12/ Démonstration. 1°)

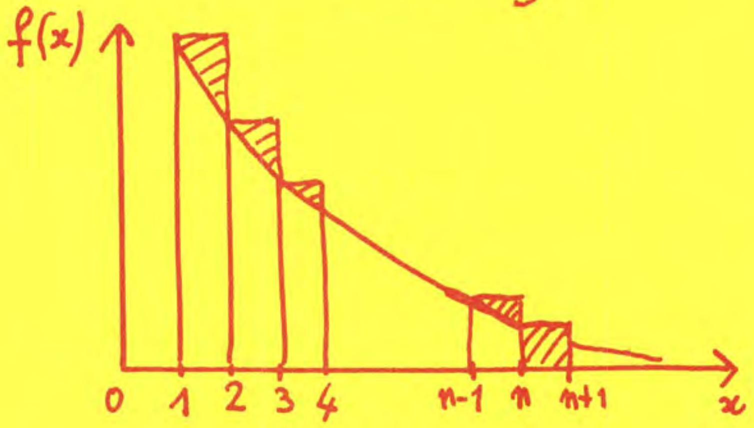


figure 3

UNIVERSITÉ
DE NANCY I

CENTRE
DE TÉLÉ-ENSEIGNEMENT
UNIVERSITAIRE
DE NANCY II

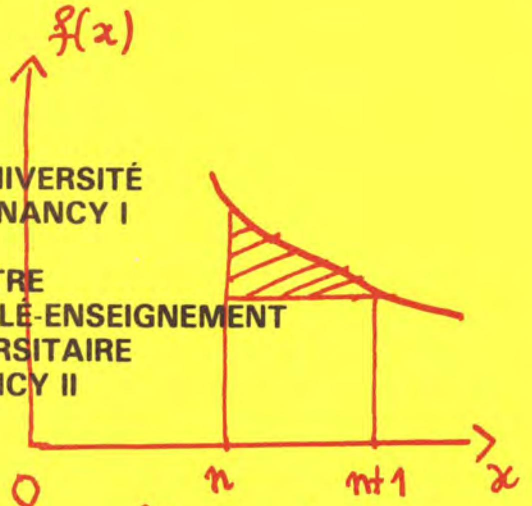


figure 4

Posons $u_n = f(1)+f(2)+\dots+f(n) - \int_1^n f(x)\,dx$. Pour tout n, le nombre u_n est ≥ 0, car il vaut l'aire hachurée figure 3, et le nombre

$$u_n - u_{n+1} = \int_n^{n+1} f(x)\,dx - f(n+1)$$

est ≥ 0, car il vaut l'aire hachurée figure 4. Donc la suite (u_n) est décroissante et minorée, par conséquent elle a une limite finie L, d'ailleurs ≥ 0.

analyse

2°) est évident, vu 1°).

3°).

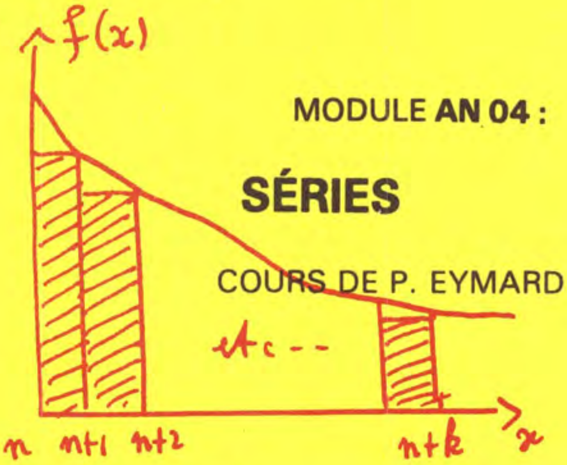


figure 5

MODULE **AN 04** :

SÉRIES

COURS DE P. EYMARD

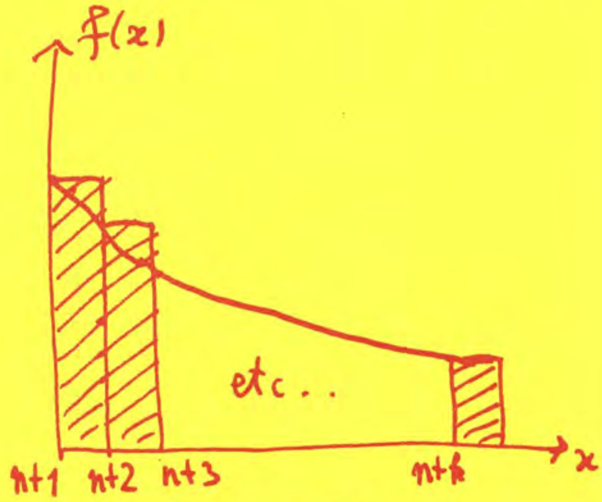


figure 6

Quels que soient les entiers $n \geq 1$ et $k \geq 1$, on a les inégalités :

$$\int_{n+1}^{n+k} f(x)\,dx \leq f(n+1)+f(n+2)+\dots+f(n+k) \leq \int_n^{n+k} f(x)\,dx,$$

comme on le voit clairement sur les figures 5 et 6. Si, à n fixé, on fait tendre k vers $+\infty$, on obtient l'encadrement du 3°).

DIPLÔME D'ÉTUDES UNIVERSITAIRES GÉNÉRALES
SCIENCES DES STRUCTURES ET DE LA MATIÈRE
MATHÉMATIQUES PHYSIQUE INFORMATIQUE
SCIENCES DE L'ÉDUCATION

Édité et imprimé par l'Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques - (Université de Nancy I - Faculté des Sciences) -
B.P. 239 - 54506 VANDOEUVRE-les-NANCY CEDEX
Dépôt légal : 4e trimestre 1987
n° de la publication : 2-85406-104-7

Le Responsable de la collection : Philippe LOMBARD

Réf. N 503

M.P.I.S.E

Module AN 04

SÉRIES

Ceci est un premier jet. On est prié de signaler toute erreur à l'auteur : Pierre EYMARD, Professeur de Mathématiques, Université de NANCY I, BP 239, 54506 VANDOEUVRE.

Séries numériques. I

Il faut déjà être quelque peu mathématicien pour trouver naturel qu'en additionnant une infinité de nombres on puisse obtenir un résultat fini.

Exemple 1. Soit à donner un sens au point d'interrogation dans :

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots\cdots = \ ?$$

Formons les sommes partielles successives :

$$\begin{aligned}
s_0 &= 1 && = 1{,}0000 \\
s_1 &= 1 + \tfrac{1}{2} && = 1{,}5000 \\
s_2 &= 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} && = 1{,}7500 \\
s_3 &= 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} && = 1{,}8750 \\
s_4 &= 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} && = 1{,}9375 \\
s_n &= 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \cdots\cdots + \tfrac{1}{2^n} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} && = 2 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^n
\end{aligned}$$

On a condensé l'expression de s_n par la formule de la progression géométrique (cf. AN 01, Leçon n°1, § II). Quand n tend vers $+\infty$ la suite (s_n) des sommes partielles tend vers le nombre $s = 2$. Il est donc tout à fait naturel de poser :

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots\cdots = 2 \, ;$$

ce résultat remonte au moins à Archimède.

On sent bien que, si la somme de cette infinité de termes est finie, c'est parce que le terme général $\frac{1}{2^n}$ de l'addition tend vers zéro suffisamment vite quand $n \to +\infty$.

Exemple 2. Il n'en va pas de même pour la somme infinie :

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots\cdots + \frac{1}{n} + \cdots\cdots$$

Cette fois on ne peut pas condenser en une formule simple la somme partielle d'ordre n :

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots\cdots + \frac{1}{n} .$$

Mais il est facile de voir que

$$\lim_{n \to +\infty} s_n = +\infty .$$

En effet, sur la figure 1, s_n est la somme des aires hachurées des rectangles ; c'est une somme de Riemann supérieure pour l'intégrale $\int_1^{n+1} \frac{dx}{x}$ (cf. AN02, Leçon n°3). Donc $s_n \geq \int_1^{n+1} \frac{dx}{x} = \mathrm{Log}(n+1)$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

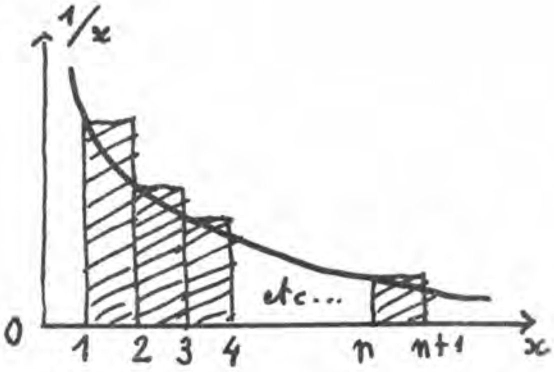


figure 1

Ainsi la somme infinie

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots\cdots + \frac{1}{n} + \cdots\cdots$$

n'a pas de sens ; elle diverge (vers $+\infty$) ; et pourtant son terme général $\frac{1}{n}$ tend vers 0.

<u>Exemple</u> 3. Considérons maintenant la somme infinie :

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots\cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots\cdots ,$$

dont le terme général $\frac{1}{n^2}$ tend vers zéro un peu plus vite que celui, $\frac{1}{n}$, de l'Exemple 2. Si

$$s_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots\cdots + \frac{1}{n^2}$$

est sa somme partielle d'ordre n, on voit sur la figure 2 que :

$$s_n - 1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq \int_1^n \frac{dx}{x^2} .$$

Or $\int_1^n \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x} \right]_{x=1}^{x=n} = 1 - \frac{1}{n}$.

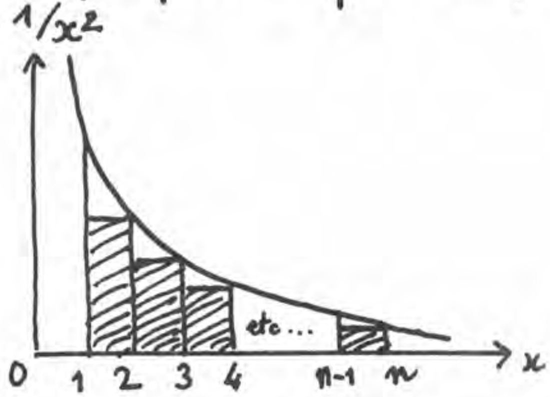


figure 2

Donc, pour tout n, on a : $s_n \leq 2 - \frac{1}{n} \leq 2$. Ainsi la suite (s_n), qui est évidemment croissante, est majorée par le nombre 2. Par conséquent elle a une limite finie s ; on peut donc attribuer un sens à la somme infinie :

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\dots+\frac{1}{n^2}+\dots = s.$$

Nous verrons plus tard que $s=\frac{\pi^2}{6}$, une découverte d'Euler(*).

<u>Exemple</u> 4. On peut aussi essayer d'additionner une infinité de nombres qui ne sont pas tous positifs ; considérons par exemple la somme infinie :

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\dots\dots$$

Ici la somme partielle d'ordre n est

$$s_n = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}.$$

En AN01, Leçon n° 8, Proposition 5, on a vu, comme application de la formule de Taylor, que $\lim_{n\to+\infty} s_n = \mathrm{Log}\,2$. On peut donc écrire la formule, déjà connue de Leibniz :

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots\dots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\dots\dots = \mathrm{Log}\,2.$$

<u>Remarque</u>. Dans l'Exemple 4, le terme général $(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ ne tend pas plus vite vers 0 que celui de l'Exemple 2. Les changements de signe ont introduit dans le calcul des compensations qui ont suffi à assurer la convergence dans l'Exemple 4, contrairement à la divergence dans l'Exemple 2.

<u>Exemple</u> 5. La somme infinie :

$$1-1+1-1+1-1+\dots\dots+(-1)^n+\dots\dots$$

n'a pas de sens, car les sommes partielles s_n sont alternativement égales à 1 ou à 0, donc n'ont pas de limite quand $n\to+\infty$.

Armés de ces exemples, nous pouvons commencer la théorie des séries numériques, c'est-à-dire des sommes (infinies) de suites de nombres.

<u>Définitions</u>. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels, ou même complexes. Les nombres $s_0=u_0$, $s_1=u_0+u_1$, $s_2=u_0+u_1+u_2$, ...,

$$s_n = u_0+u_1+u_2+\dots\dots+u_n, \quad \text{etc}\dots$$

(*) Leonhard EULER (1707-1783), l'un des plus grands mathématiciens de tous les temps, et certainement celui qui a le plus contribué au sujet du présent Fascicule.

s'appellent <u>sommes partielles</u> de la suite (u_n). Si la suite (s_n) a une limite <u>finie</u> s quand n tend vers $+\infty$, on dit que <u>la série de terme général</u> u_n (ou encore la série $\sum_{n\geq 0} u_n$, ou encore la série $u_0+u_1+\cdots\cdots+u_n+\cdots\cdots$) <u>converge</u>, et a pour <u>somme</u> s; dans ce cas on écrit $\sum_{n\geq 0} u_n = s$ (ou encore: $u_0+u_1+\cdots+u_n+\cdots = s$). Sinon on dit que la série <u>diverge</u> (soit que les s_n tendent vers l'infini, soit qu'ils n'aient pas de limite du tout).

Les séries des Exemples 1, 3 et 4 convergent; celles des Exemples 2 et 5 divergent.

Si la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente, de somme s, le nombre

$$R_n = s - s_n = u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots\cdots+u_{n+k}+\cdots\cdots = \sum_{p>n} u_p$$

s'appelle le <u>reste</u> d'ordre n de la série. C'est <u>l'erreur</u> (dite <u>de troncature</u>) qu'on commet en remplaçant la somme s (exacte, mais en général inconnue) de la série par la somme partielle s_n d'ordre n (qui, elle, est calculable par un nombre fini d'additions). Cette erreur, ce reste R_n, tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Voici maintenant une <u>condition nécessaire</u> (nullement suffisante) <u>de convergence</u> : c'est que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. En effet, si la suite (s_n) a une limite finie s, alors la suite $u_n = s_n - s_{n-1}$ tend vers $s - s = 0$. Pragmatiquement nous retiendrons ce fait sous la forme suivante :

<u>Proposition</u> 1. Si, quand $n\to+\infty$, la suite (u_n) ne tend pas vers zéro, alors la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge.

L'Exemple 2 montre bien que la réciproque n'est pas vraie.

En généralisant l'Exemple 1, nous obtenons une première classe fondamentale de séries, les <u>séries géométriques</u>. Soit a un nombre complexe donné. La série (dite géométrique, de <u>raison</u> a) :

$$1+a+a^2+\cdots\cdots+a^n+\cdots\cdots$$

diverge si $|a| \geq 1$; converge si $|a| < 1$ et, dans ce cas, a pour somme le nombre $\frac{1}{1-a}$, et pour reste $\sum_{p>n} a^p = \frac{a^{n+1}}{1-a}$.

En effet, si $|a| \geq 1$, alors pour tout n on a : $|a|^n \geq 1$, donc le terme général a^n ne tend pas vers 0, et la série diverge d'après la Proposition 1. Si $|a| < 1$, d'après la formule de la progression géométrique :

$$s_n = 1 + a + a^2 + \cdots + a^n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} = \frac{1}{1-a} - \frac{a^{n+1}}{1-a}$$

tend vers $\frac{1}{1-a}$, car a^{n+1} tend vers 0. De plus $R_n = \frac{1}{1-a} - s_n = \frac{a^{n+1}}{1-a}$.

Voici quelques remarques très simples qui facilitent l'étude des séries.

1°) Les séries $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq n_0} u_n$ sont de même nature, c'est-à-dire toutes deux convergentes ou toutes deux divergentes ; autrement dit, on ne modifie pas la nature d'une série en l'amputant d'un nombre fini de termes.

2°) (linéarité) Si $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente, de somme s, si $\sum_{n\geq 0} v_n$ est convergente, de somme t, et si λ est un nombre complexe, alors la série $\sum_{n\geq 0} (u_n + v_n)$ est convergente, de somme $s+t$, et la série $\sum_{n\geq 0} (\lambda u_n)$ est convergente, de somme λs. En revanche, prenez garde que la somme de deux séries divergentes peut fort bien être convergente (exemple : $u_n = \frac{1}{n}$, $v_n = -\frac{1}{n}$, $u_n + v_n = 0$).

3°) (séries à termes complexes). Si $u_n = x_n + i y_n$, avec $x_n \in \mathbb{R}$, $y_n \in \mathbb{R}$, et $i = \sqrt{-1}$, alors la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge si et seulement si les deux séries $\sum_{n\geq 0} x_n$ et $\sum_{n\geq 0} y_n$ convergent ; et, dans ce cas, les sommes s, x, y de ces trois séries vérifient : $s = x + iy$.

Exercice 1. Soient θ et r deux nombres réels donnés tels que $0 \leq r < 1$. Démontrez que :

$$1 + 2\sum_{n\geq 1} r^n \cos(n\theta) = \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\theta}.$$

Pour cela on introduira le nombre complexe $\alpha = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ et on remarquera que, grâce à la formule de de Moivre (cf. AN01, Leçon n° 4, § VI), la série du premier membre est la partie réelle d'une série de type géométrique.

Comparaison de deux séries à termes positifs

Si, pour tout n, u_n est un nombre réel ≥ 0, la suite (s_n) est croissante. On a vu en AN01, Leçon n° 2, § IV, qu'on a l'alternative :

— ou bien (s_n) est majorée, et alors elle a une limite finie s qui n'est autre que sa borne supérieure $\sup_n s_n$.

— ou bien (s_n) n'est pas majorée, et alors $\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty$. Donc :

<u>Proposition</u> 2. Si une série $\sum_{n\geq 0} u_n$ a tous ses termes réels ≥ 0, elle converge si et seulement si la suite (s_n) est majorée ; dans ce cas $\sum_{n\geq 0} u_n = \sup_n s_n$. Elle diverge si et seulement si $\lim_{n\to+\infty} s_n = +\infty$.

Retenons qu'une série à termes positifs ne peut diverger que d'une façon très particulière (vers $+\infty$, comme dans l'Exemple 2).

<u>Proposition</u> 3. Supposons que, pour tout n, on ait $0 \leq u_n \leq v_n$.
Alors : 1°) Si $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge, il en est de même pour $\sum_{n\geq 0} v_n$.

2°) Si $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge et a pour somme t, alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ aussi converge, sa somme s est $\leq t$, et son reste d'ordre n est $\leq$ à celui de $\sum_{n\geq 0} v_n$.

La démonstration résulte immédiatement des inégalités $0 \leq s_n \leq t_n$. Car l'hypothèse du 1°) implique que (s_n) tend vers $+\infty$, donc a fortiori (t_n) tend vers $+\infty$; et l'hypothèse du 2°) implique que les s_n sont majorés par t. De la Proposition 3 on déduit aussitôt le

<u>Lemme</u>. Supposons qu'il existe deux constantes $A > 0$ et $B > 0$ telles que, pour tout n, on ait : $0 \leq A v_n \leq u_n \leq B v_n$. Alors les séries $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ sont de même nature.

<u>Théorème 1</u>. Soient deux suites (u_n) et (v_n) de nombres réels <u>positifs</u>. Supposons que $u_n \sim v_n$ quand $n \to +\infty$, ce qui, rappelons-le, signifie que $u_n = v_n w_n$, avec $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 1$. Alors les séries $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ sont de même nature.

En effet, il existe n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, on ait

$$\frac{1}{2} \leq w_n \leq \frac{3}{2},$$

donc
$$\frac{1}{2} v_n \leq u_n \leq \frac{3}{2} v_n .$$

On applique le Lemme avec $A = \frac{1}{2}$ et $B = \frac{3}{2}$. Les séries $\sum\limits_{n\geq n_0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geq n_0} v_n$ sont de même nature, donc aussi les séries $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$.

<u>Exemple</u>. La série $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{2^n+1}{3^n+1}$ converge, car elle est de même nature que la série géométrique $\sum\limits_{n\geq 0} \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

<u>Exercice 2</u>. En appliquant le Théorème 1, étudiez la nature des séries $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{3n+2}{4n^2+1}$ et $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{3n+2}{4n^3+1}$.

<u>Exercice 3</u>. Soit la série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n(n+1)}$. Montrez sans calculs qu'elle converge. En remarquant que $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$, calculez sa somme.

<u>Exercice 4</u>. Soit $s = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{2^n+1}{3^n+1}$. Montrez qu'en calculant la somme des 16 premiers termes de la série, on obtient une valeur approchée de s par défaut avec une erreur inférieure à 0,01.

<u>Comparaison d'une série et d'une intégrale</u>

Dans les Exemples 2 et 3, pour étudier les séries $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n}$ et $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^2}$, nous avons considéré leurs sommes partielles comme des sommes de Riemann associées aux intégrales des fonctions $\dfrac{1}{x}$ et $\dfrac{1}{x^2}$. Cette idée peut être généralisée.

10/ Soit a un nombre réel, et soit $x \mapsto f(x)$ une fonction définie, continue et <u>positive</u>(*) pour $a \leq x < +\infty$. Alors, pour n entier $\geq a$, la suite $n \mapsto \int_a^n f(x)dx$ est évidemment croissante ; elle a donc une limite, finie ou infinie, quand $n \to +\infty$.

<u>Définition</u>. On dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ <u>a un sens</u>, ou est <u>convergente</u>, si $\lim_{n\to+\infty} \int_a^n f(x)dx$ est finie. Dans ce cas on pose

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^n f(x)dx.$$

En AN03, Leçon n° 9, Exemple 3, nous avons déjà rencontré un exemple de cette notion, à savoir la formule $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

On vérifie facilement les propriétés de <u>comparaison</u> suivantes. Soient f et g deux fonctions continues <u>positives</u> sur $[a, +\infty[$. 1°) Supposons que, pour tout x, on ait $f(x) \leqslant g(x)$. Alors, si $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ est divergente, $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ est aussi divergente. Mais, si $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ est convergente, alors $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ est aussi convergente. 2°) Si $f(x)$ est équivalent à $g(x)$ quand $x \to +\infty$ (cf. AN01 ; Leçon n°10), alors les intégrales $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ et $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ sont de même nature.

<u>Exemples</u> 1) Soit α un nombre réel. L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.

En effet la primitive de $x^{-\alpha}$ est $\operatorname{Log} x$ si $\alpha = 1$, et $\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}$ si $\alpha \neq 1$. Donc :

$$\int_1^n \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \operatorname{Log} n \text{ qui tend vers } +\infty, \text{ si } \alpha = 1 ; \\ \dfrac{1}{1-\alpha}\left(\dfrac{1}{n^{\alpha-1}} - 1\right) \text{ si } \alpha \neq 1, \text{ qui a une limite finie si et seulement si } \alpha > 1 \end{cases}$$

(*) Nous étudierons systématiquement à la Leçon n°   les intégrales généralisées des fonctions de signe quelconque.

Par conséquent si, pour une fonction f continue sur $[1, +\infty[$, il existe des constantes réelles $\alpha > 1$ et C telles que, pour tout $x \geq 1$, on ait $0 \leq f(x) \leq \frac{C}{x^\alpha}$, alors l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.

2°) Soit β un nombre réel. L'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\,[(\log x)^\beta]}$ est convergente si et seulement si $\beta > 1$.

En effet la primitive de $\frac{1}{x}(\mathrm{Log}\,x)^{-\beta}$ est $\mathrm{Log}(\mathrm{Log}\,x)$ si $\beta = 1$, et $\frac{(\mathrm{Log}\,x)^{1-\beta}}{1-\beta}$ si $\beta \neq 1$. Donc :

$$\int_2^n \frac{dx}{x\,[(\mathrm{Log}\,x)^\beta]} = \begin{cases} \mathrm{Log}(\mathrm{Log}\,n) - \mathrm{Log}(\mathrm{Log}\,2) \text{ qui tend vers } +\infty, \text{ si } \beta = 1\,; \\ \frac{1}{1-\beta}\left[\frac{1}{(\mathrm{Log}\,n)^{\beta-1}} - \frac{1}{(\mathrm{Log}\,2)^{\beta-1}}\right] \text{ si } \beta \neq 1, \text{ qui a} \\ \text{une limite finie si et seulement si } \beta > 1. \end{cases}$$

Exercice 5. Selon le nombre réel α, discutez la convergence de l'intégrale $\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x\,\mathrm{Log}\,x\,\{[\mathrm{Log}(\mathrm{Log}\,x)]^\alpha\}}$.

Exercice 6. Montrez que les intégrales suivantes sont convergentes, et indiquez leurs valeurs :

1°) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1}$; 2°) $\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$; 3°) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{2+\mathrm{ch}\,x}$.

Théorème 2. Soit $x \mapsto f(x)$ une fonction continue, positive et décroissante pour $1 \leq x < +\infty$. Alors :

1°) La suite $n \mapsto f(1) + f(2) + \cdots + f(n) - \int_1^n f(x)\,dx$ a une limite finie.

2°) La série $\sum_{n \geq 1} f(n)$ converge si et seulement si l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.

3°) Si c'est le cas, on a, pour le reste $R_n = \sum_{p>n} f(p)$ de la série, l'encadrement : $\int_{n+1}^{+\infty} f(x)\,dx \leq R_n \leq \int_n^{+\infty} f(x)\,dx$.

Démonstration. 1°)

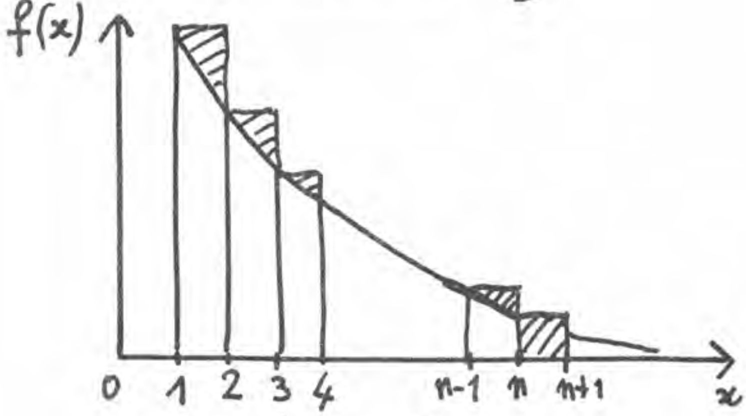


figure 3

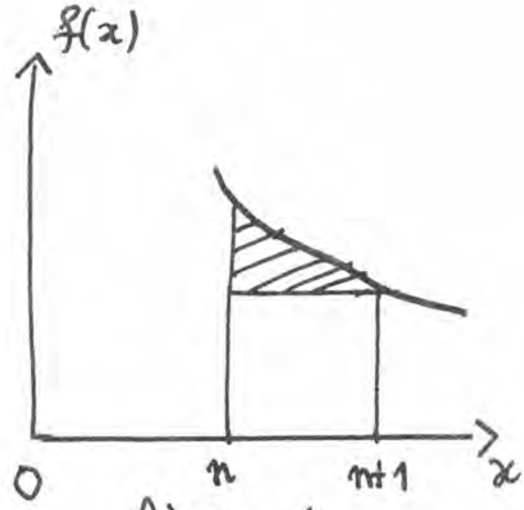


figure 4

Posons $u_n = f(1)+f(2)+\dots+f(n) - \int_1^n f(x)\,dx$. Pour tout n, le nombre u_n est ≥ 0, car il vaut l'aire hachurée figure 3, et le nombre

$$u_n - u_{n+1} = \int_n^{n+1} f(x)\,dx - f(n+1)$$

est ≥ 0, car il vaut l'aire hachurée figure 4. Donc la suite (u_n) est décroissante et minorée ; par conséquent elle a une limite finie L, d'ailleurs ≥ 0.

2°) est évident, vu 1°).

3°).

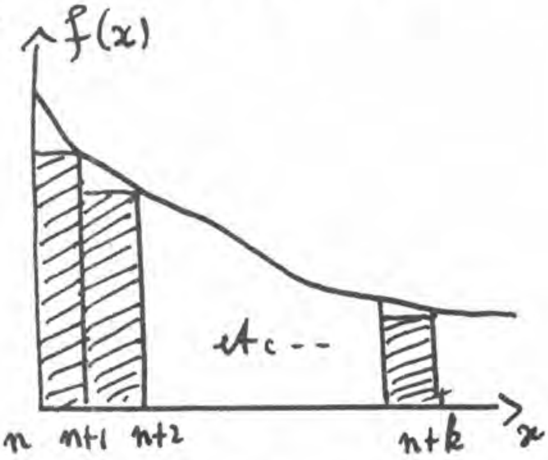


figure 5

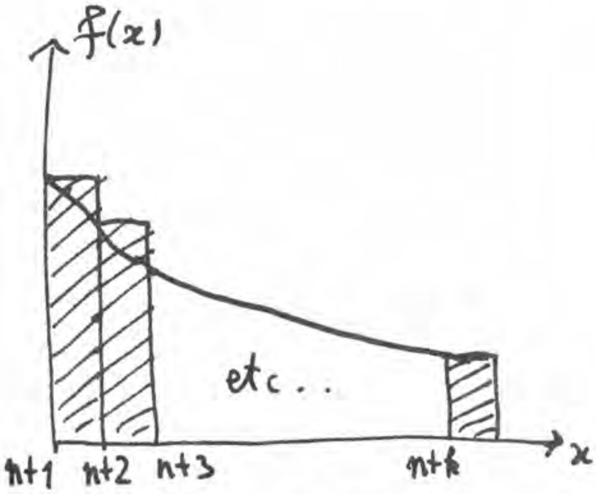


figure 6

Quels que soient les entiers $n \geq 1$ et $k \geq 1$, on a les inégalités :

$$\int_{n+1}^{n+k} f(x)\,dx \leq f(n+1)+f(n+2)+\dots+f(n+k) \leq \int_n^{n+k} f(x)\,dx ,$$

comme on le voit clairement sur les figures 5 et 6. Si, à n fixé, on fait tendre k vers $+\infty$, on obtient l'encadrement du 3°).

Du théorème 2, on déduit une deuxième classe fondamentale de séries, les <u>séries de Riemann</u> :

<u>Corollaire</u> 1. Soit α un nombre réel. La série
$$1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\cdots+\frac{1}{n^\alpha}+\cdots\cdots$$
converge si et seulement si $\alpha>1$.

Pour $\alpha=1$, on retrouve l'exemple 2 ; pour $\alpha=2$, on retrouve l'exemple 3. La série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n\sqrt{n}}$ converge ; la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge.

<u>Exercice</u> 7. Calculez $1+\frac{1}{2^7}+\frac{1}{3^7}+\cdots+\frac{1}{n^7}+\cdots = s$ avec une erreur moindre que 10^{-3}.

De l'étude faite plus haut de $\int_2^\infty \frac{dx}{x(\mathrm{Log}\,x)^\beta}$, on déduit le

<u>Corollaire</u> 2. Soit β un nombre réel. La série
$$\frac{1}{2[(\mathrm{Log}\,2)^\beta]}+\frac{1}{3[(\mathrm{Log}\,3)^\beta]}+\cdots+\frac{1}{n[(\mathrm{Log}\,n)^\beta]}+\cdots$$
converge si et seulement si $\beta>1$.

Par exemple $\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n\,\mathrm{Log}\,n}$ diverge, mais $\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n[(\mathrm{Log}\,n)^{1+\varepsilon}]}$ converge aussi petit que soit $\varepsilon>0$.

Du 1°) du Théorème 2 on déduit par exemple qu'il existe une constante C telle que :
$$(1)\qquad \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\mathrm{Log}\,n\right)=C\,.$$
C s'appelle la <u>constante d'Euler</u>. Elle vaut approximativement :
$$C=0{,}5772\ldots$$
Le problème de savoir si cette célèbre constante est un nombre rationnel ou irrationnel est toujours ouvert.

De (1) on déduit en particulier que $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\sim \mathrm{Log}\,n$ quand $n\to+\infty$. Plus généralement, si f est une fonction positive continue décroissante pour $1\leq x<+\infty$, et si la série $\sum_{n\geq 1} f(n)$ diverge, alors :
$$f(1)+f(2)+\cdots+f(n)\sim\int_1^n f(x)\,dx$$
quand $n\to+\infty$. Par exemple :
$$\frac{1}{2\,\mathrm{Log}\,2}+\frac{1}{3\,\mathrm{Log}\,3}+\cdots+\frac{1}{n\,\mathrm{Log}\,n}\sim\mathrm{Log}(\mathrm{Log}\,n).$$

<u>Remarque</u>. On relira avec profit la Leçon n° 3 de AN01 sur le développement décimal $x = 0,a_1a_2\cdots a_n\cdots\cdots$ d'un nombre réel x tel que $0 \leq x < 1$, en prenant conscience que x est la somme de la série :
$$x = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots\cdots + \frac{a_n}{10^n} + \cdots\cdots\cdots$$

<u>Exercice</u> 8. Soit E l'ensemble des entiers $n \geq 1$ qui n'ont pas le chiffre 9 dans leur écriture décimale. Montrez que la série $\sum_{n\in E} \frac{1}{n}$ converge, et que sa somme est < 28. (Exercice assez difficile).

<u>Indications sur les Exercices proposés dans cette Leçon</u>

<u>Exercice</u> 1. Soit $a = r(\cos\theta + i\sin\theta)$. Alors $a^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$, donc la série proposée est la partie réelle de $2\sum_{n\geq 0} a^n - 1$. Or
$$\sum_{n\geq 0} a^n = \frac{1}{1-a} = \frac{1}{1-r\cos\theta - ir\sin\theta} = \frac{1-r\cos\theta + ir\sin\theta}{(1-r\cos\theta)^2 + r^2\sin^2\theta}$$
a pour partie réelle $\dfrac{1-r\cos\theta}{1+r^2-2r\cos\theta}$. La série proposée vaut donc
$$\frac{2-2r\cos\theta}{1+r^2-2r\cos\theta} - 1 = \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\theta} = \text{"le noyau de Poisson".}$$

<u>Exercice</u> 2. La première diverge, car son terme général est équivalent à $\frac{3}{4}\frac{1}{n}$; la seconde converge, car son terme général est équivalent à $\frac{3}{4}\frac{1}{n^2}$.

<u>Exercice</u> 3. $\dfrac{1}{n(n+1)} \sim \dfrac{1}{n^2}$, donc la série $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n(n+1)}$ converge.

Puisque $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$, on a :
$$s_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} + \frac{1}{n(n+1)} =$$
$$= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$
$$= 1 - \frac{1}{n+1}, \text{ et } s_n \text{ tend vers } s = 1 \text{ quand } n \to +\infty.$$

<u>Exercice</u> 4. Pour tout n, on a $\dfrac{2^n+1}{3^n+1} \leq \dfrac{2^n+2}{3^n} = 2\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$, donc
$$R_n = \sum_{p>n} \frac{2^n+1}{3^n+1} \leq 2\sum_{p>n}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 2\,\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}} = 6\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} = 0{,}0091 \text{ si } n = 15.$$

Exercice 5. La dérivée de $\operatorname{Log}(\operatorname{Log} x)$ est $\frac{1}{x \operatorname{Log} x}$. Donc
$\int \frac{dx}{x \operatorname{Log} x\,[\operatorname{Log}(\operatorname{Log} x)]^{\alpha}} = \operatorname{Log}[\operatorname{Log}(\operatorname{Log} x)]$ si $\alpha = 1$; et vaut
$\frac{1}{1-\alpha}\,\frac{1}{[\operatorname{Log}(\operatorname{Log} x)]^{\alpha-1}}$ si $\alpha \neq 1$. L'intégrale converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Exercice 6. 1°) $\frac{\pi}{2}$; 2°) 1 ; 3°) En AN02, Leçon n°6, Exemple 1, on a vu que $\int \frac{dx}{2 + \operatorname{ch} x} = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{Log} \frac{e^x + 2 - \sqrt{3}}{e^x + 2 + \sqrt{3}} + C$, d'où

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{2 + \operatorname{ch} x} = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{Log} \frac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}}.$$

Exercice 7. $R_n = \sum_{p > n} \frac{1}{p^7} \leq \int_n^{+\infty} \frac{dx}{x^7} = \frac{1}{6n^6} \leq 10^{-3}$ pourvu que $n \geq 3$. Il suffit de calculer $s_3 = 1 + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{3^7} = 1 + \frac{1}{128} + \frac{1}{2187} = 1{,}008$.

Exercice 8. Pour $k = 0, 1, 2, \dots, 8$, soit E_k l'ensemble des $n \in E$ dont l'écriture décimale se termine par le chiffre k. L'ensemble E est la réunion des 9 ensembles $E_0, E_1, E_2, \dots, E_8$, lesquels sont deux à deux disjoints. Si A est un ensemble de nombres, notons $10A + k$ l'ensemble des nombres $10a + k$, où $a \in A$. Il est clair que $E_0 = 10E$, et que, pour $k = 1, 2, \dots, 8$, on a :

$$E_k = \{10E + k\} \cup \{k\}.$$

Pour tout entier N on a donc :

$$\sum_{\substack{n \in E \\ n \leq N}} \frac{1}{n} \leq \sum_{\substack{n \in E \\ n \leq 10N}} \frac{1}{n} = \sum_{\substack{n \in E_0 \\ n \leq 10N}} \frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{k=8} \sum_{\substack{n \in E_k \\ n \leq 10N}} \frac{1}{n} =$$

$$= \sum_{\substack{p \in E \\ 10p \leq 10N}} \frac{1}{10p} + \sum_{k=1}^{k=8} \sum_{\substack{p \in E \\ 10p \leq 10N}} \frac{1}{10p + k} + \sum_{k=1}^{k=8} \frac{1}{k} \leq$$

$$\leq \frac{9}{10} \sum_{\substack{n \in E \\ n \leq N}} \frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{k=8} \frac{1}{k}, \text{ d'où : } \sum_{\substack{n \in E \\ n \leq N}} \frac{1}{n} \leq 10 \sum_{k=1}^{k=8} \frac{1}{k} < 28.$$

AN04 Leçon n° 2

Séries numériques. II

Les Théorèmes 1 et 2 de la Leçon n° 1 concernaient les séries à termes réels positifs. Nous revenons maintenant aux séries dont les termes sont des nombres complexes quelconques u_n. Si on note $s_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$, la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge si et seulement si la suite (s_n) a une limite finie. Pour cela il faut et il suffit que (s_n) soit une suite de Cauchy (cf. AN01, Leçon n° 2, Théorème 2 et § VI). Or $s_m - s_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_m$. On peut donc énoncer le

<u>Critère de Cauchy de convergence des séries</u> : Soit (u_n) une suite de nombres complexes. Pour que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge, il faut et <u>il suffit</u> que : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N_ε tel que

$$m > n \geqslant N_\varepsilon \text{ entraîne } |u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_m| \leqslant \varepsilon.$$

<u>Exemple 2 revisité</u> : la série "harmonique"

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

diverge, car elle ne satisfait pas au critère de Cauchy, vu que

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \geqslant \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

ne peut, quel que grand que soit n, être rendu $\leqslant \varepsilon = \frac{1}{3}$.

<u>Définition</u>. Soit (u_n) une suite de nombres complexes. On dit que la série

$$(1) \qquad u_0 + u_1 + \cdots + u_n + \cdots$$

est <u>absolument convergente</u> si la série des modules

$$(2) \qquad |u_0| + |u_1| + \cdots + |u_n| + \cdots$$

est convergente.

<u>Théorème 1</u>. Toute série (1) absolument convergente est convergente, et $\left|\sum_{n\geq 0} u_n\right| \leqslant \sum_{n\geq 0} |u_n|$.

<u>Démonstration</u>. On va vérifier pour (1) le critère de Cauchy en

appliquant le critère de Cauchy pour (2). Soit $\varepsilon > 0$. Il existe N_ε tel que $m > n \geq N_\varepsilon$ entraîne $|u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \dots + |u_m| \leq \varepsilon$. À cause de l'inégalité triangulaire des modules, a fortiori $m > n \geq N_\varepsilon$ entraîne : $|u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_m| \leq |u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \dots + |u_m| \leq \varepsilon$.
Donc (1) converge. De plus, si s et σ sont les sommes de (1) et (2), on a pour tout n :

$$|u_0 + u_1 + \dots + u_n| \leq |u_0| + |u_1| + \dots + |u_n| \leq \sigma ;$$

donc, quand $n \to +\infty$, on obtient que $|s| \leq \sigma$.

<u>Exemples</u> 1) Si α est un nombre réel > 1, les séries

$$1 \pm \frac{1}{2^\alpha} \pm \frac{1}{3^\alpha} \pm \dots \pm \frac{1}{n^\alpha} \pm \dots ,$$

où l'on choisit les signes ad libitum, convergent toutes, car elles convergent absolument.

2) On a vu (Leçon n° 1, Exemple 4) que la série "harmonique alternée"

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \dots$$

converge, mais elle ne converge pas absolument (ibid. Exemple 2).

<u>Remarque</u>. D'une série qui converge sans converger absolument on dit quelquefois qu'elle est "semi-convergente". Nous éviterons cette monstruosité linguistique.

Voici quelques tests d'absolue convergence, que nous obtiendrons par comparaison de la série $\Sigma |u_n|$ avec une série géométrique.

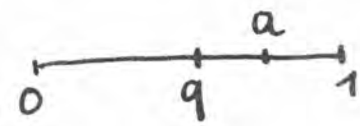
<u>Théorème 2</u> (Règle $\sqrt[n]{|u_n|}$, ou de Cauchy). Soit (u_n) une suite de nombres complexes. Supposons que $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = q$ existe. Alors :

1°) si $q > 1$, la série $\sum\limits_{n \geq 0} u_n$ diverge ;

2°) si $q < 1$, elle converge absolument.

<u>Démonstration</u> 1°) Pour n assez grand, $\sqrt[n]{|u_n|} \geq 1$ donc $|u_n| \geq 1$ ne peut tendre vers zéro, et la série diverge.

2°) Soit a un nombre choisi tel que $q < a < 1$ (par exemple $a = \frac{q+1}{2}$).



Puisque $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = q$, il existe n_0 tel que $n \geq n_0$ entraîne $\sqrt[n]{|u_n|} \leq a$, donc $|u_n| \leq a^n$. Par comparaison avec la série géométrique de raison $a < 1$, la série $\sum_{n\geq n_0} |u_n|$ converge, donc aussi la série $\sum_{n\geq 0} |u_n|$.

<u>Exemple</u>. $\sum_{n\geq 0} \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n$ converge ; ici $q = \frac{1}{2}$.

<u>Théorème 3</u> (Règle $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$, ou de d'Alembert). Soit (u_n) une suite de nombres complexes non nuls. Supposons que $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = q$ existe. Alors :

1°) si $q > 1$, la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge ;

2°) si $q < 1$, elle converge absolument.

<u>Démonstration</u> 1°) Pour n assez grand, $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \geq 1$. Donc la suite $|u_n|$ est $\neq 0$ et est croissante à partir d'un certain n_0 ; elle ne peut tendre vers zéro, et la série diverge.

2°) Soit a un nombre choisi tel que $q < a < 1$ (par exemple $a = \frac{q+1}{2}$). Puisque $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = q$, il existe n_0 tel que $n \geq n_0$ entraîne $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leq a$. Ainsi, pour $n > n_0$, on a :

$$|u_n| = \left|\frac{u_n}{u_{n-1}}\right| \times \left|\frac{u_{n-1}}{u_{n-2}}\right| \times \cdots \times \left|\frac{u_{n_0+1}}{u_{n_0}}\right| \times |u_{n_0}| \leq a^{n-n_0} |u_{n_0}|,$$

c'est-à-dire
$$|u_n| \leq \frac{|u_{n_0}|}{a^{n_0}}\, a^n.$$

Par comparaison avec la série géométrique de raison $a < 1$, la série $\sum_{n\geq n_0} |u_n|$ converge, donc aussi la série $\sum_{n\geq 0} |u_n|$.

<u>Exemples</u>: 1°) Soit k un nombre réel fixé. Soit x un nombre réel. La série $\sum_{n\geq 1} n^k x^n$ converge absolument si $|x| < 1$, et diverge si $|x| > 1$, car ici

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left(\frac{n+1}{n}\right)^k \frac{|x|^{n+1}}{|x|^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^k |x| \text{ tend vers } q = |x|.$$

2°) Soit z un nombre complexe. La série :

$$1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots\cdots$$

converge absolument, car ici :

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{|z|^n} = \frac{|z|}{n+1} \text{ tend vers } q = 0 < 1.$$

<u>Définition</u> (fonction <u>exponentielle</u> de variable complexe). Pour tout nombre <u>complexe</u> z, on pose :

$$e^z = \exp(z) = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots\cdots$$

Si $z = x$ est réel, on retrouve la même fonction exponentielle e^x définie et étudiée en AN01, Leçon n° 7, § VII, puisque, comme application de la formule de Taylor, on y avait prouvé au Théorème 3 que :

$$e^x = \lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots\right).$$

En particulier $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} = e = 2,71828\ldots\ldots$ Ainsi la théorie des séries nous permet de prolonger la définition de la fonction exponentielle au champ de la variable complexe. Nous étudierons plus à fond $\exp(z)$ un peu plus tard.

3°) La série $\sum_{n\geq 1} \frac{n^n}{n!}$ diverge, car ici :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}\frac{n!}{(n+1)!} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \text{ tend vers } q = e > 1$$

(cf AN01, Leçon n° 8, § III).

Si $q = 1$, les Théorèmes 3 et 4 sont muets, et de fait tout arrive. Vous vérifierez aisément que, pour $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ et pour $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$, $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, et pourtant la première série diverge et la seconde converge.

<u>Exercice 1</u>. Pour tout k entier ≥ 0, on pose $u_{2k+1} = \dfrac{2^k}{3^k}$ et $u_{2k} = \dfrac{2^{k-1}}{3^k}$. Montrez par la règle de Cauchy que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente, mais que la règle de d'Alembert ne s'applique pas.

<u>Exercice 2</u>. Etudiez la convergence des séries $\sum_{n\geq 1}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ et $\sum_{n\geq 1} \dfrac{n!}{1.3.5\ldots(2n+1)}$

Les Théorèmes 2 et 3 concernaient l'absolue convergence, donc relevaient essentiellement des séries à termes positifs. Par contre les critères de Leibniz et d'Abel, que nous allons maintenant étudier, sont utiles pour les séries <u>non</u> absolument convergentes. Pour des raisons pédagogiques, nous exposerons d'abord le critère de Leibniz des séries alternées, bien qu'il soit un cas particulier du critère d'Abel.

<u>Définition</u>. Une <u>série alternée</u> est une série du type :

$$(3) \qquad a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots\cdots + (-1)^n a_n + \cdots\cdots \quad ,$$

où les a_n sont des nombres réels > 0.

<u>Théorème</u> 4 (critère de Leibniz). Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres > 0, <u>décroissante</u>, et tendant vers 0 quand $n \to +\infty$. Alors la série alternée (3) converge. De manière précise, si

$$s_{2p} = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \cdots\cdots - a_{2p-1} + a_{2p}$$

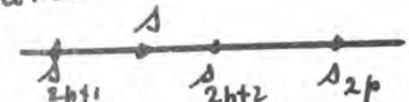
et $\quad s_{2p+1} = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots\cdots\cdots\cdots + a_{2p} - a_{2p+1}$

sont ses sommes partielles d'ordre pair et impair, la suite $(s_{2p})_{p\geq 0}$ est décroissante, la suite $(s_{2p+1})_{p\geq 0}$ est croissante, ces deux suites ont une limite commune s (qui est la somme de (3)), et le reste $|R_n| = |\sum_{p>n}(-1)^p a_p|$ de (3) est $\leq a_{n+1}$, donc inférieur ou égal en valeur absolue au premier terme négligé.

<u>Démonstration</u>. $s_{2p+2} - s_{2p} = a_{2p+2} - a_{2p+1}$ est ≤ 0, et

$s_{2p+3} - s_{2p+1} = -a_{2p+3} + a_{2p+2}$ est ≥ 0, pour tout $p \geq 0$, vu l'hypothèse de décroissance de la suite (a_n). De plus $s_{2p+1} = s_{2p} - a_{2p+1} \leq s_{2p}$, et $s_{2p} - s_{2p+1} = a_{2p+1}$ tend vers 0. Ainsi les suites $(s_{2p})_{p\geq 0}$ et $(s_{2p+1})_{p\geq 0}$ sont <u>adjacentes</u> (cf. AN01, Leçon n°2, § IV); elles ont donc une limite commune s, ce qui prouve que $\lim_{n\to+\infty} s_n = s$. Donc la série (1) converge. Pour tout p, on a $s_{2p+1} \leq s \leq s_{2p}$, donc

$|R_{2p}| = |s - s_{2p}| \leq s_{2p} - s_{2p+1} = a_{2p+1}$; et de même :



$|R_{2p+1}| = |s - s_{2p+1}| \leq s_{2p+2} - s_{2p+1} = a_{2p+2}$.

<u>Exemple</u> (séries de Riemann alternées). Soit α un nombre réel. La série

$$1 - \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} - \cdots\cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n^\alpha} + \cdots$$

converge si et seulement si $\alpha > 0$, et (rappelons-le) converge absolument si et seulement si $\alpha > 1$.

<u>Exercice</u> 3. Montrez que la série $\sum_{n\geq 1} (-1)^n \dfrac{n + \operatorname{Log} n}{n^2+1}$ converge, mais pas absolument.

<u>Exercice</u> 4. Montrez que la série $1 - \frac{1}{2} + \frac{3}{8} - \cdots + (-1)^p \dfrac{1.3.5\ldots(2p-1)}{2.4.6\cdots(2p)} + \cdots$ converge.

<u>Exercice</u> 5. Soit la série $s = 1 - \frac{2}{3} + \frac{4}{15} - \cdots + (-1)^n \dfrac{2^n}{1.3.5\ldots(2n+1)} + \cdots$

Montrez qu'elle converge, et donnez une valeur approchée de s par défaut à 5.10^{-4} près.

Le mathématicien norvégien N. H. Abel (1802-1829), en dépit de sa courte vie, a laissé une oeuvre importante en Analyse (théorie des fonctions elliptiques). Nous allons voir la profonde généralisation qu'il donne du critère de Leibniz.

<u>Lemme</u>. Soit M un nombre réel > 0. Soient

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots\cdots \geq a_n \geq 0$$

n nombres réels, et soient $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n$ n nombres complexes tels que, pour tout $p = 1, 2, \ldots, n$, on ait

$$|b_1 + b_2 + \cdots\cdots + b_p| \leq M.$$

Alors $$|a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots\cdots + a_n b_n| \leq M a_1.$$

22/ <u>Démonstration</u>. Posons $\sigma_1 = b_1$; $\sigma_2 = b_1 + b_2$; ... ; $\sigma_p = b_1 + b_2 + \cdots + b_p$; ..... ; $\sigma_n = b_1 + b_2 + \cdots\cdots + b_n$. Alors :

$b_1 = \sigma_1$; $b_2 = \sigma_2 - \sigma_1$; ..... ; $b_p = \sigma_p - \sigma_{p-1}$; .... ; $b_n = \sigma_n - \sigma_{n-1}$.

Donc

$$|a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_p b_p + \cdots + a_n b_n| =$$

$$\left| a_1 \sigma_1 + a_2(\sigma_2 - \sigma_1) + \cdots\cdots + a_p(\sigma_p - \sigma_{p-1}) + \cdots\cdots + a_n(\sigma_n - \sigma_{n-1}) \right| =$$

$$= \left| \sigma_1(a_1 - a_2) + \sigma_2(a_2 - a_3) + \cdots\cdots + \sigma_p(a_p - a_{p+1}) + \cdots + \sigma_n a_n \right|$$

$$\leq |\sigma_1|(a_1 - a_2) + |\sigma_2|(a_2 - a_3) + \cdots\cdots + |\sigma_{n-1}|(a_{n-1} - a_n) + |\sigma_n| a_n$$

$$\leq M(a_1 - a_2 + a_2 - a_3 + \cdots\cdots + a_{n-1} - a_n + a_n) = M a_1.$$

On a joué sur le fait que $|a_p - a_{p-1}| = (a_p - a_{p-1})$, car $a_p \geq a_{p-1}$.

<u>Théorème</u> 5 (critère d'Abel). Supposons que, pour tout n entier ≥ 0, on pose $u_n = a_n b_n$, où :

1°) les a_n sont réels > 0 ; la suite (a_n) est <u>décroissante</u> ; elle tend vers 0 quand $n \to +\infty$;

2°) les b_n sont complexes, et il existe une constante $M > 0$ telle que, quels que soient $n \geq 0$ et $m \geq n$, on ait :

$$|b_n + b_{n+1} + \cdots\cdots + b_m| \leq M.$$

Alors la série $\sum_{n\geq 0} u_n = \sum_{n\geq 0} a_n b_n$ converge, et pour tout n :

$$|R_n| = \left| \sum_{p>n} u_n \right| \leq M a_{n+1}.$$

<u>Exemples</u> de suites (b_n) telles que 2°) : si $b_n = (-1)^n$, on peut prendre $M = 1$, et l'on retrouve le critère de Leibniz. Mais, plus généralement, si $b_n = z^n$, où z est un nombre complexe donné tel que $|z| = 1$, mais $z \neq 1$, alors :

$$|z^n + z^{n+1} + \cdots + z^m| = |z^n| \, |1 + z + z^2 + \cdots + z^{m-n}| =$$

$$= \frac{|1 - z^{m-n+1}|}{|1 - z|} \leq \frac{1 + |z|^{m+n-1}}{|1 - z|} = \frac{2}{|1 - z|} = M,$$

on voit que l'hypothèse 2) est vérifiée avec la constante $M = \dfrac{2}{|1-z|}$. Si on pose $z = \cos\theta + i\sin\theta$, on tire du critère d'Abel le

<u>Corollaire</u>. Soit (a_n) une suite de nombres réels >0, <u>décroissante</u>, et tendant vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Alors, pour tout $\theta \neq 2k\pi$, les séries trigonométriques :

$$a_0 + a_1\cos\theta + a_2\cos 2\theta + \cdots + a_n\cos(n\theta) + \cdots$$

et
$$a_1\sin\theta + a_2\sin 2\theta + \cdots + a_n\sin(n\theta) + \cdots$$

convergent.

D'après la formule de de Moivre, ce sont en effet les parties réelle et imaginaire de la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$. On peut même préciser que le reste de ces séries est en valeur absolue $\leq \dfrac{2a_{n+1}}{|1-z|} = \dfrac{a_{n+1}}{|\sin\theta/2|}$.

<u>Démonstration du critère d'Abel</u>. On vérifie pour $\sum_{n\geq 0} u_n$ le critère de Cauchy. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, il existe N_ε tel que $n > N_\varepsilon$ implique $0 \leq a_n \leq \dfrac{\varepsilon}{M}$. Alors, quels que soient $m > n > N_\varepsilon$, on a, d'après le Lemme (dans lequel on modifie les indices) :

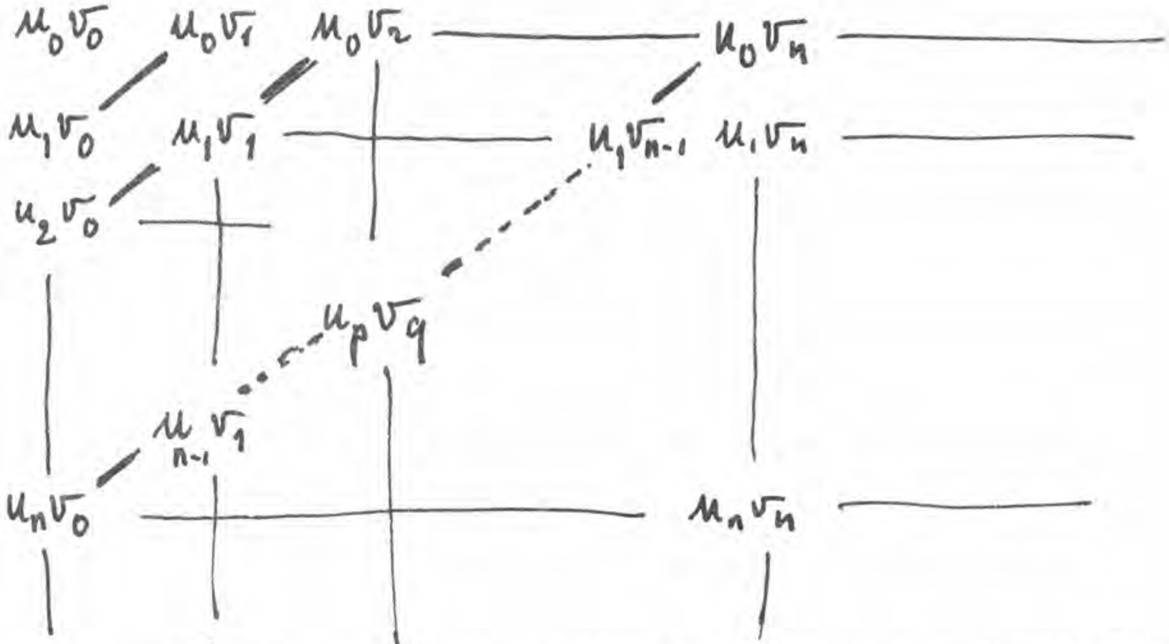
$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_m| = |a_{n+1}b_{n+1} + \cdots + a_m b_m| \leq M a_{n+1} \leq \varepsilon.$$

<u>Exercice 6</u>. Discutez, selon la valeur du paramètre complexe z, si la série $\sum_{n\geq 1} \dfrac{n + \operatorname{Log} n}{n^2+1} z^n$ est divergente ? absolument convergente ? convergente, mais non absolument ?

Passons à l'étude de quelques <u>opérations</u> naturelles sur les séries. On sait déjà que la notion de série convergente se comporte bien vis-à-vis de l'addition et de la multiplication par une constante. Définissons maintenant la multiplication ou produit de deux séries.

Soient
$$(4)\quad u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$
et
$$(5)\quad v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n + \cdots$$

deux séries de nombres complexes. L'idée est de faire la somme de tous les produits $u_p v_q$, où p et q sont des entiers ≥ 0. Installons ces produits dans un tableau infini :



et regroupons la sommation en paquets diagonaux à $p+q$ constant, c'est-à-dire posons :

$$(6)\quad \begin{cases} w_0 = u_0v_0 \;;\; w_1 = u_0v_1 + u_1v_0 \;;\; w_2 = u_0v_2 + u_1v_1 + u_2v_0 \;; \ldots\ldots \;; \\ \qquad w_n = u_0v_n + u_1v_{n-1} + \cdots\cdots + u_{n-1}v_1 + u_nv_0 = \sum_{p+q=n} u_pv_q \;; \text{etc}\ldots \end{cases}$$

La série

$$(7)\qquad w_0 + w_1 + w_2 + \cdots\cdots + w_n + \cdots\cdots$$

s'appelle la série <u>produit</u> des séries (4) et (5).

<u>Théorème</u> 6. Soient $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ deux séries convergentes, de sommes s et t respectivement. Supposons que <u>l'une au moins</u> de ces deux séries soit <u>absolument</u> convergente. Alors la série produit $\sum_{n\geq 0} w_n$, où les w_n sont définis par (6), est convergente, et a pour somme le nombre st. Si les deux séries $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ sont absolument convergentes, la série produit aussi est absolument convergente.

<u>Démonstration</u>. Posons :

$$s_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n \;;\quad t_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n \;;\quad \sigma_n = w_0 + w_1 + \cdots + w_n .$$

Pour fixer les idées, supposons que $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge absolument, et posons $A = \sum_{n\geq 0} |v_n|$. La suite (s_n) converge, donc est bornée ; posons $M = \sup_n |s_n|$. quels que soient n et m, on a $|s_n - s_m| \leq 2M$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un entier N tel que :

1°) $\sum_{p=N}^{\infty} |v_p| \leq \frac{\varepsilon}{4M}$ (reste d'une série convergente) ;

2°) $m > n \geq N$ entraîne $\left|\sum_{p=n}^{p=m} u_p\right| \leq \frac{\varepsilon}{2A}$ (critère de Cauchy).

Posons $N_\varepsilon = 2N$. Dès que $n \geq N_\varepsilon$, on a :

$$|s_n t_n - \sigma_n| = |(u_1+u_2+\cdots+u_n)v_n + (u_2+\cdots+u_n)v_{n-1} + \cdots + u_n v_1|$$
$$\leq |u_1+u_2+\cdots+u_n||v_n| + |u_2+\cdots+u_n||v_{n-1}| + \cdots + |u_n||v_1|$$
$$\leq 2M(|v_n| + |v_{n-1}| + \cdots + |v_{N+1}|) + \frac{\varepsilon}{2A}(|v_N| + |v_{N-1}| + \cdots + |v_2| + |v_1|)$$
$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$ Ainsi $s_n t_n - \sigma_n$ tend vers 0, donc $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = st$.

Maintenant supposons que $\sum_{n\geq 0} |u_n| = B$ converge aussi. Alors pour tout n :

$$|w_0| + |w_1| + \cdots + |w_n| = |u_0v_0| + |u_0v_1 + u_1v_0| + \cdots + |u_0v_n + \cdots + u_nv_0|$$
$$\leq |u_0||v_0| + |u_0||v_1| + |u_1||v_0| + \cdots + |u_0||v_n| + \cdots + |u_n||v_0|$$
$$\leq (|u_0| + |u_1| + \cdots + |u_n|)(|v_0| + |v_1| + \cdots + |v_n|) \leq BA,$$

donc $\sum_{n\geq 0} w_n$ converge absolument.

<u>Exercice 7</u>. La série $1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \cdots\cdots + (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \cdots$ converge, mais pas absolument. Multipliez-la par elle-même, et montrez qu'on obtient une série $\sum_{n\geq 0} w_n$ divergente, car w_n ne tend pas vers 0.

Une première application — spectaculaire — du Théorème 6 est l'extension à la variable complexe de l'équation fonctionnelle de l'exponentielle :

<u>Théorème 7</u>. Soient z et z' deux nombres complexes. Alors

$$\exp(z+z') = \exp(z).\exp(z').$$

<u>Démonstration</u>. Par définition :

$$\exp(z) = \sum_{p\geq 0} \frac{z^p}{p!} = \sum_{p\geq 0} u_p \quad , \text{et} \quad \exp(z') = \sum_{q\geq 0} \frac{z'^q}{q!} = \sum_{q\geq 0} v_q ,$$

où les deux séries convergent absolument. D'après le Théorème 6,

$$\exp(z).\exp(z') = \sum_{n\geq 0} w_n , \quad \text{où :}$$

$$w_n = \sum_{p+q=n} u_p v_q = \sum_{p+q=n} \frac{z^p}{p!}\frac{z'^q}{q!} = \frac{1}{n!}\sum_{p+q=n}\frac{(p+q)!}{p!\,q!} z^p z'^q =$$

$$= \frac{(z+z')^n}{n!}$$, d'après la formule du binôme de Newton. Donc

$$\exp(z).\exp(z') = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}(z+z')^n = \exp(z+z').$$

<u>Groupement de termes</u>

Soit la série (8) $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$

et soit $m_0 < m_1 < \cdots < m_n < \cdots$ une suite croissante d'entiers positifs. Posons :

$v_0 = u_0 + u_1 + \cdots + u_{m_0}$; $v_1 = u_{m_0+1} + u_{m_0+2} + \cdots + u_{m_1}$; etc... ;

$$v_n = u_{m_{n-1}+1} + u_{m_{n-1}+2} + \cdots + u_{m_n} ; \text{ etc}\ldots$$

On dit que la série

(9) $v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n + \cdots$

est déduite de (8) par groupements de termes. <u>Si (8) converge et a pour somme s</u>, <u>alors (9) converge, vers la même somme s.</u>

En effet, pour tout n, la somme d'ordre n de (9) vaut

$$v_0 + v_1 + \cdots + v_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{m_n} ,$$

donc est égale à la somme d'ordre m_n de (8) et, par suite, tend vers s quand $n \to +\infty$.

La réciproque n'est pas vraie (sauf si les u_n sont ≥ 0). Par exemple la série $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots + 1 - 1 + \cdots$

diverge, mais devient la série convergente

$$0 + 0 + \cdots + 0 + \cdots$$

si l'on groupe ses termes deux par deux.

Permutation de termes :

<u>Théorème</u> 8. Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série <u>absolument</u> convergente. Soit σ une bijection de l'ensemble $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ sur lui-même (en bref : une "permutation" de $\mathbb{N}$). Pour tout $n \geq 0$, posons $v_n = u_{\sigma(n)}$. Alors la série $\sum_{n\geq 0} v_n$ est absolument convergente, et de même somme s que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$.

<u>Démonstration</u>. Pour $n \geq 0$ soit $m_n = \max\{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n)\}$. Alors
$$|v_0| + |v_1| + \cdots + |v_n| \leq |u_0| + |u_1| + \cdots + |u_{m_n}| \leq \sum_{p=0}^{+\infty} |u_p| ,$$
donc la série $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge absolument. Posons désormais :
$$s_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n \ ; \quad t_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n \ ; \quad s = \sum_{n \geq 0} u_n .$$
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe N assez grand pour que :
$$|s - s_N| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad ; \text{ et } \quad m \geq n \geq N \text{ entraîne } \sum_{k=n}^{k=m} |u_k| \leq \frac{\varepsilon}{2} .$$
Posons $p_\varepsilon = \max\{\sigma^{-1}(0), \sigma^{-1}(1), \ldots, \sigma^{-1}(N)\}$. Alors, pour tout $p \geq p_\varepsilon$, la somme partielle t_p comprend les N premiers termes de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$, donc $t_p - s_N$ ne comprend que des u_k tels que $k > N$, et, par suite, $|t_p - s_N| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ et :
$$|s - t_p| \leq |s - s_N| + |s_N - t_p| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \ , \text{ dès que } p \geq p_\varepsilon .$$
Ceci prouve que $\lim_{p\to+\infty} t_p = s$.

<u>Contre-exemple</u>. La série harmonique alternée :
$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} + \cdots$$
converge, mais pas absolument, et a pour somme $s = \operatorname{Log} 2$ (cf. Leçon n° 1, Exemple 4). Si on change l'ordre des termes comme suit :
$$\underbrace{1 - \frac{1}{2}} - \frac{1}{4} + \underbrace{\frac{1}{3} - \frac{1}{6}} - \frac{1}{8} + \cdots + \underbrace{\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2(2n+1)}} - \frac{1}{2(2n+2)} + \cdots ,$$
elle reste convergente, mais sa somme est divisée par 2, car elle vaut
$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2(2n+1)} - \frac{1}{2(2n+2)} + \cdots$$

Par un changement adéquat de l'ordre des termes, on pourrait même rendre cette série divergente.

Indications sur les Exercices proposés dans cette Leçon

Exercice 1. Quand $k \to +\infty$, les suites $\sqrt[2k]{u_{2k}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2k}} \sqrt{\frac{2}{3}}$ et $\sqrt[2k+1]{u_{2k+1}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{k+1}{2k+1}}$ tendent toutes deux vers $\sqrt{\frac{2}{3}} = q < 1$, ce qui prouve la convergence par la règle de Cauchy. Mais $\frac{u_{2k+1}}{u_{2k}} = 2$ est plus grand que 1 pour tout k ; donc $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ne peut avoir une limite $q<1$.

Exercice 2. $\sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{n^2}{n}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ tend vers $\frac{1}{e} < 1$, donc la première série converge par la règle de Cauchy. Pour la deuxième, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{2n+3}$ tend vers $\frac{1}{2}$; elle converge selon la règle de d'Alembert.

Exercice 3. La valeur absolue du terme général $\frac{n+\operatorname{Log} n}{n^2+1}$ est, quand $n \to +\infty$, équivalente à $\frac{1}{n}$, terme général d'une série divergente. Donc la série ne converge pas absolument. La série est alternée, et son terme général tend vers 0. Pour appliquer le critère de Leibniz, voyons si $\frac{n+\operatorname{Log} n}{n^2+1}$ est décroissante ; c'est faux au début, car $\frac{1}{2} < \frac{2+\operatorname{Log} 2}{5}$. Mais il suffirait que la suite $\frac{n+\operatorname{Log} n}{n^2+1}$ soit décroissante <u>à partir d'un certain rang</u>. Or c'est vrai, car si on pose :

$$\varphi(x) = \frac{x + \operatorname{Log} x}{x^2+1},$$

la dérivée $\varphi'(x) = \frac{1}{(x^2+1)^2} \; \frac{(x^2+1)(x+1) - 2x^2(x+\operatorname{Log} x)}{x}$

tend vers $-\infty$ quand $x \to +\infty$, donc est négative dès que x est assez grand.

Exercice 4. On applique le critère de Leibniz à la série alternée $\sum_{p\geq 0} (-1)^p a_p$, où $a_p = \frac{1.3.5\ldots(2p-1)}{2.4.6\ldots 2p} = \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2p}\right)$.

Puisque $\frac{a_{p+1}}{a_p} = \frac{2p+1}{2p+2} < 1$, la suite (a_p) est décroissante. On montre qu'elle tend vers 0 en étudiant son logarithme :

$$-\operatorname{Log} a_p = -\operatorname{Log}\left(1-\frac{1}{2}\right) - \operatorname{Log}\left(1-\frac{1}{4}\right) - \dots - \operatorname{Log}\left(1-\frac{1}{2p}\right),$$

qui est la somme d'ordre p de la série de terme général positif :

$$u_p = -\operatorname{Log}\left(1-\frac{1}{2p}\right) \sim \frac{1}{2p},$$

série divergente. Donc $\operatorname{Log} a_p$ tend vers $-\infty$, et $\lim_{p\to\infty} a_p = 0$.

Exercice 5. La série converge absolument, car $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{2}{2n+3}$ tend vers $0 = q < 1$. Mais il s'agit aussi d'une série alternée qui relève du critère de Leibniz, car $a_n = \frac{2^n}{1.3.5\dots(2n+1)}$ tend vers 0 en décroissant, vu que $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2}{2n+3} \leq \frac{2}{3} < 1$. Son reste d'ordre n vérifie $|R_n| \leq a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{1.3.5\dots(2n+3)}$. On calcule les premières valeurs.

$a_0 = 1$; $a_1 = 0,666666667$; $a_2 = 0,266666667$; $a_3 = 0,076190476$;
$a_4 = 0,016931217$; $a_5 = 0,003078403$; $a_6 = 0,000473600$.

Si $n = 5$, on a $a_{n+1} = a_6 < 5.10^{-4}$, donc

$$s_5 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 = 0,53766 .$$

Exercice 6. Posons $u_n(z) = \frac{n + \operatorname{Log} n}{n^2+1} z^n$. Alors $|u_n(z)| \sim \frac{|z|^n}{n}$ qui ne tend pas vers 0 quand $|z| > 1$. La série diverge pour $|z| > 1$, et aussi pour $z = 1$, car alors $0 \leq u_n \sim \frac{1}{n}$. Si $|z| < 1$, on a $|u_n(z)| \sim \frac{|z|^n}{n} \leq |z|^n$; donc la série converge absolument (par comparaison avec une série géométrique) si $|z| < 1$. Reste les z tels que $|z| = 1$, mais $z \neq 1$; il y a convergence, mais non absolue, d'après le critère d'Abel (cf. l'Exerc. 3 pour la décroissance à partir d'un certain rang de la suite $a_n = \frac{n + \operatorname{Log} n}{n^2+1}$).

Exercice 7. Vu l'inégalité $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$, on a :

$$|w_n| = \frac{1}{\sqrt{1}\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{n-1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}\sqrt{1}}$$

$$\geq 2\left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+2}\right) = \frac{2(n+1)}{n+2} \geq 1,$$

donc (w_n) ne tend pas vers 0.

 AN04 Leçon n° 3

Convergence uniforme

Soit $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels, plongé dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes $z = x + iy$. La correspondance $z \longleftrightarrow (x,y)$ permet d'identifier $\mathbb{C}$ au plan euclidien $\mathbb{R}^2$, et donc de faire de l'Analyse dans $\mathbb{C}$, de parler dans $\mathbb{C}$ de distance, de limites, d'ensembles ouverts, fermés, compacts, de fonctions $f(z)$ continues etc..., comme on le ferait dans $\mathbb{R}^2$, et comme on l'a fait plus généralement en AN03 dans $\mathbb{R}^n$. Remarquons que, dans cette identification de $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$, la distance $d(z,z')$ de deux nombres complexes n'est autre que le module de leur différence :

$$d(z,z') = |z - z'| = \left[(x-x')^2 + (y-y')^2 \right]^{1/2}.$$

La présente Leçon est une première initiation à l'Analyse fonctionnelle. Le point de vue est de considérer une fonction f comme une entité, comme un "point" susceptible de varier lui-même dans un "espace fonctionnel". Si f est une fonction, et si (f_n) est une suite de fonctions, on s'attachera donc d'abord à donner un sens à l'expression : la suite (f_n) a pour limite f. Mais, pour cette notion de limite de fonctions, il se trouve qu'il y a plusieurs définitions intéressantes et non équivalentes, qui conduisent donc à des théories différentes de l'Analyse fonctionnelle. Nous en verrons au moins trois dans ce fascicule : la convergence simple (ou ponctuelle), la convergence uniforme, objets de la présente Leçon ; et la convergence en moyenne quadratique, importante pour les séries de Fourier (cf. les leçons n° 6 et 7).

Soit D une partie de $\mathbb{C}$; souvent D sera un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soient $(f_n)_{n\geq 0}$ et f des fonctions définies dans D, à valeurs complexes.

<u>Définition 1</u>. On dit que la suite (de fonctions) (f_n) converge vers (la fonction) f <u>simplement dans D</u> si, pour tout z fixé

dans D, la suite de nombres $(f_n(z))$ converge vers le nombre $f(z)$, autrement dit si :

$$\begin{cases} \text{quel que soit } z \in D, \text{ quel que soit } \varepsilon > 0, \text{ il existe un entier} \\ N = N(z, \varepsilon) \text{ tel que } \quad n \geq N \text{ entraîne } |f(z) - f_n(z)| \leq \varepsilon . \end{cases}$$

Il s'agit donc d'une convergence "point par point" dans l'ensemble de définition D, sans aucune exigence a priori de cohérence entre les divers points z de D où l'on se place.

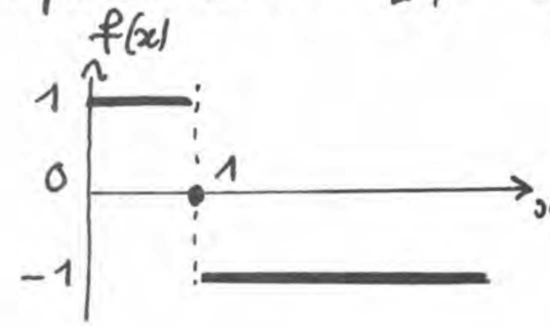
<u>Exemples</u> 1°) La suite $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ converge simplement dans $\mathbb{R}$ vers la fonction $f(x) = e^x$.

2°) La suite $f_n(z) = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!}$ converge simplement dans $\mathbb{C}$ vers la fonction $f(z) = \exp(z)$.

3°) La suite $f_n(z) = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n$ converge simplement vers la fonction $f(z) = \frac{1}{1-z}$ dans le disque $D = \{|z| < 1\}$.

4°) La suite $f_n(x) = \frac{1 - x^n}{1 + x^n}$ converge simplement dans $I = [0, +\infty[$ vers la fonction $f(x)$ qui vaut :

1 si $0 \leq x < 1$;
0 si $\quad x = 1$;
-1 si $\quad x > 1$.



On remarquera que, dans cet exemple, la fonction limite f est discontinue, alors que chaque f_n est continue. Ceci montre les insuffisances de la notion de convergence simple, pas toujours capable de conserver les bonnes propriétés des fonctions.

<u>Définition</u> 2. On dit que la suite (f_n) converge vers f <u>uniformément dans D</u> si :

(1) $$\begin{cases} \text{quel que soit } \varepsilon > 0, \text{ il existe un entier } N = N(\varepsilon) \text{ tel que} \\ n \geq N \text{ entraîne que, quel que soit } z \in D, \quad |f(z) - f_n(z)| \leq \varepsilon . \end{cases}$$

Cette définition ne diffère de la précédente que par la place des mots "quel que soit $z \in D$", mais la différence est considérable.

Ici en effet l'entier N ne dépend que de ε, et peut-être choisi de façon cohérente, "uniforme", pour tous les $z \in D$ en même temps.

La définition 2 est évidemment équivalente à la suivante :

$$(2)\quad \begin{cases} \text{quel que soit } \varepsilon > 0, \text{ il existe un entier } N = N(\varepsilon) \text{ tel que} \\ n \geq N \text{ entraîne } \sup\limits_{z \in D} |f(z) - f_n(z)| \leq \varepsilon, \end{cases}$$

et donc encore équivalente au critère suivant, très souvent utilisé en pratique :

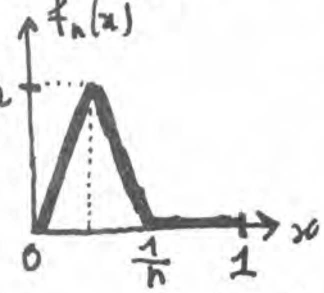
(3) il existe une suite numérique $v_n \geq 0$ (indépendante de z) telle que :

1°) v_n majore $|f - f_n|$ sur D, c'est-à-dire : quel que soit $z \in D$, on a $|f(z) - f_n(z)| \leq v_n$;

2°) $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$.

En effet il suffit de poser $v_n = \sup\limits_{z \in D} |f(z) - f_n(z)|$ dans (2) pour obtenir (3). Réciproquement, si on suppose (3), a fortiori la suite $w_n = \sup\limits_{z \in D} |f(z) - f_n(z)|$, étant $\leq v_n$, tend vers 0, ce qui est précisément affirmer (2).

<u>Contre-exemple</u> :



La suite (f_n) ci-contre converge simplement, mais pas uniformément, vers la fonction $f(x) \equiv 0$ sur $I = [0, 1]$.

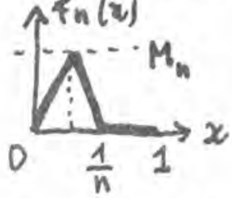
En effet, il y a convergence simple, car, pour tout $x_0 \in I$ fixé, la suite $(f_n(x_0))$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$, vu que :

1°) si $x_0 = 0$, cette suite n'est autre que la suite $0, 0, 0, \dots, 0, \dots$

2°) si $x_0 > 0$, dès que $n > \frac{1}{x_0}$ on a $f_n(x_0) = 0$, donc cette suite est nulle à partir d'un certain rang.

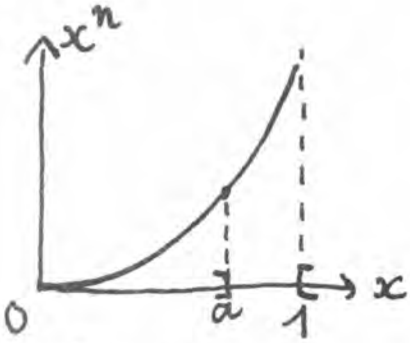
Mais (f_n) ne converge pas uniformément vers 0, car $\sup\limits_{x \in I} |f_n(x)| = n$ ne tend pas vers 0, ce qui contredit (2).

<u>Exercice 1</u>. A quelle condition sur la suite de nombres positifs (M_n) la suite de fonctions



converge-t-elle vers 0 uniformément sur $[0,1]$?

<u>Exemple</u>. La suite $f_n(x) = x^n$ converge simplement vers 0 sur $I = [0,1[$, mais pas uniformément sur I, car



$$\sup_{0 \le x < 1} |f_n(x)| = \sup_{0 \le x < 1} x^n = 1$$

ne tend pas vers 0 quand $n \to +\infty$, contrairement à (2).

En revanche, pour <u>tout</u> a <u>fixé</u> tel que $0 \le a < 1$, la suite $f_n(x) = x^n$ converge vers 0 uniformément sur $I_a = [0,a]$, car

$$\sup_{0 \le x \le a} |f_n(x)| = \sup_{0 \le x \le a} x^n = a^n,$$

tend vers 0 quand $n \to +\infty$, ce qui vérifie (2).

Nous touchons là à un point important : il peut y avoir convergence uniforme sur chaque partie D_λ d'une famille (infinie) de parties $(D_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ sans qu'il y ait convergence uniforme sur leur réunion $D = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} D_\lambda$.

<u>Exercice 2</u>. Montrez que $f_n(x) = \dfrac{2nx}{1+n^2x^2}$ converge vers 0 simplement, mais pas uniformément, dans $I = [0,+\infty[$, mais que néanmoins la convergence est uniforme dans chaque $I_a = [a,+\infty[$ où a est > 0.

<u>Exercice 3</u>. Montrez que, pour tout a réel tel que $0 \le a < 1$, la suite $f_n(z) = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n$ converge vers $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$ uniformément dans chaque disque $D_a = \{|z| \le a\}$, et qu'elle converge vers $f(z)$ simplement, mais pas uniformément, dans le disque $D = \{|z| < 1\}$.

A travers trois théorèmes nous allons voir que, contrairement à la convergence simple, la convergence uniforme se prête à la "conservation des bonnes propriétés" des fonctions par passage à la limite, et qu'elle "commute" à d'autres opérations importantes de l'Analyse.

<u>Théorème 1</u>. Soit D un ensemble ouvert dans $\mathbb{C}$ (ou ouvert dans $\mathbb{R}$). Soit $z_0 \in D$. Soient $(f_n)_{n\geq 0}$ et f des fonctions définies dans D, à valeurs complexes. Supposons que :

1°) la suite (f_n) converge vers f <u>uniformément</u> dans D ;

2°) chaque fonction f_n est <u>continue</u> au point z_0.

Alors, la fonction f est continue au point z_0.

<u>Démonstration</u>. Soit $\varepsilon > 0$. En vertu de 1°), il existe un indice N tel que, pour tout $z \in D$, on ait : $|f(z) - f_N(z)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$.
Appliquons 2°) à la fonction f_N : il existe $\eta > 0$ tel que $z \in D$, $|z - z_0| < \eta$ implique $|f_N(z) - f_N(z_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Alors, pour tout $z \in D$ tel que $|z - z_0| < \eta$, on a :

$$|f(z) - f(z_0)| \leq |f(z) - f_N(z)| + |f_N(z) - f_N(z_0)| + |f_N(z_0) - f(z_0)|$$
$$\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon .$$

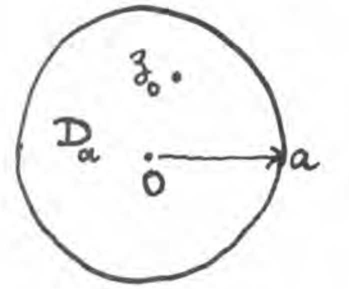
<u>Remarques</u> 1) Sous l'hypothèse 1°), il en résulte que, si chaque f_n est continue dans D tout entier, alors f est continue dans D tout entier.

2) La convergence simple ne suffit pas à conserver la continuité (voir l'Exemple 4°) au début de cette Leçon), mais ne croyez pas que la réciproque soit vraie : il peut arriver que f soit continue sans que la limite soit uniforme (voir le contre-exemple plus haut).

3) On est souvent dans la situation suivante, qui oblige à un détour pour appliquer le Théorème 1. L'ouvert D est réunion d'une famille d'ouverts $(D_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$; pour tout $\lambda \in \Lambda$, la suite (f_n) converge vers f uniformément dans D_λ, mais pas uniformément dans D ; chaque f_n est continue dans D. Alors on peut conclure que f est continue dans D <u>tout entier</u> : il suffit, pour chaque $z_0 \in D$,

d'appliquer le Théorème 1 à un D_{λ_0} qui contienne, qui absorbe z_0.

Exemple : Montrons que la fonction $\exp(z)$ est continue dans $\mathbb{C}$ tout entier.



Soit z_0 fixé dans $\mathbb{C}$. Pour montrer la continuité au point z_0, enfermons le point z_0 dans le disque $D_a = \{|z| < a\}$, où $a = |z_0| + 1$. La fonction $\exp(z)$ est limite uniforme dans D_a de la suite de polynômes

$$f_n(z) = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots\cdots + \frac{z^n}{n!} \quad ,$$

car, si $|z| < a$,

$$|e^z - f_n(z)| = \Big|\sum_{p>n} \frac{z^p}{p!}\Big| \leq \sum_{p>n} \frac{|z|^p}{p!} \leqslant \sum_{p>n} \frac{a^p}{p!} = v_n ,$$

où v_n est indépendant de z, et tend vers 0 quand $n \to +\infty$ car c'est le reste d'une série convergente. Chaque polynôme f_n étant évidemment continu au point z_0, la fonction limite e^z est continue en ce point.

Théorème 2. Soient $a < b$ des nombres réels. Soient $(f_n)_{n \geq 0}$ et f des fonctions définies et continues sur le segment $[a, b]$, à valeurs complexes. Soit $x_0 \in [a, b]$. Pour tout $x \in [a, b]$ on pose :

$$F_n(x) = \int_{x_0}^{x} f_n(t)\,dt \qquad \text{et} \qquad F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt .$$

On suppose que la suite (f_n) converge vers f uniformément sur $[a, b]$. Alors :

1°) La suite (F_n) converge vers F uniformément sur $[a, b]$.

2°) En particulier (pour $x_0 = a$, $x = b$) :

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt ,$$

c'est-à-dire, formellement :

$$\int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt :$$

on peut "permuter intégration et limite (uniforme)" ; on peut "passer à la limite sous le signe somme".

Remarque : déjà la conclusion du Théorème 1 pouvait être présentée comme la commutation de deux limites :

$$\lim_{z \to z_0} \lim_{n \to +\infty} f_n(z) = \lim_{n \to +\infty} \lim_{z \to z_0} f_n(z).$$

Démonstration du Théorème 2. L'hypothèse de convergence uniforme étant exprimée par (2), pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe un entier N_ε tel que

$$n \geq N_\varepsilon \text{ entraîne } \sup_{a \leq t \leq b} |f(t) - f_n(t)| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

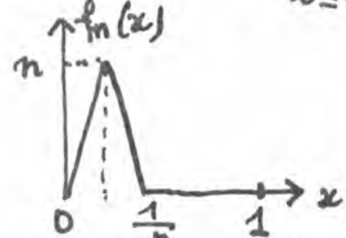
A fortiori, d'après l'inégalité de la moyenne, $n \geq N_\varepsilon$ entraîne que, quel que soit $x \in [a,b]$,

$$|F(x) - F_n(x)| = \left| \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt - \int_{x_0}^{x} f_n(t)\,dt \right| = \left| \int_{x_0}^{x} [f(t) - f_n(t)]\,dt \right|$$

$$\leq |x - x_0| \sup_{a \leq t \leq b} |f(t) - f_n(t)| \leq (b-a) \sup_{a \leq t \leq b} |f(t) - f_n(t)| \leq \varepsilon.$$

Contre-exemples : 1°)

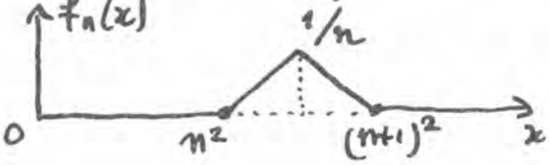
La suite $f_n(x)$ ci-contre



converge simplement,

mais non uniformément, vers $f(x) \equiv 0$ sur $[0,1]$, mais $\int_0^1 f_n(t)\,dt = \frac{1}{2}$ ne tend pas vers $\int_0^1 f(t)\,dt = 0$.

2°) Le Théorème 2 ne s'étend pas aux intervalles d'intégration infinis. Par exemple la suite $f_n(x)$ ci-contre converge uniformément vers 0 sur $[0, +\infty[$,



mais $\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = \frac{2n+1}{2n}$ ne tend pas vers 0.

Corollaire du Théorème 2 (théorème de continuité sous le signe d'intégration). Soient $a < b$ deux nombres réels, et soit E un ensemble ouvert dans $\mathbb{R}$, ou dans $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, ou même dans $\mathbb{R}^p$. Soit $f = f(t,x)$ une fonction définie dans l'ensemble $[a,b] \times E$ de $\mathbb{R}^{p+1}$ formé des couples (t,x), où $t \in [a,b]$ et $x \in E$. On suppose que f est continue par rapport à l'ensemble des variables (t,x) [donc comme fonction de $p+1$ variables réelles] dans cet ensemble (cf AN03, Leçon n° 2). Alors la fonction

$$x \longmapsto F(x) = \int_a^b f(t,x)\,dt$$

est continue dans E.

<u>Démonstration</u>. Soit x_0 un point de E, et soit r un nombre réel positif assez petit pour que la boule $B = \{x \in \mathbb{R}^p, \|x-x_0\| \leq r\}$ soit contenue dans E. Pour démontrer la continuité de F au point x_0, on peut restreindre x à parcourir B. L'ensemble $[a,b]\times B$ est borné fermé, donc compact, dans $\mathbb{R}^p$; par suite du Théorème de Heine (AN03, Leçon n° 2, Théorème 2), la fonction $f(t,x)$ est <u>uniformément</u> continue sur $[a,b]\times B$; en particulier, si $\varepsilon > 0$ est donné, il existe $\eta > 0$ tel que:

$$\begin{cases} \|x-x_0\| < \eta \text{ entraîne que, } \underline{\text{quel que soit } t \in [a,b]}, \text{ on a} \\ \qquad |f(t,x) - f(t,x_0)| \leq \varepsilon . \end{cases}$$

Pour montrer que F est continue au point x_0, d'après AN03, Leçon n° 2, Propos. 1, il suffit de voir que, si $(x_n)_{n\geq 1}$ est une suite dans E qui tend vers x_0, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} F(x_n) = F(x_0)$. Mais, pour cela, il suffit d'appliquer le théorème 2 en posant :

$$f(t,x_n) = f_n(t) \qquad ; \qquad f(t,x_0) = f(t)$$

et de remarquer que :

$$\sup_{a\leq t\leq b} |f(t) - f_n(t)| = \sup_{a\leq t\leq b} |f(t,x_0) - f(t,x_n)|$$

est $\leq \varepsilon$ dès que $n \geq N_\varepsilon$, où N_ε est choisi assez grand pour que $\|x_0 - x_n\|$ soit $< \eta$ pour tout $n \geq N_\varepsilon$.

<u>Exemple</u> (fonctions de Bessel). Pour les besoins de l'Astronomie, Bessel a introduit en 1826 les fonctions :

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(nt - x\sin t)\,dt ,$$

où n est un paramètre entier. Ces fonctions sont continues sur $\mathbb{R}$.

<u>Théorème</u> 3 (convergence uniforme et dérivation). Soient $a < b$ des nombres réels. Soient $(f_n)_{n \geq 0}$; f ; et g des fonctions définies sur $]a, b[$, à valeurs complexes. On suppose :

1°) que chaque fonction (f_n) admet sur $]a, b[$ une dérivée première continue f'_n ;

2°) que la suite (f_n) converge simplement sur $]a, b[$ vers f ;

3°) que la suite <u>des dérivées</u> (f'_n) converge <u>uniformément</u> sur $]a, b[$ vers g :

Alors la fonction f est dérivable sur $]a, b[$, et sa dérivée est g. Autrement dit, formellement :

$$\frac{d}{dx} \lim_{n \to +\infty} f_n(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{d}{dx} f_n(x) .$$

On prendra garde que l'hypothèse forte de convergence uniforme doit être vérifiée sur les <u>dérivées</u> f'_n, et non sur les f_n.

<u>Démonstration</u>. Vu l'hypothèse 3°) et le Théorème 1, la fonction g est continue sur $]a, b[$. Choisissons une origine x_0 dans $]a, b[$. Pour tout n on a, d'après le théorème fondamental de Newton et Leibniz :

$$f_n(x) = \int_{x_0}^{x} f'_n(t)\,dt + f_n(x_0).$$

À x fixé, faisons tendre n vers $+\infty$. En vertu de l'hypothèse 2°) et du Théorème 2, on obtient :

$$f(x) = \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt + f(x_0),$$

ce qui entraîne évidemment que f est dérivable, et que $f'(x) = g(x)$.

<u>Corollaire</u> (dérivation sous le signe d'intégration)(*). Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, et soit $(t, x) \mapsto f(t, x)$ une fonction définie sur $[a, b] \times I$, telle que :

1°) pour chaque $x \in I$ fixé, la fonction $t \mapsto f(t, x)$ est continue

---

(*) déjà pratiquée par Leibniz.

dans $[a,b]$;

2°) la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)$ existe et est continue par rapport à l'ensemble des variables (t,x) dans $[a,b]\times I$.

Alors la fonction $$F(x)=\int_a^b f(t,x)\,dt$$
est dérivable dans I, et :
$$\frac{d}{dx}\int_a^b f(t,x)\,dt = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\,dt .$$

<u>Démonstration</u>. On peut par linéarité supposer f réelle, et on peut se restreindre à un intervalle fermé J contenu dans I. Pour tout entier $n\geqslant 1$, posons, pour tout $x\in J$:
$$f_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\,,\,x\right)$$
et donc $$f_n'(x)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\partial f}{\partial x}\left(a+\frac{k}{n}(b-a),\,x\right).$$

D'après la théorie de l'intégrale de Riemann (ANO2, Leçon n° 3), quand $n\to+\infty$, pour tout x fixé dans J, la suite $(f_n(x))$ tend vers $F(x)$, et la suite $f_n'(x)$ vers $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\,dt$. Il suffit donc d'appliquer le Théorème 3, à condition de prouver que la deuxième de ces convergences est uniforme dans J. Mais ceci résulte de l'uniforme continuité (théorème de Heine) de la fonction $(t,x)\mapsto\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)$ sur l'ensemble compact $[a,b]\times J$ de $\mathbb{R}^2$. En effet, vu cette continuité uniforme, pour $\varepsilon>0$ donné, il existe un entier N_ε tel que, quel que soit l'intervalle T de longueur $\leqslant\frac{1}{N_\varepsilon}$ dans $[a,b]$ et quel que soit x dans J, on a :
$$\sup_{t\in T}\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)-\inf_{t\in T}\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\leqslant\varepsilon .$$
Donc, dès que $n\geq N_\varepsilon$, les sommes de Riemann supérieure et inférieure de l'intégrale $\int_a^b\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\,dt$, pour la subdivision de

$[a,b]$ en n parties égales, ne diffèrent pas de plus que ε. Par conséquent $n \geq N_\varepsilon$ entraîne que, quel que soit $x \in J$,

$$\left| \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\,dt - f_n'(x) \right| \leq \varepsilon .$$

Exemple. Dérivons deux fois sous le signe somme la fonction de Bessel $\quad J_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x \sin t)\,dt \quad :$

$$J_0'(x) = -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin t \, \sin(x\sin t)\,dt \quad ;$$

$$J_0''(x) = -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin^2 t \, \cos(x \sin t)\,dt .$$

Transformons $J_0'(x)$ en l'intégrant par parties :

$$J_0'(x) = -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\cos^2 t \,\cos(x\sin t)\,dt + \Big[\cos t \,\sin(x \sin t)\Big]_{t=0}^{t=\pi} \text{, donc :}$$

$$J_0'(x) = \left(-\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos^2 t\,\cos(x\sin t)\,dt\right) x .$$

On voit que $J_0(x)$ est solution de l'équation différentielle :

$$(E_0) \qquad x y'' + y' + xy = 0$$

Exercice 4. Soit n un nombre entier. Montrez que la fonction de Bessel $\quad J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(nt - x\sin t)\,dt$

est solution de l'équation différentielle (dite de Bessel) :

$$(E_n) \qquad x^2 y'' + x y' + (x^2 - n^2)\,y = 0 .$$

Exercice 5. Pour $x \neq 0$, on pose $F(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{Log}(\cos^2 t + x^2 \sin^2 t)\,dt$.

Calculez $F(1)$. Calculez $F'(x)$ par dérivation sous le signe somme, puis calcul explicite de l'intégrale ainsi obtenue. Déduisez-en la valeur de $F(x)$. Etendez le résultat au cas de $x = 0$.

Critère de Cauchy d'uniforme convergence

Soit D un sous-ensemble de $\mathbb{C}$. Soit (f_n) une suite de fonctions définies dans D, à valeurs complexes. Pour que cette suite converge

uniformément dans D (vers une f non précisée à l'avance)
il faut et il suffit que :

(4) $\begin{cases} \text{quel que soit } \varepsilon > 0, \text{ il existe } N = N(\varepsilon) \text{ tel que } m \geq n \geq N_\varepsilon \text{ entraîne} \\ \text{que, quel que soit } z \in D, \text{ on a : } |f_m(z) - f_n(z)| \leq \varepsilon. \end{cases}$

Nous omettrons la démonstration, facile à partir du critère de Cauchy pour les suites numériques.

Cas des séries de fonctions.

L'Analyse présente de nombreux exemples de séries dont le terme général est une fonction de variable réelle ou même complexe, par exemple les séries entières $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$, qui seront étudiées à la prochaine Leçon (nous connaissons déjà $\exp(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$), et les séries trigonométriques $\sum_{n\geq 0} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$, qui seront étudiées à la Leçon n° .

La convergence d'une série équivaut à celle d'une suite (s_n). Nous traduirons sans difficultés les définitions et résultats exposés jusqu'à présent dans cette Leçon.

Soit D une partie de $\mathbb{C}$. Soit (u_n) une suite de fonctions définies dans D, à valeurs complexes. On pose $s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$. Soit s une fonction définie dans D, à valeurs dans $\mathbb{C}$. On dit que la série $\sum_{n\geq 0} u_n(z)$ converge simplement dans D vers $s(z)$ si la suite (s_n) converge simplement dans D vers s, autrement dit si, pour tout $z_0 \in D$, la série numérique $\sum_{n\geq 0} u_n(z_0)$ converge et a pour somme le nombre $s(z_0)$. On dit que la série $\sum_{n\geq 0} u_n(z)$ converge uniformément dans D vers $s(z)$ si la suite (s_n) converge uniformément vers s dans D, autrement dit si :

(1)' $\begin{cases} \text{quel que soit } \varepsilon > 0, \text{ il existe } N = N(\varepsilon) \text{ tel que } n \geq N \text{ entraîne} \\ \text{que, quel que soit } z \in D, \text{ on a } \left|s(z) - \sum_{p=0}^{n} u_p(z)\right| \leq \varepsilon. \end{cases}$

Pour cela, il faut et il suffit que soit vérifié le critère de Cauchy d'uniforme convergence dans D, à savoir :

$(4)'$ $\begin{cases} \text{quel que soit } \varepsilon > 0, \text{ il existe } N = N(\varepsilon) \text{ tel que } m \geq n \geq N_\varepsilon \\ \text{entraîne que, quel que soit } z \in D, \text{ on a } \left| \sum\limits_{p=n}^{p=m} u_p(z) \right| \leq \varepsilon. \end{cases}$

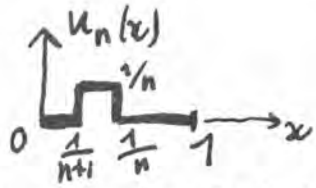
On dit enfin que la série de fonctions $\sum\limits_{n \geq 0} u_n(z)$ converge <u>normalement dans D</u> s'il existe une suite $(v_n) \geq 0$ <u>numérique</u> (donc indépendante de z) telle que :

$(3)'$ $\begin{cases} 1^\circ) \text{ pour tout } z \in D, \text{ on a } |u_n(z)| \leq v_n \ ; \\ 2^\circ) \text{ la série numérique } \sum\limits_{n \geq 0} v_n \text{ converge.} \end{cases}$

La convergence normale est un critère pratique très utilisé ; elle implique la convergence (absolue et) uniforme dans D. En effet supposons $(3)'$. Soit $\varepsilon > 0$. D'après le critère de Cauchy il existe N_ε tel que $m \geq n \geq N_\varepsilon$ implique $v_n + v_{n+1} + \cdots + v_m \leq \varepsilon$. Alors $m \geq n \geq N_\varepsilon$ entraîne que, quel que soit $z \in D$,

$|u_n(z) + u_{n+1}(z) + \cdots + u_m(z)| \leq |u_n(z)| + \cdots + |u_m(z)| \leq v_n + \cdots + v_m \leq \varepsilon$,

ce qui vérifie $(4)'$.

<u>Contre-exemple.</u> Si 

, la série $\sum\limits_{n \geq 0} u_n(x)$ converge uniformément sur $[0,1]$, mais pas normalement.

<u>Exemples</u> 1°) $\sum\limits_{n \geq 0} z^n$ converge normalement dans chaque disque $D_a = \{|z| \leq a\}$, où $0 \leq a < 1$.

2°) Pour tout $a > 0$, la série $\sum\limits_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$ converge normalement dans le disque $D_a = \{|z| \leq a\}$ vers la fonction $\exp(z)$.

<u>Théorème 1'.</u> Soit D un ensemble ouvert dans $\mathbb{C}$ (ou un ensemble ouvert dans $\mathbb{R}$). Soit $z_0 \in D$. Soient $(u_n)_{n \geq 0}$ et s des fonctions définies dans D, à valeurs complexes. Supposons que :

1°) la série $\sum\limits_{n \geq 0} u_n(z)$ converge vers $s(z)$ <u>uniformément</u> dans D ;

2°) chaque fonction u_n est continue au point z_0.

Alors la fonction s est continue au point z_0.

Théorème 2' (d'intégration terme à terme). Soient $a < b$ deux nombres réels. On suppose qu'une série $\sum_{n\geq 0} u_n(x)$ de fonctions continues sur $[a,b]$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers une $s(x)$ [qui est continue, par le Théorème 1']. Alors la série numérique $\sum_{n\geq 0}\int_a^b u_n(x)\,dx$ converge, et a pour somme le nombre $\int_a^b s(x)\,dx$. Autrement dit :

$$\int_a^b \sum_{n\geq 0} u_n(x)\,dx = \sum_{n\geq 0}\int_a^b u_n(x)\,dx.$$

Exercice 6. On pose $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\sin^2\theta}\,d\theta$. Montrez que :

$$I = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{3}{16} - \frac{5}{96} + \frac{35}{3072} - \frac{21}{10.240} + \cdots + (-1)^n \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n (n!)^2} + \cdots\right).$$

Déduisez-en que, si on donne à I la valeur 1, on commet une erreur absolue inférieure à 2.10^{-2}, mais que néanmoins $I \neq 1$.

Théorème 3' (de dérivation terme à terme). Soient $a < b$ des nombres réels. Soit (u_n) une suite de fonctions définies dans $]a,b[$ et admettant chacune une dérivée première $u_n'(x)$ continue dans $]a,b[$. On suppose

1°) que la série $\sum_{n\geq 0} u_n(x)$ converge simplement dans $]a,b[$ vers une $s(x)$;

2°) que la série dérivée terme à terme $\sum_{n\geq 0} u_n'(x)$ converge uniformément dans $]a,b[$ vers une $t(x)$.

Alors la fonction s est dérivable dans $]a,b[$, et $s'(x) = t(x)$.
Autrement dit :

$$\frac{d}{dx}\sum_{n\geq 0} u_n(x) = \sum_{n\geq 0}\frac{d}{dx}u_n(x).$$

Exercice 7. Montrez que la série $s(x) = \sum_{n\geq 0}\frac{e^{-nx}}{1+n^2}$ converge normalement pour $x \geq 0$, et que ses séries dérivées première et seconde terme à terme convergent normalement pour $x \geq a$, quel que soit a donné > 0. En déduire que, pour tout $x > 0$, la fonction s est solution de l'équation différentielle

$$y'' + y = \frac{1}{1-e^{-x}}.$$

44/ Indications sur les Exercices proposés dans cette Leçon

Exercice 1. Il faut et il suffit que $M_n = \sup\limits_{0\le x\le 1} |f_n(x)|$ tende vers zéro.

Exercice 2. Si $x=0$, la suite $f_n(0)=0$ quel que soit n tend vers 0. Si $x>0$, on a $f_n(x) \sim \frac{2}{x}\frac{1}{n}$ tend aussi vers 0. Mais $\sup\limits_{0\le x\le 1} |f_n(x)|$ est $\geqslant f_n\left(\frac{1}{n}\right)=1$, donc ne tend pas vers 0 ; par conséquent (f_n) ne converge pas uniformément vers 0 sur $[0,1]$. Puisque $f_n'(x) = \frac{2n}{(1+n^2x^2)^2}(1-n^2x^2)$, $f_n(x)$ passe par un maximum pour $x=\frac{1}{n}$; si on donne $a>0$, dès que $n>\frac{1}{a}$, on a $\sup\limits_{a\le x\le 1} |f_n(x)| = f_n(a) = \frac{2na}{1+n^2a^2}$, qui tend vers 0 quand $n\to+\infty$. Ainsi (f_n) converge uniformément vers 0 sur chaque $I_a=[a,+\infty[$, où $a>0$.

Exercice 3. $f(z)-f_n(z) = \frac{1}{1-z} - (1+z+\cdots+z^n) = \frac{z^{n+1}}{1-z}$,

donc, si $|z|\le a<1$, on a $|f(z)-f_n(z)| \le \frac{a^{n+1}}{1-a} = v_n$ indépendant de z, avec $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$. Par conséquent $f_n(z)$ converge vers $f(z)$ uniformément dans chaque D_a, d'après (3). Mais, quand x réel <1 tend vers 1, on a : $\lim [f(x)-f_n(x)] = +\infty$, donc $|f(z)-f_n(z)|$ n'est pas bornée dans D.

Exercice 4. Dérivons deux fois sous le signe somme :

$$\pi J_n(x) = \int_0^\pi \cos(nt - x\sin t)\,dt \qquad ;$$

$$\pi J_n'(x) = \int_0^\pi \sin t \sin(nt - x\sin t)\,dt \qquad ;$$

$$\pi J_n''(x) = -\int_0^\pi \sin^2 t \cos(nt - x\sin t)\,dt \qquad .$$

Intégrons par parties $\pi J_n'(x)$:

$$\pi J_n'(x) = \int_0^\pi \cos t\,[\cos(nt-x\sin t)](n-x\cos t)\,dt - \Big[\cos t \sin(nt-x\sin t)\Big]_{t=0}^{t=\pi}$$

$$= -x\int_0^\pi \cos^2 t \cos(nt-x\sin t)\,dt + n\int_0^\pi \cos t \cos(nt-x\sin t)\,dt$$

$$= -\pi x\left[J_n(x) + J_n''(x)\right] + n\int_0^\pi \cos t \cos(nt-x\sin t)\,dt.$$

Mais, de la relation

$$\int_0^\pi (n - x\cos t)\cos(nt - x\sin t)\,dt = \Big[\sin(nt - x\sin t)\Big]_{t=0}^{t=\pi} = 0,$$

on tire $\displaystyle\int_0^\pi \cos t\cos(nt - x\sin t)\,dt = \frac{n}{x}\int_0^\pi \cos(nt - x\sin t) = \frac{n}{x}\pi J_n(x)$,

donc (E_n).

<u>Exercice</u> 5. $F(1) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{Log}(1)\,dt = 0$; $F'(x) = 2x\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t + x^2\sin^2 t}\,dt$

$= \pi(1+|x|)$. Donc $F(x) = \pi\,\mathrm{Log}(1+|x|) + C$. Puisque $F(1) = 0$, il faut $C = -\pi\,\mathrm{Log}\,2$, et $F(x) = \pi\,\mathrm{Log}\,\dfrac{1+|x|}{2}$. Par continuité $F(0) = -\pi\,\mathrm{Log}\,2$; il est donc probable que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{Log}(\cos t)\,dt = -\frac{\pi}{2}\mathrm{Log}\,2$, mais cette formule demande à être justifiée, car l'intégrale du premier membre doit être définie comme intégrale généralisée (à la borne $\frac{\pi}{2}$) ; nous reprendrons la question plus tard (Leçon n° 12, Exercice 5).

<u>Exercice</u> 6. $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{\sin^{2n}\theta}{n!}\,d\theta = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{1}{n!}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}\theta\,d\theta$. On applique la formule de Wallis $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}\theta\,d\theta = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\cdots(2n)}\frac{\pi}{2}$, démontrée par récurrence en AN02, Leçon n°4, § 4, et on obtient la série proposée pour I. Elle est alternée, et son terme général tend vers 0 en décroissant en valeur absolue. On a donc :

$$\frac{\pi}{2}\Big(1 - \frac{1}{2} + \frac{3}{16} - \frac{5}{96} + \frac{35}{3072} - \frac{21}{10240}\Big) < I < \frac{\pi}{2}\Big(1 - \frac{1}{2} + \frac{3}{16} - \frac{5}{96} + \frac{35}{3072}\Big),$$

c'est-à-dire $1,0128 < I < 1,0160$.

<u>Exercice</u> 7. Pour $x \geq 0$, on a : $|u_n(x)| = \dfrac{e^{-nx}}{1+n^2} \leq \dfrac{1}{1+n^2} = v_n$ indépendant de x, avec $\sum_{n\geq 0} v_n$ convergente ; il y a donc convergence normale sur $[0, +\infty[$. Soit $a > 0$ fixé. On a, pour $x \geq a$, et $n > 0$,

$|u_n'(x)| = \dfrac{ne^{-nx}}{1+n^2} \leq e^{-na} = \Big(\dfrac{1}{e^a}\Big)^n$, et de même

$|u_n''(x)| = \dfrac{n^2 e^{-nx}}{1+n^2} \leq e^{-na} = \Big(\dfrac{1}{e^a}\Big)^n$. Or $\Big(\dfrac{1}{e^a}\Big)^n$ est le terme général d'une série géométrique convergente, donc il y a convergence normale des séries dérivée première et seconde terme à terme sur tout $[a, +\infty[$. Si $x > 0$ est donné, on choisit un a tel que $0 < a < x$; on applique le Théorème 3' : $s''(x) + s(x) = \displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{e^{-nx}}{1+n^2} + \sum_{n\geq 0} \frac{n^2 e^{-nx}}{1+n^2} = \sum_{n\geq 0} (e^{-x})^n = \frac{1}{1-e^{-x}}$.

Séries entières.

On appelle <u>série entière</u> une série de fonctions du type

(1) $\quad a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots\cdots + a_n z^n + \cdots\cdots$,

où les <u>coefficients</u> a_n et la <u>variable</u> z sont des nombres complexes. Souvent on se restreint à la variable $z = x$ réelle.

Etudions d'abord le domaine de convergence de (1).

<u>Lemme</u>. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. Supposons que la suite $(a_n z_0^n)$ soit bornée (ce qui a lieu en parti-culier si la série numérique $\sum_{n\geq 0} a_n z_0^n$ converge, car alors cette suite tend vers 0). Alors, pour tout nombre complexe z tel que $0 \leq |z| < |z_0|$, la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ converge absolument.

<u>Démonstration</u>. On peut supposer $z_0 \neq 0$. Soit $M = \sup_n |a_n z_0^n|$. Si $0 \leq |z| < |z_0|$, on a :

$$|a_n z^n| \leq |a_n z_0^n| \left|\frac{z}{z_0}\right|^n \leq M q^n, \quad \text{où} \quad 0 \leq q = \left|\frac{z}{z_0}\right| < 1,$$

donc (1) converge absolument par comparaison avec la série géométrique de raison q.

<u>Théorème 1</u>. Il existe un « nombre » R tel que $0 \leq R \leq +\infty$ et un seul tel que :

1°) si $|z| < R$, la série (1) converge absolument ;

2°) si $|z| > R$, la série (1) diverge.(*)

<u>Démonstration</u>. Soit E l'ensemble des nombres réels $r \geq 0$ tels que la suite $(|a_n| r^n)$ soit bornée. L'ensemble E n'est pas vide, car il contient au moins 0. Si E n'est pas majoré, nous posons $R = +\infty$. Si E est majoré nous posons $R = \sup E$ = le plus petit des majorants de l'ensemble E (cf. AN01, Leçon n°2, § IV).

(*) et même son terme général n'est pas borné.

1°) Supposons $|z| < R$. Alors il existe un nombre $r_0 \in E$ tel que $|z| < r_0 < R$. La suite $(|a_n| r_0^n)$ est bornée. Si, dans le Lemme, on prend $z_0 = r_0$, on voit que la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ converge absolument.

2°) Supposons $|z| > R$. Alors $|z|$ n'est pas dans l'ensemble E. Donc la suite $(a_n z^n)$ n'est pas bornée. Par conséquent la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ diverge, car son terme général ne tend pas vers 0.

Prouvons l'unicité. S'il existait deux nombres R et R' tels que $0 \leq R < R' \leqslant +\infty$ satisfaisant tous deux aux propriétés 1°) et 2°), alors pour un nombre r choisi tel que $R < r < R'$, la série $\sum_{n\geq 0} a_n r^n$ devrait à la fois converger et diverger, ce qui est absurde.

<u>Définitions</u>. R est le <u>rayon de convergence</u> de (1). Le disque ouvert $\{|z| < R\}$ est le <u>disque de convergence</u> de (1) ; il est vide si $R = 0$, il coïncide avec $\mathbb{C}$ tout entier si $R = +\infty$. En variable $z = x$ réelle, $\{-R < x < R\}$ est <u>l'intervalle de convergence</u> de (1).

<u>Remarques</u>: 1°) Si $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = R$ existe (finie ou $+\infty$), alors R est le rayon de convergence, d'après la règle de d'Alembert. Par exemple, pour $\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$, on a $R = +\infty$; pour $\sum_{n\geq 0} n!\, z^n$, on a $R = 0$; pour k réel quelconque, la série $\sum_{n\geq 1} n^k z^n$ a pour rayon de convergence $R = 1$; la série $\sum_{n\geq 0} a^n z^n$ a pour rayon de convergence $\frac{1}{|a|}$.

2°) Le Théorème 1 ne dit rien pour $|z| = R$; en fait on ne peut rien dire de général sur la frontière du disque de convergence. Par exemple, soit k un nombre réel donné. La série entière $\sum_{n\geq 1} n^k z^n$ a toujours pour rayon de convergence $R = 1$, mais :

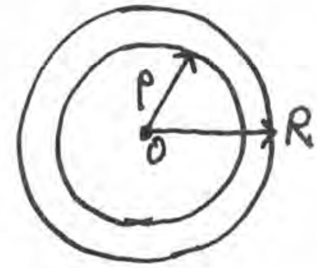
- si $k < -1$, elle converge absolument pour tout $|z| = 1$;
- si $k \geq 0$, elle diverge pour tout $|z| = 1$;
- si $-1 \leq k < 0$, elle diverge pour $z = 1$ et, d'après le critère d'Abel, elle converge (non absolument) pour $|z| = 1$, $z \neq 1$.

Relisez l'Exercice 5 de la Leçon n° 2.

On peut notablement préciser la convergence absolue pour $|z|<R$:

<u>Théorème 2</u>. Supposons que le rayon de convergence R de la série entière (1) $a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n + \cdots\cdots$ soit $\neq 0$. Alors, quel que soit le nombre réel ρ tel que $0 \leqq \rho < R$, la série (1) converge <u>normalement</u>, donc uniformément, dans le disque $|z| \leqq \rho$.

En effet, si $|z| \leqq \rho$, on a :

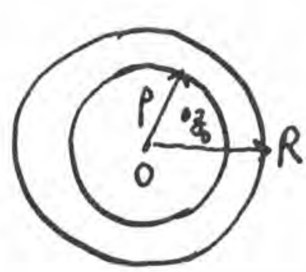


$|a_n z^n| \leqslant |a_n|\rho^n = v_n$ indépendant de z,

avec $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ convergente puisque $\rho < R$.

<u>Corollaire</u>. La somme $s(z)$ de (1) est fonction <u>continue</u> de z dans le disque de convergence $|z| < R$.

Car, si $|z_0| < R$, on peut choisir un ρ tel que $|z_0| < \rho < R$. Le disque $D_\rho = \{|z|<\rho\}$ englobe le point z_0. Sur D_ρ la fonction $s(z)$ est limite uniforme des polynômes



$$s_n(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n ,$$

qui sont évidemment continus au point z_0. Donc $s = s(z)$ est aussi continue au point z_0 (Leçon n° 3, Théorème 1).

<u>Rappel</u>. Nous avions déjà démontré ce Corollaire dans le cas de la fonction $\exp(z)$.

Voyons maintenant l'effet sur les séries entières des opérations classiques : addition, multiplication, intégration, dérivation.

<u>Proposition</u> 1. Supposons que :

$s(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n + \cdots\cdots$, pour $|z| < R_1$;

$t(z) = b_0 + b_1 z + \cdots + b_n z^n + \cdots\cdots$, pour $|z| < R_2$.

Soit $R = \min(R_1, R_2)$ le plus petit des deux nombres R_1 et R_2.

Alors, pour $|z| < R$,

1°) $s(z)+t(z)=a_0+b_0+(a_1+b_1)z+\cdots+(a_n+b_n)z^n+\cdots\cdots$;

2°) si $\lambda\in\mathbb{C}$, $\lambda s(z)=\lambda a_0+(\lambda a_1)z+\cdots\cdots+(\lambda a_n)z^n+\cdots\cdots$;

3°) $s(z)t(z)=c_0+c_1z+c_2z^2+\cdots\cdots+c_nz^n+\cdots\cdots$,

où $c_0=a_0b_0$; $c_1=a_0b_1+a_1b_0$; $c_2=a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0$; $\cdots\cdots$;

$$c_n=a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}b_1+a_nb_0=\sum_{p+q=n}a_pb_q\ ;\ \cdots\cdots$$

Démonstration du 3°) Le théorème 6, Leçon n° 2, de multiplication des séries s'applique avec $u_n=a_nz^n$, $v_n=b_nz^n$, donc :

$$w_n=\sum_{p+q=n}u_pv_q=\sum_{p+q=n}a_pz^pb_qz^q=\sum_{p+q=n}a_pb_qz^n=c_nz^n.$$

Exemple. En multipliant la série entière $\frac{1}{1-z}=\sum_{n\geq 0}z^n$ par elle-même, on obtient $\frac{1}{(1-z)^2}=\sum_{n\geq 0}(n+1)z^n$ pour $|z|<1$.

Exercice 1. Prouvez que, pour $|z|<1$,

$$\frac{1}{(1-z)^3}=1+3z+6z^2+\cdots\cdots+\frac{(n+2)(n+1)}{2}z^n+\cdots\cdots$$

Exercice 2. Décomposez en éléments simples la fraction rationnelle $f(z)=\frac{z}{1-z-6z^2}$. Ecrivez chaque élément simple comme somme, à un facteur près, d'une série géométrique. Déduisez-en que, pour $|z|<\frac{1}{3}$, on a $f(z)=a_0+a_1z+\cdots\cdots+a_nz^n+\cdots\cdots$, avec $a_n=\frac{1}{5}\left[3^n+(-1)^{n+1}2^n\right]$.

Proposition 2. Soient les trois séries entières de variable réelle :

(1) $s(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots+a_nx^n+\cdots\cdots$

(2) $t(x)=a_1+2a_2x+\cdots\cdots\cdots+(n+1)a_{n+1}x^n+\cdots\cdots$

(3) $S(x)=\quad a_0x+a_1\frac{x^2}{2}+\cdots\cdots+a_{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots\cdots$,

où la deuxième (resp. la troisième) se déduit de la première par dérivation (resp. intégration) terme à terme.

1°) Elles ont même rayon de convergence R.

2°) Si $R \neq 0$, pour tout x tel que $|x| < R$, on a :
$$t(x) = s'(x) = \frac{ds}{dx} \quad ; \quad S(x) = \int_0^x s(t)\,dt .$$

<u>Démonstration</u> 2°) Si $|x| < R$, on choisit ρ tel que $|x| < \rho < R$. D'après le Théorème 2, il y a convergence normale, donc uniforme, de (1), (2) et (3) dans l'intervalle $[-\rho, \rho]$, ce qui permet d'appliquer les théorèmes 2' et 3' de la Leçon n° 3.

1°) Puisque (2) est la dérivée terme à terme de (3), il suffit de prouver que le rayon de convergence R de (1) égale le rayon de convergence R' de (2). Or :

a) si $|x| > R$, la suite $(a_n x^n)$ n'est pas bornée ; a fortiori la suite $((n+1)a_{n+1}x^n)$ n'est pas bornée, donc $|x| \geqslant R'$; ainsi $R \geqslant R'$;

b) si $|x| > R'$, choisissons ρ tel que $|x| > \rho > R'$; la suite
$$|a_n x^n| = n|a_n|\rho^{n-1} \times \frac{\rho}{n}\left(\frac{|x|}{\rho}\right)^n$$
est le produit de deux suites $\geqslant 0$ dont l'une n'est pas bornée (car $\rho > R'$) et l'autre tend vers $+\infty$ (car $|x| > \rho$) ; donc cette suite n'est pas bornée, et $|x| \geqslant R$; ainsi $R' \geqslant R$.

<u>Exemples</u> 1) En dérivant terme à terme $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$, on retrouve que, pour $|x| < 1$, $\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + \cdots + (n+1)x^n + \cdots$.

2) En intégrant terme à terme $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots$, on trouve que
$$\boxed{\operatorname{Log}(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots}$$
pour $|x| < 1$, et nous savons même (Leçon n° 1, Exemple 4) que la formule est aussi valable pour $x = 1$.

3) En intégrant terme à terme $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots$, on trouve que :
$$\boxed{\operatorname{Arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots}$$
pour $|x| < 1$. Problème : peut-on faire $x = 1$ dans cette formule ? Nous verrons bientôt que la réponse est oui, ce qui donnera la

célèbre formule de Gregory :

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} + \cdots$$

4) En dérivant terme à terme $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$, on retrouve le fait que $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$.

5) A la prochaine Leçon nous verrons des exemples de recherche de solutions séries entières d'équations différentielles par la méthode des coefficients indéterminés, s'appuyant sur la dérivation terme à terme. Ceci apparaît déjà dans l'Exercice suivant.

Exercice 3 1) Ecrivez une série entière dont la somme soit, pour tout x réel, la fonction $F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$.

2) Montrez qu'il existe une fonction

$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

et une seule qui soit développable en série entière pour tout x réel, telle que $y(0) = 0$, et qui soit solution de l'équation différentielle :

$$(E) \quad \frac{dy}{dx} - 2x\, y(x) = 1.$$

Pour cela on cherchera une relation de récurrence entre a_n et a_{n-2}.

3) Vérifiez que $e^{x^2} F(x)$ est solution de (E), et coïncide avec $y(x)$. Déduisez-en que $F(x) = e^{-x^2} \sum_{k \geq 0} \frac{2^{2k}(k!)}{(2k+1)!} x^{2k+1}$, puis calculez les sommes $S_k = 1 - \frac{1}{3} C_k^1 + \frac{1}{5} C_k^2 + \cdots + (-1)^p \frac{1}{2p+1} C_k^p + \cdots + (-1)^k \frac{1}{2k+1} C_k^k$.

Théorème 2. Soit une série entière de variable réelle :

$$(1) \quad s(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots,$$

de rayon de convergence $R \neq 0$. Alors sa somme $s = s(x)$ est, sur l'intervalle $]-R, +R[$, une fonction indéfiniment dérivable, dont, pour tout entier $p \geq 0$, la dérivée p-ième est la somme de la série dérivée de (1) p fois terme à terme, c'est-à-dire :

$$(4) \quad s^{(p)}(x) = p!\, a_p + (p+1)p \cdots 3.2\, a_{p+1} x + \cdots + (n+p)(n+p-1)\cdots(n+1) a_{n+p} x^n + \cdots$$

pour $|x| < R$.

Il suffit d'appliquer de façon réitérée le 3°) de la Proposition 2.

En faisant $x=0$ dans (4) on trouve les égalités : $s^{(p)}(0) = p!\,a_p$ pour tout entier $p \geq 0$, ce qui donne le

<u>Corollaire</u>. Si $s(x)$ est la somme de la série entière

$$s(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots\cdots + a_n x^n + \cdots\cdots ,$$

supposée de rayon de convergence non nul, alors les coefficients a_n sont liés à la fonction s par les formules, pour tout $n \geq 0$:

$$(5) \qquad a_n = \frac{s^{(n)}(0)}{n!} .$$

Jusqu'à présent nous sommes partis d'une série entière pour aller vers sa fonction somme. Maintenant nous partons d'une fonction, et nous essayons de la représenter comme somme d'une série entière.

<u>Définition</u>. Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, contenant 0. Soit f une fonction définie dans I, à valeurs complexes. On dit que f est <u>développable en série entière</u> au voisinage de l'origine s'il existe un nombre $\rho > 0$ et une suite $(a_n)_{n\geq 0}$ de nombres complexes, tels que : 1°) $]-\rho, \rho[$ est contenu dans I ; 2°) la série $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ a un rayon de convergence $\geq \rho$; 3°) pour tout $|x| < \rho$, on a :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots\cdots + a_n x^n + \cdots\cdots$$

Le Corollaire ci-dessus montre que, <u>si f est développable</u>, nécessairement f est indéfiniment dérivable au voisinage de 0, et son développement ne peut être que celui donné par les formules (5), et qu'on appelle <u>série de Mac Laurin</u> (ou <u>de Taylor</u> à l'origine) <u>de f</u> :

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots\cdots$$

Mais attention ! soit f une fonction indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$. Il arrive que la série de Mac Laurin associée à f ne converge que pour $x=0$; elle ne peut alors représenter f. Il peut même arriver que la série de Mac Laurin de f converge pour

pour tout x vers une $g(x)$, mais que, pour tout $x \neq 0$, on ait $g(x) \neq f(x)$; c'est par exemple le cas pour la fonction définie par :

$f(0) = 0$; et $f(x) = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$ si $x \neq 0$, dont on peut montrer qu'elle est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$, et "plate" à l'origine, c'est-à-dire telle que $f^{(p)}(0) = 0$ quel que soit p entier ≥ 0. Heureusement, pour beaucoup de fonctions usuelles, leur série de Taylor converge vers la fonction dans un intervalle ouvert non vide, et fournit donc le développement cherché. C'est par cette méthode que nous avons déjà établi que :

$$\boxed{e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots\cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots\cdots}, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

En y remplaçant x par $x \operatorname{Log} a$, on obtient le développement :

$$a^x = 1 + \frac{\operatorname{Log} a}{1!} x + \frac{(\operatorname{Log} a)^2}{2!} x^2 + \cdots + \frac{(\operatorname{Log} a)^n}{n!} x^n + \cdots, \text{ pour } x \in \mathbb{R}$$
(où $a > 0$ est donné).

Par linéarité à partir de celui de e^x, on a les développements des fonctions hyperboliques :

$$\boxed{\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots}, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R} ;$$

$$\boxed{\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \cdots\cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots}, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Pour trouver le développement de $f(x) = \sin x$, remarquons que $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f'''(x) = -\cos x$, $f^{IV}(x) = \sin x$, etc...
Donc $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = -1$; $f^{IV}(0) = 0$; etc.

$$f^{(2k)}(0) = 0 \qquad ; \qquad f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. En appliquant la formule de Taylor à $f(x) = \sin x$ entre les points 0 et x (AN01, Leçon n° 6, § V), on voit qu'il existe un nombre ξ compris entre 0 et x tel que :

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + (-1)^{n+1} \cos\xi \, \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}$$

Quand, à x fixé, n tend vers $+\infty$, le reste tend vers 0 car $\lim_{n \to +\infty} \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!} = 0$. On a donc obtenu le développement :

54/ $$\boxed{\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots}, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Il donne par dérivation (ou intégration !)

$$\boxed{\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots}, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Développement du binôme $(1+x)^\alpha$.

Si α est un entier $p \geq 0$, on connaît la formule (polynômiale) du binôme de Newton, valable pour tout x réel :

$$(1+x)^p = 1 + C_p^1 x + C_p^2 x^2 + \cdots + C_p^n x^n + \cdots + C_p^p x^p =$$
$$= 1 + \frac{p}{1!} x + \frac{p(p-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{p(p-1)\cdots(p-n+1)}{n!} x^n + \cdots + x^p.$$

Soit maintenant α un nombre réel donné, non entier ≥ 0. Pour tout x réel > -1, on peut définir la fonction "binôme" :

$$f(x) = (1+x)^\alpha = e^{\alpha \operatorname{Log}(1+x)}.$$

Elle est indéfiniment dérivable pour $x > -1$, et :

$$f(x) = (1+x)^\alpha \; ; \; f'(x) = \alpha (1+x)^{\alpha-1} \; ; \; f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2} \; ; \text{ etc...};$$
$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n} \; ; \; \cdots$$

donc :

$$f(0) = 1 \; ; \; f'(0) = \alpha \; ; \; f''(0) = \alpha(\alpha-1) ; \ldots ; f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1) ; \ldots$$

La série de Mac-Laurin de la fonction $f(x) = (1+x)^\alpha$ est donc :

$$(6) \qquad 1 + \frac{\alpha}{1!} x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \cdots$$

Son rayon de convergence vaut 1, car $\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{n+1}{|\alpha - n|}$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$.

Notons $g(x)$ la somme de (6) pour $|x| < 1$, et essayons de prouver que $g(x) = f(x)$ pour tout $|x| < 1$. Déjà $g(0) = f(0) = 1$. On sait que :

$$\alpha f(x) = (1+x) f'(x).$$

Voyons si $g(x)$ satisfait à cette même équation différentielle que $f(x)$. Pour cela, en supposant $|x| < 1$, dérivons :

$$g(x) = 1 + \frac{\alpha}{1!} x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!} x^{n+1} + \cdots ;$$

$$g'(x) = \alpha + \alpha\frac{\alpha-1}{1!}x + \dots + \alpha\frac{(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{(n-1)!}x^{n-1} + \alpha\frac{(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{n!}x^n + \dots$$

Donc :

$$\frac{(1+x)g'(x)}{\alpha} = 1 + \left(1+\frac{\alpha-1}{1!}\right)x + \dots + \left[\frac{(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{(n-1)!} + \frac{(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{n!}\right]x^n + \dots$$

$$= 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \dots + \frac{(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{(n-1)!}\left(1+\frac{\alpha-n}{n}\right)x^n + \dots$$

$$= 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \dots = g(x).$$

Par conséquent, comme $f(x) = (1+x)^\alpha$, la fonction $g(x)$ vérifie l'équation différentielle $\alpha g(x) = (1+x)g'(x)$ pour $|x|<1$. Posons :

$$g(x) = (1+x)^\alpha h(x).$$

Alors $g'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}h(x) + (1+x)^\alpha h'(x)$, et $0 \equiv (1+x)g'(x) - \alpha g(x) = (1+x)^{\alpha+1}h'(x)$. Donc $h'(x) \equiv 0$, et $h(x) = \text{constante} = h(0) = 1$, ce qui prouve que $g(x) = (1+x)^\alpha$ pour tout $|x|<1$, et fournit le développement, pour $|x|<1$:

$$\boxed{(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \dots}.$$

De ce développement, qu'il faut savoir par coeur, nous citerons, pour $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\alpha = -\frac{1}{2}$, les cas particuliers :

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \dots + (-1)^{n-1}\frac{1.3.5\dots(2n-3)}{2.4.6\dots(2n)}x^n + \dots \quad ;$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \dots + (-1)^n\frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2.4.6\dots(2n)}x^n + \dots,$$

tous deux valables pour $|x|<1$.

Dans ce dernier développement, changeons x en $-x^2$ et intégrons terme à terme ; il vient, pour $|x|<1$:

$$\boxed{\operatorname{Arcsin} x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \dots + \frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2.4.6\dots(2n)}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots}.$$

<u>Exercice 4</u>. Calculez une valeur approchée par défaut à $0{,}5\times10^{-6}$ près de l'intégrale $\int_0^{1/2}\frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$ en la remplaçant par une série.

Exercice 5. Soit la fonction de Bessel d'indice entier $k \geq 0$:

$$J_k(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(kt - x\sin t)\,dt.$$

1°) En développant sous l'intégrale le cosinus en série entière de la variable $x\sin t$, puis en appliquant les formules de Wallis, montrez que $J_0(x)$ admet pour tout x réel le développement :

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x\sin t)\,dt = 1 - \frac{x^2}{4} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2} + \cdots\cdots$$

2°) Montrez que, pour tout x réel,

$$J_1(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(t - x\sin t)\,dt = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{16} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2^{2n+1}\, n!\,(n+1)!} + \cdots$$

3°) Prouvez, pour $k \geq 1$, les formules de récurrence :

$$2\,J_k'(x) = J_{k-1}(x) - J_{k+1}(x).$$

4°) Déduisez-en que, pour tout x réel,

$$J_k(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(kt - x\sin t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+k}}{n!\,(n+k)!}.$$

Indications sur les Exercices proposés dans cette Leçon.

Exercice 1. Ici $a_n = 1$ et $b_n = n+1$, donc $a_p b_q = q+1$, et

$$c_n = \sum_{p+q=n} a_p b_q = \sum_{q=0}^{n} q+1 = 1 + 2 + \cdots + (n+1) = \frac{(n+2)(n+1)}{2}.$$

Exercice 2. $$f(z) = \frac{z}{1 - z - 6z^2} = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{1-3z} - \frac{1}{1+2z}\right) =$$

$$\frac{1}{5}\left(\sum_{n\geq 0} 3^n z^n - \sum_{n\geq 0} (-2)^n z^n\right) = \sum_{n\geq 0} \frac{3^n + (-1)^{n+1} 2^n}{5} z^n,$$

pourvu que $|z| < \frac{1}{3}$ afin que les deux séries géométriques convergent.

Exercice 3. 1) En intégrant terme à terme $e^{-t^2} = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!}$, on obtient le développement valable pour tout x réel :

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n!\,(2n+1)} + \cdots\cdots$$

2°) Cherchons d'abord des conditions nécessaires. Il faut que $a_0 = y(0) = 0$, donc que :

$$y(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n + a_{n+1}x^{n+1} + \cdots\cdots$$

$$y'(x) = a_1 + 2a_2 x + \cdots\cdots + (n+1)a_{n+1}x^n + \cdots\cdots$$

La fonction

$$y'(x) - 2x\,y(x) = a_1 + 2a_2 x + (3a_3 - 2a_1)x^2 + \cdots + [(n+1)a_{n+1} - 2a_{n-1}]x^n + \cdots$$

ne peut être $\equiv 1$ que si $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, et $n a_n = 2a_{n-2}$ pour tout $n \geq 3$. Ces relations exigent que $a_n = 0$ si n est pair, et que, pour tout entier $k \geq 1$,

$$(2k+1)a_{2k+1} = 2a_{2k-1}\ ;\ (2k-1)a_{2k-1} = 2a_{2k-3}\ ;\ \ldots;\ 3a_3 = 2a_1\ ;\ a_1 = 1$$

donc
$$a_{2k+1} = \frac{2^k}{1.3.5\ldots(2k+1)} = \frac{2^{2k}(k!)}{(2k+1)!}.$$

La seule solution possible est donc

$$y(x) = \sum_{k\geq 0} \frac{2^{2k}(k!)}{(2k+1)!}\,x^{2k+1}.$$

Réciproquement on constate par la règle de d'Alembert que cette série a un rayon de convergence infini, et en la dérivant terme à terme, on vérifie que sa somme est solution de (E).

3°) On a $F'(x) = e^{-x^2}$, donc $\frac{d}{dx}\left(e^{x^2}F(x)\right) = 2xe^{x^2}F(x) + 1$. La fonction $e^{x^2}F(x)$, donc solution de (E), nulle à l'origine, et développable en série entière convergente pour tout x (comme produit de deux fonctions développables), ne peut que coïncider avec $y(x)$, d'où la formule $F(x) = e^{-x^2}y(x) = e^{-x^2}\sum_{k\geq 0}\frac{2^{2k}(k!)}{(2k+1)!}x^{2k+1}$.

En particulier faisons $x = 1$, d'où $e\,F(1) = y(1)$, c'est-à-dire :

$$\sum_{q\geq 0}\frac{1}{q!}\sum_{p\geq 0}\frac{(-1)^p}{p!(2p+1)} = \sum_{k\geq 0}\frac{2^{2k}(k!)}{(2k+1)!}.$$

D'après la règle de multiplication des séries, ceci signifie que, pour tout entier $k \geq 0$, $\sum_{p+q=k}\frac{(-1)^p}{q!\,p!\,(2p+1)} = \frac{2^{2k}(k!)}{(2k+1)!}$, ou

encore, en multipliant les deux membres par $k!$,

$$S_k = \sum_{p=0}^{k} (-1)^p \frac{1}{2p+1} C_k^p = \frac{[2^k (k!)]^2}{(2k+1)!}.$$

Exercice 4. En changeant x en $-t^4$ dans le développement classique de $(1+x)^{-1/2}$, puis en intégrant entre 0 et $1/2$ le développement obtenu, on a :

$$I = \int_0^{1/2} \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = \frac{1}{2} + \sum_{n\geq 1} \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)} \frac{1}{4n+1} \frac{1}{2^{4n+1}} = s_4 + R_4, \text{ avec :}$$

$$s_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{10}\left(\frac{1}{2}\right)^5 + \frac{3}{72}\left(\frac{1}{2}\right)^9 + \frac{15}{624}\left(\frac{1}{2}\right)^{13} = 0,503209, \text{ et :}$$

$$R_4 = I - s_4 < \frac{1}{17} \sum_{n=4}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{4n+1} = \frac{1}{17}\frac{1}{2^{17}}\left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^8 + \cdots\right) =$$

$$= \frac{1}{17}\frac{1}{2^{17}}\frac{1}{1-\frac{1}{2^4}} = \frac{16}{15\times 17}\frac{1}{2^{17}} = 0,000000479 < 0,5\times 10^{-6}.$$

Exercice 5. 1°) $J_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n}\sin^{2n} t}{(2n)!} dt =$

$$= \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{1}{(2n)!}\left(\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} t\, dt\right) x^{2n} = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{1}{(2n)!}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n} = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}{(n!)^2}.$$

2°) $J_1(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos t \cos(x\sin t)\, dt + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin t \sin(x\sin t)\, dt =$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin t \sin(x\sin t)\, dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}\sin^{2n+2} t}{(2n+1)!} dt =$$

$$= \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+2} t\, dt\right) x^{2n+1} =$$

$$= \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\frac{(2n+2)!}{2^{2n+2}[(n+1)!]^2} x^{2n+1} = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}}{n!\,(n+1)!}.$$

3°) $J_{k-1}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} [\cos(kt - x\sin t)\cos t + \sin(kt - x\sin t)\sin t]\, dt$;

$J_{k+1}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} [\cos(kt - x\sin t)\cos t - \sin(kt - x\sin t)\sin t]\, dt$;

donc $\frac{1}{2}[J_{k-1}(x) - J_{k+1}(x)] = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(kt - x\sin t)\sin t\, dt = J_k'(x)$.

4°) Par la règle de d'Alembert, la série $S_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+k}}{n!\,(n+k)!}$ converge pour tout x. Sur les coefficients on vérifie que, pour $k\geq 1$, on a $2S_k'(x) = S_{k-1}(x) - S_{k+1}(x)$. Comme $S_0 = J_0$ et $S_1 = J_1$, on en déduit par récurrence que $S_k(x) = J_k(x)$.

Exponentielle complexe. Compléments sur les séries entières.

Nous avons précédemment défini, pour tout nombre complexe z, le nombre complexe

$$e^z = \exp(z) = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots\cdots$$

Nous avons vu que cette série converge absolument et normalement, donc uniformément, sur toute partie bornée de $\mathbb{C}$. La convergence est rapide. La fonction $z \mapsto \exp(z)$ est continue dans $\mathbb{C}$. Pour $z = x$ réel, elle coïncide avec la fonction exponentielle e^x définie par d'autres moyens en AN 01.

Grâce au théorème de multiplication des séries, nous avons aussi étendu au champ complexe l'équation fonctionnelle de l'exponentielle : quels que soient $z \in \mathbb{C}$, $z' \in \mathbb{C}$, on a : $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$.

On a $e^0 = 1$. Donc, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a : $e^z e^{-z} = e^{z-z} = e^0 = 1$.

Par conséquent, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a : $e^z \neq 0$ et $\frac{1}{e^z} = e^{-z}$.

Cherchons à exprimer e^z à partir des parties réelle x et imaginaire y de $z = x + iy$. D'après l'équation fonctionnelle, $e^z = e^x e^{iy}$. Il suffit donc d'exprimer e^{iy}, où y est réel. Or

$$e^{iy} = \sum_{n \geq 0} \frac{(iy)^n}{n!} = \sum_{n \geq 0} \frac{i^n y^n}{n!} = \sum_{p \geq 0} \frac{i^{2p} y^{2p}}{(2p)!} + \sum_{p \geq 0} \frac{i^{2p+1} y^{2p+1}}{(2p+1)!} =$$

$$= \sum_{p \geq 0} (-1)^p \frac{y^{2p}}{(2p)!} + i \sum_{p \geq 0} (-1)^p \frac{y^{2p+1}}{(2p+1)!} = \cos y + i \sin y.$$

On vient de prouver la formule :

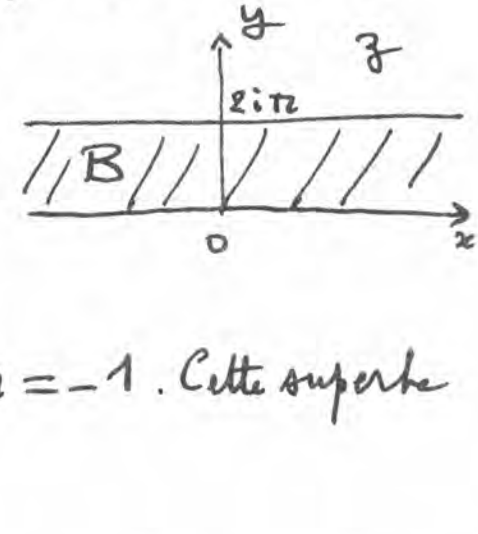
$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

pour $z = x + iy$, où $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, $i = \sqrt{-1}$.

Ainsi : $|e^z| = e^x = e^{\operatorname{Re} z}$; $\arg(e^z) = y = \operatorname{Im}(z) + 2k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$; $\operatorname{Re} e^z = e^x \cos y$; $\operatorname{Im} e^z = e^x \sin y$.

En changeant de notation, on voit que, pour tout nombre réel θ,
$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$$
est un nombre complexe de module 1. Réciproquement tout nombre complexe de module 1 est de la forme $e^{i\theta}$, où θ est l'un quelconque des arguments (définis à $2k\pi$ près) du nombre complexe considéré (cf. AN01, Leçon n°4, § VI). Plus généralement le nombre complexe non nul de module ρ, d'argument θ, s'écrit $\rho e^{i\theta}$.

Pour tout entier k, on a $e^{2ki\pi} = \cos(2k\pi) + i \sin(2k\pi)$, donc
$$e^{2ki\pi} = 1 \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$
Il y a donc d'autres nombres complexes z que 0, qui sont tels que $e^z = 1$. Par l'équation fonctionnelle, quel que soit $z \in \mathbb{C}$,
$$e^{z+2i\pi} = e^z e^{2i\pi} = e^z.$$
Ainsi la fonction $\exp(z)$ est périodique, de période $2i\pi$. Il suffit de l'étudier dans la bande :
$$B = \{ z = x+iy \ ; \ 0 \leq y < 2\pi \},$$



car, pour tout $z \in \mathbb{C}$, il existe un $\zeta \in B$ et un entier k tels que $z = \zeta + 2ik\pi$, donc $e^z = e^\zeta$.

Pour $z = i\pi$, on a $e^{i\pi} = \cos\pi + i \sin\pi = -1$. Cette superbe formule :
$$e^{i\pi} = -1$$
est due à Euler.

Soit $\mathbb{C}^*$ l'ensemble des nombres complexes non nuls. D'après l'équation fonctionnelle, exp transforme l'addition dans $\mathbb{C}$ en la multiplication dans $\mathbb{C}^*$ (on dirait en Algèbre que c'est un homomorphisme du groupe additif $\mathbb{C}$ dans le groupe multiplicatif $\mathbb{C}^*$). Etudions l'image et le "noyau" de cette transformation.

<u>Théorème 1</u> 1°) Soit $Z \neq 0$ un nombre complexe non nul donné. Les solutions en z de l'équation $\exp(z) = Z$ sont

l'infinité de nombres complexes :

(1) $\qquad z = \mathrm{Log}\,|Z| + i \arg z + 2ki\pi \qquad$ (k entier).

En particulier il y a des solutions, donc exp applique $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}^*$.

2°) Mais exp n'est pas injective. De manière précise, son noyau, ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que $\exp(z) = 1$, est l'ensemble des nombres $2ik\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$ (qui est bien un sous-groupe additif de $\mathbb{C}$, comme il se doit en Algèbre).

3°) Néanmoins l'application $z \mapsto \exp(z)$ est bijective de la bande $B = \{z = x+iy \,;\, 0 \leq y < 2\pi\}$ sur $\mathbb{C}^*$.

Remarque : Quelqu'envie qu'on en ait, il serait dangereux d'écrire $\mathrm{Log}\,Z = z$ quand $e^z = Z$. En effet cette notation $\mathrm{Log}\,Z$ recouvrirait l'infinité de valeurs (1), donc ce Log ne serait pas une vraie fonction.

Démonstration du théorème. Il suffit de prouver le 1°), car 2°) et 3°) en découlent presque aussitôt. Soit $Z \in \mathbb{C}^*$. Soit $\rho = |Z|$ et $\theta = \arg Z$. Cherchons les solutions z de l'équation $\exp(z) = Z$ sous la forme $z = x+iy$. Comme $|e^z| = e^x$ et $\arg e^z = y + 2k\pi$, l'équation équivaut au système d'équations en x, y :

$$e^x = \rho \qquad ; \qquad y = \omega + 2k\pi \quad , k \text{ entier},$$

donc à

$$x = \mathrm{Log}\,\rho = \mathrm{Log}\,|Z| \qquad ; \qquad y = \arg z + 2k\pi \quad , k \text{ entier}$$

c'est-à-dire à (1).

Exercice 1. Quel est l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que $\exp(z)$ soit réel ? imaginaire pur ?

Exercice 2. Montrez que $e^z = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$.

Proposition 1. Soit r une constante complexe. La fonction de variable réelle, à valeurs complexes, $x \mapsto e^{rx}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et sa dérivée est $\frac{d}{dx}\left(e^{rx}\right) = r e^{rx}$.

Démonstration. En posant $r = \alpha + i\beta$, où $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$, $i = \sqrt{-1}$, on a $e^{rx} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)$, donc

$$\frac{d}{dx}(e^{rx}) = \alpha e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) + e^{\alpha x}(-\beta\sin\beta x + i\beta\cos\beta x)$$
$$= (\alpha+i\beta)e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) = re^{rx}.$$

<u>Corollaire</u>. Si r est un nombre complexe $\neq 0$, on a :

$$\int e^{rx}dx = \frac{e^{rx}}{r} + \text{constante}.$$

<u>Application</u>. En Analyse 02, Leçon n°4, § 3, nous avons calculé les intégrales $I = \int e^{\alpha x}\cos(\beta x)\,dx$ et $J = \int e^{\alpha x}\sin(\beta x)\,dx$, où $\alpha \neq 0$ et β sont deux nombres réels, par une double intégration par parties. On peut aussi poser $\alpha + i\beta = r$ et calculer, en complexifiant :

$$I + iJ = \int e^{\alpha x}[\cos(\beta x) + i\sin(\beta x)]dx = \int e^{rx}dx = \frac{e^{rx}}{r} + C =$$
$$= \frac{e^{\alpha x}\cos(\beta x) + ie^{\alpha x}\sin(\beta x)}{\alpha + i\beta} = \frac{(\alpha - i\beta)(e^{\alpha x}\cos\beta x + ie^{\alpha x}\sin\beta x)}{\alpha^2+\beta^2},$$

d'où, en séparant le réel de l'imaginaire :

$$I = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}(\alpha\cos\beta x + \beta\sin\beta x) + C\,;\quad J = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}(\alpha\sin\beta x - \beta\cos\beta x) + C.$$

Grâce aux séries entières on peut généraliser à la variable complexe les <u>fonctions hyperboliques et circulaires</u>, ce qui d'ailleurs les fera apparaître comme des avatars, des tributaires de la seule essentielle fonction, l'exponentielle, et les unira dans un même moule.

Pour tout nombre complexe z, on pose :

$$\operatorname{ch} z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots\cdots + \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots\cdots$$
$$\operatorname{sh} z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots\cdots + \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots\cdots$$
$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots\cdots + (-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots\cdots$$
$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots\cdots + (-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots\cdots$$

On a les formules :

$$\operatorname{ch} z + \operatorname{sh} z = e^{z} \; ; \; \operatorname{ch} z - \operatorname{sh} z = e^{-z} \; ; \; \operatorname{ch} z = \frac{e^{z}+e^{-z}}{2} \; ; \; \operatorname{sh} z = \frac{e^{z}-e^{-z}}{2}$$

$$\cos z = \operatorname{ch}(iz) \quad ; \quad \sin z = \frac{1}{i}\operatorname{sh}(iz) \; ;$$

$$\operatorname{ch} z = \cos(iz) \quad ; \quad \operatorname{sh} z = \frac{1}{i}\sin(iz) .$$

Ainsi les fonctions circulaires sont hyperboliques, et réciproquement !

Donc $\quad \cos z + i \sin z = e^{iz} \quad ; \quad \cos z - i \sin z = e^{-iz}$,

d'où l'on déduit les <u>formules d'Euler</u> :

$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \quad ; \quad \sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} ,$$

très utiles, même (et surtout) quand $z = x$ est réel.

Des formules ci-dessus on déduit facilement les extensions suivantes de formules de la trigonométrie :

1) $\cos^2 z + \sin^2 z = 1 \quad ; \quad \operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1$.

2) $\cos(-z) = \cos z \; ; \; \operatorname{ch}(-z) = \operatorname{ch}(z) \; ; \; \sin(-z) = -z \; ; \; \operatorname{sh}(-z) = -z$.

3) $\cos(\pi+z) = -\cos z \; ; \; \sin(\pi+z) = -\sin z \; ; \; \sin(\pi - z) = \sin z \; ;$
$\cos(\pi - z) = -\cos z$.

4) $\cos z$ et $\sin z$ sont de période 2π ; $\operatorname{ch} z$ et $\operatorname{sh} z$ sont de période $2i\pi$.

5) Les formules d'addition :

$\operatorname{ch}(z+z') = \operatorname{ch} z \operatorname{ch} z' + \operatorname{sh} z \operatorname{sh} z' \quad ; \quad \operatorname{sh}(z+z') = \operatorname{sh} z \operatorname{ch} z' + \operatorname{ch} z \operatorname{sh} z'$

$\cos(z+z') = \cos z \cos z' - \sin z \sin z' \quad ; \quad \sin(z+z') = \sin z \cos z' + \cos z \sin z'$

procèdent toutes de la seule équation fonctionnelle :

$$e^{z+z'} = e^{z} e^{z'} ,$$

qui, en effet, s'écrit :

$$\operatorname{ch}(z+z') + \operatorname{sh}(z+z') = (\operatorname{ch} z + \operatorname{sh} z)(\operatorname{ch} z' + \operatorname{sh} z') , \quad \text{soit :}$$

$$\operatorname{ch}(z+z') + \operatorname{sh}(z+z') = \operatorname{ch} z \operatorname{ch} z' + \operatorname{sh} z \operatorname{sh} z' + \operatorname{sh} z \operatorname{ch} z' + \operatorname{ch} z \operatorname{sh} z'$$

puis, en changeant z en $-z$ et z' en $-z'$:

$$\operatorname{ch}(z+z') - \operatorname{sh}(z+z') = \operatorname{ch} z \operatorname{ch} z' + \operatorname{sh} z \operatorname{sh} z' - \operatorname{sh} z \operatorname{ch} z' - \operatorname{ch} z \operatorname{sh} z' .$$

Il suffit d'additionner et retrancher ces deux dernières relations pour obtenir les formules d'addition du ch et du sh. Celles du cosinus et du sinus s'en déduisent par le changement de z en iz.

Exercice 3. Pour $x\in\mathbb{R}$, $y\in\mathbb{R}$, $i=\sqrt{-1}$, montrez que :

$\sin(x+iy)=\sin x\,\mathrm{ch}\,y+i\cos x\,\mathrm{sh}\,y$; $\cos(x+iy)=\cos x\,\mathrm{ch}\,y-i\sin x\,\mathrm{sh}\,y$;

$\mathrm{sh}(x+iy)=\mathrm{sh}\,x\cos y+i\,\mathrm{ch}\,x\sin y$; $\mathrm{ch}(x+iy)=\mathrm{ch}\,x\cos y+i\,\mathrm{sh}\,x\sin y$;

$$|\sin(x+iy)|=\sqrt{\mathrm{ch}^2y-\cos^2x}\quad;\quad|\cos(x+iy)|=\sqrt{\mathrm{ch}^2y-\sin^2x}\,.$$

Exercice 4. Trouvez les solutions de l'équation $\sin z=\dfrac{5}{3}$.

Nombres de Bernoulli. Développements de $\mathrm{tg}\,x$ et $x\,\mathrm{cotg}\,x$.

Lemme 1 : $\displaystyle\lim_{z\in\mathbb{C}^*,\,z\to 0}\frac{e^z-1}{z}=1$.

En effet, en remplaçant e^z par la série qui le définit, on a, dès que $0<|z|\leq 1$:

$$\left|\frac{e^z-1}{z}-1\right|=|z|\left|\frac{1}{2!}+\frac{z}{3!}+\dots+\frac{z^{n-2}}{n!}+\dots\right|\leq e|z|\,.$$

Soit la fonction définie pour $|z|<2\pi$ par :

$$\varphi(0)=1\quad;\qquad \varphi(z)=\frac{z}{e^z-1}\quad\text{si } z\neq 0,\ |z|<2\pi\,.$$

La fonction φ est continue dans le disque $\{|z|<2\pi\}$, grâce au Lemme 1 (pour la continuité à l'origine) et au fait que e^z-1, hors de l'origine, s'annule pour la première fois au point $2i\pi$. Nous admettrons que, pour $|z|<2\pi$, la fonction $\varphi(z)$ est la somme d'une série entière, et nous poserons :

$$\varphi(z)=\frac{z}{e^z-1}=B_0+\frac{B_1}{1!}z+\frac{B_2}{2!}z^2+\dots+\frac{B_n}{n!}z^n+\dots$$

pour $|z|<2\pi$. Les constantes B_n s'appellent les nombres de Bernoulli. On peut les calculer de proche en proche en remarquant que :

$$z\equiv(e^z-1)\sum_{q\geq 0}\frac{B_q}{q!}z^q=\Big(\sum_{p\geq 1}\frac{z^p}{p!}\Big)\sum_{q\geq 0}\frac{B_q}{q!}z^q\Big)\,,$$

ce qui fournit les formules de récurrence :

$$B_0 = 1 \; ; \; \frac{B_0}{2!} + \frac{B_1}{1!1!} = 0 \; ; \; \frac{B_0}{3!} + \frac{B_1}{1!2!} + \frac{B_2}{2!1!} = 0 \; ; \text{ etc.} \dots ;$$

$$\frac{B_0}{(n+1)!} + \frac{B_1}{1!\,n!} + \dots + \frac{B_k}{k!(n+1-k)!} + \dots + \frac{B_{n-1}}{(n-1)!\,2!} + \frac{B_n}{n!\,1!} = 0 .$$

<u>Lemme</u> 2. $B_3 = B_5 = B_7 = \dots = B_{2n+1} = \dots = 0$.

Pour le voir, puisque $B_0 = 1$ et $B_1 = -\frac{1}{2}$, il suffit de vérifier que la fonction $\psi(z) = \varphi(z) - 1 + \frac{z}{2}$ est paire. Or

$$\frac{z}{e^z - 1} + \frac{z}{2} = \frac{z}{2}\,\frac{e^z + 1}{e^z - 1} = \frac{-z}{2}\,\frac{e^{-z}+1}{e^{-z}+1} ,$$

donc $\psi(-z) = \psi(z)$.

Désormais nous pourrons donc écrire :

$$(2) \qquad \varphi(z) = \frac{z}{e^z - 1} = 1 - \frac{z}{2} + \sum_{k \geq 1} \frac{B_{2k}}{(2k)!} z^{2k} \qquad (|z| < 2\pi)$$

Les formules de récurrence montrent de proche en proche que les nombres B_n sont rationnels, et fournissent leurs premières valeurs :

n	0	1	2	4	6	8	10	12	14	16	18
B_n	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{30}$	$\frac{1}{42}$	$-\frac{1}{30}$	$\frac{5}{66}$	$-\frac{691}{2730}$	$\frac{7}{6}$	$-\frac{3.617}{510}$	$\frac{43.867}{798}$

A l'aide de ces nombres, considérés maintenant comme connus, nous allons pouvoir écrire des développements en série entière pour les fonctions $\operatorname{tg} x$ et $x \operatorname{cotg} x$. Mais il est plus commode de passer en variable complexe et de travailler d'abord avec les lignes hyperboliques. Nous posons bien entendu :

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} \; ; \; \operatorname{cotg} z = \frac{\cos z}{\sin z} \; ; \; \operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} \; ; \operatorname{coth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}$$

sauf aux points où les dénominateurs s'annulent.

Remarquons que $z \coth z = z\,\frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z} = z\,\frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}} =$

$$= z\,\frac{e^{2z}+1}{e^{2z}-1} = z\,\frac{e^{2z}-1+2}{e^{2z}-1} = z + \frac{2z}{e^{2z}-1} = z + \varphi(2z) .$$

66/ Du développement (2) vient alors immédiatement que, pour $|2z| < 2\pi$,

$$z \operatorname{coth}(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k} B_{2k}}{(2k)!} z^{2k} \qquad (|z| < \pi),$$

puis, en changeant z en iz :

$$z \operatorname{cotg}(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{2k} B_{2k}}{(2k)!} z^{2k} \qquad (|z| < \pi).$$

De même :

$$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} = \frac{e^{2z} - 1}{e^{2z} + 1} = \frac{e^{4z} + 1 - 2e^{2z}}{e^{4z} - 1} =$$

$$= \frac{e^{4z} - 1 + 4 - 2(e^{2z} + 1)}{e^{4z} - 1} = 1 + \frac{1}{z}\left(\frac{4z}{e^{4z} - 1} - \frac{2z}{e^{2z} - 1}\right) =$$

$$= 1 + \frac{1}{z}\left[\varphi(4z) - \varphi(2z)\right].$$

Du développement (2) on déduit ceux de $\varphi(4z)$ et $\varphi(2z)$, qu'on reporte dans l'expression de $\operatorname{th} z$, d'où, pour $|4z| < 2\pi$:

$$\operatorname{th}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^{2k} - 2^{2k}}{(2k)!} B_{2k} z^{2k-1} \qquad \left(|z| < \frac{\pi}{2}\right),$$

puis, en changeant z en iz

$$\operatorname{tg}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{4^{2k} - 2^{2k}}{(2k)!} B_{2k} z^{2k-1} \qquad \left(|z| < \frac{\pi}{2}\right).$$

En particulier, pour tout x réel tel que $|x| < \frac{\pi}{2}$:

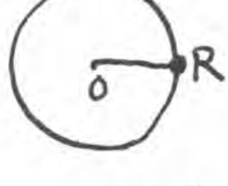
$$\boxed{\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15} x^5 + \cdots + (-1)^{k-1} \frac{4^{2k} - 2^{2k}}{(2k)!} B_{2k} x^{2k-1} + \cdots},$$

une formule qu'il eût été dommage de ne pas avoir dans notre catalogue de développements usuels.

<u>Sur la convergence à la frontière du disque de convergence</u>

Nous avons vu qu'on ne peut rien dire de général sur cette question ; selon les circonstances il peut y avoir aussi bien divergence que convergence absolue ou non absolue. Cependant on a le remarquable

<u>Théorème 2</u> (Abel). Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \neq +\infty$. Supposons qu'elle converge pour $z = R$. Alors elle converge uniformément sur le segment $0 \leq z = x \leq R$ de $\mathbb{R}$. Donc, pour $z = x$ réel, sa somme est fonction continue de x sur $]-R, +R]$, et notamment pour $x = R$ (le fait nouveau!). Par conséquent :



$$\sum_{n\geq 0} a_n R^n = \lim_{\substack{x \text{ réel} \to R \\ x < R}} \sum_{n\geq 0} a_n x^n .$$

<u>Exemples.</u> 1) Pour $|x| < 1$, on a: $\operatorname{Log}(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \dots$
Or, pour $x = R = 1$, la série alternée $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \dots$ converge, d'après le critère de Leibniz. Par conséquent sa somme vaut $\lim_{x<1, x\to 1} \operatorname{Log}(1+x) = \operatorname{Log} 2$. On retrouve ainsi la formule de Leibniz

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \dots = \operatorname{Log} 2 ,$$

déjà obtenue à la Leçon n° 1, Exemple 4, par la formule de Taylor.

2) Pour $|x| < 1$, on a: $\operatorname{Arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$
Or, pour $x = R = 1$, la série alternée $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} + \dots$ converge, d'après le critère de Leibniz. Par conséquent, sa somme vaut $\lim_{x<1, x\to 1} \operatorname{Arctg} x = \operatorname{Arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$. On a prouvé la formule de Gregory:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} + \dots = \frac{\pi}{4}$$

<u>Démonstration du théorème d'Abel</u>

On va vérifier pour la série $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ le critère de Cauchy d'uniforme convergence sur $[0, R]$. Soit $\varepsilon > 0$ donné. On cherche un entier N_ε tel que $m > n \geq N_\varepsilon$ implique que, quel que soit $0 \leq x \leq R$, on ait:

$$|a_{n+1} x^{n+1} + a_{n+2} x^{n+2} + \dots + a_m x^m| \leq \varepsilon .$$

Or on peut majorer le premier membre grâce au Lemme de la Leçon n° 2 qui y précède le Théorème 5 (critère d'Abel); si en effet on écrit :

$$a_n x^n = \left(\frac{x}{R}\right)^n a_n R^n$$

/

la suite $\left(\frac{x}{R}\right)^n$ est ≥ 0 décroissante. De plus, d'après le critère de Cauchy pour la convergence de la série numérique $\sum_{n\geq 0} a_n R^n$, il existe N_ε tel que $m > n \geq N_\varepsilon$ implique :

$$\left| a_{n+1} R^{n+1} + a_{n+2} R^{n+2} + \cdots + a_m R^m \right| \leq \varepsilon .$$

Appliquons le Lemme de la Leçon n° 2, avec $M = \varepsilon$, en y remplaçant les a_k par $\left(\frac{x}{R}\right)^{n+k}$, les b_k par $a_{n+k} R^{n+k}$, on obtient que, dès que $m > n \geq N_\varepsilon$, et pour tout $0 \leq x \leq R$:

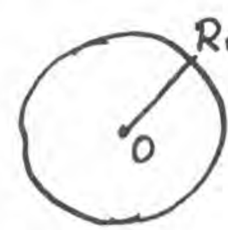
$$\left| a_{n+1} x^{n+1} + a_{n+2} x^{n+2} + \cdots + a_m x^m \right| \leq \varepsilon \left(\frac{x}{R}\right)^{n+1} \leq \varepsilon ,$$

ce qu'il fallait démontrer.

<u>Exercice</u> 5. Démontrez la formule

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{3}{8} + \cdots + (-1)^n \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)} + \cdots = \frac{1}{\sqrt{2}} .$$

<u>Remarque</u>. On peut généraliser le Théorème 2.



Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R = +\infty$. Supposons qu'elle converge en <u>un</u> point $z = Re^{i\theta}$ du cercle-frontière du disque de convergence. Alors elle converge uniformément sur le rayon $\{z = re^{i\theta},\ 0 \leq r < R\}$ aboutissant à ce point. Donc :

$$\sum_{n\geq 0} a_n R^n e^{in\theta} = \lim_{\substack{r \text{ réel} \to R \\ r<R}} \sum_{n\geq 0} a_n r^n e^{in\theta} .$$

En effet il suffit d'appliquer le théorème 2 à la série $\sum_{n\geq 0} a_n e^{in\theta} z^n$.

<u>Exercice</u> 6 (assez difficile) 1°) Montrez que, si pour tout $|z| < 1$, on pose : $f(z) = 1 - \frac{1}{2} z^2 + \frac{3}{8} z^4 + \cdots + (-1)^n \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)} z^{2n} + \cdots$, alors on a l'identité $(1+z^2)[f(z)]^2 = 1$. Pour cela on commencera par supposer $z = x$ réel. 2°) Déduisez-en que, pour $|\theta| < \frac{\pi}{2}$,

$$1 + \sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)} \cos(2n\theta) = \frac{\cos \theta/2}{\sqrt{2\cos\theta}} .$$

Séries entières et équations différentielles

Relisez d'abord l'Exercice 3 de la Leçon n°4. On y pressent une méthode de portée générale (dite des coefficients indéterminés) pour la recherche de solutions, sous forme de sommes de séries entières, pour certaines équations différentielles. Voici encore deux exercices sur le même sujet.

Exercice 7. Pour k entier ≥ 0, montrez que l'équation de Bessel

$$(E_k) \qquad x^2y'' + xy' + (x^2 - k^2)y = 0$$

a au plus une solution $y(x)$ développable en série entière au voisinage de l'origine, à un facteur constant près. Déterminez une telle solution par la méthode des coefficients indéterminés, et constatez que vous aviez déjà répondu à cette dernière question par d'autres méthodes à la Leçon n° 3, Exercice 4, et Leçon n°4, Exercice 5.

Exercice 8. 1) Montrez que, pour tout λ réel, il existe une fonction $y = f_\lambda(x)$ et une seule, telle que $f_\lambda(0) = 1$, qui soit somme d'une série entière de rayon de convergence infini, et qui soit solution de l'équation différentielle :

$$(D_\lambda) \qquad xy'' + (1-x)y' - \lambda y = 0.$$

2) Montrez que $f_\lambda(x) = e^x f_{1-\lambda}(x)$.

Fonction génératrice des polynômes de Legendre(*)

Pour tout nombre réel t, et pour tout x réel assez petit (selon t) pour que $|x^2 - 2tx| < 1$, posons :

(*) A.M. Legendre (1752-1833) introduisit les polynômes en question dans son mémoire sur "La figure des planètes" (1782). Ses principaux travaux ont porté sur les fonctions elliptiques, la fonction gamma (formule de duplication), et la théorie des nombres (réciprocité quadratique).

$$(3) \quad (1-2tx+x^2)^{-1/2} = \sum_{n\geq 0} P_n(t)\, x^n.$$

En posant $u = x^2 - 2tx$, sous l'hypothèse indiquée on a $|u|<1$, et la série entière de variable u :

$$(1-2tx+x^2)^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{1+u}} = 1 - \frac{1}{2}u + \frac{3}{8}u^2 + \dots + (-1)^p \frac{1.3.5\ldots(2p-1)}{2.4.6\ldots(2p)} u^p + \dots$$

$$= 1 - \frac{1}{2}(x^2-2tx) + \frac{3}{8}(x^2-2tx)^2 + \dots + (-1)^p \frac{1.3.5\ldots(2p-1)}{2.4.6\ldots(2p)}(x^2-2tx)^p + \dots$$

converge absolument. On peut donc, sans altérer la convergence ni la somme, regrouper selon les puissances de x après développement des binômes $(x^2-2tx)^p$, ce qui conduit au développement

$$(3) \quad (1-2tx+x^2)^{-1/2} = 1 + tx + \frac{1}{2}(3t^2-1)x^2 + \dots + P_n(t)x^n + \dots.$$

Il est clair, par son mode de formation, que, pour tout entier $n \geq 0$, le coefficient $P_n(t)$ de x^n est un polynôme de degré n en t, dont le coefficient de plus haut degré provient de $(-1)^n \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)}(x^2-2tx)^n$, donc vaut $\frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}$.

Pour $t=1$, l'identité (3) se réduit à $\frac{1}{1-x} = \sum_{n\geq 0} P_n(1)\, x^n$.
Donc $P_n(1) = 1$ pour tout n. On montre de même que $P_n(-1) = (-1)^n$.

Dérivons les deux membres de (3) par rapport à x, à t fixé :

$$-\frac{1}{2}\, 2\,(x-t)(1-2t+x^2)^{-3/2} = \sum_{n\geq 0}(n+1)\, P_{n+1}(t)\, x^n ,$$

et multiplions les deux membres de cette égalité par $1-2tx+x^2$; il vient :

$$(t-x)\sum_{n\geq 0} P_n(t)\, x^n = (1-2tx+x^2)\sum_{n\geq 0}(n+1)\, P_{n+1}(t)\, x^n.$$

En identifiant dans les deux membres le coefficient de x^n, on obtient la relation de récurrence pour les polynômes de Legendre :

$$(4) \quad (n+1)P_{n+1}(t) - (2n+1)t\,P_n(t) + n\,P_{n-1}(t) = 0$$

pour tout entier $n \geq 1$. On en déduit la liste des premiers P_n :

$P_0(t) = 1$; $P_1(t) = t$; $P_2(t) = \frac{1}{2}(3t^2-1)$; $P_3(t) = \frac{1}{2}(5t^3-3t)$;
$P_4(t) = \frac{1}{8}(35t^4 - 30t^2 + 3)$; $P_5(t) = \frac{1}{8}(63t^5 - 70t^3 + 15t)$; etc...

<u>Exercice 9</u>. Calculez $P_{2n}(0)$. Montrez que la fonction $P_{2n}(t)$ est paire, et la fonction $P_{2n+1}(t)$ impaire.

<u>Exercice 10</u>. 1°) En posant :
$$F(t,x) = (1-2tx+x^2)^{-1/2} = \sum_{n\geq 0} P_n(t)\, x^n,$$
vérifiez l'identité :
$$(1-t^2)\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} - 2t\frac{\partial F}{\partial t} + x\,\frac{\partial^2(xF)}{\partial x^2} = 0.$$
2°) Déduisez-en que, pour tout entier $n \geq 0$, le polynôme $P_n(t)$ est solution de l'<u>équation différentielle</u> (dite <u>de Legendre</u>) :
$$(L_n) \qquad (1-t^2)\frac{d^2y}{dt^2} - 2t\,\frac{dy}{dt} + n(n+1)\,y = 0.$$
Comparez à AN03, Leçon n° 5, Exercice 8, où étaient mis en évidence les liens des polynômes de Legendre avec le Laplacien en coordonnées sphériques.

<u>Indications sur les Exercices proposés dans cette Leçon</u>.

<u>Exercice 1</u>. Pour $z = x+iy$, le nombre $e^z = e^x\cos y + i\,e^x\sin y$ est réel si et seulement si $e^x\sin y = 0$, ce qui équivaut à $\sin y = 0$, donc à $y = k\pi$, c'est-à-dire à $z = x+ik\pi$, où $x\in\mathbb{R}$, $k\in\mathbb{Z}$, $i=\sqrt{-1}$.

e^z est imaginaire pur si et seulement si $\cos y = 0$, donc pour $z = x + i\frac{\pi}{2} + ik\pi$, où $x\in\mathbb{R}$, $k\in\mathbb{Z}$.

<u>Exercice 2</u>. On va prouver que le module M_n et un argument θ_n de $(1+\frac{z}{n})^n$ tendent respectivement vers le module e^x et l'argument y de e^z, où $z = x+iy$. On a $M_n = \left[(1+\frac{x}{n})^2 + \frac{y^2}{n^2}\right]^{n/2}$, donc $\operatorname{Log} M_n = \frac{n}{2}\operatorname{Log}\left(1+\frac{2x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}\right) \sim \frac{n}{2}\frac{2x}{n} = x$ tend vers x. Ainsi M_n tend vers e^x. D'autre part :
$$\theta_n = \operatorname{Arg}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = n\operatorname{Arg}\left(1+\frac{z}{n}\right) = n\operatorname{Arg}\left(1+\frac{x}{n}+i\,\frac{y}{n}\right) =$$
$$= n\operatorname{Arctg}\frac{y}{n+x} \sim n\,\frac{y}{n} = y \text{ tend vers } y.$$

<u>Exercice 4</u>. Si $z = x+iy$, l'équation $\sin z = \frac{5}{3}$ s'écrit

7.2/ $\sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{ch} y = \frac{5}{3}$, donc se décompose en le système
$$\begin{cases} \sin x \operatorname{ch} y = \frac{5}{3} \\ \cos x \operatorname{sh} y = 0 \end{cases} \quad \text{qui équivaut à} \quad \begin{cases} \sin x \operatorname{ch} y = \frac{5}{3} \\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{ou} \quad y = 0 \end{cases}.$$
Mais $y = 0$ est impossible, car il n'y a pas de x réel tel que $\sin x = \frac{5}{3}$. Pour $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, on a $\sin x = (-1)^k$, donc $(-1)^k \operatorname{ch} y = \frac{5}{3}$. Puisque $\operatorname{ch} y > 0$, il faut que l'entier k soit pair, donc que $\operatorname{ch} y = \frac{5}{3}$, c'est-à-dire $y = \pm i \operatorname{Log} 3$. Les solutions cherchées sont $z = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \pm i \operatorname{Log} 3$, où k est entier.

<u>Exercice</u> 5. A la leçon n° 2, Exercice 4, on a vu que la série converge. C'est le développement classique de
$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \cdots + (-1)^n \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)} x^n + \cdots,$$
de rayon de convergence 1, où l'on fait $x = 1$. D'après le théorème 2, la somme de la série proposée vaut $\lim\limits_{x<1,\, x\to 1} \frac{1}{\sqrt{1+x}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

<u>Exercice</u> 6. Il généralise le précédent, qu'on obtiendrait pour $\theta = 0$.

1°) La série de $f(z)$ a pour rayon de convergence 1, et, pour $z = x$ réel, on reconnaît le développement classique de $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. On a donc, pour tout x <u>réel</u> tel que $|x| < 1$, l'identité $(1+x^2)[f(x)]^2 = 1$. Vu le théorème de multiplication des séries, cette identité est en fait une propriété purement formelle des <u>coefficients</u> de la série de $f(z)$; elle subsiste donc quand on passe à la variable <u>complexe</u> et, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$, on a l'identité

(4) $$(1+z^2)[f(z)]^2 = 1.$$

2°) Si $z = e^{i\theta}$ avec $|\theta| < \frac{\pi}{2}$, le nombre z^2 est $\neq -1$, donc la série $\sum\limits_{n\geq 0} (-1)^n \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2n)} e^{2in\theta}$ converge d'après le critère d'Abel.
D'après le Théorème 2 d'Abel, sa somme $f(e^{i\theta}) = \lim\limits_{r<1,\, r\to 1} f(re^{i\theta})$.
L'identité (4) se prolonge donc par continuité, et le nombre complexe

$s = f(e^{i\theta})$ est racine de l'équation $(1+e^{2i\theta})s^2 = 1$.

Or $\dfrac{1}{1+e^{2i\theta}} = \dfrac{1+e^{-2i\theta}}{4\cos^2\theta} = \dfrac{\cos\theta - i\sin\theta}{2\cos\theta}$ a pour module $\dfrac{1}{\sqrt{2\cos\theta}}$ et pour argument $-\theta + 2k\pi$. Donc sa racine carrée s vaut $\pm\dfrac{1}{\sqrt{2\cos\theta}}\left(\cos\dfrac{\theta}{2} - i\sin\dfrac{\theta}{2}\right)$. Vu la valeur connue $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ pour $\theta = 0$, par continuité il faut le signe $+$. Ainsi $s = f(e^{i\theta}) = \dfrac{1}{\sqrt{2\cos\theta}}\left(\cos\dfrac{\theta}{2} - i\sin\dfrac{\theta}{2}\right)$.

En prenant la partie réelle, on obtient la formule :

$$1 + \sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)} \cos(2n\theta) = \frac{\cos\theta/2}{\sqrt{2\cos\theta}}.$$

<u>Exercice 7</u>. En reportant $y(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ dans (E_k), on trouve pour déterminer les a_n les relations de récurrence :

$a_0 k^2 = 0$; $a_1(1-k^2) = 0$; $a_2(4-k^2) = -a_0$; … ; $a_{k-1}[(k-1)^2 - k^2] = -a_{k-3}$; $a_k(k^2-k^2) = -a_{k-2}$; … ; $a_n(n^2-k^2) = -a_{n-2}$; … , dont la solution à un facteur constant près est $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+k}}{n!\,(n+k)!}$.

<u>Exercice 8</u>. En reportant $y(x) = 1 + \sum_{n\geq 1} a_n x^n$ dans (D_λ), on obtient la relation de récurrence $a_0 = 1$; $n^2 a_n = (\lambda + n - 1)a_{n-1}$; d'où l'unique solution $f_\lambda(x) = \sum_{n\geq 0} \dfrac{\lambda(\lambda+1)\ldots(\lambda+n-1)}{(n!)^2} x^n$. La fonction $e^x f_{1-\lambda}(x)$ est somme d'une série entière de rayon de convergence infini (comme produit de telles), vaut 1 à l'origine, et on vérifie facilement qu'elle est solution de (D_λ), grâce au fait que $f_{1-\lambda}$ est solution de $(D_{1-\lambda})$; elle est donc égale à $f_\lambda(x)$, vu l'unicité.

<u>Exercice 9</u>. $\sum_{n\geq 0} P_{2n}(0) x^{2n} = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1 + \sum_{n\geq 1} (-1)^n \dfrac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)} x^{2n}$, donc

$P_{2n}(0) = (-1)^n \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$.

<u>Exercice 10</u>. L'identité sur les dérivées partielles s'obtient facilement en calculant celles-ci à partir de la formule $F(t,x) = (1-2tx+x^2)^{-1/2}$. En reportant dans cette identité $F(t,x) = \sum_{n\geq 0} P_n(t)x^n$, et en dérivant sous le signe $\sum$, on obtient $\sum_{n\geq 0}\left[(1-t^2)P_n''(t) - 2tP_n'(t) + n(n+1)P_n(t)\right]x^n \equiv 0$.

AN 04 Leçon n° 6

Coefficients de Fourier d'une fonction périodique

Les sciences fournissent de nombreux exemples [*] de phénomènes vibratoires ou périodiques, qui se traduisent par des fonctions $x = x(t)$ qui se reproduisent identiques à elle-même quand on translate la variable t d'une quantité fixe T, appelée période :

pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\quad x(t+T) = x(t)$.

Un changement d'échelle sur la variable t ramène au cas $T = 2\pi$. Les fonctions de période 2π les plus remarquables sont les fonctions trigonométriques ou circulaires :

$\cos(nt)$, $\sin(nt)$; en bref : $e_n(t) = e^{int} = \cos(nt) + i\sin(nt)$,

où $n \in \mathbb{Z}$ est un entier positif, négatif ou nul. Considérant ces fonctions comme élémentaires, comme des "harmoniques" fondamentales, le problème est de décomposer la fonction périodique $x = x(t)$, de période 2π, en série de telles harmoniques :

$$(1) \qquad x(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n e^{int} ,$$

où les coefficients c_n sont à choisir, en fonction de $x(t)$, de sorte qu'on puisse justifier, de quelque manière, l'égalité (1).

Il est concret et fécond de partir, selon l'idée profonde de Hilbert, d'un point de vue analogue à la géométrie euclidienne, et de considérer l'ensemble des fonctions régulières de période 2π comme un "espace" de dimension infinie, d'introduire sur cet espace un "produit scalaire" et donc une "longueur", ce qui permettra de parler de "fonctions orthogonales". De ce point de vue le système des fonctions fondamentales $t \mapsto e_n(t) = e^{int}$, où $-\infty < n$ entier $< +\infty$,

---

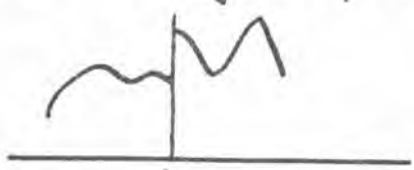
(*) Sans être exhaustif, citons : les cordes vibrantes ; le mouvement du pendule ; l'acoustique ; le mouvement des planètes ; les théories ondulatoires, par exemple de la lumière ; le courant électrique alternatif ; le spectre d'une molécule etc...

jouera le rôle d'une "base orthonormée" dans cet "espace" et (1) apparaîtra comme la décomposition du "vecteur" x selon cette base. Ainsi apparaîtra-t-il comme naturel de choisir pour coefficient c_n dans (1) le "produit scalaire" de x par e_n.

<u>Définition</u>. Soit $t \mapsto x = x(t)$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs complexes. Soit $t_0 \in \mathbb{R}$. On dit que la fonction $x = x(t)$ présente au point t_0 une <u>discontinuité de première espèce</u> si les deux limites

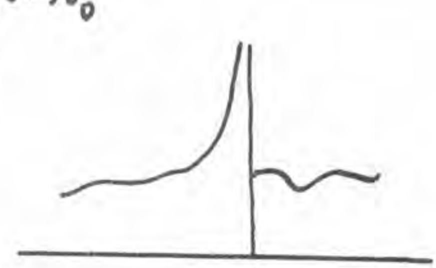
$$\lim_{t<t_0,\, t\to t_0} x(t) \quad \text{et} \quad \lim_{t>t_0,\, t\to t_0} x(t)$$

existent et sont finies, mais distinctes.



t_0

discontinuité de première espèce



t_0

discontinuité, mais pas de première espèce.

Soit E l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ des fonctions $x = x(t)$ définies sur $\mathbb{R}$, à valeurs complexes, et qui sont :

1°) <u>de période 2π</u> : pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a : $x(t+2\pi) = x(t)$.

2°) <u>continues par morceaux</u>, c'est-à-dire <u>continues</u> pour tout $t \in \mathbb{R}$, sauf peut-être en au plus un nombre <u>fini</u> $t_0 < t_1 < \dots < t_k$ de points dans $[0, 2\pi]$ (ainsi qu'aux points $t_i + 2n\pi$, n entier, qui s'en déduisent par périodicité), les t_i n'étant d'ailleurs que des <u>discontinuités de première espèce</u> ($i = 0, 1, \dots, k$).

Nous considérerons comme <u>égales</u> deux telles fonctions si elles ne diffèrent qu'en au plus en un nombre fini de points par période. Si deux fonctions $x(t)$ et $x_1(t)$ sont égales, leur intégrale sur une période $\int_0^{2\pi} x(t)\,dt$ et $\int_0^{2\pi} x_1(t)\,dt$ sont évidemment égales.

Remarquons aussi que, si $x \in E$, son intégrale sur tout segment de longueur 2π, $\int_a^{a+2\pi} x(t)\,dt$, ne dépend pas de a, c'est-à-dire ne dépend pas de la position de ce segment. On le voit, par le changement de variable $s = t - 2\pi$ en utilisant la périodicité de la fonction :

$$\int_a^{a+2\pi} x(t)\,dt - \int_0^{2\pi} x(t)\,dt = \int_{2\pi}^{a+2\pi} x(t)\,dt - \int_0^a x(t)\,dt = \int_0^a x(s+2\pi)\,ds - \int_0^a x(t)\,dt$$

$$= \int_0^a x(s)\,ds - \int_0^a x(t)\,dt = 0.$$

On définit le <u>produit scalaire</u> de deux fonctions $x \in E$ et $y \in E$ par l'intégrale :

$$(x \mid y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(t)\, \overline{y(t)}\, dt,$$

où $\overline{y(t)}$ est le nombre complexe conjugué de $y(t)$, et pour tout $x \in E$ on pose :

$$\|x\| = \sqrt{(x \mid x)} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |x(t)|^2 dt \right)^{1/2},$$

qu'on appelle <u>norme</u> de (la <u>convergence en moyenne quadratique</u>) de la fonction x.

En Physique, si $x = x(t)$ traduit un phénomène vibratoire, $\|x\|^2$ n'est autre que <u>l'énergie de ce phénomène</u>.

Sur ces définitions on constate que $(x \mid y)$ vérifie ce qu'il est convenu d'appeler en Algèbre les <u>axiomes</u> d'un produit scalaire (nommé aussi "produit hermitien" quand le corps de base est $\mathbb{C}$), à savoir :

$$(x_1 + x_2 \mid y) = (x_1 \mid y) + (x_2 \mid y) ;$$

$$(\lambda x \mid y) = \lambda (x \mid y) ;$$

$$(x \mid y) = \overline{(y \mid x)} ;$$

$$(x \mid x) \geq 0 \ ; \text{ et } (x \mid x) = 0 \text{ entraîne } x = 0,$$

quels que soient $x \in E$, $y \in E$, $x_1 \in E$, $x_2 \in E$; $\lambda \in \mathbb{C}$. De ces axiomes résultent de manière tout à fait générale — comme il est fait en Algèbre — les <u>propriétés</u> : quels que soient $x, y, y_1, y_2 \in E$, $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$(x \mid y_1 + y_2) = (x \mid y_1) + (x \mid y_2) \quad ; \quad (x \mid \lambda y) = \bar{\lambda} (x \mid y)$$

$$|(x \mid y)| \leq \|x\|\,\|y\| \quad \text{(inégalité de Schwarz)},$$

avec égalité si et seulement si les fonctions x et y sont proportionnelles ;
$\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$; $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire) ;
$\|x\|$ est réel ≥ 0, et $\|x\| = 0$ entraîne $x = 0$ (c'est-à-dire $x(t) \equiv 0$ sauf au plus en un nombre fini de points par période) ;
$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x+y\|$.

Deux fonctions $x \in E$ et $y \in E$ sont dites <u>orthogonales</u> si $(x|y) = 0$. Alors elles vérifient la relation de Pythagore : $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

<u>Système orthonormé des exponentielles fondamentales</u>.

Les fonctions les plus simples qui appartiennent à l'espace E sont les exponentielles :

$$t \mapsto e_n(t) = \exp(int) = \cos(nt) + i\sin(nt),$$

où $i = \sqrt{-1}$, et où l'indice n parcourt $\mathbb{Z}$, l'ensemble des nombres entiers positifs, négatifs ou nuls. Elles forment un système <u>orthonormé</u> dans E : on a $(e_n|e_m) = 0$ si $n \neq m$, et $(e_n|e_n) = 1$, car

$$(e_n|e_m) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(n-m)t}\,dt = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} dt & = 1 \text{ si } n = m\,; \\ \dfrac{1}{2\pi}\left[\dfrac{e^{i(n-m)t}}{i(n-m)}\right]_{t=0}^{t=2\pi} & = 0 \text{ si } n \neq m, \end{cases}$$

vu que $t \mapsto e^{i(n-m)t}$ est de période 2π. (Remarque : $\overline{e^{int}} = e^{-int}$).

Par analogie avec l'espace euclidien (cf. AN03, Leçon n°1), si $x \in E$, on considère les "composantes" du "vecteur" x sur le "repère" orthonormé des e_n, c'est-à-dire les produits scalaires $c_n = (x|e_n)$.

Si $x \in E$ est une fonction donnée, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on pose donc par définition :

$$(2) \quad c_n = c_n(x) = (x|e_n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(t)\,e^{-int}\,dt,$$

qu'on appelle le n-ième <u>coefficient de Fourier</u> (exponentiel) de la fonction $x = x(t)$, et l'on considère la série de fonctions (bilatérale, numérotée de $-\infty$ à $+\infty$) :

$$(3) \quad \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e_n(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int},$$

où, pour tout n, le coefficient $c_n = c_n(x)$ est donné par (2), qu'on appelle la <u>série de Fourier</u> (exponentielle) <u>associée à la fonction</u> $x = x(t)$, ce qu'on écrira symboliquement :

$$(4) \qquad x(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{int},$$

le signe $\sim$ voulant dire ici " a pour série de Fourier associée ".

Pour l'instant ne nous préoccupons pas de savoir si ou en quel sens cette série converge, ni si elle converge vers $x(t)$! Laissons provisoirement de côté le problème de savoir si nous pouvons remplacer dans (4) le signe $\sim$ par un signe $=$. Mettons d'abord en évidence les propriétés élémentaires, formelles et indépendantes de toute question de convergence, de la notion de coefficient de Fourier donnée par (2), et de la transformation qui, à une <u>fonction</u> $x \in E$, associe sa <u>suite</u> (bilatérale) $c_n = c_n(x)$ de coefficients de Fourier. Déjà la simple idée de remplacer l'étude d'une fonction par celle d'une suite peut se révéler intéressante.

<u>Propriétés des coefficients de Fourier</u>

Soient $x \in E$, $y \in E$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\tau \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

1°) (linéarité) $c_n(x+y) = c_n(x) + c_n(y)$; $c_n(\lambda x) = \lambda c_n(x)$.

2°) $c_n(\overline{x}) = \overline{c_{-n}(x)}$.

3) Soit x_τ la fonction translatée de x par τ, définie par : $x_\tau(t) = x(t-\tau)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$; alors $c_n(x_\tau) = e^{-in\tau} c_n(x)$.

4) Si $P(t) = \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{int}$, où les nombres complexes a_n sont donnés, et où a_N et a_{-N} ne sont pas tous deux nuls, est un "polynôme trigonométrique" de "degré" N, alors :

$$c_n(P) = a_n \text{ si } |n| \le N \quad ; \quad c_n(P) = 0 \text{ si } |n| > N.$$

Le lecteur n'aura aucun mal à vérifier ces quatre premières propriétés, en utilisant (2) et l'orthogonalité des e_n. Mais voici une propriété très importante.

5°) (transformation de la dérivation). Supposons qu'une fonction $x=x(t)$ soit continue dans $\mathbb{R}$ tout entier (pas de discontinuités du tout), et possède en tout point de $\mathbb{R}$ une dérivée première continue $x'(t)$ sauf peut-être au plus en un nombre fini de points par période, où elle possède cependant des dérivées premières à droite et à gauche. Autrement dit x est continue sur $\mathbb{R}$ et admet une $x'=\frac{dx}{dt}$ continue par morceaux (une $x'\in E$, car la dérivée d'une fonction de période 2π est encore de période 2π). Alors, pour tout $n\in\mathbb{Z}$,

$$(5) \qquad c_n(x') = in\, c_n(x).$$

Ainsi, par passage aux coefficients de Fourier, l'opération d'Analyse assez compliquée qu'est la dérivation (puisqu'elle requiert un passage à la limite), est transformée en une simple multiplication de la suite (c_n) par la suite (in). Ceci permet de simplifier notablement la recherche des solutions périodiques de certaines équations différentielles (cf.

Démonstration de (5). Par intégration par parties :

$$c_n(x') = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x'(t)\,e^{-int}\,dt = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(t)\left[-in\,e^{-int}\right]dt + \frac{1}{2\pi}\Big[x(t)e^{-int}\Big]_{t=0}^{t=2\pi} =$$

$$= in\,c_n(x) + \frac{1}{2\pi}\big[x(2\pi)-x(0)\big] = in\,c_n(x).$$

6°) Plus généralement, si $x\in E$ admet des dérivées continues jusqu'à l'ordre $p-1$, et une dérivée p-ième $x^{(p)}=\frac{d^p x}{dt^p}$ continue par morceaux (donc appartenant à E), on déduit par application répétée de (5) la formule :

$$(6) \qquad c_n\left(x^{(p)}\right) = (in)^p\, c_n(x).$$

7°) (produit de convolution). L'étude de la superposition de deux phénomènes vibratoires conduit, $x \in E$ et $y \in E$ étant deux fonctions données, à définir une troisième fonction $x * y$, appelée <u>produit de convolution</u> (ou convolée) des fonctions x et y, par la formule :

$$x * y\,(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x\,(t-s)\, y(s)\,ds \;.$$

On vérifie que la fonction $x * y$ est de période 2π, et est continue dans $\mathbb{R}$ tout entier, donc a fortiori appartient à E. De plus, par changement de variable et par le théorème de Fubini (cf AN 03, Leçon n° 8), il n'est pas difficile de voir que ce produit $*$ est commutatif $(x*y = y*x)$ et associatif $[\,(x*y)*z = x*(y*z)\,]$.
Contentons-nous ici de prouver que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$(6) \qquad c_n\,(x * y) = c_n(x)\, c_n(y) \,.$$

En effet $c_n\,(x*y) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} x*y\,(t)\, e^{-int}\,dt =$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \iint_{\substack{0 \le t \le 2\pi \\ 0 \le s \le 2\pi}} x\,(t-s)\, y(s)\, e^{-int}\, ds\, dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(t-s)\, e^{-in(t-s)}\,dt \right) y(s)\, e^{-ins}\, ds =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2\pi} \int_s^{s+2\pi} x\,(u)\, e^{-inu}\, du \right) y(s)\, e^{-ins}\, ds =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(u)\, e^{-inu}\, du \right) y(s)\, e^{-ins}\, ds =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} c_n(x)\; y(s)\, e^{-ins}\, ds = c_n(x)\, c_n(y) \,.$$

<u>Exercice</u> 1 1) Si $x \in E$, si $n \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{Z}$, on a :

$$e_n * x = c_n(x)\, e_n \;; \quad e_n * e_m = 0 \text{ si } n \neq m \;; \; e_n * e_n = e_n \,.$$

2) Si $P(t) = \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{int}$ est un polynôme trigonométrique, on a :

$$P * x\,(t) = \sum_{-N}^{N} a_n\, c_n(x)\, e^{int}$$

Noyau de Dirichlet, et sommes partielles des séries de Fourier

Au 2°) de l'Exercice 1 faisons $a_n = 1$ pour tout $|n| \leq N$. Le polynôme trigonométrique obtenu s'appelle le noyau de Dirichlet d'ordre N ; pour tout entier $N \geq 0$:

(7) $$D_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} e^{int} = 1 + 2\sum_{n=1}^{N} \cos(nt) = \frac{\sin\left[(N+\frac{1}{2})t\right]}{\sin\frac{t}{2}},$$

où la formule finale avec les sinus est le résultat de la sommation de deux progressions géométriques :

$$\sum_{n=0}^{N}(e^{it})^n + \sum_{n=0}^{N}(e^{-it})^n - 1 = \frac{1-e^{i(N+1)t}}{1-e^{it}} + \frac{1-e^{-i(N+1)t}}{1-e^{-it}} - 1 = \text{etc} \ldots$$

Si

(3) $$x(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{int}$$

est la série de Fourier associée à une $x \in E$, où $c_n = c_n(x)$ est donné par (2), appelons somme partielle d'ordre N de cette série le polynôme trigonométrique de degré N :

$$S_N(t) = [S_N(x)](t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(x) e^{int}.$$

Au 2°) de l'Exercice 1 on a prouvé que :

(8) $$[S_N(x)](t) = D_N * x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(t-s)\,\frac{\sin\left[(N+\frac{1}{2})s\right]}{\sin\frac{s}{2}}\,ds,$$

formule qui sera bien entendu essentielle quand il s'agira d'examiner si la série de Fourier de x converge vers x, c'est-à-dire si $\lim_{N\to+\infty} S_N = x$ (en un sens à préciser).

Coefficients de Fourier et minimum de l'erreur en moyenne quadratique

Soit $x \in E$ fixée. Donnons-nous un entier $N \geq 0$ (par exemple $N=10$). Parmi tous les polynômes trigonométriques de degré $\leq N$

$$P(t) = \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{int},$$

nous allons voir que c'est le choix de $a_n = c_n = c_n(x)$, donc le choix de $P = S_N(x)$, qui rend minimum $\|x - P\|$, donc qui minimise l'erreur en moyenne quadratique (physiquement, l'erreur sur l'énergie) commise en remplaçant le phénomène périodique réel $x = x(t)$ par le phénomène approché $P(t)$.

<u>Proposition</u> 1. Soit N un entier $\geqslant 0$ donné. Soit $x \in E$, et soient $c_n = c_n(x)$ les coefficients de Fourier de x, donnés par (2). Pour $n = -N, -N+1, \dots, 0, \dots, N-1, N$, soient a_n des nombres complexes. Alors:

$$\| x - \sum_{n=-N}^{N} a_n e_n \|^2 = \|x\|^2 - \sum_{n=-N}^{N} |c_n|^2 + \sum_{n=-N}^{N} |c_n - a_n|^2 .$$

<u>Démonstration</u>. On sait que $c_n = (x | e_n)$, donc:

$$\|x - \sum_{n=-N}^{N} a_n e_n\|^2 = \Big(x - \sum_n a_n e_n \Big| x - \sum_m a_m e_m \Big) =$$

$$= (x|x) - \sum_m \overline{a_m}\,(x|e_m) - \sum_n a_n (e_n|x) + \sum_{m,n} a_n \overline{a_m}\,(e_n|e_m)$$

$$= \|x\|^2 - \sum_n \overline{a_n}\, c_n - \sum_n a_n \overline{c_n} + \sum_n a_n \overline{a_n} =$$

$$= \|x\|^2 - \sum_n |c_n|^2 + \sum_n \left(c_n\overline{c_n} - c_n \overline{a_n} - a_n \overline{c_n} + a_n \overline{a_n}\right)$$

$$= \|x\|^2 - \sum_n |c_n|^2 + \sum_n (c_n - a_n)\overline{(c_n - a_n)} =$$

$$= \|x\|^2 - \sum_{n=-N}^{N} |c_n|^2 + \sum_{n=-N}^{N} |c_n - a_n|^2,$$ ce qu'il fallait démontrer.

Quand x et N sont fixés, les c_n sont fixés ; le deuxième membre est minimum pour le choix $a_n = c_n$, qui annule le terme positif supplémentaire $\sum_n |c_n - a_n|^2$. Donc:

<u>Corollaire</u> 1. Soit N un entier $\geqslant 0$. Soit $x \in E$. Parmi tous les polynômes trigonométriques de degré $\leqslant N$, celui qui est le plus proche de x en moyenne quadratique est le polynôme somme partielle d'ordre N de la série de Fourier de x, à savoir le polynôme $S_N = \sum_{n=-N}^{N} c_n(x)\, e_n$. De plus on a la relation

$$(9) \qquad \|x - S_N\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{n=-N}^{N} |c_n|^2 ,$$

qui permet de calculer l'erreur (en moyenne quadratique) commise en remplaçant la fonction x par la fonction S_N.

Corollaire 2. Pour tout $x \in E$, et tout entier $N \geq 0$, on a l'inégalité dite de Bessel :

(10) $$\sum_{n=-N}^{N} |c_n(x)|^2 \leqslant \|x\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |x(t)|^2 dt .$$

En effet le premier membre de (9) est ≥ 0, donc aussi le second.

Remarque. Ce résultat sera amélioré ; nous verrons à la prochaine leçon qu'on a égalité dans (10) quand on fait tendre N vers $+\infty$, donc que la série (bilatérale) $\sum_{-\infty}^{\infty} |c_n|^2$ (dont (10) assure la convergence) a en fait pour somme exactement $\|x\|^2$.

Corollaire 3 (Riemann-Lebesgue). Pour tout $x \in E$, on a :
$$\lim_{n \to \pm\infty} c_n(x) = 0 .$$

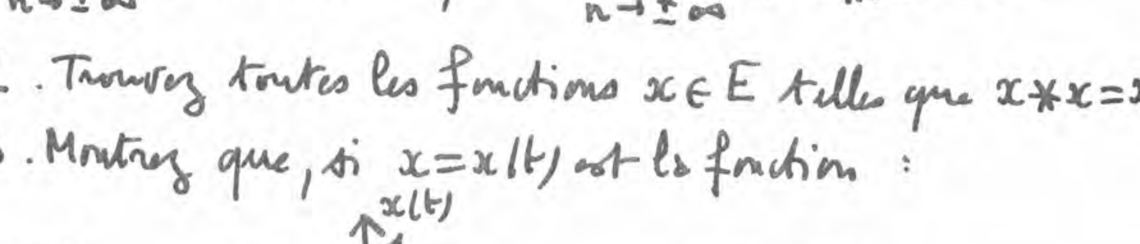
En effet les séries numériques $\sum_{n \geq 0} |c_n|^2$ et $\sum_{n > 0} |c_{-n}|^2$ sont à termes ≥ 0, et de sommes partielles majorées par la constante $\|x\|^2$. Donc elles convergent ; a fortiori leur terme général tend vers 0.

Corollaire 4. Si $x \in E$ admet des dérivées continues jusqu'à l'ordre p, et une dérivée p-ième continue par morceaux, alors quand $n \to \pm\infty$, les $c_n = c_n(x)$ tendent vers 0 plus vite que $\frac{1}{n^p}$.

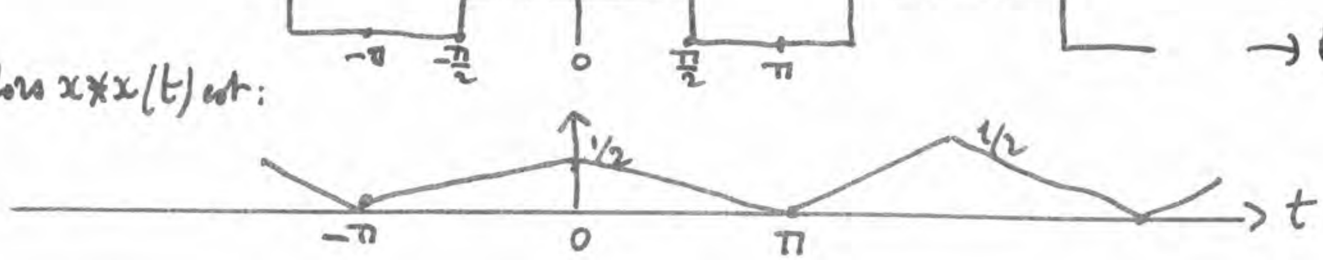
En effet on a vu que $|c_n(x^{(p)})| = n^p |c_n(x)|$, et le Corollaire 3 assure que $\lim_{n \to \pm\infty} |c_n(x^{(p)})| = 0$, donc $\lim_{n \to \pm\infty} n^p c_n(x) = 0$.

Exercice 2. Trouvez toutes les fonctions $x \in E$ telles que $x * x = x$.

Exercice 3. Montrez que, si $x = x(t)$ est la fonction :



alors $x * x(t)$ est :



<u>Exercice</u> 4. Un polynôme trigonométrique de degré N n'a pas plus de $2N$ racines sur $[0, 2\pi[$.

<u>Exercice</u> 5. Soit $x \in E$, et soit p un entier > 0. Posons :

$$x_{(p)}(t) = x(pt).$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\quad c_n(x_{(p)}) = \begin{cases} c_{\frac{n}{p}}(x) & \text{si } p \text{ divise } n\,; \\ 0 & \text{si } p \text{ ne divise pas } n. \end{cases}$

<u>Exercice</u> 6 (court, mais astucieux). Un rectangle R est pavé d'un million de rectangles R_n à côtés parallèles à ceux de R. On suppose que, pour tout n tel que $1 \leq n \leq 10^6$, le rectangle R_n a <u>au moins</u> un côté entier. Montrez que le rectangle R a au moins un côté entier. (attention ! les R_n ne sont pas supposés égaux).

<u>Indications sur les Exercices proposés dans cette Leçon</u>

<u>Exercice</u> 1. 1°)

$$e_n * x(t) = \frac{1}{2\pi}\int^{2\pi} e^{in(t-s)}x(s)\,ds = e^{int}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(s)e^{-ins}\,ds = c_n(x)e_n(t).$$

$$e_n * e_m(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{in(t-s)}e^{ims}\,ds = e^{int}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(n-m)s}\,ds = e^{int}(e_n|e_m)$$

$$= e_n(t) \text{ si } n=m\,; \; = 0 \text{ si } n \neq m.$$

2°) $P * x = \left(\sum a_n e_n\right) * x = \sum a_n\, e_n * x = \sum a_n c_n(x) e_n$,

car bien entendu le $*$ est distributif par rapport à l'addition.

<u>Exercice</u> 2. Nécessairement $c_n(x)c_n(x) = c_n(x)$, donc les $c_n(x)$ valent 0 ou 1. Mais, d'après le Corollaire 3, $\lim\limits_{n\to\pm\infty} c_n(x) = 0$, donc $c_n(x) = 0$ sauf pour un nombre fini d'indices $n_1 < n_2 < \dots < n_k$ pour lesquels $c_n(x) = 1$. Le polynôme trigonométrique

$$P = e_{n_1} + \dots + e_{n_k}$$

a mêmes coefficients de Fourier que x. Donc $x - P$ a tous ses coefficients de Fourier nuls. Nous verrons à la prochaine Leçon que ceci implique $x - P = 0$, donc $x = P$. Ainsi les x cherchés sont les sommes finies d'exponentielles e_n. (cf. Leçon n° 7, Corollaire 2 du Thm 1).

<u>Exercice</u> 3. Par raison de symétrie on peut supposer $0 \leq t \leq \pi$. Alors

$x * x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x(t-s)\,ds = \frac{1}{2\pi}$ longueur $\left(\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \cap \left[t-\frac{\pi}{2}, t+\frac{\pi}{2}\right]\right)$
$= \frac{1}{2\pi}(\pi - t)$.

Exercice 4. Par $t \mapsto e^{it} = z$ on établit une bijection de l'intervalle $[0,2\pi[$ de $\mathbb{R}$ sur le cercle $T = \{|z| = 1\}$ de $\mathbb{C}$. Le polynôme trigonométrique

$$P(t) = \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{int} = \sum_{n=-N}^{N} a_n z^n = \frac{1}{z^N}\sum_{k=0}^{2N} a_{k-N} z^k = \frac{1}{z^N}Q(z)$$

est nul en t si et seulement si le polynôme ordinaire de degré $2N$

$$Q(z)=\sum_{k=0}^{2N} a_{k-n} z^k$$

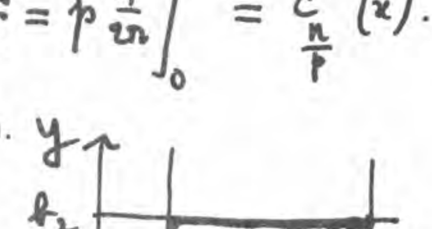
est nul en $z=e^{it}$. Or Q a au plus $2N$ racines distinctes dans $\mathbb{C}$, donc sur T.

Exercice 5. La fonction $y = x_{(p)}$ est de période $\tau = \frac{2\pi}{p}$, donc identique à sa translatée par τ. On sait que $c_n(y_\tau) = e^{-in\tau}c_n(y)$. Donc pour tout n, on a $\left(e^{-\frac{n}{p}2i\pi} - 1\right)c_n(y)=0$. Si p ne divise pas n, $e^{-\frac{n}{p}2i\pi}\neq 1$, donc $c_n(y)=0$.

Si p divise n, la fonction $s \mapsto x(s)e^{-i\frac{n}{p}s}$ est de période 2π.
Donc:

$$c_n(x_{(p)}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(pt)e^{-int}dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2p\pi} x(s)e^{-i\frac{n}{p}s}\frac{ds}{p} = p\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} = c_{\frac{n}{p}}(x).$$

Exercice 6. Soit Oxy orthonormé dans $\mathbb{R}^2$ euclidien.



Lemme. Soit R un rectangle de côtés parallèles à Ox et Oy. Pour qu'au moins un côté de R soit de longueur entière, il faut et il suffit que

$$\iint_R e^{2i\pi(x+y)}\,dx\,dy = 0.$$

Démonstration. Soit $R = \{(x,y);\ a_1\le x\le a_2,\ b_1\le y\le b_2\}$.

Alors $\iint_R e^{2i\pi(x+y)}\,dx\,dy = \left(\int_{a_1}^{a_2} e^{2i\pi x}dx\right)\left(\int_{b_1}^{b_2}e^{2i\pi y}dy\right) =$

$= \frac{-1}{4\pi^2}\left(e^{2i\pi a_2} - e^{2i\pi a_1}\right)\left(e^{2i\pi b_2} - e^{2i\pi b_1}\right)$ est nul si et seulement si l'une au moins des parenthèses est nulle, donc si et seulement si a_2-a_1 ou b_2-b_1 est entier.

Comme $\iint_Q e^{2i\pi(x+y)}\,dx\,dy = \sum_{n=1}^{10^6}\iint_{R_n} e^{2i\pi(x+y)}\,dx\,dy = \sum_{n=1}^{10^6} 0 = 0, \dots$

AN04 Leçon n° 7

Séries de Fourier

Si $x = x(t)$ est une fonction continue par morceaux de période 2π, nous avons étudié à la précédente Leçon la correspondance qui, à la fonction $x(t)$, associe la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de ses coefficients de Fourier :

(1) $$c_n = c_n(x) = (x\,|\,e_n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(t)\,e^{-int}\,dt .$$

Avec ces coefficients on forme la série de Fourier associée à $x(t)$:

(2) $$x(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{int} ,$$

série bilatérale, dont les sommes partielles (symétriques) d'ordre N sont, pour tout entier $N \geq 0$, définies par

(3) $$S_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(t-s)\,D_N(s)\,ds ,$$

où $D_N(s) = \dfrac{\sin\left[\left(N+\frac{1}{2}\right)s\right]}{\sin\frac{s}{2}}$ est le noyau de Dirichlet.

Nous allons maintenant énoncer des théorèmes de convergence de la série (2) vers la fonction x, c'est-à-dire des théorèmes affirmant que, sous certaines hypothèses, $\lim\limits_{N\to+\infty} S_N(t) = x(t)$. Encore faut-il préciser quelle signification on attribue à cette notion de limite : convergence ponctuelle ? convergence uniforme ? convergence en moyenne quadratique ? La démonstration de ces théorèmes est rejetée à la fin de la Leçon, afin que le lecteur puisse s'habituer au préalable à les appliquer, et prenne ainsi conscience de leur intérêt.

Enoncé de théorèmes de convergence

Théorème 1. Quelle que soit $x \in E$ (c'est-à-dire quelle que soit la fonction $x = x(t)$ continue par morceaux de période 2π), la série de

Fourier associée à x converge <u>en moyenne quadratique</u> vers la fonction x.

Ceci signifie que $\lim_{N\to+\infty} \| x - S_N \| = 0$. Autrement dit, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N_ε tel que $N \geq N_\varepsilon$ implique

$$\int_0^{2\pi} \left| x(t) - \sum_{n=-N}^{N} c_n(x)\, e^{int} \right|^2 dt \leq \varepsilon.$$

<u>Corollaire</u> 1. Quelle que soit $x \in E$, on a <u>l'égalité</u> dite <u>de Parseval</u>:

$$(4) \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(x)|^2 = \|x\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |x(t)|^2 dt.$$

<u>Remarques</u>: 1) Elle mériterait de s'appeler théorème de Pythagore en dimension infinie.

2) Le Corollaire 1 résulte immédiatement du Théorème 1, grâce à l'égalité (9) dans la Leçon n° 6; rappelons-la:

$$\| x - S_N \|^2 = \|x\|^2 - \sum_{n=-N}^{N} |c_n|^2 .$$

Naturellement le premier membre de (4) signifie $\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=-N}^{N} |c_n(x)|^2$. L'égalité de Parseval précise considérablement l'inégalité de Bessel (10) de la Leçon n° 6.

3) En la "polarisant" on peut généraliser un peu (4): quelles que soient deux fonctions $x \in E$ et $y \in E$, on a:

$$(5) \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(x)\overline{c_n(y)} = (x \mid y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(t)\,\overline{y(t)}\, dt .$$

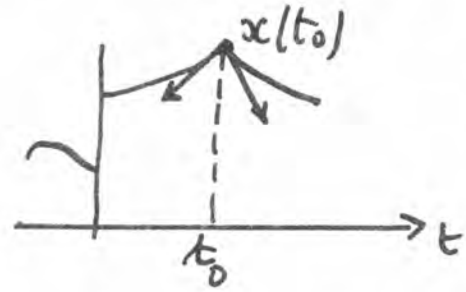
Pour le voir, il suffit d'appliquer (4) aux quatre produits scalaires du second membre dans l'identité:

$$2(x|y) = (x+y|x+y) + i(x+iy|x+iy) - (1+i)(x|x) - (1+i)(y|y).$$

<u>Corollaire</u> 2. Soient $x \in E$ et $y \in E$ deux fonctions telles que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on ait $c_n(x) = c_n(y)$. Alors $x = y$.

En effet, pour tout n, $c_n(x-y) = 0$, donc $\|x-y\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(x-y)|^2 = 0$.

Théorème 2. (Convergence ponctuelle). Soit $x \in E$. Soit $t_0 \in \mathbb{R}$. Supposons que la fonction $t \mapsto x(t)$:



1°) est continue au point t_0 ;

2°) admet au point t_0 une dérivée première à droite et une dérivée première à gauche.

Alors la série numérique $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(x) e^{int_0}$ converge, et a pour somme le nombre $x(t_0)$. Autrement dit :

$$\lim_{N \to +\infty} \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int_0} = x(t_0).$$

Théorème 3 (Convergence uniforme). Soit $x \in E$. Supposons que la série de Fourier de x soit absolument convergente, c'est-à-dire que $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|$ converge ; autrement dit les sommes $\sum_{n=-N}^{N} |c_n|$ sont majorées par un nombre indépendant de N.

Alors la série de Fourier (2) de la fonction $x = x(t)$ converge vers cette fonction uniformément dans $\mathbb{R}$.

Corollaire. Soit $x \in E$. Supposons que la fonction $x = x(t)$:

1) est continue dans $\mathbb{R}$ tout entier ;

2) admet dans $\mathbb{R}$ une dérivée première $x' = \frac{dx}{dt}$ continue par morceaux (c'est-à-dire $x(t)$ possède en tout point de $\mathbb{R}$ une dérivée continue, sauf peut-être en un nombre fini au plus de points par période, où elle possède cependant des dérivées à droite et à gauche).

Alors la série de Fourier de $x = x(t)$ converge absolument, donc uniformément dans $\mathbb{R}$, vers la fonction $x(t)$.

Calcul pratique des séries de Fourier quand la fonction est réelle

Il arrive fréquemment que la fonction x ne prenne que des valeurs $x(t)$ réelles. Dans ce cas on voit sur (1) que $c_{-n} = \overline{c_n}$ pour tout entier n. Cette remarque conduit, dans la série de Fourier associée à x :

$$(2) \qquad x(t) \sim \dots + c_{-n} e^{-int} + \dots + c_{-1} e^{-it} + c_0 + c_1 e^{it} + \dots + c_n e^{int} + \dots ,$$

à regrouper les termes d'indices opposés. Cette série devient alors

$$(6)\qquad \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt) \quad ,$$

où l'on a posé $c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$ et $c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n)$, donc $a_n = 2\,\mathrm{Re}\, c_n$ et $b_n = -2\,\mathrm{Im}\, c_n$, pour tout entier $n \geq 0$. Autrement dit, *si x est réelle*,

$$(6)\qquad x(t) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt) \quad ,$$

où, pour tout entier $n \geq 0$:

$$(7)\qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x(t)\cos(nt)\,dt \quad ; \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x(t)\sin(nt)\,dt .$$

Les formules (7) s'appellent *formules de Fourier*(*). La série (unilatérale) (6) s'appelle la série de Fourier trigonométrique associée à la fonction (réelle) $x(t)$. Bien entendu elle n'est rien d'autre que la série de Fourier exponentielle (2) réécrite autrement. Les théorèmes de convergence 1, 2, 3 et leurs corollaires continuent d'être valables dans ces nouvelles notations. La série (6) converge en moyenne quadratique vers $x(t)$; la formule de Parseval prend la forme:

$$(8)\qquad \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}[x(t)]^2\,dt .$$

Dans (7) et (8), attention au coefficient $\frac{1}{\pi}$ et non $\frac{1}{2\pi}$; attention au $\frac{a_0}{2}$ et au $\frac{a_0^2}{2}$ (et non $\left(\frac{a_0}{2}\right)^2$)! En un point t_0 où $x(t)$ est continue et a des dérivées à droite et à gauche, on a la formule :

$$(9)\qquad x(t_0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n\cos(nt_0) + b_n\sin(nt_0) .$$

Si $x \in E$ est continue dans $\mathbb{R}$ et admet une $x' = \frac{dx}{dt} \in E$, alors

---

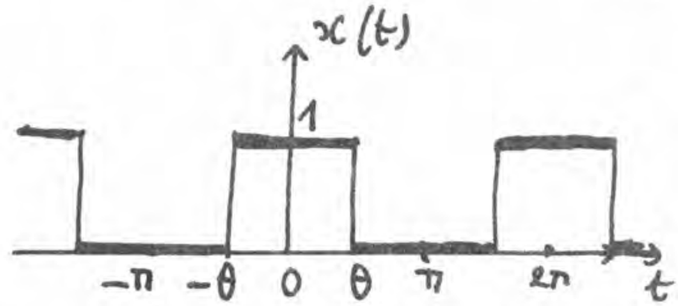
Joseph FOURIER (1768-1830), autant physicien que mathématicien, fut amené à proposer les formules (6) et (7) en 1812 en rédigeant sa Théorie Analytique de la Chaleur.

 la convergence de la série dans (9) est uniforme en t_0 dans $\mathbb{R}$.

<u>Remarque simplificatrice</u>. Si la fonction réelle $x(t)$ est <u>paire</u>, on a $b_n = 0$ quel que soit $n \geq 0$, et dans (6) on n'a que des cosinus, car $b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x(t)\,\sin(nt)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}$ d'une fonction impaire.

De même si $x(t)$ est <u>impaire</u>, on a $a_n = 0$ quel que soit n entier ≥ 0, et (6) ne contient que des sinus.

<u>Exemple</u> 1. Soit θ un nombre réel donné tel que $0 < \theta \leq \pi$. Soit $x(t)$ la fonction paire et de période 2π, qui vaut :



$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t < \theta \\ 0 & \text{si } \theta \leq t \leq \pi \end{cases}$$

. A cette fonction est associée la série de Fourier trigonométrique :

$$x(t) \sim \frac{a_0}{2} + a_1 \cos t + \cdots + a_n \cos(nt) + \cdots$$

où, pour tout entier $n \geq 0$,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)\cos(nt)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x(t)\cos(nt)\,dt = \frac{2}{\pi}\int^{\theta} \cos(nt)\,dt\,,$$

donc $a_0 = \frac{2\theta}{\pi}$; et, si $n > 0$, $a_n = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin(nt)}{n}\right]_{t=0}^{t=\theta} = \frac{2}{\pi}\frac{\sin(n\theta)}{n}$.

Par conséquent :

$$x(t) \sim \frac{\theta}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(n\theta)}{n}\cos(nt).$$

Vu le Théorème 2, on peut remplacer $\sim$ par $=$ pour toute valeur de t, à l'exception des points de discontinuité $t = \pm\theta + 2k\pi$, k entier. Par exemple, pour $t = 0$,

$$1 = \frac{\theta}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n\geq 1}\frac{\sin(n\theta)}{n},$$

d'où la formule, valable pour $0 < \theta \leq \pi$:

$$\sum_{n\geq 1}\frac{\sin(n\theta)}{n} = \frac{\pi - \theta}{2}\quad ,$$

qui généralise la formule de Gregory, obtenue pour $\theta = \frac{\pi}{2}$:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} + \cdots = \frac{\pi}{4} .$$

Pour $\theta \neq \pi$, faisons $t = \pi$; il vient :

$$0 = \frac{\theta}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{\sin(n\theta)}{n} ,$$

d'où la formule, valable pour $0 \leq \theta < \pi$:

$$\sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{\sin(n\theta)}{n} = -\frac{\theta}{2} .$$

Enfin appliquons la formule de Parseval :

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n \geq 1} a_n^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [x(t)]^2 dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\theta} dt .$$

On a :

$$\frac{2\theta^2}{\pi^2} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n \geq 1} \frac{\sin^2(n\theta)}{n^2} = \frac{2\theta}{\pi} ,$$

d'où la formule, valable pour $0 \leq \theta \leq \pi$:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\sin^2(n\theta)}{n^2} = \frac{\theta(\pi - \theta)}{2} .$$

Citons-en le cas particulier (pour $\theta = \frac{\pi}{2}$) :

$$1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \cdots + \frac{1}{(2n+1)^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8} .$$

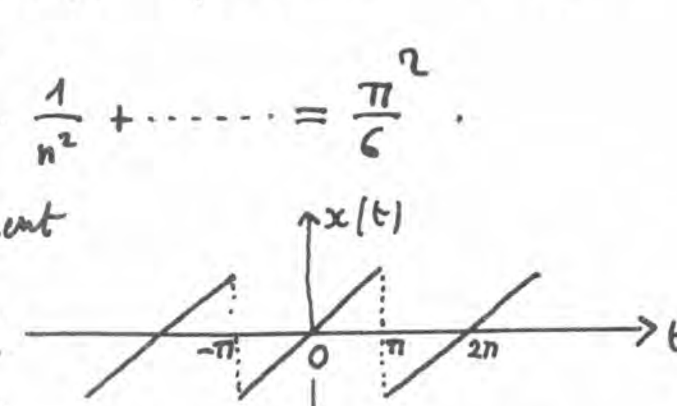
On peut en déduire sans effort la somme de la série $s = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$.
En effet, en séparant le pair de l'impair :

$$s = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \sum_{p \geq 1} \frac{1}{(2p)^2} + \sum_{p \geq 1} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{s}{4} + \frac{\pi^2}{8} ,$$

d'où la célèbre formule d'Euler :

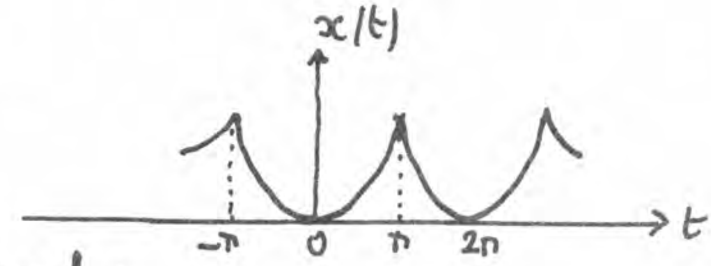
$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6} .$$

Exercice 1. Ecrivez le développement en série de Fourier trigonométrique de la fonction $x(t)$ impaire et de période 2π, qui vaut t quand $|t| < \pi$.



Retrouvez certaines des formules de l'Exemple 1, à l'aide de ce développement.

Exercice 2. En développant en série de Fourier trigonométrique la fonction $x(t)$ de période 2π qui vaut $x(t) = t^2$ pour $|t| \leq \pi$, montrez que, si $|t| \leq \pi$, on a la formule :

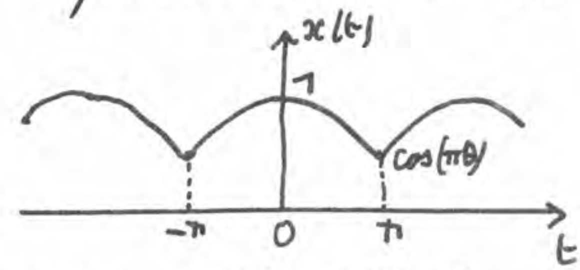


$$t^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{\cos(nt)}{n^2} .$$

Précisez les formules obtenues pour $t = 0$, $t = \pi$, ainsi que l'égalité de Parseval.

Remarque. Sur les Exercices 1 et 2 il apparaît que souvent on étudie une fonction $x = x(t)$ qui n'est pas définie naturellement par une expression analytique périodique, mais en prenant sur une période (ici $]-\pi, \pi[$) une fonction quelconque (ici t ou t^2) et en décidant de la prolonger par périodicité ; il faut donc prendre garde qu'en dehors de la période de définition $]-\pi, \pi[$, la fonction $x(t)$ de l'Exercice 1 n'est plus égale à t, et celle de l'Exercice 2 n'est plus égale à t^2.

Exemple 2. Soit θ un nombre réel donné, non entier. Soit $x(t)$ la fonction paire et de période 2π qui vaut $\cos(\theta t)$ pour $|t| \leq \pi$. On a :



$$x(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} a_n \cos(nt) \quad , \text{ où :}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\theta t) \cos(nt)\, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{2} \left[\cos\{(\theta+n)t\} + \cos\{(\theta-n)t\} \right] dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sin[(\theta+n)\pi]}{\theta+n} + \frac{\sin[(\theta-n)\pi]}{\theta-n} \right) = \frac{\sin(\theta\pi)\cos(n\pi)}{\pi} \left(\frac{1}{\theta+n} + \frac{1}{\theta-n} \right) =$$

$$= (-1)^n \frac{2\theta \sin(\pi\theta)}{\pi} \frac{1}{\theta^2 - n^2} .$$

Grâce au Théorème 3 la série de Fourier de $x(t)$ converge vers $x(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, donc pour $|t| \leq \pi$ on a la formule :

$$\cos(t\theta) = \frac{\sin(\pi\theta)}{\pi\theta} + \frac{2\theta \sin(\pi\theta)}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{\cos(nt)}{\theta^2 - n^2} ,$$

qui, s'il était besoin, fourniraient la somme de toutes les séries $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(nt)}{\theta^2 - n^2}$, où $|t| \leq \pi$ et où $\theta \in \mathbb{R}$, $\theta \notin \mathbb{Z}$. Contentons-nous de faire $t = \pi$; en divisant les deux membres par $\sin(\pi\theta)$, nous obtenons le remarquable <u>développement d'Euler pour la cotangente</u> :

$$(10) \qquad \operatorname{cotg}(\pi\theta) = \frac{1}{\pi\theta} + \frac{2\theta}{\pi} \sum_{n\geq 1} \frac{1}{\theta^2 - n^2} \, ,$$

valable pour tout nombre θ réel non entier.

<u>Application au calcul des sommes</u> $\zeta(2p) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{2p}}$.

À la Leçon n°5, on a établi pour la cotangente le développement en série entière :

$$(11) \qquad \operatorname{cotg}(\pi\theta) = \frac{1}{\pi\theta} + 2 \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \frac{(2\pi)^{2p-1} B_{2p}}{(2p)!} \theta^{2p-1} \, ,$$

pour $|\theta| < 1$, $\theta \neq 0$, où les B_{2p} sont les nombres de Bernoulli. Afin de comparer (10) et (11), pour $|\theta| < 1$, $\theta \neq 0$, et pour tout n fixé ≥ 1, remplaçons $\frac{\theta^2}{\theta^2 - n^2}$ dans (10) par une série géométrique :

$$\frac{\theta^2}{\theta^2 - n^2} = \left(-\frac{\theta^2}{n^2}\right) \frac{1}{1 - \left(\frac{\theta}{n}\right)^2} = - \sum_{p\geq 1} \frac{\theta^{2p}}{n^{2p}} \, ,$$

et permutons les deux sommations — ce qu'un argument de convergence uniforme justifierait — :

$$\operatorname{cotg}(\pi\theta) = \frac{1}{\pi\theta} - \frac{2}{\pi\theta} \sum_{n\geq 1} \sum_{p\geq 1} \frac{\theta^{2p}}{n^{2p}} = \frac{1}{\pi\theta} - \sum_{p\geq 1} \frac{2}{\pi} \left(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{2p}} \right) \theta^{2p-1}.$$

En identifiant avec (11), on obtient les formules :

$$(12) \qquad \zeta(2p) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{2p}} = (-1)^{p-1} \frac{2^{2p-1} B_{2p}}{(2p)!} \pi^{2p} \, .$$

Grâce à la table de nombres de Bernoulli B_{2p} donnée à la Leçon n°5, on a par exemple :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad ; \quad \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} \quad ; \quad \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945} \; ; \text{etc...}$$

Des formules (12) résulte que les nombres $\frac{\zeta(2p)}{\pi^{2p}}$ sont rationnels. En revanche on ne sait presque rien des nombres $\zeta(2p+1)$; récemment, en 1978, R. Apéry a prouvé que le nombre :

$$\zeta(3) = 1 + \frac{1}{8} + \cdots\cdots + \frac{1}{n^3} + \cdots\cdots$$

est irrationnel, ce qui fut salué comme un évènement considérable (*).

<u>Exercice</u> 3. Calculez $S_{2p} = \sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^{2p}}$ en fonction de $\zeta(2p)$. Précisez S_2, S_4, S_6.

<u>Exercice</u> 4. Soit u un nombre réel $\neq 0$ donné. Développez en série de Fourier trigonométrique la fonction $x(t)$ de période 2π qui vaut e^{ut} pour $0 < t < 2\pi$. Déduisez-en la formule

$$\frac{\pi u}{\operatorname{sh}(\pi u)} = 1 + 2u^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{u^2+n^2} .$$

<u>Exercice</u> 5. En reprenant l'Exercice 1 de la Leçon n° 1, et en appliquant le Théorème 3 de la présente leçon, calculez les intégrales $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(nt)}{1+r^2-2r\cos t}\,dt$ d'abord pour $0 \leq r < 1$, puis pour $r > 1$.

<u>Exercice</u> 6. Soit $x \in E$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$, de période 2π, et ayant une dérivée $x' = \frac{dx}{dt}$ continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. On suppose que $\int_0^{2\pi} x(t)\,dt = 0$. Montrez l'inégalité :

$$\int_0^{2\pi} |x(t)|^2 dt \leq \int_0^{2\pi} |x'(t)|^2 dt .$$

Pour quelles $x(t)$ a-t-on égalité ?

<u>Cas des fonctions de période $T \neq 2\pi$.</u>

Si $s \mapsto x(s)$ est une fonction continue par morceaux et de période T, la fonction $t \mapsto x\left(\frac{T}{2\pi}t\right)$ est continue par morceaux de période 2π.

(*) La fonction dzêta de Riemann, définie pour $\operatorname{Re} z > 1$ par la série $\zeta(z) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^z}$ et qu'on peut de manière naturelle étendre à tout z complexe $\neq 1$, a des relations profondes avec la Théorie des nombres.

Ce changement de variable ramène les problèmes concernant les fonctions de période T au cas particulier $T = 2\pi$, seul traité en détail dans cette Leçon. Dans l'espace E_T des fonctions $x = x(s)$ continues par morceaux de période T, muni du produit scalaire :

$$(x|y)_T = \frac{1}{T}\int_0^T x(s)\,\overline{y(s)}\,ds,$$

le système des $u_n(s) = \exp\left(in\frac{2\pi}{T}s\right)$, où $n \in \mathbb{Z}$, est orthonormé. Les coefficients de Fourier de la fonction $x = x(s)$ sont les

$$c_n = (x|u_n)_T = \frac{1}{T}\int_0^T x(s)\exp\left(-in\frac{2\pi}{T}s\right)ds,$$

et la série de Fourier associée est :

$$x(s) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \exp\left(in\frac{2\pi}{T}s\right).$$

Si x est réelle, elle prend la forme

$$x(s) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n\cos\left(\frac{2\pi}{T}ns\right) + b_n\sin\left(\frac{2\pi}{T}ns\right),$$

où :

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T x(s)\cos\left(\frac{2\pi}{T}ns\right)ds, \text{ et } \quad b_n = \frac{2}{T}\int_0^T x(s)\sin\left(\frac{2\pi}{T}ns\right)ds$$

pour tout entier $n \geq 0$. Tous les résultats obtenus dans le cas $T = 2\pi$ sont valables, mutatis mutandis, pour T quelconque, notamment les Théorèmes de convergence et leurs Corollaires ; la formule de Parseval $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2 = \frac{1}{T}\int_0^T |x(s)|^2 ds$ prend, quand x est réelle, la forme :

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n\geq 1}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{2}{T}\int_0^T [x(s)]^2 ds.$$

<u>Exercice</u> 7. On désigne par $\mathrm{Ent}(t)$ le plus petit entier $\leq t$. Soit

$$x(t) = t - \mathrm{Ent}(t) - 1/2.$$

1) Montrez que la fonction x est impaire, continue par morceaux, de période 1, et que $x(t) \sim -\frac{1}{\pi}\sum_{n\geq 1}\frac{\sin(2\pi nt)}{n}$.

2) Soient p et q deux entiers ≥ 1. Soit d leur p.g.c.d. Alors :

$$\int_0^1 x(pt)\,x(qt)\,dt = \frac{d^2}{12\,pq}.$$

Terminons cette Leçon en démontrant les théorèmes de convergence.

<u>Démonstration du Théorème 2</u>. Il faut voir que $\lim_{N\to+\infty}[x(t_0)-S_N(t_0)]=0$, où

$$(13)\quad S_N(t_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(t_0-s)\,\frac{\sin\left[\left(N+\frac{1}{2}\right)s\right]}{\sin\frac{s}{2}}\,ds .$$

Si dans (13) on suppose pour un instant que $x(t)$ est la fonction $\equiv 1$ sur $\mathbb{R}$, donc que $S_N(t)\equiv 1$, la formule se spécialise en

$$1=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sin\left[\left(N+\frac{1}{2}\right)s\right]}{\sin\frac{s}{2}}\,ds .$$

Multiplions cette dernière formule par la constante $x(t_0)$ et retranchons de (13) :

$$S_N(t_0)-x(t_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[x(t_0-s)-x(t_0)\right]\frac{\sin\left[\left(N+\frac{1}{2}\right)s\right]}{\sin\frac{s}{2}}\,ds .$$

Faisons le changement de variable $s=2t$, et remarquons que l'intégrande en t étant de période π, on a $2\int_0^{\pi}=\int_0^{2\pi}$:

$$S_N(t_0)-x(t_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[x(t_0-2t)-x(t_0)\right]\frac{\sin\left[(2N+1)t\right]}{\sin t}\,dt =$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}y(t)\,\sin\left[(2N+1)t\right]dt ,$$

où :

$$y(t)=\frac{x(t_0-2t)-x(t_0)}{\sin t}=\frac{x(t_0-2t)-x(t_0)}{2t}\,\frac{2t}{\sin t}$$

La fonction $y=y(t)$ est de période 2π. Elle est évidemment continue par morceaux pour tout $t\neq k\pi$, k entier. Elle a pour $t=0$ une limite à droite $2\,x'_d(t_0)$ et une limite à gauche $2\,x'_g(t_0)$. Puisque $y(t+\pi)=-y(t)$, elle a aussi une limite à gauche et à droite pour $t=\pi$. Bref cette fonction $y(t)$ appartient à l'espace E. Mais, vu la formule d'Euler $\sin[(2N+1)t]=\frac{1}{2i}\left[e^{i(2N+1)t}-e^{-i(2N+1)t}\right]$, le calcul ci-dessus a prouvé que :

$$x(t_0)-S_N(t_0)=\frac{1}{2i}\left[c_{2N+1}(y)-c_{-(2N+1)}(y)\right].$$

Quand $N \to +\infty$, le deuxième membre tend vers 0 d'après la propriété de Riemann-Lebesgue des coefficients de Fourier de y (cf. la Leçon n° 6, Corollaire 3), donc aussi le premier membre.

Démonstration (directe) du Corollaire du Théorème 3

D'après l'hypothèse de ce Corollaire, en chaque point $t_0 \in \mathbb{R}$ on peut appliquer le Théorème 2. Donc la série de Fourier de $x(t)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers $x(t)$. Reste à voir qu'elle converge absolument ($\sum_{-\infty}^{\infty} |c_n(x)|$ converge), car, puisque :

$$|c_n e^{int}| = |c_n| \text{ est indépendant de } t,$$

alors elle convergera normalement, donc uniformément dans $\mathbb{R}$. Or, vu l'hypothèse sur $x'(t)$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a :

$$c_n(x') = i n \, c_n(x),$$

donc, d'après l'inégalité de Schwarz, et l'inégalité de Bessel pour x',

$$\sum_{n=-N}^{N} |c_n(x)| = |c_0(x)| + \sum_{\substack{n=-N \\ n\neq 0}}^{N} \frac{1}{n} |c_n(x')| \leq$$

$$\leq |c_0(x)| + \left(\sum_{\substack{n=-N \\ n\neq 0}}^{N} \frac{1}{n^2}\right)^{1/2} \left(\sum_{n=-N}^{N} |c_n(x')|^2\right)^{1/2} \leq |c_0(x)| + \left(2 \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}\right)^{1/2} \|x'\|,$$

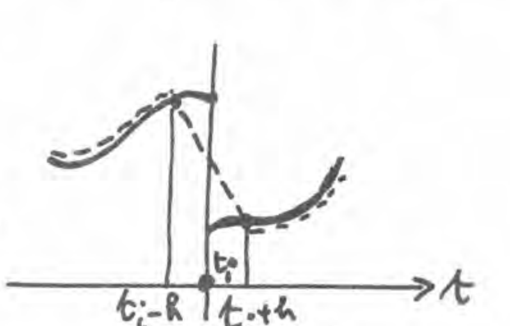
une constante indépendante de N ; donc $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|$ converge.

Démonstration du Théorème 1

Lemme 1. Soit E_1 l'espace des $y \in E$ telles que y soit continue dans $\mathbb{R}$ tout entier et admette une $y' = \frac{dy}{dt}$ continue par morceaux. Alors, pour toute $x \in E$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $y \in E_1$ telle que

$$\|x - y\| \leq \varepsilon.$$

Démonstration (esquisse). Près de chaque point de discontinuité t_i de la fonction $x(t)$, interpolons $x(t)$ par une fonction linéaire affine ; on obtient ainsi dans un premier temps une fonction $z = z(t)$ de période 2π et continue sur $\mathbb{R}$ tout entier

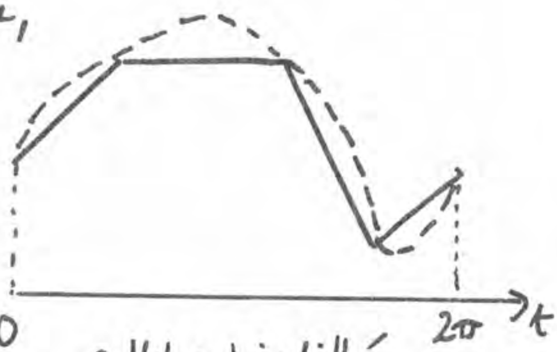


$x(t)$ en trait plein ;
$z(t)$ en pointillé

qui, si l'on a serré d'assez près les t_i, est assez proche de $x = x(t)$ pour que $\|x - z\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, car après tout le carré de la norme de cette différence est une intégrale, une aire, qui peut être rendu aussi petite qu'on veut si l'intervalle d'intégration $[t_i - h, t_i + h]$ est pris assez petit.

Maintenant $z = z(t)$, étant continue, est uniformément continue sur $[0, 2\pi]$; il existe donc une fonction linéaire par morceaux (à graphe une ligne polygonale) $y = y(t)$ telle que

$$\sup_{0 \leq t \leq 2\pi} |z(t) - y(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2},$$



$z(t)$ en pointillé
$y(t)$ en trait plein

donc telle que a fortiori, d'après l'inégalité de la moyenne :

$$\|z - y\| = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |z(t) - y(t)|^2 dt\right)^{1/2} \leq \sup_{0 \leq t \leq 2\pi} |z(t) - y(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Il est clair que $y \in E_1$, et que.

$$\|x - y\| \leq \|x - z\| + \|z - y\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Lemme 2. Soit $x \in E$. Soit $S_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(x) e_n$. Alors $\|S_N(x)\| \leq \|x\|$.

En effet $\|S_N(x)\|^2 = \|\sum_{n=-N}^{N} c_n e_n\|^2 = \left(\sum_n c_n e_n \,\middle|\, \sum_m c_m e_m\right)$

$$= \sum_{n,m} c_n \bar{c}_m (e_n | e_m) = \sum_{n=-N}^{N} |c_n|^2 \leq \|x\|^2,$$

d'après l'inégalité de Bessel.

Pour démontrer le théorème 1, soit $x \in E$ et $\varepsilon > 0$ donnés. Par le Lemme 1, soit $y \in E_1$ telle que $\|x - y\| \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Pour tout entier $N \geq 0$, on a aussi $\|S_N(x) - S_N(y)\| = \|S_N(x - y)\| \leq \|x - y\| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ d'après le Lemme 2, donc

$$\|x - S_N(x)\| \leq \|x - y\| + \|y - S_N(y)\| + \|S_N(y) - S_N(x)\| \text{ est}$$

$$\leq \frac{2\varepsilon}{3} + \|y - S_N(y)\|.$$

Mais, puisque $y \in E_1$, on a démontré précédemment (Corollaire du Théorème 3) que $S_N(y)(t)$ tend vers $y(t)$ uniformément sur $\mathbb{R}$. Par conséquent il existe N_ε tel que $N \geq N_\varepsilon$ entraîne :

$$\sup_{0 \leq t \leq 2\pi} |y(t) - S_N(y)(t)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

donc entraîne a fortiori, d'après l'inégalité de la moyenne :

$$\|y - S_N(y)\| = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |y(t) - S_N(y)(t)|^2 dt\right)^{1/2} \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Ainsi $N \geq N_\varepsilon$ implique $\|x - S_N(x)\| \leq \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$.

<u>Démonstration du théorème 3</u>. Par hypothèse

$$|c_n(x) e^{int}| = |c_n(x)|$$

est indépendant de t, et la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(x)|$ converge ; donc la série $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(x) e^{int}$ converge normalement, donc uniformément en t dans $\mathbb{R}$, vers une fonction $y = y(t)$:

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(x) e^{int}$$

évidemment de période 2π et continue dans $\mathbb{R}$, comme limite uniforme de fonctions continues. Reste à voir que $y = x$. Pour cela, d'après le Corollaire 2 du Théorème 1, il suffit de s'assurer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $c_n(y) = c_n(x)$. Or

$$c_n(y) = (y \mid e_n) = \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m(x) e_m \,\Big|\, e_n\right) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m(x)(e_m \mid e_n)$$

$$= c_n(x),$$

vu les relations $(e_m \mid e_n) = 0$ si $m \neq n$, et $(e_n \mid e_n) = 1$. La permutation de la série et du produit scalaire (intégration terme à terme) était évidemment autorisée par la convergence uniforme.

<u>Indications sur les Exercices proposés dans cette Leçon</u>

Exercice 1. $x(t) \sim \sum_{n\geq 1} b_n \sin(nt)$, où, pour tout $n \geq 1$,
$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t \sin(nt)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\sin(nt)\,dt = (-1)^{n+1}\frac{2}{n}$, après intégration par parties. D'après le Théorème 2, on a les formules :

$$t = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin(nt)}{n} \qquad \text{pour } |t|<\pi,$$

déjà obtenues dans l'Exemple 1. En appliquant la formule de Parseval, on trouve $4\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2\,dt = \frac{2\pi^2}{3}$, donc $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 2. $x(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n\cos(nt)$, où, pour tout $n\geq 0$,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2\cos(nt)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t^2\cos(nt)\,dt = \begin{cases} \frac{2\pi^2}{3} & \text{si } n=0 \; ; \\ (-1)^n\frac{4}{n^2} & \text{si } n>0 \; , \end{cases}$$

après une double intégration par parties. D'après le Corollaire du théorème 3 :

$$t^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n\geq 1}(-1)^n\frac{\cos(nt)}{n^2}$$

pour $|t|\leq\pi$, la convergence étant uniforme en t sur ce segment. Pour $t=0$, on obtient la formule $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$. Pour $t=\pi$, on retrouve $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. En appliquant la formule de Parseval, on trouve : $\frac{2\pi^4}{9} + 16\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^4} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^4\,dt = \frac{2\pi^4}{5}$, et donc $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

Exercice 3. $S_{2p} = \sum_{k\geq 0}\frac{1}{(2k+1)^{2p}} - \sum_{k\geq 1}\frac{1}{(2k)^{2p}} =$

$$= \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^{2p}} - 2\sum_{k\geq 1}\frac{1}{(2k)^{2p}} = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^{2p}} - \frac{1}{2^{2p-1}}\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^{2p}} =$$

$= \left(1-\frac{1}{2^{2p-1}}\right)\zeta(2p)$. Donc $S_2 = \frac{\pi^2}{12}$; $S_4 = \frac{7\pi^4}{720}$; $S_6 = \frac{31\pi^6}{30.240}$.

Exercice 4. Pour $0<t<\pi$, la fonction e^{ut} est continuement dérivable, donc $e^{ut} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n\cos(nt) + b_n\sin(nt)$, où, pour $n\geq 0$,

$$a_n + ib_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} e^{ut}e^{int}\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} e^{(u+in)t}\,dt = \frac{e^{2\pi u}-1}{\pi}\,\frac{1}{u+in} =$$

$$= \frac{e^{2\pi u}-1}{\pi}\,\frac{u-in}{u^2+n^2}, \text{ donc } a_n = \frac{e^{2\pi u}-1}{\pi}\,\frac{u}{u^2+n^2} \text{ et } b_n = -\frac{e^{2\pi u}-1}{\pi}\,\frac{n}{u^2+n^2}.$$

Pour $u \neq 0$ et $0 < t < 2\pi$, on a donc la formule :

$$e^{ut} = \frac{e^{2\pi u}-1}{\pi}\left(\frac{1}{2u} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u\cos(nt)}{u^2+n^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\sin(nt)}{u^2+n^2}\right).$$

Pour $t=\pi$, on obtient que, si $u \neq 0$,

$$\frac{\pi u}{\operatorname{sh}(\pi u)} = 1 + 2u^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{u^2+n^2}.$$

Exercice 5. Pour $0 \leq r < 1$, on a vu que :

$$\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos t} = 1 + 2\sum_{n\geq 1} r^n \cos(nt),$$

où la convergence est absolue et uniforme. Des relations d'orthogonalité des e_n il résulte alors que le deuxième membre est le développement en série de Fourier trigonométrique de la fonction du premier membre, d'où les formules de Fourier :

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos t}\cos(nt)\,dt = a_n = 2r^n \text{ si } n \geq 0. \quad \text{Donc}$$

$$I_n(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\cos(nt)\,dt}{1+r^2-2r\cos t} = \frac{r^n}{1-r^2} \text{ pour } 0 \leq r < 1. \text{ Si } r > 1,$$

on voit que $I_n(r) = \frac{1}{r^2} I\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{r^n(r^2-1)}$.

Exercice 6. Compte-tenu de $c_0(x) = 0$ et de $c_n(x') = in\,c_n(x)$, d'après Parseval appliqué à x et à x' :

$$\int_0^{2\pi} |x(t)|^2 dt = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(x)|^2 \leq 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 |c_n(x)|^2 = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(x')|^2 =$$
$$= \int_0^{2\pi} |x'(t)|^2 dt.$$

Exercice 7. 2°) D'après la Leçon n°6, Exercice 5, $b_n(x_{(p)}) = -\frac{1}{\pi}\frac{p}{n}$ si p divise n ; $=0$ sinon ; et $b_n(x_{(q)}) = -\frac{1}{\pi}\frac{q}{n}$ si q divise n ; $=0$ sinon. Soit $m = \frac{pq}{d}$ le p.p.c.m. de p et q. D'après l'égalité (5),

$$\int_0^1 x(pt)x(qt)\,dt = \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1} b_n(x_{(p)})\,b_n(x_{(q)}) = \frac{1}{2\pi^2}\sum_{k\geq 1} \frac{p}{km}\,\frac{q}{km} =$$
$$= \frac{1}{2\pi^2}\,\frac{pq}{m^2}\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^2} = \frac{1}{12}\,\frac{pq}{m^2} = \frac{d^2}{12pq}.$$

AN 04 Leçon n° 8

Séries de matrices

Dans cette Leçon, K désignera le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels ou le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes, et, si n est un entier donné ≥ 1, K^n désignera l'espace vectoriel sur K des $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, où les x_i sont des nombres appartenant à K. Ainsi $K^n = \mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$. L'espace K^n est muni de sa norme euclidienne :

(1) $$\|x\| = \|(x_1, x_2, \ldots, x_n)\| = \left(|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2\right)^{1/2},$$

et de la notion de distance associée $d(x,y) = \|x-y\|$. En AN03 Leçon n° 1, nous avons étudié les rudiments de l'analyse vectorielle au sens de cette distance, tout au moins dans le cas où $K = \mathbb{R}$; mais il faut remarquer qu'en passant aux parties réelle et imaginaire des coordonnées complexes x_i, l'espace $\mathbb{C}^n$ apparaît comme isométrique à $\mathbb{R}^{2n}$. Nous n'avons donc aucun scrupule à admettre que ce que nous avons appris en AN03 des limites de suites de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ vaut pour $\mathbb{C}^n$.

Séries de vecteurs dans $\mathbb{C}^n$ ou $\mathbb{R}^n$

Soit $(x_k) = ((x_{k1}, \ldots, x_{kn}))$, où $k \geq 0$, une suite de vecteurs dans K^n, et soit $s = (s_1, \ldots, s_n)$ un vecteur dans K^n. On dit que la série de vecteurs $\sum_{k\geq 0} x_k$ converge, et a pour somme s, si la "somme partielle" $x_0 + x_1 + \cdots + x_k$ tend vers s quand k tend vers $+\infty$. Pour cela il faut et il suffit (critère de Cauchy) que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N_ε tel que $k' \geq k \geq N_\varepsilon$ entraîne $\|x_k + x_{k+1} + \cdots + x_{k'}\| \leq \varepsilon$. On dit que la série de vecteurs $\sum_{k\geq 0} x_k$ est absolument convergente si la série de nombres réels positifs $\sum_{k\geq 0} \|x_k\|$ converge. Ceci implique que la série de vecteurs $\sum_{k\geq 0} x_k$ elle-même converge, et que $\|\sum_{k\geq 0} x_k\| \leq \sum_{k\geq 0} \|x_k\|$.

D'ailleurs la série de vecteurs $\sum_{k\geq 0} x_k$ converge et a pour somme s si et seulement si, pour $i = 1, 2, \ldots, n$, chaque série (numérique) composante $\sum_{k\geq 0} x_{ki}$ converge vers la composante s_i de s. Ainsi l'Analyse vectorielle dans K^n se ramène à faire de l'Analyse ordinaire dans $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, composante par composante.

Norme d'une matrice carrée $n \times n$

Pour $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, soit maintenant $M_n(K)$ l'ensemble des matrices carrées $A = (a_{ij})$ à n lignes et n colonnes, à coefficients a_{ij} dans K, où $i = 1, 2, \ldots, n$; $j = 1, 2, \ldots, n$. En Algèbre linéaire, nous avons appris à calculer sur ces matrices, à les appliquer à un vecteur de K^n, à prendre leur matrice adjointe, leur inverse quand il existe, à les diagonaliser quand c'est possible, sinon au moins à les trigonaliser, etc.... Nous utiliserons librement tous les résultats d'Algèbre linéaire qui nous seront nécessaires, comme ayant dû être enseignés dans une autre partie du Cours.

Définition. Si $A \in M_n(K)$, nous poserons :

$$(2) \qquad \|A\| = \sup_{x \in K^n,\ \|x\| = 1} \|Ax\| ,$$

et nous appellerons ce nombre la norme de la matrice A (associée à la norme vectorielle euclidienne $\|x\|$ donnée par (1)).

Proposition 1. 1°) Cette définition a un sens.

2°) Pour tout $x \in K^n$, on a : $\|Ax\| \leq \|A\| \, \|x\|$.

3°) Si $A \in M_n(K)$, $B \in M_n(K)$, $\lambda \in K$, on a les propriétés fondamentales d'une norme :

$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$; $\|\lambda A\| = |\lambda| \, \|A\|$;

$\|A\|$ est réel ≥ 0, et $\|A\| = 0$ entraîne $A = 0$.

4°) $\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|$;

pour tout entier $k \geq 0$, on a $\|A^k\| \leq \|A\|^k$;

si $I = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice identité, on a $\|I\| = 1$.

5°) Soit S une matrice unitaire (on dit "orthogonale" si $K = \mathbb{R}$), c'est-à-dire inversible et telle que son inverse S^{-1} soit égale à son adjointe S^* (voir la note en bas de page). Alors :

$\|S\| = 1$; et, pour toute $A \in M_n(K)$, on a $\|S^{-1}AS\| = \|A\|$.

6°) Pour toute matrice $A \in M_n(K)$, sa norme est donnée explicitement par la formule :

$\|A\| = \|A^*\| = \sqrt{\|A^*A\|}$ = la racine carrée de la plus grande valeur propre de la matrice A^*A.

<u>Démonstration</u> 1°) D'après l'inégalité de Schwarz

$$\left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right|^2 \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right) \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2 \right),$$

donc, si $A = (a_{ij})$, pour tout $x \in K^n$ tel que $\|x\| = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2\right)^{1/2} = 1$:

$$\|Ax\| = \left(\sum_i \left| \sum_j a_{ij} x_j \right|^2 \right)^{1/2} \leq \left(\sum_i \sum_j |a_{ij}|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_j |x_j|^2 \right)^{1/2} \leq M,$$

où M est la constante $\left(\sum_i \sum_j |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}$. Donc le sup de la Définition existe.

2°) L'inégalité proposée est évidente pour $x = 0$. Si $x \neq 0$, posons $\lambda = \|x\|$ et $y = \frac{x}{\lambda}$. Alors $\|y\| = 1$, donc $\|Ay\| \leq \|A\|$. Par conséquent :

$$\|Ax\| = \|A(\lambda y)\| = \|\lambda Ay\| = |\lambda| \|Ay\| \leq \|A\| |\lambda| = \|A\| \|x\|.$$

3°) D'après l'inégalité triangulaire de la norme vectorielle, on a $\|Ax + Bx\| \leq \|Ax\| + \|Bx\|$ pour tout $x \in K^n$, donc

---

(*) Rappelons (cours d'Algèbre) que l'adjointe d'une matrice $S = (s_{ij})$ est la matrice $S^* = (t_{ij})$ telle que $t_{ij} = \overline{s_{ji}}$ quels que soient $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Pour qu'une matrice soit unitaire ($S^{-1} = S^*$), il faut et il suffit que, pour tout $x \in K^n$, on ait $\|Sx\| = \|x\|$; et ceci équivaut au fait que les n vecteurs-colonnes de S soient orthonormés

$$\|A+B\| = \sup_{\|x\|=1} \|(A+B)x\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax+Bx\| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| + \sup_{\|x\|=1} \|Bx\| = \|A\|+\|B\|.$$

On montre très facilement que $\|\lambda A\| = |\lambda|\,\|A\|$.

Si $\|A\|=0$, d'après 2°) pour tout $x \in K^n$ on a $\|Ax\|=0$ donc $Ax=0$.

4°) D'après 2°) pour tout $x \in K^n$ on a $\|A(Bx)\| \leqslant \|A\|\,\|Bx\|$, donc :

$$\|AB\| = \sup_{\|x\|=1} \|(AB)x\| = \sup_{\|x\|=1} \|A(Bx)\| \leqslant \|A\| \sup_{\|x\|=1} \|Bx\| = \|A\|\,\|B\|.$$

En particulier $\|A^2\| \leqslant \|A\|^2$, puis, par récurrence sur k,

$$\|A^k\| = \|A^{k-1}A\| \leqslant \|A^{k-1}\|\,\|A\| \leqslant \|A\|^{k-1}\|A\| = \|A\|^k.$$

$$\|I\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ix\| = \sup_{\|x\|=1} \|x\| = 1.$$

5°) Si S est unitaire, elle est isométrique : $\|Sx\| = \|x\|$ pour tout $x \in K^n$; donc $\|S\| = \sup_{\|x\|=1} \|Sx\| = \sup_{\|x\|=1} \|x\| = 1$.

De plus, S^{-1} est aussi unitaire, donc $\|S^{-1}\|=1$. Par conséquent :

$\|S^{-1}AS\| \leqslant \|S^{-1}\|\,\|A\|\,\|S\| = \|A\|$; et inversement :

$$\|A\| = \|S(S^{-1}AS)S^{-1}\| \leqslant \|S\|\,\|S^{-1}AS\|\,\|S^{-1}\| = \|S^{-1}AS\|.$$

Donc
$$\|S^{-1}AS\| = \|A\|.$$

6°) D'après la propriété fondamentale de l'adjointe vis-à-vis du produit scalaire (*), et compte tenu de l'inégalité de Schwarz,

$$\|Ax\|^2 = (Ax\,|\,Ax) = (A^*Ax\,|\,x) \leqslant \|A^*Ax\|\,\|x\|,$$

donc $$\|A\|^2 = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|^2 \leqslant \sup_{\|x\|=1} \|A^*Ax\| = \|A^*A\|,$$

et $$\|A\|^2 \leqslant \|A^*A\| \leqslant \|A^*\|\,\|A\| \qquad (3)$$

Pour $A=0$, le 6°) est évident. On peut supposer $A \neq 0$ et diviser (3)

(*) $(x\,|\,Ay) = (A^*x\,|\,y)$ quels que soient $x \in K^n$, $y \in K^n$.

par $\|A\|$, d'où $\|A\| \leq \|A^*\|$. Dans cette dernière inégalité, remplaçons A par A^*, donc A^* par $(A^*)^* = A$; il vient $\|A^*\| \leq \|A\|$. Ainsi $\|A\| = \|A^*\|$, ce qui précise (3) en $\|A\|^2 = \|A^*A\|$. Finalement $\|A\| = \|A^*\| = \sqrt{\|A^*A\|}$.

La matrice A^*A est égale à son adjointe ; d'après le cours d'Algèbre il existe donc une matrice unitaire S telle que la matrice $S^{-1}(A^*A)S$ soit diagonale. De plus ses valeurs propres sont des nombres réels ≥ 0. Car, si $v \in K^n$ et $\lambda \in K$ sont tels que $A^*Av = \lambda v$ et $v \neq 0$, alors $0 \leq \|Av\|^2 = (Av|Av) = (A^*Av|v) = (\lambda v|v)$,

donc
$$\lambda \|v\|^2 \geq 0,$$
ce qui exige $\lambda \geq 0$, car $\|v\|^2 \neq 0$. Ainsi il existe une matrice unitaire S et des nombres réels $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$ tels que :

$$S^{-1}(A^*A)S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \ \lambda_n \end{pmatrix} = D .$$

Ce qui précède montre que $\|A\| = \sqrt{\|D\|}$. Or

$$\|D\|^2 = \sup_{|x_1|^2+\dots+|x_n|^2=1} \left(\lambda_1^2|x_1|^2 + \lambda_2^2|x_2|^2 + \dots + \lambda_n^2|x_n|^2 \right)$$

est atteint quand $x_1 = 1$, $x_2 = x_3 = \dots = x_n = 0$, ce qui fait porter tout le poids sur le plus grand coefficient λ_1^2. Donc $\|D\| = \lambda_1$.

<u>Exercice 1</u>. Calculez $\|A\|$ pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

<u>Exercice 2</u> 1) Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$. Montrez que, quels que soient $i = 1, 2, .., n$ et $j = 1, 2, \dots, n$, on a

$$|a_{ij}| \leq \|A\| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}$$

2) Déduisez-en que, si $A_k = ((a_k)_{ij})$ est, pour k entier ≥ 0, une suite de matrices dans $M_n(K)$, alors, pour que $\lim_{k \to +\infty} \|A_k\| = 0$, il faut et il suffit que, quels que soient $i = 1, 2, .., n$ et $j = 1, 2, \dots, n$ fixés, la suite des coefficients $(a_k)_{ij}$ tende vers 0 quand $k \to +\infty$.

Analyse matricielle

Soit $(A_k)_{k\geq 0}$ une suite de matrices dans $M_n(K)$, et soit A une matrice appartenant à $M_n(K)$.

On dit que $\lim\limits_{k\to+\infty} A_k = A$ si $\lim\limits_{k\to+\infty} \| A - A_k \| = 0$. D'après l'Exercice 2, il faut et il suffit, pour cela, que, pour chaque $i=1,2,\dots,n$ et $j=1,2,\dots,n$ fixés, la suite numérique des coefficients $(a_k)_{ij}$ de A_k tende vers le coefficient a_{ij} de A quand $k\to+\infty$. Ainsi faire de l'Analyse matricielle se ramène à faire de l'Analyse ordinaire sur les nombres, coefficient par coefficient. De cette remarque, ou directement de la définition de la limite (en utilisant la norme à la manière d'une valeur absolue), on tire aisément les propriétés suivantes.

1) Si $\lim\limits_{k\to+\infty} A_k = A$ et $\lim\limits_{k\to+\infty} B_k = B$, et si $\lambda\in K$, alors:

$$\lim_{k\to+\infty}(A_k+B_k)=A+B\ ;\ \lim_{k\to+\infty}(\lambda A_k)=\lambda A\ ;\ \lim_{k\to+\infty}(A_kB_k)=AB.$$

2) On dit que <u>la série de matrices</u> $\sum\limits_{k\geq 0} A_k$ converge et a pour somme A si $\lim\limits_{k\to+\infty}(A_0+A_1+\dots+A_k) = A$. Pour cela, il faut et il suffit (critère de Cauchy) que, pour tout $\varepsilon>0$, il existe un entier N_ε tel que $k'\geq k\geq N_\varepsilon$ entraîne $\| A_k + A_{k+1}+\dots+A_{k'}\|\leq \varepsilon$. On dit que la série de matrices $\sum\limits_{k\geq 0} A_k$ est absolument convergente si la série de nombres réels positifs $\sum\limits_{k\geq 0}\|A_k\|$ converge ; alors la série de matrices $\sum\limits_{k\geq 0} A_k$ elle-même converge, et $\|\sum\limits_{k\geq 0} A_k\|\leq \sum\limits_k \|A_k\|$.

3) En recopiant la démonstration du Théorème 6 de la Leçon n° 2, où l'on remplace simplement les modules par des normes, on obtient un théorème sur le produit de deux séries de matrices convergentes $A=\sum\limits_{k\geq 0} A_k$ et $B=\sum\limits_{k\geq 0} B_k$. Posons, pour tout entier $k\geq 0$:

$$C_k = A_0B_k + A_1B_{k-1}+\dots+A_{k-1}B_1 + A_kB_0 = \sum_{p+q=k} A_pB_q.$$

Alors, si l'une au moins des deux séries A et B est absolument convergente, la série "produit" $\sum_{k\geq 0} C_k$ converge et a pour somme le produit $C = AB$ des matrices A et B (respectez l'ordre!). Si les deux séries A et B sont absolument convergentes, la série C est aussi absolument convergente.

<u>Série géométrique de matrices</u>, <u>et inversibilité</u>

<u>Théorème 1</u>. On note $I = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ la matrice identité $n \times n$. Soit $A \in M_n(K)$ telle que $\|A\| < 1$. Alors:

1°) La série $$I + A + A^2 + \cdots\cdots + A^k + \cdots\cdots$$ est absolument convergente.

2°) La matrice $I - A$ est inversible.

3°) $(I-A)^{-1} = I + A + A^2 + \cdots\cdots + A^k + \cdots\cdots$

<u>Démonstration</u> 1°) $\|A^k\| \leq \|A\|^k$, qui est le terme général d'une série numérique géométrique de raison $\|A\| < 1$, donc convergente. Par comparaison la série à termes positifs $\sum_{k\geq 0} \|A^k\|$ converge.

2°) et 3°). Soit $S = \sum_{k\geq 0} A_k = \lim_{k\to+\infty} S_k$, où $S_k = I + A + A^2 + \cdots + A^k$.

On a: $$(I-A) S_k = (I-A)(I + A + A^2 + \cdots + A^k) =$$
$$= I + A + A^2 + \cdots + A^k - A - A^2 - \cdots - A^k - A^{k+1} = I - A^{k+1}$$
quand $k \to +\infty$, S_k tend vers S et $\|A^{k+1}\| \leq \|A\|^{k+1}$ tend vers 0, donc $I - A^{k+1}$ tend vers I. Donc $(I-A)S = I$. On montre de même que $S(I-A) = I$.

<u>Corollaire 1</u>. Toute matrice "suffisamment proche" de I est inversible.

De manière précise, toute matrice A telle que $\|I - A\| < 1$ l'est.

Plus généralement, on a le

<u>Corollaire 2</u>. Toute matrice "suffisamment proche" d'une matrice inversible est inversible. De manière précise, soit A_0 une matrice

$n \times n$ inversible. Alors, pour toute matrice A telle que $\|A\| < \dfrac{1}{\|A_0^{-1}\|}$, la matrice $A_0 - A$ est inversible.

En effet, puisque $\|A_0^{-1}A\| \leq \|A_0^{-1}\|\|A\| < 1$, la matrice $I - A_0^{-1}A$ est inversible, donc

$$A_0 - A = A_0(I - A_0^{-1}A)$$

est inversible comme produit de deux inversibles, et a pour inverse

$$(I - A_0^{-1}A)^{-1}A_0^{-1}.$$

<u>Remarque</u> 1. Le Corollaire 2 implique que, dans l'espace $M_n(K)$ isomorphe à $\mathbb{R}^{n^2}$ ou $\mathbb{R}^{2n^2}$ selon que $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, l'ensemble $GL_n(K)$ des matrices inversibles est <u>ouvert</u> (cf AN03, Leçon n°2, §2).

<u>Exercice</u> 3. Soit A_0 une matrice $n \times n$ inversible. On pose $\|A_0^{-1}\| = \frac{1}{\alpha}$. Soit A une matrice $n \times n$ telle que $\|A\| = \beta < \alpha$. Montrez que :

$$\|(A_0 + A)^{-1} - A_0^{-1} + A_0^{-1}AA_0^{-1}\| \leq \frac{\beta^2}{\alpha^2(\alpha - \beta)}.$$

Déduisez en que l'application $A \mapsto A^{-1}$ est continue de $GL_n(K)$ dans $M_p(K) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$ ou $\mathbb{R}^{2n^2}$, et qu'elle est même différentiable, sa différentielle en un point A_0 de $GL_n(K)$ étant l'application linéaire

$$A \mapsto -A_0^{-1}AA_0^{-1}$$

de $M_n(K)$ dans $M_n(K)$ (cf AN03, Leçons n°3 et n°4). Ceci généralise le fait que la dérivée de la fonction de variable réelle $x \mapsto \frac{1}{x}$ vaut $-\frac{1}{x_0^2}$ en tout point $x_0 \neq 0$.

<u>Remarque</u> 2. Le Théorème 1 exprime que, sous l'hypothèse de "contraction" $\|A\| < 1$, le système linéaire

$$\vec{x} = A\vec{x} + \vec{b}$$

a une solution et une seule (donc est de Cramer) et que cette solution est donnée par la formule

$$\vec{x} = (I - A)^{-1}\vec{b} = \vec{b} + A\vec{b} + A^2\vec{b} + \cdots + A^k\vec{b} + \cdots\cdots$$

Ceci fait apparaître le Théorème 1 comme un cas particulier

de la méthode des approximations successives (AN03, Leçon n°2, §4).
Le lecteur est invité à relire l'Exemple cité à cet endroit.

Exponentielle d'une matrice

Si A est une matrice complexe $n \times n$, on pose :

$$e^A = \exp(A) = I + \frac{1}{1!}A + \frac{1}{2!}A^2 + \cdots + \frac{1}{k!}A^k + \cdots\cdots,$$

ce qui a un sens, car la série converge absolument, vu que

$$\left\| \frac{1}{k!}A^k \right\| \leq \frac{1}{k!}\|A\|^k$$

est le terme général d'une série numérique convergente. On a $e^0 = I$.

Exemple 1. Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, alors $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $A^k = 0$ pour tout entier $k \geq 2$, et $\exp(A) = I + \frac{A}{1!} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exemple 2. Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, alors $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$, donc $A^{2k} = I$ et $A^{2k+1} = A$ pour tout entier $k \geq 0$. Donc

$$e^A = \left(I + \frac{A^2}{2!} + \cdots + \frac{A^{2k}}{(2k)!} + \cdots\cdots\right) + \left(A + \frac{A^3}{3!} + \cdots + \frac{A^{2k+1}}{(2k+1)!} + \cdots\right) =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{(2k)!} + \cdots\right) I + \left(1 + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{(2k+1)!} + \cdots\right) A = \mathrm{ch}(1) I + \mathrm{sh}(1) A.$$

Par conséquent :
$$e^A = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\,1 & \mathrm{sh}\,1 \\ \mathrm{sh}\,1 & \mathrm{ch}\,1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4. Calculez $\exp(A)$ pour $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 5 1) Calculez $\exp(tA)$, où t est un nombre réel, et où $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Interprétez géométriquement la matrice obtenue.

2) Trouvez une matrice M réelle 2×2 non nulle telle que $\exp(M) = I$.

Proposition 1. Soient A et B deux matrices $n \times n$. Supposons que A et B commutent ($AB = BA$). Alors $e^{A+B} = e^A e^B$.

Contre-exemple. Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, alors $e^A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $e^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, donc $e^A e^B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, alors que

$$A+B=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \text{ donc } e^{A+B}=\begin{pmatrix}\operatorname{ch}1&\operatorname{sh}1\\\operatorname{sh}1&\operatorname{ch}1\end{pmatrix}\neq e^A e^B.$$

Démonstration de la Proposition 1. C'est la même que celle du Théorème 7 de la Leçon n° 2, où on démontrait que $e^{z+z'}=e^z e^{z'}$, et qui était le cas $n=1$ de notre Proposition. La formule du binôme de Newton matricielle

$$(A+B)^k=\sum_{p+q=k} A^p B^q,$$

qu'on est conduit à appliquer, est valable parce que $AB=BA$.

En faisant $B=-A$, donc $A+B=0$, on obtient $e^A e^{-A}=I$. Donc toute matrice du type $\exp(A)$ est inversible, et $[\exp(A)]^{-1}=\exp(-A)$.

Proposition 2. Soit A et S deux matrices $n\times n$, où S est supposée inversible. Alors:
$$\exp(S^{-1}AS)=S^{-1}[\exp(A)]\,S.$$

Démonstration. Pour tout entier $k\geq 0$, on a, puisque $SS^{-1}=I$,
$$(S^{-1}AS)^k = S^{-1}AS\,S^{-1}AS\ldots\ldots S^{-1}AS = S^{-1}AIAI\ldots IAS =$$
$$= S^{-1}A^kS, \text{ donc } \frac{1}{k!}(S^{-1}AS)^k = S^{-1}\left(\frac{A^k}{k!}\right)S, \text{ et:}$$
$$\sum_{p=0}^{k}(S^{-1}AS)^p = S^{-1}\left(\sum_{p=0}^{k}A^p\right)S.$$
Quand $k\to+\infty$, on obtient la Proposition 2.

Corollaire $\quad e^A = S\,e^{S^{-1}AS}\,S^{-1}$.

En conséquence, si on connaît une matrice S qui réduise A à une forme $S^{-1}AS$ plus simple (par exemple diagonale) on pourra déduire e^A de la matrice $e^{S^{-1}AS}$, plus aisément calculable.

Exponentielles de matrices simples. 1°) Si $A=\begin{pmatrix}\lambda_1&&0\\&\lambda_2&\\0&&\ddots\ \lambda_n\end{pmatrix}$ est une matrice diagonale, alors $\exp(A)$ est la matrice diagonale:

$$e^A=\begin{pmatrix}e^{\lambda_1}&&0\\&e^{\lambda_2}&\\0&&\ddots\ e^{\lambda_n}\end{pmatrix}.$$

Car, pour tout entier $k\geq 0$, on a $A^k=\begin{pmatrix}\lambda_1^k&&0\\&\lambda_2^k&\\0&&\ddots\ \lambda_n^k\end{pmatrix}$, donc

$$e^A=\sum_{k\geq 0}\frac{A^k}{k!}=\begin{pmatrix}\sum_{k\geq0}\frac{\lambda_1^k}{k!}&&0\\&\sum_{k\geq0}\frac{\lambda_2^k}{k!}&\\0&&\ddots\ \sum\frac{\lambda_n^k}{k!}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{\lambda_1}&&0\\&e^{\lambda_2}&\\0&&\ddots\ e^{\lambda_n}\end{pmatrix}.$$

2°) Si $A = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & 0 \\ & \boxed{A_2} & \\ 0 & & \ddots \ \boxed{A_p} \end{pmatrix}$ est diagonale par blocs, alors

$A^k = \begin{pmatrix} \boxed{A_1^k} & & 0 \\ & \boxed{A_2^k} & \\ 0 & & \ddots \ \boxed{A_p^k} \end{pmatrix}$, donc $e^A = \begin{pmatrix} \boxed{e^{A_1}} & & 0 \\ & \boxed{e^{A_2}} & \\ 0 & & \ddots \ \boxed{e^{A_p}} \end{pmatrix}$.

3°) Si A est nilpotente, c'est-à-dire s'il existe un entier $p > 0$ tel que $A^p = 0$, alors la série de $\exp(A)$ s'arrête et l'on a simplement $e^A = I + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \cdots + \frac{A^{p-1}}{(p-1)!}$. C'est ce qui nous a permis de calculer les exponentielles dans l'Exemple 1 et l'Exercice 4 ; mais, plus généralement, si A est une matrice $n \times n$ triangulaire (supérieure ou inférieure) avec diagonale nulle, par exemple du type ci-contre, alors $A^n = 0$, donc la matrice A est nilpotente, et la série de e^A est en fait une somme finie.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

4°) Si $A = \lambda I + N$, où $\lambda \in K$, et où N est nilpotente ($N^p = 0$), alors, puisque λI et N commutent,

$$e^A = e^{\lambda I} e^N = (e^\lambda) I e^N = e^\lambda \left(I + \frac{N}{1!} + \cdots + \frac{N^{p-1}}{(p-1)!} \right).$$

est une somme finie. Tel sera le cas d'une matrice A triangulaire (supérieure ou inférieure) à diagonale constante, par exemple

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & \lambda & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}.$$

<u>Calcul de l'exponentielle d'une matrice par diagonalisation ou trigonalisation</u>. On a vu en Algèbre linéaire que, pour toute matrice $n \times n$ complexe A, il existe une matrice inversible S

(éventuellement complexe non réelle même si A est réelle) telle que $S^{-1}AS$ soit diagonale par blocs :

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \boxed{B_1} & & & \bigcirc \\ & \boxed{B_2} & & \\ & & \ddots & \\ \bigcirc & & & \boxed{B_p} \end{pmatrix}, \text{ où chaque bloc } B_i$$

est une matrice triangulaire supérieure à diagonale constante :

$$B_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & & \\ & \lambda_i & \\ 0 & & \ddots \ \lambda_i \end{pmatrix} \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, p .$$

Les $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ sont les valeurs propres distinctes (complexes) de A et, pour chaque $i = 1, 2, \dots, p$, l'ordre de B_i est la multiplicité de λ_i dans le polynôme caractéristique $\det(A - \lambda I)$ de A.

Les e^{B_i} se calculent par la règle 4°) qui précède, et grâce à 2°) et au Corollaire de la Proposition 2, on peut obtenir :

$$e^A = S e^{S^{-1}AS} S^{-1} = S \begin{pmatrix} \boxed{e^{B_1}} & & & 0 \\ & \boxed{e^{B_2}} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{e^{B_p}} \end{pmatrix} S^{-1}.$$

<u>Exemple</u> 3. La matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ a pour valeurs propres $\lambda_1 = 4$ et $\lambda_2 = 1$, cette dernière étant double. Les sous-espaces propres associés sont l'axe ternaire $x_1 = x_2 = x_3$ pour $\lambda_1 = 4$ et le plan $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ pour $\lambda_2 = 1$. La matrice

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

a pour vecteurs-colonnes un système orthonormé de 3 vecteurs propres de A. Ces trois vecteurs propres étant linéairement indépendants, la matrice de passage S diagonalise A : on a

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ et donc } e^{S^{-1}AS} = \begin{pmatrix} e^4 & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}.$$

En profitant de ce que la matrice S est orthogonale, on écrit sans effort son inverse S^{-1} en seulement transposant S, puis par multiplication de trois matrices on obtient :

$$e^A = S \begin{pmatrix} e^4 & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} S^{-1} = eI + \frac{e^4 - e}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6. Calculez l'exponentielle de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

La méthode de réduction qui vient d'être décrite conduit souvent à des calculs assez longs. Il arrive qu'on découvre a priori une relation entre les puissances successives A^k de A, assez simple pour qu'on puisse regrouper des termes dans la série définissant e^A, et ainsi obtenir la matrice e^A directement. C'est ce que nous avons fait à l'Exemple 2 et à l'Exercice 5. On retiendra que, pour trouver une relation entre les A^k, on peut souvent utiliser le théorème de Cayley-Hamilton, démontré en Algèbre linéaire : si $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ est le polynôme caractéristique de A, alors $P(A) = 0$.

Exemple 4. On donne trois nombres réels a, b, c tels que $a^2+b^2+c^2=1$. Considérons l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ qui, au vecteur $\vec{v}$, associe le vecteur $\vec{w} \wedge \vec{v}$, où $\vec{w} = (a,b,c)$ est le vecteur de longueur un donné. Cette application a pour matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$. Le polynôme caractéristique de A est $-\lambda^3 - \lambda(a^2+b^2+c^2) = -(\lambda^3 + \lambda)$. D'après Hamilton-Cayley, on a $A^3 = -A$. Soit à calculer $\exp(tA)$ pour tout t réel. De la relation $A^3 = -A$, on déduit que $A^{2k} = (-1)^{k-1}A^2$ pour $k \geq 1$, et que $A^{2k+1} = (-1)^k A$ pour $k \geq 0$. Par conséquent :

$$\exp(tA) = I + \sum_{k\geq 0} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} A^{2k+1} + \sum_{k\geq 1} \frac{t^{2k}}{(2k)!} A^{2k} =$$

$$= I + \left(\sum_{k\geq 0} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}\right) A + \left(\sum_{k\geq 1} (-1)^{k-1} \frac{t^{2k}}{(2k)!}\right) A^2. \text{ Donc}$$

$$\exp(tA) = I + (\sin t) A + (1-\cos t) A^2,$$

formule qui donne $\exp(tA)$ après calcul de $A^2 = \begin{pmatrix} -b^2-c^2 & ab & ac \\ ab & -c^2-a^2 & bc \\ ac & bc & -a^2-b^2 \end{pmatrix}$

Exercice 7. Soit $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$. Calculez A^2, puis pour tout t réel la matrice $\exp(tA)$.

Exercice 8. Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée. On note $\operatorname{tr} A$ la trace de $A = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$. Montrez que le déterminant de la matrice $\exp(A)$ vaut $e^{\operatorname{tr} A}$.

Exercice 9 1°) $(\exp A)^* = \exp(A^*)$; 2°) si $A = A^*$, alors e^{iA} est unitaire ; 3°) si A est réelle antisymétrique, alors e^A est orthogonale et de déterminant 1.

Indications sur les Exercices proposés dans cette Leçon

Exercice 1. $A^*A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ a pour polynôme caractéristique $-\lambda^3 + 4\lambda^2 - 2\lambda$, donc pour valeurs propres 0, $2-\sqrt{2}$, et $2+\sqrt{2}$ qui est la plus grande. Par conséquent $\|A\| = \sqrt{2+\sqrt{2}}$.

Exercice 2. $|a_{ij}| = |(Ae_j|e_i)| \leq \|Ae_i\|\,\|e_j\| \leq \|A\|$. Pour l'autre inégalité relire la démonstration du 1°) de la Proposition 1.

Exercice 3. $(A_0 + A)^{-1} = (I + A_0^{-1}A)^{-1} A_0^{-1} = \sum_{k\geq 0} (-1)^k (A_0^{-1}A)^k A_0^{-1} =$

$$= A_0^{-1} - A_0^{-1} A A_0^{-1} + (A_0^{-1}A)^2 \sum_{k\geq 0} (-1)^k (A_0^{-1}A)^k A_0^{-1}. \text{ Donc :}$$

$$\|(A_0+A)^{-1} - A_0^{-1} + A_0^{-1} A A_0^{-1}\| \leq \|A_0^{-1}\|^2 \|A\|^2 \sum_{k\geq 0} \|A_0^{-1}\|^k \|A\|^k \|A_0^{-1}\|$$

$$= \frac{\beta^2}{\alpha^2} \frac{1}{1-\frac{\beta}{\alpha}} \frac{1}{\alpha} = \frac{\beta^2}{\alpha^2(\alpha-\beta)} = \varepsilon(\beta)\beta, \text{ où } \lim_{\beta\neq 0, \beta\to 0} \varepsilon(\beta) = 0.$$

<u>Exercice 4</u>. $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A^3 = 0$. Donc $\exp(A) = I + A + \frac{A^2}{2} =$
$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

<u>Exercice 5</u>. $A^2 = -I$, donc $A^{2k} = (-1)^k I$ et $A^{2k+1} = (-1)^k A$. Par conséquent $\exp(tA) = \left(\sum_{k\geq 0} (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!}\right) I + \left(\sum_{k \geq 0} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}\right) A =$
$= (\cos t) I + (\sin t) A = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} =$ la matrice de la rotation de centre O, d'angle t, dans $\mathbb{R}^2$. Si $M = 2\pi A = \begin{pmatrix} 0 & -2\pi \\ 2\pi & 0 \end{pmatrix}$, alors $\exp(M) = \cos(2\pi) I + \sin(2\pi) A = I$.

<u>Exercice 6</u>. La matrice proposée est diagonale par blocs $A = \begin{pmatrix} \boxed{B} & 0 \\ 0 & \boxed{C} \end{pmatrix}$, où $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Or $B = I + D$ et $C = 2I + E$, où $D = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc $D^2 = 0$, et $E = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, donc $E^2 = 0$. Par conséquent $e^B = e\, e^D = e(I + D) = eB = \begin{pmatrix} e & 2e \\ 0 & e \end{pmatrix}$, et
$e^C = e^2 e^E = e^2 (I + E) = e^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^2 & 0 \\ 3e^2 & e^2 \end{pmatrix}$. Enfin :
$$e^A = \begin{pmatrix} \boxed{e^B} & 0 \\ 0 & \boxed{e^C} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & 2e & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & 3e^2 & e^2 \end{pmatrix}.$$

<u>Exercice 7</u>. $A^2 = I$, donc $A^{2k} = (-1)^k I$ et $A^{2k+1} = (-1)^k A$, d'où
$$\exp(tA) = (\operatorname{ch} t) I + (\operatorname{sh} t) A = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} t + \frac{2}{3}\operatorname{sh} t & \frac{1}{3}\operatorname{sh} t & \frac{2}{3}\operatorname{sh} t \\ \frac{1}{3}\operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t + \frac{2}{3}\operatorname{sh} t & -\frac{2}{3}\operatorname{sh} t \\ \frac{2}{3}\operatorname{sh} t & -\frac{2}{3}\operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t - \frac{1}{3}\operatorname{sh} t \end{pmatrix}.$$

<u>Exercice 8</u>. On sait que $\det(S^{-1}AS) = \det A$ et $\operatorname{tr}(S^{-1}AS) = \operatorname{tr} A$. Par réduction on peut donc supposer que A est triangulaire supérieure $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \ast \\ & \lambda_2 & \\ O & & \ddots \; \lambda_n \end{pmatrix}$. Mais dans ce cas, $e^A = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & \ast \\ & e^{\lambda_2} & \\ O & & \ddots \; e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$, donc $\det(e^A) = e^{\lambda_1} e^{\lambda_2} \cdots e^{\lambda_n} = e^{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n} = e^{\operatorname{tr} A}$.

<u>Exercice 9</u>. Résulte de $(A^*)^k = (A^k)^*$, et de $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.

Systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants

Fonction $t \mapsto \exp(tA)$, où A est une matrice

Soit n un nombre entier ≥ 1. Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$. Considérons une fonction $t \mapsto A(t) = (a_{ij}(t))_{1 \leq i,j \leq n}$ de variable réelle t, définie dans I, à valeurs matricielles dans $M_n(\mathbb{C})$. Soit $D = (d_{ij})$ une matrice $n \times n$ complexe. On dit que la fonction $A(t)$ a pour dérivée D au point t si

$$\lim_{h \neq 0,\, h \to 0} \left\| \frac{A(t+h) - A(t)}{h} - D \right\| = 0 .$$

Il revient au même de dire que chaque fonction numérique $a_{ij}(t)$ est dérivable au point t et a pour dérivée d_{ij}. On écrit $D = A'(t) = \frac{dA}{dt}$. Si $t \mapsto A(t)$ et $t \mapsto B(t)$ sont dérivables, et si $\lambda \in \mathbb{C}$, on a :

$$\frac{d}{dt}(A+B) = \frac{dA}{dt} + \frac{dB}{dt} \; ; \quad \frac{d(\lambda A)}{dt} = \lambda \frac{dA}{dt} \; ;$$

$\frac{d}{dt}\left(A(t)B(t)\right) = \frac{dA}{dt} B(t) + A(t) \frac{dB}{dt}$; et, si $\vec{v} = \vec{v}(t)$ est une fonction à valeurs vectorielles dans $\mathbb{C}^n$, dérivable, on a :

$$\frac{d}{dt}\left(A(t)\vec{v}(t)\right) = \frac{dA}{dt}\vec{v}(t) + A(t)\frac{d\vec{v}}{dt} .$$

Proposition 1. Soit A une matrice complexe $n \times n$ fixée. La fonction $t \mapsto \exp(tA)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et

$$\frac{d}{dt}\left[\exp(tA)\right] = A \exp(tA) .$$

En particulier : $$A = \left[\frac{d}{dt}\left(e^{tA}\right)\right]_{t=0} .$$

Démonstration. Commençons par le cas particulier où $t = 0$. D'après la définition de l'exponentielle par la série, pour tout h réel $\neq 0$:

$$\frac{e^{hA} - I}{h} - A = \sum_{k \geq 2} \frac{h^{k-1} A^k}{k!} ,$$ donc, dès que $|h| \leq 1$:

$$\left\| \frac{e^{hA} - I}{h} - A \right\| \leq |h| \sum_{k \geq 2} \frac{\|A\|^k}{k!} \leq |h|\, e^{\|A\|}$$

tend vers 0 quand $h \to 0$. Par conséquent $\left[\frac{d}{dt}(e^{tA})\right]_{t=0} = A$;

Soit maintenant $t \in \mathbb{R}$ quelconque. Les matrices tA et hA commutent, donc $e^{(t+h)A} = e^{(h+t)A} = e^{hA} e^{tA}$, et, pour $h \neq 0$,

$$\frac{e^{(t+h)A} - e^{tA}}{h} = \frac{e^{hA}e^{tA} - e^{tA}}{h} = \frac{e^{hA} - I}{h} e^{tA}$$

tend vers Ae^{tA} quand, à t fixé, $h \neq 0$ tend vers 0.

La fonction $t \mapsto \exp(tA)$ satisfait évidemment à l'équation :

$$\exp[(t_1+t_2)A] = \exp(t_1A)\exp(t_2A)$$

pour tous t_1 et t_2 réels. Réciproquement :

<u>Proposition</u> 2. Soit $t \mapsto M(t)$ une fonction définie et dérivable dans $\mathbb{R}$, à valeurs dans $M_n(\mathbb{C})$, telle que :

1°) $M(0) = I$;

2°) quels que soient $t_1 \in \mathbb{R}$, $t_2 \in \mathbb{R}$, on a : $M(t_1+t_2) = M(t_1)M(t_2)$.

Alors il existe une matrice fixe $A \in M_n(\mathbb{C})$ – à savoir $A = M'(0)$ – telle que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$M(t) = \exp(tA).$$

<u>Démonstration</u>. Posons $A = M'(0)$. Pour tout t réel fixé,

$$M'(t) = \lim_{h\neq 0, h \to 0} \frac{M(h+t) - M(t)}{h} = \lim_h \frac{M(h)M(t) - M(t)}{h} =$$

$$= \left(\lim_h \frac{M(h) - I}{h}\right) M(t) = M'(0)M(t) = AM(t).$$

Posons $A(t) = [\exp(-tA)]M(t)$, et dérivons : pour tout t

$$A'(t) = -A[\exp(-tA)]M(t) + [\exp(-tA)]M'(t) =$$

$$= -A[\exp(-tA)]M(t) + [\exp(-tA)]AM(t) = 0,$$

car A et $\exp(-tA)$ commutent. La fonction matricielle $A(t)$ a sa dérivée $\equiv 0$ sur $\mathbb{R}$; elle est donc constante, et vaut $A(0) = I$. Ainsi, pour tout t réel, $[\exp(-tA)]M(t) = I$, donc $M(t) = \exp(tA)$.

Exemple 1. Soit A une matrice $n\times n$ complexe donnée. Alors, pour tout $t\in\mathbb{R}$, la matrice $\exp(tA)$ appartient au groupe multiplicatif $GL_n(\mathbb{C})$ des matrices $n\times n$ inversibles. Quand t varie dans $\mathbb{R}$, les $\exp(tA)$, où A est fixée, forment un sous-groupe "à un paramètre" de ce grand groupe. Il est souvent utile de préciser la condition nécessaire et suffisante sur A pour que, quel que soit $t\in\mathbb{R}$, la matrice $\exp(tA)$ appartienne à tel ou tel sous-groupe G remarquable de $GL_n(\mathbb{C})$. Faisons-le par exemple quand $G=O_n(\mathbb{R})$ est le groupe orthogonal réel des matrices g réelles $n\times n$ inversibles et telles que $g^{-1}=g^*$. Soit donc A une matrice $n\times n$ complexe telle que, pour tout $t\in\mathbb{R}$, la matrice $\exp(tA)$ soit réelle orthogonale. Nécessairement $A=\frac{d}{dt}(\exp(tA))_{t=0}$ est réelle. De plus $[\exp(tA)]^{-1}=\exp(-tA)$ et $[\exp(tA)]^*=\exp(tA^*)$, donc en dérivant pour $t=0$ l'identité $\exp(-tA)\equiv\exp(tA^*)$ on obtient la condition nécessaire pour que, quel que soit $t\in\mathbb{R}$, la matrice $\exp(tA)$ soit réelle orthogonale, à savoir :

A est réelle antisymétrique, c'est-à-dire $A^*=-A$.

Réciproquement il est immédiat de voir que cette condition est suffisante.

Exercice 1. Relisez l'Exemple 4 de la Leçon n° 8. Montrez que, si a, b, c sont trois nombres réels tels que $a^2+b^2+c^2=1$, et si on pose $A=\begin{pmatrix}0&-c&b\\c&0&-a\\-b&a&0\end{pmatrix}$, alors la matrice $\exp(tA)=I+(\sin t)A+(1-\cos t)A^2$ est la matrice d'une rotation dans $\mathbb{R}^3$. Déterminez l'axe et l'angle de cette rotation.

Exercice 2. Soit $J=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$. Soit G le groupe des matrices $g\in M_3(\mathbb{R})$ telles que $g^*Jg=J$. Montrez que, pour qu'une $A=\begin{pmatrix}a_1&b&c\\e&a_2&d\\f&g&a_3\end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{R})$ soit telle que, pour tout $t\in\mathbb{R}$, la matrice $\exp(tA)$ soit dans G, il faut et il suffit que $A^*=-JAJ$, c'est-à-dire que $a_1=a_2=a_3=0$; $b=-e$; $c=f$; $d=g$. Calculez les matrices

e^{tA_1}, e^{tA_2}, e^{tA_3}, e^{tA_4} quand on pose :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Systèmes sans second membre à coefficients constants

Problème. Pour $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$, soient n^2 nombres complexes a_{ij} donnés. On cherche à déterminer les systèmes de n fonctions numériques inconnues $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$, définies et dérivables pour tout $t \in \mathbb{R}$, à valeurs complexes, et telles que, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$(0) \quad \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = a_{11}\, y_1(t) + a_{12}\, y_2(t) + \cdots\cdots + a_{1n}\, y_n(t) \\ \dfrac{dy_2}{dt} = a_{21}\, y_1(t) + a_{22}\, y_2(t) + \cdots\cdots + a_{2n}\, y_n(t) \\ ------------ \\ \dfrac{dy_n}{dt} = a_{n1}\, y_1(t) + a_{n2}\, y_2(t) + \cdots\cdots + a_{nn}\, y_n(t) \end{cases} .$$

Pour abréger, notons A la matrice (a_{ij}) et posons :

$$\vec{y}(t) = \big(y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)\big).$$

Alors (0) s'écrit :

$$(1) \qquad \frac{d\vec{y}}{dt} = A\,\vec{y}(t),$$

et il s'agit de trouver les solutions de (1), c'est-à-dire les fonctions $t \mapsto \vec{y}(t)$ définies et dérivables dans $\mathbb{R}$, à valeurs vectorielles dans $\mathbb{C}^n$, qui satisfont à l'identité (1). On pourra s'intéresser à la solution générale de (1), qui, on le verra, dépend de n constantes numériques (ou d'une constante vectorielle) arbitraires, ou aussi ne chercher qu'une solution particulière $\vec{y}(t)$ passant par des conditions initiales précises, par exemple telle que $\vec{y}(0) = \vec{y}_0$, où $\vec{y}_0$ est un vecteur donné.

Rappel. Si $n = 1$, et si a est une constante réelle donnée, on a vu en AN02, Leçon n°8, Proposition 1, que l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dt} = a\, y(t)$$

admet, pour tout y_0 réel donné, une solution $y(t)$ et une seule telle que $y(0) = y_0$, à savoir $y(t) = y_0 e^{at} = e^{ta} y_0$. Nous ne sommes donc pas particulièrement étonnés de lire l'énoncé du

<u>Théorème 1</u>. 1) Soit $\vec{y}_0$ un vecteur donné dans $\mathbb{C}^n$. Alors il existe une solution et une seule de

$$(1) \qquad \frac{d\vec{y}}{dt} = A\,\vec{y}(t)$$

telle que $\vec{y}(0) = \vec{y}_0$, à savoir :

$$(2) \qquad \vec{y}(t) = [\exp(tA)]\,\vec{y}_0 \quad .$$

2) Quand $\vec{y}_0$ prend toutes les valeurs possibles dans $\mathbb{C}^n$, la formule (2) donne la solution générale de (1), c'est-à-dire l'ensemble de toutes les solutions de (1).

<u>Démonstration</u>. D'après la Proposition 1, si $\vec{y}(t)$ est donnée par (2),

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\exp(tA)\right]\vec{y}_0 = A[\exp(tA)]\vec{y}_0 = A\,\vec{y}(t) \ ,$$

donc (2) fournit une solution $\vec{y}(t)$ de (1), évidemment telle que $\vec{y}(0) = \vec{y}_0$.

Réciproquement, soit $\vec{y}(t)$ une solution quelconque de (1). Posons $\vec{y}_0 = \vec{y}(0)$. On va montrer que $\vec{y}(t)$ est donné par (2). Pour cela, en posant

$$\vec{x}(t) = [\exp(-tA)]\,\vec{y}(t) \ ,$$

il suffit de voir que $\vec{x}(t)$ est constamment égal à $\vec{y}_0$, et, puisque $\vec{x}(0) = \vec{y}_0$, ceci revient à vérifier que $\vec{x}(t)$ a une dérivée identiquement nulle. Or, puisque $\frac{d\vec{y}}{dt} = A\,\vec{y}(t)$ et puisque A commute à $\exp(-tA)$:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = -A[\exp(-tA)]\,\vec{y}(t) + [\exp(-tA)]\frac{d\vec{y}}{dt} = -A\exp(-tA)\vec{y}(t) + \exp(-tA)A\vec{y}(t)$$

donc $\frac{d\vec{x}}{dt} = 0$.

<u>Remarque</u>. Soit $t_0 \in \mathbb{R}$ et $\vec{v}_0 \in \mathbb{C}^n$. Il existe une solution et une seule de (1) $\frac{d\vec{y}}{dt} = A\,\vec{y}(t)$ telle que $\vec{y}(t_0) = \vec{v}_0$, à savoir :

$$\vec{y}(t) = \exp[(t-t_0)A]\vec{v}_0 ,$$

comme on le voit en changeant t en $t-t_0$ dans le Théorème 1.

Exercice 3. Quelles sont les trois fonctions $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ de variable réelle t, à valeurs réelles, qui satisfont au système différentiel :

$$3\frac{dx}{dt} = 2x+y+2z \; ; \; 3\frac{dy}{dt} = x+2y-2z \; ; \; 3\frac{dz}{dt} = 2x-2y-z ,$$

et aux conditions initiales $x(0)=1$, $y(0)=-1$, $z(0)=-2$. [On pourra s'appuyer sur l'Exercice 7 de la Leçon n° 8].

Exercice 4. Relisez l'Exemple 4 de la Leçon n° 8, et l'Exercice 1 de la présente Leçon. Soient a, b, c trois nombres réels tels que $a^2+b^2+c^2=1$. Trouvez la solution du système différentiel :

$$\frac{dx}{dt} = -cy+bz \; ; \; \frac{dy}{dt} = cx-az \; ; \; \frac{dz}{dt} = -bx+ay$$

telle que $x(0)=1$; $y(0)=z(0)=0$, ainsi que la nature géométrique dans $\mathbb{R}^3$ de la courbe intégrale $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ trouvée.

Exercice 5. Trouvez trois fonctions $y_1(t), y_2(t), y_3(t)$ telles que

$$9\frac{dy_1}{dt} = 4y_1+5y_2-2y_3 \; ; \; 9\frac{dy_2}{dt} = 2y_1-2y_2+8y_3 \; ; \; 9\frac{dy_3}{dt} = -5y_1-4y_2-2y_3 ,$$

et telles que $y_1(0)=1$; $y_2(0)=y_3(0)=0$. On pourra remarquer que la matrice A du système est telle que $A^3=0$.

L'espace vectoriel des solutions de (1)

Si $\vec{y}^{\,1}(t)$ et $\vec{y}^{\,2}(t)$ sont deux solutions de

$$(1) \qquad \frac{d\vec{y}}{dt} = A\vec{y}(t)$$

et si λ et μ sont deux nombres complexes, il est clair que la fonction $\vec{y}(t) = \lambda\vec{y}^{\,1}(t) + \mu\vec{y}^{\,2}(t)$ est encore une solution de (1). Ainsi l'ensemble des solutions de (1) forme-t-il un espace vectoriel ; notons-le $\mathcal{S}$. Par la formule (2) on obtient une application

$$\vec{y}_0 \longmapsto \vec{y}(t) = [\exp(tA)]\vec{y}_0$$

évidemment linéaire de l'espace vectoriel $\mathbb{C}^n$ dans l'espace vectoriel $\mathcal{S}$. L'existence et l'unicité dans le 1°) du Théorème 1 signifient que cette application linéaire est surjective et injective de $\mathbb{C}^n$ sur $\mathcal{S}$. Donc elle transporte par isomorphisme toute l'Algèbre linéaire de $\mathbb{C}^n$ sur celle de $\mathcal{S}$, à commencer par la dimension :

Théorème 2. Soit A une matrice $n \times n$ complexe. L'espace vectoriel des solutions $\vec{y} = \vec{y}(t)$ de

$$(1) \qquad \frac{d\vec{y}}{dt} = A\,\vec{y}(t)$$

est de dimension n sur $\mathbb{C}$. Par conséquent, si on connaît n solutions linéairement indépendantes de (1) :

$$\vec{y}^{\,1}(t)\,;\quad \vec{y}^{\,2}(t)\,;\quad \cdots\cdots\cdots\,;\quad \vec{y}^{\,n}(t)\,,$$

la solution générale de (1) est donnée par la formule :

$$(3) \qquad \vec{y}(t) = C_1\,\vec{y}^{\,1}(t) + C_2\,\vec{y}^{\,2}(t) + \cdots\cdots + C_n\,\vec{y}^{\,n}(t)\,,$$

où $C_1, C_2, \dots, C_n$ sont des constantes complexes arbitraires.

Précisons les mots "linéairement indépendantes".

Proposition 3. Soient n solutions $\vec{y}^{\,1}(t), \vec{y}^{\,2}(t), \dots, \vec{y}^{\,n}(t)$ de (1). Les assertions suivantes sont équivalentes :

1°) Elles sont linéairement indépendantes (dans $\mathcal{S}$), c'est-à-dire : si des constantes complexes $C_1, C_2, \dots, C_n$ sont telles que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on ait : $C_1\,\vec{y}^{\,1}(t) + C_2\,\vec{y}^{\,2}(t) + \cdots\cdots + C_n\,\vec{y}^{\,n}(t) = \vec{0}$, alors $C_1 = C_2 = \dots = C_n = 0$.

2°) Quel que soit $t_0 \in \mathbb{R}$, les vecteurs $\vec{y}^{\,1}(t_0), \vec{y}^{\,2}(t_0), \dots\dots, \vec{y}^{\,n}(t_0)$ sont linéairement indépendants dans $\mathbb{C}^n$.

3°) Il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que les vecteurs $\vec{y}^{\,1}(t_0), \vec{y}^{\,2}(t_0), \dots\dots, \vec{y}^{\,n}(t_0)$ soient linéairement indépendants dans $\mathbb{C}^n$.

4°) Les vecteurs $\vec{y}^{\,1}(0), \vec{y}^{\,2}(0), \dots, \vec{y}^{\,n}(0)$ sont linéairement indépendants dans $\mathbb{C}^n$.

Démonstration. 1°) et 4°) sont équivalentes par l'isomorphisme de $\mathbb{C}^n$ sur $\mathcal{S}$, donné par la formule (2), déjà mentionné plus haut. D'après la même formule le système des n vecteurs $\vec{y}^{\,1}(0), \dots\dots, \vec{y}^{\,n}(0)$ est l'image par la matrice inversible $\exp(-t_0 A)$ du système des n

vecteurs $\vec{y}^1(t_0), \dots, \vec{y}^n(t_0)$; si celui-ci est linéairement indépendant, celui-là l'est donc aussi, et réciproquement ; ainsi 3°) et 4°) sont équivalentes. Enfin, puisque 3°) équivaut à 4°), qui est indépendent de t_0, il est clair que 3°) entraîne 2°), donc équivaut à 2°), car il est évident que 2°) entraîne 3°).

Il n'est pas toujours facile de calculer l'exponentielle d'une matrice. Dans ce cas on s'appuie sur le Théorème 2 pour trouver la solution générale (3) de (1) ; pour cela on recherche d'abord des solutions particulières de (1), soit évidentes, soit données par les Théorèmes 3 et 4 ci-dessous, qui fournissent un moyen systématique d'en trouver n linéairement indépendantes. Ces théorèmes sont une belle application à l'Analyse de la théorie des valeurs propres et vecteurs propres des matrices.

<u>Théorème</u> 3. Soit A une matrice complexe $n \times n$. Soit $\vec{v}$ un vecteur propre de A, associé à la valeur propre complexe λ [donc, rappelons-le, $\vec{v} \in \mathbb{C}^n$, $\vec{v} \neq \vec{0}$, et $A\vec{v} = \lambda \vec{v}$]. Alors la fonction vectorielle

$$\vec{y}(t) = e^{\lambda t}\, \vec{v}$$

est solution de

$$(1) \qquad \frac{d\vec{y}}{dt} = A\, \vec{y}(t) .$$

<u>Démonstration</u> :

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = \lambda e^{\lambda t}\vec{v} = e^{\lambda t}\lambda\vec{v} = e^{\lambda t}A\vec{v} = A\left(e^{\lambda t}\vec{v}\right) = A\,\vec{y}(t).$$

<u>Corollaire</u>. Soit A une matrice complexe $n \times n$. Supposons que A soit <u>diagonalisable</u> sur $\mathbb{C}$. Il existe donc un système <u>linéairement indépendant</u> de n <u>vecteurs propres</u> de A, soient $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$, associés respectivement aux valeurs propres complexes $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ (pas forcément deux à deux distinctes). Alors la solution générale de

$$(1) \qquad \frac{d\vec{y}}{dt} = A\,\vec{y}(t)$$

est donnée par la formule :

(4) $$\vec{y}(t) = C_1 e^{\lambda_1 t}\vec{v}_1 + C_2 e^{\lambda_2 t}\vec{v}_2 + \cdots + C_n e^{\lambda_n t}\vec{v}_n,$$
où $C_1, C_2, \dots, C_n$ sont des constantes complexes arbitraires.

En effet, d'après la Proposition 3, les n solutions
$$\vec{y}^1(t) = e^{\lambda_1 t}\vec{v}_1 \; ; \quad \vec{y}^2(t) = e^{\lambda_2 t}\vec{v}_2 \; ; \cdots\cdots ; \quad \vec{y}^n(t) = e^{\lambda_n t}\vec{v}_n$$
sont linéairement indépendantes, puisque les n vecteurs :
$$\vec{y}^1(0) = \vec{v}_1 \; ; \quad \vec{y}^2(0) = \vec{v}_2 \; ; \cdots\cdots ; \quad \vec{y}^n(0) = \vec{v}_n$$
le sont.

Exemple 2. Cherchons la solution générale du système :

(5) $$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = 2y_1 + y_2 + y_3 \\[2mm] \dfrac{dy_2}{dt} = y_1 + 2y_2 + y_3 \\[2mm] \dfrac{dy_3}{dt} = y_1 + y_2 + 2y_3 \end{cases}.$$

La matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ a deux valeurs propres 4 et 1. Les vecteurs propres pour $\lambda = 4$ sont portés par l'axe ternaire $y_1 = y_2 = y_3$; par exemple $\vec{v}_1 = (1,1,1)$. Les vecteurs propres pour $\lambda = 1$ sont ceux du plan $y_1 + y_2 + y_3 = 0$; par exemple $\vec{v}_2 = (1,-1,0)$ et $\vec{v}_3 = (1,1,-2)$. Les vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ sont linéairement indépendants. La solution générale de (5) est vectoriellement :
$$\vec{y}(t) = C_1 e^{4t}\vec{v}_1 + C_2 e^{t}\vec{v}_2 + C_3 e^{t}\vec{v}_3 \, ,$$
c'est-à-dire en composantes :
$$\begin{cases} y_1(t) = C_1 e^{4t} + (C_2 + C_3)\, e^{t} \\ y_2(t) = C_1 e^{4t} - (C_2 - C_3)\, e^{t} \\ y_3(t) = C_1 e^{4t} - 2C_3\, e^{t} \end{cases}.$$

Exercice 6. Résoudre l'Exercice 3 en appliquant le Théorème 3.

Lorsque A n'est pas diagonalisable, on applique, pour trouver n solutions linéairement indépendantes de (1), la généralisation suivante du Théorème 3.

<u>Théorème 4</u>. Soit A une matrice complexe $n \times n$. Soit λ une valeur propre complexe de A, d'ordre p en tant que racine du polynôme caractéristique $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ de A. Alors

$$(1) \qquad \frac{d\vec{y}}{dt} = A\,\vec{y}(t)$$

admet p solutions linéairement indépendantes de la forme :

$$(6) \qquad \vec{y}(t) = \begin{cases} y_1(t) = P_1(t)\, e^{\lambda t} \\ y_2(t) = P_2(t)\, e^{\lambda t} \\ \text{-------------} \\ \text{-------------} \\ y_n(t) = P_n(t)\, e^{\lambda t} \end{cases},$$

où $P_1, P_2, \dots, P_n$ sont des polynômes de degré $\leq p-1$ qui dépendent de p constantes arbitraires (et non de np). Ces polynômes ne sont donc pas quelconques ; pour les trouver on applique une méthode de coefficients indéterminés en reportant (6) dans (1).

<u>Exemple 3</u>. Soit à résoudre le système:

$$(7) \qquad \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = y_1 + y_2 + y_3 \\ \dfrac{dy_2}{dt} = -y_1 + y_2 - y_3 \\ \dfrac{dy_3}{dt} = y_1 \qquad + 2y_3 \end{cases}.$$

Le polynôme caractéristique de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est $(1-\lambda)^2(2-\lambda)$. La valeur propre simple $\lambda = 2$ admet $(0,1,-1)$ comme vecteur propre. Le Théorème 3 fournit donc une première solution particulière de (7) : $y_1 = 0$, $y_2 = e^{2t}$, $y_3 = -e^{2t}$.

La valeur propre double $\lambda = 2$ n'a qu'une droite de vecteurs propres associés : ils sont tous colinéaires à $(1,1,-1)$. C'est insuffisant pour en fournir deux linéairement indépendants. La matrice A n'est pas diagonalisable. Mais le Théorème 4 assure l'existence d'un sous-espace vectoriel de dimension 2 de solutions de (7) de la forme :

(8) $y_1(t)=(At+B)e^t \;;\; y_2(t)=(Ct+D)e^t \;;\; y_3(t)=(Et+F)e^t$.

Les 6 constantes A, B, C, D, E, F ne sont pas arbitraires ; pour les préciser reportons (8) dans (7) ; on obtient le système d'équations :

$$\begin{cases} At+A+B=(A+C+E)t+B+D+F \\ Ct+C+D=(-A+C-E)t+(-B+D-F) \\ Et+E+F=(A+2E)t+(B+2F) \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R}),$$

d'où en identifiant les coefficients de t, puis les termes constants :

(9) $C+E=0 \;;\; A=D+F \;;\; A+E=0 \;;\; C=-B-F \;;\; A+E=0 \;;\; E=B+F$.

En posant $-E=C_1$ et $-F=C_2$, on exprime les solutions du système d'équations linéaires (9) par les formules :

$A=C_1 \;;\; B=C_2-C_1 \;;\; C=C_1 \;;\; D=C_1+C_2 \;;\; E=-C_1 \;;\; F=-C_2$.

Par conséquent (7) admet les solutions :

$y_1(t)=C_1(t-1)e^t+C_2e^t \;;\; y_2(t)=C_1(t+1)e^t+C_2e^t \;;\; y_3(t)=-C_1te^t-C_2e^t$,

qui forment un sous-espace vectoriel de dimension 2. Si on y ajoute les solutions fournies par la valeur propre $\lambda=2$, on obtient la solution générale de (7) :

$$\begin{cases} y_1(t)=[C_1(t-1)+C_2]e^t \\ y_2(t)=[C_1(t+1)+C_2]e^t+C_3e^{2t} \\ y_3(t)=-(C_1t+C_2)e^t-C_3e^{2t} \end{cases},$$

où C_1, C_2, C_3 sont des constantes complexes arbitraires.

Exercice 7. En appliquant le Théorème 4, trouvez la solution générale du système

$$\frac{dy_1}{dt}=3y_1+2y_2 \quad ; \quad \frac{dy_2}{dt}=-2y_1-y_2 .$$

Démonstration du Théorème 4

On a appris en Algèbre linéaire (théorie de la trigonalisation des matrices complexes) qu'il existe une matrice inversible S telle que la matrice $S^{-1}AS$ soit diagonale par blocs, le premier bloc B_1 étant une matrice d'ordre p triangulaire supérieure à éléments diagonaux tous égaux à λ :

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \boxed{B_1} & & O \\ & \boxed{B_2} & \\ O & & \ddots \ \boxed{B_k} \end{pmatrix},$$

avec $B_1 = \begin{pmatrix} \lambda & & \\ 0 & \lambda & \\ | & | & \ddots \\ 0 & 0 & - \lambda \end{pmatrix} = \lambda I_p + N$, où $N^p = 0$. Pour tout nombre réel t, on a :

$$e^{tA} = S\, e^{S^{-1}(tA)S}\, S^{-1} = S \begin{pmatrix} \boxed{e^{tB_1}} & & O \\ & \boxed{e^{tB_2}} & \\ O & & \ddots \ \boxed{e^{tB_k}} \end{pmatrix} S^{-1}.$$

Or la formule (2) : $\vec{y}(t) = e^{tA}\vec{y}_0$, pour tout choix du vecteur $\vec{y}_0$ dans $\mathbb{C}^n$, génère des solutions de (1). Choisissons successivement pour $\vec{y}_0$ les vecteurs $S\vec{u}_1, S\vec{u}_2, \dots, S\vec{u}_p$, où $\vec{u}_1 = (1,0,0,\dots,0)$; $\vec{u}_2 = (0,1,0,\dots,0)$; $\dots$; $\vec{u}_p = (0,0,\dots,0,1,0,\dots,0)$ sont les p premiers vecteurs de la base canonique de $\mathbb{C}^n$. Les vecteurs $S\vec{u}_1, \dots, S\vec{u}_p$ étant linéairement indépendants, on obtient par la formule (2) p solutions linéairement indépendantes de (1) : pour $j = 0, 1, 2, \dots, p$:

$$\vec{y}^j(t) = e^{tA}S\vec{u}_j = S \begin{pmatrix} \boxed{e^{tB_1}} & & O \\ & \boxed{e^{tB_2}} & \\ O & & \ddots \ \boxed{e^{tB_k}} \end{pmatrix} \vec{u}_j =$$

= le vecteur transformé par S du vecteur j-ième colonne de la matrice

$$n\left\{\begin{array}{c} \boxed{e^{tB_1}} \\ \boxed{O} \end{array}\right. = \begin{array}{c} \boxed{e^{\lambda t}e^{tN}} \\ \boxed{O} \end{array}.$$
$$\underbrace{\qquad}_{p}$$

Or, comme $e^{tN} = I + t\frac{N}{1!} + t^2\frac{N^2}{2!} + \dots + t^{p-1}\frac{N^{p-1}}{(p-1)!}$, cette j-ième colonne est de la forme $\begin{cases} Q_1(t)e^{\lambda t} \\ Q_2(t)e^{\lambda t} \\ \vdots \\ Q_n(t)e^{\lambda t} \end{cases}$ où les polynômes Q_i sont de degré $\leq p-1$;

quand on lui applique la matrice constante S, elle reste de la même forme. Ainsi chacune des p solutions linéairement indépendantes $\vec{y}^j(t)$, pour $j=1,2,\dots,p$, construites par ce procédé, est bien de la forme (6) requise par le Théorème 4.

Remarque. Chacune des valeurs propres distinctes $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ de A, d'ordre de multiplicité respectivement $p_1, p_2, \dots, p_k$, avec $p_1+p_2+\dots+p_k=n$, fournit par (6) un groupe de solutions linéairement indépendantes (dans un même groupe). Vérifions qu'en fait on a bien ainsi en tout n solutions linéairement indépendantes (même quand on change de groupe, c'est-à-dire de λ_i); il suffit pour cela de démontrer le Lemme suivant, et de l'appliquer aux fonctions première coordonnée de nos solutions vectorielles:

Lemme. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ des nombres complexes deux à deux distincts, et $P_1(t), P_2(t), \dots\dots, P_k(t)$ des polynômes tels que, pour tout $t \in I$, on ait:

(10) $$P_1(t)e^{\lambda_1 t} + P_2(t)e^{\lambda_2 t} + \dots\dots + P_k(t)e^{\lambda_k t} = 0.$$

Alors les polynômes $P_1, P_2, \dots, P_k$ sont tous nuls.

Démonstration par récurrence sur k. Si $k=1$, il est évident que $P_1(t)e^{\lambda t} \equiv 0$ implique $P_1(t) \equiv 0$, car $e^{\lambda t}$ n'est jamais nul. Supposons vrai le Lemme jusque $k-1$. Multiplions l'identité (10) par $e^{-\lambda_k t}$, et posons $\lambda_1 = \lambda_1 - \lambda_k$, $\lambda_2 = \lambda_2 - \lambda_k, \dots, \lambda_{k-1} = \lambda_{k-1} - \lambda_k$. On voit que:

(11) $$P_1(t)e^{\lambda_1 t} + P_2(t)e^{\lambda_2 t} + \dots\dots + P_{k-1}(t)e^{\lambda_{k-1} t} \equiv -P_k(t),$$

les $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k-1}$ étant non nuls et deux à deux distincts. Si p désigne le degré du polynôme P_k, dérivons $p+1$ fois (11). On obtient:

$$Q_1(t)e^{\lambda_1 t} + Q_2(t)e^{\lambda_2 t} + \dots\dots + Q_{k-1}(t)e^{\lambda_{k-1} t} \equiv 0$$

où, pour tout $i=1,2,\dots,k-1$, le polynôme $Q_i(t)$ est égal à $\lambda_i^{p+1} P_i(t)$ plus des termes de degré inférieur. Par hypothèse de récurrence $Q_i(t) \equiv 0$, ce qui exige $P_i(t) \equiv 0$ car $\lambda_i \neq 0$. Ainsi $P_1 = P_2 = \dots = P_{k-1} = 0$, donc $P_k = 0$ d'après (11).

Indications sur les Exercices proposés dans cette Leçon

Exercice 1. Puisque A est antisymétrique réelle, la matrice $\exp(tA)$ est réelle orthogonale dans $\mathbb{R}^3$. De plus $\det(e^{tA})$ est l'exponentielle de la trace de tA [cf. Leçon n° 8, Exercice 8], qui est nulle, donc vaut $+1$.

Du cours d'Algèbre linéaire et Géométrie il résulte que $\exp(tA)$ est la matrice d'une rotation dans l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^3$. Si t est un multiple entier de 2π, $\exp(tA) = I$. Ecartons désormais ce cas ; alors $\exp(tA)$ n'est pas la rotation identique ; elle a un axe et un angle. Si $\vec{v}$ est un vecteur proportionnel à $\vec{w} = (a, b, c)$, on vérifie immédiatement que $A\vec{v} = \vec{0}$, donc $A^k\vec{v} = \vec{0}$ pour tout entier $k \geq 1$, et $\exp(tA)\vec{v} = \left(I + \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k!} A^k\right)\vec{v} = \vec{v}$. Ainsi toutes les rotations $\exp(tA)$ ont pour axe (indépendant de t) la droite qui porte le vecteur $\vec{w} = (a, b, c)$. D'après le cours d'Algèbre linéaire et Géométrie, si θ est l'angle de rotation, alors :

$$1 + 2\cos\theta = \operatorname{trace}(\exp tA)$$

Or $\operatorname{tr}(\exp tA) = \operatorname{tr} I + (\sin t)\operatorname{tr} A + (1-\cos t)\operatorname{tr}(A^2) = 3 - (1-\cos t)2(a^2+b^2+c^2)$ d'où $1 + 2\cos\theta = 1 + 2\cos t$, et $\theta = \pm t + 2k\pi$.

<u>Exercice</u> 2. Remarquons que $J^2 = I$ et $J^* = J$. Si $g \in G$, on a $-1 = \det J = \det(g^* J g) = -[\det(g)]^2$, donc $\det(g) = \pm 1$, et g est inversible ; de plus, en inversant $g^* J g = J$, on a, puisque $J^{-1} = J$, $g^{-1} J (g^*)^{-1} = J$, donc $(g^{-1})^* = JgJ$, puis $(g^{-1})^* J g^{-1} = J$, donc $g^{-1} \in G$. Si $g_1 \in G$ et $g_2 \in G$, on a :

$$(g_1 g_2)^* J g_1 g_2 = g_2^*(g_1^* J g_1) g_2 = g_2^* J g_2 = J, \text{ donc } g_1 g_2 \in G.$$

On a ainsi prouvé que G forme un <u>groupe</u>.

La condition est <u>suffisante</u>. Grâce à $J^2 = I$, on prouve d'abord que $e^{tJAJ} = Je^{tA}J$. Si $A^* = -JAJ$, alors $(e^{tA})^* = e^{tA^*} = e^{-tJAJ} = Je^{-tA}J$, donc $(e^{tA})^* J e^{tA} = J$ et $e^{tA} \in G$.

La condition est <u>nécessaire</u>. Par hypothèse, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $e^{tA} \in G$ donc $e^{tA^*} = Je^{-tA}J$. <u>Dérivons</u> par rapport à t :

$$A^* e^{tA^*} = -JAe^{-tA}J,$$

puis faisons $t = 0$; il vient $A^* = -JAJ$.

En explicitant l'égalité $A^*J = -JA$, on obtient les conditions demandées $a_1 = a_2 = a_3 = 0$; $b = -e$; $c = f$; $d = g$.

Des matrices très voisines de e^{tA_1}, e^{tA_2}, e^{tA_3} ont été calculées dans de précédents Exercices. On a :

$$e^{tA_1} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & 0 \\ -\sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \ e^{tA_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{ch} t & \operatorname{sh} t \\ 0 & \operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t \end{pmatrix} ; \ e^{tA_3} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} t & 0 & \operatorname{sh} t \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sh} t & 0 & \operatorname{ch} t \end{pmatrix}.$$

On calcule que le cube de A_4 est nul, donc :

$$e^{tA_4} = I + tA_4 + \frac{t^2}{2}(A_4)^2 = \begin{pmatrix} 1 - \frac{t^2}{2} & t & t^2/2 \\ -t & 1 & t \\ -t^2/2 & t & 1 + t^2/2 \end{pmatrix}.$$

<u>Exercice</u> 3. À l'Exercice 7 de la Leçon n° 8 on a calculé $\exp(tA)$. Il suffit de multiplier cette matrice par le vecteur initial $(1, -1, -2)$. On trouve $x(t) = e^{-t}$; $y(t) = -e^{-t}$; $z(t) = -2e^{-t}$

<u>Exercice</u> 4. Puisque $\exp(tA) = I + (\sin t)A + (1 - \cos t)A^2$, et $\vec{y}_0 = (1, 0, 0)$, la formule (2) du Théorème 1 donne la solution

$$\vec{y}_0 + (\sin t) A\vec{y}_0 + (1 - \cos t) A^2 \vec{y}_0 ,$$

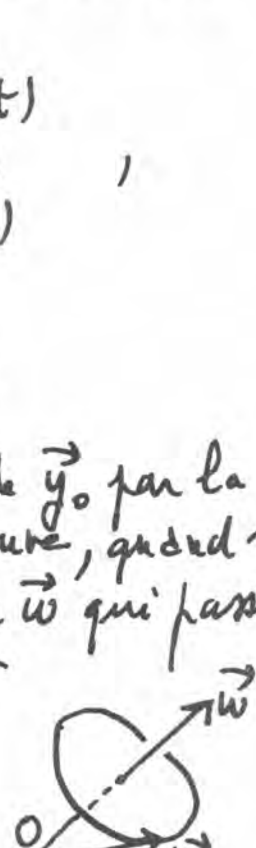
c'est-à-dire

$$\begin{cases} x(t) = 1 + 0 - (b^2 + c^2)(1 - \cos t) \\ y(t) = 0 + c \sin t + ab(1 - \cos t) \\ z(t) = 0 - b \sin t + ac(1 - \cos t) \end{cases} ,$$

soit :

$$(12) \begin{cases} x(t) = a^2 + (b^2 + c^2)\cos t \ ; \ y(t) = c \sin t + ab(1 - \cos t) ; \\ z(t) = -b \sin t + ac(1 - \cos t). \end{cases}$$

D'après l'Exercice 1, $\exp(tA)\vec{y}_0$ est l'image de $\vec{y}_0$ par la rotation d'axe fixe $\vec{w} = (a, b, c)$, d'angle $\pm t$. Ceci prouve, quand t varie, que la courbe intégrale (12) est le cercle d'axe $\vec{w}$ qui passe par le vecteur $(1, 0, 0)$. D'ailleurs on peut prévoir que toutes les courbes intégrales du système sont des cercles centrés sur la droite portant $\vec{w}$ et perpendiculaires à cette droite, car par combinaison des équations différentielles du système, on a les relations :



$$x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} + z \frac{dz}{dt} = 0 \quad \text{et} \quad a \frac{dx}{dt} + b \frac{dy}{dt} + c \frac{dz}{dt} = 0 ,$$

qui s'intègrent en :

$$x^2+y^2+z^2=C_1 \quad ; \quad ax+by+cz=C_2 ,$$

équations de l'intersection d'une sphère de centre O avec un plan perpendiculaire à $\vec{w}$.

Exercice 5. La matrice $A=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}4 & 5 & -2\\ 2 & -2 & 8\\ -5 & -4 & -2\end{pmatrix}$ a pour polynôme caractéristique $-\lambda^3$. Donc $A^3=0$ d'après le théorème de Cayley-Hamilton, et $\exp(tA)=I+tA+\frac{t^2}{2}A^2$. Or $A^2=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}4 & 2 & 4\\ -4 & -2 & -4\\ -2 & -1 & -2\end{pmatrix}$. Donc

$$\exp(tA)=\begin{pmatrix} 1+\frac{4t}{9}+\frac{2t^2}{9} & \frac{5t}{9}+\frac{t^2}{9} & -\frac{2t}{9}+\frac{2t^2}{9}\\ \frac{2t}{9}-\frac{2t^2}{9} & 1-\frac{2t}{9}-\frac{t^2}{9} & \frac{8t}{9}-\frac{2t^2}{9}\\ -\frac{5t}{9}-\frac{t^2}{9} & -\frac{4t}{9}-\frac{t^2}{18} & 1-\frac{2t}{9}-\frac{t^2}{9} \end{pmatrix}$$

D'après la formule (2) du Théorème 1, $\vec{y}(t)=\exp(tA)\vec{y}(0)$ est la première colonne de cette matrice :

$y_1(t)=1+\frac{4t}{9}+\frac{2t^2}{9}$; $y_2(t)=\frac{2t}{9}-\frac{2t^2}{9}$; $y_3(t)=-\frac{5t}{9}-\frac{t^2}{9}$.

Exercice 6. La matrice du système admet -1 comme valeur propre, avec $\vec{v}=(1,-1,-2)$ comme vecteur propre associé. Donc (Théorème 3) $\vec{y}(t)=e^{-t}\vec{v}=(e^{-t},-e^{-t},-2e^{-t})$ est solution du système, et répond par ailleurs aux conditions initiales prescrites.

Exercice 7. La matrice du système $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$ a pour polynôme caractéristique $(3-\lambda)(-1-\lambda)+4=(\lambda-1)^2$. A la valeur propre double $\lambda=1$ ne correspond qu'une droite de vecteurs propres, celle qui supporte le vecteur $(-1,1)$. Donc A n'est pas diagonalisable.

Le théorème 4 assure que la solution générale du système est de la forme

$$y_1=(At+B)e^t \quad ; \quad y_2=(Ct+D)e^t ,$$

où on précise A, B, C, D en reportant ces formules dans le système, ce qui donne les 4 équations linéaires :

$A+C=0$; $A=2B+2D$; $A+C=0$; $C+2D+2B=0$

dont les solutions sont $A=2B+2D=-C$, où B et D sont arbitraires, d'où

$y_1(t)=[2(C_1+C_2)t+C_1]e^t$; $y_2(t)=[-2(C_1+C_2)t+C_2]e^t$.

Systèmes différentiels linéaires avec second membre
Equations différentielles linéaires d'ordre supérieur

À la précédente Leçon nous avons étudié les systèmes différentiels linéaires homogènes (c'est-à-dire sans second membre) à coefficients constants. Dans ce cas simple nous avons pu asseoir la théorie sur des démonstrations complètes, y-compris pour le théorème d'existence et d'unicité de la solution sous des conditions initiales données. De plus nous avons présenté deux méthodes systématiques pour trouver la solution générale, celle de l'exponentielle d'une matrice, et celle des vecteurs propres et valeurs propres. Ces méthodes sont définitivement spécifiques au cas des coefficients constants. En revanche le théorème d'existence et d'unicité est valable même si les coefficients sont variables et si le système comporte un " second membre"; mais sa démonstration dans ce cas excède le niveau de ce cours, quoiqu'en définitive elle repose sur le théorème du point fixe établi en AN03, Leçon n°2.

Soit n un entier ≥ 1. Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$. On donne n^2 fonctions $t \mapsto a_{ij}(t)$ continues dans I, à valeurs dans $\mathbb{C}$, où $1 \leq i \leq n$; $1 \leq j \leq n$, et n fonctions $t \mapsto b_i(t)$ continues dans I, à valeurs dans $\mathbb{C}$, où $1 \leq i \leq n$. Les fonctions a_{ij} s'appellent les coefficients; les fonctions b_i s'appellent les seconds membres. Il s'agit de déterminer les systèmes de n fonctions inconnues $(y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t))$ dérivables dans I et telles que, pour tout $t \in I$,

$$(0) \quad \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = a_{11}(t)\,y_1(t) + \cdots\cdots + a_{1n}(t)\,y_n(t) + b_1(t) \\ \dfrac{dy_2}{dt} = a_{21}(t)\,y_1(t) + \cdots\cdots + a_{2n}(t)\,y_n(t) + b_2(t) \\ \text{-- -- -- -- -- -- -- -- -- --} \\ \dfrac{dy_n}{dt} = a_{n1}(t)\,y_1(t) + \cdots\cdots + a_{nn}(t)\,y_n(t) + b_n(t) \end{cases}$$

Pour abréger, notons $A(t)$ la fonction matricielle $(a_{ij}(t))$, et notons

$\vec{b}(t) = (b_1(t), b_2(t), \dots, b_n(t))$, qui, pour tout $t \in I$, est un vecteur de $\mathbb{C}^n$. Il s'agit de déterminer les fonctions

$$t \mapsto \vec{y}(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t))$$

définies et dérivables dans I, à valeurs vectorielles dans $\mathbb{C}^n$, telles que pour tout $t \in I$ on ait :

$$(2) \qquad \frac{d\vec{y}}{dt} = A(t)\,\vec{y}(t) + \vec{b}(t).$$

Un système du type :

$$(1) \qquad \frac{d\vec{y}}{dt} = A(t)\,\vec{y}(t)$$

est dit homogène, ou sans second membre. Si (2) est donné, le système (1) s'appelle le système (ou l'équation) sans second membre <u>associée</u> à (2). C'est qu'en effet la résolution de (2) passe par celle préalable de (1).

Nous admettrons le Théorème suivant.

<u>Théorème</u> 1. Soient $t_0 \in I$ et $\vec{y}_0 \in \mathbb{C}^n$ donnés. Alors il existe dans I une solution $\vec{y}(t)$ de (2) et une seule telle que $\vec{y}(t_0) = \vec{y}_0$.

Exactement comme à la Leçon n° 9 on en déduit le

<u>Théorème</u> 2. Les solutions de l'équation <u>homogène</u> (1) forment un espace vectoriel de dimension n. La Proposition 3 de la Leçon n° 9 vaut sans changement pour les coefficients variables. Si on connaît n solutions linéairement indépendantes de (1) :

$$\vec{y}^{\,1}(t)\,;\ \vec{y}^{\,2}(t)\,;\ \dots\dots\,;\ \vec{y}^{\,n}(t),$$

la solution générale de (1) est donnée par la formule :

$$(3) \qquad \vec{y}(t) = C_1\,\vec{y}^{\,1}(t) + C_2\,\vec{y}^{\,2}(t) + \dots + C_n\,\vec{y}^{\,n}(t),$$

où $C_1, C_2, \dots, C_n$ sont des constantes complexes arbitraires.

Malheureusement, dans le cas des coefficients variables, nous n'avons plus de méthode systématique pour fabriquer des solutions particulières de (1). Mentionnons toutefois qu'on en cherche souvent avec succès sous forme de séries entières par la méthode des coefficients indéterminés.

Pour simplifier la résolution de (2), les remarques suivantes sont utiles :

Remarque 1. La solution générale de (2) est la somme de la solution générale de (1) et d'une solution particulière de (2).

En effet si $\vec{y}^{\,0}(t)$ est une solution particulière de (2) :

$$\frac{d\vec{y}^{\,0}}{dt} = A(t)\,\vec{y}^{\,0}(t) + \vec{b}(t),$$

pour que

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = A(t)\,\vec{y}(t) + \vec{b}(t),$$

par différence il faut et il suffit que

$$\frac{d(\vec{y}-\vec{y}^{\,0})}{dt} = A(t)(\vec{y}-\vec{y}^{\,0})(t).$$

Remarque 2 (superposition de seconds membres). Si le second membre se décompose : $\vec{b}(t) = \vec{b}_1(t) + \vec{b}_2(t)$, les solutions de

$$(2)\quad \frac{d\vec{y}}{dt} = A(t)\,\vec{y}(t) + \vec{b}(t)$$

s'obtiennent en ajoutant une solution de

$$(2)_1\quad \frac{d\vec{y}}{dt} = A(t)\,\vec{y}(t) + \vec{b}_1(t)$$

à une solution de

$$(2)_2\quad \frac{d\vec{y}}{dt} = A(t)\,\vec{y}(t) + \vec{b}_2(t).$$

Méthode de variation des constantes (ou de Lagrange (*)) pour résoudre (2) connaissant la solution générale de (1).

On relira d'abord avec profit AN02 Leçon n° 8, qui traitait du cas $n=1$.

Supposons connues n solutions particulières linéairement indépendantes de (1), soit $\vec{y}^{\,1}(t), \vec{y}^{\,2}(t), \ldots, \vec{y}^{\,n}(t)$, et donc la

---

(*) Joseph Louis de LAGRANGE (1736-1813), principal successeur d'Euler, fit progresser considérablement le Calcul des Variations, la Mécanique Analytique, la théorie des équations algébriques, et celle des équations différentielles.

solution générale de (1) $\frac{d\vec{y}}{dt} = A(t)\,\vec{y}(t)$:

(3) $\quad \vec{y}(t) = C_1\,\vec{y}^1(t) + C_2\,\vec{y}^2(t) + \cdots + C_n\,\vec{y}^n(t)$,

où $C_1, C_2, \ldots, C_n$ sont des <u>constantes</u> complexes. Pour résoudre

(2) $$\frac{d\vec{y}}{dt} = A(t)\,\vec{y}(t) + \vec{b}(t) ,$$

changeons de fonction inconnue. Prenons n nouvelles fonctions (numériques) inconnues $C_1(t), C_2(t), \ldots, C_n(t)$ liées aux anciennes fonctions inconnues $\vec{y}(t) = (y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t))$ précisément par la formule (3), à savoir :

(3)' $\quad \vec{y}(t) = C_1(t)\,\vec{y}^1(t) + C_2(t)\,\vec{y}^2(t) + \cdots + C_n(t)\,\vec{y}^n(t)$,

où cette fois les C_i ne sont plus des constantes, mais des <u>fonctions</u>. Cherchons à déterminer $C_1(t), C_2(t), \ldots, C_n(t)$ pour que la fonction vectorielle $\vec{y}(t)$ définie par (3)' satisfasse à (2). En dérivant (3)' :

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = C_1(t)\frac{d\vec{y}^1}{dt} + C_2(t)\frac{d\vec{y}^2}{dt} + \cdots + C_n(t)\frac{d\vec{y}^n}{dt} +$$
$$+ C_1'(t)\,\vec{y}^1(t) + C_n'(t)\,\vec{y}^2(t) + \cdots\cdots + C_n'(t)\,\vec{y}^n(t) ,$$

et en remplaçant les $\frac{d\vec{y}^i}{dt}$ par $A(t)\,\vec{y}^i(t)$, on voit que :

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = A(t)\left[C_1(t)\,\vec{y}^1(t) + \cdots + C_n(t)\,\vec{y}^n(t)\right] + C_1'(t)\,\vec{y}^1(t) + \cdots + C_n'(t)\,\vec{y}^n(t)$$
$$= A(t)\,\vec{y}(t) + C_1'(t)\,\vec{y}^1(t) + \cdots + C_n'(t)\,\vec{y}^n(t) .$$

Donc, pour que $\vec{y}(t)$ donnée par (3)' satisfasse à (2), il faut et il suffit que, pour tout $t \in I$,

(4) $\quad C_1'(t)\,\vec{y}^1(t) + C_2'(t)\,\vec{y}^2(t) + \cdots + C_n'(t)\,\vec{y}^n(t) = \vec{b}(t)$.

Or, pour tout $t \in I$ <u>fixé</u>, (4) équivaut, pour déterminer les n nombres inconnus $C_1'(t), C_2'(t), \ldots, C_n'(t)$, à un système de n équations (algébriques) linéaires avec second membre :

$$(5)\quad \begin{cases} y_1^1(t)\,C_1'(t) + \cdots\cdots + y_1^n(t)\,C_n'(t) = b_1(t) \\ y_2^1(t)\,C_1'(t) + \cdots\cdots + y_2^n(t)\,C_n'(t) = b_2(t) \\ - - - - - - - - - - - \\ y_n^1(t)\,C_1'(t) + \cdots\cdots + y_n^n(t)\,C_n'(t) = b_n(t) \end{cases} .$$

et ce système est de Cramer, car son déterminant $\begin{vmatrix} y_1^1(t) & \cdots & y_1^n(t) \\ \vdots & & \vdots \\ y_n^1(t) & \cdots & y_n^n(t) \end{vmatrix}$ est $\neq 0$, car c'est celui des n vecteurs linéairement indépendants $\vec{y}^1(t), \dots, \vec{y}^n(t)$.

Donc, pour tout $t \in I$ fixé, (5) a une solution $(C_1'(t), \dots, C_n'(t))$ et une seule, qu'on calcule par les méthodes de résolution habituelles (méthode du pivot ; quotient de déterminants ; etc...). Si maintenant on laisse varier t, on a obtenu explicitement les n dérivées $C_1'(t), C_2'(t), \dots, C_n'(t)$, d'où l'on déduit $C_1(t), C_2(t), \dots, C_n(t)$ par n quadratures :

$$C_1(t) = \int C_1'(t)\,dt + k_1 \;;\; \cdots\cdots \;;\; C_n(t) = \int C_n'(t)\,dt + k_n .$$

Il suffit enfin de reporter ces formules dans (3)' pour obtenir la solution générale de (2). Elle dépend des n constantes arbitraires $k_1, k_2, \dots, k_n$.

<u>Exemple</u> 1. Soit à résoudre le système :

$$(6)\quad \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = y_1 + y_2 + y_3 + e^t \\ \dfrac{dy_2}{dt} = -y_1 + y_2 - y_3 - 2e^t \\ \dfrac{dy_3}{dt} = y_1 + 2y_3 \end{cases} .$$

Le système sans second membre associé a été résolu à la Leçon n° 9, Exemple 3.

On a trouvé :

$$(7)\quad \begin{cases} y_1(t) = [\,C_1(t-1) + C_2\,]\,e^t \\ y_2(t) = [\,C_1(t+1) + C_2\,]\,e^t + C_3 e^{2t} \\ y_3(t) = -(C_1 t + C_2)\,e^t - C_3 e^{2t} \end{cases} .$$

Dans (6) le second membre est $\vec{b}(t) = (e^t, -2e^t, 0)$. "Faisons varier les constantes" dans (7), c'est-à-dire supposons maintenant que C_1, C_2, C_3 sont des fonctions inconnues de t. Alors (7) sera solution de (6) si et seulement leurs dérivées $C_1'(t), C_2'(t), C_3'(t)$ sont solutions du système :

$$\begin{cases} [(t-1)C_1'(t) + C_2'(t)]e^t = e^t \\ [(t+1)C_1'(t) + C_2'(t)]e^t + C_3'(t)e^{2t} = -2e^t \\ [-tC_1'(t) - C_2'(t)]e^t - C_3'(t)e^{2t} = 0 \end{cases},$$

c'est-à-dire si et seulement si :

$$C_1'(t) = -2 \quad ; \quad C_2'(t) = 2t-1 \quad ; \quad C_3'(t) = e^{-t},$$

ou encore :

$$C_1(t) = -2t + k_1 \quad ; \quad C_2(t) = t^2 - t + k_2 \quad ; \quad C_3(t) = -e^{-t} + k_3 .$$

Par conséquent, la solution générale de (6) est :

$$\begin{cases} y_1(t) = [-t^2 + t + k_1(t-1) + k_2]e^t \\ y_2(t) = [-t^2 - 3t - 1 + k_1(t+1) + k_2]e^t + k_3e^{2t} \\ y_3(t) = [t^2 + t + 1 - k_1 t - k_2]e^t - k_3e^{2t} \end{cases}.$$

<u>Exercice</u> 1. Trouvez la solution du système différentiel :

$$\frac{dx}{dt} = y + z + 1 \quad ; \quad \frac{dy}{dt} = -x + z + e^t \quad ; \quad \frac{dz}{dt} = x + y,$$

qui est telle que $x(0) = -1$; $y(0) = 2$; $z(0) = -2$.

Equations différentielles linéaires d'ordre supérieur

D'abord on relira avec profit AN02 Leçons 9 et 10, qui traitent le cas $n = 2$. Plus généralement, soit n un entier ≥ 1, et soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On donne n fonctions numériques $t \mapsto a_i(t)$, où $i = 1, 2, \dots, n$, continues dans I, et une fonction numérique $t \mapsto f(t)$ continue dans I, dite "second membre". On cherche les fonctions numériques $t \mapsto y(t)$ qui admettent des dérivées successives jusqu'à l'ordre n dans I (notées comme d'habitude $y^{(p)}(t)$ ou $\frac{d^py}{dt^p}$) et qui, dans I, sont solutions de l'équation différentielle linéaire d'ordre n:

$$(E) \quad \frac{d^n y}{dt^n} + a_1(t)\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots\cdots + a_{n-1}(t)\frac{dy}{dt} + a_n(t)y(t) = f(t).$$

Une équation du type

$$(E_0) \quad \frac{d^n y}{dt^n} + a_1(t)\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots\cdots + a_{n-1}(t)\frac{dy}{dt} + a_n(t)y(t) = 0$$

est dite linéaire homogène (ou sans second membre). Si (E) est donnée, on dit que (E_0) est l'équation sans second membre associée à (E).

À toute fonction n fois dérivable $y = y(t)$ sur I associons le système des n fonctions dérivables sur I :

$$y_1 = y,\quad y_2 = y',\quad y_3 = y'',\ \cdots\cdots,\ y_n = y^{(n-1)}.$$

Alors l'équation (E) équivaut au système différentiel du premier ordre :

$$(S) \quad \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dt} = y_3 \\ - - - - - - - - - \\ \dfrac{dy_{n-1}}{dt} = y_n \\ \dfrac{dy_n}{dt} = -a_1(t)y_n - \cdots\cdots - a_{n-1}(t)y_2 - a_n(t)y_1 + f(t) \end{cases}$$

dont le système sans second membre associé (S_0) s'obtient en remplaçant $f(t)$ par 0 dans ces formules. (E_0) équivaut à (S_0). De manière précise l'application :

$$J : \quad y \mapsto (y, y', y'', \cdots, y^{(n-1)})$$

est une bijection, évidemment linéaire, de l'ensemble des solutions de (E_0) sur l'ensemble des solutions de (S_0), et de l'ensemble des solutions de (E) sur l'ensemble des solutions de (S). En transportant par l'isomorphisme J^{-1} les résultats obtenus sur les systèmes différentiels, nous pouvons tout de suite énoncer :

<u>Théorème</u> 3. Soient $t_0 \in I$ et $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_{n-1}$ n nombres complexes donnés. Alors il existe dans I une solution et une seule $y = y(t)$ de (E) telle que $y(t_0) = \lambda_0$, $y'(t_0) = \lambda_1$, $\cdots\cdots$, $y^{(n-1)}(t_0) = \lambda_{n-1}$.

<u>Théorème</u> 4. Les solutions de l'équation <u>homogène</u> (E_0) forment un espace vectoriel de dimension n. Si donc on connaît n solutions <u>linéairement indépendantes</u> $y=\varphi_1(t)$, $y=\varphi_2(t)$, ..., $y=\varphi_n(t)$ de (E_0), la solution générale de (E_0) est donnée par la formule :

$$(8) \quad y(t) = C_1\varphi_1(t) + C_2\varphi_2(t) + \cdots + C_n\varphi_n(t),$$

où $C_1, C_2, \ldots, C_n$ sont des constantes complexes arbitraires.

"Linéairement indépendantes" signifie que, si des constantes $k_1, k_2, \ldots, k_n$ sont telles que, pour tout $t \in I$, on ait :

$$k_1\varphi_1(t) + k_2\varphi_2(t) + \cdots + k_n\varphi_n(t) = 0,$$

alors $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$. Cette définition équivaut, d'après la Proposition 3 de la Leçon n° 9 au fait que pour tout $t_0 \in I$ (ou encore pour <u>un</u> $t_0 \in I$) les n vecteurs :

$$\vec{v}_1 = \left(\varphi_1(t_0), \varphi_1'(t_0), \ldots\ldots, \varphi_1^{(n-1)}(t_0)\right)$$

$$\vec{v}_2 = \left(\varphi_2(t_0), \varphi_2'(t_0), \ldots\ldots, \varphi_2^{(n-1)}(t_0)\right)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\vec{v}_n = \left(\varphi_n(t_0), \varphi_n'(t_0), \ldots\ldots, \varphi_n^{(n-1)}(t_0)\right)$$

sont linéairement indépendants dans $\mathbb{C}^n$, c'est-à-dire au fait que leur déterminant :

$$W(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)(t_0) = \begin{vmatrix} \varphi_1(t_0) & \varphi_2(t_0) & \cdots & \varphi_n(t_0) \\ \varphi_1'(t_0) & \varphi_2'(t_0) & \cdots & \varphi_n'(t_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(t_0) & \varphi_2^{(n-1)}(t_0) & \cdots & \varphi_n^{(n-1)}(t_0) \end{vmatrix},$$

qu'on appelle le <u>wronskien</u> des n solutions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ de (E_0) soit non nul au point t_0. De l'équivalence entre 2°) et 3°) dans la Proposition 3 de la Leçon n° 9 résulte d'ailleurs que, si le wronskien est non nul en <u>un</u> point t_0 de I, il n'est <u>jamais</u> nul dans I.

Exemple 2. L'équation $\frac{d^3y}{dt^3} - \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - y = 0$ a trois solutions évidentes $y = e^t$, $y = \cos t$, et $y = \sin t$. Leur wronskien

$$W(t) = \begin{vmatrix} e^t & \cos t & \sin t \\ e^t & -\sin t & \cos t \\ e^t & -\cos t & -\sin t \end{vmatrix}$$

pour $t = 0$ est égal à $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2$, donc $\neq 0$. Les trois solutions sont linéairement indépendantes. La solution générale est :

$$y(t) = C_1 e^t + C_2 \sin t + C_3 \cos t.$$

Résolution des équations linéaires d'ordre n sans second membre à coefficients constants.

Soit à résoudre l'équation :

$$(E_0) \qquad \frac{d^ny}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots\cdots + a_{n-1}\frac{dy}{dt} + a_n y = 0,$$

où les $a_1, a_2, \dots, a_n$ sont des constantes complexes données. Il n'est pas commode de transporter par J^{-1} la solution de (S_0) donnée par la formule de l'exponentielle ; on s'en convaincra aisément en tentant de calculer l'exponentielle de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix}$, problème qu'on aurait déjà à résoudre quand $n = 3$.

Aussi se limite-t-on à chercher systématiquement des solutions particulières de (E_0) par analogie avec les Théorèmes 3 et 4 de la Leçon n° 9. Si on essaye dans (E_0) une solution du type $y(t) = e^{\lambda t}$, où λ est une constante complexe, on obtient immédiatement le

Lemme 1. Soit λ un nombre complexe. Pour que $y(t) = e^{\lambda t}$ soit solution de (E_0), il faut et il suffit que λ soit une racine de

$$(9) \qquad \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \cdots\cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0,$$

qu'on appelle l'équation caractéristique de (E_0)

On en déduit déjà le

Théorème 5. Supposons que l'équation caractéristique

$$(9)\qquad \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \cdots\cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

ait n racines complexes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ deux à deux distinctes. Alors la solution générale de l'équation différentielle :

$$(E_0)\qquad \frac{d^n y}{dt^n} + a_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + a_2\frac{d^{n-2}y}{dt^{n-2}} + \cdots + a_{n-1}\frac{dy}{dt} + a_n y = 0$$

est

$$y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots\cdots + C_n e^{\lambda_n t},$$

où $C_1, C_2, \ldots, C_n$ sont des constantes complexes arbitraires.

Démonstration. En effet les n solutions particulières $e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_n t}$ ont pour wronskien à l'origine le déterminant de Vandermonde :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} = \pm \text{ le produit des } (\lambda_i - \lambda_j) \text{ pour } i \neq j,$$

qui n'est pas nul.

Reprenons de ce point de vue l'Exemple 2. L'équation caractéristique

$$\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 = 0$$

a pour racines $1, i, -i$, donc l'équation différentielle a pour solution générale :

$$y(t) = C_1 e^t + k_1 e^{it} + k_2 e^{-it},$$

ce qui, en posant $k_1 + k_2 = C_2$ et $i(k_1 - k_2) = C_3$, équivaut à :

$$y(t) = C_1 e^t + C_2 \cos t + C_3 \sin t.$$

Exercice 2. Résolvez l'équation différentielle :

$$\frac{d^4 y}{dt^4} - 13\frac{d^2 y}{dt^2} + 36\, y = 0.$$

Dans le cas général où l'équation caractéristique (9) peut avoir des racines multiples, on trouve encore n solutions linéairement indépendantes, donc la solution générale, de (E_0), grâce à la généralisation suivante du Théorème 5.

<u>Théorème 6</u>. Supposons que l'équation caractéristique :

$$(9) \qquad \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \cdots\cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

ait k racines complexes distinctes $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ d'ordre de multiplicité $p_1, p_2, \dots, p_k$ respectivement, où $p_1+p_2+\cdots+p_k = n$.

Alors l'équation différentielle :

$$(E_0) \qquad \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + a_2 \frac{d^{n-2}y}{dt^{n-2}} + \cdots + a_{n-1}\frac{dy}{dt} + a_n y = 0$$

admet les n solutions linéairement indépendantes suivantes :

$$(11) \qquad \begin{array}{l} e^{\lambda_1 t}\ ;\ te^{\lambda_1 t}\ ;\ t^2e^{\lambda_1 t}\ ;\ \dots\dots\ ;\ t^{p_1-1}e^{\lambda_1 t}\ ; \\ e^{\lambda_2 t}\ ;\ te^{\lambda_2 t}\ ;\ t^2e^{\lambda_2 t}\ ;\ \dots\dots\ ;\ t^{p_2-1}e^{\lambda_2 t}\ ; \\ \hline e^{\lambda_k t}\ ;\ te^{\lambda_k t}\ ;\ t^2e^{\lambda_k t}\ ;\ \dots\dots\ ;\ t^{p_k-1}e^{\lambda_k t}. \end{array}$$

La solution générale de (E_0) est donc donnée par la formule :

$$(12) \qquad y(t) = P_1(t)e^{\lambda_1 t} + P_2(t)e^{\lambda_2 t} + \cdots\cdots + P_k(t)e^{\lambda_k t},$$

où $P_j(t)$ est, pour tout $j = 1, 2, \dots, k$, le polynôme à coefficients complexes de degré $\leqslant p_j - 1$ le plus général.

<u>Exemple</u> 3. L'équation différentielle

$$(13) \qquad \frac{d^4y}{dt^4} - 5\frac{d^3y}{dt^3} + 9\frac{d^2y}{dt^2} - 7\frac{dy}{dt} + 2y = 0$$

a pour équation caractéristique

$$\lambda^4 - 5\lambda^3 + 9\lambda^2 - 7\lambda + 2 = 0,$$

dont les racines sont $\lambda_1 = 1$ triple, et $\lambda_2 = 2$. La solution générale de (13) est :

$$y(t) = C_1e^{2t} + (At^2+Bt+C)e^t.$$

<u>Exercice</u> 3. Trouvez les solutions réelles de l'équation :

$$\frac{d^4y}{dt^4} - 2\frac{d^3y}{dt^3} + 2\frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} + 1 = 0.$$

<u>Démonstration du Théorème 6</u>. Nous savons (Leçon n° 9, Lemme) que les n fonctions (11) sont linéairement indépendantes. Reste à

voir que toutes les fonctions (12) sont solutions de (E_0). Or le système différentiel (S_0) associé à (E_0) a pour matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix} = A$$

En développant $\det(A - \lambda I)$ selon sa dernière ligne, on constate que le polynôme caractéristique de A est :

$$(-1)^n \left[\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n \right].$$

Les valeurs propres de A, ainsi que leurs multiplicités, coïncident donc avec les racines de l'équation caractéristique (9) de (E_0), ainsi que leurs multiplicités. D'après le Théorème 4 de la Leçon n° 9, pour chacune de ces racines λ_j, d'ordre p_j, le système (S_0) admet p_j solutions linéairement indépendantes :

$$\left(y(t), y'(t), y''(t), \dots, y^{(n-1)}(t) \right)$$

où chaque composante, et en particulier la première $y(t)$, est de la forme

$$(14) \qquad y(t) = P_j(t) e^{\lambda_j t}$$

où P_j est un polynôme de degré $\leq p_j - 1$. Il existe donc pour (E_0) un sous-espace vectoriel <u>de dimension</u> p_j de solutions de la forme (14), avec $d^\circ P_j \leq p_j - 1$. Mais ceci n'est possible, du point de vue de la dimension, que si on utilise <u>tous</u> les polynômes P_j possibles de dimension $\leq p_j - 1$.

<u>Méthode de variation des constantes pour résoudre l'équation avec second membre (E) connaissant la solution générale de (E_0).</u>

La question a été traitée pour les systèmes différentiels du premier ordre. Par l'intermédiaire des systèmes (S) et (S_0), équivalents à (E) et (E_0), elle se transporte immédiatement au cas particulier des équations d'ordre supérieur. Pour résoudre l'équation

$$(E) \quad \frac{d^n y}{dt^n} + a_1(t)\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots\cdots + a_{n-1}(t)\frac{dy}{dt} + a_n(t)y(t) = f(t),$$

on commence par chercher n solutions linéairement indépendantes $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots\ldots, \varphi_n(t)$ de l'équation sans second membre associée :

$$(E_0) \quad \frac{d^n y}{dt^n} + a_1(t)\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots\cdots + a_{n-1}(t)\frac{dy}{dt} + a_n(t)y(t) = 0,$$

ce qui permet d'écrire la solution générale de (E_0) :

$$(8) \qquad y(t) = C_1\varphi_1(t) + C_2\varphi_2(t) + \cdots\cdots + C_n\varphi_n(t),$$

où $C_1, C_2, \ldots, C_n$ sont des <u>constantes</u> complexes. Dans (8) on remplace ces constantes par de nouvelles <u>fonctions</u> inconnues :

$$(8)' \qquad y(t) = C_1(t)\varphi_1(t) + C_2(t)\varphi_2(t) + \cdots\cdots + C_n(t)\varphi_n(t).$$

Alors, pour que $y(t)$ définie par $(8)'$ soit solution de (E), il faut et il suffit que les dérivées $C_1'(t), C_2'(t), \ldots, C_n'(t)$ vérifient, pour tout $t \in I$ fixé, le système de Cramer :

$$\begin{cases} \varphi_1(t)C_1'(t) + \varphi_2(t)C_2'(t) + \cdots\cdots + \varphi_n(t)C_n'(t) = 0 \\ \varphi_1'(t)C_1'(t) + \varphi_2'(t)C_2'(t) + \cdots\cdots + \varphi_n'(t)C_n'(t) = 0 \\ - - - - - - - - - - - - \\ \varphi_1^{(n-1)}(t)C_1'(t) + \varphi_2^{(n-1)}(t)C_2'(t) + \cdots\cdots + \varphi_n^{(n-1)}(t)C_n'(t) = f(t) \end{cases}$$

On résoud ce système et on en déduit $C_1(t), C_2(t), \text{—}, C_n(t)$ par n quadratures.

<u>Exemple</u> 4. On donne une fonction $f(t)$ continue sur $\mathbb{R}$ et on demande la solution générale de :

$$(14) \quad \frac{d^3y}{dt^3} - \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - y(t) = f(t).$$

On a calculé à l'Exemple 2 la solution de l'équation sans second membre associée, ce qui conduit à poser :

$$(15) \qquad y(t) = C_1(t)e^t + C_2(t)\sin t + C_3(t)\cos t.$$

Pour que (15) soit solution de (14) il faut et il suffit que :

$$\begin{cases} e^t C_1' + \sin t\, C_2' + \cos t\, C_3' = 0 \\ e^t C_1' + \cos t\, C_2' - \sin t\, C_3' = 0 \\ e^t C_1' - \sin t\, C_2' - \cos t\, C_3' = f(t) \end{cases},$$

c'est-à-dire :

$$C_1'(t) = \frac{1}{2} e^{-t} f(t) \; ; \; C_2'(t) = -\frac{\sin t + \cos t}{2} f(t) \; ; \; C_3'(t) = \frac{\sin t - \cos t}{2} f(t).$$

La solution générale de (14) s'obtient en posant dans (15) :

$$\begin{cases} C_1(t) = \frac{1}{2} \int e^{-t} f(t)\,dt + k_1 \\ C_2(t) = -\frac{1}{2} \int (\sin t + \cos t) f(t)\,dt + k_2 \\ C_3(t) = \frac{1}{2} \int (\sin t - \cos t) f(t)\,dt + k_3 \end{cases}.$$

<u>Exercice 4</u>. Trouvez la solution générale pour $t > 0$ de l'équation

$$t(t+1)\frac{d^2y}{dt^2} + (2 - t^2)\frac{dy}{dt} - (t+2)y = (t+1)^2$$

en remarquant que $\varphi_1(t) = e^t$ et $\varphi_2(t) = \frac{1}{t}$ sont solutions de l'équation sans second membre associée.

Cas où l'équation est à coefficients constants et le second membre de la forme $f(t) = e^{\alpha t} P(t)$.

Des remarques très simples analogues aux Remarques 1 et 2 sont souvent utiles. D'abord la solution générale de (E) est la somme de la solution générale de (E_0) et d'une solution particulière de (E). Ensuite, si le second membre $f(t)$ se décompose en $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$, les solutions de

$$(E) \quad \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots\cdots + a_n y = f(t)$$

s'obtiennent en ajoutant les solutions de

$$(E_1) \quad \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots\cdots + a_n y = f_1(t)$$

à celles de

$$(E_2) \quad \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots\cdots + a_n y = f_2(t) .$$

Ces remarques valent en coefficients variables.

Supposons maintenant à nouveau que (E) est à coefficients constants :

$$(16) \qquad \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}\frac{dy}{dt} + a_n y = e^{\alpha t} P(t)$$

avec un second membre de la forme $e^{\alpha t}P(t)$, où α est un nombre complexe et $P(t)$ un polynôme à coefficients complexes, et soit

$$(9) \qquad \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

l'équation caractéristique de l'équation (E_0) associée à (16). On trouve une solution particulière de (16) en appliquant les recettes suivantes.

Théorème 7 1°) (Cas où $\alpha = 0$). Soit l'équation :

$$(17) \qquad \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-r}\frac{d^r y}{dt^r} + \cdots + a_n y = P(t),$$

où $P(t)$ est un polynôme de degré q. Supposons que :

$$a_n = a_{n-1} = \cdots = a_{n-r+1} = 0, \quad \text{mais} \quad a_{n-r} \neq 0.$$

Alors (17) admet une solution de la forme $y = Q(t)$, où Q est un polynôme de degré $q + r$.

2°) (cas général) Soit $0 \leq r \leq n$. Si α est racine d'ordre r du polynôme caractéristique (9) [en particulier, pour $r = 0$, si α n'est pas racine...], l'équation

$$(16) \qquad \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}\frac{dy}{dt} + a_n y = e^{\alpha t} P(t)$$

admet une solution de la forme $y(t) = e^{\alpha t} Q(t)$, où $Q(t)$ est un polynôme de degré $d^\circ P + r$.

Démonstration. 1°) En prenant $\frac{d^r y}{dt^r}$ comme nouvelle fonction inconnue, on se ramène au cas où $r = 0$, et on doit prouver que, si $a_n \neq 0$, l'équation (17) a une solution polynômiale :

$$y(t) = Q(t) = c_q t^q + c_{q-1} t^{q-1} + \cdots + c_1 t + c_0,$$

avec $c_q \neq 0$, sachant que $P(t) = b_q t^q + b_{q-1} t^{q-1} + \cdots + b_1 t + b_0$ avec $b_q \neq 0$.

En reportant $Q(t)$ dans (17) on calcule de proche en proche les coefficients c_k de Q grâce aux relations triangulaires :

$$\begin{cases} a_n c_q = b_q \\ a_n c_{q-1} + a_{n-1} c_q = b_{q-1} \\ a_n c_{q-2} + a_{n-1}(q-1) c_{q-1} + a_{n-2}\, q(q-1) c_q = b_{q-2} \\ \text{et ainsi de suite jusqu'à } a_n c_0 + \cdots\cdots = b_0 , \end{cases}$$

qui ont une solution car $a_n \neq 0$.

2°) (esquisse formelle) Soit $R(\lambda)$ le polynôme caractéristique de (16), premier membre de (9). Symboliquement (16) s'écrit :

$$(18) \qquad R\left(\frac{d}{dt}\right) y = e^{\alpha t} P(t) ,$$

et l'on peut calculer sur les symboles différentiels comme sur des polynômes. Par hypothèse $R(\lambda) = S(\lambda)(\lambda-\alpha)^r$, avec $S(\alpha) \neq 0$. Donc $R\left(\frac{d}{dt}\right) = S\left(\frac{d}{dt}\right)\left(\frac{d}{dt}-\alpha\right)^r$. Dans (16) faisons le changement de fonction inconnue

$$y(t) = e^{\alpha t} z(t) .$$

On a :

$$\left(\frac{d}{dt}-\alpha\right) y = \left(\frac{d}{dt}-\alpha\right)(e^{\alpha t} z) = \alpha e^{\alpha t} z + e^{\alpha t} z' - \alpha e^{\alpha t} z = e^{\alpha t} z'$$

et donc, par itération :

$$\left(\frac{d}{dt}-\alpha\right)^r y = \left(\frac{d}{dt}-\alpha\right)^r (e^{\alpha t} z) = e^{\alpha t} z^{(r)} .$$

Ainsi $R\left(\frac{d}{dt}\right)(y) = S\left(\frac{d}{dt}\right)\left[\left(\frac{d}{dt}-\alpha\right)^r y\right] = S\left(\frac{d}{dt}\right)\left[e^{\alpha t} z^{(r)}\right]$.

Or $S(\lambda)$ est un polynôme de degré $n-r$, tel que $S(\alpha)$ est $\neq 0$. Il en résulte que $S\left(\frac{d}{dt}\right)\left[e^{\alpha t} z^{(r)}\right] = e^{\alpha t}\left[z^{(n)} + k_1 z^{(n-1)} + \cdots + k_r z^{(r)}\right]$,

où les k_i sont des constantes, avec $k_r \neq 0$ car $S(\alpha) \neq 0$. Donc, par le changement de fonction inconnue $y(t) = e^{\alpha t} z(t)$, l'équation (16), c'est-à-dire (18), devient

$$(19) \qquad z^{(n)} + k_1 z^{(n-1)} + \cdots + k_r z^{(r)} = P(t) ,$$

qui relève du premier cas du Théorème. On a vu que (19) a une solution $z(t) = Q(t)$ polynomiale de degré $q+r$, cqfd.

<u>Exemple 5</u>. Soit l'équation

$$(20) \quad \frac{d^3y}{dt^3} - \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - y(t) = t\,e^t.$$

Puisque $\alpha = 1$ est racine simple de l'équation caractéristique, (20) a une solution de la forme :

$$y(t) = (At^2 + Bt + C)\,e^t$$

En reportant dans (20), on trouve les relations :

$$4A = 1 \quad ; \qquad 2B + 4A = 0 \quad ; \quad C \text{ quelconque}.$$

Donc $\qquad y(t) = \left(\frac{t^2}{4} - \frac{t}{2}\right)e^t \qquad$ convient.

<u>Exercice 5</u>. Trouvez toutes les solutions réelles de l'équation différentielle

$$\frac{d^3y}{dt^3} - 2\,\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - 2y = \cos t.$$

<u>Indications sur les Exercices proposés dans cette Leçon</u>

<u>Exercice 1</u>. La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ a pour valeurs propres 0, 1 et -1.

Les vecteurs $\vec{v}_0 = (1,-1,1)$; $\vec{v}_1 = (1,0,1)$; $\vec{v}_{-1} = (0,1,-1)$ sont propres. La solution générale du système sans second membre associé est donc

$$C_1\vec{v}_0 + C_2e^t\vec{v}_1 + C_3e^{-t}\vec{v}_{-1} \quad \begin{cases} x(t) = C_1 + C_2e^t \\ y(t) = -C_1 + C_3e^{-t} \\ z(t) = C_1 + C_2e^t - C_3e^{-t} \end{cases} \qquad (21)$$

En "faisant varier" les constantes pour trouver la solution du système avec second membre, on est conduit au système de Cramer :

$$C_1' + e^tC_2' = 1 \quad ; \quad -C_1' + e^tC_3' = e^t \quad ; \quad C_1' + e^tC_2' - e^tC_3' = 0 \,,$$

dont la solution est $C_1'(t) = 1 - e^t$; $C_2'(t) = 1$; $C_3'(t) = e^t$. Donc la solution générale s'obtient en reportant dans (21) :

$$C_1(t) = t - e^t + k_1 \quad ; \quad C_2(t) = t + k_2 \quad ; \quad C_3(t) = e^t + k_3 \,.$$

Les conditions initiales $x(0) = -1$; $y(0) = 2$; $z(0) = -2$ répondent au choix des constantes $k_1 = k_2 = k_3 = 0$; la solution particulière demandée est :

$$x(t) = t - e^t + te^t \quad ; \quad y(t) = -t + e^t + 1 \quad ; \quad z(t) = t - e^t + te^t - 1.$$

<u>Exercice 2</u>. L'équation caractéristique $\lambda^4 - 13\lambda^2 + 36 = 0$ est bicarrée, et a pour racines $+3, -3, +2, -2$. La solution générale est

$$y(t) = C_1e^{3t} + C_2e^{-3t} + C_3e^{2t} + C_4e^{-2t}.$$

Exercice 3. L'équation caractéristique $\lambda^4 - 2\lambda^3 + 2\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ a pour racines $\lambda = 1$ (double), $\lambda = i$ et $\lambda = -i$. La solution générale complexe est : $y(t) = (C_1 t + C_2)e^t + C_3 e^{it} + C_4 e^{-it}$, où C_1, C_2, C_3, C_4 sont des constantes complexes arbitraires. Les solutions réelles sont : $y(t) = (At+B)e^t + C\cos t + D\sin t$, où A, B, C, D sont des constantes réelles.

Exercice 4. En reportant on vérifie que $\varphi_1(t) = e^t$ et $\varphi_2(t) = \frac{1}{t}$ sont solutions de l'équation sans second membre ; elles sont linéairement indépendantes, car leur wronskien pour $t = 1$ vaut $\begin{vmatrix} e & 1 \\ e & -1 \end{vmatrix} \neq 0$. On cherche les solutions sous la forme $y(t) = C_1(t)e^t + C_2(t)\frac{1}{t}$, le second membre étant ici : $f(t) = \frac{(t+1)^2}{t(t+1)} = \frac{t+1}{t}$. On est conduit aux relations :

$$e^t C_1' + \frac{1}{t}C_2' = 0 \; ; \quad e^t C_1' - \frac{1}{t^2}C_2' = 1 + \frac{1}{t}, \text{ donc à :}$$

$C_1'(t) = e^{-t}$; $C_2'(t) = -t$, et $C_1(t) = -e^{-t} + k_1$; $C_2(t) = -\frac{t^2}{2} + k_2$, d'où la solution générale :

$$y(t) = k_1 e^t + k_2 \frac{1}{t} - 1 - \frac{t}{2}.$$

Exercice 5. L'équation sans second membre associée a pour équation caractéristique $\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$, de racines $2, i, -i$, donc pour solution générale $C_1 e^{2t} + C_2 e^{it} + C_3 e^{-it}$.

On écrit le second membre $\cos t = \frac{e^{it}}{2} + \frac{e^{-it}}{2}$, et on cherche une solution particulière pour chacune des équations :

$$\frac{d^3y}{dt^3} - 2\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - 2y = \frac{e^{it}}{2}, \text{ et } \frac{d^3y}{dt^3} - 2\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - 2y = \frac{e^{-it}}{2}.$$

Faisons-le pour la première. D'après le Théorème 7, il y a une solution du type $y(t) = (At+B)e^{it}$. En reportant dans la première équation, on trouve $A = \frac{-1+2i}{20}$, B quelconque (par exemple $B = 0$). La première équation a pour solution particulière $\frac{-1+2i}{20} t e^{it}$. En changeant i en $-i$, la deuxième a pour solution particulière $\frac{-1-2i}{20} t e^{-it}$. La somme de ces deux solutions fournit une solution particulière de l'équation proposée, puis la solution générale réelle $C_1 e^{2t} + A\cos t + B\sin t - \frac{t}{10}(\cos t + 2\sin t)$.

AN04 Leçon n°11

Intégrales convergentes

Dans cette Leçon nous allons étendre le calcul intégral :

1°) au cas où l'intervalle d'intégration n'étant pas borné, l'une des bornes est infinie, par exemple $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$;

2°) au cas où la fonction $f(x)$ à intégrer n'est pas bornée quand x tend vers l'une des bornes de l'intervalle d'intégration, par exemple $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$;

3°) au cas où les deux difficultés précédentes se présentent simultanément, par exemple $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx$.

Ce dernier cas se ramène aux deux précédents en coupant l'intégrale en deux pour isoler chaque difficulté, par exemple :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx .$$

La théorie du deuxième cas peut certes être construite directement, mais aussi être ramenée à celle du premier cas par changement de variable. Par exemple, en posant $x = \frac{1}{t}$:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{t}} .$$

Nous serons donc plus explicites dans l'étude du premier cas.

§1. Etudes des intégrales du type $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

Soit a un nombre réel, et soit f une fonction définie pour tout x réel $\geq a$, à valeurs complexes, et qui, pour tout nombre réel $A \geq a$, est bornée sur l'intervalle $[a, A]$ et intégrable au sens de Riemann sur cet intervalle (cf AN03, Leçon n°8), ce qui aura lieu en particulier si f est continue ou continue par morceaux pour $x \geq a$.

<u>Définition</u>. Si $\lim\limits_{A\to+\infty} \int_a^A f(x)dx = L$ existe et est finie,

on dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ est convergente (ou a un sens) et l'on pose :
$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = L = \lim_{A\to+\infty} \int_a^A f(x)dx .$$
Si, par contre, quand $A \to +\infty$, le nombre $\int_a^A f(x)dx$ n'a aucune limite ou tend vers l'infini, on dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ est divergente (ou n'a pas de sens), et on ne lui attribue aucune valeur.

Remarque. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres complexes. Soit $f(x)$ la fonction "en escalier" définie pour $x \geq 0$ par $f(x) = u_n$ quand $n \leq x < n+1$. Il est équivalent de dire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ est convergente, de valeur L, et de dire que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente, de somme L. La notion que nous étudions généralise donc (fortement) celle de série, en passant du discret au continu.

En fait nous avons déjà rencontré à la Leçon n° 1, pages 10 à 14, les intégrales $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ dans le cas particulier où $f(x)$ est réelle positive ; dans ce cas on peut remplacer dans la définition de la convergence : A réel $\to +\infty$ par : $A = n$ entier $\to +\infty$, car
$$\int_a^{\mathrm{Ent}\,A} \leq \int_a^A \leq \int_a^{\mathrm{Ent}\,A+1} ,$$
vu la positivité de f. Relisez attentivement ces quatre pages, notamment les propriétés de comparaison pour $\int_a^{+\infty} f$ et $\int_a^{+\infty} g$ quand $0 \leq f \leq g$, et quand, f et g étant ≥ 0, on a l'équivalence $f(x) \sim g(x)$ pour $x \to +\infty$. Rappelons aussi que là était prouvé que : $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$;

$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\,[(\mathrm{Log}\,x)^\beta]}$ converge si et seulement si $\beta > 1$;

si f est ≥ 0 décroissante, la série $\sum_{n\geq 0} f(n)$ converge si et seulement si l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ converge.

Par ailleurs nous avons vu en AN 03, Leçon n° 9, Exemple 3, que

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Refaites l'Exercice 6 de la Leçon n° 1. Voici d'autres exemples et exercices portant sur le cas où la fonction $f(x)$ est <u>positive</u>.

<u>Exemple 1</u>. Pour tout polynôme $P(t)$, l'intégrale $\int_a^{+\infty} e^{-t}P(t)dt$ est convergente.

En effet par linéarité on se ramène au cas où $P(t) = t^k$. Puisque $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-t}t^{k+2} = 0$, pour $t \geq t_0$ on a $0 \leq e^{-t}t^k \leq \frac{1}{t^2}$, donc $\int_1^{+\infty} e^{-t}t^k dt$ converge par comparaison avec $\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^2}$.

<u>Exemple 2</u>. Soient $P(t)$ et $Q(t)$ deux polynômes. Soit a un nombre réel $>$ la plus grande racine réelle de Q. Alors l'intégrale $\int_a^{+\infty}\frac{P(t)}{Q(t)}dt$ converge si et seulement si $d^\circ Q \geq d^\circ P + 2$.

En effet on peut supposer P et Q à coefficients réels. Pour $t \geq t_0$ assez grand, $\frac{P(t)}{Q(t)}$ est d'un signe constant, par exemple positif, et équivalent au rapport des termes de plus haut degré, ce qui permet de procéder par comparaison avec $\int_{t_0}^{+\infty}\frac{dt}{t^k}$, où $k = d^\circ Q - d^\circ P$.

<u>Contre-exemple</u>

En chaque point d'abscisse n, on construit un triangle de base $\frac{2}{(n+1)^2}$, de hauteur 1. Alors $\int_0^{+\infty} f(x)dx = \sum_{n\geq1}\frac{1}{(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6} - 1$ converge, et <u>pourtant</u> $f(x)$ <u>ne tend pas vers 0</u> quand $x \to +\infty$. C'est là une différence avec la théorie des séries convergentes (le terme général d'une série convergente tend vers 0).

<u>Exercice 1</u>. Pour $a > 0$ et $b > 0$, calculez $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$.

<u>Exercice 2</u>. Soient deux entiers $m \geq 0$ et $n \geq 2$. On pose $I_{m,n} = \int_0^{+\infty} \frac{x^m\,dx}{(1+x)^{m+n}}$. Trouvez une relation entre $I_{m+1,n}$ et $I_{m,n}$. Déduisez-en la valeur de $I_{m,n}$.

<u>Exercice 3</u>. Calculez $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\,dx}{(1+x)^2}$.

Revenons aux fonctions $f(x)$ non nécessairement réelles positives. On a, bien entendu, un

<u>Critère de Cauchy</u>. Pour que $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ soit convergente, il faut et <u>il suffit</u> que : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A_\varepsilon \geq a$ tel que $A' \geq A \geq A_\varepsilon$ entraîne $\left| \int_A^{A'} f(x)dx \right| \leq \varepsilon$.

Nous dirons que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ est <u>absolument convergente</u> si l'intégrale $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ est convergente. Alors, comme conséquence du critère de Cauchy, l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ elle-même est convergente, et $\left| \int_a^{+\infty} f(x)dx \right| \leq \int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$.

<u>Exemple 3</u>. Soit α un nombre réel > 1. Alors les intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha}dx$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}dx$ sont absolument convergentes, donc convergentes.

<u>Exercice 4</u>. Calculez, pour tout t réel donné, l'intégrale
$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos(tx)dx .$$

<u>Critère d'Abel</u>. Soit a un nombre réel. Soit une fonction
$$x \mapsto f(x) = g(x)\,h(x)$$
définie pour $x \geq a$, où :

1°) $g(x)$ est positive, <u>décroissante</u>, tend vers 0 quand $x \to +\infty$, et admet pour $x \geq a$ une dérivée première continue ;

2°) quel que soit $A \geq a$, la fonction $h(x)$ est bornée intégrable sur $[a, A]$; elle est éventuellement à valeurs complexes ;

3°) il existe une constante M telle que, quel que soit $A \geq a$,
$$\left| \int_a^A h(x)\,dx \right| \leq M.$$
Alors l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \int_a^{+\infty} g(x)h(x)\,dx$ est convergente.

Remarque. L'exemple fondamental de fonction $h(x)$ satisfaisant à la condition (3) est, pour t réel donné $\neq 0$,
$$h(x) = e^{itx}$$
[et donc aussi $\cos(tx)$ et $\sin(tx)$], car
$$\left| \int_a^A e^{itx}\,dx \right| = \left| \frac{e^{itA} - e^{ita}}{it} \right| \leq \frac{|e^{itA}| + |e^{ita}|}{|t|} = \frac{2}{|t|} = M.$$

Exemple 4. Les intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha}\,dx$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$ convergent pour tout $\alpha > 0$ d'après le critère d'Abel, et, rappelons-le, convergent absolument pour tout $\alpha > 1$.

Exemple 5. Soient P et Q des polynômes à coefficients complexes. Soit a un nombre réel tel que Q n'ait pas de racine réelle $\geq a$. Soit t un nombre réel donné $\neq 0$. Alors, si $d^\circ Q \geq d^\circ P + 1$, l'intégrale
$$\int_a^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{itx}\,dx$$
converge (et, rappelons-le, absolument si $d^\circ Q \geq d^\circ P + 2$).

En effet, par linéarité, on peut supposer P et Q réels. Alors $\left(\frac{P}{Q}\right)' = \frac{QP' - PQ'}{Q^2}$ est, pour $x \geq x_0$ assez grand, d'un signe constant, qu'on peut supposer négatif (sinon changer P en $-P$). Donc $g(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ est, pour $x \geq x_0$, positive décroissante, et tend vers 0 quand $x \to +\infty$ car $d^\circ Q > d^\circ P$.

Démonstration du critère d'Abel. Posons $H(x) = \int_a^x h(t)\,dt$. Alors pour tout $A \geq a$, on a $|H(A)| \leq M$. En intégrant par parties :
$$\int_A^{A'} f(x)\,dx = \int_A^{A'} g(x)h(x)\,dx = -\int_A^{A'} g'(x)H(x)\,dx + g(A')H(A') - g(A)H(A).$$

On

$$|g(A')H(A') - g(A)H(A)| \leq M[g(A') + g(A)] \leq 2Mg(A)$$

et:

$$\left|\int_A^{A'} [-g'(x)]\, H(x)\,dx\right| \leq M \int_A^{A'} [-g'(x)]\,dx = M[g(A) - g(A')] \leq Mg(A),$$

donc $\left|\int_A^{A'} f(x)\,dx\right| \leq 3Mg(A) \leq \varepsilon$ dès que $A \geq A_\varepsilon$, car $\lim\limits_{A\to+\infty} g(A) = 0$.

<u>Exercice 5</u>. Par un changement de variable, montrez que les intégrales de Fresnel $\int_0^{+\infty} \cos(x^2)\,dx$ et $\int_0^{+\infty} \sin(x^2)\,dx$ convergent.

<u>Exercice 6</u>. Montrez que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}$ converge, mais pas absolument.

§2. <u>Etude des intégrales du type $\int_a^b f(x)\,dx$, où la fonction $f(x)$ ne reste pas bornée quand $x > a$ tend vers a.</u>

Soient $a < b$ deux nombres réels. Soit $x \mapsto f(x)$ une fonction à valeurs complexes, définie pour $a < x \leq b$, et qui, pour tout $\varepsilon > 0$, est bornée et intégrable au sens de Riemann sur le segment $[a+\varepsilon, b]$.

<u>Définition</u>. Si $\lim\limits_{\varepsilon>0,\, \varepsilon\to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx = L$ existe et est finie, on dit que <u>l'intégrale</u> $\int_a^b f(x)\,dx$ <u>est convergente</u> (ou <u>a un sens</u>), et l'on pose:

$$\int_a^b f(x)\,dx = L = \lim_{\varepsilon>0,\, \varepsilon\to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx .$$

Si, quand $\varepsilon > 0$ tend vers 0, le nombre $\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$ n'a pas de limite, ou a une limite infinie, on dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ est <u>divergente</u> (ou <u>n'a pas de sens</u>), et on ne lui attribue aucune valeur.

Le changement de variable $x - a = \frac{1}{t}$ ramène l'étude de $\int_a^b f(x)\,dx$ à celle de $\int_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} \frac{1}{t^2} f\left(\frac{1}{t} + a\right)dt$, qui a été faite en détails au §1. Il suffit de traduire les résultats obtenus au §1 (ou de procéder directement) pour énoncer ce qui suit.

Soit α un nombre réel ; alors $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.

Si $0 \leq f(x) \leq g(x)$, et si $\int_a^b g(x)dx$ converge, alors $\int_a^b f(x)dx$ converge ; si $\int_a^b f(x)dx$ diverge, alors $\int_a^b g(x)dx$ diverge. Si, quand $x > a$ tend vers a, $f(x) \sim g(x)$, alors les deux intégrales sont de même nature.

Pour que $\int_a^b f(x)\,dx$ converge, il faut et il suffit (critère de Cauchy) que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe a_ε tel que $a < a_\varepsilon < b$ et tel que, si $a < a_1 \leq a_2 \leq a_\varepsilon$, on ait $\left|\int_{a_1}^{a_2} f(x)dx\right| \leq \varepsilon$.

On dit que $\int_a^b f(x)\,dx$ est <u>absolument convergente</u> si $\int_a^b |f(x)|\,dx$ est convergente. Dans ce cas $\int_a^b f(x)\,dx$ elle-même est convergente, et $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx$.

Pour tout nombre réel α, l'intégrale $\int_0^1 |\mathrm{Log}\,x|^\alpha dx$ converge. En effet, quand $x > 0$ tend vers 0, on sait que $|\mathrm{Log}\,x|^\alpha \sqrt{x}$ tend vers 0, donc $0 \leqslant |\mathrm{Log}\,x|^\alpha \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}}$ pour $x > 0$ assez petit ; or on sait que $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ converge.

Bien entendu le cas des intégrales $\int^b f(x)dx$, où $f(x)$ n'est pas bornée quand $x < b$ tend vers b, se traite de la même façon, ainsi que les intégrales $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$ s'étudient comme au § 1.

<u>Exemple</u> 6. Soit α un nombre réel. L'intégrale $\int_0^\pi \frac{dx}{(\sin x)^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.

Par symétrie, l'étude en la borne π est la même qu'en la borne 0. Pour cette dernière on remarque que $\frac{1}{(\sin x)^\alpha}$ est > 0 et équivalente à $\frac{1}{x^\alpha}$ quand $x > 0$ tend vers 0.

<u>Exercice</u> 7. Montrez que $\int_{-1}^{1} \frac{\cos(xt)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$ a un sens. Exprimez sa valeur à l'aide de la fonction de Bessel $J_0(x)$ définie à la Leçon n° 3.

§3. Fonctions Gamma et Bêta d'Euler

De même que les séries (par exemple les séries entières, les séries de Fourier) sont un puissant moyen d'étudier, et même de définir (cf. l'exponentielle), des fonctions, de nouvelles fonctions remarquables peuvent être définies "sous le signe somme", comme intégrales dépendant de leur variable comme paramètre. Nous en avons eu un exemple avec les fonctions de Bessel $J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(nt - x\sin t)\,dt$ introduites à la Leçon n° 3. On peut aussi le faire à l'aide d'intégrales généralisées au sens des §1 et 2. Avant d'étudier à la prochaine Leçon la continuité et la dérivabilité sous le signe d'intégration en général, commençons par nous familiariser avec deux célèbres fonctions définies par Euler vers 1730.

Pour tout nombre réel $x > 0$ on pose :

$$(1) \qquad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, t^{x-1}\, dt .$$

L'intégrale a un sens : 1°) à la borne $+\infty$ (cf. l'Exemple 1) ; 2°) à la borne 0, car $0 \leq e^{-t} t^{x-1}$ est équivalent à $\frac{1}{t^{1-x}}$ quand $t>0$ tend vers 0, et $1-x<1$.

Soit $0 < \varepsilon < A$. En intégrant par parties, pour $x > 0$ on a :

$$\int_\varepsilon^A e^{-t}\, t^x\, dt = x\int_\varepsilon^A e^{-t}\, t^{x-1}\, dt - e^{-A}A^x + e^{-\varepsilon}\varepsilon^x .$$

Si, dans cette égalité on fait tendre $\varepsilon>0$ vers 0 et A vers $+\infty$, on obtient l'équation fonctionnelle de la fonction Gamma :

$$(2) \qquad \Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x) \qquad \text{pour } x \text{ réel} > 0 .$$

Comme $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = 1$, on déduit de (2) que

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = \cdots\cdots = n(n-1)(n-2)\ldots 2\Gamma(2) = n!\,\Gamma(1) = n!$$

Ainsi pour tout entier $n \geq 0$

$$(3) \qquad \Gamma(n+1) = n!$$

La fonction Gamma "interpole" la factorielle.

Par le changement de variable $t = u^2$:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{\varepsilon\to 0,\, A\to+\infty} \int_{\varepsilon}^{A} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\, dt = \lim_{\varepsilon\to 0,\, A\to+\infty} 2\int_{\sqrt{\varepsilon}}^{\sqrt{A}} e^{-u^2} du = 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du,$$

donc, d'après le calcul fait en AN03, Leçon n°9, Exemple 3 :

$$(4) \qquad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Plus généralement, grâce à l'équation fonctionnelle (2), on a :

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{1.3.5.\dots(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi} = \frac{(2n)!}{2^{2n}\,(n!)}\sqrt{\pi}, \text{ pour } n \text{ entier} \geq 0.$$

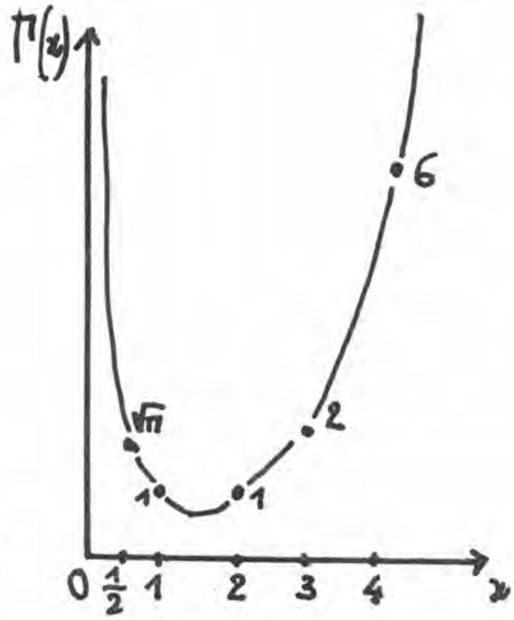
Désormais habituez-vous à considérer la fonction Gamma comme classique, comme tout aussi concrète que le sinus ou le logarithme. Nous allons voir que le calcul de beaucoup d'intégrales se ramène à des valeurs de la fonction Gamma. C'est pourquoi il est utile de disposer d'une table numérique pour $\Gamma(x)$. A cause de l'équation fonctionnelle il suffit de se limiter à l'intervalle $1 \leq x \leq 1,99$

<u>Table des $\Gamma(x)$</u> pour $1,00 \leq x \leq 1,99$. Par exemple on y lit que pour $x = 1,47$ on a $\Gamma(x) = 0,8856$, pour $x = 1,82$ on a $\Gamma(x) = 0,9368$.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	1.0000	.9943	.9888	.9835	.9784	.9735	.9687	.9642	.9597	.9555
.1	.9514	.9474	.9436	.9399	.9364	.9330	.9298	.9267	.9237	.9209
.2	.9182	.9156	.9131	.9108	.9085	.9064	.9044	.9025	.9007	.8990
.3	.8975	.8960	.8946	.8934	.8922	.8912	.8902	.8893	.8885	.8879
.4	.8873	.8868	.8864	.8860	.8858	.8857	.8856	.8856	.8857	.8859
.5	.8862	.8866	.8870	.8876	.8882	.8889	.8896	.8905	.8914	.8924
.6	.8935	.8947	.8959	.8972	.8986	.9001	.9017	.9033	.9050	.9068
.7	.9086	.9106	.9126	.9147	.9168	.9191	.9214	.9238	.9262	.9288
.8	.9314	.9341	.9368	.9397	.9426	.9456	.9487	.9518	.9551	.9584
.9	.9618	.9652	.9688	.9724	.9761	.9799	.9837	.9877	.9917	.9958

Nous verrons à la Leçon suivante que la fonction $\Gamma(x)$ est continue, et même indéfiniment dérivable (sous le signe somme), pour $x > 0$. Il en résulte que $\lim_{x>0,\, x\to 0} \Gamma(x) = +\infty$, car $\Gamma(x) = \frac{1}{x}\Gamma(x+1)$ et $\Gamma(x+1)$ tend vers $\Gamma(1) = 1$; ainsi $\Gamma(x) \sim \frac{1}{x}$ quand $x > 0$ tend vers 0. La fonction $\Gamma(x)$, à partir de $x = 0$, décroît jusqu'à la valeur 0,8856, prise pour $x = 1,46$, puis croît très vite (en interpolant la factorielle) à partir de ce minimum.

Voici quelques exemples d'intégrales qui se ramènent à la fonction Gamma.



<u>Exemple</u> 7. Pour tout $x>0$

$$\int_0^{+\infty} e^{-(t^x)}\,dt = \Gamma\left(1+\frac{1}{x}\right).$$

En effet par le changement de variable $t^x=u$,

$$\int_0^{+\infty} e^{-(t^x)}\,dt = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} e^{-u}\,u^{\frac{1}{x}-1}\,du = \frac{1}{x}\Gamma\left(\frac{1}{x}\right).$$

Par exemple : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^3}\,dt = \Gamma\left(\frac{4}{3}\right) = 0,8934.$

<u>Exercice</u> 8. Calculez $\displaystyle\int_0^1 \left(\mathrm{Log}\,\frac{1}{t}\right)^{x-1} dt$ pour $x>0$.

<u>Exercice</u> 9. Montrez que, pour a,b,c réels, $a>-1$, $b>0$, $c>0$:

$$\int_0^{+\infty} t^a\, e^{-bt^c}\,dt = \frac{\Gamma\left(\frac{a+1}{c}\right)}{c\; b^{\frac{a+1}{c}}}.$$

Pour exprimer bon nombre d'autres intégrales, on introduit l'autre fonction eulérienne, la fonction Bêta :

$$(5)\qquad B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt\ ,\ \text{pour } x>0 \text{ et } y>0.$$

L'intégrale a bien un sens : 1) à la borne 0 l'intégrande équivaut à $\dfrac{1}{t^{1-x}}$, avec $1-x<1$; 2) à la borne 1 elle équivaut à $\dfrac{1}{(1-t)^{1-y}}$ avec $1-y<1$.

<u>Théorème</u>. Quels que soient $x>0$ et $y>0$,

$$(6)\qquad B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

<u>Démonstration</u>. Par le changement de variable $u=t^2$, on a :

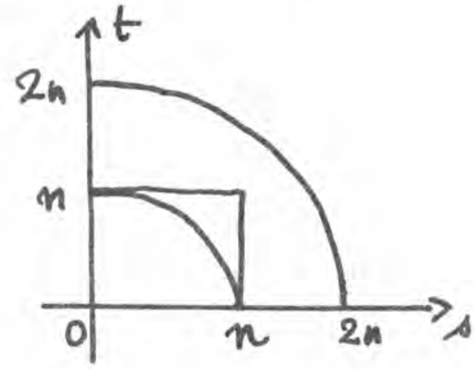
$$\int_0^{n^2} e^{-u}\,u^{x-1}\,du = 2\int_0^{n} e^{-t^2}\,t^{2x-1}\,dt,$$

donc :

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} 2\int_0^n e^{-t^2} t^{2x-1}\,dt \quad \text{et} \quad \Gamma(y) = \lim_{n\to\infty} 2\int_0^n e^{-s^2} s^{2y-1}\,ds,$$

donc

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \lim_{n\to\infty} 4 \iint_{\substack{0<t<n \\ 0<s<n}} e^{-(s^2+t^2)} t^{2x-1} s^{2y-1}\,ds\,dt.$$



Comme la fonction intégrée est positive, l'intégrale double sur le carré de côté n est comprise entre les intégrales sur les quarts de disques de rayons n et $2n$. Donc, en passant en coordonnées polaires:

$$s = r\cos\theta, \quad t = r\sin\theta,$$

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \lim_{n\to\infty} 4 \iint_{\substack{s>0,\, t>0 \\ s^2+t^2<n^2}} e^{-(s^2+t^2)} t^{2x-1} s^{2y-1}\,ds\,dt =$$

$$= \lim_{n\to\infty} 2\int_0^n e^{-r^2} r^{2(x+y)-1}\,dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^{2x-1}\theta\,\sin^{2y-1}\theta\,d\theta =$$

$$= 2\int_0^{+\infty} e^{-r^2} e^{2(x+y)-1}\,dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^{2x-1}\theta\,\sin^{2y-1}\theta\,d\theta =$$

$$= \Gamma(x+y)\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^{2x-1}\theta\,\sin^{2y-1}\theta\,d\theta = \Gamma(x+y)\,B(x,y),$$

par les changements de variable $r^2 = u$, puis $\cos^2\theta = t$.

Exemple 8 (formules de Wallis généralisées). Pour tout nombre réel $\nu > -1$, on a:

$$(7) \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^\nu\theta\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\nu\theta\,d\theta = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}+1\right)},$$

formules que nous connaissions seulement pour $\nu = n$ entier ≥ 0 (cf. AN02, Leçon n°4, § 4).

En effet les deux intégrales sont égales, par changement de θ en $\frac{\pi}{2}-\theta$. Si dans la première on pose $\cos^2\theta = t$, donc $-2\sin\theta\cos\theta\,d\theta = dt$, elle devient $\frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{\nu}{2}-\frac{1}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}\,dt = \frac{1}{2}B\left(\frac{\nu+1}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}+1\right)}.$

<u>Exercice 10</u>. Calculez $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos\theta}\, d\theta$.

<u>Exercice 11</u>. Montrez que, si α et β sont des nombres réels >0,

$$\int_0^1 \frac{t^{\alpha-1}}{\sqrt{1-t^\beta}} = \frac{\sqrt{\pi}\ \Gamma\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}{\beta\ \Gamma\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{1}{2}\right)}.$$

Donnez les valeurs (approchées) des intégrales elliptiques :

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^3}} \quad \text{et} \quad \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}.$$

<u>Exercice 12</u>. Si, pour $x>-1$, on pose $F(x)=\displaystyle\int_0^1 \frac{t^x}{\sqrt{1-t^3}}\,dt$, montrez que $F(x+3)=\dfrac{2x+2}{2x+5}F(x)$.

Indications sur les Exercices proposés dans cette Leçon

<u>Exercice 1</u>. Si $a\neq b$, $\left[(x^2+a^2)(x^2+b^2)\right]^{-1} = \dfrac{1}{b^2-a^2}\left(\dfrac{1}{x^2+a^2}-\dfrac{1}{x^2+b^2}\right)$.

Donc $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = \frac{1}{b^2-a^2}\left[\frac{1}{a}\operatorname{Arctg}\frac{x}{a} - \frac{1}{b}\operatorname{Arctg}\frac{x}{b}\right]$, et

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = \frac{\pi}{2ab(a+b)}$. La formule est aussi valable pour $a=b$.

<u>Exercice 2</u>. En intégrant par parties : $(m+n)\,I_{m+1,n} = (m+1)\,I_{m,n}$, d'où $I_{m,n} = \dfrac{m!\,(n-2)!}{(m+n-1)!}$.

<u>Exercice 3</u>. Posons $x=t^2$. Alors $I=\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\,dx}{(1+x)^2} = 2\int_1^{+\infty}\frac{t^2}{(1+t^2)^2}\,dt =$

$-\displaystyle\int_1^{+\infty} t\,\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{1+t^2}\right)dt$, qu'on intègre par parties. Donc :

$$I = \int_1^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2} - \left[\frac{t}{1+t^2}\right]_{t=1}^{t=+\infty} = \frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}.$$

<u>Exercice 4</u>. On a vu à la Leçon n° 5 que $\displaystyle\int e^{-x}\cos(tx)\,dx =$

$= \dfrac{e^{-x}}{1+t^2}\left(-\cos(tx)+t\sin(tx)\right)+C$, d'où l'on tire que

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos(tx)\,dx = \frac{1}{1+t^2}.$$

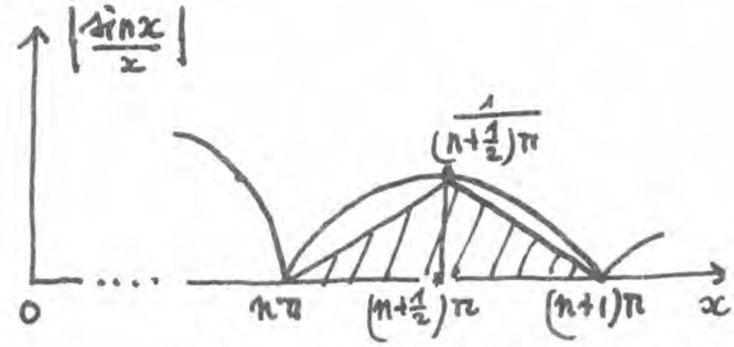
Exercice 5 (et pourtant $\cos(x^2)$ ne tend pas vers zéro !). Si on pose $x^2=t$, donc $2x\,dx=dt$ et $dx=\frac{1}{2}\frac{dt}{\sqrt{t}}$,

$$\int_0^A \cos(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{A^2}\frac{\cos t}{t^{1/2}}\,dt \text{ tend vers } \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\cos t}{t^{1/2}}\,dt,$$

intégrale convergente d'après le critère d'Abel. Nous calculerons la valeur des intégrales de Fresnel à la Leçon n° 12.

Exercice 6.

$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx$ est supérieure à l'aire du triangle hachuré, laquelle vaut $\frac{1}{2}\pi\frac{1}{(n+\frac{1}{2})\pi}=\frac{1}{2n+1}$.



Donc $\int_\pi^{n\pi}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx \geqslant 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\dots+\frac{1}{2n-1}$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$. Nous calculerons $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ à la Leçon n° 12.

Exercice 7. L'intégrale est absolument convergente car $\int_{-1}^{0}\frac{dt}{\sqrt{1+t}}$ et $\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{1-t}}$ ont un sens. Posons $t=\sin\theta$. L'intégrale se transforme en

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos(x\sin\theta)\,d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x\sin\theta)\,d\theta = \int_0^{\pi}\cos(x\sin\theta)\,d\theta = \pi J_0(x).$$

Exercice 8. En posant $\operatorname{Log}\frac{1}{t}=u$, il vient $\int_0^1\left(\operatorname{Log}\frac{1}{t}\right)^{x-1}dt=\Gamma(x)$.

Exercice 9. La formule s'obtient par le changement de variable $b\,t^c=u$, donc $dt=\frac{1}{c}\left(\frac{1}{b}\right)^{\frac{1}{c}}u^{\frac{1}{c}-1}$, etc...

Exercice 10. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta)^{\frac{1}{2}}d\theta=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma(\frac{3}{4})}{\Gamma(\frac{5}{4})}=\frac{2\sqrt{\pi}}{3}\frac{\Gamma(\frac{7}{4})}{\Gamma(\frac{5}{4})}=1,1982$.

Exercice 11. On pose $t^\beta=u$, donc $dt=\frac{1}{\beta}u^{1/\beta-1}du$, et

$$\int_0^1\frac{t^{\alpha-1}dt}{\sqrt{1-t^\beta}}=\frac{1}{\beta}\int_0^1 u^{\frac{\alpha}{\beta}-1}(1-u)^{-\frac{1}{2}}du=\frac{1}{\beta}B\left(\frac{\alpha}{\beta},\frac{1}{2}\right)=\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\beta}\frac{\Gamma(\frac{\alpha}{\beta})}{\Gamma(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{1}{2})}.$$

En particulier $\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{1-t^3}}=1,4042$, et $\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}=1,3110$.

Exercice 12. De $t^3=u$, on déduit $F(x)=\frac{1}{3}B\left(\frac{x+1}{3},\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{3}\frac{\Gamma(\frac{x}{3}+\frac{1}{3})}{\Gamma(\frac{x}{3}+\frac{5}{6})}$, puis on applique l'équation fonctionnelle.

AN 04 Leçon n°12

(164)

Intégrales uniformément convergentes

Soit $F(x) = \int^b f(t, x)\,dt$ une fonction définie par une intégrale, sa variable x figurant sous le signe somme comme paramètre. Lorsque les bornes d'intégration a et b sont finies, la fonction $f(t, x)$ étant de plus bornée, nous avons énoncé et démontré à la Leçon n°3 des propriétés de continuité et dérivabilité de F sous le signe somme. Considérons dans cette Leçon le cas d'intégrales généralisées au sens de la Leçon n°11, soit que l'une des bornes a, b (ou les deux) soit infinie, soit que la fonction $f(t, x)$ cesse d'être bornée quand t s'approche de a ou b. Pour que $F(x)$ ait un sens, il faudra bien sûr que, pour tout x fixé, l'intégrale définissant $F(x)$ soit convergente, mais, de plus, pour pouvoir énoncer les théorèmes de régularité sous le signe somme, nous ferons l'hypothèse d'uniforme convergence pour ces intégrales, nous supposerons qu'elles ont un sens de manière cohérente uniforme, par rapport au paramètre x. L'exposé sera fait dans le cas des intégrales du type $\int_a^{+\infty}$, les autres cas s'y ramenent par changement de variable.

Définition. Soit a un nombre réel. Soit $t \mapsto f(t, x)$ une fonction dépendant d'un paramètre x, qui, pour tout x, est définie et bornée pour $t \geq a$, qui, pour tout $A \geq a$, est intégrable au sens de Riemann sur le segment $[a, A]$, et telle enfin que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t, x)\,dt = \lim_{A \to +\infty} \int_a^A f(t, x)\,dt$ soit convergente, ce qui, rappelons-le, signifie que, pour tout x, la limite précédente existe et est finie.

On dira que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t, x)\,dt$ est uniformément (en x) convergente si ladite limite s'atteint uniformément en x, c'est-à-dire si : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A_\varepsilon \geq a$ tel que $A \geq A_\varepsilon$ entraîne que, quel que soit x, on ait

$$\left| \int_a^{+\infty} f(t, x)\,dt - \int_a^A f(t, x)\,dt \right| \leq \varepsilon .$$

Le point important dans cette définition est que, ε étant donné, on peut choisir A_ε <u>indépendant</u> de x.

La situation est analogue à celle de la Leçon n° 3. Nous énoncerons donc quelques faits sans vérifications.

Pour que $\int_a^{+\infty} f(t,x)\,dt$ soit uniformément convergente, il faut et il <u>suffit</u> (critère de Cauchy) que, pour tout $\varepsilon>0$, il existe $A_\varepsilon \geq a$ tel que $A' \geq A \geq A_\varepsilon$ entraîne que, quel que soit x, on ait : $\left|\int_A^{A'} f(t,x)\,dt\right| \leq \varepsilon$.

<u>Convergence normale</u>. Supposons qu'il existe une fonction $t \mapsto \varphi(t)$ (donc <u>indépendante du paramètre x</u>) définie, bornée et positive sur $[a,+\infty[$, intégrable au sens de Riemann sur tout $[a,A]$, et telle que : 1°) φ <u>majore</u> f, c'est-à-dire :

pour tout x, et pour tout $t \geq a$, $\quad |f(t,x)| \leq \varphi(t)$;

2°) l'intégrale $\int_a^{+\infty} \varphi(t)\,dt$ est convergente.

On dit alors que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t,x)\,dt$ <u>converge normalement</u> (en x), et ceci implique qu'elle converge (absolument et) <u>uniformément</u>. En effet du critère de Cauchy pour la convergence de $\int_a^{+\infty} \varphi(t)\,dt$, on déduit aussitôt par majoration le critère de Cauchy pour l'uniforme convergence de $\int_a^{+\infty} f(t,x)\,dt$.

<u>Exemple</u> 1. L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{t^2}\,dt$ converge normalement, donc uniformément, pour tout x réel (prendre $\varphi(t) = \frac{1}{t^2}$).

<u>Remarque</u>. D'après le critère d'Abel, on sait que, pour tout x réel fixé, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{t}\,dt$ converge, mais elle ne converge certainement pas normalement en x, puisqu'on a vu (Leçon n° 11, Exercice 6) qu'elle ne converge pas absolument. Cependant nous pourrons bientôt énoncer , grâce à un critère d'Abel d'uniforme convergence, que, pour tout $\alpha>0$ donné, elle converge uniformément

tant que $|x|$ reste dans l'intervalle $[\alpha, +\infty[$.

Exemple 2. Quels que soient les nombres réels $0 < \alpha \leq \beta < +\infty$, l'intégrale

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, t^{x-1}\, dt$$

converge normalement, donc uniformément, tant que le paramètre x reste dans le segment $[\alpha, \beta]$.

En effet, 1°) en la borne $+\infty$: si $t \geqslant 1$, on a :

$0 \leq e^{-t}\, t^{x-1} \leqslant e^{-t}\, t^{\beta-1} = \varphi(t)$, avec $\int_1^{+\infty} \varphi(t)\,dt$ convergente, donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-t}\, t^{x-1}\,dt$ est normalement convergente ;

2°) en la borne 0 : si $0 < t \leq 1$, on a :

$0 \leq e^{-t}\, t^{x-1} \leqslant t^{\alpha-1} = \psi(t)$, avec $\int_0^1 \psi(t)\,dt = \int_0^1 \frac{dt}{t^{1-\alpha}}$ convergente, donc l'intégrale $\int_0^1 e^{-t}\, t^{x-1}\,dt$ est normalement convergente.

Exercice 1. Montrez que, quelque soient le nombre réel $\alpha > 0$, l'intégrale

$$B(x,y) = \int^1 t^{x-1}\,(1-t)^{y-1}\,dt$$

converge normalement, donc uniformément, tant que les paramètres x, y ne sortent pas du quadrant $\alpha \leq x$; $\alpha \leq y$.

Exercice 2. Soit $\varphi(t)$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$, bornée et intégrable sur tout $[-A, A]$, et telle que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)|\,dt$ soit convergente. Montrez que l'intégrale :

$$(1) \qquad \hat{\varphi}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx}\,\varphi(t)\,dt$$

est uniformément convergente pour $x \in \mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto \hat{\varphi}(x)$ s'appelle <u>la transformée de Fourier</u> de la fonction $t \mapsto \varphi(t)$. Calculez $\hat{\varphi}(x)$ quand $\varphi(t) = e^{-|t|}$.

Exercice 3. Montrez que, pour tout $M > 0$, l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(tx) - \cos(ty)}{t^2}\,dt$$

converge normalement, donc uniformément, pour $0 \leq |x| \leq M$, $0 \leq |y| \leq M$.

Critère d'uniforme convergence d'Abel

Soit a un nombre réel. Soit une fonction dépendant d'un paramètre x :

$$t \mapsto f(t,x) = g(t,x)\,h(t,x)$$

qui, pour tout x, est définie pour t réel $\geq a$. Supposons que :

1°) pour tout x, la fonction $t \mapsto g(t,x)$ est réelle positive, décroissante, a une dérivée première continue pour $t \geq a$, et, quand $t \to +\infty$, tend vers 0 uniformément en x ;

2°) pour tout x, pour tout $A \geq a$, la fonction à valeurs complexes $t \mapsto h(t,x)$ est bornée intégrable sur $[a, A]$;

3°) il existe une constante M indépendante de x telle que, quel que soit $A \geq a$ et quel que soit x,

$$\left| \int_a^A h(t,x)\,dt \right| \leq M.$$

Alors l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t,x)\,dt$ est uniformément convergente.

Démonstration. Recopiez la démonstration du critère d'Abel, Leçon n°11, après avoir modifié les notations conformément au présent énoncé.

L'exemple fondamental de fonction $h(t,x)$ satisfaisant aux conditions 2°) et 3°) est :

$$h(t,x) = e^{itx}$$

[et donc aussi $\cos(tx)$ et $\sin(tx)$], à condition d'imposer que $|x| \geq x_0$, où le nombre x_0 est fixé > 0 (par ailleurs quelconque), car dans ces conditions :

$$\left| \int_a^A e^{itx}\,dt \right| = \left| \frac{e^{ixA} - e^{ixa}}{ix} \right| \leq \frac{|e^{ixA}| + |e^{ixa}|}{|x|} = \frac{2}{|x|} \leq \frac{2}{x_0} = M.$$

Exemple 2. Si $g(t)$ est réelle positive, décroissante, tend vers 0 quand $t \to +\infty$, et admet une dérivée première continue pour $t \geq a$, alors pour tout $x_0 > 0$ l'intégrale

$$\int_a^{+\infty} g(t)\,e^{itx}\,dt$$

converge uniformément tant que $|x| \geq x_0$.

C'est ainsi que, pour tout α réel >0, les intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{t^\alpha} dx$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{t^\alpha} dx$ convergent uniformément quand $|x| \geq x_0 > 0$, où x_0 est fixé, d'après le critère d'Abel. Rappelons que, si $\alpha > 1$, elles convergent même normalement, donc uniformément, sans restriction sur x réel.

Nous allons énoncer maintenant les théorèmes de régularité sous le signe d'intégration (passage à la limite, continuité, dérivation, intégration sous le signe somme). Nous n'en donnerons pas les démonstrations, d'abord parce que le lecteur en a eu une première approche dans le cas plus simple traité à la Leçon n° 3 (Théorèmes 2 et 3 et leurs Corollaires), ensuite parce que le cadre vraiment définitif pour ces théorèmes est celui de l'intégrale de Lebesgue, et sera donc rigoureusement traité à un niveau supérieur. En revanche nous verrons dans les Exemples et Exercices combien ces résultats sont commodes pour obtenir des valeurs précises d'intégrales.

<u>Théorème</u> 1 (passage à la limite sous le signe somme). Soit x un paramètre susceptible de tendre vers x_0 (*). Soit a un nombre réel. Soit $t \mapsto f(t,x)$ une fonction qui, pour tout choix de x, est définie pour $t \geq a$, bornée et intégrable sur tout $[a, A]$. On suppose que :

1°) pour tout $A \geqslant a$ fixé, quand $x \to x_0$, $f(t,x)$ converge <u>uniformément</u> (en t) <u>sur $[a, A]$</u> vers une $g(t)$ (**).

2°) l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t,x)\,dt$ est <u>uniformément</u> (en x) convergente.

Alors l'intégrale $\int_a^{+\infty} g(t)\,dt$ est convergente, et on a :

(*) Par exemple : $x \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ et $x \to x_0$. Ou $x \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, et $x > x_0$, $x \to x_0$. Ou $x \to +\infty$ (donc $x_0 = +\infty$). Ou $x \in \mathbb{N}$ entier ≥ 0 $(x = n)$, $x_0 = +\infty$, et $n \to +\infty$. Ou $x = z$ complexe, $x_0 = z_0 \in \mathbb{C}$ ou $x_0 = \infty$, et $z \to z_0$; etc.... La formulation est vague à dessein.

(**) Ce qui signifie, par exemple si $x \in \mathbb{R} \to x_0 \in \mathbb{R}$, que : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ indépendant de t tel que $|x - x_0| < \eta$ implique que, quel que soit $t \in [a, A]$, on a $|g(t) - f(t,x)| \leqslant \varepsilon$.

$$\int_a^{+\infty} g(t)dt = \lim_{x\to x_0} \int_a^{+\infty} f(t,x)dt,$$

donc, formellement : $\displaystyle\int_a^{+\infty} \lim_{x\to x_0} f(t,x)\,dt = \lim_{x\to x_0} \int_a^{+\infty} f(t,x)dt.$

<u>Corollaire (continuité sous le signe somme)</u> Soit a un nombre réel, et soit E un ensemble ouvert dans $\mathbb{R}$, ou dans $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, ou même dans $\mathbb{R}^p$. Soit $f(t,x)$ une fonction définie dans l'ensemble $[a,+\infty[\times E$ de $\mathbb{R}^{p+1}$ formé des couples (t,x), où t est réel $\geq a$ et $x\in E$. Supposons :

1°) que la fonction $(t,x)\mapsto f(t,x)$ est <u>continue</u> par rapport à l'ensemble des variables (t,x) dans cet ensemble (cf. AN03, Leçon n°2) ;

2°) que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t,x)dt$ est <u>uniformément</u> (en x) convergente.

Alors la fonction $\displaystyle x\mapsto F(x) = \int_a^{+\infty} f(t,x)dt$

est <u>continue</u> dans E.

<u>Théorème</u> 2 (<u>dérivation sous le signe somme</u>) Soit a un nombre réel. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $(t,x)\mapsto f(t,x)$ une fonction définie sur $[a,+\infty[\times I$, telle que :

1°) f est continue, et admet une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ continue, sur $[a,+\infty[\times I$;

2°) pour chaque $x\in I$, l'intégrale $\displaystyle F(x) = \int_a^{+\infty} f(t,x)dt$ est convergente (mais on n'exige pas a priori qu'elle soit uniformément convergente) ;

3°) l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)dt$ est <u>uniformément</u> convergente.

Alors $F(x)$ est dérivable dans I, et on a la formule :

$$\frac{dF}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\int_a^{+\infty} f(t,x)dt\right) = \int_a^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)dt.$$

<u>Théorème</u> 3 (d'interversion de Fubini). Soient a, et $c\leq d$ trois nombres réels. Soit $f(t,x)$ une fonction continue sur $[a,+\infty[\times[c,d]$. Supposons que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t,x)dt$ soit <u>uniformément</u> convergente quand x parcourt le segment $[c,d]$. Alors on a la formule

suivante (où l'intégrale $\int_a^{+\infty}$ du second membre est convergente) :

$$\int_c^d \left(\int_a^{+\infty} f(t,x)\,dt \right) dx = \int_a^{+\infty} \left(\int_c^d f(t,x)\,dx \right) dt .$$

Voyons maintenant, sur des Exemples classiques et des Exercices, comment on utilise ces Théorèmes.

Exemple 3. Calcul de l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$.

La fonction $\frac{\sin t}{t}$ est continue et vaut 1 pour $t = 0$. En la borne $+\infty$, l'intégrale I est convergente (mais pas absolument) d'après le critère d'Abel. Nous allons calculer plus généralement pour tout x réel ≥ 0 :

$$(2) \qquad F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} \frac{\sin t}{t}\,dt ,$$

et obtenir ensuite $I = F(0)$. Procédons par étapes.

1°) Pour tout $x \geq 0$, l'intégrale (2) est convergente. Pour $x = 0$ on applique le critère d'Abel. Pour $x > 0$, elle est absolument convergente car $\left| e^{-tx} \frac{\sin t}{t} \right| \leq e^{-tx}$, et $\int_0^{+\infty} e^{-tx}\,dt = \frac{1}{x}$ converge.

2°) $x \mapsto F(x)$ est continue pour tout $x \geq 0$. En effet :

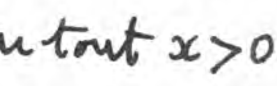
$$F(x) = \int_0^1 e^{-tx} \frac{\sin t}{t}\,dt + \int_1^{+\infty} e^{-tx} \frac{\sin t}{t}\,dt .$$

La première de ces intégrales est continue, d'après le Corollaire du Théorème 2 de la Leçon n° 3, en tout $x \geq 0$; la deuxième intégrale est uniformément convergente, donc continue, pour $x \geq 0$, d'après le critère d'uniforme convergence d'Abel, où l'on fait, pour $t \geq 1$,

$$g(x,t) = \frac{e^{-tx}}{t} \quad ; \quad h(x,t) = \sin t .$$

3°) Par conséquent $I = F(0) = \lim_{x>0,\, x\to 0} F(x)$.

4°) $x \mapsto F(x)$ est dérivable sous le signe somme pour tout $x > 0$. En effet, si un tel x est donné, enfermons-le dans un segment $[x_0, +\infty[$, où x_0 est > 0



(par exemple $x_0 = \frac{x}{2}$). L'intégrale obtenue en dérivant (2) sous le signe somme :

$$\int_0^{+\infty} -e^{-tx}\sin t\, dt$$

est normalement, donc uniformément, convergente quand $x \geq x_0$, car $|-e^{-tx}\sin t| \leq e^{-tx_0}$ et $\int_0^{+\infty} e^{-tx_0} dt$ converge. On peut donc appliquer le Théorème 2, et obtenir pour tout $x>0$ la formule :

$$F'(x) = -\int_0^{+\infty} e^{-tx}\sin t\, dt = -\frac{1}{1+x^2}$$

(cf. Leçon n° 5, Corollaire de la Proposition 1).

5°) Il en résulte en intégrant que, pour tout $x>0$,

$$(3) \qquad F(x) = C - \mathrm{Arc\,tg}\, x,$$

où C est une constante.

6°) $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$, car $|F(x)| \leq \int_0^{+\infty} e^{-tx} dt = \frac{1}{x}$. En faisant tendre x vers $+\infty$ dans (3), on détermine la constante : $C = \frac{\pi}{2}$. Ainsi, pour tout $x>0$, on a : $F(x) = \frac{\pi}{2} - \mathrm{Arc\,tg}\, x$.

7°) Par conséquent $I = F(0) = \lim_{x>0, x\to 0} F(x) = \lim_{x>0, x\to 0} \left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctg}\, x\right) = \frac{\pi}{2}$.

On a ainsi prouvé la formule :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

La beauté de cette formule fait penser qu'elle pourrait être due à Euler. Elle l'est.

<u>Exercice</u> 4. Par dérivation sous le signe somme, calculez :

$$F(x,y) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2} - e^{-yt^2}}{t} dt \qquad \text{pour } x>0,\ y>0.$$

<u>Exercice</u> 5. Reprenez l'Exercice 5 de la Leçon n° 3 en y incluant le cas où $x=0$. Déduisez-en la valeur de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{Log}(\cos t)\, dt$.

<u>Exemple</u> 4. La fonction $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$ est continue, et même indéfiniment dérivable, en tout point $x>0$. En effet enfermons un tel x dans un segment $[\alpha, \beta]$, où $0<\alpha<x<\beta<+\infty$. L'intégrale dérivée p fois terme à terme :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}(\operatorname{Log} t)^p t^{x-1}\,dt = \int_0^1 + \int_1^{+\infty}$$

converge normalement, donc uniformément, pour $\alpha \leq x \leq \beta$, car :

1°) en la borne $+\infty$: $\quad e^{-t}(\operatorname{Log} t)^p t^{x-1} \leq e^{-t}(\operatorname{Log} t)^p t^{\beta-1}$ pour $t \geq 1$

et $\int_1^{+\infty} e^{-t}(\operatorname{Log} t)^p t^{\beta-1}\,dt$ converge ;

2°) en la borne 0 : $\quad e^{-t}(\operatorname{Log} t)^p t^{x-1} \leq (\operatorname{Log} t)^p t^{\alpha-1}$ pour $0 < t \leq 1$

et $\int_0^1 (\operatorname{Log} t)^p t^{\alpha-1}\,dt$ converge. On peut appliquer le Théorème 2, d'où

$$\Gamma^{(p)}(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}(\operatorname{Log} t)^p t^{x-1}\,dt$$

<u>Exemple</u> 5. Calcul des intégrales de Fresnel :

$$J = \int_0^{+\infty} \cos(x^2)\,dx \qquad \text{et} \qquad K = \int_0^{+\infty} \sin(x^2)\,dx .$$

Partons de la valeur connue de l'intégrale de Gauss :

$$G = \int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,du = \frac{\sqrt{\pi}}{2} ,$$

et calculons $I = J - iK = \int_0^{+\infty} e^{-ix^2}\,dx = \lim_{\substack{c>0,\, c\to 0 \\ d\to+\infty}} \int_c^d e^{-ix^2}\,dx .$

Par le changement de variable $u = xt$, on a, pour tout $x > 0$:

$$e^{-ix^2} G = \int_0^{+\infty} e^{-ix^2-u^2}\,du = \int_0^{+\infty} e^{-(t^2+i)x^2}\, x\,dt ,$$

donc, d'après le théorème 3 d'interversion de Fubini [(*)], pour $0 < c < d$:

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\int_c^d e^{-ix^2}\,dx = \int_c^d \left(\int_0^{+\infty} e^{-(t^2+i)x^2} x\,dt \right) dx =$$

$$= \int_0^{+\infty}\left(\int_c^d e^{-(t^2+i)x^2} x\,dx \right) dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(t^2+i)c^2} - e^{-(t^2+i)d^2}}{2(t^2+i)}\,dt$$

$$= \int_0^{+\infty} f(t,c)\,dt - \int_0^{+\infty} f(t,d)\,dt ,$$ en posant pour $\lambda > 0$:

(*) dont l'application est justifiée, car $\int_0^{+\infty} e^{-(t^2+i)x^2} x\,dt$ converge normalement, donc uniformément, pour $c \leq x \leq d$, vu que, dans ces conditions :
$\left| e^{-(t^2+i)x^2} x \right| = e^{-t^2x^2} x \leq d\, e^{-c^2t^2}$ et $\int_0^{+\infty} e^{-c^2t^2}\,dt$ converge.

$$f(t,\lambda) = \frac{e^{-(t^2+i)\lambda^2}}{2(t^2+i)} .$$

On $\lim\limits_{d\to+\infty} f(t,d) = 0$ uniformément en t sur tout $0<a\leq t\leq A$, et $\lim\limits_{c>0,\, c\to 0} f(t,c) = \frac{1}{2(t^2+i)}$ uniformément en t sur tout $0<a\leq t\leq A$.

De plus l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t,\lambda)\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(t^2+i)\lambda^2}}{2(t^2+i)}\,dt$ converge normalement, donc uniformément, pour $\lambda\geq 0$, car

$$\left|\frac{e^{-(t^2+i)\lambda^2}}{2(t^2+i)}\right| = \frac{e^{-\lambda^2t^2}}{2\sqrt{1+t^4}} \leq \frac{1}{2\sqrt{1+t^4}},$$ et $\int_0^{+\infty}\frac{dt}{2\sqrt{1+t^4}}$ converge.

On peut donc appliquer le Théorème 1 et passer à la limite sous le signe somme :

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} I = \lim_{c>0,\, c\to 0}\int_0^{+\infty} f(t,c)\,dt - \lim_{d\to+\infty}\int_0^{+\infty} f(t,d)\,dt =$$

$$= \int_0^{+\infty}\lim_{c\to 0} f(t,c)\,dt - \int_0^{+\infty}\lim_{d\to+\infty} f(t,d)\,dt = \int_0^{+\infty}\frac{dt}{2(t^2+i)} = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{t^2-i}{t^4+1}\,dt,$$

puis, en séparant le réel de l'imaginaire :

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}(J - iK) = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{t^4+1} - i\,\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{dt}{t^4+1} .$$

On calcule facilement que :

$$\int_0^{+\infty}\frac{dt}{t^4+1} = \int_0^{+\infty}\frac{t^2\,dt}{t^4+1} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} ,$$

donc :

$$\int_0^{+\infty}\cos(x^2)\,dx = \int_0^{+\infty}\sin(x^2)\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} .$$

<u>Exercice 6</u>. Prouvez que, pour a et b réels >0, on a

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax} J_0(bx)\,dx = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} ,$$

en remplaçant la fonction de Bessel J_0 par son expression intégrale (Leçon n° 3), puis en appliquant la formule de Fubini.

Indications sur les Exercices proposés dans cette Leçon

Exercice 1. A la borne 0, pour $0 < t \leq \frac{1}{2}$, on a
$$0 \leq t^{x-1}(1-t)^{y-1} \leq C\, t^{\alpha-1}$$
et $\int_0^{1/2} \frac{dt}{t^{1-\alpha}}$ converge. On procède de même à la borne 1.

Exercice 2. $|e^{-itx}\varphi(t)| = |\varphi(t)|$ indépendant de x, et $\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)|\,dt$ converge, donc l'intégrale (1) converge normalement pour $x \in \mathbb{R}$. La fonction $\varphi(t) = e^{-|t|}$ est paire, donc:
$$\hat{\varphi}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|}[\cos(tx) + i\sin(tx)]\,dt = 2\int_0^{+\infty} e^{-t}\cos(tx)\,dt = \frac{2}{1+x^2},$$
d'après l'Exercice 4 de la Leçon n° 11.

Exercice 3. $\cos(tx) = 1 - t^2\frac{x^2}{2!} + t^4\frac{x^4}{4!} + \dots$, et $\cos(ty) = 1 - t^2\frac{y^2}{2!} + t^4\frac{y^4}{4!} + \dots$

Donc, en posant: $f(t;x,y) = \dfrac{\cos(tx) - \cos(ty)}{t^2}$,

pour $0 \leq t \leq 1$, on a $|f(t;x,y)| \leq \frac{|x^2-y^2|}{2!} + \frac{|x^4-y^4|}{4!} + \dots$

est $\leq$ la constante $2\,\mathrm{ch}(M)$. Si $t > 1$, $|f(t;x,y)| \leq \frac{2}{t^2}$. Donc
$$|f(t;x,y)| \leq \varphi(t) = \begin{cases} 2\,\mathrm{ch}(M) & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ \frac{2}{t^2} & \text{si } t > 1 \end{cases}.$$ Or $\int_0^{+\infty}\varphi(t)\,dt$ converge.

Exercice 4. La fonction $f(t;x,y) = \dfrac{e^{-xt^2} - e^{-yt^2}}{t}$ est continue et nulle pour $t=0$. L'intégrale converge en la borne $+\infty$, car, pour $t \geq 1$, $0 \leq |f(t;x,y)| \leq e^{-xt^2} + e^{-yt^2}$, fonction d'intégrale convergente. L'intégrale obtenue en dérivant sous le signe somme par rapport à x est $-\int_0^{+\infty} t\,e^{-xt^2}\,dt = \frac{1}{2x}\int_0^{+\infty} -2xt\,e^{-xt^2}\,dt = -\frac{1}{2x}$; elle converge normalement dans tout $x \geq x_0 > 0$; donc, d'après le Théorème 2:
$\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{1}{2x}$ pour tout $x > 0$, et $F(x,y) = -\frac{1}{2}\operatorname{Log} x + G(y)$. Or $F(y,x) = -F(x,y)$, donc $G(y) = \frac{1}{2}\operatorname{Log} y +$ constante. Par conséquent

$F(x,y) = \frac{1}{2}\operatorname{Log}\frac{y}{x} + C$. Mais $F(x,x)=0$, donc $C=0$. Finalement :

$$F(x,y) = \frac{1}{2}\operatorname{Log}\frac{y}{x}.$$

Exercice 5. On a vu à l'Exercice 5 de la Leçon n° 3 que, pour $x \neq 0$, l'intégrale n'a pas besoin d'être généralisée, et vaut $\pi \operatorname{Log}\frac{1+|x|}{2}$. L'intégrale converge normalement pour $0 \leq x \leq 1$, car, sous cette hypothèse, $\cos^2 t + x^2\sin^2 t \leq 1$, donc $|\operatorname{Log}(\cos^2 t + x^2 \sin^2 t)|$ est $\leqslant$ $|\operatorname{Log}(\cos^2 t)| = 2|\operatorname{Log}(\cos t)| \sim 2|\operatorname{Log}(\frac{\pi}{2}-t)|$ quand $t \to \frac{\pi}{2}$, ce qui prouve que $2\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\operatorname{Log}(\cos t)|dt$ converge. Par conséquent la fonction $F(x)$ est continue même pour $x=0$, et :

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{Log}(\cos t)\,dt = F(0) = \lim_{x>0,\, x\to 0} F(x) = \pi \lim_{x>0,\, x\to 0} \operatorname{Log}\frac{1+x}{2} = -\pi \operatorname{Log} 2.$$

Donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{Log}(\cos t)\,dt = -\frac{\pi}{2}\operatorname{Log} 2.$$

Exercice 6. Par définition $J_0(bx) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(bx\sin t)\,dt$. Donc

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax} J_0(bx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-ax}\left(\int_0^{\pi}\cos(bx\sin t)\,dt\right)dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\int_0^{+\infty} e^{-ax}\cos(b\sin t.x)\,dx\right)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{a\,dt}{a^2+b^2\sin^2 t} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

On a pu appliquer la formule de Fubini, car l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-ax}\cos(b\sin t.x)\,dx$ converge normalement (en t), vu que $|e^{-ax}\cos(b\sin t.x)| \leq e^{-ax}$ indépendant de t, et $\int_0^{+\infty} e^{-ax}dx$ converge.

On a utilisé au passage la primitive classique :

$$\int e^{\alpha x}\cos(\beta x)\,dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}(\alpha\cos\beta x + \beta\sin\beta x) + C,$$

ici avec $\alpha = -a$ et $\beta = b\sin t$. La dernière intégrale se calcule par le changement de variable $u = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}\operatorname{tg} t$.