \alpha_3\beta_1\gamma_2 = 0$$

En poursuivant le raisonnement comme au paragraphe 249 on voit que cela revient à la condition du théorème de Ceva :

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \cdot \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = -\frac{\gamma_1\alpha_2\beta_3}{\beta_1\gamma_2\alpha_3} = +1 .$$

254 - APPLICATION 2 : PROJECTION D'UN POINT SUR UN CÔTÉ. Soit M un point de coordonnées barycentriques (α, β, γ).

Pour trouver sa projection m sur le côté BC, il suffit de connaître l'équation de la perpendiculaire à BC menée par M.

Cette droite ayant une équation de la forme :

$$\mu x + \nu y + w z = 0,$$

nous écrivons :

1°) qu'elle passe par M :

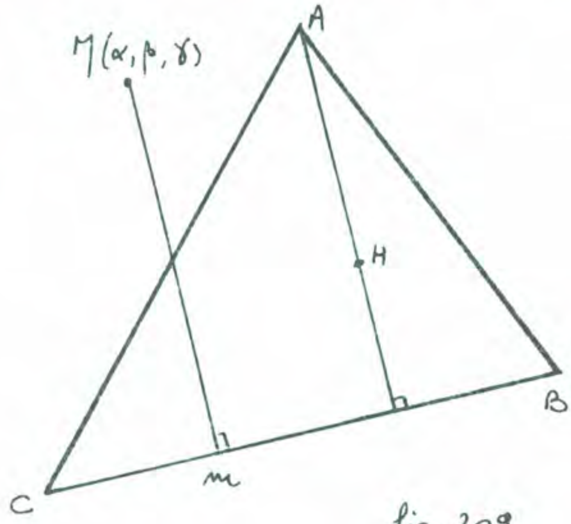


fig. 209

(3) $$\mu\alpha + \nu\beta + w\gamma = 0$$

2°) qu'elle est parallèle à la hauteur issue du sommet A. Cette hauteur ayant l'équation calculée au § 251, nous avons d'après la proposition 3 :

(4) $$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \mu \\ 1 & \operatorname{tg} C & \nu \\ 1 & -\operatorname{tg} B & w \end{vmatrix} = -\mu(\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C) + \nu(\operatorname{tg} B) + w(\operatorname{tg} C) = 0$$

Ces deux conditions (3) et (4) permettent de trouver μ, ν, w à un coefficient de proportionnalité près ; l'équation cherchée est :

(5) $$x + \left(1 - \frac{\operatorname{tg} C}{\beta \operatorname{tg} C - \gamma \operatorname{tg} B}\right) y + \left(1 + \frac{\operatorname{tg} B}{\beta \operatorname{tg} C - \gamma \operatorname{tg} B}\right) z = 0$$

Il reste à trouver les coordonnées barycentriques de m en cherchant l'intersection de cette droite avec la droite BC, c'est-à-dire avec la droite d'équation $x = 0$.

On trouve, à un coefficient de proportionnalité près λ, choisi de telle sorte que la somme soit égale à 1 :

$$m = \lambda\left(0\ ,\ \beta\, tg\, C - \gamma .\, tg\, B + tg\, B\ ,\ -\beta\, tg\, C + \gamma\, tg\, B + tg\, C\right)$$

Exercice 209 : en utilisant les résultats de l'exercice 206 et la proposition 3, vérifier que les médiatrices sont parallèles aux hauteurs du triangle.

Exercice 210 : soit M un point de coordonnées barycentriques (x, y, z) par rapport à ABC.

a) déterminer les coordonnées de ses trois projections orthogonales sur les côtés AB, BC et CA

b) montrer, en utilisant le théorème de Simson, que le point M est sur le cercle circonscrit à ABC si et seulement si :

$$tg\, A(tg\, B + tg\, C)yz + tg\, B(tg\, C + tg\, A)zx + tg\, C(tg\, A + tg\, B)xy = 0$$

c) on considère un point $M = (\alpha, \beta, \gamma)$ situé sur le cercle circonscrit à ABC.
Montrer que l'équation de la droite de Simson de M peut s'écrire :

$$\alpha\beta\gamma\, tgA.tgB.tgC\,(X+Y+Z) + \beta\gamma\,(tgB + tgC)X + \alpha\beta\,(tgA + tgB)Z + \gamma\alpha\,(tgA + tgC)Y = 0$$

d) déterminer les coordonnées barycentriques du milieu I du segment MH, où H est l'orthocentre.

e) vérifier que I appartient à la droite de Simson de M et en déduire que les droites de Steiner passent par l'orthocentre [cf. exercice 6].

[DERNIER] RETOUR SUR LE THÉORÈME DE DESARGUES ...

256 – Montrons comment il est possible de mener les calculs en coordonnées barycentriques pour vérifier le théorème de Desargues. Nous utiliserons les notations de la fig. 210, dans laquelle les coordonnées sont relatives à A, B, C.

Rappelons qu'il s'agit de montrer que AA', BB', CC' sont concourantes ou parallèles si et seulement si les intersections de (AB, A'B'), (BC, B'C') et de (CA, C'A') sont alignées.

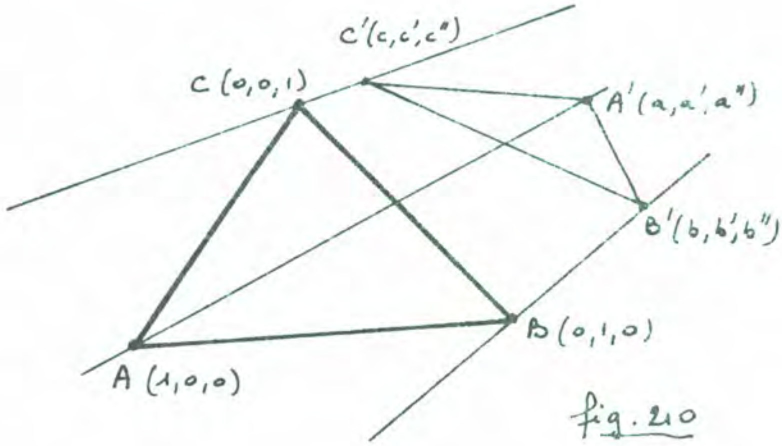


fig. 210

Cherchons les équations de AA', BB', CC' :

$$AA' : \begin{vmatrix} x & 1 & a \\ y & 0 & a' \\ z & 0 & a'' \end{vmatrix} = 0 , \quad BB' : \begin{vmatrix} x & 0 & b \\ y & 1 & b' \\ z & 0 & b'' \end{vmatrix} = 0 , \quad CC' : \begin{vmatrix} x & 0 & c \\ y & 0 & c' \\ z & 1 & c'' \end{vmatrix} = 0$$

soit :

$$a''y - a'z = 0 , \qquad -b''x + bz = 0 , \qquad c'x - cy = 0$$

La concourance de AA', BB', CC' revient donc à :

$$(H) \qquad \begin{vmatrix} 0 & -b'' & c' \\ a'' & 0 & -c \\ -a' & b & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ou encore} \quad a''bc' = a'b''c$$

Par ailleurs, les équations de AB et A'B' sont données par :

$$AB : \ z = 0 , \qquad A'B' : \begin{vmatrix} x & a & b \\ y & a' & b' \\ z & a'' & b'' \end{vmatrix} = 0$$

il est facile de voir que les coordonnées barycentriques de $AB \cap A'B'$ sont proportionnelles à :

$$AB \cap A'B' : \left(-ab'' + a''b , \ b'a'' - a'b'' , \ 0 \right)$$

et de même :

$$BC \cap B'C' : \left(0 , \ bc' - cb' , \ c''b - cb'' \right)$$

$$CA \cap C'A' : \left(ac' - ca' , \ 0 , \ c'a'' - c''a' \right)$$

Ainsi l'alignement de ces 3 points d'intersection revient à :

$$(C) \qquad \begin{vmatrix} -ab''+a''b & 0 & ac'-a'c \\ b'a''-a'b'' & bc'-cb' & 0 \\ 0 & c''b-cb'' & c'a''-c''a' \end{vmatrix} = 0$$

Avec un peu de patience il est facile de vérifier que la condition (H) implique la nullité de ce déterminant...

257 - Signalons cependant au passage que l'équivalence des deux conditions (H) et (C) repose en fait sur une propriété des déterminants que nous n'avons pas encore évoquée ici : si on remarque que le déterminant de (C) est égal au déterminant :

$$(C') \qquad \begin{vmatrix} 0 & -ab''+a''b & ac'-ca' \\ b'a''-a'b'' & 0 & bc'-cb' \\ c'a''-c''a' & c''b-cb'' & 0 \end{vmatrix}$$

[appliquer la règle de Sarrus à $\begin{vmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ \delta & 0 & \gamma \\ \varepsilon & \varphi & 0 \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} \alpha & 0 & \beta \\ \delta & \gamma & 0 \\ 0 & \varphi & \varepsilon \end{vmatrix}$].

Le problème revient à montrer que (C') est nul si et seulement si (H) est nul. Or on a l'identité matricielle :

$$\begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -b'' & c' \\ a'' & 0 & -c \\ -a' & b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -ab''+a''b & ac'-ca' \\ b'a''-a'b'' & 0 & bc'-cb' \\ c'a''-c''a' & c''b-cb'' & 0 \end{pmatrix}$$

[voir là-dessus le module AG 2]

Le résultat découle alors simplement du fait que le déterminant d'un produit est égal au produit des déterminants.

[DERNIÈRE] RETOUR SUR LE THÉORÈME DE PAPPUS

258 - Considérons un hexagone $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\varphi$ dont les sommets appartiennent alternativement à deux droites

Nous voulons démontrer que les intersections de $(\alpha\beta, \delta\varepsilon)$, $(\beta\gamma, \varepsilon\varphi)$ et $(\gamma\delta, \varphi\alpha)$ sont trois points alignés.

Nous ferons les calculs en coordonnées barycentriques dans le triangle ABC déterminé par les droites $\varepsilon\varphi$, $\gamma\delta$ et $\alpha\beta$.

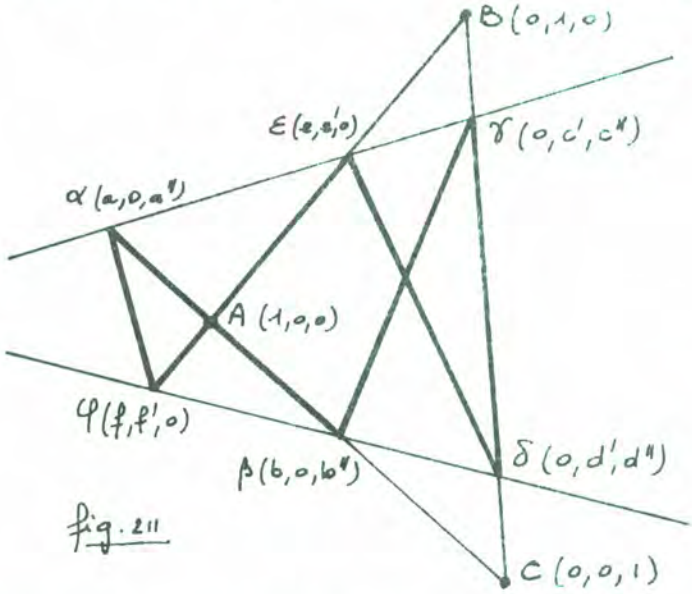


fig. 211

On voit sur la fig. 211 que ceci implique certaines nullités sur les coordonnées des points $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \varphi$ qui sont tous situés sur un côté du triangle.

L'hypothèse se résume à l'alignement de $\alpha, \varepsilon, \gamma$ et de β, φ, δ :

$$(H_1) : \begin{vmatrix} a & e & 0 \\ 0 & e' & c' \\ a'' & 0 & c'' \end{vmatrix} = 0 \qquad (H_2) : \begin{vmatrix} b & f & 0 \\ 0 & f' & d' \\ b'' & 0 & d'' \end{vmatrix} = 0$$

on a donc :

$$\begin{cases} ae'c'' = a''ec' \\ bf'd'' = b''fd' \end{cases}$$

Cherchons à titre d'exemple l'intersection de $\alpha\beta$ et de $\varepsilon\delta$.

$$\alpha\beta : \quad y = 0 , \qquad \varepsilon\delta : \quad \begin{vmatrix} x & e & 0 \\ y & e' & d' \\ z & 0 & d'' \end{vmatrix} = xe'd'' - yed'' + zed' = 0$$

le point cherché a donc des coordonnées proportionnelles à :

$$(\alpha\beta) \cap (\varepsilon\delta) : \ (ed' \ , \ 0 \ , \ -e'd'')$$

et de même :

$$(\beta\gamma) \cap (\varepsilon\varphi) : \ (-bc'' \ , \ c'b'' \ , \ 0)$$

$$(\alpha\varphi) \cap (\gamma\delta) : \ (0 \ , -af' \ , fa'')$$

En conclusion, nous aurons redémontré le théorème de Pappus si nous démontrons que le déterminant suivant est nul:

$$\Delta = \begin{vmatrix} ed' & -bc' & 0 \\ 0 & c'b'' & -af' \\ -e'd'' & 0 & fa'' \end{vmatrix} = ed'.c'b''.fa'' - e'd''.bc''.af'$$

Or $\Delta = (a''ec')(b''fd') - (e'ac'')(d''bf')$. Donc l'hypothèse implique bien le résultat cherché.

Exercice 211. On considère un triangle ABC et des points P, Q, R situés sur les côtés BC, CA, AB.
Montrer par le calcul en coordonnées barycentriques (relativement à A, B, C) que les droites AP, BQ, CR sont concourantes ou parallèles si et seulement si les points

$PQ \cap AB \qquad QR \cap BC \qquad RP \cap CA$

sont alignés.
[triangles en perspectives]

Exercice 212: les notations sont celles du § 258.

1°) donner l'équation de la droite passant par les points

$(\alpha\beta)\cap(\varepsilon\delta) \qquad (\beta\gamma)\cap(\varepsilon\varphi) \qquad (\alpha\varphi)\cap(\gamma\delta)$

2°) montrer que les points suivants sont alignés:

$(\varepsilon\delta)\cap(\gamma\varphi) \qquad (\beta\gamma)\cap(\alpha\delta) \qquad (\alpha\varphi)\cap(\varepsilon\beta)$

et donner l'équation de la droite obtenue

3°) montrer que les points suivants sont alignés:

$(\alpha\beta)\cap(\gamma\varphi) \qquad (\varepsilon\varphi)\cap(\alpha\delta) \qquad (\gamma\delta)\cap(\varepsilon\beta)$

et donner l'équation de la droite obtenue.

4°) montrer que les droites obtenues en 1°), 2°) et 3°) sont concourantes

5°) démonstration géométrique?

LA NOTION DE CONVEXITÉ.

259 - La notion de convexité repose sur la notion de segment

DÉFINITION 1 : une partie E du plan ou de l'espace est dite CONVEXE si, chaque fois que E contient deux points A et B, alors E contient entièrement le segment AB.

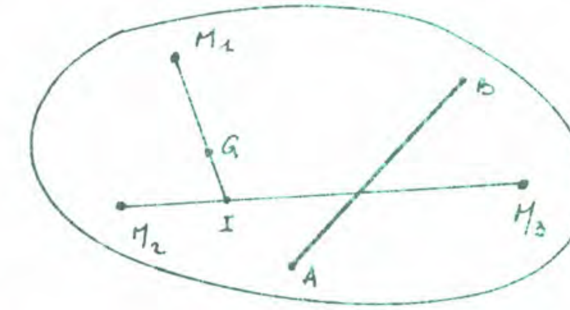


fig. 212

Il est clair que l'intersection de deux parties convexes est encore convexe : la seule "difficulté" de la démonstration concerne le cas où l'intersection est la partie vide. Le lecteur qui ne serait pas convaincu d'emblée que l'ensemble vide remplit bien les conditions de la définition 1 admettra que, par définition, on considère aussi que cet ensemble est convexe...

PROPOSITION 4 : une partie E est convexe si et seulement si, quels que soient les points $M_1, \dots, M_n$ de E, le barycentre de ces points affectés de coefficients positifs est encore dans E.

Démonstration : choisissons trois points M_1, M_2, M_3 et des coefficients positifs $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Le barycentre G de ce système est aussi le barycentre de (M_1, α_1) et de $(I, \alpha_1+\alpha_2)$, où I est le barycentre de (M_2, α_2) et (M_3, α_3).

Mais I est sur le segment M_2M_3, donc dans E si E est convexe. D'autre part G est sur le segment M_1I qui est lui aussi dans E.

On montre donc facilement par récurrence que si E est convexe, les barycentres considérés sont encore dans E. La réciproque est immédiate en se restreignant au cas où $n=2$.

260 - UN EXEMPLE FONDAMENTAL : LES DEMI-PLANS.

Soit $\mathcal{D}$ une droite du plan, alors le complémentaire de $\mathcal{D}$ dans le plan est formé de deux parties convexes disjointes que nous appellerons les demi-plans OUVERTS déterminés par $\mathcal{D}$.

Si nous considérons un de ces demi-plans ouverts et que nous lui adjoignons la droite $\mathcal{D}$ elle-même, nous obtenons une nouvelle partie convexe que nous appellerons un demi-plan

FERMÉ déterminé par la droite $\mathcal{D}$.

Pour simplifier, quand nous parlerons de "demi-plan" sans préciser, il s'agira de demi-plan fermé.

En réalité, bien que les notions de demi-plans soit très familières, il convient de donner un sens précis à tout ce que nous venons d'affirmer :

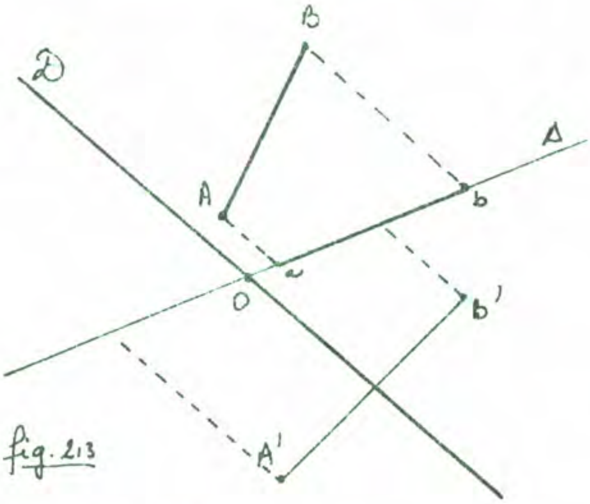


fig. 213

PROPOSITION 5. Soit $\mathcal{D}$ une droite du plan. Le complémentaire de $\mathcal{D}$ est constitué de deux parties disjointes convexes et la relation
"A et B appartiennent à une même de ces deux parties"
est équivalente à la relation :
"le segment AB ne coupe pas la droite $\mathcal{D}$".

Démonstration : considérons une droite Δ sécante à $\mathcal{D}$ et la projection sur Δ parallèlement à la direction de $\mathcal{D}$. Le point O d'intersection de $\mathcal{D}$ et Δ détermine sur Δ deux demi-droites ouvertes, si bien que le complémentaire de $\mathcal{D}$ apparaît comme la réunion (évidemment disjointe) des images réciproques par la projection de chacune de ces demi-droites.

Ces deux parties constituent (par définition) les demi-plans ouverts déterminés par $\mathcal{D}$. Montrons la proposition 5 :

a) chaque demi-plan est convexe car si A et B se projettent sur la même demi-droite de Δ, le segment AB aussi, d'après la propriété de projection des barycentres.

b) deux points A et B sont dans le même demi-plan si et seulement si le segment AB ne coupe pas $\mathcal{D}$ puisque cela équivaudrait au fait que sa projection contienne O.

[On notera au passage que ce que nous avons appelé un demi-plan fermé est convexe comme image réciproque d'une des demi-droites fermées déterminées par O sur Δ].

Exercice 213 : énoncer et démontrer la proposition analogue à la proposition 5 et qui correspond à la notion de "demi-espace".

Exercice 214 : montrer que les seules parties convexes du plan dont le complémentaire est convexe sont la partie vide, les demi-plans ouverts ou fermés et le plan lui-même.

261 - La proposition 5 dit en fait un peu plus qu'il n'y paraît à la première lecture.

En effet : la relation "A et B appartiennent au même demi-plan ouvert défini par $\mathcal{D}$" est manifestement une relation d'équivalence. Il en va donc de même pour la relation "A et B sont tels que le segment AB ne coupe pas $\mathcal{D}$".

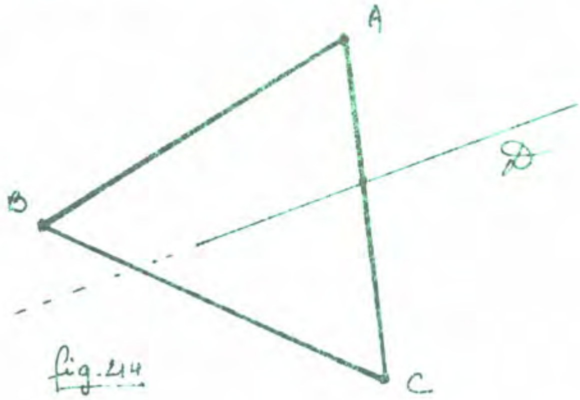


fig. 214

Regardons ce que signifie la transitivité.

Si A, B, C sont trois points et si $\mathcal{D}$ ne coupe pas les segments AB et BC, alors elle ne coupe pas le segment AC.

Cela revient à dire que si $\mathcal{D}$ coupe AC, alors elle coupe forcément un des deux segments AB, BC : en effet, par hypothèse A et C seraient dans deux demi-plans différents et si B n'appartient pas à $\mathcal{D}$, il est clair qu'il est soit dans le demi-plan contenant A, soit dans le demi-plan contenant C...

Nous venons de prouver la proposition suivante :

PROPOSITION 6 : étant donné un triangle ABC et une droite $\mathcal{D}$ ne passant pas par les sommets, si $\mathcal{D}$ coupe un des côtés [c'est-à-dire le <u>segment</u> correspondant] alors elle coupe nécessairement un (et un seul) des deux autres.

<u>Exercice 215</u> : redémontrer ce résultat en utilisant le théorème de Menelaüs

262 - **REMARQUE** : La proposition 6 est un exemple typique des propriétés intuitivement évidentes que nous allons maintenant démontrer avec beaucoup de difficultés...

263 - On peut traduire le schéma de la figure 214 en disant que si la droite $\mathcal{D}$ pénètre à l'intérieur du triangle, alors elle doit nécessairement en ressortir.

La notion d'<u>intérieur</u>, pour évidente qu'elle soit, va correspondre pour nous à ce que nous appellerons l'<u>enveloppe convexe</u> :

DÉFINITION 2 : on appelle ENVELOPPE CONVEXE d'un ensemble $\{M_1, \dots, M_n\}$ de points la plus petite partie convexe qui contient tous ces points.

Notre but est de préciser la nature de l'enveloppe convexe. Nous avons besoin pour commencer d'une caractérisation en termes de barycentres :

PROPOSITION 7 : l'enveloppe convexe de $\{M_1, M_2, \cdots, M_n\}$ est égale à l'ensemble des barycentres de ces points affectés de coefficients positifs ou nuls.

Démonstration : l'ensemble de ces barycentres est en effet convexe : si G est le barycentre de
$$(M_1, \alpha_1), \cdots, (M_n, \alpha_n)$$
et G' le barycentre de
$$(M_1, \alpha'_1), \cdots, (M_n, \alpha'_n),$$
tout point P du segment GG' est barycentre de $M_1, \cdots, M_n$ affectés des coefficients
$$\beta_1 = \frac{PG' \alpha_1 + PG \cdot \alpha'_1}{GG'}, \quad \cdots \quad, \beta_n = \frac{PG' \alpha_n + PG \cdot \alpha'_n}{GG'}.$$
[exercice !]

Comme toute partie convexe contenant $M_1, \cdots, M_n$ contient en plus les barycentres en question, on est bien en présence de la plus petite partie convexe possible qui contienne $M_1, \cdots, M_n$.

264 - LE CAS DE TROIS POINTS : soient A, B, C trois points non alignés. On a évidemment affaire à un triangle ayant pour côtés les segments AB, BC, CA. Nous disons qu'un point est INTÉRIEUR au triangle s'il est dans l'enveloppe convexe de $\{A, B, C\}$ et nous disons qu'il est strictement intérieur s'il est intérieur et n'appartient pas aux côtés.

Montrons comment on peut montrer dans ce contexte quelques propriétés bien connues :

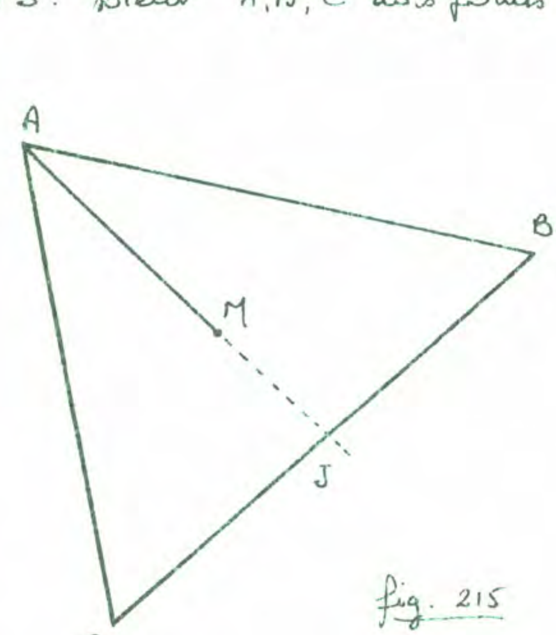


fig. 215

PROPOSITION 8 : si M est strictement intérieur à ABC alors les segments AM, BM, CM ne coupent pas les côtés opposés. Les droites AM, BM, CM coupent, quant à elles ces côtés opposés.

Démonstration : soit M le barycentre du système $(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)$ où α, β, γ sont > 0, soit I le barycentre du système $(B, \beta), (C, \gamma)$.

Comme M est aussi le barycentre de (A,α), $(I,(\beta+\gamma))$, M est sur le segment AJ. Il s'ensuit que la droite AM coupe le segment BC et que le segment AM ne contient pas J. CQFD.

PROPOSITION 9. Si P et Q sont des points distincts des sommets et situés respectivement sur les segments BC et CA, alors les droites AP et BQ se coupent en un point intérieur à ABC.

[cf. la remarque du § 12]

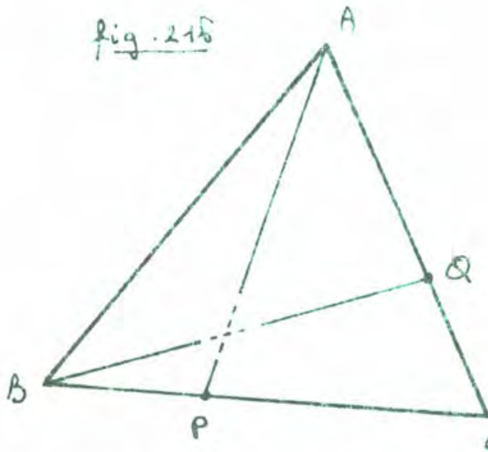


fig. 216

__Démonstration__: la droite AP coupe le segment BC, donc B et C sont dans deux demi-plans distincts par rapport à cette droite.
Comme le segment CQ ne coupe pas celle-ci, C et Q sont, au contraire dans un même demi-plan. Finalement B et Q ne peuvent être dans un même demi-plan par rapport à la droite AP, donc cette droite coupe le segment BQ.
On voit de même que BQ coupe le __segment__ AP, il est clair que le point d'intersection est intérieur.

265 - LE CAS DE QUATRE POINTS. Si A, B, C, D sont quatre points du plan qui ne sont pas alignés, on a deux cas possibles:

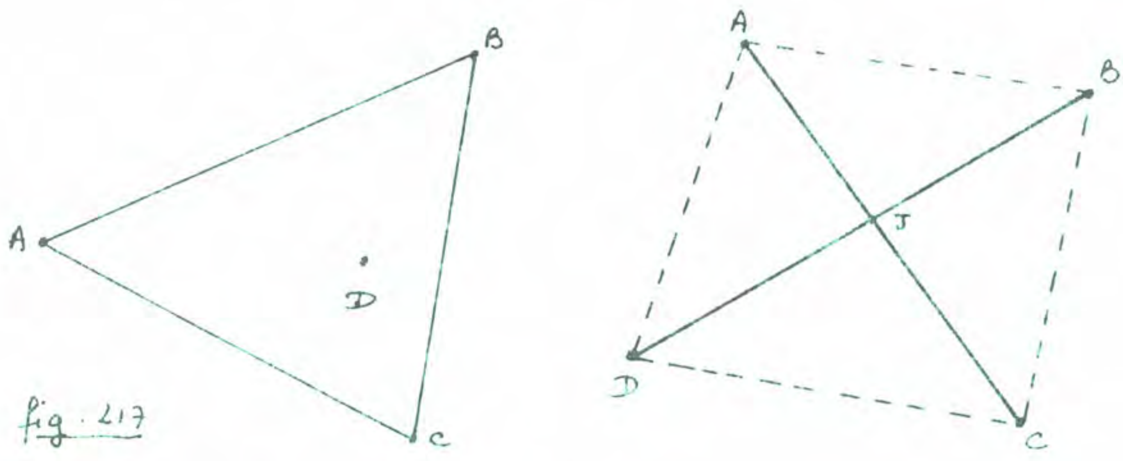


fig. 217

PROPOSITION 10: Étant donnés quatre points ABCD non alignés du plan :
1°) ou bien l'un de ces points est intérieur au triangle formé par les trois autres,
2°) ou bien on peut les grouper deux à deux de telle sorte que les segments (ouverts) correspondants se coupent en un point.

Démonstration : on peut supposer A,B,C non alignés, dès lors D peut s'écrire comme barycentre de ces points et on a, pour tout point O :

$$(R) \qquad \vec{OD} = \alpha\vec{OA} + \beta\vec{OB} + \gamma\vec{OC} \qquad (\alpha+\beta+\gamma=1)$$

soit

$$(R') \qquad \vec{OD} - \alpha\vec{OA} - \beta\vec{OB} - \gamma\vec{OC} = \vec{0}$$

Si α, β, γ sont $\geqslant 0$ ou $\leqslant 0$, on est dans le premier cas de l'énoncé. Sinon deux cas sont possibles.

a) l'un est < 0 (disons γ), alors que α, β sont $\geqslant 0$. La relation (R') peut alors s'écrire :

$$\vec{OD} - \gamma\vec{OC} = \alpha\vec{OA} + \beta\vec{OB},$$

ce qui montre que le barycentre de $(D,1),(C,-\gamma)$ est le même que celui de $(A,\alpha),(B,\beta)$...

b) l'un est >0, alors que les autres (disons α,β) sont <0. On écrit alors (R') sous la forme :

$$\vec{OD} - \alpha\vec{OA} - \beta\vec{OB} = \gamma\vec{OC},$$

qui fait apparaître C sous forme de barycentre de D, A, B à coefficients positifs ...

On notera enfin que les deux cas de l'énoncé s'excluent mutuellement grâce à la proposition 8.

268 - Notons tout de suite une conséquence importante de la proposition 10 :

THÉORÈME 1 : Soient $M_1, \dots, M_n$, des points du plan, alors tout point M de l'enveloppe convexe de $\{M_1, \dots, M_n\}$ peut s'écrire comme barycentre (affecté de coefficients positifs) de trois points correctement choisis parmi $M_1, \dots, M_n$.

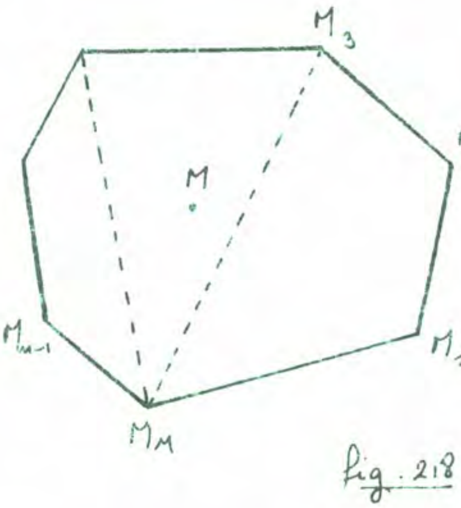


fig. 218

Démonstration : supposons la propriété vraie pour n points et considérons un $(n+1)^{\text{ième}}$ point M_{n+1}. Si G est barycentre de

$$(M_1,\alpha_1), \dots, (M_n,\alpha_n) ; (M_{n+1},\alpha_{n+1})$$

il est barycentre de

$$(I, \alpha_1 + \dots + \alpha_n) ; (M_{n+1}, \alpha_{n+1})$$

où I est le barycentre de

$$(M_1,\alpha_1), \dots, (M_n,\alpha_n).$$

Or par hypothèse de récurrence I peut être déterminé à partir de seulement trois des points $M_1, \dots, M_n$.

Finalement G est barycentre de quatre points et il reste à démontrer que, sous cette hypothèse, on peut se ramener à trois points. Ceci achèvera la démonstration en montrant le cas $n=4$ et l'argument de récurrence.

Cela dit, il est clair sur la figure 217 que le barycentre de quatre points ABCD affectés de coefficients positifs appartient en fait à au moins un des triangles déterminés par ces quatre points.

C'est donc ce que nous devons démontrer de façon correcte, dans le contexte où nous nous sommes placés.

267 - Nous commencerons par prouver un premier lemme :

LEMME 1 : l'intérieur d'un triangle ABC est <u>égal</u> à l'intersection des demi-plans déterminés par les trois droites contenant les côtés et choisis de telle sorte qu'il contiennent, chacun, le sommet opposé à ce côté.

<u>Démonstration</u> : chacun des demi-plans en question contenant les trois points A, B, C, il est clair que leur intersection contient A, B, C. Comme d'autre part cette intersection de convexes est convexe elle contient nécessairement l'enveloppe convexe de {A, B, C}, c'est-à-dire l'intérieur du triangle.

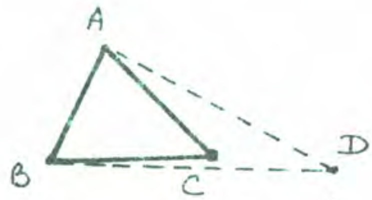


fig. 219

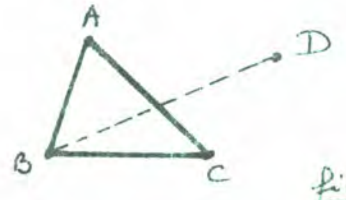


fig. 220

Montrons maintenant qu'un point D qui n'est pas intérieur au triangle n'est pas non plus dans l'intersection des trois demi-plans : d'après la proposition 10 il y a deux cas possibles qui sont schématisés par les fig. 219 et 220.

a) dans le premier cas un des sommets (C) de ABC est intérieur au triangle formé par D et les deux autres (B et A). Mais dans ce cas la proposition 8 montre que la droite AC coupe le segment BD, donc que D n'appartient pas au même demi-plan que A par rapport à AC...

b) dans le second cas un des côtés (AC) de ABC coupe le segment joignant D au troisième sommet. Ici encore la droite AC coupe le segment BD...

268 - La démonstration du théorème 1 sera achevée quand nous aurons prouvé le :

LEMME 2 : Dans le deuxième cas de la figure 217, l'enveloppe convexe de {A, B, C, D} n'est autre que la réunion des intérieurs des triangles ABC et ACD.

Elle est aussi égale à l'intersection des demi-plans (fermés) déterminés par les quatre droites AB, BC, CD et DA, choisis de telle sorte qu'ils contiennent, chacun, les sommets opposés aux "côtés" correspondants.

Démonstration : Comme la droite AD ne coupe pas les segments BJ et JC, B, J et C sont dans un même demi-plan vis-à-vis de cette droite. On vérifie de même les assertions suivantes :
- le demi-plan P_{AD} contenant J, contient A, B, C et D,
- le demi-plan P_{AB} contenant J, contient A, B, C et D,
- le demi-plan P_{BC} contenant J, contient A, B, C et D,
- le demi-plan P_{CD} contenant J, contient A, B, C et D.

L'intersection de ces quatre demi-plans contient donc l'enveloppe convexe de $\{A, B, C, D\}$.

Montrons que si un point M n'est pas dans l'enveloppe convexe, alors il n'est pas dans cette intersection.

Le point M est forcément dans l'un des demi-plans qui sont déterminés par AC. Supposons que ce soit celui qui contient B. Mais alors M ne peut être dans l'intérieur du triangle ABC car il appartiendrait à l'enveloppe convexe. Dès lors, d'après le lemme 1, M n'est pas dans l'un des demi-plan P_{AB} ou P_{BC}... Cela montre que l'enveloppe de $\{A, B, C, D\}$ est bien égale à l'intersection :

$$P_{AD} \cap P_{AB} \cap P_{BC} \cap P_{CD}.$$

Il nous reste donc à voir qu'un point de cette intersection est forcément à l'intérieur de ABC ou de ACD. Mais tout point du plan étant dans un (au moins) des demi-plans déterminés par AC, on peut supposer qu'il s'agit du demi-plan P^1_{AC} qui contient B. Dès lors le point appartient à

$$P'_{AC} \cap P_{BC} \cap P_{CD},$$

donc à l'intérieur de ABC.

Exercice 216 : Montrer qu'avec les hypothèses de la figure 215, le point B n'est pas à l'intérieur de AMC.

Exercice 217 : Montrer que si deux points P et Q sont intérieurs à un triangle ABC, les droites AP, BQ se coupent à l'intérieur du triangle.

Exercice 218 : Dans le deuxième cas de la figure 217, on dit que ABCD est un quadrilatère convexe de côtés AB, BC, CD, DA.
Montrer que si une droite ne passant pas par les sommets coupe un côté, alors elle en coupe nécessairement un autre.

Exercice 219 : Montrer qu'un parallélogramme non aplati définit un quadrilatère convexe.

269 - Nous pouvons généraliser les lemmes 1 et 2 aux polygones convexes quelconques. Pour cela nous considérons maintenant l'enveloppe convexe d'un ensemble de n points $\{M_1, \dots, M_n\}$

Le premier phénomène à envisager est l'analogue de celui qui est schématisé (dans le cas de 4 points) sur la figure 217.

Il se peut en effet que les n points donnés ne soient pas nécessaires pour définir l'enveloppe convexe parce que certains sont déjà barycentres à coefficients ≥ 0 des autres.

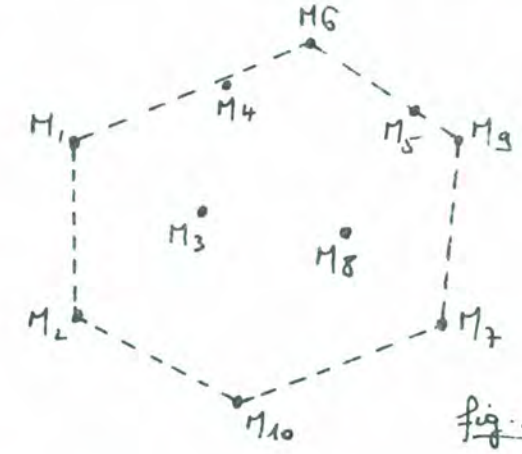


fig. 221

DÉFINITION 3 : étant donné un ensemble $\{M_1, \dots, M_n\}$, on appelle POINTS EXTRÉMAUX ceux de ces points qui ne sont pas susceptibles d'être écrits comme barycentres à coefficients positifs des autres.

L'enveloppe convexe de $\{M_1, \dots, M_n\}$ est égale à celle de la partie formée des points extrémaux.

Cela posé, nous pouvons énoncer la :

DÉFINITION 4 : on appelle POLYGONE CONVEXE à n sommets, l'enveloppe convexe d'une partie $\{M_1, \dots, M_n\}$ du plan dans laquelle les n points sont extrémaux.

270 - Nous avons en vue le :

THÉORÈME 2 : les sommets d'un polygone convexe peuvent être rangés dans un ordre :

$$(M_1, M_2, \dots, M_n)$$

tel que le polygone soit égal à l'intersection des n demi-plans (fermés) déterminés par les droites

$$M_1M_2,\ M_2M_3, \dots, M_{n-1}M_n,\ M_nM_1$$

et choisis de façon à ce que chaque demi-plan contienne les $n-2$ autres sommets.

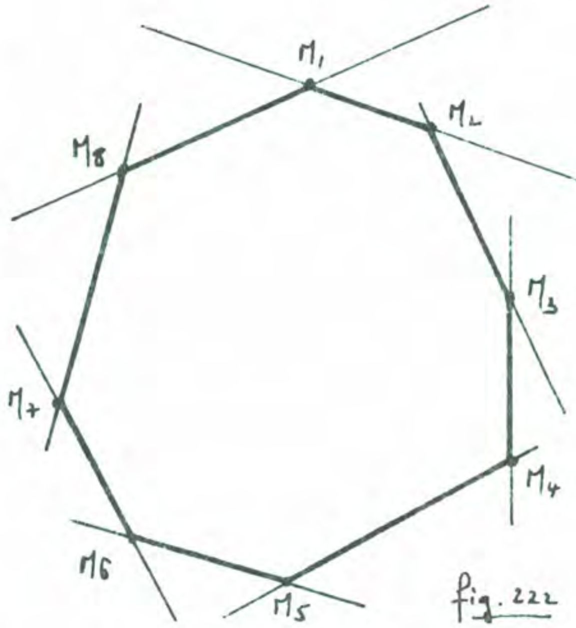


fig. 222

Nous allons démontrer cet énoncé par récurrence sur n.

Démonstration : nous avons déjà prouvé les cas où $n = 3$ et 4. Supposons donc prouvé le cas des polygones à n sommets et considérons un ensemble $\{M_1, M_2, \dots, M_{n+1}\}$ où tout point soit extrémal.

Avec cette hypothèse, les n premiers points forment les sommets d'un polygone à n côtés et n sommets. Nous les supposerons donc rangés dans l'ordre

$$\{M_1, M_2, \dots, M_n\}$$

tel que l'enveloppe convexe soit l'intersection des n demi-plans déterminés par

$$M_1M_2,\ M_2M_3,\ \dots,\ M_{n-1}M_n,\ M_nM_1.$$

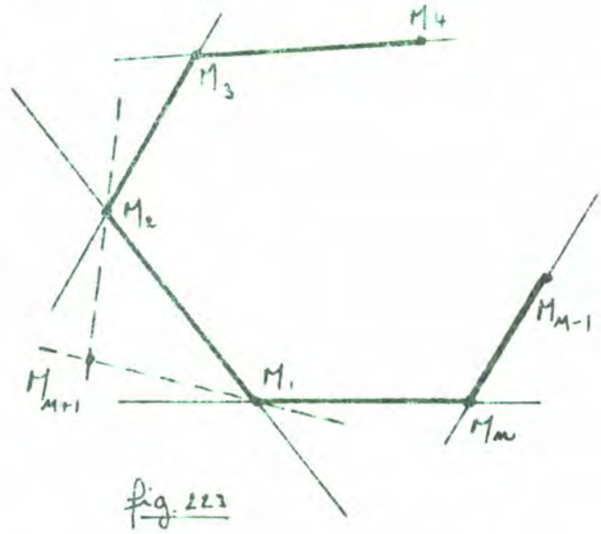


fig. 223

Par ailleurs M_{n+1} n'est pas dans le polygone précédent (puisqu'il est extrémal), donc il existe un des demi-plans qui ne le contient pas.

Nous supposerons, pour fixer les notations, qu'il s'agit du demi-plan construit sur M_1M_2. On peut donc dire que M_{n+1} est situé de l'autre côté de cette droite par rapport à $M_3, M_4, \dots, M_n$.

1°) Tous les points $\{M_1, M_2, \dots, M_n, M_{n+1}\}$ sont d'un même côté de la droite M_1M_{n+1}.

En effet : si un des sommets M_i était de l'autre côté que celui de M_2, alors le segment M_2M_i couperait la droite M_1M_{n+1} en un point J. Or si J était hors du segment M_1M_{n+1}, un de ces deux points ne serait pas extrémal, ce qui serait contraire à l'hypothèse, et si J était sur le segment M_1M_{n+1}, alors M_i et M_{n+1} seraient du même côté de M_1M_2, ce qui amène aussi à une contradiction.

2°) de même, tous les points sont d'un même côté de M_2M_{n+1}. Montrons que M_{n+1} est du même côté que tous les autres sommets par rapport aux côtés $M_2M_3, M_3M_4, \dots, M_nM_1$.

Pour cela, il suffit de voir qu'aucune de ces droites ne sépare M_{n+1} de M_2 (ou de M_1), c'est-à-dire que le segment M_2M_{n+1} n'est pas coupé par une droite M_iM_{i+1} pour $i = 3, \dots, n$.

Or si une telle droite coupait M_2M_{n+1} en un point K, comme M_i et M_{i+1} sont du même côté de M_2M_{n+1}, un des deux points M_i ou M_{i+1} serait entre K et l'autre, c'est-à-dire que soit M_i, soit M_{i+1} s'exprimerait comme barycentre de M_2, M_{n+1} et d'un autre sommet. Ceci prouverait qu'un des points n'est pas extrémal.

3°) On voit finalement que le polygone est contenu dans l'intersection des demi-plans déterminés par les $(n+1)$ droites :

$$M_{n+1}M_2,\ M_2M_3,\ \dots,\ M_{n-1}M_n,\ M_nM_1,\ M_1M_{n+1}$$

La démonstration s'achève alors comme celle du lemme 2...

EXERCICES

220 - On considère quatre parties convexes $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ du plan et on suppose que, chaque fois que l'on choisit trois d'entre elles, leur intersection est non vide.

On choisit dans les quatre intersections possibles de ces parties prises trois à trois un point noté de la façon suivante :

$$A \in \mathcal{B} \cap \mathcal{C} \cap \mathcal{D}, \quad B \in \mathcal{A} \cap \mathcal{C} \cap \mathcal{D}, \quad C \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{D}, \quad D \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{C}.$$

Montrer que si l'on est dans le premier cas de la figure 217, alors le point D appartient à $\mathcal{D}$.
Montrer que si l'on est dans le deuxième cas de la figure 217, alors le point J appartient à chacune des quatre parties.

Déduire de ce qui précède que $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{C} \cap \mathcal{D}$ est non vide.

221 - Montrer le théorème suivant :

"si $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n$ sont des parties convexes du plan telles que l'intersection de trois quelconques d'entre elles soit non vide, alors l'intersection de ces n parties est non vide"

[utiliser l'exercice précédent et raisonner par récurrence en remplaçant $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ par $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$]

222 - Montrer le théorème suivant :

"si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont des points du plan tels que la distance entre deux quelconques d'entre eux est toujours inférieure ou égale à 1, alors on peut trouver un cercle de rayon $1/\sqrt{3}$ qui les contient tous".

[poser $\mathcal{A}_1 = \mathcal{C}(A_1, 1/\sqrt{3})$, $\mathcal{A}_2 = \mathcal{C}(A_2, 1/\sqrt{3})$, etc.]