UNIVERSITÉ DE NANCY I

CENTRE DE TÉLÉ-ENSEIGNEMENT UNIVERSITAIRE DE NANCY II

analyse

MODULE AN 03 :

CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL A PLUSIEURS VARIABLES

COURS DE P. EYMARD

DIPLÔME D'ÉTUDES UNIVERSITAIRES GÉNÉRALES

SCIENCES DES STRUCTURES ET DE LA MATIÈRE

MATHÉMATIQUES PHYSIQUE INFORMATIQUE

SCIENCES DE L'ÉDUCATION

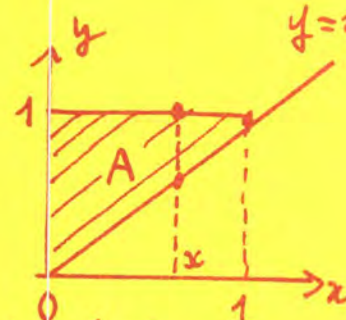
102

ce qui s'écrit encore : $\int\cdots\iint_A f(x_1,\dots,x_{n-1},x_n)\,dx_1\dots dx_{n-1}\,dx_n =$

$$= \int\cdots\int_{A'} \left(\int_{\varphi(x_1,\dots,x_{n-1})}^{\psi(x_1,\dots,x_{n-1})} f(x_1,\dots,x_{n-1};x_n)\,dx_n \right) dx_1\dots dx_{n-1}.$$

Ainsi le calcul d'une intégrale n-uple s'effectue en calculant une intégrale simple en x_n (avec paramètres $x_1,\dots,x_{n-1}$ figurant à la fois sous le signe $\int$ et dans les bornes d'intégration), puis une intégrale $(n-1)$-uple. Si le domaine $(n-1)$-dimensionnel A' est encore du même type que A, on peut recommencer etc..., et ainsi ramener le calcul de $\int\cdots\iint_A f(x_1,\dots,x_n)\,dx_1\dots dx_n$ à une superposition de calculs d'intégrales simples.

Exemple 1. Calculez $I = \iint_A (x^2+y)\,dx\,dy$



où A est le triangle ... Ici $x_1=x$; $x_n=y$; $\varphi(x)=x$; $\psi(x)=1$;

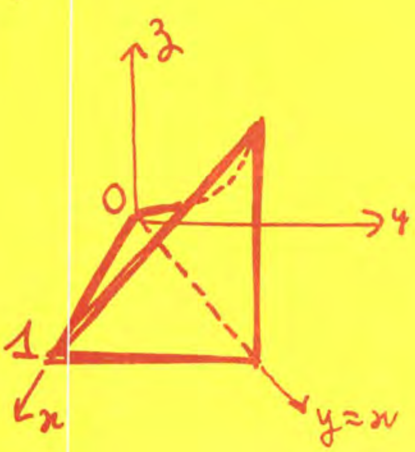
$A' =]0,1[$; et $A = \{(x,y),\ x\in A',\ \varphi(x)<y<\psi(x)\}$.

$$I = \int_0^1 \left(\int_x^1 (x^2+y)\,dy \right) dx = \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{y^2}{2} \right]_{y=x}^{y=1} dx =$$

$$= \int_0^1 \left(x^2 + \frac12 - \dots \right) dx = 5/12$$

Exemple 2. Calculons $J = \iiint_A x^3 y^2 z\,dx\,dy\,dz$, où A est l'ensemble des $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ tels que : $0<x<1$; $0<y<x$; $0<z<xy$. On applique deux fois de suite le théorème de Fubini :

$$J = \iint_{\substack{0<x<1\\0<y<x}} \left(\int_0^{xy} x^3 y^2 z\,dz \right) dx\,dy =$$



$$= \iint_{\substack{0<x<1\\0<y<x}} \left[x^3 y^2 \frac{z^2}{2} \right]_{z=0}^{z=xy} dx\,dy = \dots$$

la matrice de v, on obtient le

<u>Corollaire</u> 1. Reprenons les notations et les hypothèses du Théorème 3, mais notons plutôt l'application $x \mapsto f(x)$ de V dans $\mathbb{R}^p$ en l'écrivant $x \mapsto y = y(x)$, simple changement d'écriture. Elle se décompose en

$$x \mapsto y = y(x) \begin{cases} y_1 = y_1(x_1, \dots\dots, x_n) \\ y_2 = y_2(x_1, \dots\dots, x_n) \\ \vdots \\ y_p = y_p(x_1, \dots\dots, x_n) \end{cases} .$$

De même décomposons l'application $g : V \longrightarrow \mathbb{R}^q$ en

$$y \mapsto g(y) \begin{cases} g_1(y_1, \dots, y_p) \\ g_2(y_1, \dots, y_p) \\ \vdots \\ g_q(y_1, \dots\dots, y_p) \end{cases} .$$

Alors l'application $x \mapsto G(x) = g \circ y(x) = g[y(x)]$ (de V dans $\mathbb{R}^q$) se décompose en

$$x \mapsto g[y(x)] = G(x) \begin{cases} G_1(x_1, \dots, x_n) = g_1[y_1(x_1, \dots, x_n), \dots\dots, y_p(x_1, \dots, x_n)] \\ G_2(x_1, \dots, x_n) = g_2[y_1(x_1, \dots, x_n), \dots\dots, y_p(x_1, \dots, x_n)] \\ \vdots \\ G_q(x_1, \dots, x_n) = g_q[y_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_p(x_1, \dots, x_n)] \end{cases},$$

et les nq dérivées partielles des $G_1, G_2, \dots, G_q$ par rapport aux variables $x_1, x_2, \dots, x_n$ s'obtiennent par les formules de produit matriciel (2) ; pour $i = 1, 2, \dots, q$ et $j = 1, 2, \dots, n$, on a :

$$\boxed{\frac{\partial G_i}{\partial x_j} = \frac{\partial g_i}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_j} + \frac{\partial g_i}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_j} + \dots + \frac{\partial g_i}{\partial y_p}\frac{\partial y_p}{\partial x_j}} .$$

Nous allons étudier quelques <u>cas particuliers</u> fréquemment utilisés de cette règle de calcul des dérivées partielles de "fonctions de fonctions" ou "par changement de variables".

1°) Faisons $n=1$, $p=3$ et $q=1$, et changeons les notations. Soit V un ouvert de $\mathbb{R}^3$ et $f = f(x,y,z) : V \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 dans V. Supposons que

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad z = z(t)$$

soient 3 fonctions à valeurs réelles définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, admettant dans I des dérivées premières continues $x'(t) = \dfrac{dx}{dt}$, $y'(t) = \dfrac{dy}{dt}$, $z'(t) = \dfrac{dz}{dt}$, et prenant leurs valeurs $(x(t), y(t), z(t))$ dans V. Alors on peut former la fonction

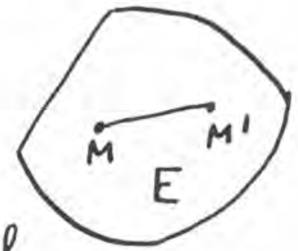
$$t \mapsto F(t) = f(x(t), y(t), z(t))$$

définie sur I, à valeurs réelles. Cette fonction est dérivable dans I et

$$(3) \qquad \boxed{\frac{dF}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}}.$$

Bien entendu on a un énoncé analogue en n variables au lieu de 3.

2°) Disons qu'un ensemble E de $\mathbb{R}^n$ est <u>convexe</u> si, chaque fois que deux points M et M' appartiennent à E, tout point du segment MM' appartient à E. Si, par exemple $n=3$, ceci signifie que :



$(a,b,c) \in E$ et $(a+h, b+k, c+l) \in E$ impliquent que, pour tout nombre réel t tel que $0 \leq t \leq 1$, on a :

$$(a+th, b+tk, c+tl) \in E.$$

Si $f(x,y,z)$ est de classe C^1 dans un ouvert convexe V de $\mathbb{R}^3$, alors, comme cas particulier de (3), la fonction

$$t \mapsto F(t) = f(a+th, b+tk, c+tl)$$

est continûment dérivable sur $[0,1]$ et on a la formule :

$$F'(t) = h\frac{\partial f}{\partial x}(a+th, b+tk, c+tl) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a+th, b+tk, c+tl) + l\frac{\partial f}{\partial z}(a+th, b+tk, c+tl).$$

<u>Définition</u> Si $f = f(x,y,z)$ est différentiable dans un ouvert V de $\mathbb{R}^3$, le vecteur

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right),$$

défini en chaque point de $\mathbb{R}^3$, s'appelle le <u>gradient</u> de la fonction f. On note $\|\nabla f\| = \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2\right]^{1/2}$. Ces définitions s'étendent immédiatement au cas de n variables.

<u>Corollaire 2</u>. Soit V un ouvert <u>convexe</u> de $\mathbb{R}^n$, et soit $f : V \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Supposons que le gradient de f soit de longueur bornée dans V : il existe une constante C telle que

$$\|\nabla f\| = \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2\right]^{1/2} \leqslant C.$$

pour tout $M = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in V$. Alors, quels que soient les points M et M' dans V, on a l'inégalité

$$|f(M') - f(M)| \leqslant C\,d(M, M').$$

<u>Démonstration</u> (pour $n = 3$) Soit $M = (a, b, c)$ et $M' = (a+h, b+k, c+l)$. Introduisons comme ci-dessus la fonction, pour $0 \leq t \leq 1$,

$$F(t) = f(a+th, b+tk, c+tl).$$

On a :

$$|f(M') - f(M)| = |f(a+h, b+k, c+l) - f(a,b,c)| = |F(1) - F(0)|$$

$$= \left|\int_0^1 F'(t)\,dt\right| =$$

$$= \left|\int_0^1 \left[h\frac{\partial f}{\partial x}(a+th, b+tk, c+tl) + k\frac{\partial f}{\partial y}(\ ,\ ,\ ) + l\frac{\partial f}{\partial z}(\ ,\ ,\ )\right]\right| dt$$

$$\leqslant \sqrt{h^2+k^2+l^2}\int_0^1 \|\nabla f\|(a+th, b+tk, c+tl)\,dt \leq C\,d(M, M'),$$

d'après l'inégalité de Schwarz.

<u>Application au calcul des erreurs</u> : Sous les hypothèses du

Corollaire 2, supposons que la position d'un certain point M de V ne soit pas connue exactement, mais qu'on en connaisse une <u>valeur approchée</u> M', et qu'on sache que <u>l'erreur</u> $d(M', M)$ est $\leq \varepsilon$. Alors l'erreur $|f(M') - f(M)|$ qu'on commet en calculant $f(M')$ au lieu de $f(M)$ est $\leq C\varepsilon$, où $C = \sup_V \|\nabla f\|$.

<u>Exercice 3</u>. Montrez que, si $x = 1{,}32 \pm 10^{-2}$ et $y = 0{,}45 \pm 10^{-2}$, alors $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)} = 0{,}14 \pm 10^{-2}$.

<u>Application aux applications contractantes</u>, <u>au théorème du point fixe, et à la méthode des approximations successives</u>.

Soit E un ensemble fermé dans $\mathbb{R}^n$, et soit U un ensemble ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$, tels que E soit inclus dans U. Soit f une application de U dans U, de classe C^1 dans U, et qui applique E dans E. En passant aux composantes, soit

$$x \mapsto f(x) \begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

Supposons qu'il existe une constante $k < 1$ telle que, pour tout $x \in U$, on ait $\displaystyle\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right|^2 \leq k^2$.

Alors f est dans E <u>contractante</u> de rapport k, donc (Leçon n° 2, Théorème 3) l'équation $a = f(a)$ possède dans E une solution et une seule, et cette solution peut s'obtenir par la méthode d'itération.

En effet, en appliquant le Corollaire 2 à chaque f_i, on a :

$$d[f(x'), f(x)]^2 = \sum_{i=1}^n |f_i(x') - f_i(x)|^2 \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)^2 [d(x', x)]^2.$$

<u>Exercice 4</u>. Reprendre l'Exercice 6 de la Leçon n° 1, en considérant l'application $(x, y) \mapsto (X, Y)$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$:

$$X = \tfrac{1}{2} y + 1 \quad ; \quad Y = \tfrac{1}{2} x$$

et en montrant d'abord qu'elle est contractante.

3°) Etudions maintenant le cas particulier du Théorème 3 et du Corollaire 1 où l'on suppose $n=p=q$ et $g=f^{-1}=$ l'application réciproque de f. Il s'agit en somme de généraliser AN01, Leçon n°6, §II, Proposition 2.

Soit donc U un ensemble ouvert dans un $\mathbb{R}^n$ des $x=(x_1,\dots,x_n)$, et soit V un ensemble ouvert dans un $\mathbb{R}^n$ des $y=(y_1,\dots,y_n)$. Considérons une application $x\mapsto y=f(x)$ bijective de U sur V, ce qui signifie que, quel que soit $y\in V$, il existe un $x\in U$ et un seul tel que $y=f(x)$. Cet x, notons-le $x=f^{-1}(y)$. Ainsi est définie une application, bijective elle-aussi, notée f^{-1}, de V sur U, qu'on appelle l'application réciproque (ou la transformation inverse) de f. On a $f^{-1}\circ f=$ l'application identique de U sur U, et $f\circ f^{-1}=$ l'application identique de V sur V. Si g est une application bijective de V sur un troisième ouvert d'un $\mathbb{R}^n$, alors $g\circ f$ est bijective de U sur W, et $(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$.

Le cas le plus intéressant est celui où f est bijective de U sur V, où f est de classe C^1 dans U et f^{-1} de classe C^1 dans V. On dit alors que $x\mapsto y=f(x)$ est un difféomorphisme de U sur V, ou encore que $(x_1,\dots,x_n)\mapsto(y_1,\dots,y_n)$ est un changement de variables (ou de coordonnées). Puisque la matrice jacobienne de l'application identique est évidemment la matrice-identité $I=\begin{pmatrix}1 & & 0\\ & 1 & \\ 0 & & \ddots\ 1\end{pmatrix}$, il résulte du Théorème 3 que

Corollaire 3. Si f est un difféomorphisme, la matrice jacobienne de f^{-1} est la matrice inverse de la matrice jacobienne de f.

Exercice 4. Reconsidérez l'Exercice 2 dans cet esprit.

Définition. Si f est un difféomorphisme, on appelle jacobien (ou déterminant fonctionnel) de f, et on note

$\dfrac{Df}{Dx}$ ou $\dfrac{D(f_1,\cdots,f_n)}{D(x_1,\cdots,x_n)}$, le déterminant de la matrice jacobienne de f, c'est-à-dire le déterminant $\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$.
C'est une fonction jamais nulle sur U. Le jacobien de f^{-1} au point $y = f(x)$ n'est autre que le nombre $1 \Big/ \dfrac{Df}{Dx}$. De plus la composition des matrices jacobiennes (Corollaire 1) se traduit par la multiplication des jacobiens : si $G(x) = g[y(x)]$, on a

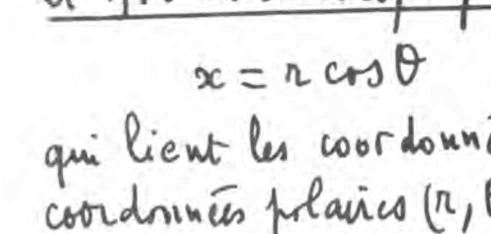
$$\frac{D(G_1,\cdots,G_n)}{D(x_1,\cdots,x_n)} = \frac{D(g_1,\cdots,g_n)}{D(y_1,\cdots,y_n)} \, \frac{D(y_1,\cdots,y_n)}{D(x_1,\cdots,x_n)}$$

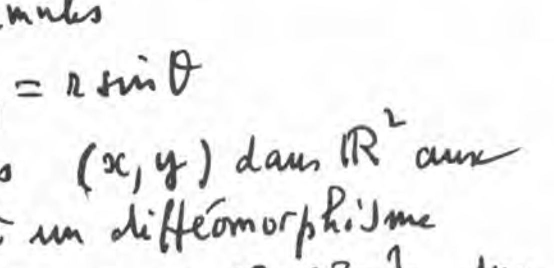
La notion de jacobien sera fondamentale dans l'étude des fonctions implicites, et dans la théorie du changement de variables dans les intégrales multiples.

4°) Expression des dérivées partielles en coordonnées polaires et formules réciproques. Les formules

$$x = r\cos\theta \qquad\qquad y = r\sin\theta$$

qui lient les coordonnées cartésiennes (x, y) dans $\mathbb{R}^2$ aux coordonnées polaires (r, θ) définissent un difféomorphisme $(r,\theta) \mapsto (x,y)$ de l'ouvert $U = \{r > 0 \;;\; 0 < \theta < 2\pi\}$ sur





l'ouvert $V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2$ privé de l'axe $Ox'\}$. Sa matrice jacobienne est :

$$(4) \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{r} & -y \\ \frac{y}{r} & x \end{pmatrix}$$

et le jacobien vaut $r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r$, donc

$$\boxed{\frac{D(x,y)}{D(r,\theta)} = r} .$$

La matrice jacobienne de l'application réciproque $(x,y) \mapsto (r,\theta)$ est l'inverse de la précédente, donc

$$(5)\quad \begin{pmatrix} \dfrac{\partial r}{\partial x} & \dfrac{\partial r}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial \theta}{\partial x} & \dfrac{\partial \theta}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\[2ex] -\dfrac{\sin\theta}{r} & \dfrac{\cos\theta}{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{x}{r} & \dfrac{y}{r} \\[2ex] -y & x \end{pmatrix}$$

Une fonction $f(x,y)$ peut s'exprimer en passant aux coordonnées polaires, et devient :

$$F(r,\theta) = f(x,y) = f(r\cos\theta, r\sin\theta) .$$

C'est un cas particulier $(n=p=2\ ;\ q=1)$ du Corollaire 1 :

$$\begin{tikzcd} (r,\theta) \arrow[r, mapsto] \arrow[rr, bend right, "F(r,\theta)"'] & (x,y) \arrow[r, mapsto] & f(x,y) \end{tikzcd} .$$

En appliquant ce Corollaire [ou en multipliant la matrice jacobienne (4) à gauche par le vecteur-ligne $\left(\frac{\partial f}{\partial x} \ \ \frac{\partial f}{\partial y}\right)$], on obtient les formules

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial r} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial r} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial r} \\[2ex] \dfrac{\partial F}{\partial \theta} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial \theta} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{cases} ,$$

c'est-à-dire :

$$(6)\quad \boxed{\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial r} = \dfrac{x}{r}\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{y}{r}\dfrac{\partial f}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial F}{\partial \theta} = -y\dfrac{\partial f}{\partial x} + x\dfrac{\partial f}{\partial y} \end{cases}}$$

De même on déduit de (5) par le Corollaire 1 [ou de (6) par combinaisons linéaires simples et élimination] les formules réciproques :

$$(7)\quad \boxed{\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \cos\theta \dfrac{\partial F}{\partial r} - \dfrac{\sin\theta}{r}\dfrac{\partial F}{\partial \theta} \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} = \sin\theta \dfrac{\partial F}{\partial r} + \dfrac{\cos\theta}{r}\dfrac{\partial F}{\partial \theta} \end{cases}} \, .$$

De (7) on tire la formule :

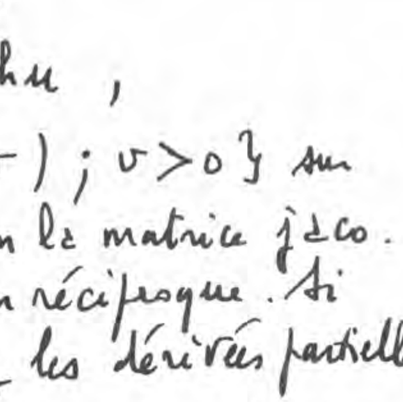
$$(8)\qquad \|\nabla f\|^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial F}{\partial \theta}\right)^2$$

<u>Exercice</u> 6. Montrez que $(u,v) \mapsto (x,y)$, où

$$x = v \operatorname{ch} u \quad , \qquad y = v \operatorname{sh} u \ ,$$

est un difféomorphisme de l'ouvert $U = \{(u,v)\ ;\ v > 0\}$ sur l'ouvert $V = \{(x,y)\ ;\ x^2 - y^2 > 0\}$. Calculez-en la matrice jacobienne, le jacobien, la jacobienne de l'application réciproque. Si $F(u,v) = f(x,y) = f(v\operatorname{ch} u, v \operatorname{sh} u)$, exprimez les dérivées partielles $\frac{\partial F}{\partial u}, \frac{\partial F}{\partial v}$ en fonction de $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$, et réciproquement. Exprimez $\|\nabla f\|^2$ à l'aide de F.

5.) On étend immédiatement ce qui précède au cas des <u>coordonnées cylindriques</u> dans $\mathbb{R}^3$:



$$x = r\cos\theta \ , \quad y = r\sin\theta \ , \quad z = z \ .$$

Par exemple la matrice jacobienne de $(r,\theta,z) \mapsto (x,y,z)$ est la matrice :

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

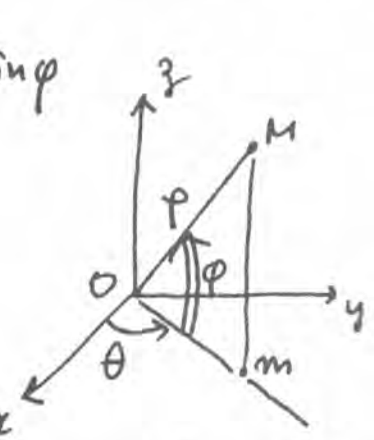
Le jacobien vaut r ; et, si $F(r,\theta,z) = f(x,y,z) = f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)$:

$$\frac{\partial F}{\partial r} = \frac{x}{r}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{y}{r}\frac{\partial f}{\partial y} \ ; \quad \frac{\partial F}{\partial \theta} = -y\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y} \ ; \quad \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial z} \ ;$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos\theta\frac{\partial F}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta} \ ; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \sin\theta\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta} \ ; \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial F}{\partial z} \, .$$

6) <u>Expression des dérivées partielles en coordonnés sphériques dans $\mathbb{R}^3$ et formules réciproques</u>. Les formules

$$x = \rho\cos\varphi\cos\theta \quad , \quad y = \rho\cos\varphi\sin\theta \quad , \quad z = \rho\sin\varphi$$



qui lient les coordonnées (x, y, z) cartésiennes dans $\mathbb{R}^3$ aux coordonnées sphériques (ρ, θ, z) définissent un difféomorphisme de l'ouvert

$$U = \left\{ \rho > 0 \; ; \; 0 < \theta < 2\pi \; ; \; -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2} \right\}$$

sur l'ouvert $\{\mathbb{R}^3$ des (x, y, z) privé du demi-plan $y = 0$, $x \geq 0\}$. La jacobienne de $(\rho, \theta, \varphi) \mapsto (x, y, z)$ est la matrice

$$J = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\theta & -\rho\cos\varphi\sin\theta & -\rho\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi & 0 & \rho\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Donc, si pour une fonction $f(x, y, z)$ on pose

$$F(\rho, \theta, \varphi) = f(x, y, z) = f(\rho\cos\varphi\cos\theta, \rho\cos\varphi\sin\theta, \rho\sin\varphi),$$

on déduit du Corollaire 1 les formules:

$$(9) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial \rho} = \cos\varphi\cos\theta \dfrac{\partial f}{\partial x} + \cos\varphi\sin\theta \dfrac{\partial f}{\partial y} + \sin\varphi \dfrac{\partial f}{\partial z} \\ \dfrac{\partial F}{\partial \theta} = -\rho\cos\varphi\sin\theta \dfrac{\partial f}{\partial x} + \rho\cos\varphi\cos\theta \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial F}{\partial \varphi} = -\rho\sin\varphi\cos\theta \dfrac{\partial f}{\partial x} - \rho\sin\varphi\sin\theta \dfrac{\partial f}{\partial y} + \rho\cos\varphi \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{cases}$$

Remarquons que la matrice jacobienne J est égale au produit

$$J = QD = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\theta & -\sin\theta & -\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi\sin\theta & \cos\theta & -\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & \rho \end{pmatrix}.$$

Or la matrice Q a ses vecteurs-colonnes orthonormés ; c'est donc une matrice <u>orthogonale</u> ; par suite son inverse Q^{-1} égale sa transposée, c'est-à-dire $Q^{-1} = Q^*$, où Q^* se déduit de Q en échangeant les lignes et les colonnes. De plus la matrice diagonale D est aussi très facile à inverser. On en déduit la matrice jacobienne J^{-1} de $(x,y,z) \longmapsto (\rho,\theta,\varphi)$:

$$J^{-1} = D^{-1}Q^{-1} = D^{-1}Q^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho\cos\varphi} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\rho} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\theta & \cos\varphi\sin\theta & \sin\varphi \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ -\sin\varphi\cos\theta & -\sin\varphi\sin\theta & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

soit

$$J^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\theta & \cos\varphi\sin\theta & \sin\varphi \\ -\frac{\sin\theta}{\rho\cos\varphi} & \frac{\cos\theta}{\rho\cos\varphi} & 0 \\ -\frac{\sin\varphi\cos\theta}{\rho} & -\frac{\sin\varphi\sin\theta}{\rho} & \frac{\cos\varphi}{\rho} \end{pmatrix}.$$

Par le Corollaire 1 on en tire les formules réciproques de (9) :

$$(10) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \cos\varphi\cos\theta \dfrac{\partial F}{\partial \rho} - \dfrac{\sin\theta}{\rho\cos\varphi}\dfrac{\partial F}{\partial\theta} - \dfrac{\sin\varphi\cos\theta}{\rho}\dfrac{\partial F}{\partial\varphi} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \cos\varphi\sin\theta\dfrac{\partial F}{\partial\rho} + \dfrac{\cos\theta}{\rho\cos\varphi}\dfrac{\partial F}{\partial\theta} - \dfrac{\sin\varphi\sin\theta}{\rho}\dfrac{\partial F}{\partial\varphi} \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = \sin\varphi\dfrac{\partial F}{\partial\rho} + \dfrac{\cos\varphi}{\rho}\dfrac{\partial F}{\partial\varphi} \end{cases}.$$

On a aussi $\dfrac{D(x,y,z)}{D(\rho,\theta,\varphi)} = \det J = \det Q \det D = 1 \times \rho^2\cos\varphi$

donc

$$(11) \quad \boxed{\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\theta,\varphi)} = \rho^2\cos\varphi}.$$

Sur (10) on constate que

$$(12) \quad \|\nabla f\|^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 = \left(\frac{\partial F}{\partial\rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2\cos^2\varphi}\left(\frac{\partial F}{\partial\theta}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial F}{\partial\varphi}\right)^2.$$

§4. Indications sur les Exercices proposés dans les Leçons n° 3 et n° 4

Exercice 1 $\quad X + iY = (x+iy)^3 = x^3 + 3ix^2y + 3i^2xy^2 + i^3y^3$, donc

$X = x^3 - 3xy^2$, $Y = 3x^2y - y^3$. Par suite :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial X}{\partial x} & \frac{\partial X}{\partial y} \\ \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial y} \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x^2 - y^2 & -2xy \\ 2xy & x^2 - y^2 \end{pmatrix}.$$

<u>Exercices 2 et 5</u>. On a $\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{x}{\rho}$, $\frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{y}{\rho}$, $\frac{\partial \rho}{\partial z} = \frac{z}{\rho}$. Or $X = \frac{x}{\rho^2}$, $Y = \frac{y}{\rho^2}$, $Z = \frac{z}{\rho^2}$, donc :

$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{1}{\rho^2} - \frac{2x^2}{\rho^4}$, $\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{-2xy}{\rho^4}$, $\frac{\partial X}{\partial z} = \frac{-2xz}{\rho^4}$, et les formules analogues. La matrice jacobienne de $(x,y,z) \mapsto (X,Y,Z)$ est

$$\frac{1}{\rho^4} \begin{pmatrix} y^2+z^2-x^2 & -2xy & -2xz \\ -2xy & z^2+x^2-y^2 & -2yz \\ -2xz & -2yz & x^2+y^2-z^2 \end{pmatrix}.$$

Par calculs on vérifie que le produit de cette matrice par elle-même est la matrice identique. Ceci pouvait être prévu par le Théorème 3, car la transformation f étudiée, inversion de pôle O, est involutive, c'est-à-dire $f \circ f =$ l'identité.

<u>Exercice 3</u> $\frac{\partial f}{\partial x} = -2x\,e^{-(x^2+y^2)}$; $\frac{\partial f}{\partial y} = -2y\,e^{-(x^2+y^2)}$, donc $\|\nabla f\|^2 = 4(x^2+y^2)\,e^{-2(x^2+y^2)}$ et $\|\nabla f\| = 2r\,e^{-r^2} \leq \frac{\sqrt{2}}{e} = C < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

<u>Exercice 6</u>. $J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v\,\mathrm{sh}u & \mathrm{ch}u \\ v\,\mathrm{ch}u & \mathrm{sh}u \end{pmatrix}$; $\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = -v$.

$J^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{\mathrm{sh}u}{v} & \frac{\mathrm{ch}u}{v} \\ \mathrm{ch}u & -\mathrm{sh}u \end{pmatrix}$. On a les formules :

$\frac{\partial F}{\partial u} = y\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y}$; $\frac{\partial F}{\partial v} = \frac{x}{v}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{y}{v}\frac{\partial f}{\partial y}$;

$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\mathrm{sh}u}{v}\frac{\partial F}{\partial u} + \mathrm{ch}u\frac{\partial F}{\partial v}$; $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\mathrm{ch}u}{v}\frac{\partial F}{\partial u} - \mathrm{sh}u\frac{\partial F}{\partial v}$;

$\|\nabla f\|^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = \mathrm{ch}2u\left[\left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)^2 + \frac{1}{v^2}\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)^2\right] - 2\frac{\mathrm{sh}2u}{v}\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial F}{\partial v}$.

AN03 Leçon n°5

Dérivées partielles d'ordre supérieur

Soit $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ une fonction à valeurs réelles, définie et de classe C^1 dans un sous-ensemble ouvert U de $\mathbb{R}^n$. Alors, pour tout $i = 1, 2, \dots, n$, la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ est elle-même une fonction définie sur U ; si elle existe, la dérivée partielle de cette fonction par rapport à la variable x_j est notée :

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \quad \text{ou} \quad f''_{x_i x_j} \quad ,$$

qu'on simplifie en :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \quad \text{ou} \quad f''_{x_i^2}$$

si $i = j$. Ainsi viennent d'être définies les <u>dérivées partielles secondes</u> (ou d'ordre 2) de f. En recommençant, si elles existent, on définit les dérivées partielles d'ordre 3 et, plus généralement, <u>d'ordre p</u>, qu'on note :

$$\frac{\partial^p f}{\partial x_{i_p} \partial x_{i_{p-1}} \dots \partial x_{i_2} \partial x_{i_1}} \quad \text{ou} \quad f^{(p)}_{x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_p}}$$

en indiquant la succession des variables par rapport auxquelles on effectue les dérivations.

Prenons par exemple $n = 2$. La fonction

$$f(x, y) = x^3 y^4 + 4x^2 y^3$$

a pour dérivées partielles premières :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 y^4 + 8xy^3 \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 4x^3 y^3 + 12x^2 y^2$$

et pour dérivées partielles secondes :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6xy^4 + 8y^3 \quad ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 12x^2 y^3 + 24xy^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 12x^2 y^3 + 24xy^2 \; ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12x^3 y^2 + 24x^2 y$$

On constate sur cet exemple que $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$. La fonction proposée n'était pas spécialement symétrique en x, y ; la propriété mise en évidence n'est sans doute pas fortuite. De fait :

<u>Théorème 1</u> (de Schwarz). Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2, c'est-à-dire admettant dans U des dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre 2. Alors :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} .$$

<u>Démonstration</u>. Soit $(a, b) \in U$. Soient h et k des nombres réels assez petits pour que, quel que soit $0 \leq t \leq 1$, le point $(a+th, b+tk)$ soit encore dans U. Pour $0 \leq t \leq 1$, posons :

$$\begin{cases} F(t) = f(a+th, b+k) - f(a+th, b) \\ G(t) = f(a+h, b+tk) - f(a, b+tk) \end{cases} .$$

On constate que $F(1) - F(0) = G(1) - G(0)$,

car ces deux nombres sont égaux à

$$f(a+h, b+k) - f(a+h, b) - f(a, b+k) + f(a, b).$$

De plus on a vu à la leçon précédente que :

$$\begin{cases} F'(t) = h\, f'_x(a+th, b+k) - h\, f'_x(a+th, b) \\ G'(t) = k\, f'_y(a+h, b+tk) - k\, f'_y(a, b+tk) \end{cases}$$

D'après le théorème des accroissements finis, il existe un nombre $0 < \theta_1 < 1$ tel que

$$F(1) - F(0) = F'(\theta_1) = h \left[f'_x(a+\theta_1 h, b+k) - f'_x(a+\theta_1 h, b) \right] .$$

Dans le crochet on peut appliquer à nouveau le théorème des accroissements finis à la fonction $y \mapsto f'_x(a+\theta_1 h, y)$ entre les valeurs $y = b$ et $y = b+k$; cette fonction a pour dérivée par rapport à y la fonction $y \mapsto f''_{xy}(a+\theta_1 h, y)$. Par conséquent il existe un nombre $0 < \theta_2 < 1$ tel que :

$$F(1) - F(0) = hk\, f''_{xy}(a+\theta_1 h, b+\theta_2 k).$$

Procédant de même avec la fonction G, on prouve l'existence de deux nombres $0<\theta_3<1$ et $0<\theta_4<1$ tels que

$$G(1) - G(0) = kh\, f''_{yx}(a+\theta_4 h, b+\theta_3 k).$$

Par conséquent, pour $h \neq 0$ et $k \neq 0$,

$$f''_{xy}(a+\theta_1 h, b+\theta_2 k) = f''_{yx}(a+\theta_4 h, b+\theta_3 k).$$

Quand $(h,k) \neq (0,0)$ tend vers $(0,0)$, grâce à l'hypothèse de continuité des dérivées partielles secondes on obtient à la limite :

$$f''_{xy}(a,b) = f''_{yx}(a,b).$$

<u>Corollaire</u>. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction <u>de classe C^p</u>, c'est-à-dire admettant dans U des dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre p. Alors on ne change pas la fonction

$$\frac{\partial^p f}{\partial x_{i_p}\, \partial x_{i_{p-1}} \cdots\cdots \partial x_{i_2}\, \partial x_{i_1}}$$

quand on permute l'ordre des variables au dénominateur.

En effet toute permutation est un produit de transpositions, c'est-à-dire d'échanges entre deux variables seulement, les autres restant fixes ; on applique le théorème de Schwarz à une fonction de ces deux variables, les autres restant fixes.

Par exemple les fonctions suivantes sont égales :

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\, \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial y\, \partial x^2} = \frac{\partial^3 f}{\partial x\, \partial y\, \partial x}.$$

<u>Formule de Taylor des fonctions de plusieurs variables</u>

Avant tout le lecteur est invité à relire AN 01, Leçon n° 6, § V, qui traitait du cas d'une seule variable. Nous étudierons la question dans le cas de <u>deux</u> variables, et n'énoncerons qu'à la fin la formule à n variables, qui se démontre de façon analogue.

Lemme. Soit U un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^p dans U. Soit $(a,b) \in U$. Pour h et k des nombres réels donnés assez petits, la fonction d'une variable

$$t \longmapsto F(t) = f(a+th,\ b+tk)$$

est définie pour $0 \le t \le 1$, et admet des dérivées continues jusqu'à l'ordre p, qui sont définies par les formules :

$$F'(t) = h\frac{\partial f}{\partial x}(a+th, b+tk) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a+th, b+tk) \ ;$$

$$F''(t) = h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a+th, b+tk) + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(a+th, b+tk) + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a+th, b+tk);$$

etc ......

$$F^{(p)}(t) = \sum_{m+n=p} \frac{p!}{m!\,n!} h^m k^n \frac{\partial^p f}{\partial x^m \partial y^n}(a+th, b+tk).$$

On peut donc écrire de manière symbolique

$$F^{(p)}(t) = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(p)} f(a+th, b+tk),$$

où la puissance symbolique se développe comme le binôme de Newton :

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(p)} = \sum_{m+n=p} \frac{p!}{m!\,n!} h^m k^n \frac{\partial^p}{\partial x^m \partial y^n}.$$

Démonstration. La formule donnant $F'(t)$:

$$F'(t) = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right) f(a+th, b+tk)$$

a été obtenue à la précédente Leçon comme cas particulier du Théorème II et de son Corollaire 1. On obtiendra $F^{(p)}(t)$ en appliquant p fois de suite le symbole $\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)$. Mais la formule du binôme de Newton :

$$(1) \qquad (A+B)^p = \sum_{m+n=p} \frac{p!}{m!\,n!} A^m B^n$$

n'est pas seulement valable quand A et B sont des nombres, mais plus généralement chaque fois que A et B sont pris dans un anneau commutatif, c'est-à-dire un ensemble muni d'une addition $(A, B) \mapsto A+B$, d'une multiplication $(A, B) \mapsto AB$, associatives, commutatives, et jouissent de la propriété de distributivité $A(B+C) = AB + AC$. La démonstration de (1) se fait alors par récurrence sur p, exactement comme si A et B étaient des nombres, et s'appuie essentiellement sur la propriété bien connue du triangle arithmétique de Pascal : pour $m+n=p$,

$$\frac{(p-1)!}{(m-1)!\,n!} + \frac{(p-1)!}{m!\,(n-1)!} = \frac{p!}{m!\,n!} .$$

Pour vous-même réécrivez la démonstration de (1) dans ce contexte plus général ! Or, dans (1) on peut fort bien prendre $A = h\dfrac{\partial}{\partial x}$ et $B = k\dfrac{\partial}{\partial y}$, car le théorème de Schwarz assure que $AB = BA$.

Théorème 2 (formule de Taylor à deux variables). Soit U un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^2$, et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^{p+1} dans U. Soit $(a,b) \in U$, et soient h et k des nombres réels assez petits pour que les points $(a+th, b+tk)$ pour $0 \leq t \leq 1$ soient dans U. Alors on a la formule (de Taylor à l'ordre p) :

$$f(a+h, b+k) = f(a,b) + h\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) +$$
$$+ \frac{1}{2!}\left[h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)\right] +$$
$$+ \text{etc} \ldots\ldots$$
$$+ \frac{1}{p!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(p)} f(a,b) +$$
$$+ \frac{1}{(p+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(p+1)} f(a+\theta h, b+\theta k),$$

où θ est un nombre réel tel que $0 < \theta < 1$.

Démonstration. Compte-tenu du Lemme, il suffit d'appliquer à la fonction d'une variable $t \mapsto F(t) = f(a+th, b+tk)$ la formule de Taylor (AN01, Leçon n°6, § V, Théorème 2) :

$$F(1) = F(0) + \frac{1}{1!}F'(0) + \frac{1}{2!}F''(0) + \cdots + \frac{1}{p!}F^{(p)}(0) + \frac{1}{(p+1)!}F^{(p+1)}(\theta)$$

où $0<\theta<1$.

Généralisation : Pour les fonctions à n variables on a une formule de Taylor formellement analogue :

$$f(a_1+h_1, \dots, a_n+h_n) = f(a_1, \dots, a_n) +$$
$$+ \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k!}\left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + h_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{(k)} f(a_1, \dots, a_n)$$
$$+ \frac{1}{(p+1)!}\left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + h_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{(p+1)} f(a_1+\theta h_1, \dots, a_n+\theta h_n),$$

avec $0<\theta<1$. Les puissances symboliques $\left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + h_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{(k)}$ se développent selon les règles du calcul algébrique usuel.

Remarque : La formule de Taylor-Young à une variable (cf AN01, Leçon n°10, § II, Théorème 1) admet la généralisation suivante :

Formule de Taylor-Young à n variables. Soit U un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soit $a=(a_1, \dots, a_n)$ un point de U. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^{p-1} dans U, dont chaque dérivée partielle d'ordre $p-1$ soit une fonction différentiable au point a. Alors, dès que $h=(h_1, \dots, h_n)$ est assez petit, on a :

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k!}\left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + h_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{(k)} f(a) + \varepsilon(h)\,\|h\|^p,$$

où $\varepsilon(h)$ tend vers 0 quand $\|h\|$ tend vers 0.

Exercice 1. Ecrire le développement de Taylor-Young à l'ordre 2 au voisinage de $(0,0)$ pour la fonction $f(x,y) = \frac{e^x}{\cos y}$. En déduire la limite de $\frac{e^x - (1+x)\cos y}{(x^2+y^2)\cos y}$ quand (x,y) tend vers $(0,0)$.

Dérivées d'ordre supérieur des fonctions composées

On les obtient en appliquant plusieurs fois de suite les principes exposés pour le premier ordre au § 3 de la précédente Leçon. Nous traiterons quelques exemples.

1°) Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, et $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^2. Soit $t \mapsto (x(t), y(t))$ une fonction de classe C^2 dans un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans U. On demande de calculer la dérivée seconde de

$$t \mapsto F(t) = f\left(x(t), y(t)\right).$$

On a déjà vu que :
$$F'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\, x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\, y'(t).$$

Par la même règle, on obtient

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\, x'(t)\right) = \frac{\partial f}{\partial x}\, x''(t) + \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right] x'(t) =$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x}\, x''(t) + \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\, x'(t) + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\, y'(t)\right] x'(t),$$

et de même

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\, y'(t)\right) = \frac{\partial f}{\partial y}\, y''(t) + \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\, x'(t) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\, y'(t)\right] y'(t),$$

d'où, en additionnant :

$$F''(t) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\, x'^2(t) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\, x'(t) y'(t) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\, y'^2(t) +$$
$$+ \frac{\partial f}{\partial x}\, x''(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\, y''(t).$$

<u>Exercice</u> 2. Soit $f(x, y)$ une fonction de classe C^2 au voisinage du cercle $x^2 + y^2 = 1$. On pose $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 0) = a$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, 0) = b$. Pour tout nombre réel θ, soit $F(\theta) = f(\cos\theta, \sin\theta)$. Calculez $F''(0)$ en fonction de a et b.

2°) Dérivées partielles secondes et <u>coordonnées polaires</u>.

Si $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$, et si on pose

$$F(r,\theta) = f(x,y) = f(r\cos\theta, r\sin\theta) \quad ,$$

on demande d'exprimer $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ à l'aide des dérivées partielles jusqu'à l'ordre 2 de la fonction F par rapport aux variables r et θ. A la leçon n° 4 on a établi les formules (7) :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \cos\theta \frac{\partial F}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \sin\theta \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta} \end{cases}$$

En réitérant la première formule, il vient :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) =$$

$$= \left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\left[\cos\theta\frac{\partial F}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial F}{\partial\theta}\right]$$

$$= \cos\theta\frac{\partial G}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial G}{\partial\theta} \quad , \text{ en notant provisoirement :}$$

$$G(r,\theta) = \cos\theta\frac{\partial F}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial F}{\partial\theta} .$$

Sur cette dernière formule, on calcule que :

$$\begin{cases} \frac{\partial G}{\partial r} = \cos\theta\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{\sin\theta}{r^2}\frac{\partial F}{\partial\theta} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial^2 F}{\partial r\partial\theta} \\ \frac{\partial G}{\partial\theta} = -\sin\theta\frac{\partial F}{\partial r} + \cos\theta\frac{\partial^2 F}{\partial\theta\partial r} - \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial F}{\partial\theta} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial^2 F}{\partial\theta^2} \end{cases} ,$$

ce qui donne, en calculant $\cos\theta\frac{\partial G}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial G}{\partial\theta}$, la formule :

$$(2) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \cos^2\theta\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{\sin^2\theta}{r}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{\sin^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial\theta^2} - \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2 F}{\partial r\partial\theta} + \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial F}{\partial\theta} .$$

En procédant de même, démontrez les formules :

$$(3) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \sin^2\theta\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{\cos^2\theta}{r}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{\cos^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial\theta^2} + \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2 F}{\partial r\partial\theta} - \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial F}{\partial\theta} ;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \sin\theta\cos\theta\left(\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} - \frac{\partial F}{\partial r} - \frac{\partial^2 F}{\partial\theta^2}\right) + \frac{\cos 2\theta}{r}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial r\partial\theta} - \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial\theta}\right).$$

Expression du Laplacien en coordonnées polaires, cylindriques, sphériques.

Si $f = f(x,y)$ est une fonction de classe C^2, la fonction

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

s'appelle le Laplacien de f. On pose de même, en 3 variables, si $f = f(x,y,z)$,

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Les fonctions f telles que $\Delta f \equiv 0$ sont les fonctions harmoniques (ou potentiels) ; elles sont importantes pour la Physique.

1) En coordonnées polaires dans $\mathbb{R}^2$:

$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$; $F(r,\theta) = f(x,y) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$,

on trouve, en additionnant les formules (2) et (3) ci-dessus :

$$(4) \quad \boxed{\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}}.$$

Exercice 3. Une fonction $f(x,y)$ est dite radiale si ses valeurs au point (x,y) ne dépendent que de la distance $r = \sqrt{x^2+y^2}$ à l'origine, donc si $f(x,y) = F(r) = F(\sqrt{x^2+y^2})$, où $F = F(r)$ est une fonction d'une seule variable. Montrez que les seules fonctions radiales et harmoniques, dans $\mathbb{R}^2$ privé de l'origine, sont les fonctions $C \operatorname{Log} r + D = C \operatorname{Log}\sqrt{x^2+y^2} + D$, où C et D sont des constantes.

Exercice 4. Vérifiez que les fonctions suivantes sont harmoniques dans $\mathbb{R}^2$: a) $e^x \cos y$; b) $x^3 - 3xy^2$; c) pour tout entier $k \geq 0$, la fonction $f(x,y) = r^k \cos(k\theta)$, où r et θ sont les coordonnées polaires de (x,y).

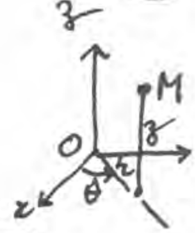
Exercice 5. Exprimez en coordonnées polaires :

$$y^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + x^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y}.$$

2) En <u>coordonnées cylindriques</u> dans $\mathbb{R}^3$:

$$x = r\cos\theta \quad , \quad y = r\sin\theta \, , \quad z = z \; ;$$

$$F(r,\theta,z) = f(x,y,z) = f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) \, ,$$



on déduit immédiatement de (4) la formule :

$$(5) \quad \boxed{\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}} \, .$$

<u>Exercice 6</u>. Soit U l'ouvert $\mathbb{R}^3$ privé de l'axe des z.

1) Vérifiez que la fonction $f(x,y,z)$, qui vaut $e^z \cos\frac{\theta}{2} \frac{\sin r}{\sqrt{r}}$ en coordonnées cylindriques, est harmonique sur U.

2) Soit λ une constante réelle. Montrez qu'une fonction du type

$$f(x,y,z) = e^z \cos(\lambda\theta)\, u(r)$$

est harmonique dans U si et seulement $u = u(r)$ est solution de l'équation différentielle (dite <u>de Bessel</u>) :

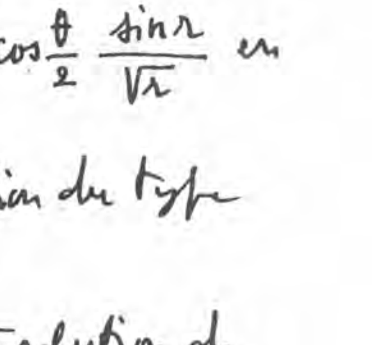
$$(E_\lambda) \qquad r^2 u''(r) + r\,u'(r) + \left[r^2 - \lambda^2\right] u(r) = 0 \, .$$

Vérifiez, que pour $\lambda = 3/2$, la fonction

$$u(r) = \frac{\sin r - r\cos r}{r\sqrt{r}}$$

convient.

3) <u>Calcul du Laplacien en coordonnées sphériques</u>.



Posons : $x = \rho\cos\varphi\cos\theta$, $y = \rho\cos\varphi\sin\theta$, $z = \rho\sin\varphi$ et $f(x,y,z) = F(\rho,\theta,\varphi)$. On cherche à exprimer $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ à l'aide des dérivées partielles de F par rapport à ρ, θ, φ. On peut parfaitement réitérer les formules (10) de la Leçon précédente, mais c'est un peu laborieux. Nous préférons passer par les variables intermédiaires (r,θ,z), où on a posé $r = \|Om\| = \rho\cos\varphi$. Ainsi nous considérons le changement de variables

$$(x,y,z) \longmapsto (\rho,\theta,\varphi)$$

comme <u>composé</u> des deux changements de variables :

$$(x,y,z) \longmapsto (r,\theta,z) \longmapsto (\rho,\theta,\varphi) \, .$$

Le premier : $(x, y, z) \longmapsto (r, \theta, z)$

est un passage en coordonnées cylindriques, étudié ci-dessus, dans lequel Δf est donné par la formule (5). Quant au second, à θ fixé,

$$(r, \theta, z) \longmapsto (\rho, \theta, \varphi),$$

c'est un passage de (r, z) à (ρ, φ) donné par les formules :

$$r = \rho \cos\varphi \quad , \quad z = \rho \sin\varphi \quad ,$$

qui ne sont autres que les formules du passage de coordonnées cartésiennes (r, z) à leurs coordonnées polaires associées (ρ, φ). On a donc, d'après (4),

$$(6) \quad \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

D'autre part la première des formules (7) de la Leçon n°4 s'écrit ici :

$$(7) \quad \frac{\partial}{\partial r} = \cos\varphi \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{\sin\varphi}{\rho}\frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

En appliquant (5), (6), (7), et la formule $r = \rho\cos\varphi$, il vient :

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} =$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho\cos\varphi}\left(\cos\varphi\frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{\sin\varphi}{\rho}\frac{\partial}{\partial \varphi}\right) + \frac{1}{\rho^2\cos^2\varphi}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2},$$

d'où la formule du laplacien en coordonnées sphériques :

$$(8) \quad \boxed{\begin{aligned} \Delta f &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \\ &= \frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\rho^2\cos^2\varphi}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + \frac{2}{\rho}\frac{\partial F}{\partial \rho} - \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\rho^2}\frac{\partial F}{\partial \varphi} \end{aligned}}.$$

Exercice 7. Dans $\mathbb{R}^3$ privé de l'origine, montrez que les seules fonctions harmoniques et radiales (c'est-à-dire ne dépendant que de la distance ρ de (x, y, z) à l'origine) sont les fonctions

$$f(x, y, z) = \frac{C}{\rho} + D = \frac{C}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + D,$$ où C et D sont des constantes.

<u>Exercice 8</u>. Soient ρ, θ, φ les coordonnées sphériques dans $\mathbb{R}^3$. On pose $\sin\varphi = t$. Montrez que, pour qu'une fonction de la forme

$$f(x,y,z) = \rho^n P(t),$$

où n est un entier ≥ 0, soit harmonique, il faut et il suffit que la fonction $t \mapsto P(t)$ soit solution de l'équation différentielle (dite <u>de Legendre</u>) :

$$(D_n) \quad (1-t^2)P''(t) - 2tP'(t) + n(n+1)P(t) = 0.$$

Pour $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, vérifiez, en le calculant par la méthode des coefficients indéterminés, qu'il y a un polynôme $P_n(t)$, et un seul, de degré n, solution de (D_n), et tel que $P_n(1) = 1$. [Remarque: ce fait vaut pour tout n ; les polynômes P_n s'appellent polynômes de Legendre].

<u>Exercice 9</u>. Dans $\mathbb{R}^n$, on pose $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$, et $\rho = \|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$. Soit une fonction <u>radiale</u>

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = F(\rho).$$

Montrez que $\Delta f = F''(\rho) + (n-1)F'(\rho)$. Si $n \geq 3$, en déduire que les seules fonctions radiales et harmoniques dans $\mathbb{R}^n$ privé de l'origine sont les $f(x,y,z) = \frac{C}{\rho^{n-2}} + D$, où C et D sont des constantes.

<u>Exercice 10</u> $\quad \Delta(fg) = f\Delta g + g\Delta f + 2(\nabla f \mid \nabla g)$.

<u>Exercice 11</u>. Une fonction f de classe C^4 (par exemple à 2 variables) est dite <u>biharmonique</u> si

$$\Delta(\Delta f) = \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} \equiv 0.$$

Ces fonctions interviennent en théorie de l'Elasticité. Bien entendu toute fonction harmonique est biharmonique. Montrez que, si f et g sont deux fonctions harmoniques, alors la fonction $xf + (x^2+y^2)g$ est biharmonique.

Indications sur les Exercices proposés dans cette Leçon

Exercice 1 $f(x,y)=\dfrac{e^x}{\cos y}$; $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{e^x}{\cos y}$; $\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{e^x\sin y}{\cos^2 y}$;

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\dfrac{e^x}{\cos y}$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\dfrac{e^x \sin y}{\cos^2 y}$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\dfrac{e^x}{\cos y}+\dfrac{2e^x\sin^2 y}{\cos^3 y}$.

Au point $(0,0)$, $f=1$; $\dfrac{\partial f}{\partial x}=1$; $\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=1$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=0$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=1$.

La formule de Taylor-Young, où l'on remplace (h,k) par (x,y) s'écrit :

$$\frac{e^x}{\cos y}=1+x+\frac{1}{2}(x^2+y^2)+\varepsilon(x,y)(x^2+y^2),$$

où $\varepsilon(x,y)$ tend vers 0 quand x^2+y^2 tend vers 0, ce qui implique que

$$\frac{e^x-(1+x)\cos y}{(x^2+y^2)\cos y}=\frac{e^x/\cos y-(1+x)}{x^2+y^2}=\frac{1}{2}+\varepsilon(x,y)$$

tend vers $1/2$.

Exercice 2. $F''(\theta)=\sin^2\theta\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}-2\sin\theta\cos\theta\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\cos^2\theta\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}-$

$$-\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}-\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y},$$

donc $F''(0)=b-a$.

Exercice 3. D'après (4), l'équation $\Delta f\equiv 0$ équivaut à

$$F''(r)+\frac{1}{r}F'(r)=0,$$

c'est-à-dire à $F'(r)=\dfrac{C}{r}$, donc à $F(r)=C\operatorname{Log} r+D$.

Exercice 5. Symboliquement c'est $\left(x\dfrac{\partial}{\partial y}-y\dfrac{\partial}{\partial x}\right)^{(2)} f$, donc, d'après la formule (6) de la Leçon n°4, c'est $\left(\dfrac{\partial}{\partial\theta}\right)^{(2)}F$, c'est-à-dire $\dfrac{\partial^2 F}{\partial\theta^2}$.

Exercice 6. 2°) Si $F(r,\theta,z)=e^z\cos(\lambda\theta)u(r)$, on a :

$\dfrac{\partial F}{\partial r}=e^z\cos(\lambda\theta)u'(r)$; $\dfrac{\partial^2 F}{\partial r^2}=e^z\cos(\lambda\theta)u''(r)$;

$\dfrac{\partial^2 F}{\partial\theta^2}=-\lambda^2e^z\cos(\lambda\theta)u(r)$; $\dfrac{\partial^2 F}{\partial z^2}=e^z\cos(\lambda\theta)u(r)$. Donc, d'après (5), $\Delta f\equiv 0$ si et seulement si

$$e^{z}\cos(\lambda\theta)\left[u''(r)+\frac{1}{r}u'(r)+\left(1-\frac{\lambda^2}{r^2}\right)u(r)\right]\equiv 0,$$

donc si et seulement si (E_λ).

1°) et 3°). Par dérivations, on vérifie immédiatement que $u(r)=\frac{\sin r}{\sqrt{r}}$ est solution de $(E_{\frac{1}{2}})$, et $u(r)=\frac{\sin r - r\cos r}{r\sqrt{r}}$ de $(E_{3/2})$.

Exercice 8. Si $t=\sin\varphi$, et si $f(x,y,z)=F(\rho,\theta,\varphi)=\rho^n P(t)$, on a :

$\frac{\partial F}{\partial \rho}=n\rho^{n-1}P(t)$; $\frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2}=n(n-1)\rho^{n-2}P(t)$; $\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}=0$;

$\frac{\partial F}{\partial \varphi}=\rho^n P'(t)\cos\varphi$, donc $\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\rho^2}\frac{\partial F}{\partial\varphi}=\rho^{n-2}\,t\,P'(t)$;

$\frac{\partial^2 F}{\partial\varphi^2}=-\rho^n P'(t)\sin\varphi+\rho^n P''(t)\cos^2\varphi=\rho^n\left[-tP'(t)+(1-t^2)P''(t)\right]$,

donc, d'après (8), $\Delta f\equiv\rho^{n-2}\left[(1-t^2)P''(t)-2tP'(t)+n(n+1)P(t)\right]$ est $\equiv 0$ si et seulement $P(t)$ est solution de $(\mathcal{D}_n)$. La méthode des coefficients indéterminés ramène à résoudre un système linéaire et homogène à $(n+1)$ inconnues ; en normalisant par $P_n(1)=1$, on trouve :

$P_0(t)=1$; $P_1(t)=t$; $P_2(t)=\frac{1}{2}(3t^2-1)$; $P_3(t)=\frac{1}{2}(5t^3-3t)$;

$P_4(t)=\frac{1}{8}(35t^4-30t^2+3)$; $P_5(t)=\frac{1}{8}(63t^5-70t^3+15t)$.

Exercice 9 (donc 7). $\frac{\partial\rho}{\partial x_i}=\frac{x_i}{\rho}$. Donc $\frac{\partial f}{\partial x_i}=F'(\rho)\frac{x_i}{\rho}$, et

$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}=F''(\rho)\frac{x_i^2}{\rho^2}+\frac{F'(\rho)}{\rho}-F'(\rho)\frac{x_i^2}{\rho^3}$. En additionnant pour $i=1,2,\dots,n$,

$\Delta f=F''(\rho)+(n-1)F'(\rho)$ est $\equiv 0$ ssi $F(\rho)=\frac{C}{\rho^{n-2}}+D$.

Exercice 10 (par exemple en 2 variables) :

$\frac{\partial}{\partial x}(fg)=f\frac{\partial g}{\partial x}+g\frac{\partial f}{\partial x}$, et $\frac{\partial^2}{\partial x^2}(fg)=f\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+2\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial x}+g\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$.

De même $\frac{\partial^2}{\partial y^2}(fg)=f\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}+2\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial y}+g\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

En additionnant on trouve la formule

$$\Delta(fg)=f\,\Delta g+g\,\Delta f+2\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial y}\right)=$$

$$=f\,\Delta g+g\,\Delta f+2\,(\nabla f\mid\nabla g).$$

Exercice 11. On applique la formule de l'Exercice 10, et le fait que le symbole Δ commute avec les symboles $\frac{\partial}{\partial x}$ et $\frac{\partial}{\partial y}$.

AN 03 Leçon n° 6

Calcul différentiel des fonctions implicites

I. Premier cas particulier : $f(x, y) = 0$.

Nous connaissons les courbes définies dans $\mathbb{R}^2$ comme graphe d'une fonction explicite $y = \varphi(x)$ [cf. AN01, Leçon n°11], ou plus généralement définies par des équations paramétriques $x = x(t)$, $y = y(t)$ [cf. AN02, Leçon n°11]. Mais souvent l'équation d'une courbe (C) dans $\mathbb{R}^2$ est donnée par une condition du type

$$f(x, y) = 0$$

nécessaire et suffisante pour que le point (x, y) soit sur (C). En un point (x_0, y_0) de (C), donc tel que $f(x_0, y_0) = 0$, on demande par exemple si (C) a une tangente, et, si oui, quelle en est la pente.

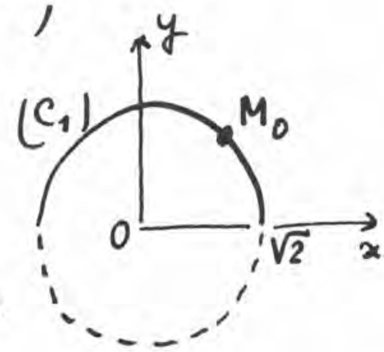
Exemples : Les trois courbes d'équation

$$(C_1) \qquad x^2 + y^2 - 2 = 0 \quad ;$$

$$(C_2) \qquad x^3 + 2y^3 - 3xy = 0 \quad ;$$

$$(C_3) \qquad x^5 - y^5 + x^3 - 3y^2 + 2 = 0 \quad ,$$

passent par le point $M_0 = (1, 1)$.



L'équation du cercle (C_1) équivaut à :

$$y = \varepsilon(x) \sqrt{2 - x^2},$$

où $\varepsilon(x) = \pm 1$. Au voisinage de M_0, c'est la branche

$$y = + \sqrt{2 - x^2}$$

qui convient, et (C_1) a une tangente au point M_0, de pente $y'(1) = -1$.

En posant $y = tx$ on peut définir (C_2) par les équations paramétriques :

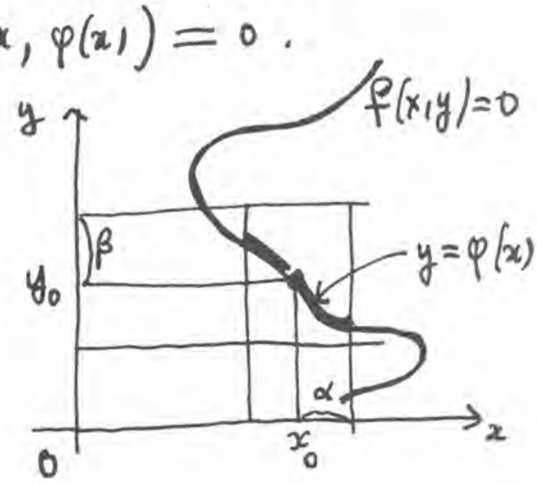
$$x = \frac{3t}{1 + 2t^3} \quad , \qquad y = \frac{3t^2}{1 + 2t^3} \quad ,$$

où $t \neq -\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$. Le point $M_0 = (1, 1)$ est obtenu pour $t = 1$; en ce point (C_2) a un vecteur tangent $(x'(1), y'(1)) = (-1 \ , \ 0 \ )$, et donc une tangente de pente $\frac{y'(1)}{x'(1)} = 0$ en ce point.

Pour (C_3) aucune des méthodes ci-dessus ne fournit la réponse au problème de la tangente. Il faut introduire des méthodes directes de calcul sur la fonction f.

Définition. Soit $(x,y) \mapsto f(x,y)$ une fonction à valeurs réelles définie dans une partie U de $\mathbb{R}^2$. On appelle fonction implicite définie par l'équation $f(x,y)=0$ toute fonction $x \mapsto y = \varphi(x)$ définie dans un intervalle I de $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in I$, le point $(x, \varphi(x))$ soit dans U et vérifie : $f(x, \varphi(x)) = 0$.

Théorème 1. Soit U un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $(x_0, y_0) \in U$. Soit une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ telle que :



1°) f est continue dans U ;

2°) $f(x_0, y_0) = 0$;

3°) $\frac{\partial f}{\partial y}$ existe et est continue dans U ;

4°) $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.

Alors il existe des nombres réels $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que :

i) Le rectangle $\{|x - x_0| \leq \alpha,\ |y - y_0| \leq \beta\}$ est inclus dans U, et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ n'est jamais nulle dans ce rectangle.

ii) quel que soit x fixé tel que $|x - x_0| \leq \alpha$, l'équation d'inconnue y :
$$f(x,y) = 0$$
admet une solution et une seule
$$y = \varphi(x)$$
telle que $|y - y_0| \leq \beta$. Cette fonction $x \mapsto \varphi(x)$ est continue dans l'intervalle $|x - x_0| < \alpha$.

iii) Si de plus f est de classe C^1 dans U, alors en tout point x tel que $|x - x_0| < \alpha$, la fonction φ admet une dérivée première qui est donnée par la formule :
$$(1) \qquad \varphi'(x) = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))}.$$

Nous reportons la démonstration du Théorème 1 au § II, où elle sera faite dans un contexte plus général.

Exercice 1. 1°) En appliquant la formule (1), retrouvez les pentes des tangentes en $M_0 = (1,1)$ aux courbes (C_1) et (C_2) des Exemples ci-dessus. 2°) Montrez que la pente de la tangente à (C_3) en M_0 vaut $8/11$.

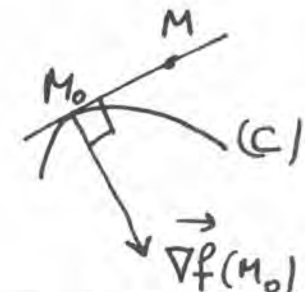
Equation de la tangente. Supposons $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Soit (C) la courbe d'équation $f(x,y)=0$. Un point $M_0 = (x_0, y_0)$ de (C) [donc tel que $f(x_0,y_0)=0$] est dit régulier si l'une au moins des deux dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ n'est pas nulle. Sinon M_0 est dit singulier.

En tout point régulier la courbe (C) a une tangente, qui est la droite d'équation :

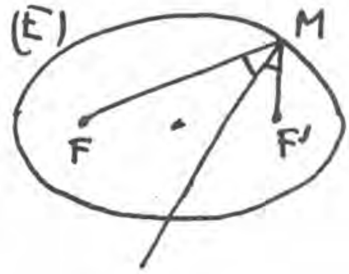
$$(2) \qquad \boxed{(x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + (y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 0}$$

En effet, si $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0$, au voisinage de M_0 passe une branche de courbe $y = \varphi(x)$ et une seule qui coïncide avec (C), et $\varphi'(x_0) = -\dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)}$ d'après (1). La tangente en M_0 à cette branche, donc à (C), a pour équation $\dfrac{y-y_0}{x-x_0} = \varphi'(x_0)$, c'est-à-dire (2). Si $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=0$, alors $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \neq 0$ et on échange les rôles de x et y dans le Théorème 1 ; par M_0 passe une branche $x = \psi(y)$ et une seule de (C) au voisinage de M_0, et l'on a $\psi'(y_0) = -\dfrac{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)}{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)} = 0$. La tangente en M_0 à cette branche est donc la droite $x = x_0$, équation qui coïncide dans ce cas avec (2).

Exercice 2. Montrez que tout point de (C_3) est régulier. Calculez avec deux décimales les coordonnées des points de (C_3) où la tangente est parallèle à Ox.



L'équation (2) de la tangente exprime encore que le vecteur tangent $\overrightarrow{M_0M}$ est orthogonal au vecteur-gradient de f au point M_0 : en un point régulier M_0 la normale à (C) est la droite qui porte le vecteur de composantes $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0),\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)$.



Exercice 3. Soient $0<b<a$ deux nombres donnés. On pose $c^2=a^2-b^2$. Soit (E) l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, de foyers $F=(-c,0)$ et $F'=(c,0)$. Montrez que la normale à (E) au point M est bissectrice de l'angle $\widehat{FMF'}$.

Utilisation de la notation différentielle traditionnelle.

Utilisons la notation différentielle (cf. Leçon n°3) pour différentier l'identité $f(x,y)\equiv 0$:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0 .$$

Si on écrit le résultat comme suit : $\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$, on retrouve la règle de calcul (1) de dérivation de la fonction implicite $y=\varphi(x)$, qui est ainsi rendue automatique par ladite notation.

Par exemple, en différentiant l'équation de (C_3) :

$$x^5-y^5+x^3-3y^2+2=0,$$

on obtient : $\quad 5x^4dx-5y^4dy+3x^2dx-6y\,dy=0$, d'où la pente de (C_3) : $\quad \frac{dy}{dx}=\frac{5x^4+3x^2}{5y^4+6y}$ au point (x,y).

La notation différentielle est aussi très commode en cas de changement de variables. Par exemple, dans une fonction $f(x,y)$, faisons le changement de variables $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$, ce qui transforme f en $F(u,v)=f(x,y)=f(x(u,v),y(u,v))$. Différentions le changement de variables :

$$\begin{cases} dx = \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv \\ dy = \frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv \end{cases}$$

et reportons dans la différentielle df :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv\right) + \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv\right)$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\right)du + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\right)dv$$

$$= \frac{\partial F}{\partial u}du + \frac{\partial F}{\partial v}dv = dF,$$

en vertu des formules de calcul des dérivées partielles de fonctions composées (cf. Leçon n°3, Théorème 3, Corollaire 1). Ainsi la notation différentielle est "<u>invariante</u> par changement de variables"; elle fait apparaître <u>automatiquement</u> l'expression des dérivées partielles de la fonction par rapport aux variables qu'on a choisi de considérer comme fondamentales. N'hésitez donc pas à calculer en notation différentielle; vous ne ferez qu'appliquer inconsciemment les théorèmes.

<u>Exercice</u> 4. Une courbe dans $\mathbb{R}^2$ est définie par la relation $F(r, \theta) = 0$, où $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$. Calculez la pente de la tangente à cette courbe.

<u>Exercice</u> 5. Soit α une constante réelle. Une fonction $z = z(t)$ est donnée par l'intermédiaire des relations:

$$z = e^x \cos(\alpha y) \quad ; \quad y^3 + ty + 1 = 0 \quad ; \quad x^3 - tx + 1 = 0.$$

Calculez la dérivée $\frac{dz}{dt}$ pour $t = 0$.

II. Deuxième cas particulier : $f(x, y, z) = 0$

Le théorème des fonctions implicites à 2 variables (Théorème 1) se généralise à $n+1$ variables. Enonçons-le par exemple pour 3 variables.

<u>Théorème</u> 2. Soit U un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^3$. Soit (x_0, y_0, z_0) un point de U. Soit une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ telle que:

1°) f est continue dans U;

2°) $f(x_0, y_0, z_0) = 0$;

3°) $\frac{\partial f}{\partial z}$ existe et est continue dans U;

4) $\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$.

Alors il existe des nombres réels $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que :

i) Le pavé $\{|x-x_0| \leq \alpha, \ |y-y_0| \leq \alpha, \ |z-z_0| \leq \beta\}$ est inclus dans U, et $\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)$ n'est jamais nulle dans ce pavé.

ii) Quels que soient x et y fixés tels que $|x-x_0| \leq \alpha$ et $|y-y_0| \leq \alpha$, l'équation d'inconnue z :

$$f(x,y,z) = 0$$

admet une solution et une seule

$$z = \varphi(x,y)$$

telle que $|z-z_0| \leq \beta$. Cette fonction $(x,y) \mapsto \varphi(x,y)$ est continue dans le carré $\{|x-x_0| < \alpha, \ |y-y_0| < \alpha\}$; on l'appelle <u>fonction implicite</u> définie par $f(x,y,z) = 0$.

iii) Si de plus f est de classe C^1 dans U, alors φ a des dérivées partielles dans le carré $\{|x-x_0| < \alpha, \ |y-y_0| < \alpha\}$; elles sont données par les formules :

$$(3) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,\varphi(x,y))}{\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,\varphi(x,y))} \ ; \ \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,\varphi(x,y))}{\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,\varphi(x,y))}.$$

<u>Exercice 6</u>. Sur ce modèle énoncez le théorème des fonctions implicites $z = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ définies par $f(x_1, x_2, \dots, x_n, z) = 0$.

<u>Démonstration du Théorème 2</u> C'est une belle application du théorème du point fixe pour les fonctions contractantes (cf AN01, Leçon n°12, § I). Avec des changements insignifiants elle vaut plus généralement pour $n+1$ variables, et a fortiori pour 2 variables (théorème 1).

<u>Existence et unicité</u>: Par translation on peut supposer que $x_0 = y_0 = z_0 = 0$. Il existe $a > 0$ tel que f soit définie dans le cube $\{|x| < a, \ |y| < a, \ |z| < a\}$ et $\frac{\partial f}{\partial z}$ jamais nulle dans ce cube. Quand $|x| < a$ et $|y| < a$ sont fixés,

l'équation $f(x,y,z)=0$, d'inconnue z, peut s'écrire

$$z = z - \frac{f(x,y,z)}{m} = F(x,y,z),$$

où l'on a posé $m = \frac{\partial f}{\partial z}(0,0,0)$. La dérivée du second membre par rapport à z est nulle au point $(0,0,0)$ et continue dans U. Donc cette dérivée sera en valeur absolue inférieure à $k = \frac{1}{2}$ si

$$|x| \leq \beta \quad , \quad |y| \leq \beta \quad , \quad |z| \leq \beta \ ,$$

où $0<\beta<a$ est choisi assez petit. Appliquons, à x et y fixés, la formule des accroissements finis pour la variable z ; on obtient que : $|F(x,y,z') - F(x,y,z)| \leq \left|\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,\zeta)\right| |z-z'|$

où ζ est entre z et z', donc que :

(4) $\quad |F(x,y,z') - F(x,y,z)| \leq k\,|z-z'|$

chaque fois que $|x|\leq\beta$, $|y|\leq\beta$, $|z|\leq\beta$, $|z'|\leq\beta$.

De plus, F étant continue dans U et nulle à l'origine, on peut trouver un nombre α tel que $0<\alpha\leq\beta$ et tel que :

(5) $\quad |F(x,y,0)| \leq \beta(1-k)$

chaque fois que $|x|\leq\alpha$, $|y|\leq\alpha$. Pour tous x et y fixés tels que $|x|\leq\alpha$, $|y|\leq\alpha$, il résulte de (4) et (5) que, si $|z|\leq\beta$, alors :

$$|F(x,y,z)| \leq |F(x,y,z) - F(x,y,0)| + |F(x,y,0)| \leq$$
$$\leq k\beta + \beta(1-k) = \beta .$$

Donc l'application $z \mapsto F(x,y,z)$ applique l'intervalle <u>fermé</u> $[-\beta,\beta]$ <u>dans lui-même</u>, et ceci de manière <u>contractante</u> (vu (4)).

En appliquant le théorème du point fixe (AN 01, Leçon n° 12), on obtient que, quels que soient $|x|\leq\alpha$ et $|y|\leq\alpha$, l'équation

$$z = F(x,y,z)$$

admet une solution et une seule telle que $|z|\leq\beta$. Notons $z=\varphi(x,y)$ cette solution. On a prouvé l'existence et l'unicité de $z=\varphi(x,y)$ telle que $f(x,y,z)=0$, sous les conditions

$$|x-x_0|\leq\alpha \;,\; |y-y_0|\leq\alpha \;,\; |z-z_0|\leq\beta .$$

Continuité de φ : Dans la démonstration précédente, aussi petit qu'on ait pris $\beta>0$, on a trouvé $\alpha>0$ tel que :
$|x-x_0|<\alpha$ et $|y-y_0|<\alpha$ impliquent $|z-z_0|=|\varphi(x,y)-\varphi(x_0,y_0)|\leq\beta$.
Donc φ est continue au point (x_0,y_0). Soit (x_1,y_1) un autre point du carré $\{|x-x_0|<\alpha \,,\, |y-y_0|<\alpha\}$; posons $z_1=\varphi(x_1,y_1)$. Alors $f(x_1,y_1,z_1)=0$ et $\frac{\partial f}{\partial z}(x_1,y_1,z_1)\neq 0$. Dans tout ce qu'on a dit jusqu'à présent, on peut remplacer (x_0,y_0,z_0) par (x_1,y_1,z_1) : dans un pavé $\{|x-x_1|<\alpha_1 \,,\, |y-y_1|<\alpha_1 \,,\, |z-z_1|<\beta_1\}$ il existe une et seule fonction implicite $\varphi_1(x,y)$ définie par $f(x,y,z)=0$, et φ_1 est continue au point (x_1,y_1). A cause de l'unicité, $\varphi_1(x,y)$ coïncide avec $\varphi(x,y)$ dans l'intersection des deux pavés $\{|x-x_0|<\alpha \,,\, |y-y_0|<\alpha\}$ et $\{|x-x_1|<\alpha_1 \,,\, |y-y_1|<\alpha_1\}$.
Donc φ est continue aussi au point (x_1,y_1).

Dérivées partielles de φ : Comme pour la continuité, on peut se ramener à les trouver au point (x_0,y_0). Faisons-le par exemple pour $\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}$. On a $z_0=\varphi(x_0,y_0)$. Pour $h>0$ assez petit, posons $z_0+l=\varphi(x_0+h,y_0)$. D'après la formule de Taylor à l'ordre 1, il existe un nombre réel θ tel que $0<\theta<1$ et tel que :

$$0=f(x_0+h,y_0,z_0+l)-f(x_0,y_0,z_0)=$$
$$=h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta h,y_0,z_0+\theta l)+l\frac{\partial f}{\partial z}(x_0+\theta h,y_0,z_0+\theta l).$$

Donc : $$\frac{\varphi(x_0+h,y_0)-\varphi(x_0,y_0)}{h}=\frac{l}{h}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta h,y_0,z_0+\theta l)}{\frac{\partial f}{\partial z}(x_0+\theta h,y_0,z_0+\theta l)}$$

tend vers $-\frac{\partial f}{\partial x}\Big/\frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)$ quand h, et donc l, tend vers 0.

Remarque. La notation différentielle rend automatique le calcul des dérivées partielles de $z = \varphi(x,y)$. Il suffit en effet de différentier l'identité $f(x,y,z) \equiv 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = 0 ,$$

et d'écrire le résultat sous la forme

$$dz = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}}dx - \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}}$$

pour retrouver les formules (3). C'est particulièrement commode quand on est en plus confronté à un changement de variables.

III. Plan tangent à une surface dans $\mathbb{R}^3$

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^3$, et soit $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1. L'ensemble des points $M = (x,y,z)$ tels que

$$(6) \qquad f(x,y,z) = 0$$

est (en général) une surface (S), d'équation (6). On dit qu'un point $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ situé sur (S) [donc tel que $f(x_0,y_0,z_0)=0$] est régulier si les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$ ne sont pas toutes trois nulles au point M_0. Sinon M_0 est dit singulier.

Si M_0 est régulier, le plan d'équation :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(M_0)\,(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)\,(y-y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(M_0)\,(z-z_0) = 0$$

est appelé plan tangent à (S) au point M_0. La droite orthogonale à ce plan issue de M_0 s'appelle la normale à (S) au point M_0. Elle porte le vecteur $\vec{\nabla} f(M_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)(M_0)$.

Trois fonctions de classe C^1 sur un intervalle I de $\mathbb{R}$:

$$x = x(t) \quad , \qquad y = y(t) \quad , \qquad z = z(t)$$

définissent une <u>courbe</u> (Γ) <u>tracée sur</u> (S) si, pour tout $t \in I$,

$$f(x(t), y(t), z(t)) = 0 .$$

Une telle (Γ) <u>passe par</u> M_0 si il existe $t_0 \in I$ tel que

$$x(t_0) = x_0 \quad , \quad y(t_0) = y_0 \quad , \quad z(t_0) = z_0 .$$

Rappelons que le point M_0 est dit régulier sur Γ, si $x'(t_0)$, $y'(t_0)$, $z'(t_0)$ ne sont pas tous trois nuls.

<u>Proposition 1</u>. Si M_0 est régulier sur (S), le plan tangent à (S) au point M_0 contient les tangentes en M_0 à <u>toutes</u> les courbes (Γ) tracées sur (S) qui admettent M_0 comme point régulier.

En effet de l'identité $F(t) = f(x(t), y(t), z(t)) \equiv 0$, on déduit que $F'(t_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(M_0)\, x'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)\, y'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(M_0)\, z'(t_0)$ est nul, donc que le vecteur tangent à (Γ) au point M_0 est orthogonal au vecteur $\vec{\nabla} f(M_0)$.

<u>Exemples</u>: 1) La sphère de centre O, de rayon R,

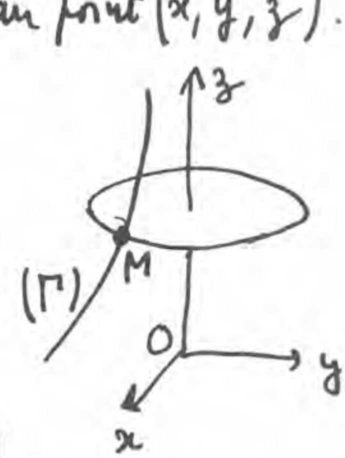
$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

a pour normale au point M la droite OM.

2) Si (S) a son équation résolue en z :

$$z = \varphi(x, y) ,$$

le vecteur $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, -1\right)$ est normal à (S) au point (x, y, z).



3) On dit que (S) est une <u>surface de révolution</u> autour de Oz si, pour tout point M de (S), le cercle d'axe Oz passant par M est tout entier sur (S). Si (Γ) est la courbe intersection de (S) avec un plan passant par Oz, la surface (S) est engendrée par (Γ) quand (Γ) tourne autour de Oz. La courbe plane (Γ) s'appelle <u>la génératrice</u> de (S), et les cercles d'axe Oz sont les <u>parallèles</u> de (S). Le plan tangent en M à (S) est engendré par la tangente à (Γ) en M et la tangente en M au parallèle qui passe par M. La normale

en M à (S) s'appuie sur Oz.

Exercice 7. Pour les surfaces (S) suivantes, vérifiez que M_0 est sur (S), et écrivez l'équation du plan tangent à (S) au point M_0 :

1°) $x^2+y^2+z^2=9$; $M_0=(2,2,1)$;

2°) $x^3+xy^2-yz^2-z^3=0$; $M_0=(1,1,1)$;

3°) $z=x^2+y^2$; $M_0=(1,1,2)$

4°) $z^2=x^2+y^2$; $M_0=(0,0,0)$.

Expliquez géométriquement pourquoi vous avez échoué au 4°).

Cas d'une surface définie par des équations paramétriques :

Soit $\mathbb{R}^2$ un plan de coordonnées (u,v), soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et soit une application de U dans $\mathbb{R}^3$:

$$(7)\qquad (u,v)\longmapsto M=M(u,v)\begin{cases}x=x(u,v)\\ y=y(u,v)\\ z=z(u,v)\end{cases}$$

de classe C^1. Quand les paramètres (u,v) parcourent U, le point $M(u,v)$ décrit une surface (S) d'équations paramétriques (7). On dit que le point $M_0=M(u_0,v_0)$ de (S) est régulier si les deux vecteurs :

$$\frac{\partial\vec{M}}{\partial u}(M_0)=\left(\frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0),\frac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0),\frac{\partial z}{\partial u}(u_0,v_0)\right)$$

et

$$\frac{\partial\vec{M}}{\partial v}(M_0)=\left(\frac{\partial x}{\partial v}(u_0,v_0),\frac{\partial y}{\partial v}(u_0,v_0),\frac{\partial z}{\partial v}(u_0,v_0)\right)$$

sont linéairement indépendants dans $\mathbb{R}^3$. On peut alors définir le plan passant par M_0 et engendré par ces deux vecteurs ; on l'appelle le plan tangent à (S) au point $M_0=M(u_0,v_0)$. Son équation s'obtient en exprimant que les 3 vecteurs $\overrightarrow{M_0M}$, $\frac{\partial\vec{M}}{\partial u}(M_0)$ et $\frac{\partial\vec{M}}{\partial v}(M_0)$ sont colinéaires, donc en annulant un déterminant :

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0\\ \frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0) & \frac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0) & \frac{\partial z}{\partial u}(u_0,v_0)\\ \frac{\partial x}{\partial v}(u_0,v_0) & \frac{\partial y}{\partial v}(u_0,v_0) & \frac{\partial z}{\partial v}(u_0,v_0)\end{vmatrix}=0.$$

Cette définition est justifiée, et en accord avec celle donnée pour les surfaces $f(x,y,z)=0$, car on a la

<u>Proposition</u> 2. Définissons une <u>courbe</u> (Γ) <u>tracée sur</u> (S) par une application $t \mapsto (u(t), v(t))$ de classe C^1 d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans U, ce qui permet d'écrire les équations paramétriques de (Γ) :

(8) $\quad x(t) = x(u(t), v(t)) \; ; \quad y(t) = y(u(t), v(t)) \; ; \quad z(t) = z(u(t), v(t))$.

Supposons que (Γ) <u>passe par</u> $M_0 = M_0(u_0, v_0) = M(u(t_0), v(t_0))$. Alors, si M_0 est régulier sur (S), <u>le vecteur tangent</u> à (Γ) <u>en</u> M_0, à savoir le vecteur $(x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$ issu de M_0, <u>est situé dans le plan tangent</u> à (S) au point M_0.

En effet en dérivant (8) on obtient que le vecteur

$$\frac{d\vec{M}}{dt}(t_0) = u'(t_0)\frac{\partial \vec{M}}{\partial u}(M_0) + v'(t_0)\frac{\partial \vec{M}}{\partial v}(M_0)$$

est combinaison linéaire des vecteurs $\frac{\partial \vec{M}}{\partial u}(M_0)$ et $\frac{\partial \vec{M}}{\partial v}(M_0)$.

<u>Exercice</u> 8. Montrez que le point $\left(1, 1, \frac{\pi\sqrt{2}}{4}\right)$ est sur la surface

$$x = u\cos v \;, \qquad y = u \sin v \;, \qquad z = uv \;,$$

et écrivez l'équation du plan tangent en ce point.

IV <u>Cas général des fonctions implicites définies par plusieurs équations</u>

Les Théorèmes 1 et 2 se généralisent en l'énoncé suivant.

Soit un système de p équations en $n+p$ variables :

$$(9) \quad \begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_p) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_p) = 0 \\ \text{-----------------------} \\ f_p(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_p) = 0 \end{cases}$$

où les f_i sont de classe C^1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^{n+p}$, et nulles pour un système de valeurs $x_1^0, \dots, x_n^0, u_1^0, \dots, u_n^0$. Supposons que <u>le Jacobien</u> $\frac{D(f_1, f_2, \dots, f_p)}{D(u_1, u_2, \dots, u_p)}$ <u>n'est pas nul</u> en ce point. Alors il existe un voisinage $\{|x_1 - x_1^0| < \alpha, \dots, |x_n - x_n^0| < \alpha \; ; \; |u_1 - u_1^0| < \beta, \dots, |u_p - u_p^0| < \beta\}$

de ce point, tel qu'il existe dans ce voisinage un système de fonctions, et un seul,

(10) $u_1 = u_1(x_1, \dots, x_n)$; . . . . ; $u_p = u_p(x_1, \dots, x_n)$

satisfaisant aux identités (9) et de classe C^1 dans ce voisinage. Les dérivées partielles $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ des fonctions implicites (10) se calculent, par l'intermédiaire de leurs différentielles du_i, en différentiant les identités (9) :

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} du_1 + \cdots + \frac{\partial f_1}{\partial u_p} du_p = -\frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 - \cdots - \frac{\partial f_1}{\partial x_n} dx_n \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} du_1 + \cdots + \frac{\partial f_2}{\partial u_p} du_p = -\frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 - \cdots - \frac{\partial f_2}{\partial x_n} dx_n \\ \hline \frac{\partial f_p}{\partial u_1} du_1 + \cdots + \frac{\partial f_p}{\partial u_p} du_p = -\frac{\partial f_p}{\partial x_1} dx_1 - \cdots - \frac{\partial f_p}{\partial x_n} dx_n \end{array}\right.$$

et en résolvant ce système linéaire d'inconnues $du_1, \dots, du_p$, qui est de Cramer, vu l'hypothèse sur le jacobien.

Nous ne reproduirons pas ici la démonstration de ce <u>théorème général des fonctions implicites</u>, car nous en avons donné toutes les idées essentielles dans le cas du Théorème 2, où $p=1$. Elle repose sur le théorème du point fixe pour les applications contractantes sur un ensemble fermé de $\mathbb{R}^p$ (Leçon n°2, Théorème 3).

<u>Exercice</u> 9. Calculez $\frac{\partial u}{\partial x}$ sachant que

$$x^2 - y^2 + u^2 + 2v^2 = 1 \quad , \quad x^2 + y^2 - v^2 - u^2 = 2 .$$

<u>Exercice</u> 10. Proposez un vecteur tangent à la courbe dans $\mathbb{R}^3$ intersection des deux surfaces $f(x,y,z)=0$; $g(x,y,z)=0$. Appliquez ceci à la fenêtre de Viviani (cf. AN02, Leçon n°11, Exemple 8) :

$$x^2+y^2+z^2=1 \quad ; \quad x^2+y^2-x=0 .$$

Vérifiez le résultat obtenu en utilisant les équations paramétriques.

V. Indications sur les Exercices proposés dans cette Leçon n°6

Exercice 2. On a $\frac{\partial f}{\partial x} = x^2(5x^2+3)$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = -y(5y^3+6)$. Les seuls points singuliers possibles sont $(0,0)$ et $(0, -\sqrt[3]{\frac{6}{5}})$; mais aucun de ces deux points n'est sur la courbe (C_3). La tangente est parallèle à Ox aux points de (C_3) où $\frac{\partial f}{\partial x}=0$, c'est-à-dire où $x=0$. Les ordonnées y de ces points sont les solutions de l'équation $y^5+3y^2-2=0$. Une solution évidente est $y=-1$. Les autres sont les racines de l'équation

$$(E) \qquad \varphi(y) = y^4 - y^3 + y^2 + 2y - 2 = 0 .$$

Vu que $\varphi''(y)$ est toujours >0, et que $\varphi(\pm\infty) = +\infty$, $\varphi(0) = -2$, on voit que (E) a deux solutions réelles. La méthode de Newton fournit pour ces racines les valeurs $-1{,}12$ et $0{,}76$. Donc (C_3) a 3 points à tangente horizontale, tous situés sur Oy ; ils ont pour ordonnée $y=-1$, $y=-1{,}12$, et $y=0{,}76$.

Exercice 3. Soit $M=(x,y)$ sur (E). Le vecteur $\vec{n} = \left(\frac{x}{a^2}, \frac{y}{b^2}\right)$ est normal à (E) en M. Il suffit de vérifier que :

$$\frac{(\vec{n}\,|\,\vec{FM})}{\|\vec{FM}\|} = \frac{(\vec{n}\,|\,\vec{F'M})}{\|\vec{F'M}\|},$$

c'est-à-dire de prouver que :

$$\left(\frac{x}{a^2}(x-c) + \frac{y}{b^2}y\right)^2\left[(x+c)^2+y^2\right] - \left(\frac{x}{a^2}(x+c) + \frac{y}{b^2}y\right)^2\left[(x-c)^2+y^2\right] = 0.$$

Or, sachant que $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, le premier membre s'écrit :

$$\left(1-\frac{cx}{a^2}\right)^2\left[(x+c)^2+y^2\right] - \left(1+\frac{cx}{a^2}\right)^2\left[(x-c)^2+y^2\right] =$$

$$4cx\left(1+\frac{c^2x^2}{a^4}\right) - \frac{4cx}{a^2}\left(x^2+y^2+c^2\right) = \frac{4cxb^2}{a^2}\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)=0.$$

Exercice 4. On élimine dr et $d\theta$ entre les trois relations

$$\frac{\partial F}{\partial r}dr + \frac{\partial F}{\partial \theta}d\theta = 0 \ ; \ dx = \cos\theta\, dr - r\sin\theta\, d\theta \ ; \ dy = \sin\theta\, dr + r\cos\theta\, d\theta$$

et l'on trouve

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin\theta\frac{\partial F}{\partial\theta} - r\cos\theta\frac{\partial F}{\partial r}}{\cos\theta\frac{\partial F}{\partial\theta} + r\sin\theta\frac{\partial F}{\partial r}}.$$

Exercice 5. Différentions les 3 relations proposées :

$$(11)\quad \begin{cases} dz = e^{x}\cos(\alpha y)\,dx - e^{x}\alpha\sin(\alpha y)\,dy \\ 3y^2dy + t\,dy + y\,dt = 0 \\ 3x^2dx - t\,dx - x\,dt = 0 \end{cases}$$

Pour $t=0$, on a $y^3+1=0$ et $x^3+1=0$, donc $x=-1$ et $y=-1$, et les relations (11) s'écrivent :

$3\,dy - dt = 0$; $3\,dx + dt = 0$; $dz = \frac{1}{e}(\cos\alpha\,dx + \alpha\sin\alpha\,dy) =$
$= \frac{1}{e}\left(-\cos\alpha\frac{dt}{3} + \alpha\sin\alpha\frac{dt}{3}\right)$. Donc $\frac{dz}{dt} = \frac{1}{3e}(\alpha\sin\alpha - \cos\alpha)$.

Exercice 6. Voir § IV avec $p=1$.

Exercice 7 1) $2x+2y+z=9$; 2) $4x+y-5z=0$; 3) $x+y-z=2$; 4) au sommet d'un cône, pas de plan tangent.

Exercice 8. Faire $v=\frac{\pi}{4}$, $u=\sqrt{2}$. Par la formule du déterminant, le plan tangent est $\left(1-\frac{\pi}{4}\right)x - \left(1+\frac{\pi}{4}\right)y + \sqrt{2}\,z = 0$.

Exercice 9. On différentie les deux relations et on élimine dv. On obtient $3x\,dx + y\,dy = u\,du$, d'où $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{3x}{u}$.

Exercice 10. Soit $M_0=(x_0,y_0,z_0)$ tel que $f(x_0,y_0,z_0)=0$ et $g(x_0,y_0,z_0)=0$, et tel que $\vec{\nabla}f(M_0)$ et $\vec{\nabla}g(M_0)$ ne soient pas colinéaires. Alors les plans tangents aux deux surfaces sont distincts ; ils se coupent selon une droite, qui est la tangente en M_0 à leur courbe intersection. Un vecteur porté par cette droite est le produit vectoriel $\vec{\nabla}f(M_0)\wedge\vec{\nabla}g(M_0)$, donc le vecteur qui a pour composantes :

$$\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial y}\ ;\ \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial z}\ ;\ \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x},$$

où les dérivées partielles sont calculées au point (x_0,y_0,z_0).

En un point (x_0,y_0,z_0) de la fenêtre de Viviani, le vecteur

$$(-2y_0z_0\ ;\ (2x_0-1)z_0\ ;\ y_0)$$

est tangent. C'est conforme à ce que donnent les équations paramétriques $x=\cos^2\varphi$, $y=\cos\varphi\sin\varphi$, $z=\sin\varphi$, puisque le vecteur tangent $x'=-2\cos\varphi\sin\varphi$, $y'=\cos^2\varphi-\sin^2\varphi$, $z'=\cos\varphi$ est colinéaire au précédent.

Maxima et minima

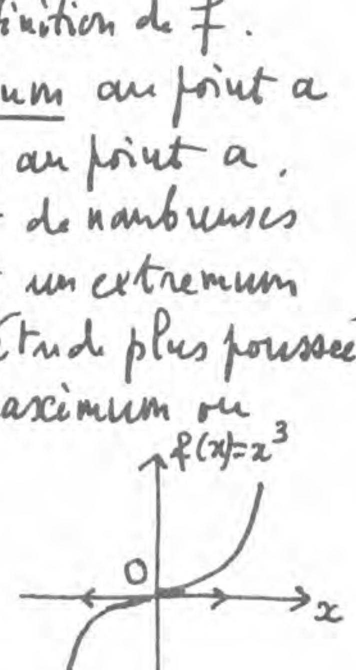
Soit U un ensemble ouvert dans $\mathbb{R}^n$. Soit $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ un point de U. Soit $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ une fonction définie dans U, à valeurs réelles.

On dit que la fonction f présente un maximum (resp. un minimum) au point a s'il existe un nombre $r > 0$ tel que : $x \in U$, $\|x - a\| < r$ impliquent $f(x) \leq f(a)$ [resp. $f(a) \leq f(x)$].

Il s'agit donc d'un maximum relatif, local, et non d'un éventuel maximum maximorum où f prendrait sa plus grande valeur absolue dans tout U. D'autre part rappelons que U est supposé ouvert ; donc nous excluons de notre étude les maxima ou minima pris sur la frontière du domaine de définition de f.

Pour abréger, on dit que f présente un extremum au point a si elle présente un maximum ou un minimum au point a.

Si $n = 1$, pour avoir représenté graphiquement de nombreuses fonctions $y = f(x)$, nous savons que si f présente un extremum au point a, nécessairement $f'(a) = 0$ et qu'une étude plus poussée du signe de $f''(a)$ permet de décider s'il y a maximum ou minimum(*). Le contre-exemple de $f(x) = x^3$ au point $a = 0$ montre que, réciproquement, la condition $f'(a) = 0$ n'est pas suffisante pour qu'on ait un extremum.



Théorème 1 (condition nécessaire d'extremum). Supposons que f est différentiable au point $a = (a_1, \dots, a_n)$. Si f présente un extremum au point a, alors nécessairement $df(a) = 0$; autrement dit :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, \dots, a_n) = 0 \; ; \; \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, \dots, a_n) = 0 \; ; \; \dots \; ; \; \frac{\partial f}{\partial x_n}(a_1, \dots, a_n) = 0.$$

(*) En général. Si $f''(a) = 0$, il faut regarder les dérivées ultérieures.

<u>Démonstration</u>. Relisez d'abord AN01, Leçon n°6, § IV, Proposition 4, qui donne la démonstration dans le cas d'une seule variable. On va se ramener à ce cas. Pour tout $i = 1, 2, \dots, n$, considérons la fonction "partielle" $x_i \longmapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n)$. Par hypothèse elle passe par un maximum ou un minimum au point a_i. Donc sa dérivée en ce point $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n)$ est nulle.

Un point $a \in U$ où toutes les dérivées partielles premières de f s'annulent est appelé <u>point stationnaire</u> de f. Ainsi les points où f présente un maximum ou un minimum sont <u>à chercher parmi</u> les points stationnaires de f, mais une étude plus poussée est requise pour décider si un point stationnaire fournit effectivement ou non un extremum.

<u>Exercice 1</u>. Montrez que dans $\mathbb{R}^2$ la fonction

$$f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$$

a quatre points stationnaires $P_1 = (1,2)$; $P_2 = (2,1)$; $P_3 = (-1,-2)$; $P_4 = (-2,-1)$.

<u>Exercice 2</u>. Déterminez le point stationnaire dans $\mathbb{R}^3$ de

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z.$$

Nous allons maintenant énoncer une condition <u>suffisante</u> d'extremum portant sur les dérivées d'ordre deux. Nous commencerons par le cas des fonctions de <u>deux variables</u>.

<u>Théorème 2</u>. Soit U un ensemble ouvert dans $\mathbb{R}^2$. Soit (a,b) un point de U. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 dans U, telle que les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ soient différentiables au point (a,b). Supposons que (a,b) soit un point stationnaire de f, c'est-à-dire que $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$. Posons :

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) \quad ; \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) \quad ; \quad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b).$$

Alors :

1°) Si $B^2 - AC < 0$, la fonction f présente un extremum au point (a,b) ; c'est un maximum si de plus A (et donc C) est < 0 ; c'est un minimum si de plus A (et donc C) est > 0.

2°) Si $B^2 - AC > 0$, la fonction f ne présente pas d'extremum au point (a,b).

Remarque : si $B^2 - AC = 0$ le théorème est muet.

Exercice 3. Appliquez le Théorème 2 à la fonction $f(x,y)$ de l'Exercice 1. Concluez qu'il y a un minimum en P_2, un maximum en P_4, et pas d'extremum en P_1 ni en P_3.

Démonstration du Théorème 2. Prouvons d'abord le

Lemme. Soient A, B et C trois nombres réels tels que $B^2 - AC < 0$ et $A > 0$. Alors il existe une constante réelle $m > 0$ telle que, quels que soient h et k réels :

$$Ah^2 + 2Bhk + Ck^2 \geqslant m(h^2+k^2).$$

Démonstration du Lemme. L'inégalité cherchée étant triviale pour $h = k = 0$, nous supposons $(h,k) \neq (0,0)$ et passons en coordonnées polaires $h = \sqrt{h^2+k^2}\cos\theta$, $k = \sqrt{h^2+k^2}\sin\theta$. Il s'agit alors de prouver que, si $B^2 - AC < 0$ et $A > 0$, la fonction

$$\varphi(\theta) = A\cos^2\theta + 2B\sin\theta\cos\theta + C\sin^2\theta$$

reste, quand $0 \leq \theta \leq 2\pi$, supérieure ou égale à une constante $m > 0$. Or cette fonction est continue sur le segment $[0, 2\pi]$, et, pour tout θ, prend des valeurs $\varphi(\theta) > 0$, car

$$\varphi(\theta) = \left(\sqrt{A}\cos\theta + \frac{B}{\sqrt{A}}\sin\theta\right)^2 + \frac{1}{A}(AC - B^2)\sin^2\theta$$

est > 0 si $\theta \neq k\pi$, vu qu'alors $\frac{1}{A}(AC - B^2)\sin^2\theta$ est > 0, mais est aussi > 0 si $\theta = k\pi$, vu qu'alors $\varphi(\theta) = \sqrt{A}$. Pour achever la démonstration, il suffit d'appliquer AN01, Leçon n° 5, § III, Corollaire du théorème 2, donc de poser $m = \inf_\theta \varphi(\theta)$.

Démontrons le 1°) du Théorème. Puisque $B^2 - AC$ est < 0, il faut que A soit $\neq 0$. Supposons par exemple $A > 0$ et montrons que f présente un minimum. D'après la formule de Taylor-Young (cf. Leçon n° 5) et le Lemme, dès que $(h,k) \neq (0,0)$ est assez petit :

$$\frac{f(a+h,b+k)-f(a,b)}{h^2+k^2} = \frac{1}{2}\,\frac{Ah^2+2Bhk+Ck^2}{h^2+k^2} + \varepsilon(h,k)$$

$$\geqslant \frac{m}{2} + \varepsilon(h,k) ,$$

où $\varepsilon(h,k)$ tend vers 0 quand (h,k) tend vers 0. Il existe $r > 0$ assez petit pour que $h^2+k^2 < r^2$ implique $\varepsilon(h,k) \geqslant -\frac{m}{4}$.
Alors, si $\|(h,k)\| < r$, on a :

$$f(a+h,b+k)-f(a,b) \geqslant \frac{m}{4}(h^2+k^2) \geqslant 0 ,$$

donc f présente un minimum au point (a,b).

<u>Remarque</u> : on a même prouvé que $f(a+h,b+k)-f(a,b) > 0$ si $(h,k) \neq (0,0)$ et $\|(h,k)\| < r$; on dit qu'il y a minimum <u>strict</u>.

Démontrons enfin le 2°) du Théorème. Supposons que le discriminant B^2-AC soit > 0. Alors, d'après la théorie élémentaire du signe du trinôme, on peut trouver (h_1,k_1) et (h_2,k_2) tels que

$$Ah_1^2+2Bh_1k_1+Ck_1^2 > 0 \quad \text{et} \quad Ah_2^2+2Bh_2k_2+Ck_2^2 < 0 .$$

D'après la formule de Taylor-Young, pour $(h,k) \neq (0,0)$ fixé,

$$f(a+th,b+tk)-f(a,b) = \frac{t^2}{2}(Ah^2+2Bhk+Ck^2) + \varepsilon(t)(h^2+k^2)t^2$$

où $\varepsilon(t)$ tend vers 0 quand $t \to 0$, finit par être du même signe que $Ah^2+2Bhk+Ck^2$ pour $|t|$ assez petit, donc est > 0 si on est parti de (h_1,k_1), et < 0 si on est parti de (h_2,k_2). Dans ce cas il n'y a donc ni maximum ni minimum ; la surface $z = f(x,y)$ présente au voisinage du point (a,b) l'aspect d'une selle de cheval.

<u>Condition suffisante d'extremum dans le cas de n variables</u>

Soit U un ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^2. Soit $a \in U$ tel que $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) = 0$. En posant $A_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$, supposons que la matrice $A = (A_{ij})$ — qui est évidemment symétrique d'après le théorème de Schwarz — soit définie strictement positive (resp. strictement négative), ce qui signifie, si $h_1, h_2, \dots, h_n$ sont des nombres non tous nuls, on a :

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} h_i h_j > 0 \qquad (\text{resp.} < 0).$$

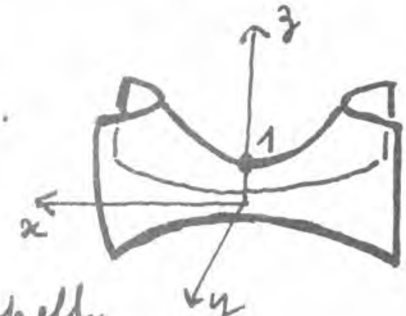
Alors f présente un minimum (resp. un maximum) au point a.

La démonstration est analogue à celle du théorème 2 et s'appuie sur la formule de Taylor-Young à l'ordre deux. Remarquons que le minimum (resp. le maximum) est même strict.

Exercice 4. Montrez que la fonction $f(x,y,z)$ de l'Exercice 2 présente un minimum en son point stationnaire.

Exercice 5. Dans $\mathbb{R}^2$ on donne trois points M_1, M_2, M_3. Trouvez le point M dont la somme des carrés des distances à M_1, M_2 et M_3 soit minimum.

Exercice 6. La fonction $z = 1 + x^2 - y^2$ admet le point $(0,0,1)$ comme point stationnaire, mais n'y présente pas d'extremum. C'est un "point-selle". Au voisinage de ce point la surface $z = 1 + x^2 - y^2$, qu'on appelle paraboloïde hyperbolique, présente l'aspect ci-contre.

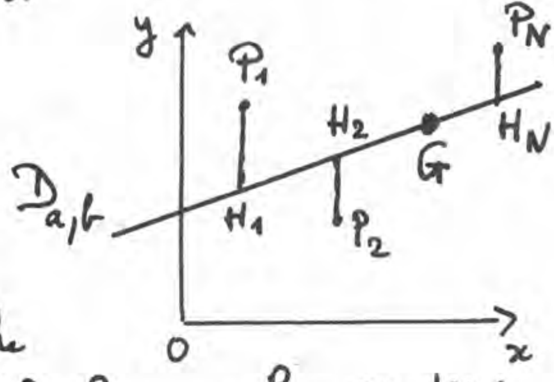


Méthode des moindres carrés

Dans les Sciences physiques, biologiques ou sociales, on rencontre fréquemment le problème de choisir, d'ajuster au mieux, une courbe de nature déterminée (droite, parabole, etc...) de sorte qu'elle passe "au plus près" d'un ensemble fini ou infini de points donnés.

Droite optimale au sens des moindres carrés. Soit N un nombre entier ≥ 2, éventuellement très grand. Pour N valeurs $x_1, \dots, x_N$ distinctes du paramètre réel x, on suppose données (par exemple par des statistiques ou par des mesures expérimentales) N valeurs $y_1, \dots, y_N$. Dans le plan euclidien Oxy, marquons les N points $P_i = (x_i, y_i)$, où $i = 1, 2, \dots, N$. Parmi toutes les droites $D_{a,b}$, d'équation

$$y = ax + b,$$



du plan, on cherche celle qui s'approche au mieux de l'ensemble des données $P_1, P_2, \dots, P_N$, au sens des moindres carrés, c'est-à-dire par définition celle qui rend minimum l'expression

$$E(a,b) = \sum_{i=1}^{N} \overline{H_iP_i}^2 = \sum_{i=1}^{N} (ax_i + b - y_i)^2$$

D'après le Théorème 1, si une telle droite optimale existe, ses coefficients (a, b) sont solution des équations $\frac{\partial E}{\partial a} = 0$, $\frac{\partial E}{\partial b} = 0$, c'est-à-dire vérifient nécessairement le système :

$$\sum_i x_i (ax_i + b - y_i) = 0 \; ; \quad \sum_i (ax_i + b - y_i) = 0,$$

dont la solution (a, b) est donnée par les formules :

$$(1) \quad a = \frac{N \sum_i x_i y_i - (\sum_i x_i)(\sum_i y_i)}{N \sum_i x_i^2 - (\sum x_i)^2} \; ; \quad b = \frac{1}{N}\left(\sum_i y_i - a \sum_i x_i\right)$$

De plus $A = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial a^2} = \sum_i x_i^2$; $B = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial a \partial b} = \sum_i x_i$; et $C = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial b^2} = N$. Par l'inégalité de Schwarz on a :

$$B^2 - AC = \left(\sum_i x_i\right)^2 - N \sum_i x_i^2 < 0 .$$

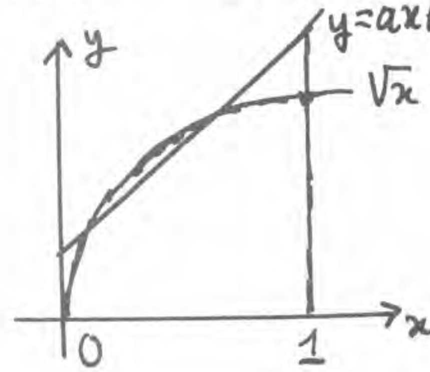
De plus $A > 0$. Les formules (1) fournissent donc bien un <u>minimum</u> de $E(a,b)$, d'après le Théorème 2.

On remarquera que la seconde relation (1) exprime que la droite optimale passe par le <u>centre de gravité</u> G des N points donnés $P_1, \dots, P_N$, car $x_G = \frac{1}{N}\sum_i x_i$, $y_G = \frac{1}{N}\sum_i y_i$.

Exercice 7. Trouvez la droite optimale au sens des moindres carrés pour les données suivantes :

$x_i =$	1	2	3	4	5
$y_i =$	0,39	0,71	0,88	0,99	1,11

Exercice 8. Trouvez la parabole optimale $y = ax^2 + bx + c$ pour les cinq données de l'Exercice 7, c'est-à-dire trouvez les coefficients (a, b, c) qui minimisent $E(a,b,c) = \sum_{i=1}^{5} (ax_i^2 + bx_i + c - y_i)^2$.



Exercice 9 1) Trouvez la droite optimale au sens des moindres carrés pour la fonction $y = \sqrt{x}$ sur $[0,1]$, considérée comme une infinité de données, c'est-à-dire trouvez a et b de sorte que

$$I(a,b) = \int_0^1 (ax + b - \sqrt{x})^2 \, dx$$

soit minimum.

2) Déterminez (a,b,c) pour que

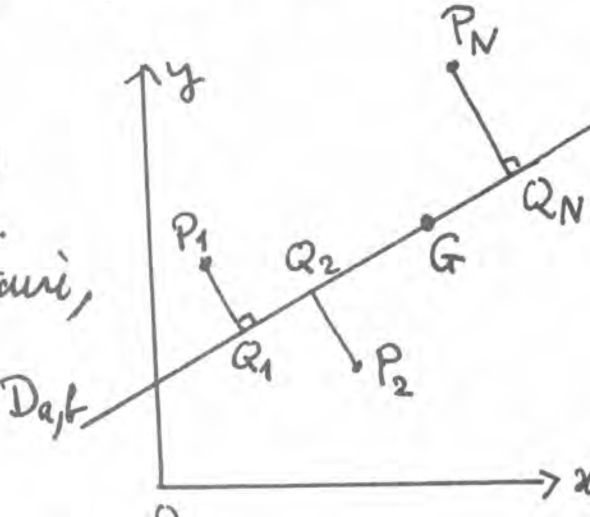
$$J(a,b,c) = \int_0^1 (ax^2 + bx + c - \sqrt{x})^2 \, dx$$

soit minimum.

3) Comparez les valeurs minimales de $I(a,b)$ et $J(a,b,c)$.

Méthode des moindres carrés perpendiculaires.

La méthode qui précède est adaptée au cas où l'on dispose sur les valeurs des x_i d'une précision beaucoup plus grande que sur celles des y_i. Sinon il n'y a pas de raison de faire jouer à l'axe Ox un rôle privilégié, et il vaudra mieux trouver la droite $D_{a,b}$ d'équation $y = ax + b$ qui minimise la somme des carrés des distances des P_i à $D_{a,b}$.



Or, en géométrie analytique élémentaire, on sait que la distance du point (x_0, y_0) à la droite d'équation $y = ax + b$ vaut $\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} |ax_0 + b - y_0|$.

Il s'agit donc de trouver un couple (a,b) qui rende minimum

$$\mathcal{E}(a,b) = \sum_{i=1}^{N} \overline{P_iQ_i}^2 = \frac{1}{1+a^2} \sum_{i=1}^{N} (ax_i + b - y_i)^2.$$

<u>Proposition</u> 1. 1°) La droite optimale pour les moindres carrés perpendiculaires passe par le centre de gravité

$$G = (x_G \,, y_G) = \left(\frac{1}{N}\sum_i x_i \,, \frac{1}{N}\sum_i y_i \right)$$

des données $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$, ..., $P_N = (x_N, y_N)$.

2°) Sa pente a est l'une des deux racines de l'équation du second degré

$$(2) \qquad \left(\sum_i X_i Y_i \right) a^2 + \left(\sum_i X_i^2 - \sum_i Y_i^2 \right) a - \sum_i X_i Y_i = 0$$

où on a désigné par

$$X_i = x_i - x_G = x_i - \frac{1}{N}\sum_i x_i \quad \text{et} \quad Y_i = y_i - y_G = y_i - \frac{1}{N}\sum_i y_i$$

les données recentrées sur G.

<u>Démonstration</u> (esquisse). D'après le théorème 1 on a nécessairement

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial b} = \frac{1}{1+a^2} \sum_i (ax_i + b - y_i) = \frac{N}{1+a^2}(a x_G + b - y_G) = 0,$$

donc la droite optimale, si elle existe, passe par G. Ceci conduit à prendre naturellement G comme origine des coordonnées, donc à poser $X = x - x_G$, $Y = y - y_G$, et à ne plus considérer que les droites D_a d'équation $Y = aX$ qui passent par G. On cherche alors la pente a telle que la fonction

$$\mathcal{E}(a) = \frac{1}{1+a^2} \sum_{i=1}^{N} (aX_i - Y_i)^2$$

soit minimum. On calcule que :

$$\frac{1}{2}\frac{d\mathcal{E}}{da} = \frac{1}{(1+a^2)^2}\left[\left(\sum_i X_i Y_i\right) a^2 + \left(\sum X_i^2 - \sum Y_i^2\right) a - \sum_i X_i Y_i \right].$$

Donc $\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a}$ s'annule pour deux valeurs de a, les racines de l'équation (2). Ces deux pentes ont pour produit -1, donc correspondent à des droites perpendiculaires. L'étude de $\mathcal{E}(a)$ montre que l'une fournit un minimum (c'est celle qui nous intéresse) et l'autre un maximum.

<u>Remarque</u>. Le lecteur averti de la Mécanique du Solide aura

sans doute reconnu dans ce qui précède l'analogue étroit de la recherche des axes de l'ellipse d'inertie. En effet $\mathcal{E}(a,b)$ n'est autre que le moment d'inertie par rapport à la droite $D_{a,b}$ du système des points matériels $P_1, P_2, \dots, P_N$, chacun de masse un.

Exercice 10. Trouvez la droite optimale, pour les moindres carrés perpendiculaires, pour les données :

$x_i =$	0,1	0,9	1,6	3,4
$y_i =$	1,3	2,4	3,2	6,3 .

Extrema des fonctions implicites (extrema liés); méthode des multiplicateurs de Lagrange.

On a souvent à chercher les extrema d'une fonction de plusieurs variables, ces variables étant de plus liées par une ou plusieurs relations. Par exemple on cherche une condition nécessaire d'extremum pour la fonction de 4 variables $f(x,y,z_1,z_2)$ sachant que de plus

(3) $\varphi_1(x,y,z_1,z_2) \equiv 0$; $\varphi_2(x,y,z_1,z_2) \equiv 0$.

Les relations (3) sont les conditions de liaison. Si on est dans les hypothèses de la Leçon n°6, § IV, on peut tirer de (3) z_1 et z_2 comme fonctions implicites de (x,y), reporter dans $f(x,y,z_1,z_2)$ et obtenir ainsi une fonction de 2 variables (sans liaisons) :

$$F(x,y) = f(x,y,z_1(x,y),z_2(x,y)).$$

En appliquant le Théorème 1 à $F(x,y)$, en un extremum on a nécessairement $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$ et $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$, c'est-à-dire :

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial z_1}\dfrac{\partial z_1}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial z_2}\dfrac{\partial z_2}{\partial x} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial z_1}\dfrac{\partial z_1}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial z_2}\dfrac{\partial z_2}{\partial y} = 0 \end{cases},$$

où par ailleurs $\frac{\partial z_1}{\partial x}, \frac{\partial z_1}{\partial y}, \frac{\partial z_2}{\partial x}, \frac{\partial z_2}{\partial y}$ s'obtiennent en différentiant les identités (3):

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial z_1}\dfrac{\partial z_1}{\partial x} + \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial z_2}\dfrac{\partial z_2}{\partial x} = 0 \\[2mm] \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial z_1}\dfrac{\partial z_1}{\partial y} + \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial z_2}\dfrac{\partial z_2}{\partial y} = 0 \\[2mm] \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial z_1}\dfrac{\partial z_1}{\partial x} + \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial z_2}\dfrac{\partial z_2}{\partial y} = 0 \\[2mm] \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial z_1}\dfrac{\partial z_1}{\partial y} + \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial z_2}\dfrac{\partial z_2}{\partial y} = 0 \end{cases}.$$

Ainsi le système des 6 équations linéaires (4) et (5) a des solutions en les 4 inconnues $\dfrac{\partial z_1}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z_1}{\partial y}$, $\dfrac{\partial z_2}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z_2}{\partial y}$. D'après la théorie de Cramer, ceci implique la nullité de deux déterminants caractéristiques ou "bordants", qui sont ici :

$$(6)\qquad \frac{D(f,\varphi_1,\varphi_2)}{D(x,z_1,z_2)} = 0 \quad ; \quad \frac{D(f,\varphi_1,\varphi_2)}{D(y,z_1,z_2)} = 0 .$$

Mais il se trouve que, toujours d'après la théorie de Cramer, (6) est aussi la condition pour que le système des quatre équations :

$$(7)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \mu\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x} = 0 \\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \mu\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial y} = 0 \\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial z_1} + \lambda\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial z_1} + \mu\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial z_1} = 0 \\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial z_2} + \lambda\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial z_2} + \mu\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial z_2} = 0 \end{cases} \qquad \text{aux deux inconnues } \lambda \text{ et } \mu$$

ait des solutions (λ, μ). En introduisant la fonction auxiliaire :

$$f^*(x,y,z_1,z_2) = f(x,y,z_1,z_2) + \lambda\varphi_1(x,y,z_1,z_2) + \mu\varphi_2(x,y,z_1,z_2),$$

(7) s'exprime simplement par l'annulation des dérivées partielles de la fonction f^*. Bien entendu cette idée de démonstration a une portée générale, et l'on peut énoncer le

<u>Théorème 3</u>. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^{n+p}$. Soient f ; $\varphi_1, \dots, \varphi_p$ $p+1$ fonctions réelles de classe C^1 dans U. On suppose que le jacobien $\dfrac{D(\varphi_1, \dots, \varphi_p)}{D(x_{n+1}, \dots, x_{n+p})}$ n'est jamais nul dans U. Soit L l'ensemble des points $x = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+p})$ de U qui obéissent aux conditions (<u>de liaison</u>) :

$$(L) \quad \begin{cases} \varphi_1(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+p}) = 0 \\ \varphi_2(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+p}) = 0 \\ \text{---------------------------} \\ \varphi_p(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+p}) = 0 \end{cases} .$$

Soit $a \in L$. On dit que f présente au point a un <u>maximum</u> (resp. minimum) <u>lié</u> par (L) si, pour tout x <u>dans L</u> suffisamment voisin de a, vaut l'inégalité $f(x) \leq f(a)$ [resp. $f(x) \geq f(a)$]. On obtient une condition <u>nécessaire</u> (du premier ordre ; de stationnarité) pour qu'il en soit ainsi en introduisant dans U la <u>fonction auxiliaire</u> :

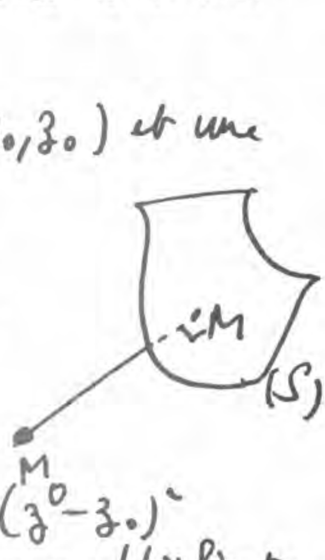
$$f^* = \lambda_1 \varphi_1 + \dots + \lambda_p \varphi_p + f ,$$

où les constantes $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont appelées les <u>multiplicateurs</u>, et en écrivant au point a les conditions d'extremum libre pour f^*, à savoir :

$$(8) \quad \frac{\partial f^*}{\partial x_1} = \dots = \frac{\partial f^*}{\partial x_n} = \frac{\partial f^*}{\partial x_{n+1}} = \dots = \frac{\partial f^*}{\partial x_{n+p}} = 0$$

au point a, et enfin en <u>éliminant</u> $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ entre les relations ainsi obtenues et les relations de liaison (L).

<u>Exemple</u>. Dans $\mathbb{R}^3$ on donne un point $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ et une surface (S) d'équation $\varphi(x,y,z) = 0$. Montrons qu'<u>en un point M de (S) qui est à la plus courte distance possible de M_0</u>, <u>nécessairement la droite M_0M est normale à (S)</u>. En effet en un tel point $M = (x,y,z)$ il y a extremum de la fonction



$$f(x,y,z) = \| M_0M \|^2 = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2$$

liée par la condition $\varphi(x,y,z) = 0$. Donc il existe un multiplicateur

λ tel que, si on pose $f^* = \lambda\varphi + f$, c'est-à-dire :

$$f^*(x,y,z) = \lambda\,\varphi(x,y,z) + (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2,$$

on ait $\dfrac{\partial f^*}{\partial x} = \dfrac{\partial f^*}{\partial y} = \dfrac{\partial f^*}{\partial z} = 0$. Ainsi il existe λ tel que

$$\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x} + 2(x-x_0) = 0\ ;\quad \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y} + 2(y-y_0) = 0\ ;\quad \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial z} + 2(z-z_0) = 0.$$

Autrement dit le vecteur $\overrightarrow{M_0M}$ est colinéaire au vecteur normal $\overrightarrow{\nabla}\varphi = \left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}, \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}, \dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\right)$.

<u>Exercice 11</u>. Par cette méthode trouvez les extrema de $x+2y$ sachant que $x^2+y^2=5$. Puis trouvez une méthode géométrique directe.

<u>Exercice 12</u>. Trouver les axes de symétrie de l'ellipse

$$(E)\quad 5x^2 + 4xy + 2y^2 = 1$$

en cherchant parmi les points de (E) ceux qui rendent maximum ou minimum le carré x^2+y^2 de la distance à O.

<u>Exercice 13</u>. Etudiez les extrema de xyz sachant que $x+y+z=5$ et $xy+yz+zx=8$.

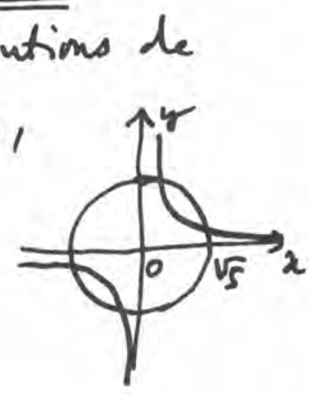
<u>Exercice 14</u>. Soient p et q deux nombres réels tels que $0<q\leq p$. Calculez le maximum de $x_1^q + x_2^q + \cdots + x_n^q$ sachant que $x_1^p + x_2^p + \cdots + x_n^p = 1$, et $x_1>0, x_2>0, \ldots, x_n>0$.

<u>Exercice 15</u>. On considère une matrice $A=(a_{ij})$ à n lignes et n colonnes, variable, mais dont les vecteurs-colonnes ont des longueurs données. Montrez que, lorsque $\det A$ est maximum, nécessairement les vecteurs-colonnes sont deux à deux orthogonaux. Interprétez géométriquement pour $n=2$ et $n=3$.

<u>Indications sur les exercices proposés dans cette Leçon</u>

<u>Exercice 1</u>. Les points stationnaires (x,y) sont les solutions de

$$\frac{1}{3}\frac{\partial f}{\partial x} = x^2+y^2-5 = 0\ ;\quad \frac{1}{6}\frac{\partial f}{\partial y} = xy-2 = 0,$$



ce qui équivaut géométriquement à l'intersection d'un cercle et d'une hyperbole, et fournit les 4 points $P_1=(1,2)$; $P_2=(2,1)$; $P_3=(-1,-2)$; $P_4=(-2,-1)$.

<u>Exercice 2</u>. $(-2/3, -1/3, 1)$.

<u>Exercice 3</u>. $A=6x$, $B=6y$, $C=6x$; $B^2-AC = 6(y^2-x^2)$. On applique le Théorème 2 aux points P_1, P_2, P_3, P_4.

<u>Exercice 4</u>. La matrice des dérivées secondes $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est définie strictement positive car $\sum_{i,j=1}^{3} A_{ij} h_i h_j = 2(h_1^2+h_2^2+h_3^2)$.

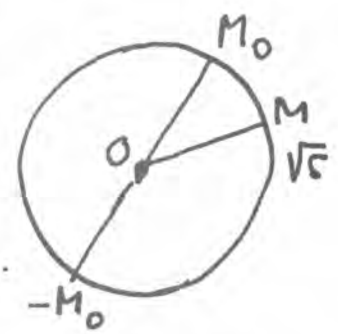
<u>Exercice 5</u>. $f(x,y) = (x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(x-x_2)^2+(y-y_2)^2+(x-x_3)^2+(y-y_3)^2$;
$\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x} = 3x-(x_1+x_2+x_3)$; $\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y} = 3y-(y_1+y_2+y_3)$; $A=C=6$, $B=0$
donc $B^2-AC<0$ et $A>0$. Il y a un minimum au point G de coordonnées $x=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$, $y=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}$, le centre de gravité du triangle $M_1M_2M_3$.

<u>Exercice 7</u>. $y=0,17x+0,31$. <u>Exercice 8</u>. $a=-0,0329$; $b=0,3691$; $c=0,0701$.

<u>Exercice 9</u> 1°) $y=\frac{4}{15}(3x+1)$; 2°) $y=\frac{1}{35}(-20x^2+48x+6)$;
3°) $\min I(a,b) = 1/450$; $\min J(a,b,c) = \frac{1}{2.450}$, plus de 5 fois mieux.

<u>Exercice 10</u>. $y = 1,5724\,x + 1,0089$.

<u>Exercice 11</u>. $M=(x,y)$ parcourant le cercle de centre O, de rayon $\sqrt{5}$, on étudie $x+2y = (\vec{OM} \mid \vec{OM_0})$ où $M_0=(1,2)$. Ce produit scalaire est évidemment maximum quand $M=M_0$, minimum quand $M=-M_0$.



<u>Exercice 12</u>. Les droites de pente $1/2$ et -2.

<u>Exercice 13</u>. Maximum aux points $(4/3, 4/3, 7/3)$; $(4/3, 7/3, 4/3)$; et $(7/3, 4/3, 4/3)$; minimum aux points $(2,2,1)$; $(2,1,2)$; et $(1,2,2)$.

<u>Exercice 14</u>. La méthode de Lagrange montre que le maximum a lieu quand $x_1=x_2=\cdots=x_n$ (donc $=n^{-1/p}$), donc vaut $n^{1-q/p}$.

<u>Exercice 15</u>. On développe $\det A$ selon la j-ième colonne :
$$\det A = a_{1j}C_{1j} + \cdots + a_{nj}C_{nj}.$$
$f^* = \sum_j \lambda_j\left(\sum_i a_{ij}^2 - \text{cste}\right) + \det A$. Les conditions $\frac{\partial f^*}{\partial a_{ij}}=0$ se traduisent par la proportionnalité de $(a_{1j},\dots,a_{nj})$ avec $(C_{1j},\dots,C_{nj})$. Mais, si $h\neq j$, on sait que $a_{1h}C_{1j}+\cdots+a_{nh}C_{nj}=0$, d'où l'orthogonalité des colonnes j et h. Un parallélogramme (parallélépipède) de côtés de longueur donnée est d'aire (volume) maximum quand il est rectangle.

Intermède sur la méthode

Les cinq leçons qui suivent traitent du Calcul Intégral à plusieurs variables. Il s'agit de "mesurer" des ensembles de $\mathbb{R}^n$ (au sens de Jordan), d' "intégrer" des fonctions de n variables réelles (au sens de Riemann), de définir les intégrales curvilignes, les intégrales de surface, de mettre en évidence les formules de Stokes ; ce dernier point sera éclairé par un exposé naïf du Calcul différentiel extérieur.

Par souci de concision, les définitions et les énoncés seront donnés directement en dimension n, mais il va de soi que le lecteur aura constamment à l'esprit les cas $n=2$ et $n=3$, qui feront l'objet de la plupart des illustrations et exercices.

Il y a une théorie de la mesure et de l'intégrale différente de celle de Jordan-Riemann exposée ici, à savoir celle de Lebesgue(*), qui est beaucoup plus satisfaisante et sans doute définitive. Mais — chaque chose en son temps ! — il n'est pas question de l'exposer à ce niveau. Pour une première approche le cerveau se trouve bien de suivre la démarche historique.

Nous n'avons pas honte d'annoncer que les résultats seront pour la plupart donnés <u>sans démonstrations</u>. Ne cherchons pas l'absolue rigueur formelle pour un premier contact avec une théorie d'ailleurs non définitive, mais plutôt essayons d'acquérir une <u>pratique</u> des concepts introduits et de leur calcul ! Les mathématiques, dans l'histoire de leur développement comme dans leur pédagogie, passent par trois stades : comprendre, bricoler, et enfin (si on a le temps !) démontrer ...

(*) Henri Lebesgue (1875-1941) était professeur au Lycée Henri Poincaré à Nancy, quand il soutint en 1902 son immortelle thèse sur "Intégrale, longueur, aire", Ann. Mat. 7 (3), 231-359.

Mesure. Intégrale. Théorème de Fubini.

I. Ensembles mesurables ; mesure d'un tel ensemble

Soit n un entier ≥ 1. Nous sommes dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ des $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Pour tout entier $k \geq 0$, on définit Q_k le pavage (dyadique) d'ordre k de $\mathbb{R}^n$ comme étant l'ensemble des (hyper) cubes ou pavés $q_i/2^k \leq x_i \leq \frac{q_i+1}{2^k}$, où $i=1,2,..,n$, et où les q_i sont des entiers quelconques. Par exemple si $n=2$, Q_k est le quadrillage du plan dont les carreaux sont délimités par les droites verticales d'abscisses $\frac{q}{2^k}$ et les droites horizontales d'abscisses $\frac{p}{2^k}$, où p et q sont des entiers.

On passe du pavage Q_k au pavage plus fin Q_{k+1} en subdivisant chaque pavé de Q_k par le milieu de ses côtés en 2^n pavés de Q_{k+1}.

Pour mesure de chaque pavé constituant Q_k, il est naturel de prendre le nombre $1/2^{kn}$. Pour mesure d'un ensemble polyédral simple d'ordre k, c'est-à-dire réunion d'un nombre fini N de pavés de Q_k, il est naturel de prendre le nombre $N/2^{kn}$.

Soit A un ensemble borné de $\mathbb{R}^n$. Regardez les figures ci-après. Le plus petit ensemble polyédral simple d'ordre k contenant A est

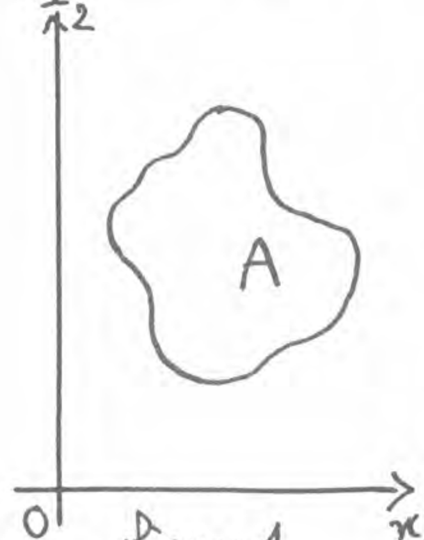


figure 1

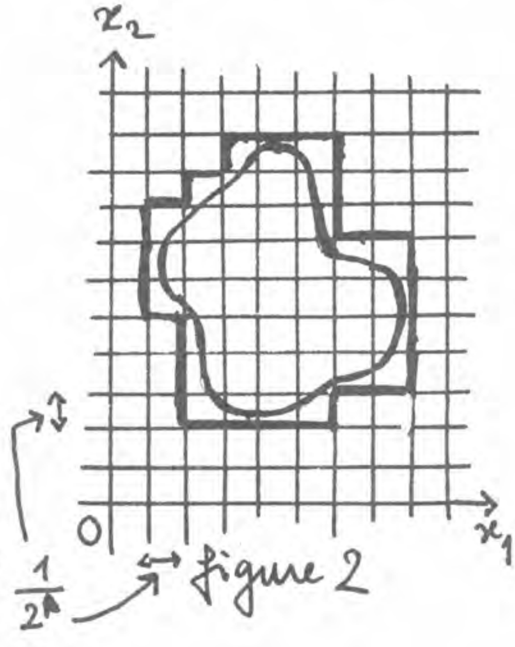


figure 2

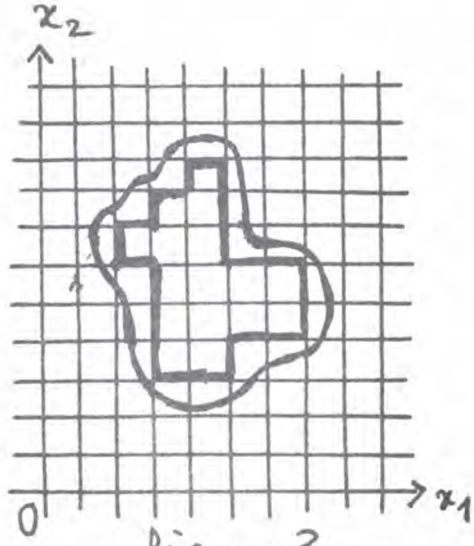


figure 3

formé des pavés (en nombre fini N_k) de Q_k qui ont au moins un point commun avec A ; il est représenté sur la figure 2 (où $N_k = 42$) ; sa mesure vaut $N_k/2^{kn}$. Le plus grand ensemble polyédral simple d'ordre k contenu dans A est formé des pavés (en nombre fini ν_k) de Q_k qui sont entièrement contenus dans A ; il est représenté sur la figure 3 (où $\nu_k = 16$) ; sa mesure vaut $\nu_k/2^{kn}$. Quand on raffine le pavage Q_k en le pavage Q_{k+1} (faites une figure) l'ensemble polyédral de la figure 2 ne peut que se contracter, et celui de la figure 3 ne peut que se dilater. Donc, quand $k \to +\infty$, la suite $(N_k/2^{kn})$ est décroissante minorée, et la suite $(\nu_k/2^{kn})$ est croissante et majorée. Par conséquent ces deux suites ont des limites ; celle de la première est $\geq$ celle de la seconde.

<u>Définition</u>. On dit que l'ensemble borné A de $\mathbb{R}^n$ est <u>mesurable</u> (au sens de Jordan) si $\lim\limits_{k \to +\infty} \frac{N_k}{2^{kn}} = \lim\limits_{k \to +\infty} \frac{\nu_k}{2^{kn}}$. Dans ce cas cette limite commune est appelée <u>mesure</u> de A (ou encore <u>aire</u> de A si $n = 2$, et aussi <u>volume</u> de A si $n = 3$ ou même si $n > 3$), et notée $\operatorname{mes}(A)$.

<u>Propriétés</u>. Soient A et B deux ensembles bornés mesurables. Alors : 1°) $\operatorname{mes}(A) \geqslant 0$; 2°) si A est contenu dans B, on a l'inégalité $\operatorname{mes}(A) \leqslant \operatorname{mes}(B)$; 3°) la réunion $A \cup B$ et l'intersection $A \cap B$ sont des ensembles mesurables, et on a la formule :

$$\operatorname{mes}(A \cup B) = \operatorname{mes}(A) + \operatorname{mes}(B) - \operatorname{mes}(A \cap B).$$

En particulier, si A et B sont disjoints, $\operatorname{mes}(A \cup B) = \operatorname{mes}(A) + \operatorname{mes}(B)$; 4°) tout "translaté" de A, c'est-à-dire tout ensemble des $x + b$, où $x \in A$ et b est fixe, a même mesure que A. 5°) Si f est une application <u>linéaire</u> de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, alors $f(A)$ est un ensemble mesurable, et $\operatorname{mes}[f(A)] = |\operatorname{dét} f| \operatorname{mes}(A)$. En particulier la mesure d'un ensemble est invariante par les transformations f orthogonales, et même, plus généralement, par toute transformation linéaire f de déterminant ± 1.

<u>Exemples</u> 1°) Dans $\mathbb{R}^2$ l'aire d'un parallélogramme de côtés $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ est la valeur absolue du déterminant des vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2$. Dans $\mathbb{R}^3$ le volume d'un parallélipipède de côtés $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ est la valeur absolue du déterminant de ces trois vecteurs.

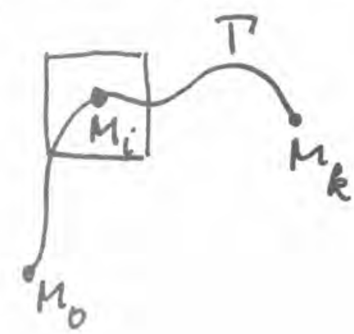
2°) Dans $\mathbb{R}$, l'ensemble A des nombres <u>rationnels</u> du segment $[0,1]$ n'est <u>pas</u> mesurable (au sens de Jordan(*)). En effet, de la propriété que tout intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ contient des nombres rationnels et des nombres irrationnels, on déduit que, pour tout k, le plus petit ensemble polyédral simple d'ordre k contenant A est le segment $[0,1]$ (de mesure 1), et le plus grand ensemble polyédral simple d'ordre k contenu dans A est l'ensemble vide (de mesure 0). Quand $k \to \infty$, on obtient les limites 1 et 0 non égales.

3°) Soit Γ l'image dans $\mathbb{R}^2$ d'un <u>arc de courbe</u> de classe C^1

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad \text{où } a \leq t \leq b.$$

On sait qu'un tel arc a une longueur $L = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt$; cf. AN02, Leçon n° 11. L'ensemble Γ est mesurable et d'<u>aire nulle</u> dans $\mathbb{R}^2$. Montrons ce dernier point. Pour tout entier $k \geq 1$ fixé, marquons le long de Γ les $k+1$ points successifs tels que :

$$\text{longueur}(\overset{\frown}{M_i M_{i+1}}) = \frac{L}{k}$$



pour tout $i = 0, 1, \ldots, k-1$. De chaque point M_i faisons le centre d'un carré de côtés parallèles aux axes ayant pour longueur $\frac{4L}{k}$. L'ensemble A, réunion de ces $k+1$ carrés, contient l'ensemble Γ, et donc :

$$\text{mes}(\Gamma) \leq \text{mes}(A) \leq \frac{16 L^2}{k^2}(k+1)$$

En faisant tendre k vers $+\infty$, on voit que $\text{mes}(\Gamma) = 0$.

(*) Dans sa théorie, Lebesgue l'a rendu mesurable (et de mesure nulle).

4) On verrait de même qu'une surface simple dans $\mathbb{R}^3$ est de volume nul ; qu'une hypersurface dans $\mathbb{R}^n$ est de mesure nulle.

5) La plupart des ensembles bornés usuels sont mesurables. Par exemple, soit A un ensemble ouvert borné. La frontière de A est l'ensemble des $x \in \mathbb{R}^n$ tels que, pour tout $r > 0$, la boule centrée en x, de rayon r, contient des points de A et des points non dans A. On a la

Proposition 1. Soit A un ensemble ouvert borné dont la frontière soit un ensemble de mesure nulle. Alors l'ensemble A est mesurable.

Comme très souvent la frontière de A est, si $n=2$, une courbe fermée de classe C^1, si $n=3$, une surface simple, il n'y aura aucun doute que cette frontière sera de mesure nulle, et l'on pourra appliquer la Proposition 1.

II. Fonctions intégrables. Intégrale.

Relisez d'abord la Leçon n°3 de AN02 qui traite du cas $n=1$.

Soit A un ensemble borné mesurable de $\mathbb{R}^n$. Soit f une fonction à valeurs réelles, définie et bornée dans A. Il est commode de considérer f comme définie sur $\mathbb{R}^n$ tout entier, en décidant que $f(x)=0$ si x n'appartient pas à l'ensemble A.

Le pavage Q_k est formé d'une famille infinie de pavés P_{kj} : quand on fait varier j, on obtient les divers pavés du pavage d'ordre k fixé. La fonction f (étendue à $\mathbb{R}^n$) est d'ailleurs nulle sur tous ces pavés sauf un nombre fini d'entre eux ; les sommes qu'on va écrire sont donc en réalité des sommes finies.

Pour tout entier $k \geq 0$, posons :

$$s_k(f) = \frac{1}{2^{kn}} \sum_j \inf_{x \in P_{kj}} f(x) \quad \text{et} \quad S_k(f) = \frac{1}{2^{kn}} \sum_j \sup_{x \in P_{kj}} f(x) ,$$

qu'on appelle respectivement les sommes de Riemann inférieure et supérieure de f pour le pavage Q_k.

Quand on raffine le pavage et fait tendre k vers $+\infty$, la suite $(s_k(f))$ est croissante majorée, la suite $S_k(f)$ est décroissante minorée. Ces suites ont donc des limites.

<u>Définition</u>. Soit A un ensemble mesurable borné de $\mathbb{R}^n$, et soit f une fonction bornée sur A. On dit que f est <u>intégrable</u> (au sens de Riemann) si $\lim_{k\to+\infty} s_k(f) = \lim_{k\to+\infty} S_k(f)$. Dans ce cas, cette limite commune est appelée <u>intégrale</u> de f sur A, et notée :

$$\int_A f(x)\,dx \quad \text{, ou encore} \quad \iint\!\!\cdots\!\!\int_A f(x_1,x_2,\dots,x_n)\,dx_1\,dx_2\dots dx_n .$$

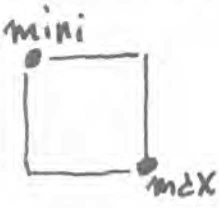
Si $n=2$ on parle d'intégrale <u>double</u>, si $n=3$ d'intégrale <u>triple</u>, si $n\geq 2$ d'intégrale <u>multiple</u>.

Avant même d'énoncer les théorèmes qui permettent de calculer certaines de ces intégrales, remarquons que leur définition même, comme limite de sommes de Riemann, donne en tout cas un moyen sûr d'en obtenir des valeurs numériques approchées.

<u>Exercice 1</u>. Dans $\mathbb{R}^2$ soit A le carré $3\leq x\leq 4$; $1\leq y\leq 2$. Pour $(x,y)\in A$, on pose $f(x,y) = \operatorname{Log}\dfrac{x^2-y^2}{4}$.

1°) Dressez le tableau des valeurs de $f(x,y)$ pour les 25 points obtenus en prenant $x=3$; $3{,}25$; $3{,}50$; $3{,}75$; 4 et $y=1$; $1{,}25$; $1{,}50$; $1{,}75$; 2.

2°) Dans un carré de côtés parallèles aux axes contenu dans A, constatez que $f(x,y)$ prend son maximum et son minimum dans les deux coins figurés ci-contre. Déduisez-en que



$$s_2(f) = 0{,}753 \quad ; \quad S_2(f) = 1{,}033$$

et que, par conséquent :

$$0{,}753 \leq \iint_{\substack{3\leq x\leq 4\\ 1\leq y\leq 2}} \operatorname{Log}\frac{x^2-y^2}{4}\,dx\,dy \leq 1{,}033 .$$

<u>Exercice 2</u>. Soit dans le carré $A = \{0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq 1\}$ la fonction $f(x,y) = e^{-xy}$. Pour $k = 0,1,2,3,4,5$, calculez $s_k(f)$

et $S_k(f)$. Déduisez-en l'encadrement : $0,785 \leq \iint_A e^{-xy}\,dx\,dy \leq 0,808$.

Propriétés de l'intégrale.

On étend sans difficultés la définition aux fonctions bornées à valeurs complexes, qui sont dites intégrables sur A si leurs parties réelle $\mathrm{Re} f$ et imaginaire $\mathrm{Im} f$ le sont, en posant :

$$\int_A f(x)\,dx = \int_A \mathrm{Re} f(x)\,dx + i \int_A \mathrm{Im} f(x)\,dx.$$

Ceci dit, soient A et B des ensembles mesurables bornés dans $\mathbb{R}^n$, et soient f et g des fonctions bornées intégrables sur A. Alors :

1°) $\operatorname{mes}(A) = \int_A 1\,dx$ (notée $\int_A dx$) ;

2°) quels que soient λ et μ dans $\mathbb{C}$, la fonction $\lambda f + \mu g$ est intégrable sur A, et $\int_A (\lambda f + \mu g)(x)\,dx = \lambda \int_A f(x)\,dx + \mu \int_A g(x)\,dx$; ainsi l'intégration est une opération linéaire ;

3°) si f est réelle partout ≥ 0 sur A, alors $\int_A f(x)\,dx$ est réel ≥ 0 ;

4°) si f et g sont réelles, et $f \leq g$ partout sur A, alors

$$\int_A f(x)\,dx \leq \int_A g(x)\,dx ;$$

5°) si f est réelle sur A, on a :

$$\inf_{x\in A} f(x) \leq \frac{1}{\operatorname{mes}(A)} \int_A f(x)\,dx \leq \sup_{x\in A} f(x) ;$$

6°) (formule de la moyenne)

$$\left| \int_A f(x)\,dx \right| \leq \int_A |f(x)|\,dx \leq (\operatorname{mes} A) \sup_{x\in A} |f(x)| ;$$

7°) supposons f aussi bornée et intégrable sur B, et B disjoint de A ; alors $\int_{A\cup B} f(x)\,dx = \int_A f(x)\,dx + \int_B f(x)\,dx$.

Proposition 2. Si A est un ensemble ouvert borné mesurable, et si f est continue dans A, alors f est intégrable sur A.

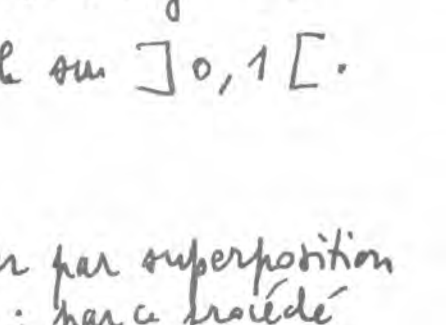
Combinée avec la Proposition 1, cette Proposition 2 permet de s'assurer que, sur la plupart des ensembles bornés usuels, la plupart des fonctions bornées usuelles sont intégrables. On se souviendra notamment que l'intégrale d'une fonction bornée sur un ensemble <u>de mesure nulle</u> est nulle (en vertu de la formule de la moyenne 6°) ci-dessus), donc qu'on peut modifier A par un ensemble de mesure nulle sans changer $\int_A f(x)\,dx$. En particulier, il importe peu que la fonction f soit très discontinue sur la frontière d'un ensemble ouvert A ; <u>pourvu que cette frontière soit de mesure nulle</u>, et que f soit continue et bornée sur A, alors f est intégrable.

<u>Exemple</u>: La fonction $x \mapsto \sin\frac{1}{x}$ est intégrable sur $]0,1[$.

III. Théorème de Fubini

Les intégrales multiples peuvent se calculer par superposition de calculs d'intégrales de dimensions plus petites ; par ce procédé on essaye par récurrence de descendre la dimension jusqu'au cas $n=1$, pour lequel on dispose des méthodes de AN02. En lisant l'énoncé ci-après, pensez d'abord surtout au cas $n=2$, que nous reprendrons d'ailleurs en détail ensuite.

<u>Théorème 1</u> (Théorème de Fubini). Soit $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ l'ensemble des $x = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = (x' ; x_n)$, où l'on a posé $x' = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$. Soit A' un ensemble ouvert mesurable borné dans $\mathbb{R}^{n-1}$, et soit φ et ψ deux fonctions continues sur A', à valeurs réelles, bornées, et telles que, pour tout $x' \in A'$, on ait $\varphi(x') < \psi(x')$. Soit A l'ensemble, évidemment ouvert et borné, de $\mathbb{R}^n$ formé des



$$x = (x' ; x_n) \text{ tels que } x' \in A' \text{ et } \varphi(x') < x_n < \psi(x').$$

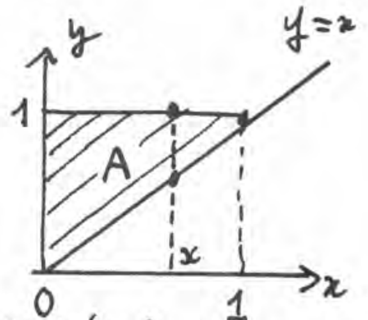
On suppose A mesurable dans $\mathbb{R}^n$. Alors :

$$\int_A f(x)\,dx = \int_{A'} \left(\int_{\varphi(x')}^{\psi(x')} f(x' ; x_n) \right) dx_n ,$$

ce qui s'écrit encore : $\int\cdots\iint_A f(x_1,\dots,x_{n-1},x_n)\,dx_1\dots dx_{n-1}dx_n =$

$$= \int\cdots\int_{A'} \left(\int_{\varphi(x_1,\dots,x_{n-1})}^{\psi(x_1,\dots,x_{n-1})} f(x_1,\dots,x_{n-1};x_n)\,dx_n \right) dx_1\dots dx_{n-1}.$$

Ainsi le calcul d'une intégrale n-uple s'effectue en calculant une intégrale simple en x_n (avec paramètres $x_1,\dots,x_{n-1}$ figurant à la fois sous le signe $\int$ et dans les bornes d'intégration), puis une intégrale (n-1)-uple. Si le domaine (n-1)-dimensionnel A' est encore du même type que A, on peut recommencer etc..., et ainsi ramener le calcul de $\int\cdots\iint_A f(x_1,\dots,x_n)\,dx_1\dots dx_n$ à une superposition de calculs d'intégrales simples.



Exemple 1. Calculez $I = \iint_A (x^2+y)\,dx\,dy$ où A est le triangle hachuré ci-contre. Ici $x'=x$; $x_n=y$; $\varphi(x)=x$; $\psi(x)\equiv 1$;

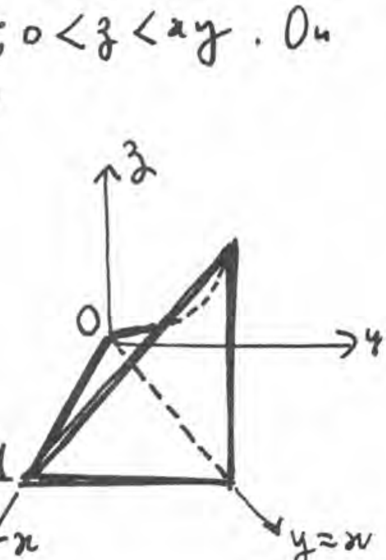
$A' =]0,1[$; et $A=\{(x,y),\ x\in A',\ \varphi(x)<y<\psi(x)\}$.

$$I = \int_0^1 \left(\int_x^1 (x^2+y)\,dy \right) dx = \int_0^1 \left[x^2y + \frac{y^2}{2} \right]_{y=x}^{y=1} dx =$$

$$= \int_0^1 \left(x^2 + \frac{1}{2} - x^3 - \frac{x^2}{2} \right) dx = 5/12 .$$

Exemple 2. Calculons $J = \iiint_A x^3y^2z\,dx\,dy\,dz$, où A est l'ensemble des $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ tels que : $0<x<1$; $0<y<x$; $0<z<xy$. On applique deux fois de suite le théorème de Fubini :

$$J = \iint_{\substack{0<x<1\\0<y<x}} \left(\int_0^{xy} x^3y^2z\,dz \right) dx\,dy =$$

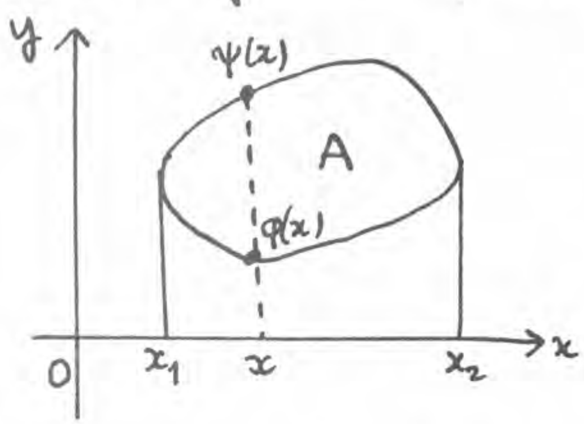


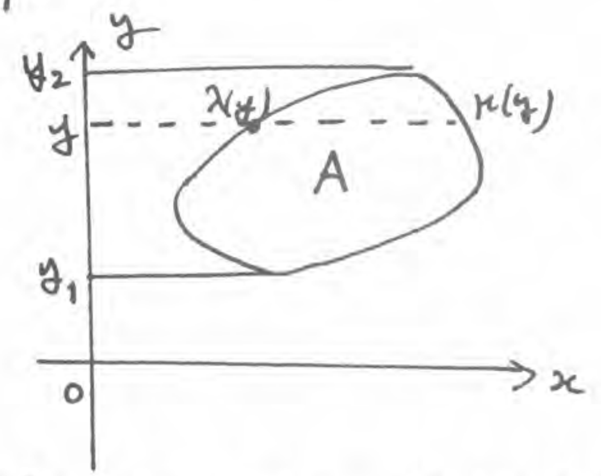
$$= \iint_{\substack{0<x<1\\0<y<x}} \left[x^3y^2\frac{z^2}{2} \right]_{z=0}^{z=xy} dx\,dy =$$

$$= \iint_{\substack{0<x<1\\0<y<x}} \frac{x^5y^4}{2}\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_0^x \frac{x^5y^4}{2}\,dy\right)dx =$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{x^5y^5}{10}\right]_{y=0}^{y=x} dx = \int_0^1 \frac{x^{10}}{10}\,dx = \frac{1}{110}.$$

Souvent le domaine d'intégration est tel qu'on puisse lui appliquer le Théorème 1, en distinguant d'abord une autre variable x_i que x_n ; ces deux procédés conduisent à la <u>même</u> valeur de l'intégrale $\int_A f(x)dx$, et cette égalité de résultats de deux calculs de démarches différentes fournit elle-même une <u>formule d'interversion</u> (dite <u>de Fubini</u>). Si par exemple un ouvert borné A de $\mathbb{R}^2$ est limité par une courbe fermée simple de sorte que :





$A = \{(x,y)\ ;\ x_1<x<x_2,\ \varphi(x)<y<\psi(x)\} = \{(x,y)\ ;\ y_1<y<y_2,\ \lambda(y)<x<\mu(y)\}$, on aura :

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_{x_1}^{x_2}\left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy\right)dx = \int_{y_1}^{y_2}\left(\int_{\lambda(y)}^{\mu(y)} f(x,y)\,dx\right)dy,$$

ce qui : 1) permet de ramener le calcul de l'intégrale double à celui de deux intégrales simples, et ceci de deux manières ;

2) fournit, grâce à la deuxième inégalité, une formule d'interversion qui, parfois, donne des résultats profonds.

<u>Exemple 1 revisité</u>. En intégrant cette fois d'abord par rapport à x,

$$I = \iint_A (x^2+y)\,dx\,dy = \int_0^1\left(\int_0^y (x^2+y)\,dx\right)dy = \int_0^1 \left[\frac{x^3}{3}+yx\right]_{x=0}^{x=y} dy =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{y^3}{3} + y^2\right) dy = \left[\frac{y^4}{12} + \frac{y^3}{3}\right]_{y=0}^{y=1} = \frac{5}{12}.$$

<u>Exemple</u> 3. Appliquons la formule d'interversion de Fubini à la fonction définie dans le carré $\{0<x<1\ ;\ 1<y<2\}$ par $f(x,y)=x^y$:

$$\int_1^2\left(\int_0^1 x^y\,dx\right)dy = \int_0^1\left(\int_1^2 x^y\,dy\right)dx.$$

Le premier membre vaut :

$$\int_1^2 \left[\frac{x^{y+1}}{y+1}\right]_{x=0}^{x=1} dy = \int_1^2 \frac{dy}{y+1} = \operatorname{Log}\frac{3}{2}.$$

Le second membre vaut

$$\int_0^1 \left[\frac{x^y}{\operatorname{Log} x}\right]_{y=1}^{y=2} dx = \int_0^1 \frac{x(x-1)}{\operatorname{Log} x}\,dx,$$

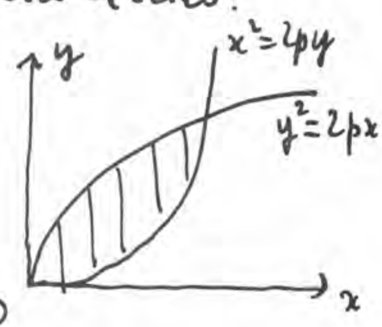
mais cette dernière intégrale n'est pas évidente à calculer par les méthodes de AN02. En fait c'est la formule de Fubini elle-même qui nous donne sa valeur :

$$\int_0^1 \frac{x(x-1)}{\operatorname{Log} x}\,dx = \operatorname{Log}\frac{3}{2}.$$

<u>Exercice</u> 3. Reprenez l'intégrale $\displaystyle\iint_{\substack{3\le x\le 4\\ 1\le y\le 2}} \operatorname{Log}\frac{x^2-y^2}{4}\,dx\,dy$ estimée grossièrement à l'Exercice 1, transformez le Log en une somme, et calculez l'intégral par le théorème de Fubini.

<u>Exercice</u> 4. Reprenez l'intégrale $\displaystyle\iint_{0<x<1,\,0<y<1} e^{-xy}\,dx\,dy$ de l'Exercice 2 ; en appliquant le théorème de Fubini, montrez qu'elle est égale à l'intégrale simple $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x}\,dx$; calculez numériquement cette dernière, en appliquant la formule de Taylor à e^{-x} entre 0 et 1 (cf. AN01, Leçon n°7, Théorème 3), avec cinq décimales exactes.

<u>Exercice</u> 5. Calculez l'aire enclose entre les deux paraboles $x^2=2py$, et $y^2=2px$, où on donne la constante $p>0$.



Exercice 6. Calculez l'intégrale $\iint_A e^x x \sin y \, dx\, dy$, où A est le triangle de sommets $(0,0)$; $(0,a)$; $(a,0)$.

Exercice 7. Soit A l'ensemble ouvert dans $\mathbb{R}^3$ défini par les inégalités : $0 < x < 1$; $0 < y < x^2$; $0 < z < x+y$. Calculez l'intégrale $\iiint_A (x+y+z)\, dx\, dy\, dz$.

IV. Le cas élémentaire du calcul d'une intégrale multiple

Supposons que les deux hypothèses simplificatrices suivantes soient satisfaites :

1°) L'ensemble A est un pavé de côtés parallèles aux axes :

$$a_1 < x_1 < b_1 \; ; \; a_2 < x_2 < b_2 \; ; \; \dots\dots \; ; \; a_n < x_n < b_n .$$

2°) La fonction $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est à variables séparées, c'est à dire produit de n fonctions d'une variable :

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_1(x_1) f_2(x_2) \dots\dots f_n(x_n).$$

Alors l'application répétée du Théorème 1 montre que l'intégrale multiple est un produit (mieux qu'une superposition) d'intégrales simples :

$$\underset{\left\{\substack{a_1 < x_1 < b_1 \\ \overline{a_n < x_n < b_n}}\right.}{\iint \dots \int} f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n = \left(\int_{a_1}^{b_1} f_1(x_1)\, dx_1 \right) \left(\int_{a_2}^{b_2} f_2(x_2)\, dx_2 \right) \dots\dots \left(\int_{a_n}^{b_n} f_n(x_n)\, dx_n \right).$$

Prenons par exemple en effet le cas de deux variables. On a

$$\underset{\substack{a_1 < x_1 < b_1 \\ a_2 < x_2 < b_2}}{\iint} f_1(x_1) f_2(x_2)\, dx_1\, dx_2 = \int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} f_1(x_1) \underbrace{f_2(x_2)}_{\text{constant en } x_1} dx_1 \right) dx_2 =$$

$$= \int_{a_2}^{b_2} f_2(x_2) \underbrace{\left(\int_{a_1}^{b_1} f_1(x_1)\, dx_1 \right)}_{\text{constante en } x_2} dx_2 = \left(\int_{a_1}^{b_1} f_1(x_1)\, dx_1 \right) \left(\int_{a_2}^{b_2} f_2(x_2)\, dx_2 \right).$$

A la leçon n° 9, nous verrons que souvent un changement de variables permet de se ramener à ce cas élémentaire.

V. Indications sur les Exercices de la Leçon n° 8

Exercice 1.

$y \backslash x$	3	3,25	3,50	3,75	4
1	0,693	0,871	1,332	1,176	1,322
1,25	0,621	0,811	0,982	1,141	1,284
1,50	0,525	0,732	0,916	1,082	1,235
1,75	0,399	0,631	0,833	1,008	1,176
2	0,223	0,495	0,723	0,920	1,099

$s_2(f)$ [resp. $S_2(f)$] est le nombre obtenu en multipliant par $\frac{1}{16}$ la somme des 16 nombres obtenus en supprimant de la matrice 5×5 la dernière ligne et la dernière colonne [resp. la première ligne et la première colonne].

Exercice 2. $s_k(f) = \frac{1}{4^k} \sum\limits_{i,j=1}^{2^k} e^{-\frac{ij}{4^k}}$; $S_k(f) = \frac{1}{4^k} \sum\limits_{i,j=0}^{2^k-1} e^{-\frac{ij}{4^k}}$.

Avec une calculatrice programmable on en déduit le tableau :

k	0	1	2	3	4	5
s_k	0,36788	0,58994	0,69806	0,74886	0,77316	0,78499
S_k	1,00000	0,94470	0,88035	0,84063	0,81912	0,80799

Exercice 3. $\mathrm{Log}\,\frac{x^2-y^2}{4} = \mathrm{Log}(x+y) + \mathrm{Log}(x-y) - \mathrm{Log}\,4$. On applique Fubini et la formule $\int \mathrm{Log}\,u\,du = u\,\mathrm{Log}\,u - u + C$, puis la formule $\int u\,\mathrm{Log}\,u\,du = \frac{u^2}{2}\mathrm{Log}\,u - \frac{u^2}{4}$, et on trouve finalement que l'intégrale proposée vaut :

$$18\,\mathrm{Log}\,6 - 25\,\mathrm{Log}\,5 + 5\,\mathrm{Log}\,4 + \frac{9}{2}\mathrm{Log}\,3 - 3 = 0{,}891.$$

Exercice 4. $\displaystyle\iint_{0<x<1,\,0<y<1} e^{-xy}\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_0^1 e^{-xy}\,dy \right) dx =$

$\displaystyle\int_0^1 \left[\frac{e^{-xy}}{-x} \right]_{y=0}^{y=1} dx = \int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x}\,dx$. Il existe ξ tel que $0<\xi<1$ et tel que $e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} \pm \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} x^{n+1}$.

Donc $\left| \frac{1-e^{-x}}{x} - \left(1-\frac{x}{1!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{n!}\right) \right| \leq \frac{e}{(n+1)!}$, et

$\int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x}\,dx \cong 1-\frac{1}{2.2!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n.n!}$, avec une erreur inférieure à $e/(n+1)!$. Pour $n=8$, on trouve pour valeur de l'intégrale proposée : 0,79660, les cinq décimales étant exactes.

Exercice 5. Les deux paraboles se coupent au point $(2p, 2p)$.

On a : $\iint_A dx\,dy = \int_0^{2p}\left(\int_{x^2/2p}^{\sqrt{2px}} dy\right)dx = \int_0^{2p}\left(\sqrt{2px}-\frac{x^2}{2p}\right)dx = \frac{4p^2}{3}$.

Exercice 6. $\frac{1}{2}\left[e^a(a-2)+2-\sin a\right]$.

Exercice 7. $\iiint_A (x+y+z)\,dx\,dy\,dz = \iint_{0<x<1,\,0<y<x^2}\left(\int_0^{x+y}(x+y+z)\,dz\right)dx\,dy =$

$$= \iint_{0<x<1,\,0<y<x^2}\left[xz+yz+\frac{z^2}{2}\right]_{z=0}^{z=x+y} dx\,dy = \iint_{\substack{0<x<1\\0<y<x^2}}\left(x+y+xy+\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}\right)dx\,dy =$$

$$= \int_0^1\left(\int_0^{x^2}\left(x+y+xy+\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}\right)dy\right)dx =$$

$$= \int_0^1\left[xy+\frac{y^2}{2}+x\frac{y^2}{2}+\frac{x^2}{2}y+\frac{y^3}{6}\right]_{y=0}^{y=x^2}dx =$$

$$= \int_0^1\left(x^3+\frac{x^4}{2}+\frac{x^5}{2}+\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{6}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{4}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}+\frac{1}{10}+\frac{1}{42} = 0{,}5571.$$

08

AN03 Leçon n° 9

Changements de variables dans les intégrales multiples

Relisez d'abord AN02, Leçon n°4, §5, qui traitait le cas $n=1$. En voici la généralisation à n variables.

<u>Théorème 1</u>. Soit A un ensemble ouvert mesurable borné dans un espace $\mathbb{R}^n$ dont les points sont notés $y=(y_1, y_2, \dots, y_n)$. Soit B un ensemble ouvert mesurable borné dans un espace $\mathbb{R}^n$ dont les points sont notés $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Soit

$$x \mapsto y = y(x) \quad \begin{cases} y_1 = y_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ y_2 = y_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \quad - - - - - - - - - - \\ y_n = y_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}$$

un changement de variables ou difféomorphisme(*) de B sur A. Supposons que le jacobien $\dfrac{Dy}{Dx} = \dfrac{D(y_1, y_2, \dots, y_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}$ soit une fonction bornée sur B. Alors la fonction de variable x

$$(f \circ y)\left|\frac{Dy}{Dx}\right|$$

est intégrable sur B, et l'on a <u>la formule du changement de variables</u> :

$$\int_A f(y)\,dy = \int_B f[y(x)]\left|\frac{Dy}{Dx}\right| dx \,,$$

c'est-à-dire :

$$\iint \cdots \int_A f(y_1, y_2, \dots, y_n)\, dy_1\, dy_2 \dots dy_n =$$

$$= \iint \cdots \int_B f(y_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_n(x_1, \dots, x_n)) \left|\frac{D(y_1, \dots, y_n)}{D(x_1, \dots, x_n)}\right| dx_1\, dx_2 \dots dx_n \,.$$

(*) Rappelons (Leçons n° 3 et 4) que ceci signifie que $x \mapsto y = y(x)$ est une bijection de B sur A, que les n^2 dérivées partielles $\frac{\partial y_i}{\partial x_j}$ existent et sont continues sur B, ainsi que sur A les $\frac{\partial x_j}{\ldots}$.

Enonçons deux cas particuliers importants de ce théorème.

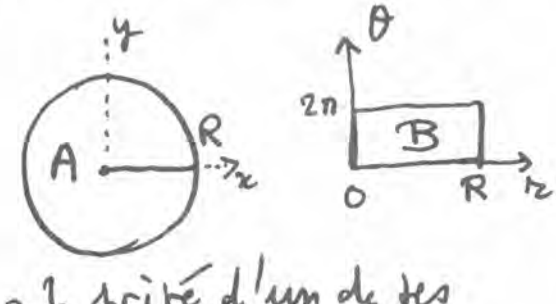
1°) Si on passe en <u>coordonnées polaires</u> dans $\mathbb{R}^2$, on a :

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \iint_B f(r\cos\theta, r\sin\theta)\; r\,dr\,d\theta$$

(ne pas oublier r dans $r\,dr\,d\theta$!), où B est l'image réciproque de A par l'application $(r,\theta) \longmapsto (x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta)$. Par exemple ce changement de variables est un difféo-morphisme du rectangle ouvert

$$B = \{0<r<R\ ,\ 0<\theta<2\pi\}$$

du plan <u>cartésien</u> des (r,θ) sur le disque $A = \{x^2+y^2<R^2,\ x \text{ non réel } \geq 0\}$ privé d'un de ses rayons. Mais intégrer une fonction bornée sur A ou sur le disque tout entier donne le même résultat, car le rayon ôté est de mesure nulle. Ainsi :



$$\iint_{x^2+y^2<R^2} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^R \int_0^{2\pi} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\; r\,dr\,d\theta\ .$$

Si de plus l'intégrale du deuxième membre porte sur une fonction à variables r, θ séparées, on s'est ramené au cas élémentaire d'intégration.

2°) Si on passe en <u>coordonnées sphériques</u> dans $\mathbb{R}^3$, on a :

$$\iiint_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_B f(\rho\cos\varphi\cos\theta, \rho\cos\varphi\sin\theta, \rho\sin\varphi)\,\rho^2\cos\varphi\; d\rho\,d\theta\,d\varphi\ ,$$

où B est l'image réciproque de A par l'application :

$$(\rho,\theta,\varphi) \longmapsto (x = \rho\cos\varphi\cos\theta,\ y = \rho\cos\varphi\sin\theta,\ z = \rho\sin\varphi)\ .$$

Ainsi, si, à un ensemble de mesure nulle près, A est une boule de centre 0 dans $\mathbb{R}^3$, l'ensemble B sera un pavé de côtés parallèles aux axes dans le plan <u>cartésien</u> des (ρ,θ,φ). Si de plus les variables sphériques se séparent, on se sera ramené au cas élémentaire, où il n'y a plus qu'à faire le produit de 3 intégrales simples.

Le reste de cette Leçon sera consacré à des exemples et des exercices.

Exemple 1. Soit à calculer $I_\alpha = \iint_{x_1^2+x_2^2<1} [1-(x_1^2+x_2^2)]^\alpha dx_1 dx_2$, où α est un nombre réel donné. En passant en coordonnées polaires :

$$I_\alpha = \int_0^1\int_0^{2\pi}(1-r^2)^\alpha r\,dr\,d\theta = \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^1 (1-r^2)^\alpha r\,dr\right) =$$

$$= 2\pi\left(\frac{-1}{2(\alpha+1)}\int_0^1 (\alpha+1)(-2r)(1-r^2)^\alpha dr\right) = \frac{2\pi}{-2(\alpha+1)}\left[(1-r^2)^{\alpha+1}\right]_{r=0}^{r=1} =$$

$$= \frac{\pi}{\alpha+1}.$$

Exemple 2. Soit à calculer $I = \iiint_{x^2+y^2+z^2<1} \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{2-(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}}$.

En passant en coordonnées sphériques :

$$I = \int_0^1\int_0^{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho^2\cos\varphi\; d\rho\, d\theta\, d\varphi}{\sqrt{2-\rho^3}} = \left(\int_0^1 \frac{\rho^2 d\rho}{\sqrt{2-\rho^3}}\right)\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\, d\varphi\right)$$

$$= 4\pi\int_0^1 \frac{\rho^2 d\rho}{\sqrt{2-\rho^3}} = \frac{4\pi}{3}\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{2-u}} = \frac{8\pi}{3}\left[\sqrt{2-u}\right]_{u=1}^{u=0} = \frac{8\pi(\sqrt{2}-1)}{3}.$$

Exemples tirés de la Mécanique.

Les intégrales triples interviennent dans le calcul des masses, des centres de gravité, des moments d'inertie, dans la théorie de l'attraction et du potentiel, et dans bon nombre de parties de la Physique.

Si une partie A de $\mathbb{R}^3$ est occupée par de la matière ayant pour densité $\sigma(x,y,z)$ au point $M=(x,y,z)$, la masse de A est $\mu = \iiint_A \sigma(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$. Les coordonnées du centre de gravité de A sont en abrégé $\vec{OG} = \frac{1}{\mu}\iiint \vec{OM}\,\sigma(M)\,dM$, c'est-à-dire :

$x_G = \frac{1}{\mu}\iiint_A x\,\sigma(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$; $y_G = \frac{1}{\mu}\iiint_A y\,\sigma(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$;

$z_G = \frac{1}{\mu}\iiint_A z\,\sigma(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$. Le moment d'inertie de A par rapport à un point, un axe, ou un plan, est :

$$\iiint_A [h(x,y,z)]^2 \ \sigma(x,y,z)\,dx\,dy\,dz ,$$

où $h(x,y,z)$ est la distance de $M=(x,y,z)$ au point, à l'axe, au plan.

Exercice 1. Soit A une demi-boule homogène (i.e. de densité constante) dans $\mathbb{R}^3$, d'équation $x^2+y^2+z^2<R^2$; $z>0$. Calculez la position de son centre de gravité ; son moment d'inertie par rapport à O ; par rapport à Oz.

Exercice 2. Par le changement de variables $x=ar\cos\varphi$, $y=br\sin\varphi$, calculez l'aire enclose par l'ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Exercice 3. Soit $0<a<b$. Dans $\mathbb{R}^2$ soit l'ouvert borné A limité, pour $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, par les courbes

$$y-x=0 \ ; \quad xy=a \ ; \quad y^2-x^2=1 \ ; \quad xy=b .$$

Par un changement de variables approprié, montrez que :

$$\iint_A (y^2-x^2)^{xy}\,(x^2+y^2)\,dx\,dy = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Log}\,\frac{1+b}{1+a} .$$

Exercice 4. En passant en coordonnées sphériques, calculez $\iiint_A \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz$, où A est la boule $x^2+y^2+z^2<x$ dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 5. Dans $\mathbb{R}^3$ soit U l'ensemble $x^2+y^2-z^2>0$.
1°) Dessinez U. 2°) Montrez que, si (x,y,z) est un point de U, il existe un système unique de trois nombres réels (r,θ,t) tels que $0<r<+\infty$; $0<\theta<2\pi$; $-\infty<t<+\infty$, et tels que :

$$x=r\,\mathrm{ch}\,t\cos\theta \ ; \quad y=r\,\mathrm{ch}\,t\sin\theta \ ; \quad z=r\,\mathrm{sh}\,t .$$

3°) Calculez le jacobien $\frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,t)}$. 4°) Calculez directement le volume du cône de révolution $x^2+y^2-z^2<0$; $0<z<R$.

5) En utilisant le changement de variables ci-dessus, calculez le volume du tronc d'hyperboloïde à une nappe :

$$x^2+y^2-z^2 < R^2 \qquad ; \quad 0<z<R.$$

<u>Exemple 3</u> : l'intégrale de Gauss $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$.

La suite $n \mapsto \int_0^n e^{-x^2}dx$, évidemment croissante, est majorée. Pour le voir, partons de l'inégalité $e^u \geqslant 1+u$, qui exprime que la courbe exponentielle est au-dessus de sa tangente au point $u=0$. Avec $u=x^2$, on en tire que $e^{-x^2} \leqslant \frac{1}{1+x^2}$, et donc :

$$\int_0^n e^{-x^2}dx \leqslant \int_0^n \frac{dx}{1+x^2} = \text{Arctg}\, n \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Par définition nous poserons $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \lim_{n\to+\infty} \int_0^n e^{-x^2}dx$.

Cette intégrale ("généralisée" à la borne $+\infty$) a une grande importance en Mathématiques, notamment en transformation de Fourier, en probabilités et en statistique. Nous allons la calculer grâce à un subterfuge, en passant par des intégrales doubles. Pour tout entier $n \geqslant 1$, considérons dans $\mathbb{R}^2$:

– le carré Q_n défini par
$0<x<n$; $0<y<n$;
– le quart de disque D_n défini par :
$x>0$; $y>0$; $x^2+y^2<n^2$,
et posons :

$$I_n = \iint_{Q_n} e^{-(x^2+y^2)}dxdy \quad ; \quad J_n = \iint_{D_n} e^{-(x^2+y^2)}dxdy.$$

Puisque $e^{-(x^2+y^2)} = e^{-x^2}e^{-y^2}$, pour calculer I_n on est dans le cas élémentaire :

$$I_n = \left(\int_0^n e^{-x^2}dx\right)\left(\int_0^n e^{-y^2}dy\right) = \left(\int_0^n e^{-x^2}dx\right)^2.$$

Pour calculer J_n passons en coordonnées polaires :

$$J_n = \int_0^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2} r\, dr\, d\theta = \frac{\pi}{2}\int_0^n e^{-r^2} r\, dr = \frac{\pi}{4}(1-e^{-n^2}).$$

Puisque la fonction $e^{-(x^2+y^2)}$ est partout >0, son intégrale augmente quand on dilate le domaine d'intégration. Donc, pour tout n,

$$J_n \leqslant I_n \leqslant J_{2n} \quad ,$$

c'est-à-dire $\quad \frac{\pi}{4}(1-e^{-n^2}) \leqslant \left(\int_0^n e^{-x^2}dx\right)^2 \leqslant \frac{\pi}{4}(1-e^{-4n^2}).$

Quand $n \to +\infty$, les deux extrêmes tendent vers $\frac{\pi}{4}$, donc aussi le terme médian, et l'on obtient la célèbre formule :

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad .$$

<u>Exemple</u> 4 : calcul du <u>volume de la boule</u> de rayon R dans $\mathbb{R}^n$.

Soit R un nombre >0, et n un entier $\geqslant 1$. Soit $B_n(R)$ l'ensemble des $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 < R^2$. On cherche à calculer $\quad V_n(R) = \displaystyle\iint\cdots\int_{B_n(R)} dx_1 dx_2 \dots dx_n.$

$V_1(R) = 2R =$ la longueur de l'intervalle $]-R, R[$;

$V_2(R) = \pi R^2 =$ l'aire du cercle de rayon R ;

$V_3(R) = \frac{4}{3}\pi R^3$, formule bien connue, qu'on démontre aisément en passant en coordonnées sphériques.

Remarquons d'abord que : $\qquad V_n(R) = R^n V_n(1).$

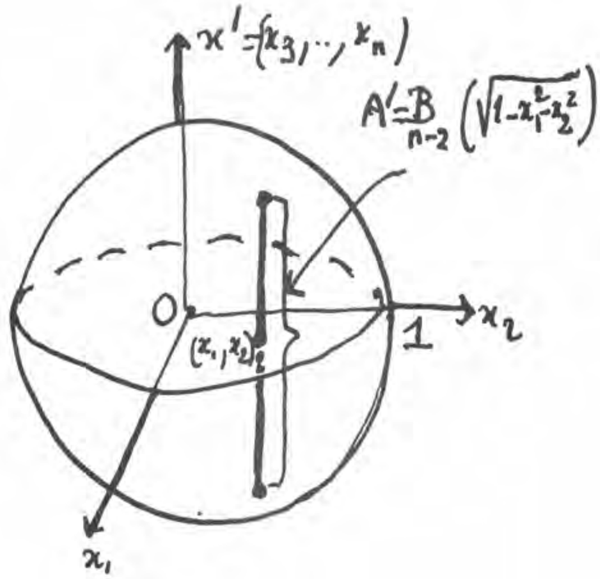
En effet le changement de variables par homothétie $\quad y \mapsto x = Ry$:

$$x_1 = Ry_1 \;,\quad x_2 = Ry_2 \;,\; \dots\dots \;,\quad x_n = Ry_n$$

fait passer de $B_n(1)$ à $B_n(R)$ et a pour jacobien R^n. On est donc ramené à calculer les $V_n(1)$, que nous noterons simplement V_n. On va, grâce au théorème de Fubini, trouver une formule de récurrence entre V_n et V_{n-2}. Supposons désormais $n \geq 3$. Appliquons le théorème de Fubini en distinguant d'abord, à (x_1, x_2) fixé, le groupe de

$(n-2)$ variables $x' = (x_3, \dots, x_n)$.

Pour tout (x_1, x_2) fixé tel que $x_1^2 + x_2^2 < 1$, le point $x = (x_1, x_2 ; x_3, \dots, x_n) = (x_1, x_2 ; x')$ parcourt $B_n(1)$ si et seulement si le point $x' = (x_3, \dots, x_n)$ dans $\mathbb{R}^{n-2}$ parcourt l'ensemble $A' = \{ x_3^2 + \dots + x_n^2 < 1 - x_1^2 - x_2^2 \}$, c'est-à-dire la boule de $\mathbb{R}^{n-2}$ qui a pour rayon $\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$. Par conséquent :



$$V_n(1) = \iint_{x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2<1} \cdots \int dx_1\, dx_2\, dx_3 \dots dx_n = \iint_{x_1^2+x_2^2<1} \left(\int_{A'} dx' \right) dx_1\, dx_2$$

$$= \iint_{x_1^2+x_2^2<1} \left(\iint_{x_3^2+\dots+x_n^2<1-x_1^2-x_2^2} \cdots \int dx_3 \dots dx_n \right) dx_1\, dx_2 .$$

L'intégrale à l'intérieur n'est autre que le volume de la boule de $\mathbb{R}^{n-2}$ de rayon $\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}$; par homothétie elle vaut $(1 - x_1^2 - x_2^2)^{\frac{n-2}{2}} V_{n-2}(1)$. Donc

$$V_n(1) = \left(\iint_{x_1^2+x_2^2<1} (1 - x_1^2 - x_2^2)^{\frac{n}{2}-1} dx_1\, dx_2 \right) V_{n-2}(1) .$$

Nous avons rencontré l'intégrale double à l'exemple 1 ; il s'agit de I_α avec $\alpha = \frac{n}{2} - 1$, qui vaut, on l'a vu, $\frac{\pi}{\alpha+1} = \frac{2\pi}{n}$. On a ainsi prouvé, pour tout entier $n \geq 3$, la formule de récurrence :

$$V_n = \frac{2\pi}{n} V_{n-2} .$$

Pour $n = 2p+1$ <u>impair</u>, en multipliant membre à membre la suite des relations :

$$V_{2p+1} = \frac{2\pi}{2p+1} V_{2p-1} \; ; \; V_{2p-1} = \frac{2\pi}{2p-1} V_{2p-3} \; ; \text{ etc.} \dots\dots ;$$

$$V_5 = \frac{2\pi}{5} V_3 \; ; \; V_3 = \frac{2\pi}{3} V_1 \; ; \; V_1 = 2 \; , \quad \text{on obtient :}$$

$$V_{2p+1} = 2\,\frac{(2\pi)^p}{1.3.5\ldots(2p+1)}\,.$$

Pour $n=2p$ pair, en multipliant membre à membre la suite des relations :

$$V_{2p} = \frac{2\pi}{2p}V_{2p-2}\ ;\ V_{2p-2} = \frac{2\pi}{2p-2}V_{2p-4}\ ;\ \text{etc}\ldots\ ;$$

$$V_6 = \frac{2\pi}{6}V_4\ ;\ V_4 = \frac{2\pi}{4}V_2\ ;\ V_2 = \pi = \frac{2\pi}{2}\,,$$

on obtient :
$$V_{2p} = \frac{(2\pi)^p}{2.4.6\ldots(2p)} = \frac{\pi^p}{p!}\,.$$

Le volume d'une boule de rayon R dans $\mathbb{R}^n$ est donc donné par les deux formules :

$$V_{2p}(R) = \frac{\pi^p R^{2p}}{p!}\ ;\quad V_{2p+1}(R) = 2\,\frac{(2\pi)^p}{1.3.5\ldots(2p+1)}R^{2p+1}\,.$$

On remarquera que $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n(1) = 0$, ce qui ne manquera pas d'ébaudir les amateurs de science-fiction.

Exercice 6. Soit a un nombre réel >0, et soit $A_n(a)$ le polyèdre dans $\mathbb{R}^n$ défini par :

$$x_1>0,\ x_2>0,\ldots,\ x_n>0\ ;\quad x_1+x_2+\cdots+x_n<a\,.$$

Montrez que $I_n(a) = \iint\cdots\int_{A_n(a)} x_1x_2\ldots x_n\,dx_1dx_2\ldots dx_n$ vaut $a^{2n}/(2n)!$. Pour cela on montrera d'abord que $I_n(a) = a^{2n}I_n(1)$, puis, par le théorème de Fubini, que $I_n(1) = \int_0^1 x_1\,I_{n-1}(1-x_1)\,dx_1$.

Indications sur les Exercices proposés dans cette Leçon

Exercice 1. Par raison de symétrie le centre de gravité G est sur Oz, à l'altitude $z_G = \dfrac{3}{2\pi R^3}\iiint_A z\,dxdydz$, si on suppose la densité $=1$.

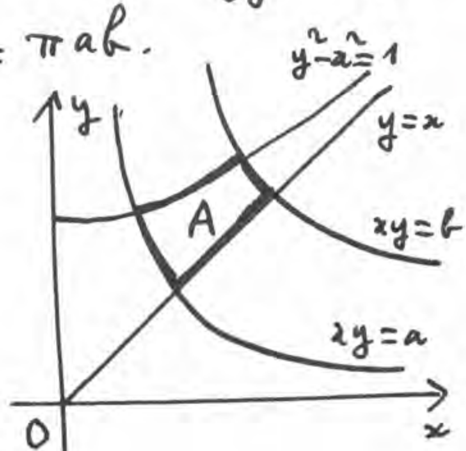
Or $\iiint_A z\,dxdydz = \int_0^R\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho\sin\varphi\ \rho^2\cos\varphi\,d\rho\,d\theta\,d\varphi = \pi\dfrac{R^4}{4}$, donc $z_G = \dfrac{3R}{8}$. Le moment d'inertie par rapport à O vaut, toujours en densité 1, $\iiint\limits_A \rho^2 dx\,dy\,dz = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^2 \rho^2 \cos\varphi \, d\rho \, d\theta \, d\varphi =$

$= \dfrac{2\pi R^5}{5} = \dfrac{2\pi R^3}{3} \dfrac{3R^2}{5} = \dfrac{3\mu R^2}{5}$, où $\mu = \dfrac{2\pi R^3}{3}$ est la masse de la demi-boule (homogène, de densité 1). Puisque $x^2+y^2 = \rho^2\cos^2\varphi$, le moment d'inertie de A par rapport à Oz vaut :

$\iiint\limits_A (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^2\cos^2\varphi \, \rho^2 \cos\varphi \, d\rho\, d\theta\, d\varphi = \dfrac{2\pi R^5}{5} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\varphi \, d\varphi$

$= \dfrac{2\pi R^5}{5} \dfrac{2}{3} = \dfrac{2\pi}{3} \dfrac{2R^5}{5} = \dfrac{2\mu R^2}{5}$.

Exercice 2. $\dfrac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = \quad ab\, r\, dr\, d\varphi$. Le domaine enclos par l'ellipse correspond à $0<r<1$; $0<\varphi<2\pi$. L'aire vaut $\iint dx\,dy =$
$\int_0^1 \int_0^{2\pi} \dfrac{D(x,y)}{D(r,\varphi)}\, dr\, d\varphi = ab \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r\, dr = \pi ab$.



Exercice 3. Pour transformer le domaine A en un rectangle, posons $u = y^2-x^2$, $v = xy$.
Alors A devient le rectangle :
$0<u<1$; $a<v<b$.

$\dfrac{D(u,v)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} -2x & 2y \\ y & x \end{vmatrix} = -2(x^2+y^2)$, donc

$\left|\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| = \dfrac{1}{2(x^2+y^2)}$, et $\iint\limits_A (y^2-x^2)^{xy}(x^2+y^2)\,dx\,dy =$

$\int_0^1\int_a^b u^v (x^2+y^2) \left|\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| du\,dv = \dfrac{1}{2}\int_0^1 \int_a^b u^v\, du\, dv =$

$\dfrac{1}{2}\int_a^b \left(\int_0^1 u^v du\right) dv = \dfrac{1}{2}\int_a^b \dfrac{dv}{v+1} = \dfrac{1}{2} \operatorname{Log} \dfrac{1+b}{1+a}$.

Exercice 4. Il s'agit de la boule de centre 0, de rayon $\frac{1}{2}$.
En coordonnées sphériques de pôle 0, elle est définie par les conditions :
$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$; $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$; $\rho < \cos\theta\cos\varphi$,
où la dernière traduit l'inégalité $x^2+y^2+z^2 < x$.

© la maquette de la couverture a été réalisée par le L.E.P. Cyfflé - NANCY

Édité et imprimé par l'**Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques** - (Université de Nancy I - Faculté des Sciences) -
B.P. 239 - 54506 VANDOEUVRE-les-NANCY CEDEX
Dépôt légal : 3e trimestre 1987
n° de la publication : 2-85406-103-9

Le Responsable de la collection : Philippe LOMBARD

Réf. N 502

M.P.I.S.E.
Module AN 03

CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL À PLUSIEURS VARIABLES

Ceci est un premier jet. On est prié de signaler toute erreur à l'auteur : Pierre EYMARD, Professeur de Mathématiques, Université de NANCY I, BP239, 54037 VANDOEUVRE.

La métrique euclidienne et la notion de limite de suites dans $\mathbb{R}^n$

Dans ce fascicule, l'espace de base, celui où seront choisies les variables des fonctions étudiées, sera le plus souvent l'espace $\mathbb{R}^2$ de dimension 2 ou l'espace $\mathbb{R}^3$ de dimension 3, donc, plus généralement, n étant un entier ≥ 1 donné une fois pour toutes, l'espace $\mathbb{R}^n$ de dimension n, formé des systèmes ordonnés $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de n nombres réels x_i. Pour $n = 1$, on retrouve d'ailleurs la droite réelle $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$ étudiée aux Fascicules 1 et 2.

L'origine dans $\mathbb{R}^n$ est $(0, 0, \dots, 0)$. Il est commode de considérer $\mathbb{R}^n$ soit comme un espace de points $M = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ de coordonnées cartésiennes $x_1, x_2, \dots, x_n$, soit comme l'espace vectoriel des vecteurs $\vec{x} = \overrightarrow{OM} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ de composantes $x_1, x_2, \dots, x_n$. Nous jouerons sans cesse sur l'ambiguïté de langage créée par la confusion de ces deux points de vue.

Rappelons(*) que $\mathbb{R}^n$ est muni des opérations vectorielles :

$$\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots\dots, x_n + y_n)$$
$$\lambda \vec{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots\dots, \lambda x_n),$$

où $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$; $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$; $\lambda \in \mathbb{R}$.

Pour faire de l'Analyse dans $\mathbb{R}^n$, nous devrons préciser comment deux points (ou vecteurs) sont proches l'un de l'autre, donc

---

(*) cf. les enseignements d'Algèbre et Géométrie dispensés par ailleurs dans ce Deug, avec lesquels le lecteur fera le lien.

disposer d'une notion de <u>distance</u> entre points, de longueur (ou <u>norme</u>) d'un vecteur. Or ces notions métriques procèdent de celle de <u>produit scalaire</u> de deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$, notion que nous étudierons en premier.

§1. Le produit scalaire et la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^n$

Si $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $\vec{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$, on note $(\vec{x} \mid \vec{y})$ et on appelle <u>produit scalaire</u> de $\vec{x}$ par $\vec{y}$ le nombre réel défini par la formule :

$$(\vec{x} \mid \vec{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots\cdots + x_n y_n .$$

<u>Propriétés et règles de calcul immédiates</u> :

quels que soient les vecteurs $\vec{x}, \vec{x}', \vec{y}, \vec{y}'$, et le nombre réel λ :

$$(\vec{x} \mid \vec{y}) = (\vec{y} \mid \vec{x}) \ ;$$

$$(\vec{x}+\vec{x}' \mid \vec{y}) = (\vec{x} \mid \vec{y}) + (\vec{x}' \mid \vec{y}) \ ; \quad (\vec{x} \mid \vec{y}+\vec{y}') = (\vec{x} \mid \vec{y}) + (\vec{x} \mid \vec{y}') \ ;$$

$$(\lambda\vec{x} \mid \vec{y}) = \lambda (\vec{x} \mid \vec{y}) \ ; \quad (\vec{x} \mid \lambda\vec{y}) = \lambda(\vec{x} \mid \vec{y})$$

$$(\vec{x} \mid \vec{x}) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \text{ est } \geq 0 \ ;$$

$$(\vec{x} \mid \vec{x}) = 0 \text{ si et seulement si } \vec{x} = \vec{0}.$$

<u>Inégalité de Schwarz</u> : quels que soient les vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$,

$$(\vec{x} \mid \vec{y})^2 \leq (\vec{x} \mid \vec{x})(\vec{y} \mid \vec{y}).$$

De plus il y a égalité dans cette inégalité si et seulement si les vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont colinéaires.

<u>Démonstration</u>. Si $\vec{x}$ ou $\vec{y} = \vec{0}$, c'est évident car les deux membres de l'inégalité sont alors nuls. Désormais supposons $\vec{x} \neq \vec{0}$ et $\vec{y} \neq \vec{0}$, et posons :

$$a = (\vec{x} \mid \vec{x}) \ ; \quad \vec{b} = (\vec{x} \mid \vec{y}) \ ; \quad c = (\vec{y} \mid \vec{y}) \ .$$

En appliquant les règles de calcul ci-dessus, on obtient que, pour tout nombre réel λ :

$$0 \leq (\lambda\vec{x}+\vec{y} \mid \lambda\vec{x}+\vec{y}) = \lambda^2(\vec{x}\mid\vec{x}) + 2\lambda(\vec{x}\mid\vec{y}) + (\vec{y}\mid\vec{y}).$$

Ainsi le trinôme du second degré $\lambda \mapsto a\lambda^2+2b\lambda+c$ est toujours ≥ 0. Donc son discriminant b^2-ac est ≤ 0 ; or $b^2 \leq ac$ est l'inégalité de Schwarz.

Si $b^2=ac$, faisons $\lambda = -\frac{b}{a}$ dans le développement ci-dessus :

$$(\lambda\vec{x}+\vec{y} \mid \lambda\vec{x}+\vec{y}) = \frac{b^2}{a^2}a - 2\frac{b}{a}b + c = \frac{-b^2+ac}{a} = 0,$$

donc $\lambda\vec{x}+\vec{y}=\vec{0}$, et $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont bien colinéaires.

<u>Exercice 1</u>. Montrez que, quels que soient les n nombres réels $x_1, x_2, \dots, x_n$, on a l'inégalité :

$$(x_1+x_2+\dots+x_n)^2 \leq n(x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2).$$

A quelle condition sur $x_1, x_2, \dots, x_n$ a-t-on égalité ?

<u>Définition</u>. Si $\vec{x}=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, on appelle <u>norme</u> ou <u>longueur</u> du vecteur $\vec{x}$ le nombre réel, noté $\|\vec{x}\|$, défini par :

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{(\vec{x}\mid\vec{x})} = (x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2)^{1/2}.$$

Si $n=1$, cette notion coïncide avec celle de valeur absolue $|x|$ du nombre réel x.

On peut maintenant reformuler l'inégalité de Schwarz comme suit :

$$|(\vec{x}\mid\vec{y})| \leq \|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\|.$$

<u>Propriétés de la norme</u> : quels que soient $\vec{x}\in\mathbb{R}^n$, $\vec{y}\in\mathbb{R}^n$ et $\lambda\in\mathbb{R}$,

$\|\vec{x}\|$ est ≥ 0 ; et $\|\vec{x}\|=0$ si et seulement si $\vec{x}=\vec{0}$;

$\|\lambda\vec{x}\| = \lambda\|\vec{x}\|$; en particulier $\|-\vec{x}\| = \|\vec{x}\|$;

$\|\vec{x}+\vec{y}\| \leq \|\vec{x}\|+\|\vec{y}\|$ (inégalité triangulaire).

Prouvons l'inégalité triangulaire : d'après les règles de calcul du produit scalaire et l'inégalité de Schwarz, on a

$$\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 = (\vec{x}+\vec{y} \mid \vec{x}+\vec{y}) = (\vec{x} \mid \vec{x}) + 2(\vec{x} \mid \vec{y}) + (\vec{y} \mid \vec{y}) =$$

$$= \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 + 2(\vec{x} \mid \vec{y}) \leqslant \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 + 2\,\|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\|, \text{ donc :}$$

$$\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 \leqslant (\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|)^2, \qquad \text{c.q.f.d.}$$

Par récurrence sur k, on obtient l'inégalité triangulaire généralisée :

$$\|\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \cdots + \vec{x}_k\| \leqslant \|\vec{x}_1\| + \|\vec{x}_2\| + \cdots + \|\vec{x}_k\| .$$

On a aussi l'inégalité triangulaire "de la différence" :

$$\big|\,\|\vec{x}\| - \|\vec{y}\|\,\big| \leqslant \|\vec{x} + \vec{y}\| .$$

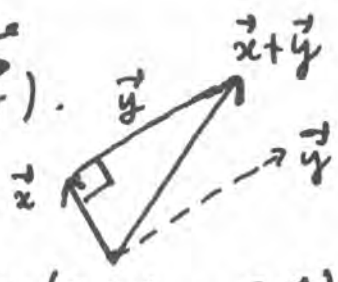
<u>Exercice 2</u>. Démontrez cette inégalité.

<u>Définition</u>. Deux vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ de $\mathbb{R}^n$ sont dits <u>orthogonaux</u> si leur produit scalaire est nul.

<u>Théorème de Pythagore</u>. Pour que $\vec{x}$ et $\vec{y}$ soient orthogonaux, il faut et il suffit que $\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2$.

En effet, on vient de calculer ci-dessus que

$$\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 - \|\vec{x}\|^2 - \|\vec{y}\|^2 = 2(\vec{x} \mid \vec{y}).$$



Rappelons que les n vecteurs dans $\mathbb{R}^n$:

$\vec{e}_1 = (1,0,0,\dots,0,0)$; $\vec{e}_2 = (0,1,0,\dots,0,0)$; $\dots\dots$; $\vec{e}_n = (0,0,0,\dots,0,1)$ forment une base, la <u>base canonique</u> de $\mathbb{R}^n$. Si $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, alors

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_n\vec{e}_n .$$

Cette base est <u>orthonormée</u>, ce qui signifie que chaque vecteur $\vec{e}_i$ est de longueur un, et que ces vecteurs sont deux à deux orthogonaux : $(\vec{e}_i \mid \vec{e}_j) = 1$ si $i = j$; $= 0$ si $i \neq j$.

<u>Exercice 3</u>. Montrez que, dans $\mathbb{R}^3$, les trois vecteurs

$$\vec{u}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) ; \ \vec{u}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right) ; \ \vec{u}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

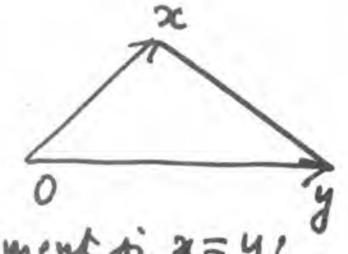
forment une base orthonormée.

§2. La distance euclidienne dans $\mathbb{R}^n$

Soient $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ et $y=(y_1,y_2,\dots,y_n)$ deux points ou deux vecteurs (*) de $\mathbb{R}^n$. On appelle <u>distance</u> de x à y, et on note $d(x,y)$, le nombre réel défini par :

$$d(x,y)=\left[(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\dots+(x_n-y_n)^2\right]^{1/2}.$$

Ainsi : $\quad d(x,y)=\|\vec{x}-\vec{y}\|$.



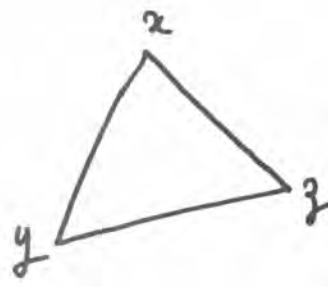
Des propriétés de la norme, on déduit facilement les propriétés de la distance :

$d(x,y)$ est $\geqslant 0$; et $d(x,y)=0$ si et seulement si $x=y$;

$d(x,y)=d(y,x)$;

$d(x,z)\leqslant d(x,y)+d(y,z)$ [inégalité triangulaire] ;

$|d(x,z)-d(y,z)|\leqslant d(x,y)$.

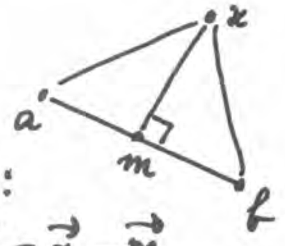


Ces deux inégalités expriment que tout côté d'un triangle est inférieur à la somme des deux autres, et supérieur à leur différence.

De plus la distance est invariante par translation :

$$d(\vec{x}+\vec{a},\ \vec{y}+\vec{a})=d(\vec{x},\vec{y}).$$

<u>Exercice</u> 4. Soient a et b deux points de $\mathbb{R}^n$, et soit $m=\dfrac{a+b}{2}$ le "milieu du segment ab". Montrez que, pour un point x de $\mathbb{R}^n$, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :



i) $d(x,a)=d(x,b)$; ii) les vecteurs $\overrightarrow{mx}=\vec{x}-\vec{m}$ et $\overrightarrow{ab}=\vec{b}-\vec{a}$ sont orthogonaux ("médiatrice" de ab si $n=2$).

(*) Dorénavant il nous arrivera souvent d'omettre la flèche du symbole $\vec{x}$ d'un vecteur, vu l'ambiguïté que nous entretenons <u>sciemment</u> entre les notions de vecteur et de point.

§ 3. Limites de suites dans $\mathbb{R}^n$

Une suite $k \mapsto x_k = (x_{k1}, x_{k2}, \ldots, x_{kn})$ de points (ou de vecteurs) dans $\mathbb{R}^n$ est une correspondance qui, à chaque (indice) entier $k \geq 0$, associe un point (ou un vecteur) x_k de $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire associe un système ordonné de n nombres réels $x_{k1}, x_{k2}, \ldots, x_{kn}$, les coordonnées (ou composantes) de x_k. Ainsi se donner une suite $(x_k)_{k\geq 0}$ dans $\mathbb{R}^n$ revient à se donner n suites $(x_{ki})_{k\geq 0}$ de nombres réels, pour $i = 1, 2, \ldots, n$.

Soit $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. On dit que la suite $x_k = (x_{k1}, \ldots, x_{kn})$ tend vers a, ou a pour limite a, quand $k \to +\infty$, et on écrit $\lim\limits_{k\to+\infty} x_k = a$, si $\lim\limits_{k\to+\infty} d(a, x_k) = \lim\limits_{k\to+\infty} \|a - x_k\| = 0$, autrement dit si : quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un entier k_ε tel que $k \geq k_\varepsilon$ implique $\|a - x_k\| \leq \varepsilon$. On dit que (x_k) est convergente.

Proposition 1. Pour que $\lim\limits_{k\to+\infty} x_k = a$, il faut et il suffit que, quel que soit $i = 1, 2, \ldots, n$, la suite de nombres réels $(x_{ki})_{k\geq 0}$ tende vers le nombre réel a_i.

En effet, pour tout i on a : $|a_i - x_{ki}| \leq \|a - x_k\|$, donc la condition est nécessaire. Réciproquement si, quand $k \to +\infty$, chaque suite $(a_i - x_{ki})_{k\geq 0}$ tend vers 0, alors chaque suite $(a_i - x_{ki})^2_{k\geq 0}$ tend vers 0, donc la suite

$$\|a - x_k\|^2 = (a_1 - x_{k1})^2 + \cdots\cdots + (a_n - x_{kn})^2$$

tend vers 0. Par conséquent la suite $(\|a - x_k\|)_{k\geq 0}$ tend vers 0.

Ainsi l'étude d'une suite de vecteurs dans $\mathbb{R}^n$ se ramène-t-elle, en ce qui concerne la limite, à l'étude de n suites de nombres.

Exercice 5. Dans le plan $\mathbb{R}^2$ rapporté à un repère xOy, on considère la suite de points $M_k = (x_k, y_k)$ définie par :

$$x_k = e^{1/k} + 1/k \quad , \quad y_k = \frac{2k^2+1}{k^2+k+1}$$

pour tout entier $k \geq 1$. Trouvez par ses coordonnées le point A limite de la suite (M_k).

<u>Exercice</u> 6 (assez long). Dans le plan $\mathbb{R}^2$ rapporté à un repère xOy on considère la suite de points $M_k = (x_k, y_k)$ définie <u>par récurrence</u> comme suit : $x_0 = 1$, $y_0 = 0$ et, pour tout entier $k \geq 1$:

$$(1) \quad \begin{cases} x_k = \frac{1}{2} y_{k-1} + 1 \\ y_k = \frac{1}{2} x_{k-1} \end{cases}$$

1°) Calculez $M_1 = (x_1, y_1)$.

2°) Trouvez une relation de récurrence entre x_k et x_{k-2}, et une relation de récurrence entre y_k et y_{k-2}.

3°) En utilisant la méthode de AN01, Leçon n°1, § 3, déduisez-en explicitement, en fonction de l'entier $p \geq 0$, des formules donnant les suites de nombres réels x_{2p}, x_{2p+1}, y_{2p}, y_{2p+1}.

4°) Trouvez, par ses coordonnées, le point A limite de la suite (M_k).

5°) En supposant a priori que cette limite existe, auriez-vous pu trouver par avance, sur les formules (1), les coordonnées de ce point A, presque sans calculs ?

Quelques <u>propriétés immédiates</u> des limites de suites dans $\mathbb{R}^n$:

Supposons que $\lim_{k\to+\infty} \vec{x}_k = \vec{a}$ et $\lim_{k\to+\infty} \vec{y}_k = \vec{b}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

Alors : $\lim_{k\to+\infty} (\vec{x}_k + \vec{y}_k) = \vec{a} + \vec{b}$; $\lim_{k\to+\infty} (\lambda \vec{x}_k) = \lambda \vec{a}$;

$$\lim_{k\to+\infty} \|\vec{x}\| = \|\vec{a}\| \quad ; \quad \lim_{k\to+\infty} (\vec{x}_k \mid \vec{y}_k) = (\vec{a} \mid \vec{b}).$$

Démontrons par exemple cette dernière propriété. Pour tout k

$(a|b) - (x_k|y_k) =$

$(a - x_k \mid b) + (a \mid b - y_k) - (a - x_k \mid b - y_k)$,

donc, d'après l'inégalité de Schwarz,

$|(a|b) - (x_k|y_k)| \leqslant$

$\leqslant \|a - x_k\| \|b\| + \|a\| \|b - y_k\| + \|a - x_k\| \|b - y_k\|$,

qui évidemment tend vers 0 quand $k \to +\infty$.

§ 4. Critère de Cauchy, théorème de Bolzano-Weierstrass

Commencez par relire AN 01, Leçon n°2, § 5, où ces questions sont traitées dans le cas de la dimension 1. Grâce à la Proposition 1, elles vont se généraliser facilement au cas de la dimension n.

On dit qu'une suite de points (ou de vecteurs) dans $\mathbb{R}^n$ $x_k = (x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kn})$ est une <u>suite de Cauchy</u> si :

$$\begin{cases} \text{pour tout } \varepsilon > 0, \text{ il existe un entier } k_\varepsilon \geqslant 0 \text{ tel que,} \\ \text{quels que soient les entiers } h \geq k \geq k_\varepsilon, \text{ on a } \|x_k - x_h\| \leqslant \varepsilon. \end{cases}$$

En raisonnant comme dans la démonstration de la Proposition 1, on voit facilement que :

<u>Proposition 2</u>. La suite $x_k = (x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kn})$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}^n$ si et seulement si, pour chaque $i = 1, 2, \dots, n$, la suite des nombres réels $(x_{ki})_{k\geq 0}$ est de Cauchy.

Il suffit maintenant d'appliquer le Théorème 2 de AN 01, Leçon n°2, § V pour obtenir, grâce aux Propositions 2 et 1, le

<u>Théorème 1</u> (critère de Cauchy) Pour qu'une suite dans $\mathbb{R}^n$ ait une limite, il faut et IL SUFFIT qu'elle soit de Cauchy.

Ce critère est important, car il permet de démontrer l'existence d'une limite sans connaître d'avance cette limite, procédé fondamental en Analyse.

On dit qu'une suite (x_k) dans $\mathbb{R}^n$ est <u>bornée</u> s'il existe une constante réelle $M > 0$ telle que, pour tout entier $k \geq 0$, on ait $\|x_k\| \leq M$.

<u>Théorème 2</u> (de Bolzano-Weierstrass) Toute suite bornée dans $\mathbb{R}^n$ possède au moins une suite extraite convergente.

<u>Démonstration</u>. Soit $x_k = (x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kn}) \in \mathbb{R}^n$, et un nombre $M > 0$, tels que, pour tout $k \geq 0$, on ait $\|x_k\| \leq M$. Pour chaque $i = 1, 2, \dots, n$, on a $|x_{ki}| \leq \|x_k\| \leq M$ pour tout k, donc la suite de nombres réels $k \mapsto x_{ki}$ est bornée. En particulier la suite de nombres réels

$$x_{11},\ x_{21},\ \dots\dots,\ x_{k1},\ \dots\dots$$

est bornée ; on peut lui appliquer le théorème de Bolzano-Weierstrass pour $n = 1$ (cf. AN01, Leçon n°2, § V, Théorème 3) : il existe une suite S_1 extraite de $(x_k)_{k \geq 0}$ telle que la suite des coordonnées d'indice 1 des points de S_1 tende vers une limite finie a_1. Considérons maintenant la suite des secondes coordonnées $(i = 2)$ des points de S_1 ; c'est une suite (toujours bornée par M) de nombres réels ; on peut donc extraire de S_1 (donc de (x_k)) une suite S_2 telle que les deuxièmes coordonnées des points de S_2 tendent vers une limite finie a_2, alors que les premières coordonnées des points de S_2 continuent de tendre vers a_1. En répétant

n fois ce raisonnement, on obtient par n extractions successives une suite S_n extraite de $S_{n-1}, S_{n-2}, \dots, S_1$ donc de la suite initiale (x_k), et n nombres réels $a_1, a_2, \dots, a_n$, tels que S_n tende vers le point $(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

§5. Indications sur les exercices proposés dans cette Leçon

Exercice 1. C'est l'inégalité de Schwarz pour les vecteurs $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $\vec{y} = (1, 1, \dots, 1)$. Il y a égalité si et seulement si $\vec{x}$ est proportionnel à $\vec{y}$, donc si et seulement si $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Exercice 2. Puisque $\vec{x} = \vec{x} + \vec{y} + (-\vec{y})$, on a
$\|\vec{x}\| \leq \|\vec{x} + \vec{y}\| + \|-\vec{y}\| = \|\vec{x} + \vec{y}\| + \|\vec{y}\|$, donc
$\|\vec{x}\| - \|\vec{y}\| \leq \|\vec{x} + \vec{y}\|$; de même $\|\vec{y}\| - \|\vec{x}\| \leq \|\vec{y} + \vec{x}\| = \|\vec{x} + \vec{y}\|$.

Exercice 4: $(x - m \mid b - a) = \left(x - \frac{a+b}{2} \;\middle|\; b - a\right) =$
$= \frac{1}{2}\left(x - a + x - b \mid x - a + b - x\right) = \frac{1}{2}\left(\|x-a\|^2 - \|x-b\|^2\right)$.
Le premier membre est nul ssi le dernier membre est nul, donc i) et ii) sont équivalentes.

Exercice 5: $\lim_{k \to +\infty} x_k = 1$, $\lim_{k \to +\infty} y_k = 2$. Donc $A = (1, 2)$.

Exercice 6. 1) $x_1 = 1$, $y_1 = 1/2$.

2) $x_k = \frac{1}{2} y_{k-1} + 1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} x_{k-2}\right) + 1 = \frac{1}{4} x_{k-2} + 1$;

$y_k = \frac{1}{2} x_{k-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} y_{k-2} + 1\right) = \frac{1}{4} y_{k-2} + \frac{1}{2}$.

3°)
$$\begin{cases} x_{2p} = \frac{1}{4} x_{2p-2} + 1 \\ x_{2p-2} = \frac{1}{4} x_{2p-4} + 1 \\ x_{2p-4} = \frac{1}{4} x_{2p-6} + 1 \\ \text{-------------} \\ x_4 = \frac{1}{4} x_2 + 1 \\ x_2 = \frac{1}{4} x_0 + 1 \\ x_0 = 1 \end{cases}$$

Multiplions la deuxième par $\frac{1}{4}$, la troisième par $\left(\frac{1}{4}\right)^2$, ..., etc..., l'antépénultième par $\left(\frac{1}{4}\right)^{p-2}$, l'avant-dernière par $\left(\frac{1}{4}\right)^{p-1}$, la dernière par $\left(\frac{1}{4}\right)^{p}$, et additionnons. Après simplifications, il reste : $x_{2p} = 1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{4}\right)^p = \dfrac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{p+1}}{1 - \frac{1}{4}}$

c'est-à-dire : $x_{2p} = \frac{4}{3} - \frac{4}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{p+1}$.

De même, dans les relations :

$$\begin{cases} x_{2p+1} = \frac{1}{4} x_{2p-1} + 1 \\ x_{2p-1} = \frac{1}{4} x_{2p-3} + 1 \\ x_{2p-3} = \frac{1}{4} x_{2p-5} + 1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_5 = \frac{1}{4} x_3 + 1 \\ x_3 = \frac{1}{4} x_1 + 1 \\ x_1 = 1 \end{cases},$$

multiplions la deuxième par $\frac{1}{4}$, la troisième par $\left(\frac{1}{4}\right)^2$, ..., etc., l'antépénultième par $\left(\frac{1}{4}\right)^{p-2}$, l'avant-dernière par $\left(\frac{1}{4}\right)^{p-1}$, la dernière par $\left(\frac{1}{4}\right)^p$, et additionnons.

Après simplifications, il vient :

$$x_{2p+1} = 1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{4}\right)^p = \frac{4}{3} - \frac{4}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{p+1} = x_{2p}.$$

En procédant de même pour y_{2p} et y_{2p+1}, sachant que $y_0 = 0$, $y_1 = 1/2$, on obtient après calculs :

$$\begin{cases} y_{2p} = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^p \\ y_{2p+1} = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{p+1} \end{cases}.$$

4°) Sur ces formules on voit que $\lim_{k\to+\infty} x_k = \frac{4}{3}$; $\lim_{k\to+\infty} y_k = \frac{2}{3}$.

Donc la suite $M_k = (x_k, y_k)$ tend vers le point $A = \left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

5°) Si on avait démontré par avance l'existence de $\lim_{k\to+\infty} M_k$ (par exemple par le critère de Cauchy), on aurait pu trouver les coordonnées (a, b) de la limite A en faisant tendre k vers $+\infty$ dans les formules :

(1) $x_k = \frac{1}{2} y_{k-1} + 1$; $y_k = \frac{1}{2} x_{k-1}$, d'où :

$a = \frac{1}{2} b + 1$; $b = \frac{1}{2} a$, et par suite $a = 4/3$, $b = 2/3$.

AN 03 Leçon n° 2

Continuité des fonctions de plusieurs variables.

Méthode des approximations successives.

Pour $n=1$, aux Fascicules AN01 et AN02, nous avons surtout rencontré des fonctions définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$, ou sur la réunion d'un nombre fini d'intervalles. Les exemples naturels d'ensembles de définition (inclus dans $\mathbb{R}^n$) des fonctions de plusieurs variables sont beaucoup plus variés : rectangles, disques, cônes ou tout autre domaine. Certes beaucoup de fonctions intéressantes sont définies sur $\mathbb{R}^n$ tout entier, mais il est bon de commencer la théorie en acceptant comme ensemble de définition possible des fonctions n'importe quel sous-ensemble E de $\mathbb{R}^n$. Cependant nous constaterons rapidement que deux classes particulières de sous-ensembles E, les ensembles ouverts d'une part, les ensembles fermés d'autre part (définis ci-après au § 2) fournissent la théorie le plus riche en propriétés.

Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$. Se donner une fonction f définie dans E, à valeurs réelles, ce qu'on note $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$, c'est associer à chaque point x de E un nombre réel $f(x)$, par exemple par une formule explicite qui, en fonction des coordonnées $x_1, x_2, \dots, x_n$ de x, donne la valeur du nombre $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Exemples: 1) Dans le plan $\mathbb{R}^2$ rapporté à des axes xOy (*),

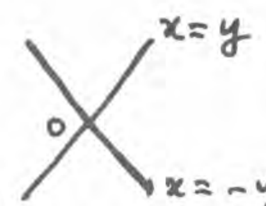
— la fonction $f(x,y) = x^3 \sin(xy)$ est définie dans $\mathbb{R}^2$ tout entier;

— la fonction $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2-y^2}$ est définie dans $E = \mathbb{R}^2$ privé des

---

(*) Dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ on préfère souvent noter les coordonnées (x,y) ou (x,y,z), plutôt que (x_1,x_2) ou (x_1,x_2,x_3) qui résulteraient du cas général $(x_1,x_2,\dots,x_n)$.

deux bissectrices $x=y$ et $x=-y$;



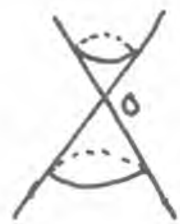
— pour $0<a<b$ deux nombres réels donnés, la fonction $f(x,y)=\operatorname{Log}\dfrac{x^2+y^2-a^2}{b^2-x^2-y^2}$ est définie à l'intérieur de la couronne $E=\{a<\sqrt{x^2+y^2}<b\}$.

2°) Soit $\mathbb{R}^3$ rapporté à des axes $Oxyz$.

La fonction $f(x,y,z)=x^2+y^2+8xyz-z^2$ est définie dans $E=\mathbb{R}^3$ tout entier. La fonction

$$f(x,y,z)=\operatorname{Log}(z^2-x^2-y^2)$$

est définie dans l'ensemble $\{z^2>x^2+y^2\}$, qui est l'intérieur d'un cône de révolution d'axe Oz.



Soit maintenant deux nombres entiers $n\geqslant 1$ et $p\geqslant 1$. Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$. Se donner une <u>fonction</u> (on dit aussi une <u>application</u>) f <u>définie dans</u> E, <u>à valeurs</u> (vectorielles) <u>dans $\mathbb{R}^p$</u>, ce qu'on note $f : E\longrightarrow\mathbb{R}^p$, c'est préciser une correspondance qui, à chaque point x de E, associe un point (ou vecteur) $f(x)$ de $\mathbb{R}^p$. Si on passe aux coordonnées $x_1,x_2,\dots,x_n$ de x dans $\mathbb{R}^n$, et $f_1(x),f_2(x),\dots,f_p(x)$ de $f(x)$ dans $\mathbb{R}^p$, on voit qu'il revient au même de se donner les p fonctions $f_1 : E\to\mathbb{R}$, $f_2 : E\to\mathbb{R}$, $\dots$, $f_p : E\to\mathbb{R}$ à valeurs (numériques) réelles :

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x_1,x_2,\dots,x_n) \\ f_2(x_1,x_2,\dots,x_n) \\ \vdots \\ f_p(x_1,x_2,\dots,x_n) \end{cases}.$$

<u>Exemples</u> : 1°) Soit $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}$ une matrice réelle à deux lignes et deux colonnes. Elle définit une application (linéaire)

 $(x_1, x_2) \mapsto (y_1, y_2)$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ par les formules

$$\begin{cases} y_1 = a x_1 + b x_2 \\ y_2 = c x_1 + d x_2 \end{cases}.$$

2°) Rapportons $\mathbb{R}^3$ aux coordonnées notées (x, y, z). Soit $E = \mathbb{R}^3$ privé de l'origine. Les formules :

$$X = \frac{x}{x^2+y^2+z^2} \; ; \; Y = \frac{y}{x^2+y^2+z^2} \; ; \; Z = \frac{z}{x^2+y^2+z^2}$$

définissent une application $(x, y, z) \mapsto (X, Y, Z)$ de E dans $\mathbb{R}^3$; elle traduit la transformation géométrique appelée inversion de pôle O, de puissance 1.

3°) On a déjà étudié en AN 02, Leçon n° 11 (Courbes en paramétriques) des fonctions $t \mapsto \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$ définies dans un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs (vectorielles) dans $\mathbb{R}^3$, ce qui correspond au cas particulier $n = 1$ et $p = 3$.

§1. Définitions et propriétés élémentaires des fonctions continues

Soient n et p deux nombres entiers ≥ 1. Les espaces $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$ sont munis chacun de leurs norme et distance euclidiennes, pour lesquelles nous ferons l'abus d'adopter la même notation ($\|\cdot\|$ et d) dans les deux espaces $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$ même quand $n \neq p$.

Proposition 1. Soit E une partie de $\mathbb{R}^n$. Soit $f : E \to \mathbb{R}^p$. Soit a un point de E. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

i) quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que : $x \in E$ et $d(x, a) < \eta$ entraîne $d(f(x), f(a)) < \varepsilon$;

ii) si (x_k) est une suite dans E telle que $\lim_{k \to +\infty} x_k = a$, alors $\lim_{k \to +\infty} f(x_k) = f(a)$ dans $\mathbb{R}^p$.

<u>Démonstration</u> Pour $n = p = 1$, elle a été faite en AN01, Leçon n°5, § II, Proposition 1. Relisez cette démonstration et reproduisez-la en y changeant systématiquement les notations telles que $|x-y|$ ou $|f(x)-f(y)|$ en les notations $d(x,y)$ ou $d(f(x),f(y))$. Assurez-vous ainsi que la Proposition plus générale ci-dessous est vraie.

<u>Définitions</u>. Si $f : E \to \mathbb{R}^p$ satisfait i) (et donc ii)), on dit que f est <u>continue au point</u> a.

On dit que f est <u>continue dans E</u> (tout entier) si elle est continue en <u>tout</u> point a de E

Prendre garde que ces définitions dépendent essentiellement de l'ensemble E sur lequel on a choisi de définir f ; par exemple la fonction de variable réelle qui, à x, associe sa partie entière, n'est pas continue à l'origine quand on la définit sur $\mathbb{R}$ tout entier, mais elle devient continue à l'origine quand on se restreint à la définir sur l'ensemble E des nombres réels ≥ 0.

<u>Propriétés élémentaires</u>. Soient E une partie de $\mathbb{R}^n$; $f : E \to \mathbb{R}^p$; $g : E \to \mathbb{R}^p$; $\lambda \in \mathbb{R}$; $a \in E$.

1°) Si f et g sont continues au point a (resp. dans E), alors $f+g$, λf, $\|f\|$, $(f|g)$ sont continues au point a (resp. dans E).

2°) $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_p(x))$ de E dans $\mathbb{R}^p$ est continue au point a (resp. dans E) si et seulement si chaque fonction composante $f_i : E \to \mathbb{R}$, pour $i = 1, 2, \ldots, p$, est continue au point a (resp. dans E). Ceci permet de se ramener au cas $p = 1$ des fonctions à valeurs (numériques) réelles.

3°) Supposons $p = 1$. Si f et g sont continues au point a, alors le produit fg est une fonction continue au point a, ainsi que le quotient $\frac{f}{g}$ à condition que $g(a) \neq 0$.

4) Supposons que E soit un "pavé"

$$E = \{ a_1 < x_1 < b_1 \ ; \ a_2 < x_2 < b_2 \ ; \ \dots \ ; \ a_n < x_n < b_n \},$$

où les a_i, b_i ont le droit d'être infinis, et que f soit <u>à variables séparées</u>, à valeurs réelles :

$$f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_1(x_1) f_2(x_2) \cdots f_n(x_n),$$

c'est-à-dire le produit de n fonctions à une variable. Alors, si chaque f_i est continue, f elle-même est continue.

5) (continuité des fonctions composées). Soient n, p et q trois entiers $\geqslant 1$. Soit E une partie de $\mathbb{R}^n$ et E_1 une partie de $\mathbb{R}^p$. Soit $f : E \to \mathbb{R}^p$, et $g : E_1 \to \mathbb{R}^q$. Supposons que, pour tout $x \in E$, on ait $f(x) \in E_1$. Il y a donc un sens à considérer <u>l'application composée</u> $g \circ f$ de E dans $\mathbb{R}^q$ définie par

$$g \circ f(x) = g[f(x)].$$

Soit $a \in E$. Supposons f continue au point a, et g continue au point $b = f(a)$. Alors $g \circ f$ est continue au point a.

Par suite, si f est continue dans E et g continue dans E_1, alors $g \circ f$ est continue dans E.

<u>Démonstration</u> de 5). Soit (x_k) une suite dans E qui tend vers a. Alors $f(x_k)$ tend vers $f(a) = b$, et $g[f(x_k)]$ tend vers $g(b)$; autrement dit $g \circ f(x_k)$ tend vers $g \circ f(a)$.

<u>Remarque</u>. Dans la plupart des cas, les propriétés ci-dessus suffisent à démontrer qu'une fonction donnée est continue sans avoir à recourir aux ε et η de la définition.

Faites-le pour les exemples de fonctions dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ donnés dans le Préambule de cette Leçon.

<u>Exercice 1</u>. Dans $\mathbb{R}^2$ privé de $(0,0)$, on pose $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$.

Montrez que f est continue dans cet ensemble, mais que, si on tente de la prolonger en posant $f(0,0) = a$, alors pour aucun nombre réel a la fonction f ainsi prolongée ne peut être continue à l'origine.

§ 2. Ensembles ouverts, ensembles fermés dans $\mathbb{R}^n$

Soit a un point de $\mathbb{R}^n$, et soit r un nombre réel > 0. On appelle boule de centre a, de rayon r, et on note $B(a,r)$, l'ensemble des $x \in \mathbb{R}^n$ tels que $d(a,x) < r$.

Au lieu de "boule" on dit "intervalle" si $n=1$, "disque" si $n=2$.

Définition. On dit qu'un sous-ensemble U de $\mathbb{R}^n$ est ouvert si, quel que soit $x \in U$, il existe un nombre r_x strictement positif tel que la boule $B(x, r_x)$ soit contenue dans U.

Un domaine simple dans $\mathbb{R}^2$ privé de sa frontière donne une image concrète d'un ensemble ouvert : on ne peut accepter dans U un point-frontière tel que y, car aucun disque centré en y, si petit que soit son rayon, ne pourra être tout entier contenu dans U.

Définition. On dit qu'un sous-ensemble E de $\mathbb{R}^n$ est fermé si chaque fois qu'une suite (x_k) d'éléments de E tend vers une limite $a \in \mathbb{R}^n$, alors nécessairement cette limite a appartient à l'ensemble E.

Rappelons qu'on appelle complémentaire d'un ensemble E dans $\mathbb{R}^n$ l'ensemble des points de $\mathbb{R}^n$ qui ne sont pas dans E.

Proposition 2. Pour qu'un ensemble E soit fermé, il faut et il suffit que son complémentaire soit ouvert.

Démonstration. Notons U l'ensemble complémentaire de E dans $\mathbb{R}^n$.

a) Supposons E fermé. Soit $a \in U$. Si, par l'absurde, U n'était pas ouvert, alors pour tout entier $k > 0$, la boule $B(a, \frac{1}{k})$

contiendrait au moins un point x_k non dans U, donc dans E. Comme $d(a, x_k) < \frac{1}{k}$, la suite (x_k) d'éléments de E tendrait vers a. Puisque E est fermé, le point a serait dans E, ce qui est absurde puisqu'il est dans U. Donc U est ouvert.

b) Supposons U ouvert, et montrons que E est fermé. Soit (x_k) une suite dans E tendant vers $a \in \mathbb{R}^n$. Par l'absurde supposons que a n'appartienne pas à E, donc appartienne à U. Alors il existe $r > 0$ tel que la boule $B(a, r)$ soit incluse dans U. Tout point de E, et en particulier tout x_k, est distant de a de plus de r ; c'est contradictoire avec le fait que (x_k) tend vers a. Donc a appartient à E.

<u>Remarque</u>. On prendra garde qu'il y a beaucoup d'ensembles qui ne sont ni ouverts ni fermés (par exemple dans $\mathbb{R}$ l'intervalle $a < x \leq b$). Ce n'est pas parce qu'on a constaté qu'un ensemble n'est pas ouvert qu'on peut pour autant conclure qu'il est fermé...

On obtiendra beaucoup d'ensembles ouverts et d'ensembles fermés en appliquant la

<u>Proposition 3</u>. Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction <u>continue</u>.

1°) L'ensemble E des $x \in \mathbb{R}^n$ tels que $f(x) \geq 0$ est fermé.

2°) L'ensemble F des $x \in \mathbb{R}^n$ tels que $f(x) = 0$ est fermé.

3) L'ensemble U des $x \in \mathbb{R}^n$ tels que $f(x) > 0$ est ouvert.

<u>Démonstration</u> 1) Soit $(x_k) \in E$ telle que $\lim_{k \to +\infty} x_k = a \in \mathbb{R}^n$. Puisque f est continue, la suite de nombres $(f(x_k))$ tend vers le nombre $f(a)$. Les $f(x_k)$ sont ≥ 0, donc aussi leur limite $f(a)$ (cf. AN01, Leçon n° 2, I, 7°b). Ainsi $a \in E$, et E est fermé.

2) Démonstration analogue.

3) Changeant f en $-f$ dans 1), on voit que l'ensemble des x tels que $f(x) \leq 0$ est fermé, donc son complémentaire U est

ouvert.

Remarque. Il est facile de voir que : a) toute réunion d'ensembles ouverts, toute intersection d'un nombre fini d'ensembles ouverts, sont des ensembles ouverts ; b) toute intersection d'ensembles fermés, toute réunion d'un nombre fini d'ensembles fermés, sont des ensembles fermés.

§ 3. Fonctions continues sur un ensemble compact de $\mathbb{R}^n$

Le lecteur est d'abord prié de relire AN01, Leçon n°5, § III, dont ceci est une généralisation.

On dit qu'un sous-ensemble E de $\mathbb{R}^n$ est borné s'il existe une constante $M > 0$ telle que, pour tout $x \in E$, on ait $\|x\| \leq M$.

Proposition 4. Pour un sous-ensemble E de $\mathbb{R}^n$ les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

i) E est fermé et borné ;

ii) de toute suite de points de E, on peut extraire une suite qui tend vers un point de E.

Définition. On dit qu'un sous-ensemble E de $\mathbb{R}^n$ est compact s'il satisfait à ces propriétés.

Démonstration de la Proposition 4. i) entraîne ii). Soit $(x_k) \in E$. D'après i) cette suite est bornée. Le théorème de Bolzano-Weierstrass assure l'existence d'une suite extraite de (x_k) qui converge vers un point de $\mathbb{R}^n$; mais ce point est dans E, car E est fermé d'après i).

ii) entraîne i). Montrons d'abord que E est fermé. Soit $(x_k) \in E$ telle que $\lim_{k \to +\infty} x_k = a \in \mathbb{R}^n$. D'après ii) il existe une suite extraite de (x_k) qui converge vers un point b de E. Nécessairement $b = a$. Donc $a \in E$, ce qui prouve que E est fermé.

Si par l'absurde E n'était pas borné, il existerait dans E une suite (x_k) telle que, pour tout k, on ait $\|x_k\| \geq k$. Toute suite extraite de (x_k) verrait sa norme tendre vers l'infini ; une telle suite extraite ne pourrait donc converger, ce qui contredit ii).

<u>Lemme</u> Soient n et p deux entiers $\geqslant 1$, soit E un ensemble <u>compact</u> dans $\mathbb{R}^n$. Soit $f : E \to \mathbb{R}^p$ une application <u>continue</u> dans E. Alors l'image $f(E)$ — ensemble des $y = f(x)$ quand x parcourt E — est un ensemble <u>compact</u> dans $\mathbb{R}^p$.

<u>Démonstration</u> Soit $(y_1, y_2, \ldots)$ une suite dans $f(E)$; il existe des $x_1, x_2, \ldots$ dans E tels que, pour tout indice k, on ait $f(x_k) = y_k$. Puisque E est compact, il existe une suite $x'_1, x'_2, \ldots$ extraite de (x_k) qui converge vers un point a de E.

Posons $y'_i = f(x'_i)$. La suite $y'_1, y'_2, \ldots$ est extraite de $(y_1, y_2, \ldots)$. Puisque f est continue, cette suite tend vers $f(a)$. Donc $f(E)$ possède la propriété ii) de la Proposition 4.

<u>Théorème 1</u>. Soit E un sous-ensemble <u>compact</u> de $\mathbb{R}^n$. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction <u>continue</u> dans E. Alors la fonction f est <u>bornée</u>, et <u>atteint</u> dans E <u>ses bornes</u> supérieure et inférieure.

<u>Démonstration</u>. D'après le Lemme $f(E)$ est une partie bornée (et fermée) de $\mathbb{R}$. Donc f est bornée. Montrons par exemple qu'elle atteint sa borne supérieure M. Pour tout entier $k \geqslant 1$, il existe un $y_k \in f(E)$ tel que $M - \frac{1}{k} \leqslant y_k \leqslant M$. Il est clair que $\lim_{k \to +\infty} y_k = M$. Donc $M \in f(E)$ puisque $f(E)$ est fermé ; autrement dit il existe $x \in E$ tel que $M = f(x)$.

En reproduisant la démonstration de AN01, Leçon n°5, § III, Théorème 4 (remplaçant seulement la valeur absolue par la norme euclidienne), on obtient le

<u>Théorème 2</u> (théorème de Heine). Soient n et p deux entiers $\geqslant 1$. Soit E un sous-ensemble <u>compact</u> de $\mathbb{R}^n$. Soit $f : E \to \mathbb{R}^p$

une application <u>continue</u> dans E. Alors f est même <u>uniformément continue</u> dans E, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \text{quel que soit } \varepsilon > 0, \text{ il existe } \eta > 0 \text{ tel que :} \\ x \in E,\ y \in E,\quad d(x,y) < \eta \ \text{ impliquent } \ d(f(x), f(y)) < \varepsilon . \end{cases}$$

§ 4. <u>Le théorème du point fixe, et la résolution des équations $x = f(x)$ par la méthode des approximations successives.</u>

Le lecteur est prié de relire AN 01 Leçon n°12, où la question a été traitée pour le cas d'une seule variable.

<u>Théorème</u> 3. Soit E un ensemble <u>fermé</u> dans $\mathbb{R}^n$. Soit $f : E \to \mathbb{R}^n$ une application telle que $f(E)$ soit contenue dans E. Soit k un nombre réel tel que $0 \leq k < 1$. Supposons que f soit <u>contractante</u> de rapport k, c'est-à-dire que :

quels que soient $x \in E$, $y \in E$, on a : $d[f(x), f(y)] \leq k\, d(x,y)$.

1°) Alors <u>il existe un point</u> a <u>et un seul</u> dans E <u>tel que</u>

$$\boxed{a = f(a)} \quad .$$

2°) Si on fixe arbitrairement un point de départ x_0 dans E, et si on forme par récurrence dans E <u>la suite des itérés</u> :

$$x_0\,,\ x_1 = f(x_0),\ x_2 = f(x_1),\ \dots\dots,\ x_p = f(x_{p-1}),\ \dots\dots\ ,$$

<u>cette suite</u> (x_p) <u>tend vers le point fixe</u> a du 1°) quand $p \to +\infty$.

3°) Pour tout entier $p > 0$, l'<u>erreur</u> commise en remplaçant a par x_p est telle que $d(a, x_p) \leq \dfrac{k^p}{1-k}\, d(x_0, x_1)$.

<u>Démonstration</u>. Ecrivez-la vous-même en recopiant celle de AN 01 Leçon n° 12, où vous aurez seulement à remplacer des notations telles que $|x-y|$ par $d(x,y)$, et à utiliser le fait que E est fermé pour prouver que $a = \lim\limits_{p\to\infty} x_p$ est dans E car chaque x_p est dans E.

24/

<u>Exemple</u>. Cherchons par la méthode des approximations successives la solution du système linéaire :

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases}.$$

On le réécrit :

$$\begin{cases} x_1 = \quad -\frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3} \\ x_2 = \frac{1}{3}x_1 \quad + \frac{1}{3}x_3 - \frac{2}{3} \\ x_3 = -\frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 \quad + 1 \end{cases},$$

c'est-à-dire vectoriellement :

$$\vec{x} = A\vec{x} + \vec{b},$$

où $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ est un vecteur inconnu dans $\mathbb{R}^3$, le vecteur $\vec{b} = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 1\right)$ est donné, ainsi que la matrice :

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On va appliquer le Théorème 3 avec $E = \mathbb{R}^3$ tout entier, et $f(x) = Ax + b$. Montrons d'abord que f est <u>contractante</u>. Si on pose

$$y = Ax = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -x_2 + x_3 \\ x_1 + x_3 \\ -x_1 - x_2 \end{pmatrix},$$

on a :

$$\|y\|^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = \frac{1}{9}\left[(x_2 + x_3)^2 + (x_1 + x_3)^2 + (x_1 + x_2)^2\right] =$$

$$= \frac{2}{9}\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_2x_3 + x_3x_1 + x_1x_2\right) \leqslant \frac{4}{9}\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right),$$

grâce à l'inégalité de Schwarz :

$$-x_2x_3 + x_3x_1 + x_1x_2 \leqslant \left(x_2^2 + x_3^2 + x_1^2\right)^{1/2}\left(x_3^2 + x_1^2 + x_2^2\right)^{1/2}.$$

Ainsi $\|y\| \leqslant \frac{2}{3}\|x\|$, et donc

$$d(f(x), f(x')) = \| f(x) - f(x') \| = \| Ax - Ax' \| =$$
$$= \| A(x - x') \| \leq \frac{2}{3} \| x - x' \| = \frac{2}{3} d(x, x'),$$

ce qui prouve que f est contractante de rapport $k = \frac{2}{3} < 1$.
On sait d'avance que <u>la méthode d'itération va converger</u> vers la solution du système. Partant de $x_0 = (0,0,0)$, on programme sur une calculatrice le calcul par récurrence des

$$x_p = f(x_{p-1}) = Ax_{p-1} + b = (x_{p1}, x_{p2}, x_{p3}),$$

ce qui permet de remplir le tableau :

p	x_{p1}	x_{p2}	x_{p3}
0	0	0	0
1	0,33333	−0,66666	1,00000
2	0,88888	−0,22222	1,11111
3	0,77777	0,00000	0,77777
4	0,59226	−0,14815	0,74074
5	0,62963	−0,22222	0,85185
6	0,69136	−0,17284	0,86420
7	0,67901	−0,14814	0,82716
8	0,65844	−0,16460	0,82304
9	0,66256	−0,17283	0,83540
10	0,66940	−0,16735	0,83676
11	0,66804	−0,16460	0,83265
12	0,66575	−0,16644	0,83219
13	0,66620	−0,16735	0,83356
14	0,66697	−0,16674	0,83371
15	0,66681	−0,16643	0,83326

Sachant que la solution exacte est

$x_1 = \frac{2}{3} = 0,66666\dots$; $x_2 = -\frac{1}{6} = -0,16666\dots$; $x_3 = \frac{5}{6} = 0,83333\dots$

on voit qu'il a fallu attendre la quinzième itération pour avoir 3 décimales exactes. C'est un peu mieux que le maximum de l'erreur annoncé par le 3°) du Théorème 3, à savoir :

$$\frac{k^p}{1-k}\, d(x_0, x_1) = 3\left(\frac{2}{3}\right)^{15} \frac{\sqrt{14}}{3} = 0,0085\dots$$

Cet exemple n'était qu'un exercice d'école, puisque de toute façon la solution du système pouvait s'obtenir directement. Mais, dès que le nombre des équations est élevé, la méthode des approximations successives est la meilleure pour obtenir les solutions des systèmes linéaires numériquement. D'autre part elle s'applique bien entendu aussi à des équations non linéaires.

Exercice 2. Soit $i = \sqrt{-1}$. Montrez que l'équation

$$z^3 + 3iz - 1 = 0$$

a une seule racine complexe $z = x + iy$ telle que $|z| \leq 1$, et, par la méthode des approximations successives, déterminez les parties réelle x et imaginaire y de cette racine avec 5 décimales exactes.

§5. Solutions des Exercices proposés dans cette Leçon

Exercice 1. La fonction $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ est continue dans l'ensemble $E = \mathbb{R}^2$ privé de $(0,0)$, car c'est le quotient de deux fonctions évidemment continues $x^2 - y^2$ et $x^2 + y^2$, celle du dénominateur ne s'annulant pas dans E. Prolongeons f en posant $f(0,0) = a$. Quand l'entier $k \geq 1$ tend vers $+\infty$, les deux suites de points $M_k = \left(\frac{1}{k}, 0\right)$ et $P_k = \left(0, \frac{1}{k}\right)$ tendent vers $(0,0)$. Mais $f(M_k) \equiv 1$ tend vers 1, et $f(P_k) \equiv -1$ tend vers -1. Donc, si la fonction f prolongée était continue à l'origine, il faudrait que $a=1$ et $a=-1$; c'est impossible.

Exercice 2. Identifions le plan complexe $\mathbb{C}$ des $z=x+iy$ au plan euclidien $\mathbb{R}^2$ des (x,y). Alors la distance euclidienne $d(z,z')$ n'est autre que le module $|z-z'|$ du nombre complexe $z-z'$. Soit E l'ensemble des $z\in\mathbb{C}$ tels que $|z|\leq 1$; c'est l'ensemble $x^2+y^2-1\leqslant 0$; il est fermé d'après la Proposition 3. Réécrivons l'équation proposée :

$$z=\frac{1}{z^2+3i}=f(z)$$

Si $z\in E$, alors $f(z)\in E$, car $|f(z)|=\dfrac{1}{|z^2+3i|}$ est $\leqslant \dfrac{1}{|3i|-|z|^2}\leqslant\dfrac{1}{3-1}=\dfrac{1}{2}$ d'après l'inégalité triangulaire de la différence. De plus f est contractante de rapport $\frac{1}{2}$ dans E, car, si $|z|\leq 1$ et $|z'|\leqslant 1$,

$$f(z)-f(z')=\frac{z'^2-z^2}{(z^2+3i)(z'^2+3i)}=\frac{z+z'}{(z^2+3i)(z'^2+3i)}\,(z-z'),$$

donc, puisque $|z+z'|\leq|z|+|z'|\leq 2$, et $|z^2+3i|\geqslant 2$ et $|z'^2+3i|\geqslant 2$, on a $|f(z)-f(z')|\leqslant\frac{2}{4}|z-z'|=\frac{1}{2}|z-z'|$.

D'après le Théorème 3, l'équation a une racine et une seule dans E. Si $z=x+iy$ et $f(z)=X+iY=\dfrac{1}{(x+iy)^2+3i}=\dfrac{x^2-y^2-i(2xy+3)}{(x^2-y^2)^2+(2xy+3)^2}$, on voit de plus que la racine sera donnée par la limite (x,y) de la suite de points (x_k,y_k) de $\mathbb{R}^2$ définie par récurrence par $x_0=y_0=0$, et :

$$x_{k+1}=\frac{x_k^2-y_k^2}{(x_k^2-y_k^2)^2+(2x_ky_k+3)^2}\,;\quad y_{k+1}=\frac{-(2x_ky_k+3)}{(x_k^2-y_k^2)^2+(2x_ky_k+3)^2}.$$

Après 6 itérations, une calculatrice donne $x=-0{,}01215$; $y=-0{,}33199$.

AN 03 Leçon n° 3 et Leçon n° 4

page 28 Dérivées partielles premières. Différentielle.

L'extension du Calcul Différentiel aux fonctions de plusieurs variables date du XVIII$^{\text{ième}}$ siècle ; elle est due notamment à Euler, Legendre, et surtout Lagrange pour la recherche des maxima et minima et pour la formule de Taylor. La notion rigoureuse de différentielle a été définie par Stolz et Fréchet.

§ 1. Cas d'une fonction numérique

Pour fixer les idées nous prendrons pour commencer une fonction $f = f(x, y, z)$ de trois variables, à valeurs réelles ; l'extension des définitions et résultats au cas de n variables à valeurs vectorielles sera faite au § 2.

Soit U un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^3$, et soit (a, b, c) un point de U. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction $f(x, y, z)$ définie dans U. En fixant, en figeant, les deux variables y et z, on peut considérer la fonction $x \mapsto f(x, b, c)$ de x seul. Si cette fonction d'une seule variable a une dérivée par rapport à x au point a, c'est-à-dire si la

$$\lim_{h \neq 0,\, h \to 0} \frac{f(a+h, b, c) - f(a, b, c)}{h}$$

existe et est finie, on appelle cette limite la dérivée partielle (première) de f par rapport à x au point (a, b, c), et on la note $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b, c)$ ou $f'_x(a, b, c)$. De même, si elles existent, on note :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b, c) = \lim_{k \neq 0,\, k \to 0} \frac{f(a, b+k, c) - f(a, b, c)}{k} \quad \text{et}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(a, b, c) = \lim_{\ell \neq 0,\, \ell \to 0} \frac{f(a, b, c+\ell) - f(a, b, c)}{\ell}$$

les dérivées partielles de f par rapport à x et y au point (a,b,c).

On s'intéresse surtout au cas où f admet des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ en tout point (a,b,c) de U. Quand (a,b,c) varie dans U, ces dérivées partielles deviennent elles-mêmes des fonctions définies dans U ; si de plus ces trois fonctions sont continues dans U, on dit que f est de classe C^1 dans U.

Exemples 1) Dans l'ouvert $U = \mathbb{R}^3$ privé de l'origine, la fonction

$$f(x,y,z) = \operatorname{Log}(x^2 + 2y^2 + z^2)$$

est de classe C^1 et l'on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+2y^2+z^2} \; ; \; \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{4y}{x^2+2y^2+z^2} \; ; \; \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{2z}{x^2+2y^2+z^2}$$

2) Dans l'ouvert U de $\mathbb{R}^2$ formé des (x,y) tels que $x>0$, la fonction $f(x,y) = x^y$ est de classe C^1, et l'on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y\,x^{y-1} \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^y \operatorname{Log} x .$$

3) Dans l'ouvert U de $\mathbb{R}^n$ formé des $(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq (0,0,\dots,0)$, la fonction $r = \|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$ est de classe C^1, et, pour tout $i = 1,2,\dots,n$, on a la formule $\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r}$.

Définition. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^3$, soit $(a,b,c) \in U$, et soit $f : U \to \mathbb{R}$. On dit que f est différentiable au point (a,b,c) s'il existe trois constantes réelles A, B, C telles que :

$$f(a+h, b+k, c+l) - f(a,b,c) = Ah + Bk + Cl + \|(h,k,l)\|\,\varepsilon(h,k,l),$$

où $\varepsilon(h,k,l)$ tend vers 0 quand $\|(h,k,l)\| = \sqrt{h^2+k^2+l^2}$ tend vers 0.

Autrement dit : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $0 \neq \sqrt{h^2+k^2+l^2} < \eta$ implique :

$$\left| \frac{f(a+h, b+k, c+l) - f(a,b,c) - (Ah + Bk + Cl)}{\sqrt{h^2+k^2+l^2}} \right| < \varepsilon .$$

Si c'est le cas la fonction <u>linéaire</u> $(h,k,l) \mapsto Ah+Bk+Cl$ définie dans $\mathbb{R}^3$ s'appelle <u>la différentielle</u> de f au point (a,b,c) et se note df, ou $df(a,b,c)$.

<u>Théorème 1</u>. 1°) Si f est différentiable <u>au point</u> (a,b,c), elle admet des dérivées partielles premières <u>en ce point</u>, et l'on a :

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b,c) \quad ; \quad B = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b,c) \quad ; \quad C = \frac{\partial f}{\partial z}(a,b,c)$$

[et en particulier les constantes A, B, C qui définissent la différentielle sont uniques].

2°) Réciproquement, si f est <u>de classe C^1 dans U</u>, alors f est différentiable <u>en tout point de U</u>.

<u>Démonstration</u> 1°) Dans la définition ci-dessus, prenons en particulier $k = l = 0$; on voit que $0 < h < \eta$ implique

$$\left| \frac{f(a+h,b,c) - f(a,b,c)}{h} - A \right| < \varepsilon .$$

Donc $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b,c)$ existe et vaut A. On procède de même pour B et C.

2°) Supposons f de classe C^1 dans U. Soit (a,b,c) un point de U. Posons : $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b,c) = A$; $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b,c) = B$; $\frac{\partial f}{\partial z}(a,b,c) = C$.

En appliquant trois fois la formule des accroissements finis (cf. AN01, Leçon n° 6, § IV, Théorème 1), on a :

$$\begin{aligned}
f(a+h,b+k,c+l) - f(a,b,c) &= \\
&= f(a+h,b+k,c+l) - f(a,b+k,c+l) \\
&\quad + f(a,b+k,c+l) - f(a,b,c+l) \\
&\quad + f(a,b,c+l) - f(a,b,c) \quad =
\end{aligned}$$

$$= h f'_x(a+\theta_1 h, b+k, c+l) + k f'_y(a, b+\theta_2 k, c+l) + l f'_z(a,b,c+\theta_3 l),$$

où $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ dépendent de h, k, l, mais sont des nombres compris entre 0 et 1. Définissons 3 fonctions $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ des variables h, k, l par :

$$f'_x(a+\theta_1 h, b+k, c+l) = f'_x(a,b,c) + \varepsilon_1(h,k,l) = A + \varepsilon_1$$
$$f'_y(\ a,\ b+\theta_2 k, c+l) = f'_y(a,b,c) + \varepsilon_2(h,k,l) = B + \varepsilon_2 .$$
$$f'_z(\ a,\ b,\ c+\theta_3 l) = f'_z(a,b,c) + \varepsilon_3(h,k,l) = C + \varepsilon_3$$

Avec ces notations l'égalité ci-dessus s'écrit, pour $(h,k,l) \neq (0,0,0)$,

$$\frac{f(a+h, b+k, c+l) - f(a,b,c) - (Ah+Bk+Cl)}{\sqrt{h^2+k^2+l^2}} = \frac{h\,\varepsilon_1 + k\,\varepsilon_2 + l\,\varepsilon_3}{\sqrt{h^2+k^2+l^2}} ;$$

d'après l'inégalité de Schwarz, ceci est en valeur absolue plus petit ou égal à $\sqrt{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\varepsilon_3^2}$, donc tend vers 0 quand $\|(h,k,l)\|$ tend vers 0, car chacune des 3 fonctions f'_x, f'_y, f'_z est continue au point (a,b,c).

<u>Notation traditionnelle pour la différentielle</u>

La différentielle de f au point (a,b,c) est la fonction linéaire qui, au vecteur (h,k,l), associe le nombre

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} h + \frac{\partial f}{\partial y} k + \frac{\partial f}{\partial z} l ,$$

où les dérivées partielles sont calculées au point (a,b,c). Dans le cas de la fonction très simple $f(x,y,z) \equiv x$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

et donc, dans ce cas, $df = dx = h$. De même $dy = k$, $dz = l$. Il est donc naturel de poser en général

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz ,$$

ce qui fait apparaître la fonction linéaire

$$(h,k,l) \mapsto df(h,k,l) = Ah + Bk + Cl$$

comme combinaison linéaire, à coefficients A, B, C, des trois fonctions linéaires "coordonnées" dx, dy et dz :

$$(h,k,l) \longmapsto dx(h,k,l) = h \quad ;$$
$$(h,k,l) \longmapsto dy(h,k,l) = k \quad ;$$
$$(h,k,l) \longmapsto dz(h,k,l) = l .$$

§ 2. Cas d'une fonction de plusieurs variables, à valeurs vectorielles

Soient n et p deux entiers ≥ 1. Soit U un ensemble ouvert dans $\mathbb{R}^n$. Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^p$. Quand on passe aux coordonnées, se donner f revient à se donner les p fonctions (numériques) composantes $f_i : U \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$x \longmapsto f(x) \begin{cases} f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ \vdots \\ f_p(x_1, x_2, \cdots, x_n) \end{cases} .$$

<u>Définitions</u>. Soit $a = (a_1, a_2, .., a_n) \in U$. On dit que la fonction (l'application) $f : U \to \mathbb{R}^p$ est <u>différentiable</u> au point a, s'il existe une application <u>linéaire</u> u de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ telle que si, pour $h \in \mathbb{R}^n$, $h \neq 0$ assez petit, on <u>définit</u> $\varepsilon(h) \in \mathbb{R}^p$ par l'équation :

$$f(a+h) - f(a) = u(h) + \varepsilon(h)\,\|h\| ,$$

alors $\varepsilon(h)$ tend vers 0 dans $\mathbb{R}^p$ quand $\|h\| \to 0$.

Si c'est le cas, l'application linéaire u s'appelle <u>la différentielle</u> de f <u>au point</u> a, et se note $df(a)$.

On dit que $f : U \to \mathbb{R}^p$ est <u>de classe C^1 dans U</u> si chaque fonction composante $f_i : U \to \mathbb{R}$ est de classe C^1 dans U, c'est-à-dire si les np dérivées partielles $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ existent en tout point de U et sont des fonctions continues dans U tout entier.

Si les np dérivées partielles $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$ existent, pour

$i=1,2,\dots,p$ et $j=1,2,\dots,n$, on les range en un tableau rectangulaire à p lignes et n colonnes :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_p}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix},$$

donc en une matrice $p \times n$, qu'on appelle la <u>matrice jacobienne</u>(*) de f au point a

Rapportons l'espace $\mathbb{R}^n$ à sa base canonique :
$\vec{e}_1=(1,0,0,\dots,0,0)$; $\vec{e}_2=(0,1,0,\dots,0,0)$; .... ; $\vec{e}_n=(0,0,0,\dots,0,1)$
et l'espace $\mathbb{R}^p$ à sa base canonique :
$\vec{e}'_1=(1,0,0,\dots,0,0)$; $\vec{e}'_2=(0,1,0,\dots,0,0)$; ..... ; $\vec{e}'_p=(0,0,0,\dots,0,1)$

A la Leçon n° 2, on a vu que la notion de limite des fonctions à valeurs vectorielles peut s'étudier composante par composante. Par conséquent <u>une</u> $f : U \to \mathbb{R}^p$ <u>est différentiable au point</u> a <u>si et seulement si chaque fonction composante</u> :

$f_1 : U \to \mathbb{R}$; $f_2 : U \to \mathbb{R}$; ..... ; $f_p : U \to \mathbb{R}$

<u>est différentiable au point</u> a. Le Théorème 1 du § 1 (qui s'étend immédiatement de 3 à n variables) fournit donc plus généralement les énoncés 1°) et 3°) du

<u>Théorème 2</u>. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soit $f : U \to \mathbb{R}^p$.

1°) Si f est différentiable au point a, alors les np dérivées partielles $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$, pour $i=1,2,\dots,p$ et $j=1,2,\dots,n$, existent.

(*) Carl JACOBI (1804-1851), mathématicien allemand, développa notamment la théorie des fonctions elliptiques.

2°) Dans ce cas, la matrice de la différentielle $u = df(a)$ (en tant qu'application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$), quand on rapporte $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$ à leurs bases canoniques, n'est autre que la matrice jacobienne de f au point a.

3°) Réciproquement, si f est de classe C^1 dans U, alors f est différentiable en tout point de U.

<u>Démonstration du 2°)</u>

Notons $\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{p1} & c_{p2} & \cdots & c_{pn} \end{pmatrix}$ la matrice de $u = df(a)$ dans les bases canoniques $(\vec{e}_j)$ de $\mathbb{R}^n$ et $(\vec{e}'_i)$ de $\mathbb{R}^p$. Par définition le nombre c_{ij} est égal à la composante sur $\vec{e}'_i$ du vecteur $u(\vec{e}_j)$. En projetant sur l'axe $\vec{e}'_i$ la définition de u, et en décomposant $\vec{h} = h_1\vec{e}_1 + \cdots + h_n\vec{e}_n$, on obtient que, pour chaque $i = 1, 2, \ldots, p$,

$$f_i(a_1+h_1, \ldots, a_j+h_j, \ldots, a_n+h_n) - f_i(a_1, \ldots, a_j, \ldots, a_n) = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}h_j + \varepsilon_i(h)\,\|h\|,$$

où $\varepsilon_i(h)$ tend vers 0 quand $\|h\|$ tend vers 0. En spécialisant aux h tels que $h_1 = \cdots = h_{j-1} = h_{j+1} = \cdots = h_n = 0$, on voit que, quels que soient $i = 1, 2, \ldots, p$ et $j = 1, 2, \ldots, n$:

$$\left| \frac{f_i(a_1, \ldots, a_{j-1}, a_j+h_j, a_{j+1}, \ldots, a_n) - f_i(a_1, \ldots, a_{j-1}, a_j, a_{j+1}, \ldots, a_n)}{h_j} - c_{ij} \right|$$

vaut $|\varepsilon_i(h)|$, donc tend vers 0 quand $\|h\| = |h_j|$ tend vers 0.

On a bien prouvé que $c_{ij} = \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$.

<u>Exemples</u> : 1°) La matrice jacobienne de l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ qui, au point (x, y), associe le point (X, Y) donné par les formules :

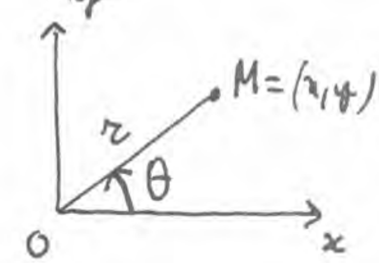
$$X = x^2 - y^2 \quad , \quad Y = 2xy$$

est la matrice $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial X}{\partial x} & \dfrac{\partial X}{\partial y} \\ \dfrac{\partial Y}{\partial x} & \dfrac{\partial Y}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$.

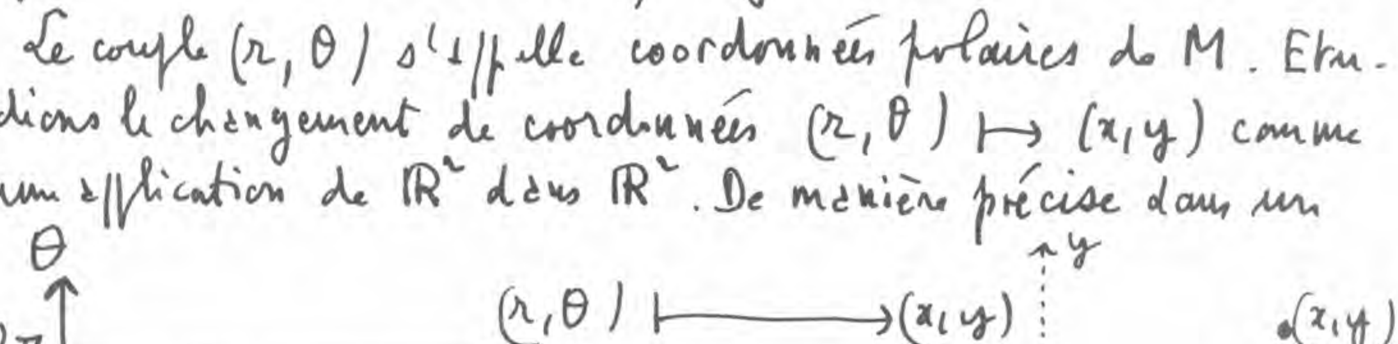
2) Considérons la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^3$ qui définit les équations paramétriques de l'hélice circulaire :
$$t \mapsto (x(t), y(t), z(t)) = (a\cos t, a\sin t, ht).$$
Sa matrice jacobienne est la matrice-colonne
$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a\sin t \\ a\cos t \\ h \end{pmatrix}$$
du <u>vecteur tangent</u> à cette courbe au point de paramètre t (cf AN 02, Leçon n° 11).

3) La matrice jacobienne d'une fonction différentiable $f(x_1, \dots, x_n)$ à n variables, à valeurs réelles ($p=1$), est la matrice-ligne :
$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \ \frac{\partial f}{\partial x_2} \ \cdots\cdots \ \frac{\partial f}{\partial x_n} \right).$$

4) <u>Coordonnées polaires dans $\mathbb{R}^2$</u>



Soit le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ rapporté aux coordonnées cartésiennes (x, y). Si $M = (x, y)$ est un point du plan, on pose :
$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \|\vec{OM}\| = d(O, M).$$
Si $r \neq 0$, il existe un nombre réel θ (défini à $2k\pi$ près) tel que
$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta.$$
Le couple (r, θ) s'appelle coordonnées polaires de M. Etudions le changement de coordonnées $(r, \theta) \mapsto (x, y)$ comme une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. De manière précise dans un



plan <u>cartésien</u> dont les variables sont notées (r, θ), soit U l'ensemble ouvert $\{ r > 0 \; ; \; 0 < \theta < 2\pi \}$. Alors les formules

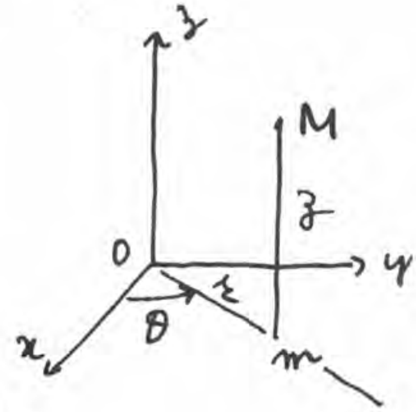
36/ de "changement de variables"

$$x = r\cos\theta \quad , \quad y = r\sin\theta$$

définissent une application $(r,\theta) \mapsto (x,y)$ de U dans $\mathbb{R}^2$, dont la matrice jacobienne est

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}.$$

5°) <u>Coordonnées cylindriques dans $\mathbb{R}^3$</u>



Ce sont des nombres (r, θ, z) tels que

$$x = r\cos\theta \ , \ y = r\sin\theta \ , \ z = z \ .$$

Dans un espace $\mathbb{R}^3$ dont les variables sont notées r, θ, z, soit U l'ensemble ouvert :

$$U = \{ r > 0 \ ; \ 0 < \theta < 2\pi \ ; \ z \in \mathbb{R} \} .$$

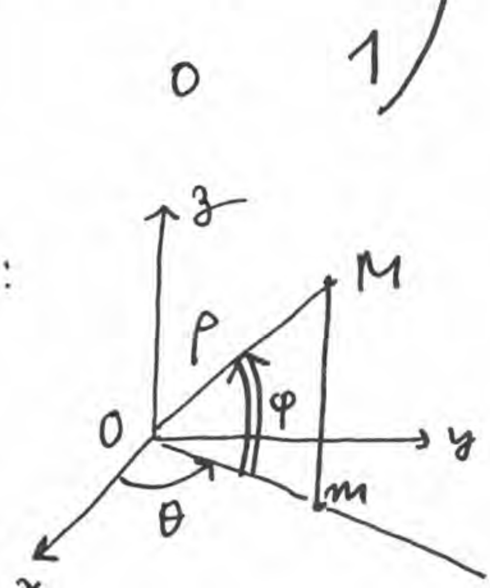
les formules de "changement de variables" :

$$x = r\cos\theta \quad , \quad y = r\sin\theta \quad , \quad z = z$$

définissent une application de U dans l'espace $\mathbb{R}^3$ des (x,y,z), dont la matrice jacobienne est :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6°) <u>Coordonnées sphériques dans $\mathbb{R}^3$</u>



Ce sont des nombres (ρ, θ, φ) tels que :

$$(1) \quad \begin{cases} x = \rho \cos\varphi \cos\theta \\ y = \rho \cos\varphi \sin\theta \\ z = \rho \sin\varphi \end{cases}$$

On a $x^2+y^2+z^2=\rho^2$, donc $\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\|\overrightarrow{OM}\|=d(O,M)$.
Soit $m=(x,y)$ la projection orthogonale de $M=(x,y,z)$ sur le plan xOy. Les coordonnées polaires de m sont $r=\rho\cos\varphi$ et θ. L'angle φ est l'angle $(\overrightarrow{Om},\overrightarrow{OM})$.

Dans un espace $\mathbb{R}^3$ de variables (ρ,θ,φ) soit l'ouvert

$$U=\{\rho>0\ ;\ 0<\theta<2\pi\ ;\ -\tfrac{\pi}{2}<\varphi<\tfrac{\pi}{2}\}.$$

Les formules de changement de coordonnées (1) définissent une application de U dans l'espace $\mathbb{R}^3$ des (x,y,z), dont la matrice jacobienne est :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial\rho} & \frac{\partial x}{\partial\theta} & \frac{\partial x}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial\rho} & \frac{\partial y}{\partial\theta} & \frac{\partial y}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial\rho} & \frac{\partial z}{\partial\theta} & \frac{\partial z}{\partial\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\theta & -\rho\cos\varphi\sin\theta & -\rho\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi & 0 & \rho\cos\varphi \end{pmatrix}$$

<u>Exercice 1</u>. Soit $i=\sqrt{-1}$. Calculez la matrice jacobienne de l'application $(x,y)\mapsto(X,Y)$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$X+iY=(x+iy)^3.$$

<u>Exercice 2</u>. Soit U l'ouvert $\mathbb{R}^3$ privé de l'origine. Soit $(x,y,z)\mapsto(X,Y,Z)$ l'inversion de pôle O, de puissance 1, définie dans U, à valeurs dans $\mathbb{R}^3$, par les formules :

$$X=\frac{x}{x^2+y^2+z^2}\ ;\quad Y=\frac{y}{x^2+y^2+z^2}\ ;\quad Z=\frac{z}{x^2+y^2+z^2}.$$

Calculez la matrice jacobienne de cette transformation (on posera $\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ pour simplifier la présentation du résultat).
Vérifiez que cette matrice est égale à son inverse.

§3. Différentielle et dérivées partielles premières d'une fonction composée.

Avant d'aborder la question qui fait le titre de ce paragraphe, énonçons quelques propriétés immédiates des différentielles. Soit U un ensemble ouvert dans $\mathbb{R}^n$. Soit $a \in U$. Soient $f : U \to \mathbb{R}^p$ et $g : U \to \mathbb{R}^p$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

1°) Si f est constante dans U, on a $df(a) = 0$.

2°) Si f est la restriction à U d'une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, alors $df(a) = f$.

3°) Si f et g sont différentiables au point a, alors $f+g$ et λf sont différentiables au point a, et :

$$d(f+g)(a) = df(a) + dg(a) \quad ; \quad d(\lambda f)(a) = \lambda\, df(a).$$

Maintenant relisez la démonstration du théorème de dérivation d'une fonction composée à une variable, en AN01, Leçon n° 6, § II, Proposition 1. Il y a là tous les ingrédients pour obtenir plus généralement le

Théorème 3 (différentielle d'une application composée). Soient n, p et q trois entiers ≥ 1. Soit U un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$, soit V un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^p$. Soit a un point de U. Soit f une application de U dans $\mathbb{R}^p$, telle que $f(x)$ soit dans V pour tout $x \in U$. Soit g une application de V dans $\mathbb{R}^q$. Il y a donc un sens à parler de l'application composée $g \circ f$ de U dans $\mathbb{R}^q$, définie pour tout $x \in U$ par $g\circ f(x) = g[f(x)]$.

Supposons f différentiable au point a ; soit $u = df(a)$ sa différentielle. Supposons g différentiable au point $b = f(a)$; soit $v = dg(b) = dg[f(a)]$ sa différentielle. Notons que u est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, et que v est une application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$.

Alors l'application composée $g \circ f$ est différentiable au point a, et sa différentielle s'obtient en composant les différentielles u et v ; autrement dit :

$$\boxed{d(g\circ f)(a) = v \circ u = dg[f(a)] \circ df(a)} .$$

Lemme. Soit u une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, et soit (c_{ij}) sa matrice dans les bases canoniques. Soit M la constante définie par $M = \left(\sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{n} |c_{ij}|^2\right)^{1/2}$. Alors on a l'inégalité $\|u(x)\| \leq M \|x\|$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

Démonstration. En effet, si $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $u(x) = (y_1, \dots, y_p)$ on a les formules: $y_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j$ pour $i = 1, 2, \dots, p$, donc

$$\|u(x)\|^2 = y_1^2 + \dots + y_n^2 = \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j\right)^2 \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{n} |c_{ij}|^2 \sum_{j=1}^{n} x_j^2 = M^2 \|x\|^2 ,$$

d'après l'inégalité de Schwarz.

Démonstration du Théorème 3. Par hypothèse, si, pour $0 \neq h \in \mathbb{R}^n$ et $0 \neq k \in \mathbb{R}^p$ assez petits, on définit $\varepsilon(h) \in \mathbb{R}^p$ et $\varepsilon_1(k) \in \mathbb{R}^q$ par les équations :

$$f(a+h) = f(a) + u(h) + \|h\| \, \varepsilon(h)$$

$$g(b+k) = g(b) + v(k) + \|k\| \, \varepsilon_1(k) ,$$

alors $\lim_{\|h\| \to 0} \varepsilon(h) = 0$ dans $\mathbb{R}^p$, et $\lim_{\|k\| \to 0} \varepsilon_1(k) = 0$ dans $\mathbb{R}^q$.

Or en posant au passage

$$k = u(h) + \|h\| \, \varepsilon(h) ,$$

et en utilisant la linéarité de v, les relations ci-dessus impliquent :

$$g\circ f(a+h) = g[f(a+h)] = g[f(a)+u(h)+\|h\|\varepsilon(h)] =$$
$$= g(b+k) = g(b)+v(k)+\|k\|\,\varepsilon_1(k) =$$
$$= g(b) + v[u(h)+\|h\|\,\varepsilon(h)] + \|k\|\,\varepsilon_1(k) =$$
$$= g[f(a)] + v\circ u(h) + \|h\|\, v[\varepsilon(h)] + \|k\|\,\varepsilon_1(k) \quad ,$$

donc
$$g\circ f(a+h) = g\circ f(a) + v\circ u(h) + \|h\|\,\varepsilon_2(h),$$
où l'on a posé :
$$\varepsilon_2(h) = v[\varepsilon(h)] + \frac{\|k\|}{\|h\|}\,\varepsilon_1(k).$$

Pour prouver le théorème, il suffit de montrer que cet $\varepsilon_2(h)$ tend vers 0 dans $\mathbb{R}^q$ quand $\|h\|\to 0$. Or ceci résulte des observations suivantes :

1) quand $\|h\|$ tend vers 0, $\varepsilon(h)$ tend vers 0 dans $\mathbb{R}^p$, donc $v[\varepsilon(h)]$ tend vers $v(0)=0$ dans $\mathbb{R}^q$, car la fonction v, étant linéaire, est évidemment continue ;

2) $$\frac{\|k\|}{\|h\|} \leq \frac{\|u(h)\|}{\|h\|} + \varepsilon(h) \leq M + \varepsilon(h) \quad ,$$
où M est la constante du Lemme, reste <u>borné</u> quand $\|h\|\to 0$;

3) quand $\|h\|\to 0$, alors, sur sa définition
$$k = u(h) + \|h\|\;\varepsilon(h)$$
tend aussi vers 0, donc $\varepsilon_1(k)$ tend vers 0. CQFD.

En passant aux composantes, donc aux matrices jacobiennes, et en se souvenant que la matrice d'une application linéaire composée $v\circ u$ est le <u>produit</u> au sens matriciel de la matrice de v par celle de u, obtenu par la règle

$$(2) \qquad c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} b_{ik}\, a_{kj}$$

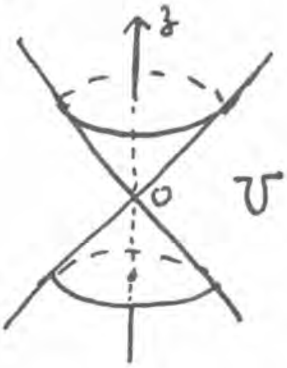
où $1\leq i\leq q$; $1\leq j\leq n$, si (a_{kj}) est la matrice de u et (b_{ik})

L'intégrale proposée vaut donc :

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{\cos\theta\cos\varphi}\rho^3\cos\varphi\,d\rho\,d\theta\,d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\left(\int_0^{\cos\theta\cos\varphi}\rho^3\,d\rho\right)d\theta\,d\varphi =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^4\theta\cos^5\varphi}{4}\,d\theta\,d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\,d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\varphi\,d\varphi = \frac{\pi}{10}.$$

Exercice 5. 1) V est l'extérieur du cône de révolution de sommet O, d'axe Oz, d'équation $x^2+y^2-z^2=0$.



2) $x^2+y^2-z^2=r^2$; donc, s'il existe un triplet (r,θ,t) solution du problème, c'est nécessairement :

$$r=\sqrt{x^2+y^2-z^2}\ ;\ t=\operatorname{Arg\,sh}\frac{z}{r}\ ;\ \begin{cases}\cos\theta=\dfrac{x}{r\,\mathrm{ch}\,t}\\ \sin\theta=\dfrac{y}{r\,\mathrm{ch}\,t}\end{cases},$$

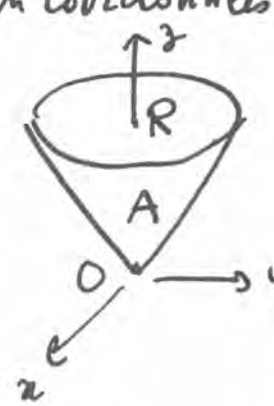
ce qui prouve l'unicité. La première et la troisième de ces formules ont bien un sens, car $x^2+y^2-z^2>0$, et

$$\left(\frac{x}{r\,\mathrm{ch}\,t}\right)^2+\left(\frac{y}{r\,\mathrm{ch}\,t}\right)^2=\frac{x^2+y^2}{r^2(1+\mathrm{sh}^2t)}=\frac{x^2+y^2}{r^2\left(1+\frac{z^2}{r^2}\right)}=\frac{x^2+y^2}{r^2+z^2}=1.$$

Réciproquement, il est clair que (r,t,θ) définis par ces formules satisfont aux relations $x=r\,\mathrm{ch}\,t\cos\theta$, $y=r\,\mathrm{ch}\,t\sin\theta$, $z=r\,\mathrm{sh}\,t$.

3) $$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,t)}=r^2\,\mathrm{ch}\,t.$$

4) Le volume du domaine conique $A=\{x^2+y^2-z^2<0\ ;\ 0<z<R\}$ se calcule par la formule de Fubini, puis le passage en coordonnées polaires $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$:



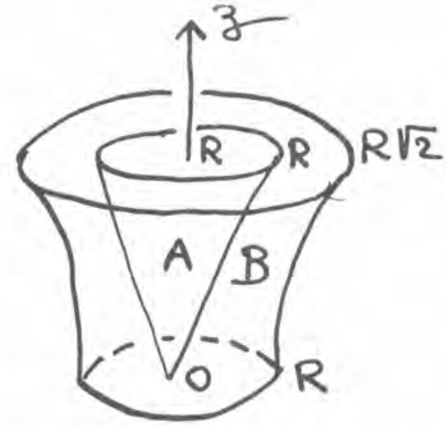
$$\mathrm{vol}(A)=\iiint_A dx\,dy\,dz=\iint_{x^2+y^2<R^2}\left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{R}dz\right)dx\,dy=$$

$$=\iint_{x^2+y^2<R^2}\left(R-\sqrt{x^2+y^2}\right)dx\,dy=\int_0^R\int_0^{2\pi}(R-\rho)\rho\,d\rho\,d\theta=$$

$$=2\pi\left[R\frac{\rho^2}{2}-\frac{\rho^3}{3}\right]_{\rho=0}^{\rho=R}=\frac{\pi R^3}{3}=\frac{1}{3}\text{ aire de la base}\times\text{la hauteur}.$$

118 / 5°) Le tronc d'hyperboloïde à une nappe $H = \{x^2+y^2-z^2 < R^2 \; ; \; 0<z<R\}$ est réunion du cône A et de la portion d'espace $B = \{0 < x^2+y^2-z^2 < R^2 \; ; \; 0<z<R\}$. En coordonnées (r, θ, t), B est défini par

$0<r<R \; ; \quad 0<\theta<2\pi \; ; \quad 0 < \operatorname{sh} t < \frac{R}{r}$.



Donc $\operatorname{vol}(B) = \iiint_B dx\,dy\,dz = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{0<\operatorname{sh} t<\frac{R}{r}} r^2 \operatorname{ch} t \, dr\, d\theta\, dt =$

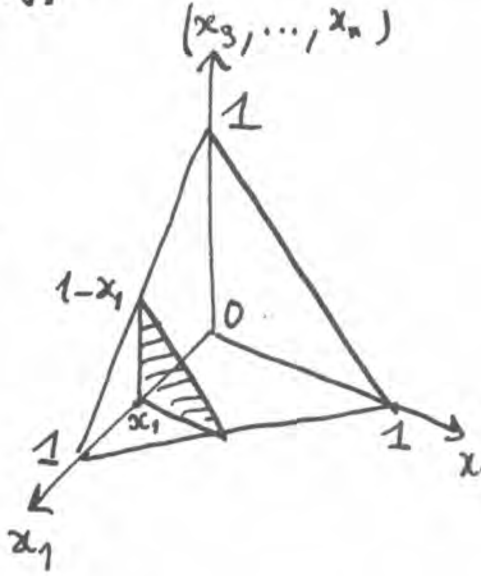
$= 2\pi \int_0^R r^2 \left[\operatorname{sh} t\right]_{\operatorname{sh} t = 0}^{\operatorname{sh} t = \frac{R}{r}} dr = 2\pi \int_0^R R r\, dr = \pi R^3$. Par suite :

$\operatorname{vol}(H) = \operatorname{vol}(A) + \operatorname{vol}(B) = \frac{\pi R^3}{3} + \pi R^3 = \frac{4}{3}\pi R^3 =$ le volume de la boule de rayon R.

Exercice 6. Par l'homothétie $y \longmapsto x = ay$, c'est-à-dire : $x_1 = ay_1, \dots, x_n = ay_n$, on passe de $A_n(1)$ à $A_n(a)$, et le jaco. bien $\frac{D(x)}{D(y)}$ vaut a^n, donc

$$I_n(a) = \iint\cdots\int_{A_n(1)} ay_1 ay_2 \cdots a y_n \frac{D(x)}{D(y)} dy_1 \dots dy_n = a^{2n} I_n(1).$$

Le polyèdre $A_n(1)$ est coupé par l'hyperplan d'abscisse x_1 fixée selon le polyèdre $(n-1)$-dimensionnel (hachuré) $A_{n-1}(1-x_1)$. D'après le théorème de Fubini :



$$I_n(1) = \int_0^1 x_1 \left(\iint\cdots\int_{A_{n-1}(1-x_1)} x_2 \dots x_n \, dx_2 \dots dx_n \right) dx_1 =$$

$$= \int_0^1 x_1 I_{n-1}(1-x_1)\, dx_1 = \left(\int_0^1 x_1 (1-x_1)^{2n-2} dx_1 \right) I_{n-1}(1) = \frac{1}{(2n-1)2n} I_{n-1}(1).$$

En multipliant membre à membre les relations de récurrence, on trouve $I_n(1) = \frac{1}{(2n)!}$, et donc $I_n(a) = \frac{a^{2n}}{(2n)!}$.

Calcul différentiel extérieur

Ce calcul – dont on fait ici un exposé "naïf" et non intrinsèque pour une première approche – permet de donner un modèle mathématique à des notions importantes en Mécanique et en Physique : circulation ou travail d'un champ de vecteurs, d'un champ de forces ; rotationnel, divergence, flux d'un tel champ ; conditions pour qu'un champ dérive d'un potentiel, pour qu'un champ soit un rotationnel ; intégrales curvilignes, intégrales de surface ; formules de Green-Riemann, Stokes, Ostrogradski : telles sont les questions traitées dans les 3 dernières leçons de ce fascicule.

Ici encore l'exposé se placera en dimension n, mais seuls les cas $n=2$ et 3 sont importants. Dans cette Leçon nous allons apprendre à manipuler des expressions du type :

$$P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz\,;$$

$$A(x,y,z)\,dy\wedge dz + B(x,y,z)\,dz\wedge dx + C(x,y,z)\,dx\wedge dy\,;$$

$$\varphi(x,y,z)\,dx\wedge dy\wedge dz\,,$$

où le symbole $\wedge$ se lit : "extérieur". On les appelle des <u>formes différentielles</u>, respectivement de <u>degré</u> 1, 2 et 3, en trois variables. Voici une définition plus générale en dimension n.

Soit n un entier ≥ 1. Soit U un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$. Pour tout entier $p \geq 0$, on va définir les <u>formes différentielles extérieures</u> (on dira simplement : les formes) de <u>degré</u> p (et de dimension n) dans U.

Les formes de <u>degré 0</u> sont les fonctions $a = a(x) = a(x_1, \dots, x_n)$ définies dans U, à valeurs réelles.

Les formes de <u>degré 1</u> sont les combinaisons linéaires, à <u>coefficients</u> des fonctions définies dans U, des n symboles

$dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$. Ce sont donc les expressions du type

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\, dx_i = a_1(x)\, dx_1 + a_2(x)\, dx_2 + \cdots + a_n(x)\, dx_n,$$

où chaque $x \mapsto a_i(x) = a_i(x_1, \ldots, x_n)$ est une fonction définie dans U. Donc une forme de degré 1 n'est autre qu'une collection ordonnée de n fonctions dans U, les symboles $dx_1, -, dx_n$ n'ayant ici aucune signification, si ce n'est de numéroter ces fonctions.

Les formes de <u>degré 2</u> sont les combinaisons linéaires, à <u>coefficients</u> des fonctions définies dans U, des n^2 symboles $dx_i \wedge dx_j$, où $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$; ce sont donc des expressions du type

$$\omega = \sum_{i,j} a_{ij}(x)\, dx_i \wedge dx_j ,$$

c'est-à-dire des collections de n^2 fonctions $a_{ij}(x)$ définies dans U, les symboles $dx_i \wedge dx_j$ n'ayant d'autre signification que de numéroter ces fonctions.

Plus généralement, si $p \leq n$, les formes <u>de degré p</u> sont les expressions

$$\omega = \sum_{i_1, \ldots, i_p = 1}^{n} a_{i_1 \ldots i_p}(x)\, dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p} ,$$

où les n^p fonctions $x \mapsto a_{i_1 \ldots i_p}(x) = a_{i_1 \ldots i_p}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sont définies dans U, et appelées <u>coefficients</u> de la forme ω.

Enfin, <u>pour $p > n$</u>, on convient qu'il n'y a qu'une seule forme de degré p, la forme nulle.

<u>Egalité de deux formes</u>.

Par définition deux formes ω et ω' sont dites <u>égales</u>, et on écrit $\omega = \omega'$, si elles sont de même degré, et si elles ont mêmes coefficients ou <u>si on peut les ramener à avoir mêmes coefficients par application de la règle fondamentale du Calcul Extérieur:</u>

$$\boxed{dx_i \wedge dx_j = - dx_j \wedge dx_i} \qquad (i,j=1,2,\dots,n)$$

qui a d'ailleurs comme cas particulier :

$$\boxed{dx_i \wedge dx_i = 0} \qquad (i=1,2,\dots,n).$$

Exemple : dans l'espace $\mathbb{R}^3$ des (x,y,z), on a :

$$4x^2\,dx\wedge dy - 6xyz\,dy\wedge dz + 3\,dx\wedge dz - 5xyz\,dz\wedge dy + e^{zy}\,dy\wedge dy$$
$$= 4x^2\,dx\wedge dy - xyz\,dy\wedge dz + 3\,dx\wedge dz,$$

car la règle fondamentale donne $dy\wedge dy=0$, et $dz\wedge dy = -dy\wedge dz$.

Remarque : l'application de cette règle d'égalité permettra d'écrire les formes avec un nombre limité de termes, par exemple

$$\sum_{i_1<i_2<\dots<i_p} a_{i_1\dots i_p}(x)\,dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_p}.$$

Par exemple dans l'espace $\mathbb{R}^3$ des (x,y,z) on pourra toujours se ramener aux formes :

$a(x,y,z)$ en degré 0 ;
$P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz$ en degré 1 ;
$A(x,y,z)\,dy\wedge dz + B(x,y,z)\,dz\wedge dx + C(x,y,z)\,dx\wedge dy$ en d° 2 ;
$\varphi(x,y,z)\,dx\wedge dy\wedge dz$ en degré 3 ;
0 en degré >3.

Addition de deux formes (de même degré).

Par définition elle se fait coefficient par coefficient : si

$\omega_1 = \sum a_{i_1\dots i_p}\,dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_p}$ et $\omega_2 = \sum b_{i_1\dots i_p}\,dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_p}$,

on pose :

$$\omega_1+\omega_2 = \sum \left(a_{i_1\dots i_p} + b_{i_1\dots i_p}\right) dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_p}.$$

Cette opération est évidemment commutative et associative ; de plus elle est compatible avec l'égalité : si $\omega_1=\omega_1'$ et $\omega_2=\omega_2'$, alors $\omega_1+\omega_2 = \omega_1'+\omega_2'$.

Produit extérieur de deux formes

Soit d'abord $\omega = \sum a_{i_1\dots i_p} dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_p}$ une forme de degré p et $b = b(x)$ une forme de degré 0, c'est-à-dire une fonction. Alors la forme $b\omega$ (encore notée $b\wedge\omega$) s'obtient en multipliant chaque coefficient de ω par la fonction b, donc

$$b\omega = \sum_{i_1,\dots,i_p} b(x) a_{i_1\dots i_p}(x)\, dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_p}.$$

Plus généralement, soient deux formes :

$$\omega_1 = \sum a_{i_1\dots i_p} dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_p} \quad \text{et} \quad \omega_2 = \sum b_{j_1\dots j_q} dx_{j_1}\wedge\dots\wedge dx_{j_q}$$

de degré p et q respectivement. Par définition leur produit extérieur est la forme de degré $p+q$:

(1) $$\omega_1\wedge\omega_2 = \sum_{i_1,\dots,i_p;\, j_1,\dots,j_q=1}^{n} a_{i_1\dots i_p} b_{j_1\dots j_q}\, dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_p}\wedge dx_{j_1}\wedge\dots\wedge dx_{j_q}.$$

Ainsi on multiplie terme à terme en prenant garde de respecter l'ordre des symboles dx_i et dx_j. Rien n'empêche ensuite de simplifier par la règle fondamentale d'égalité, et par exemple de supprimer les termes où un dx_{i_k} se trouve être égal à un dx_{j_h}.

Exemple : $(8x^3y\, dy\wedge dz + 5z\, dz\wedge dx)\wedge(x\,dx + y\,dy) =$
$8x^4y\, dy\wedge dz\wedge dx + 5zx\, dz\wedge dx\wedge dx + 8x^3y^2\, dy\wedge dz\wedge dy + 5zy\, dz\wedge dx\wedge dy =$
$= (8x^4y + 5zy)\, dx\wedge dy\wedge dz$.

L'opération $\omega_1\wedge\omega_2$ est compatible avec l'égalité ; elle est associative, et distributive par rapport à l'addition, mais elle n'est pas toujours commutative ; on a en effet la règle :

(2) $$\omega_1\wedge\omega_2 = (-1)^{pq}\, \omega_2\wedge\omega_1$$

si $p = d^\circ\omega_1$ et $q = d^\circ\omega_2$. En effet, sur la formule (1), évidemment les fonctions $a_{i_1\dots i_p}$ et $b_{j_1\dots j_q}$ commutent ; mais on passe du symbole $dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_p}\wedge dx_{j_1}\wedge\dots\wedge dx_{j_q}$ au symbole

$dx_{j_1}\wedge\ldots\wedge dx_{j_q}\wedge dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_p}$, en faisant passer à saute-mouton dx_{j_1} au-dessus successivement de dx_{i_p}, $dx_{i_{p-1}}, \ldots, dx_{i_1}$, ce qui implique p changements de signe, puis, dx_{j_1} étant maintenant en tête, en faisant passer à saute-mouton dx_{j_2} au-dessus de $dx_{i_p}, dx_{i_{p-1}}, \ldots, dx_{i_1}$, ce qui implique p nouveaux changements de signe, et ainsi de suite jusqu'à dx_{j_q}, d'où en tout pq changements de signe.

Sur la formule (2) on voit que ω_1 et ω_2 commutent si l'un au moins des nombres $p = d^\circ\omega_1$ et $q = d^\circ\omega_2$ est pair ; par contre, si ω_1 et ω_2 sont tous deux impairs, elles anti-commutent $(\omega_1\wedge\omega_2 = -\omega_2\wedge\omega_1)$. En particulier, pour toute forme ω de degré impair, $\omega\wedge\omega = 0$.

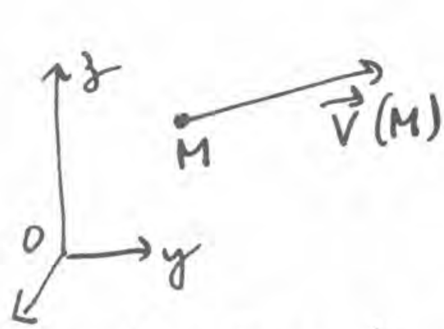
Exemple (produit extérieur de deux formes de degré 1 dans $\mathbb{R}^3$)

Après calculs et simplifications

(3) $$(P\,dx + Q\,dy + R\,dz)\wedge(P'dx + Q'dy + R'dz) = (QR' - RQ')\,dy\wedge dz + (RP' - PR')\,dz\wedge dx + (PQ' - QP')\,dx\wedge dy.$$

A chaque point $M = (x, y, z)$ de U, attachons le vecteur $\vec{V}(M)$ d'origine M, de composantes :

$$\vec{V}(M)\begin{cases} P = P(x,y,z) \\ Q = Q(x,y,z) \\ R = R(x,y,z) \end{cases}$$

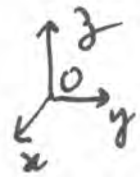


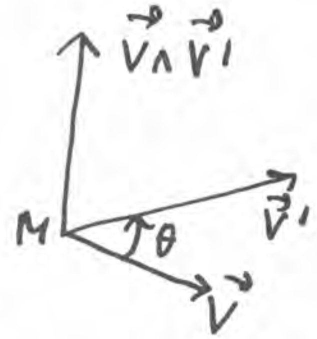
On a ainsi un champ de vecteurs $\vec{V}(M)$.

Si $\vec{V}(M)\begin{cases} P \\ Q \\ R \end{cases}$ et $\vec{V'}(M)\begin{cases} P' \\ Q' \\ R' \end{cases}$ sont deux champs de vecteurs, le

champ $\begin{cases} QR' - RQ' \\ RP' - PR' \\ PQ' - QP' \end{cases}$, noté $\vec{V}\wedge\vec{V'}(M)$ s'appelle le produit vectoriel de $\vec{V}$ par $\vec{V'}$; vous l'avez sûrement déjà rencontré en

Algèbre linéaire et géométrie ; c'est un vecteur perpendiculaire à $\vec{V}$ et à $\vec{V}'$, de longueur $\|\vec{V}\| \, \|\vec{V}'\| \sin\theta$, et tel que le trièdre $\vec{V}, \vec{V}', \vec{V}\wedge\vec{V}'$ soit direct.





Vous voyez sur la formule (3) que le produit vectoriel apparaît tout naturellement quand on effectue le produit extérieur de deux formes de degré 1 dans $\mathbb{R}^3$.

Changement de variables dans les formes différentielles

Soit
$$\omega = \sum a_{i_1 \cdots i_p}(y)\, dy_{i_1} \wedge \cdots \wedge dy_{i_p}$$
une forme de degré p définie dans un ouvert V d'un espace $\mathbb{R}^n$ des $y = (y_1, \cdots, y_n)$. Soit

$$(4) \qquad x \mapsto y = y(x) \quad \begin{cases} y_1 = y_1(x_1, \text{---}, x_n) \\ y_2 = y_2(x_1, \text{---}, x_n) \\ \quad | \\ y_n = y_n(x_1, \text{---}, x_n) \end{cases}$$

un difféomorphisme d'un ouvert U (d'un espace $\mathbb{R}^n$ des $x = (x_1, -, x_n)$) sur V. La forme de degré p dans U :
$$\overline{\omega} = \sum a_{i_1 \cdots i_p}(y(x)) \left(\sum_{k_1} \frac{\partial y_{i_1}}{\partial x_{k_1}} dx_{k_1} \right) \wedge \cdots \wedge \left(\sum_{k_p} \frac{\partial y_{i_p}}{\partial x_{k_p}} dx_{k_p} \right),$$
déduite de ω en y remplaçant y par $y(x)$ et chaque symbole dy_i par la différentielle de y_i :
$$dy_i = \frac{\partial y_i}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial y_i}{\partial x_n} dx_n ,$$
est dite <u>déduite de ω par le changement de variables</u> $x \mapsto y = y(x)$.

<u>Propriétés</u>. Pour un même changement de variables :

1°) si $\omega = \omega'$, alors $\overline{\omega} = \overline{\omega'}$; 2°) $\overline{\omega_1 + \omega_2} = \overline{\omega_1} + \overline{\omega_2}$;

3°) $\overline{\omega_1 \wedge \omega_2} = \overline{\omega_1} \wedge \overline{\omega_2}$.

Exemple. Dans $\mathbb{R}^3$ soit à exprimer en coordonnées cylindriques :

(5) $x = r\cos\theta \quad , \quad y = r\sin\theta \, , \quad z = z$

la forme $\omega = x\,dy\wedge dz + y\,dz\wedge dx - z\,dx\wedge dy$.

D'abord différentions les formules (5)

$dx = \cos\theta\,dr - r\sin\theta\,d\theta \; ; \; dy = \sin\theta\,dr + r\cos\theta\,d\theta \; ; \; dz = dz$.

Donc
$$\overline{\omega} = r\cos\theta\,(\sin\theta\,dr + r\cos\theta\,d\theta)\wedge dz \; +$$
$$+ r\sin\theta\;dz\wedge(\cos\theta\,dr - r\sin\theta\,d\theta) \; +$$
$$- z\,(\cos\theta\,dr - r\sin\theta\,d\theta)\wedge(\sin\theta\,dr + r\cos\theta\,d\theta) =$$
$$= r\cos\theta\sin\theta\,dr\wedge dz + r^2\cos^2\theta\,d\theta\wedge dz + r\sin\theta\cos\theta\,dz\wedge dr$$
$$- r^2\sin^2\theta\,dz\wedge d\theta - z\cos\theta\sin\theta\,dr\wedge dr + rz\sin^2\theta\,d\theta\wedge dr$$
$$- zr\cos^2\theta\,dr\wedge d\theta + zr^2\sin\theta\cos\theta\,d\theta\wedge d\theta =$$
$$= r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)\,d\theta\wedge dz - rz\,(\cos^2\theta + \sin^2\theta)\,dr\wedge d\theta$$
$$= r^2\,d\theta\wedge dz - zr\,dr\wedge d\theta.$$

Nous avons effectué tous les calculs à partir de l'algorithme de définition du changement de variables. Mais on aurait notablement simplifié en écrivant d'abord la forme comme suit :
$$\omega = (x\,dy - y\,dx)\wedge dz - z\,dx\wedge dy$$
et en appliquant les formules utiles à retenir :
$$x\,dy - y\,dx = r^2\,d\theta \quad ; \quad dx\wedge dy = r\,dr\wedge d\theta.$$

Exercice 1. Exprimez en coordonnées sphériques ρ, θ, φ la forme
$$\omega = x\,dy\wedge dz + y\,dz\wedge dx + z\,dx\wedge dy.$$
(Notabene ! on pourra utiliser $r = \rho\cos\varphi$ comme variable intermédiaire)

Expression de la forme-volume par changement de variables

Dans $\mathbb{R}^n$ la "forme-volume" est la forme de degré n :
$$dx_1\wedge dx_2\wedge\ldots\wedge dx_n.$$
Sous l'effet du changement de variables (4), on a la formule :

(6) $$dy_1\wedge dy_2\wedge\ldots\wedge dy_n = \frac{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}\,dx_1\wedge dx_2\wedge\ldots\wedge dx_n,$$

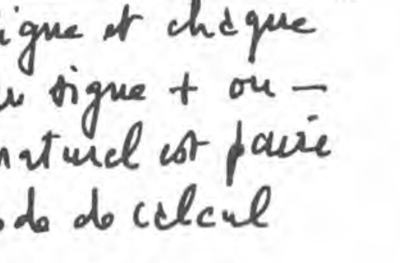
qui est bien en accord avec le théorème du changement de variables

dans les intégrales multiples (Leçon n° 9). Nous avons déjà rencontré le cas particulier $dx \wedge dy = r\, dr \wedge d\theta$ de la formule (6).
Pour prouver (5), écrivons les différentielles :

$$\begin{cases} dy_1 = \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} dx_1 + \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2} dx_2 + \cdots\cdots + \dfrac{\partial y_1}{\partial x_n} dx_n \\ dy_2 = \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} dx_1 + \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2} dx_2 + \cdots\cdots + \dfrac{\partial y_2}{\partial x_n} dx_n \\ \quad \vert \qquad\qquad \vert \qquad\qquad \vert \qquad\qquad\qquad \vert \\ dy_n = \dfrac{\partial y_n}{\partial x_1} dx_1 + \dfrac{\partial y_n}{\partial x_2} dx_2 + \cdots\cdots + \dfrac{\partial y_n}{\partial x_n} dx_n \end{cases}$$

quand on effectue le produit extérieur $dy_1 \wedge dy_2 \wedge \cdots \wedge dy_n$ sur les seconds membres, et qu'on y remet les différentielles dans l'ordre naturel $dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n$, il apparaît $n!$ termes, obtenus en prenant un élément dans chaque ligne et chaque colonne les multipliant, et faisant précéder du signe + ou − selon que la permutation de remise à l'ordre naturel est paire ou impaire. On a reconnu exactement le mode de calcul du déterminant jacobien $\dfrac{Dy}{Dx}$ terme par terme.

Les formes dans $\mathbb{R}^3$ comme modèles mathématiques de notions physiques.



Si $M = (x, y, z)$ est un point de U, le vecteur $\overrightarrow{dM} = (dx, dy, dz)$ issu de M représente un déplacement élémentaire du point M. "Elémentaire" est ici au sens d'infinitésimal, de très petit.

Soit $\vec{V}(M) \begin{cases} P = P(x,y,z) \\ Q = Q(x,y,z) \\ R = R(x,y,z) \end{cases}$ un champ de vecteurs dans U.

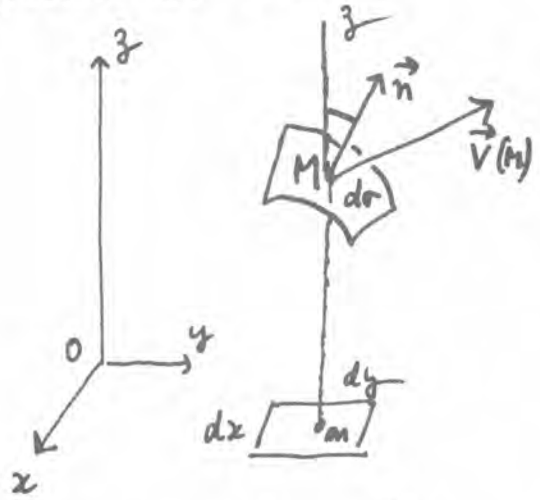
Alors la forme de degré 1

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \left(\vec{V}(M) \,\middle|\, \overrightarrow{dM} \right)$$

apparaît comme le produit scalaire des vecteurs $\vec{V}(M)$ et $\vec{dM}$, et donne une interprétation mathématique de la <u>circulation élémentaire</u> (du travail élémentaire) du champ de vecteurs (de forces) $\vec{V}(M)$ dans le déplacement infinitésimal $\vec{dM}$.

La forme <u>de degré 2</u>

$$P\,dy\wedge dz + Q\,dz\wedge dx + R\,dx\wedge dy =$$
$$= \left(\vec{V}(M) \mid \vec{n}\,d\sigma\right)$$



donne une interprétation mathématique du <u>flux élémentaire</u> du champ $\vec{V}(M)$ à travers le morceau infinitésimal de surface d'aire $d\sigma$, ayant $\vec{n}$ comme vecteur normal de longueur un. En effet le morceau de surface est assez petit pour être assimilé à un morceau de son plan tangent. Si m est la projection de M sur le plan xOy, la projection du morceau de surface sur xOy est assimilable à un rectangle centré en m de côtés dx, dy, donc d'aire $dx\,dy$. Ainsi

$$dx\,dy = \text{la projection sur } xOy \text{ de } d\sigma = d\sigma \times \cos(\vec{n}, Oz)$$

représente bien la composante sur Oz du vecteur $\vec{n}\,d\sigma$. En procédant de même pour les deux autres plans de coordonnées, on voit que les composantes du vecteur élémentaire $\vec{n}\,d\sigma$ sont $dy\,dz$, $dz\,dx$, $dx\,dy$, ce qui motive l'interprétation ci-dessus.

Différentielle extérieure d'une forme

Soit
$$\omega = \sum a_{i_1\dots i_p}(x)\, dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_p}$$

une forme (à coefficients tous) <u>de classe C^1</u> dans un sous-ensemble ouvert U de $\mathbb{R}^n$, et de degré p. On définit une forme de degré $p+1$, appelée <u>différentielle extérieure</u> de ω, et notée $d\omega$, en posant :

$$d\omega = \sum d(a_{i_1 \dots i_p}) \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} =$$

$$= \sum \left(\frac{\partial a_{i_1 \dots i_p}}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial a_{i_1 \dots i_p}}{\partial x_n} dx_n \right) \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} .$$

Moyen mnémotechnique : "pour chaque terme de ω, on différentie le coefficient et on multiplie extérieurement par ce qui reste".

<u>Exemples</u> : 1) si $p=0$, $\omega = a = a(x_1, \dots, x_n)$ et

$$d\omega = da = \frac{\partial a}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial a}{\partial x_n} dx_n .$$

On retrouve la notion de différentielle d'une fonction.

2) Si $n=3$, et $p=1$, et si $\omega = P dx + Q dy + R dz$, alors

$$d\omega = dP \wedge dx + dQ \wedge dy + dR \wedge dz =$$

$$= \left(\frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz \right) \wedge dx +$$

$$+ \left(\frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy + \frac{\partial Q}{\partial z} dz \right) \wedge dy +$$

$$+ \left(\frac{\partial R}{\partial x} dx + \frac{\partial R}{\partial y} dy + \frac{\partial R}{\partial z} dz \right) \wedge dz =$$

$$= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy .$$

Ainsi, si $\quad \omega = P dx + Q dy + R dz$,

alors $\quad d\omega = A \, dy \wedge dz + B \, dz \wedge dx + C \, dx \wedge dy$,

où (A, B, C) est le <u>rotationnel</u> du champ (P, Q, R) :

$$\mathrm{rot}\, \vec{V}(M) = \begin{cases} \dfrac{\partial R}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial z} \\ \dfrac{\partial P}{\partial z} - \dfrac{\partial R}{\partial x} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} \end{cases} .$$

La notion de rotationnel d'un champ est fondamentale en Physique. Notre différentiation extérieure fait passer de la circulation élémentaire d'un champ au flux élémentaire de son rotationnel.

3°) Si, dans $\mathbb{R}^3$, $\omega = P\, dy\wedge dz + Q\, dz\wedge dx + R\, dx\wedge dy$,

alors $d\omega = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\wedge dy\wedge dz$.

Or la fonction $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \operatorname{div} \vec{V}(M)$ est connue (en Physique) sous le nom de divergence du champ $\vec{V}(M)$. Notre différentiation fait passer du flux élémentaire d'un champ à la divergence élémentaire de ce champ.

Propriétés de la différentiation extérieure.

1°) Elle est compatible avec l'égalité : si $\omega = \omega'$, alors $d\omega = d\omega'$.

2°) $d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2$.

3°) $d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^{d^\circ \omega_1} \omega_1 \wedge d\omega_2$

Ceci résulte de la formule $d(ab) = a\,db + b\,da$, et de la règle fondamentale $dx\wedge dy = -dy\wedge dx$. Ecrivez en la démonstration en détail. On a aussi :

4°) $d(\omega_1\wedge\omega_2\wedge\omega_3) = d\omega_1\wedge\omega_2\wedge\omega_3 + (-1)^{d^\circ\omega_1}\omega_1\wedge d\omega_2\wedge\omega_3 +$
$+ (-1)^{d^\circ\omega_1 + d^\circ\omega_2}\omega_1\wedge\omega_2\wedge d\omega_3$.

Exercice 2 Trouvez une fonction $f = f(y)$ de classe C^1, telle que $f(1) = 1$, et telle que, si l'on considère la forme de degré 2

$$\omega = x^3\, dy\wedge dz + f(y)\,(2-3x^2)\, dz\wedge dx - 2z\, dx\wedge dy,$$

on ait $d\omega = 0$.

5°) Une propriété fondamentale de la différentielle extérieure est son invariance par changement de variables :

$$d\overline{\omega} = \overline{d\omega}.$$

Exercice 3. On pose $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$. Soit $u = u(r)$ une fonction de classe C^1 telle que $u(1) = 1$. Soit dans $\mathbb{R}^3$ la forme

$$\omega = u\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\left[x\, dy\wedge dz + y\, dz\wedge dx - z\, dx\wedge dy\right]$$

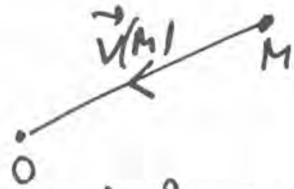
1°) Exprimez ω en fonction de r, θ, z.

2°) Trouvez $u(r)$ telle que $d\omega = 0$.

<u>Exercice 4</u>. Dans $\mathbb{R}^3$ on pose $\rho^2 = x^2+y^2+z^2$, et dans $U = \mathbb{R}^3$ privé de l'origine on considère le <u>champ newtonien</u> de pôle O :

$$\vec{V}(M) = \left(-\frac{x}{\rho^3}, -\frac{y}{\rho^3}, -\frac{z}{\rho^3}\right) = -\frac{1}{\rho^2}\,\frac{\vec{OM}}{\|\vec{OM}\|}$$

de la force d'attraction au point M par O, inversement proportionnelle au carré de la distance de M à O. Le flux élémentaire de ce champ



$$\omega = -\frac{1}{\rho^3}\left(x\,dy\wedge dz + y\,dz\wedge dx + z\,dx\wedge dy\right)$$

est tel que $d\omega = 0$ dans U (donc divergence $\vec{V}(M) = 0$). Prouvez-le : 1°) directement en coordonnées cartésiennes en remarquant que $\frac{\partial\rho}{\partial x} = \frac{x}{\rho}$; $\frac{\partial\rho}{\partial y} = \frac{y}{\rho}$; $\frac{\partial\rho}{\partial z} = \frac{z}{\rho}$; 2°) en passant d'abord en coordonnées sphériques et appliquant l'Exercice 1.

<u>Théorème de Poincaré</u>[(*)] 1. Soit ω une forme de classe C^2 dans un ouvert U de $\mathbb{R}^n$. Alors : $\boxed{d(d\omega) = 0}$.

<u>Démonstration</u> 1°) Supposons d'abord ω de degré 0 ; donc ω est une fonction $\omega = a(x) = a(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de classe C^2 dans U. On a

$$d\omega = da = \frac{\partial a}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial a}{\partial x_2}dx_2 + \dots + \frac{\partial a}{\partial x_n}dx_n\,,$$

en bref

$$da = \sum_i \frac{\partial a}{\partial x_i}dx_i\,.$$

Par conséquent

$$d(da) = \sum_i d\left(\frac{\partial a}{\partial x_i}\right)\wedge dx_i\,.$$

Mais

$$d\left(\frac{\partial a}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial^2 a}{\partial x_1\partial x_i}dx_1 + \dots + \frac{\partial^2 a}{\partial x_n\partial x_i}dx_n = \sum_j \frac{\partial^2 a}{\partial x_j\partial x_i}dx_j\,.$$

Par suite

$$d(da) = \sum_j\sum_i \frac{\partial^2 a}{\partial x_j\partial x_i}dx_j\wedge dx_i = \sum_{j<i}\left(\frac{\partial^2 a}{\partial x_j\partial x_i} - \frac{\partial^2 a}{\partial x_i\partial x_j}\right)dx_j\wedge dx_i$$

$= 0$, en vertu du théorème de Schwarz.

(*) Henri Poincaré (Nancy 1854 – Paris 1912) fut le plus grand mathématicien de la fin du XIX° siècle. Il sera peut-être le dernier savant universel, créateur aussi bien en Mathématiques qu'en Mécanique céleste, en Physique théorique, en Philosophie etc...

2°) Prenons maintenant le cas général de degré p. Il suffit de faire la démonstration pour une forme réduite à un terme :

$$\omega = a(x)\, dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}.$$

On a $$d\omega = da \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$$

donc, en généralisant les propriétés 3°) et 4°) de différentiation d'un produit :

$$d(d\omega) = d(da) \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} - da \wedge d(dx_{i_1}) \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} + \dots$$
$$+ (-1)^p\, da \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{p-1}} \wedge d(dx_{i_p})$$

est une somme de termes contenant soit $d(da)$, soit une $d(dx_i)$, donc de termes nuls d'après le 1°) de la démonstration.

<u>Cas particuliers</u>. Supposons $n = 3$. Dire qu'un champ de vecteurs $\vec{V}(M) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ est un <u>champ-gradient</u> (le gradient d'une fonction $f = f(x,y,z)$) ou encore <u>dérive d'un potentiel</u> (le potentiel $-f$ + constante), c'est dire qu'il existe une fonction f dans U telle que $\omega = P\,dx + Q\,dy + R\,dz = df$, autrement dit telle que $P = \frac{\partial f}{\partial x}$, $Q = \frac{\partial f}{\partial y}$, $R = \frac{\partial f}{\partial z}$.

Le théorème de Poincaré impose une condition nécessaire très restrictive pour qu'il en soit ainsi, à savoir $d\omega = 0$. Ainsi si le champ $\vec{V}(M) = (P, Q, R)$ dans un ouvert U de $\mathbb{R}^3$ dérive d'un potentiel (est un champ-gradient), nécessairement le rotationnel de $\vec{V}(M)$ est nul, c'est-à-dire <u>nécessairement</u> dans U :

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z} \quad ; \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \quad ; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

De même (pour $p = 2$), si un champ $\vec{W}(M) = (A, B, C)$ est un rotationnel [c'est-à-dire s'il existe un champ $\vec{V}(M)$ tel que $\vec{W}(M) = \operatorname{rot} \vec{V}(M)$], alors <u>nécessairement</u> la divergence du champ $\vec{W}(M)$ est nulle dans U.

Nous allons voir que sous une hypothèse convenable sur l'ensemble U de définition, le théorème de Poincaré admet une réciproque. En posant $\omega_1 = d\omega$, on peut encore lire le théorème de Poincaré comme suit : pour qu'une forme ω_1 de classe C^1 dans U soit la différentielle extérieure d'une forme dans U, il faut que $d\omega_1 = 0$ dans U. Cette condition est-elle suffisante ?

Définition : on dit qu'un ensemble ouvert U de $\mathbb{R}^n$ est homéomorphe à une boule s'il existe une bijection φ de la boule $\{\|x\|<1\}$ sur U telle que les applications φ et φ^{-1} soient toutes deux continues.

Un tel ouvert est donc "topologiquement" semblable à une boule ouverte, et s'en déduit par déformation continue. Imaginons une balle en caoutchouc ; étirons la, contractons la, triturons la dans tous les sens, et nous obtiendrons de tels ouverts.

Par contre, dans $\mathbb{R}^2$, une couronne $0<a^2<x^2+y^2<b^2$; un disque ouvert privé de son origine ; dans $\mathbb{R}^3$, une boule privée d'une cavité ; un tore (couronne de pain) sont autant d'exemples d'ouverts non homéomorphes à une boule.

Primitivation des formes : condition nécessaire et suffisante de Poincaré. Complétons le Théorème 1 par le

Théorème de Poincaré 2. Soit U un ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$ homéomorphe à une boule. Soit ω_1 une forme de $d^\circ \geq 1$ et de classe C^1 dans U. Pour qu'il existe une forme ω dans U telle que $\omega_1 = d\omega$, il faut et il suffit que $d\omega_1 = 0$ dans U.

Exercice 5. Reprenez l'Exercice 2, où vous avez dû trouver $f(y)=y$. Dans ce cas trouvez $P(x,y)$ et $Q(x,y)$ telles que la forme de degré 1

$$z\,(P\,dx + Q\,dy)$$

ait pour différentielle ω.

Exercice 6. Reprenez l'Exercice 3, où vous avez dû trouver $u(r) = \frac{1}{r}$. Dans ce cas trouvez une forme du type $-h(r)\,k(z)\,d\theta$, et ayant ω pour différentielle dans $\mathbb{R}^3$ privé de 0.

Exercice 7. Soient f et g deux fonctions de classe C^2 dans un ouvert U de $\mathbb{R}^3$ homéomorphe à une boule. Soient (A,B,C)

les composantes du produit vectoriel $\overrightarrow{\text{grad}}\, f \wedge \overrightarrow{\text{grad}}\, g$. On pose :

$$w_1 = A\,dy\wedge dz + B\,dz\wedge dx + C\,dx\wedge dy.$$

1) Montrez que $dw_1=0$, et trouvez une forme de degré 1, soit w, telle que $dw = w_1$.

2) Pour que $\overrightarrow{\text{grad}}\, f$ soit un rotationnel, il faut et il suffit que la fonction f soit harmonique ($\Delta f \equiv 0$ dans U).

Exercice 8. Soit un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ homéomorphe à une boule, mais ne contenant pas l'origine.

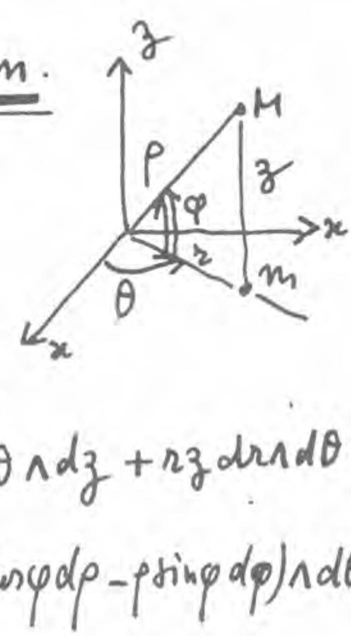
1) On pose $P(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$; $Q(x,y)=\dfrac{y}{x^2+y^2}$.

Vérifiez que la forme $P\,dx+Q\,dy$ a sa différentielle extérieure nulle. Trouvez toutes les fonctions $f(x,y)$ dans U telles que $P=\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $Q=\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

2) Mêmes questions en posant :
$$P(x,y)=\frac{y}{x^2+y^2} \quad ; \quad Q(x,y)=\frac{-x}{x^2+y^2}.$$

3) Vérifiez que les fonctions obtenues n'auraient pas de sens dans une boule ouverte contenant l'origine. Touchez ainsi du doigt le sens de l'hypothèse topologique dans la Réciproque du théorème de Poincaré.

Indications sur les Exercices proposés dans cette Leçon.



Exercice 1. Si $r=\rho\cos\varphi$ et $z=\rho\sin\varphi$, on a :

$$\begin{cases} dr = \cos\varphi\, d\rho - \rho\sin\varphi\, d\varphi \\ dz = \sin\varphi\, d\rho + \rho\cos\varphi\, d\varphi\end{cases}.$$

De plus, en exprimant w en coordonnées cylindriques :

$$w = (x\,dy - y\,dx)\wedge dz + z\,dx\wedge dy = r^2\, d\theta\wedge dz + rz\,dr\wedge d\theta$$

$$= \rho^2\cos^2\varphi\, d\theta\wedge(\sin\varphi\, d\rho + \rho\cos\varphi)\,d\varphi + \rho^2\sin\varphi\cos\varphi\,(\cos\varphi\,d\rho - \rho\sin\varphi\,d\varphi)\wedge d\theta$$

$$= \rho^3\cos\varphi\, d\theta\wedge d\varphi.$$

Exercice 2. $dw = 3x^2\,dx\wedge dy\wedge dz + f'(y)(2-3x^2)\,dy\wedge dz\wedge dx - 2\,dz\wedge dx\wedge d$

$= 2[f'(y)-1]\,dx\wedge dy\, dz = 0$ ssi $f'(y)\equiv 1$, donc $f(y)=y$.

Exercice 3 1°) $\omega = u(r)[(x\,dy - y\,dx)\wedge dz - z\,dx\wedge dy] =$
$= u(r)\,[r^2 d\theta\wedge dz - rz\,dr\wedge d\theta]$; 2°) donc
$d\omega = d[r^2u(r)]\wedge d\theta\wedge dz - d[ru(r)z]\wedge dr\wedge d\theta =$
$= [r^2u'(r) + 2ru(r)]\,dr\wedge d\theta\wedge dz - [ru(r)]\,dz\wedge dr\wedge d\theta$
$= [r\,u'(r) + u(r)]\,r\,dr\wedge d\theta\wedge dz \equiv 0$ si et seulement si
$ru'(r) + u(r) = 0$, donc pour $u(r) = \dfrac{C}{r}$. Mais $C = 1$ car $u(1) = 1$.

Exercice 4. 1ère solution. On a :
$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\rho^3}\right) = -\frac{1}{\rho^3} + \frac{3}{\rho^4}\frac{x}{\rho}x = -\frac{1}{\rho^3} + \frac{3x^2}{\rho^5}$$
et les deux formules analogues pour $-\frac{\partial}{\partial y}$ et $-\frac{\partial}{\partial z}$. Donc
$$d\omega = \operatorname{div}\vec{V}(M)\,dx\wedge dy\wedge dz = -\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\rho^3}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{\rho^3}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{\rho^3}\right)\right]dx\wedge dy\wedge dz$$
$$= -\frac{3}{\rho^3} + \frac{3(x^2+y^2+z^2)}{\rho^5} = 0.$$

2ième solution. On a vu à l'exercice 1 que $\omega = -\cos\varphi\, d\theta\wedge d\varphi$. Donc
$d\omega = \sin\varphi\, d\varphi\wedge d\theta\wedge d\varphi = 0$, puisque $d\varphi\wedge d\varphi = 0$.

Exercice 5. Si $\omega_1 = z\,(P\,dx + Q\,dy)$, on a :
$$d\omega_1 = d(zP)\wedge dx + d(zQ)\wedge dy = z\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\wedge dy + Q\,dz\wedge dy + P\,dz\wedge dx,$$
qui est égale à la forme proposée
$$\omega = x^3\,dy\wedge dz + y(2-3x^2)\,dz\wedge dx - 2z\,dx\wedge dy$$
si et seulement si :
$$P(x,y) = y(2-3x^2)\ ;\quad Q(x,y) = -x^3\ ;\quad \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 2.$$
Les deux premières relations donnent les fonctions inconnues P et Q par des formules explicites, qui sont bien compatibles avec la troisième relation.

Exercice 6. Si $\omega_1 = -h(r)k(z)\,d\theta$, on a
$$d\omega_1 = -h'(r)k(z)\,dr\wedge d\theta - h(r)k'(z)\,dz\wedge d\theta,$$
qui est égale à la forme proposée
$$\omega = \frac{1}{r}\left[-rz\ dr\wedge d\theta - r^2\,dz\wedge d\theta\right]$$

si et seulement si :

$$h'(r)\,k(z) = z \quad ; \quad h(r)\,k'(z) = r ,$$

c'est-à-dire si et seulement si $h(r)=r$; $k(z)=z$.

Exercice 7 1°) $\omega_1 = df\wedge dg$, donc $d\omega_1 = d(df)\wedge dg - f\wedge d(dg) = 0$, car $d(df)=d(dg)=0$. Il est clair que, si $\omega = f\,dg$, on a $d\omega = df\wedge dg = \omega_1$, donc $\omega = f\left(\frac{\partial g}{\partial x}dx + \frac{\partial g}{\partial y}dy + \frac{\partial g}{\partial z}dz\right)$ convient. 2°) On a :

$$\mathrm{div}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$ si et seulement si f est harmonique.

Supplément. Dans cet ordre d'idées, démontrez les formules :

$$\mathrm{div}\,(\vec{V}\wedge\vec{W}) = (\vec{W}\,|\,\mathrm{rot}\,\vec{V}) - (\vec{V}\,|\,\mathrm{rot}\,\vec{W})$$

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathrm{div}\,\vec{V} = \mathrm{rot}(\mathrm{rot}\,\vec{V}) + \Delta\vec{V},$$

où $\Delta\vec{V}(M) = (\Delta P, \Delta Q, \Delta R)$ si $\vec{V}(M) = (P, Q, R)$.

Exercice 8 1°) $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, donc

$$d\omega = dP\wedge dx + dQ\wedge dy = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\wedge dy = 0 .$$

A y fixé on tire d'abord de l'équation $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{x^2+y^2}$ que :

$$f(x,y) \doteq \int\frac{x\,dx}{x^2+y^2} + \varphi(y) = \frac{1}{2}\mathrm{Log}(x^2+y^2) + \varphi(y).$$ Puis

$\frac{\partial f}{\partial y} = \varphi'(y) + \frac{y}{x^2+y^2}$ doit être $= \frac{y}{x^2+y^2}$, donc $\varphi'(y)=0$, $\varphi(y) = C^{te}$.

Les solutions sont donc $f(x,y) = \frac{1}{2}\mathrm{Log}(x^2+y^2) + C^{te}$.

2°) En procédant de même on trouve

$$f(x,y) = \mathrm{Arctg}\,\frac{x}{y} + C^{te}.$$

3°) Les fonctions trouvées n'ont pas de sens à l'origine. Mais, même si on évite l'origine en prenant pour U une couronne, il n'est pas possible de définir l'Arctg de manière continue dans toute cette couronne, car partant de l'Arc zéro, après un tour on revient avec l'arc 2π.

AN 03 Leçon n° 11

Intégrales curvilignes. Intégrales de surface.

I. Intégrales curvilignes.

Nous ferons l'exposé de cette question dans $\mathbb{R}^3$. Pour $\mathbb{R}^2$ le lecteur n'aura qu'à enlever la coordonnée z ; pour $\mathbb{R}^n$ il en ajoutera autant que nécessaire.

En AN 02, Leçon n° 11, nous avons commencé d'étudier les arcs de courbe Γ dans $\mathbb{R}^3$, définis par un paramétrage $M = M(t)$:

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad z = z(t),$$

où $a \leq t \leq b$. Nous supposerons ces arcs de classe C^1 : les fonctions $x(t), y(t), z(t)$ ont une dérivée première continue pour tout t.

Par leur définition ces arcs sont ipso facto orientés : ils ont une origine $A = M(a)$, une extrémité $B = M(b)$, et un sens positif de parcours, celui des t croissants.

En tout point $M_0 = M(t_0)$ régulier (i.e. tel que les nombres $x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)$ ne sont pas tous nuls) Γ a un vecteur tangent $\overrightarrow{M'(t_0)} = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$ issu de M_0 ; la droite qui le porte est la tangente à Γ au point M_0.

De plus la longueur de l'arc Γ, on l'a vu, est donnée par

$$L(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\, dt .$$

Un changement de paramètre est une bijection $s \mapsto t = t(s)$ d'un intervalle $[\alpha, \beta]$ sur $[a, b]$ telle que : $t(\alpha) = a$; $t(\beta) = b$, et telle que la dérivée $\frac{dt}{ds}$ existe, soit continue et partout >0 sur $[\alpha, \beta]$. L'arc $s \mapsto M(t(s))$ déduit de Γ par ce changement de paramétrage ne sera pas considéré comme différent de Γ ; d'ailleurs les images géométriques de ces deux arcs dans $\mathbb{R}^3$ sont les mêmes, ainsi que le sens de parcours, la tangente, et la longueur. Pour tous ces rappels, relisez la Leçon n° 11 de AN 02, ainsi que les exemples d'arcs de courbe qui y sont donnés.

Soit
$$\omega = P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz$$
une forme <u>de degré 1</u> dans $\mathbb{R}^3$, à coefficients définis et continus dans un ouvert U de $\mathbb{R}^3$. Soit Γ un arc, de classe C^1 :
$$x = x(t)\ ;\ y = y(t)\ ;\ z = z(t) \qquad (a \leq t \leq b),$$
dont tous les points $M(t)$ sont dans U. On va définir <u>l'intégrale de la forme</u> ω <u>le long de</u> Γ, en "reportant" le paramétrage dans ω, donc en posant $dx = x'(t)\,dt$; $dy = y'(t)\,dt$; $dz = z'(t)\,dt$. De façon précise, on pose par définition :
$$\int_\Gamma \omega = \int_\Gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz =$$
$$= \int_a^b \Big[P(x(t),y(t),z(t))\,x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))\,y'(t) + R(x(t),y(t),z(t))\,z'(t)\Big]\,dt,$$
ce qui ramène à calculer une intégrale définie ordinaire $\int_a^b F(t)\,dt$, du type étudié en AN 02 ($F(t)$ est le crochet ci-dessus).

Si on change de paramétrage $t = t(s)$, où $\alpha \leq s \leq \beta$, et si on applique la même définition, on tombe sur <u>le même</u> nombre $\int_\Gamma \omega = \int_\alpha^\beta G(s)\,ds$, car il est clair que $G(s) = F(t(s))\,t'(s)$.

Donc <u>la définition de l'intégrale curviligne</u> $\int_\Gamma \omega$ <u>est indépendante du paramétrage choisi pour</u> Γ.

<u>Interprétation physique</u> : Si $\vec{V}(M) = (P, Q, R)$ est un champ de vecteurs (de forces), alors :
$$\int_\Gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_\Gamma (\vec{V}(M) \mid \overrightarrow{dM})$$
apparaît comme la circulation (le travail) de ce champ le long de l'arc Γ.

<u>Exercice 1</u>. Dans $\mathbb{R}^2$ soient les points $A = (0,0)$ et $B(2,2)$.

Calculez les intégrales $\int_\Gamma 2xy\,dx - x^2dy$, où l'on prend successivement pour Γ : 1°) le segment de droite joignant A à B ; 2°) l'arc de parabole tangent à Ox joignant A à B.

Exercice 2. Calculez $\int_\Gamma (y-z)\,dx + (z-x)\,dy + (x-y)\,dz$,

où Γ est l'arc d'hélice circulaire :

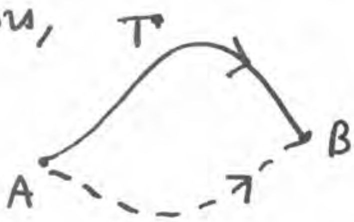
$$x = a\cos t \ ; \ y = a\sin t \ ; \ z = bt \qquad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

Exercice 3. Soit Γ l'arc de fenêtre de Viviani :

$$x = \cos^2 t \ ; \ y = \cos t \sin t \ ; \ z = \sin t \qquad (0 \leq t \leq \tfrac{\pi}{2}).$$

Une particule dans $\mathbb{R}^3$ est soumise au champ newtonien de pôle O (cf. Leçon n°10, Exercice 4). Calculez le travail qu'elle effectue en parcourant Γ. Même question pour le champ $(-\frac{x}{\rho^3}, -\frac{y}{\rho^3}, 0)$.

Proposition 1 (intégrale curviligne d'une différentielle exacte). Soit U un ensemble ouvert dans $\mathbb{R}^3$. Soit f une fonction de classe C^1 dans U. Soient A et B deux points donnés dans U. Alors, pour tout arc de courbe Γ dans U, de classe C^1, d'origine A, d'extrémité B, on a la formule :



$$\int_\Gamma df = \int_\Gamma \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = f(B) - f(A).$$

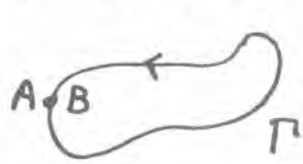
En particulier l'intégrale ne dépend pas du chemin Γ suivi dans U pour aller de A en B.

Démonstration. Posons $F(t) = f(x(t), y(t), z(t))$ en reportant dans $f = f(x,y,z)$ les équations paramétriques de Γ. Par définition de l'intégrale curviligne :

$$\int_\Gamma df = \int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial x}x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}y'(t) + \frac{\partial f}{\partial z}z'(t)\right]dt = \int_a^b F'(t)\,dt =$$

$$= F(b) - F(a) = f(B) - f(A).$$

Remarques : 1°) Si un champ dérive d'un potentiel $-f$, le travail de ce champ pour aller de A en B ne dépend pas du chemin suivi, et est égal à la différence du potentiel en A et en B.



2°) Si Γ est une courbe "fermée" (un circuit) dans U, on peut prendre $A = B$, et l'on voit que $\int_\Gamma df = 0$.

Exercice 4. Montrez que le champ newtonien (Leçon n° 10 ; Exercice 4) dérive du potentiel $-\frac{1}{\rho} = -\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. Déduisez-en une solution immédiate de l'Exercice 3 (première partie).

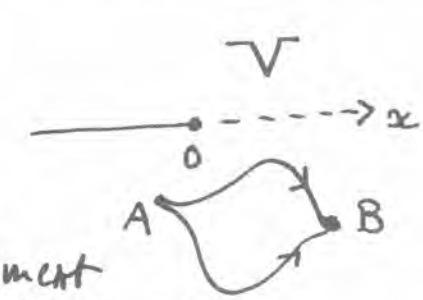
3°) On pourrait être tenté d'appliquer la Proposition 1 à la forme

$$\omega = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2} = d\theta = d\left(\mathrm{Arctg}\,\frac{y}{x}\right)$$

et à l'ouvert $U = \mathbb{R}^2$ privé de l'origine (afin d'éviter une singularité évidente de ω), et donc d'affirmer que, sur la figure ci-contre :

$$(1) \quad \int_{\Gamma_1} \omega = \int_{\Gamma_2} \omega .$$

Ce serait une grave erreur ! De fait la première de ces intégrales vaut $+\pi$, et la seconde vaut $-\pi$. Pourtant ω semble bien être une différentielle exacte dans U, celle de la "fonction" $f(x,y) = \mathrm{Arctg}\,\frac{y}{x}$. Mais (voilà l'erreur) cette formule ne définit pas une fonction dans U, mais seulement dans l'ouvert V plus petit obtenu en retirant par exemple de $\mathbb{R}^2$ le demi-axe des $(x,0)$, avec $x \leq 0$, ce qui interdit de décrire des circuits entourant la singularité O. La Proposition 1 — et donc la formule (1) ci-dessus — s'applique parfaitement à des chemins de l'ouvert V, mais pas de l'ouvert U.



Exercice 5. Que peut-on dire de $\int_\Gamma \omega$, où Γ est un circuit dans U entourant O (éventuellement plusieurs fois) ?

II. Intégrales de surface

À la Leçon n° 6, § III, nous avons déjà rencontré les <u>surfaces</u> Σ dans $\mathbb{R}^3$ définies par des équations paramétriques $M = M(u,v)$:

(2) $\quad x = x(u,v) \quad ; \quad y = y(u,v) \quad ; \quad z = z(u,v)$

où, dans un plan $\mathbb{R}^2$, le couple de paramètres (u,v) parcourt un ensemble ouvert borné mesurable D sur lequel les fonctions de deux variables (2) sont bornées et de classe C^1. Nous supposerons que tous les points de Σ sont réguliers ; par conséquent en tout point $M = M(u,v)$, la surface Σ a un plan tangent, et une <u>normale</u>, à savoir (cf. Leçon n° 6) la droite qui porte le vecteur $\dfrac{\overrightarrow{dM}}{du} \wedge \dfrac{\overrightarrow{dM}}{dv}$, dont les composantes (non toutes nulles) sont :

$$(3)\quad \begin{cases} A = \dfrac{\partial y}{\partial u}\dfrac{\partial z}{\partial v} - \dfrac{\partial y}{\partial v}\dfrac{\partial z}{\partial u} = \dfrac{D(y,z)}{D(u,v)} \\[2ex] B = \dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial x}{\partial v} - \dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial x}{\partial u} = \dfrac{D(z,x)}{D(u,v)} \\[2ex] C = \dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial y}{\partial v} - \dfrac{\partial x}{\partial v}\dfrac{\partial y}{\partial u} = \dfrac{D(x,y)}{D(u,v)} \end{cases}.$$

Posons :

$$(4)\quad \begin{cases} E = \left(\dfrac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial u}\right)^2 \\[2ex] F = \dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial y}{\partial u}\dfrac{\partial y}{\partial v} + \dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial z}{\partial v} \\[2ex] G = \left(\dfrac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial v}\right)^2 \end{cases}.$$

A, B, C, E, F, G sont des fonctions de (u,v) dans D, donc de M sur Σ.

Sur la classique identité de Lagrange :

$$(ab' - ba')^2 + (bc' - cb')^2 + (ca' - ac')^2 = $$
$$= (a^2 + b^2 + c^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2) - (aa' + bb' + cc')^2,$$

on vérifie immédiatement que $\quad A^2 + B^2 + C^2 = EG - F^2.$

Le vecteur

$$(5) \qquad \vec{n} = \left(\frac{A}{\sqrt{EG-F^2}}, \frac{B}{\sqrt{EG-F^2}}, \frac{C}{\sqrt{EG-F^2}} \right)$$

est donc l'un des deux vecteurs unitaires (i.e. de longueur un) porté par la normale en $M = M(u,v)$. La surface Σ est orientée (positivement) par le choix de ce vecteur $\vec{n}$ (plutôt que de $-\vec{n}$).

Si D_1 est un ouvert mesurable borné d'un $\mathbb{R}^2$ de coordonnées (s,t), et si $(s,t) \mapsto (u = u(s,t),\ v = v(s,t))$ est un difféomorphisme de D_1 sur D, à jacobien $\frac{D(u,v)}{D(s,t)}$ partout > 0, la surface

$x = x(u(s,t), v(s,t))$; $\quad y = y(u(s,t), v(s,t))$; $z = z(u(s,t), v(s,t))$

obtenue par ce changement de paramétrage ne sera pas considérée comme différente de Σ : son image géométrique dans $\mathbb{R}^3$ est la même ; en tout point le plan tangent n'a pas changé, non plus que le vecteur normal unitaire $\vec{n}$ qui oriente la surface, car par exemple :

$$A_1 = \frac{D(y,z)}{D(s,t)} = \frac{D(y,z)}{D(u,v)} \frac{D(u,v)}{D(s,t)} = \lambda A, \text{ et de même } B_1 = \lambda B$$

et $C_1 = \lambda C$, où la constante de proportionnalité $\lambda = \frac{D(u,v)}{D(s,t)}$ est > 0.

Soit $\quad \omega = P(x,y,z)\, dy \wedge dz + Q(x,y,z)\, dz \wedge dx + R(x,y,z)\, dx \wedge dy$

une forme de degré 2 à coefficients continus dans un ouvert U de $\mathbb{R}^3$. Soit Σ une surface paramétrée par (2) telle que, pour tout $(u,v) \in D$, le point $M = M(u,v)$ soit dans U. Nous définissons $\iint_\Sigma \omega$, l'intégrale de la forme ω sur la surface Σ, en reportant dans ω le paramétrage, c'est-à-dire en remplaçant dans P, Q, R les variables x, y, z par les formules (2), en exprimant en u et v les symboles différentiels :

$$dy \wedge dz = \left(\frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv\right) \wedge \left(\frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv\right) =$$

$$= \frac{D(y,z)}{D(u,v)}\, du \wedge dv = A\, du \wedge dv,$$

et les deux formules analogues, puis en supprimant le signe $\wedge$ dans le symbole du $\wedge d\sigma$ final, et en calculant l'intégrale double ordinaire sur D obtenue finalement ; ce qui donne :

$$\iint_\Sigma \omega = \iint_D \Big[P\big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big) A(u,v) +$$

$$+ Q\big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big) B(u,v) + R\big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big) C(u,v) \Big] du\, dv$$

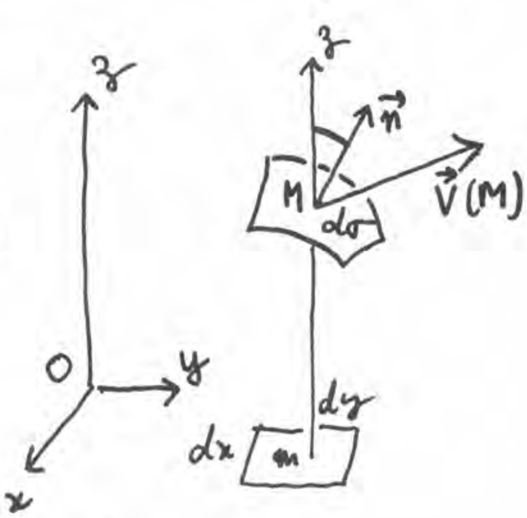
$$= \iint_D \big[PA + QB + RC \big] du\, dv ,$$

c'est-à-dire une intégrale double classique $\iint_D F(u,v)\, du\, dv$, où $F(u,v)$ est la fonction entre crochets.

Ce nombre $\iint_\Sigma \omega$ est <u>indépendant du paramétrage</u> choisi pour Σ, car le calculer en (s,t) revient à calculer :

$$\iint_{D_1} (PA_1 + QB_1 + RC_1)\, ds\, dt = \iint_{D_1} (PA + QB + RC) \frac{D(u,v)}{D(s,t)}\, ds\, dt$$

$= \iint (PA + QB + RC)\, du\, dv$, d'après le théorème du changement de variables.



<u>Remarque</u> (cf. Leçon n° 10) : L'intégrale

$$\iint_\Sigma \omega = \iint_\Sigma P\, dy \wedge dz + Q\, dz \wedge dx + R\, dx \wedge dy$$

$$= \iint_\Sigma \big(\vec{V}(M) \,|\, \vec{n}\, d\sigma\big)$$

modélise le <u>flux</u> du champ $\vec{V}(M)$ à travers la surface (orientée) Σ. Puisque, d'autre part,

$$\iint_\Sigma \omega = \iint_D (PA + QB + RC)\, du\, dv \quad ,$$

il résulte de (5) que ces formules sont cohérentes si l'on pose :

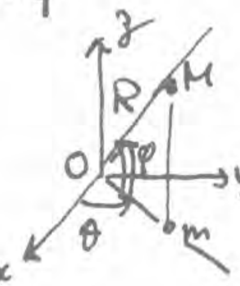
(6) $$d\sigma = \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv$$

qui apparaît ainsi comme <u>l'élément d'aire</u> de Σ (voir ci-après le § III).

<u>Exemple</u>. À un ensemble de mesure nulle près, la sphère Σ de centre O, de rayon R, est donnée par les équations paramétriques :

$$x = R\cos\varphi\cos\theta \;,\quad y = R\cos\varphi\sin\theta \;,\quad z = R\sin\varphi$$

où $0 < \theta < 2\pi$; $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$. Calculons le flux à travers Σ du champ newtonien de pôle O, c'est-à-dire l'intégrale $\iint_\Sigma \omega$, où



$$\omega = -\frac{x}{\rho^3}\, dy \wedge dz - \frac{y}{\rho^3}\, dz \wedge dx - \frac{z}{\rho^3}\, dx \wedge dy .$$

A la Leçon n° 10, Exercice 1, on a vu que $\omega = -\cos\varphi\, d\theta \wedge d\varphi$.

Donc $$\iint_\Sigma \omega = -\int_0^{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\, d\theta\, d\varphi = -4\pi .$$

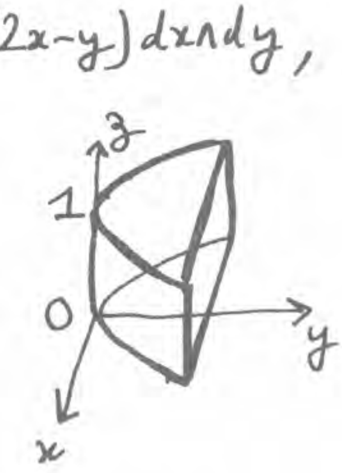
<u>Exercice 6</u>. Calculez $\iint_\Sigma \omega$, où

$$\omega = (1-x^2)\, dy \wedge dz + \tfrac{1}{2}\, y(y-1)\, dz \wedge dx + z(2x-y)\, dx \wedge dy ,$$

et où Σ est la surface de la boîte cylindrique

$0 \leq y \leq 1$; $y = x^2$; $0 \leq z \leq 1$.

On orientera vers l'extérieur les normales aux faces de cette boîte.



III. <u>Aire d'une surface dans $\mathbb{R}^3$</u>

Vous savez sans doute que l'aire d'une sphère de rayon R dans $\mathbb{R}^3$ vaut $4\pi R^2$. De même que pour la longueur d'un arc de courbe (cf. AN02, Leçon n° 11), le Calcul intégral offre une formule pour obtenir l'aire des surfaces plongées dans $\mathbb{R}^3$. Relisez la Remarque ci-dessus conduisant à la formule (6) ; elle rend naturelle la

<u>Définition</u>. Soit Σ une surface dans $\mathbb{R}^3$ donnée par les équations paramétriques (2) et satisfaisant aux hypothèses du début du § II. On appelle <u>aire</u> de Σ l'intégrale double :

$$(7) \quad \mathcal{A}(\Sigma) = \iint_D \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv = \iint_D \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\, du\, dv,$$

où les fonctions A, B, C ; E, F, G sont définies à partir du paramétrage par les formules (3) et (4).

Le nombre $\mathcal{A}(\Sigma)$ obtenu n'est pas modifié dans un changement de paramètres. En effet $A = \dfrac{D(y,z)}{D(u,v)}$ est alors remplacé par $A_1 = \dfrac{D(y,z)}{D(s,t)} = A\,\dfrac{D(u,v)}{D(s,t)}$; et, de même, B est remplacé par $B_1 = B\,\dfrac{D(u,v)}{D(s,t)}$ et C par $C_1\,\dfrac{D(u,v)}{D(s,t)}$; mais $du\,dv$ est remplacé par $ds\,dt = \dfrac{D(s,t)}{D(u,v)}\,du\,dv$; finalement la valeur de (7) n'est pas changée.

<u>Exemple 1</u>. Si $x = R\cos\varphi\cos\theta$; $y = R\cos\varphi\sin\theta$; $z = R\sin\varphi$ sont, pour $0 < \theta < 2\pi$; $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$, des équations paramétriques de la sphère Σ de centre O, de rayon R, on calcule qu'au point (θ, φ) :

$$\frac{\partial x}{\partial \theta} = -R\cos\varphi\sin\theta \ ; \quad \frac{\partial y}{\partial \theta} = R\cos\varphi\cos\theta \ ; \quad \frac{\partial z}{\partial \theta} = 0 \ ;$$

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = -R\sin\varphi\cos\theta \ ; \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = -R\sin\varphi\sin\theta \ ; \quad \frac{\partial z}{\partial \varphi} = R\cos\varphi.$$

Donc : $E = R^2\cos^2\varphi$; $F = 0$; $G = R^2$; $EG - F^2 = R^4\cos^2\varphi$;

$$\mathcal{A}(\Sigma) = R^2 \int_0^{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\, d\theta\, d\varphi = 4\pi R^2.$$

<u>Exercice 7</u>. Calculez l'aire de la fenêtre de Viviani :

$x = R\cos\varphi\cos\theta$; $y = R\cos\varphi\sin\theta$; $z = R\sin\varphi$

où $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ et $|\theta| < \varphi < \frac{\pi}{2}$.

<u>Exemple 2</u>. Pour une surface <u>plane</u>, supposons par exemple $z \equiv 0$; donc Σ est donnée par des équations

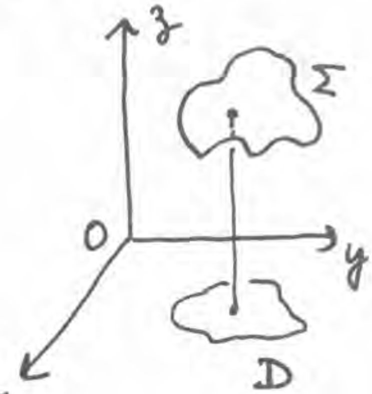
$$x = x(u,v) \; ; \quad y = y(u,v) \; ; \quad z = 0$$

et $A = 0$; $B = 0$; $C = \dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}$. Par suite :

$$\mathcal{A}(\Sigma) = \iint_D \left| \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right| du\, dv = \iint_\Sigma dx\, dy \; ;$$

c'est conforme à la définition donnée à la Leçon n° 8.

<u>Exemple 3</u>. Si la surface Σ est donnée par une équation $z = f(x,y)$, où (x,y) parcourt D, alors la formule (7) prend la forme :



$$\mathcal{A}(\Sigma) = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy .$$

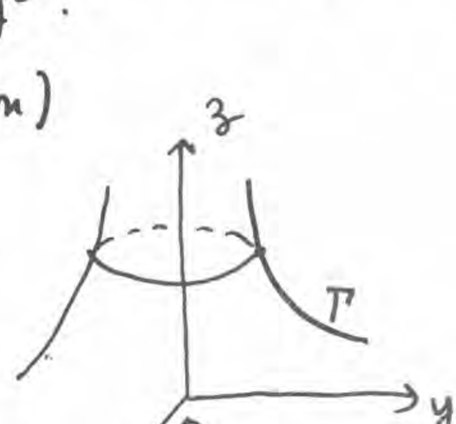
En effet on peut considérer que Σ est donnée par les équations paramétriques : $x = x$; $y = y$; $z = f(x,y)$.

Donc ici $A = -\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $B = -\dfrac{\partial z}{\partial y}$, $C = 1$.

<u>Exercice 8</u>. Retrouvez ainsi l'aire de la demi-sphère de rayon R définie par $x^2 + y^2 \leq 1$; $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$.

<u>Exemple 3 (aire d'une surface de révolution)</u>

Dans le plan Ozy, soit $z = f(y)$ l'équation d'une courbe Γ que nous prenons comme génératrice (ou "méridienne") d'une surface de révolution autour de l'axe Oz. Cette surface est engendrée par Γ quand Γ tourne autour de Oz.



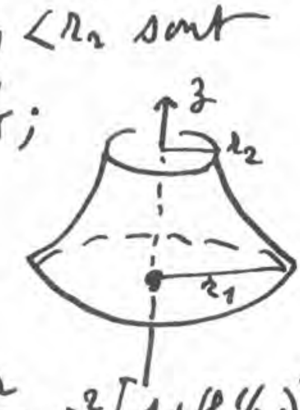
En introduisant les coordonnées cylindriques,

$$x = r\cos\theta \; ; \quad y = r\sin\theta \; ; \quad z = z ,$$

la surface Σ est donc donnée par les équations paramétriques

$$x = r\cos\theta \; ; \quad y = r\sin\theta \; ; \quad z = f(r)$$

Calculons l'aire latérale de la portion de Σ comprise entre les deux parallèles de rayon r_1 et r_2, où $r_1 < r_2$ sont donnés. Ici $D = \{0 < \theta < 2\pi\,;\ r_1 < r < r_2\}$;



$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta\ ;\ \frac{\partial y}{\partial r} = \sin\theta\ ;\ \frac{\partial z}{\partial r} = f'(r)\ ;$

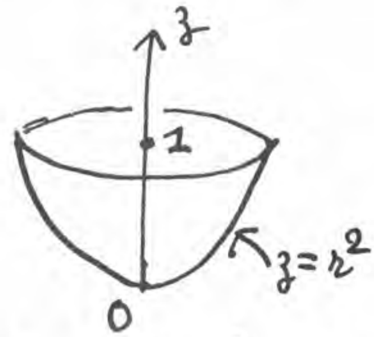
$\frac{\partial x}{\partial \theta} = -r\sin\theta\ ;\ \frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos\theta\ ;\ \frac{\partial z}{\partial \theta} = 0\ ;$

$E = 1 + [f'(r)]^2\ ;\ F = 0\ ;\ G = r^2\ ;\ EG - F^2 = r^2[1 + (f'(r))^2]$.

Donc
$$\mathcal{A} = 2\pi \int_{r_1}^{r_2} r\sqrt{1 + [f'(r)]^2}\,dr = 2\pi \int_{r_1}^{r_2} r\,ds\,,$$

où $ds = \sqrt{1 + [f'(r)]^2}\,dr$ n'est autre que l'élément de longueur de la courbe génératrice Γ.

<u>Exemple 4</u>. L'aire latérale du paraboloïde de révolution :



$$z = x^2 + y^2\ ;\ 0 < z < 1$$

vaut $2\pi\int_0^1 r\sqrt{1+4r^2}\,dr$, car $f(r) = r^2$, donc vaut $\frac{\pi}{6}(5^{3/2} - 1)$. On peut aussi la calculer par la formule de l'Exemple 3 ; ici $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 2y$, donc
$$\mathcal{A} = \iint_{x^2+y^2<1} \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{1+4r^2}\,r\,dr\,d\theta = \text{etc...}$$

<u>Exercice 9</u>. Calculez l'aire de l'ellipsoïde de révolution :
$$\frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1. \qquad (0 < b < a).$$

IV <u>Intégrale d'une forme de d°p sur une variété de degré p plongée dans $\mathbb{R}^n$, où $n \geq p$.</u>

Soient n et $p \leq n$ deux entiers naturels. Une <u>variété</u> V de <u>degré</u> (ou <u>dimension</u>) p plongée dans $\mathbb{R}^n$ est une application (appelée <u>paramétrage</u> de V) bornée et de classe C^1 :

$$(8) \qquad t=(t_1,t_2,-,t_p) \longmapsto x(t) \begin{cases} x_1 = x_1(t_1,-,t_p) \\ x_2 = x_2(t_1,-,t_p) \\ \text{———} \\ x_n = x_n(t_1,-,t_p) \end{cases}$$

d'un ensemble ouvert mesurable borné D de $\mathbb{R}^p$ des $(t_1,-,t_p)$ dans $\mathbb{R}^n$. On supposera la matrice jacobienne $\left(\frac{\partial x_i}{\partial t_j}\right)_{1\le i\le n;\ 1\le j\le p}$ partout de rang p dans D, c'est-à-dire qu'au moins un des déterminants d'ordre p extrait de cette matrice est $\neq 0$. En fait on considérera comme permis dans V un <u>changement de paramétrage</u>, c'est-à-dire un difféomorphisme

$$s=(s_1,-,s_p) \mapsto t = t(s) \quad \begin{cases} t_1 = t_1(s_1,-,s_p) \\ | \\ t_p = t_p(s_1,-,s_p) \end{cases}$$

d'un ouvert D_1 sur D <u>conservant l'orientation</u>, c'est-à-dire à jacobien partout > 0.

Soit $$\omega = \sum_{i_1,\dots,i_p=1}^{n} a_{i_1\dots i_p}(x)\, dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_p}$$

une forme de degré p à coefficients définis et continus dans un ouvert U de $\mathbb{R}^n$, et soit V une variété de degré p comme ci-dessus dont tous les points $x(t)$, pour $t\in D$, sont dans U. On <u>définit</u> <u>l'intégrale</u> $\int_V \omega$ <u>de la forme</u> ω <u>sur la variété</u> V en "reportant le paramétrage", donc en remplaçant dans ω les x_i par $x_i(t_1,-,t_p)$ et les dx_i par $\frac{\partial x_i}{\partial t_1}dt_1 + — + \frac{\partial x_i}{\partial t_p}dt_p$, en effectuant les produits extérieurs de façon à <u>se ramener à l'ordre naturel</u> $dt_1\wedge dt_2\wedge\dots\wedge dt_p$, ce qui conduit à une expression du type

$$\int_V F(t_1,t_2,-,t_p)\, dt_1\wedge\dots\wedge dt_p ,$$

et enfin en supprimant dans cette formule les signes $\wedge$, et en calculant sur D l'intégrale multiple classique ainsi obtenue :

$$\int_V \omega = \iint\!\cdots\!\int_D F(t_1,t_2,-,t_p)\, dt_1 dt_2\dots dt_p .$$

Le nombre $\int_V \omega$ ainsi obtenu ne change pas si l'on change de paramétrage pour la variété V.

Si $p=1$ et $n=2$ ou 3, on retrouve les intégrales curvilignes le long d'un arc de courbe. Si $p=2$ et $n=3$, on retrouve les intégrales de surface. Si $p=n$, on retrouve les intégrales ordinaires n-uples sur un morceau de dimension n de $\mathbb{R}^n$. Si $p=0$, cas où $\omega = a = a(x)$ est réduite à une fonction, et où V est seulement un point $\{M_0\}$ de $\mathbb{R}^n$, on a $\int_V \omega = a(M_0) =$ la valeur prise par la fonction a au point M_0.

<u>Volume p-dimensionnel d'une variété V de dimension p plongée dans $\mathbb{R}^n$</u>. On va généraliser à la fois la longueur d'un arc de courbe (AN 02, leçon n° 11) et l'aire d'une surface (formule (7) de la présente leçon). Soit une variété V de dimension p plongée dans $\mathbb{R}^n$, donnée paramétriquement par les équations (8). On introduit dans D, pour $i, j = 1, 2, \dots, p$, les p^2 fonctions, fondamentales pour l'étude de la variété :

$$(9) \qquad g_{ij} = \frac{\partial x_1}{\partial t_i}\frac{\partial x_1}{\partial t_j} + \frac{\partial x_2}{\partial t_i}\frac{\partial x_2}{\partial t_j} + \cdots + \frac{\partial x_n}{\partial t_i}\frac{\partial x_n}{\partial t_j}$$

<u>Remarque</u> : si $p=2$, et $n=3$, on a :

$$g_{11} = E \quad ; \quad g_{12} = g_{21} = F \quad ; \quad g_{22} = G ,$$

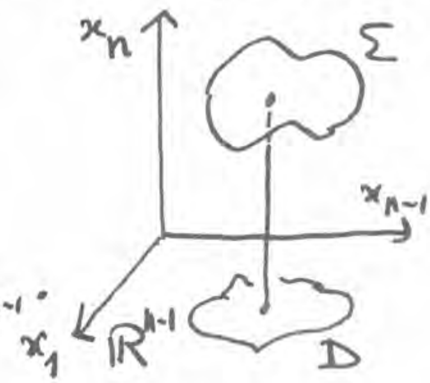
où E, F, G ont été définis par les formules (6). Dans ce cas particulier $A(\Sigma)$ s'obtenait (formule (7)) en intégrant $\sqrt{EG-F^2} = \sqrt{\det(g_{ij})}$; cette dernière formulation est générale :

Le volume p-dimensionnel de la variété V de dimension p plongée dans $\mathbb{R}^n$ est donné par la formule :

$$(10) \qquad vol_p(V) = \iint\cdots\int_D \sqrt{|\det(g_{ij})|}\, dt_1 \cdots dt_p ,$$

où $\det(g_{ij})$ est le déterminant de la matrice $p \times p$ dont les éléments sont calculés par la formule (9).

En particulier, soit une <u>hypersurface</u> Σ de dimension $(n-1)$ dans $\mathbb{R}^n$, d'équation $x_n = f(x_1, \cdots, x_{n-1})$, où $(x_1, \ldots, x_{n-1})$ parcourt D dans $\mathbb{R}^{n-1}$. Alors "l'aire $(n-1)$-dimensionnelle" de Σ est :



$$A(\Sigma) = \iint \cdots \int_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_{n-1}}\right)^2}\, dx_1 \ldots dx_{n-1}.$$

<u>Exercice 10</u>. Calculez l'aire tridimensionnelle d'une sphère

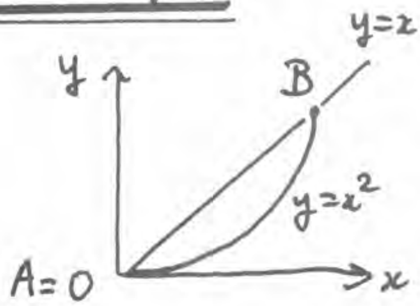
$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = R^2$$

de rayon R de l'espace $\mathbb{R}^4$.

V. Indications sur les exercices proposés dans cette Leçon

<u>Exercice 1</u>. 1) Si $y = x$, $\int_\Gamma 2xy\,dx - x^2 dy =$

$$= \int_0^2 2x^2 dx - x^2 dx = \int_0^2 x^2 dx = \frac{8}{3}.$$



2) Si $y = x^2$, $\int_\Gamma 2xy\,dx - x^2 dy =$

$$= \int_0^2 2x^3 dx - x^2 dx = \int_0^2 (2x^3 - x^2)\,dx = \left[\frac{x^4}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{16}{3}.$$

<u>Exercice 2</u>. $dx = -a\sin t\,dt$; $dy = a\cos t\,dt$; $dz = b\,dt$; donc l'intégrale vaut :

$$\int_0^{2\pi} \left[-(a\sin t - bt)a\sin t + (bt - a\cos t)a\cos t + ab(\cos t - \sin t)\right] dt$$
$$= -2\pi(a+b)a.$$

<u>Exercice 3</u>. La fenêtre de Viviani est tracée sur la sphère de centre O, de rayon un. En chaque point M de Γ, le vecteur du champ newtonien est normal à cette sphère, donc à Γ. Ainsi $(\vec{V}(M) \mid d\vec{M}) \equiv 0$, donc le travail du champ newtonien est nul.

Si maintenant $P = -\frac{x}{\rho^3}$; $Q = -\frac{y}{\rho^3}$; $R = 0$, on a $\rho \equiv 1$ et $Pdx + Qdy + Rdz = -(x\,dx + y\,dy) = -\frac{1}{2} d(r^2)$. Donc

$$\int_\Gamma Pdx + Qdy + Rdz = \frac{1}{2}\left[-r^2\right]_{r=1}^{r=0} = \frac{1}{2}.$$

Exercice 4. $\frac{\partial(\frac{1}{\rho})}{\partial x} = -\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial \rho}{\partial x} = -\frac{x}{\rho^3}$, et deux formules cycliques.
Le champ newtonien dérive donc du potentiel $-\frac{1}{\rho}$. Or, quand on se déplace sur une sphère de centre O, le potentiel ne change pas.

Exercice 5. $\omega = d\theta$, donc $\int_\Gamma \omega$ est la variation de l'angle polaire θ le long du chemin Γ. Elle vaut $2k\pi$, où k est le nombre (compté algébriquement selon le sens) de fois que le circuit Γ tourne autour de O.

Exercice 6. Sur la face plane inférieure, $z=0$, donc $\omega=0$. Sur la face plane verticale, $y=1$, donc $\omega=0$. Sur la face Σ_1 plane supérieure, $z=1$, donc $\omega=(2x-y)\,dx\wedge dy$, et

$$\iint_{\Sigma_1}(2x-y)\,dx\wedge dy = -\iint_{\Sigma_1} y\,dx\wedge dy =$$
$$= -\int_{-1}^{1}\left(\int_0^{x^2} y\,dy\right)dx = -\int_{-1}^{1}\frac{y^4}{2}\,dy = -\frac{1}{5}.$$

Paramétrons la face latérale courbe Σ_2 comme suit :

$$x = x \quad ; \quad y = x^2 \quad ; \quad z = z$$

où $-1<x<1$; $0<z<1$. Alors le vecteur unitaire $\vec{n}$ de la normale est colinéaire à $\frac{\partial \vec{M}}{\partial x}\wedge\frac{\partial \vec{M}}{\partial z} = (2x,-1,0)$, donc orienté vers l'extérieur de la boîte, et

$$\omega = \left[2x(1-x^2) - \tfrac{1}{2}x^2(x^2-1)\right]dx\wedge dz = \left(-\frac{x^4}{2} - 2x^3 + \frac{x^2}{2} + 2x\right)dx\wedge dz.$$

Donc $\iint_{\Sigma_2}\omega = \int_0^1 dz\int_{-1}^{1}\left(-\frac{x^4}{2}-2x^3+\frac{x^2}{2}+2x\right)dx = -\frac{1}{5}+\frac{1}{3}$. L'intégrale $\iint_\Sigma \omega$ vaut donc $\iint_{\Sigma_1} + \iint_{\Sigma_2} = \frac{1}{3} - \frac{2}{5} = -\frac{1}{15}$.

Exercice 7. Elle vaut 4 fois l'aire obtenue en faisant varier les paramètres dans $\{0<\theta<\frac{\pi}{2}\ ;\ \theta<\varphi<\frac{\pi}{2}\}$. A l'exemple 1 on a vu que, sur la sphère de rayon R, on a $EG-F^2 = R^4\cos^2\varphi$.
Donc $\mathcal{A}(\Sigma) = 4\iint_\Sigma \sqrt{EG-F^2}\,d\theta\wedge d\varphi = 4R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_\theta^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\,d\theta\,d\varphi$,
et $\mathcal{A}(\Sigma) = 4R^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$.

Exercice 8. $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}$, donc

$$\mathcal{A}(\Sigma) = \iint_{x^2+y^2<R^2} \sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{z^2}}\,dx\,dy = \iint_{x^2+y^2<R^2} \sqrt{\frac{R^2}{R^2-x^2-y^2}}\,dx\,dy =$$

$$= R\int_0^{2\pi}\int_0^R \frac{r\,d\theta\,dr}{\sqrt{R^2-r^2}} = 2\pi R^2.$$

Exercice 9. On peut soit utiliser la méthode de l'exemple 4, soit représenter l'ellipsoïde en coordonnées paramétriques :

$$x = a\cos\varphi\cos\theta \;;\quad y = a\cos\varphi\sin\theta \;;\quad z = b\sin\varphi$$

où $0<\theta<2\pi$; $-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$. On trouve que :

$$\sqrt{EG-F^2} = a\cos\varphi\sqrt{b^2+(a^2-b^2)\sin^2\varphi}\,.$$

Donc $\mathcal{A}(\Sigma) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a\cos\varphi\sqrt{b^2+(a^2-b^2)\sin^2\varphi}\,d\varphi =$

$$= 2\pi ab\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\frac{a^2-b^2}{b^2}\sin^2\varphi}\,\cos\varphi\,d\varphi = 2\pi a^2\left[1+\frac{b^2}{ac}\operatorname{Log}\frac{a+c}{b}\right],$$

si l'on pose $c^2 = a^2-b^2$.

Exercice 10. Soit $\mathcal{A}(R)$ cette "aire" tri-dimensionnelle. Par homothétie on a $\mathcal{A}(R) = R^3\mathcal{A}(1)$. La sphère de rayon 1 est d'équation $x_4 = \pm\sqrt{1-x_1^2-x_2^2-x_3^2}$. Donc, en posant :

$$x_1 = \rho\cos\varphi\cos\theta \;;\quad x_2 = \rho\cos\varphi\sin\theta \;;\quad x_3 = \rho\sin\varphi\,,$$

et en remarquant que

$$\frac{\partial x_4}{\partial x_1} = \pm\frac{x_1}{\sqrt{1-\rho^2}} \;;\quad \frac{\partial x_4}{\partial x_2} = \pm\frac{x_2}{\sqrt{1-\rho^2}} \;;\quad \frac{\partial x_4}{\partial x_3} = \pm\frac{x_3}{\sqrt{1-\rho^2}}\,,$$

on a $\mathcal{A}(1) = 2\iiint_{0<\rho<1}\sqrt{1+\frac{\rho^2}{1-\rho^2}}\,dx_1\,dx_2\,dx_3 =$

$$= 2\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho^2}{\sqrt{1-\rho^2}}\cos\varphi\,d\rho\,d\theta\,d\varphi = 8\pi\int_0^1\frac{\rho^2\,d\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} =$$

$$= 8\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi\,d\varphi = 4\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2\varphi)\,d\varphi = 2\pi^2.$$ Donc $\mathcal{A}(R) = 2\pi^2R^3$.

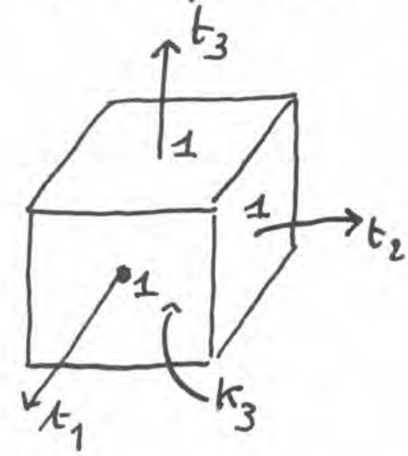
Formule de Stokes

I. Bord d'une variété

Nous avons vu qu'un arc de courbe dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, une surface dans $\mathbb{R}^3$, plus généralement une variété V de dimension p dans $\mathbb{R}^n$, sont donnés par un paramétrage $t \mapsto M(t)$, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, et défini quand t parcourt un intervalle de $\mathbb{R}$, un domaine de $\mathbb{R}^2$, ou plus généralement un ouvert mesurable borné D de l'espace $\mathbb{R}^p$ des paramètres $t=(t_1, t_2, .., t_p)$. Nous supposerons désormais que D est homéomorphe à une boule de $\mathbb{R}^p$ ou, ce qui revient au même par homéomorphisme mais sera plus commode pour la théorie générale, que D est homéomorphe au pavé (ou hypercube):

$$K_p = \{ (t_1, t_2, \dots, t_p) \ ; \ -1 < t_1 < 1, -1 < t_2 < 1, \dots, -1 < t_p < 1 \},$$

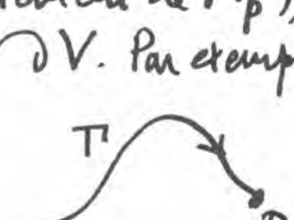
que nous appellerons le <u>pavé des paramètres</u>.



Ce domaine D (ou plus spécialement K_p) de variation des paramètres a une frontière naturelle dans $\mathbb{R}^p$, que nous appelons son <u>bord</u> et notons ∂D (ou plus spécialement ∂K_p). Le bord ∂K_p du pavé K_p est formé de $2p$ <u>faces</u> :

$$t_1 = \pm 1 \ ; \ t_2 = \pm 1 \ ; \ \dots\dots \ ; \ t_p = \pm 1 .$$

Nous supposerons que le paramétrage $t \mapsto M(t)$ de $D \mapsto \mathbb{R}^n$ se prolonge au bord ∂D de D. On peut donc, en transportant par le paramétrage le bord de D (ou plus spécialement de K_p), parler du <u>bord de la variété V</u>, qu'on notera ∂V. Par exemple:



1°) Le bord $\partial\Gamma$ d'un arc de courbe Γ, d'origine A, d'extrémité B, est formé de la réunion des deux points A et B.

2°) Le bord $\partial\Sigma$ d'une surface Σ dans $\mathbb{R}^3$ (ou $\mathbb{R}^2$) est un circuit fermé formé de la réunion d'un ou plusieurs arcs de courbe juxtaposés. Par exemple, le bord de l'hémisphère $\{x^2+y^2+z^2=1\ ;\ z>0\}$ est le cercle $\{x^2+y^2=1\ ;\ z=0\}$.

3°) Le bord ∂V d'une portion tridimensionnelle V de l'espace $\mathbb{R}^3$ est une surface fermée. Par exemple le bord d'une boule est une sphère ; le bord de la boîte cylindrique de l'Exercice 6 de la Leçon n° 11 est formé de deux surfaces planes horizontales, d'une surface plane verticale, et d'une surface courbe parabolique : c'est la réunion de ces 4 morceaux qui constitue le bord de cette boîte, et il ne serait pas difficile de faire apparaître le tout comme image paramétrique du cube K_3 et de son bord.

4°) On constate qu'en général le bord d'une variété de dimension p est une variété de dimension $p-1$.

5°) Convainquez-vous des faits suivants : le bord d'une courbe Γ fermée (ou circuit) est <u>vide</u> ; le bord d'une surface fermée (comme une sphère) est <u>vide</u>. Si une variété V_1 est le bord d'une variété V, alors le bord de V_1 est vide, et réciproquement. Ainsi :

$$\begin{cases} \partial(\partial V) = \emptyset\ ; \\ \text{si } \partial V_1 = \emptyset, \text{ alors il existe } V \text{ telle que } V_1 = \partial V. \end{cases}$$

Ces affirmations qui, dans les cas particuliers, sont des évidences géométriques, ont une analogie frappante avec le théorème de Poincaré (cf. Leçon n° 10), qui rend particulièrement heureux le choix de la notation ∂V pour le bord de V. Il y a en fait une profonde relation de dualité entre la différentiation extérieure $d : \omega \mapsto d\omega$ des formes, et l'opération-bord $\partial : V \mapsto \partial V$ des variétés. Cette dualité sera magnifiée par la formule générale de Stokes.

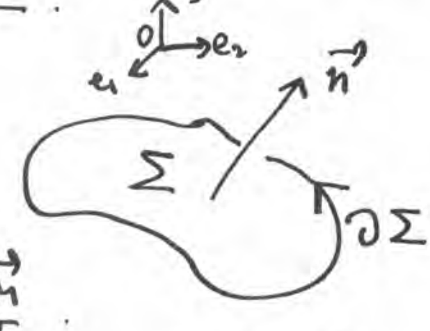
II. Orientation du bord

Un arc de courbe Γ, une surface Σ dans $\mathbb{R}^3$, une variété V de dimension p dans $\mathbb{R}^n$, sont naturellement <u>orientés</u> par l'ordre dans lequel se succèdent les paramètres $(t_1, t_2, -, t_p)$ du paramétrage $t \mapsto M(t)$, ordre auquel on se ramène dans le symbole $dt_1 \wedge dt_2 \wedge \dots \wedge dt_p$ pour calculer l'intégrale sur V des formes de degré p (cf. la Leçon n° 11). Si on permutait ces paramètres, la valeur des intégrales serait ou ne serait pas changée de signe, selon que la permutation est impaire ou paire.

Le bord ∂V de V est constitué de zéro, un, ou plusieurs morceaux de variété de dimension $p-1$, sur lesquels il importe de choisir, de définir par une convention, une orientation cohérente avec celle de V. Par homéomorphisme, il suffirait d'orienter le bord du cube des paramètres K_p. Néanmoins nous commencerons par des cas particuliers en indiquant les moyens mnémotechniques concrets qui, dans ces cas, traduisent la définition plus abstraite de l'orientation de ∂K_p donnée ensuite :

1°) Le segment $\overline{K_1} = [-1, +1]$ a son bord formé des deux points $+1$ et -1. Le bord d'un arc de courbe (non fermée) Γ dans $\mathbb{R}^3$ (ou $\mathbb{R}^2$) est formé d'une origine A, d'une extrémité B. Nous affectons B du signe $+$, et A du signe $-$.

2°) L'orientation naturelle d'une surface Σ plongée dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ revient à choisir sur les normales à Σ les vecteurs unitaires $\vec{n}$ de même sens que $\dfrac{\partial \vec{M}}{\partial t_1} \wedge \dfrac{\partial \vec{M}}{\partial t_2}$.

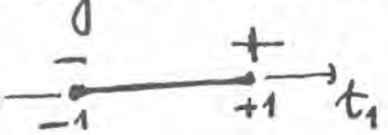


Plaçons un "bonhomme d'Ampère" le long de $\vec{n}$, la tête en haut. On convient de choisir sur la courbe $\partial\Sigma$ le sens de parcours qui va de la droite vers la gauche de ce bonhomme.

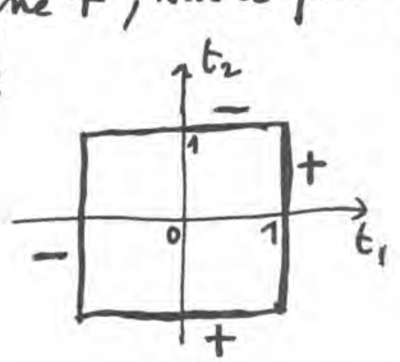
Bien entendu on a supposé que le choix du trièdre orthonormé de référence $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ dans $\mathbb{R}^3$ est tel qu'un bonhomme placé le long de $\vec{e}_3$ voit aussi tourner $\vec{e}_1$ vers $\vec{e}_2$ de sa droite vers sa gauche.

3) Si V est une portion tridimensionnelle de $\mathbb{R}^3$, son bord ∂V est une surface fermée qu'on convient d'orienter en choisissant les vecteurs unitaires $\vec{n}$ des normales à ∂V toujours vers l'extérieur de V.

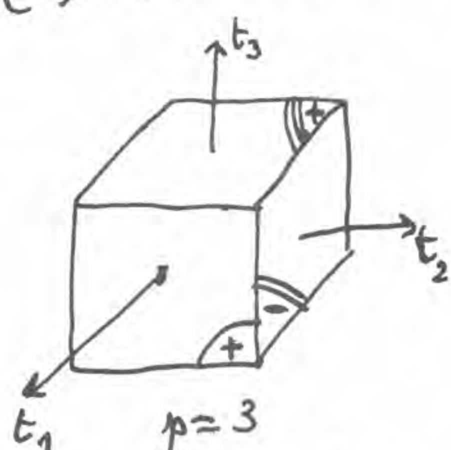
<u>Orientation du bord de K_p</u>. En fait ces moyens mnémotechniques traduisent dans ces cas particuliers (d'ailleurs les seuls importants) la définition suivante. Rappelons que la frontière ou bord du pavé K_p est constitué de $2p$ <u>faces</u> $t_k = +1$ et $t_k = -1$, où $k = 1, 2, \dots, p$. Sur chacune de ces faces on met un signe + ou − selon les conventions suivantes : sur la face $t_k = (-1)^{k-1}$ on met le signe + ; sur la face $t_k = (-1)^k$ on met le signe −. Par exemple :



$p=1$



$p=2$



$p=3$

<u>Orientation du bord de V</u>. La variété V de dimension p dans $\mathbb{R}^n$ étant paramétrée par K_p, son bord ∂V est paramétré par ∂K_p, donc est réunion de $2p$ "faces" (au moins fictivement) :

$$\partial V = \bigcup_{k=1}^{p} \left(\partial V_k^+ \cup \partial V_k^- \right) ,$$

où ∂V_k^+ est l'image par le paramétrage de la face $t_k = (-1)^{k-1}$ de K_p, les autres paramètres $t_1, \dots, t_{k-1}, t_{k+1}, \dots, t_p$ continuant de varier entre -1 et 1, et où de même ∂V_k^- est l'image de $t_k = (-1)^k$. Ainsi ∂V se trouve-t-il décomposé en $2p$ morceaux, chacun d'eux étant affecté d'un signe + ou − de manière convenue.

III. Intégrale d'une forme sur le bord orienté d'une variété

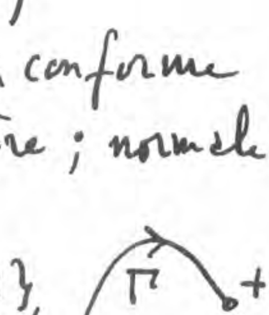
Soit V une variété de dimension p (qu'on peut toujours au moins fictivement supposer) paramétrée par le cube K_p, et soit $\partial V = \partial V_1^+ \cup \partial V_1^- \cup \partial V_2^+ \cup \partial V_2^- \cup \ldots\ldots \cup \partial V_p^+ \cup \partial V_p^-$ son bord, décomposé comme on vient de le dire en $2p$ faces affectées d'un signe. Pour chaque $k = 1, 2, \ldots, p$, les deux faces ∂V_k^+ et ∂V_k^- sont paramétrées par $t_1, \ldots, t_{k-1}, t_{k+1}, \ldots, t_p$ pris dans cet ordre et varient entre -1 et $+1$, tandis que t_k est fixé, égal à $(-1)^{k-1}$ sur ∂V_k^+, à $(-1)^k$ sur ∂V_k^-.

Soit ω une forme de degré $p-1$. On calcule, comme on l'a dit à la Leçon nº 11, en "reportant le paramétrage", les intégrales $\int_{\partial V_k^+} \omega$ et $\int_{\partial V_k^-} \omega$, ce qui ramène à deux intégrales multiples classiques, du type
$$\underset{\substack{-1<t_i<1 \\ i\neq k}}{\iint\cdots\int} F^{\pm}(t_1, \ldots, t_{k-1}, t_{k+1}, \ldots, t_p)\, dt_1 \ldots dt_{k-1}\, dt_{k+1} \ldots dt_p.$$

Par définition, nous poserons :
$$\int_{\partial V} \omega = \int_{\partial V_1^+} \omega - \int_{\partial V_1^-} \omega + \int_{\partial V_2^+} \omega - \int_{\partial V_1^-} \omega + \cdots + \int_{\partial V_p^+} \omega - \int_{\partial V_p^-} \omega \ ;$$
en bref :
$$\int_{\partial V} \omega = \sum_{k=1}^{p} \left(\int_{\partial V_k^+} \omega - \int_{\partial V_k^-} \omega \right).$$

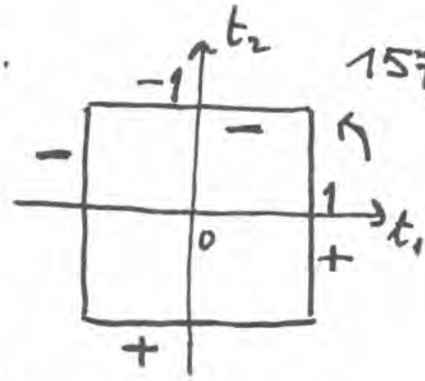
Constatons, dans les cas particuliers, que ceci est bien conforme aux moyens mnémotechniques (bonhomme d'Ampère ; normale vers l'extérieur) indiqués en II 1°), 2°) et 3°).

1°) Si Γ est un arc de courbe, de bord $\{A\} \cup \{B\}$, et si f est une forme de degré 0 (une fonction), on a



$$\int_{\partial\Gamma} f = +f(B) - f(A).$$

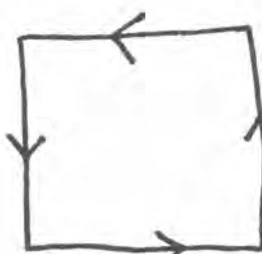
2°) Soit dans $\mathbb{R}^2$ le carré K_2 des paramètres.
Son bord ∂K_2 est formé des 4 arêtes (ou faces):



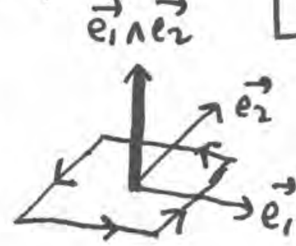
$t_1 = +1$, effectée du signe $+$;
$t_2 = +1$, effectée du signe $-$;
$t_1 = -1$, effectée du signe $-$;
$t_2 = -1$, effectée du signe $+$.

Si $\omega = P(t_1, t_2)\,dt_1 + Q(t_1, t_2)\,dt_2$ est une forme de degré 1, notre définition conduit à poser :

$$\int_{\partial K_2} \omega = + \int_{-1}^{1} Q(1, t_2)\,dt_2 - \int_{-1}^{1} P(t_1, 1)\,dt_1 - \int_{-1}^{1} Q(-1, t_2)\,dt_2 + \int_{-1}^{1} P(t_1, -1)\,dt_1 ,$$



ce qui est bien conforme à parcourir le bord du carré dans le sens direct, indiqué par la règle du bonhomme d'Ampère.



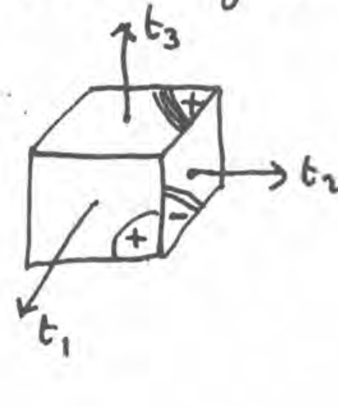
3°) S'agissant du bord $\partial \Sigma$ d'une surface Σ dans $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{R}^2$, on transporte par le paramétrage ce qu'on vient de dire au 2°) sur le bord ∂K_2 de K_2.

4°) Soit dans $\mathbb{R}^3$ le cube K_3 des paramètres (t_1, t_2, t_3). Son bord ∂K_3 est formé de 6 faces :

$t_1 = +1$, effectée du signe $+$; $t_1 = -1$, effectée du signe $-$;
$t_2 = +1$, effectée du signe $-$; $t_2 = -1$, effectée du signe $+$
$t_3 = +1$, effectée du signe $+$; $t_3 = -1$, effectée du signe $-$.

Soit

$$\omega = P(t_1, t_2, t_3)\,dt_2 \wedge dt_3 + Q(t_1, t_2, t_3)\,dt_3 \wedge dt_1 + R(t_1, t_2, t_3)\,dt_1 \wedge dt_2$$



une forme de degré 2. Notre définition conduit à poser :

$$\int_{\partial K_3} \omega = \iint_{-1<t_2,t_3<1} P(1,t_2,t_3)\,dt_2\,dt_3 - \iint_{-1<t_2,t_3<1} P(-1,t_2,t_3)\,dt_2\,dt_3$$

$$- \iint_{-1<t_1,t_3<1} P(t_1,1,t_3)\,dt_1\,dt_3 + \iint_{-1<t_1,t_3<1} P(t_1,-1,t_3)\,dt_1\,dt_3$$

$$+ \iint_{-1<t_1,t_2<1} P(t_1,t_2,1)\,dt_1\,dt_2 - \iint_{-1<t_1,t_2<+1} P(t_1,t_2,-1)\,dt_1\,dt_2 \,,$$

ce qui, comme on le vérifie sur chacune des six faces, consiste bien à orienter la normale à chaque face positivement vers l'extérieur du cube K_3

5°) S'agissant du bord ∂V d'une portion de $\mathbb{R}^3$, on transporte par le paramétrage ce qu'on vient de dire au 4°) sur le bord ∂K_3 de K_3.

IV. Formule générale de Stokes

Soit n un entier ≥ 1. Soit p un entier tel que $1 \leq p \leq n$. Soit V une variété de degré p plongée dans $\mathbb{R}^n$. Soit ∂V le bord de V, orienté comme on l'a dit au § II. Soit ω une forme différentielle de degré $p-1$, définie et de classe C^1 dans un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant V et ∂V. Soit $d\omega$ la différentielle extérieure de la forme ω (cf. Leçon n° 10). Alors on a :

$$\boxed{\int_{\partial V} \omega = \int_V d\omega} \,,$$

où l'intégrale du premier membre est calculée avec les conventions de signe exposées au § III.

Cette formule générale — ô combien esthétique — recouvre des cas particuliers que nous explicitons maintenant pour leur intérêt propre.

1°) Si $n=1$ et $p=1$, on retrouve :

$$f(b)-f(a)=\int_a^b f'(t)\,dt\ ,$$

c'est-à-dire la formule fondamentale du Calcul différentiel et intégral à une variable (cf. AN02).

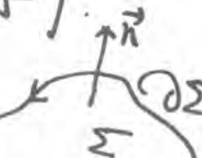
2°) Si $n=3$ ou 2, et $p=1$, on retrouve :

$$\int_\Gamma \left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(M) \,\middle|\, \overrightarrow{dM}\right)=f(B)-f(A),$$

formule déjà vue à la Leçon n° 11.

3°) Si $n=3$, et $p=2$, on trouve la "formule de Green" :

$$\int_{\partial\Sigma}\left(\overrightarrow{V(M)}\,\middle|\,\overrightarrow{dM}\right)=\iint_\Sigma\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V}(M)\,\middle|\,\vec{n}\,d\sigma\right).$$



Si une courbe fermée $\partial\Sigma$ est le bord d'une surface Σ, alors la circulation d'un champ de vecteurs le long de $\partial\Sigma$ est égal au flux du rotationnel de ce champ à travers Σ.

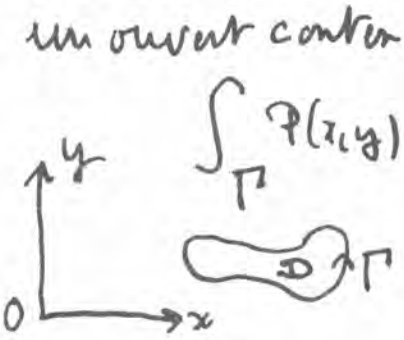
4°) Si $n=3$, $p=3$, on trouve la "formule d'Ostrogradski" :

$$\iiint_V \mathrm{div}\,\vec{V}(M)\,dM=\iint_{\Sigma=\partial V}\left(\vec{V}(M)\,\middle|\,\vec{n}\,d\sigma\right).$$

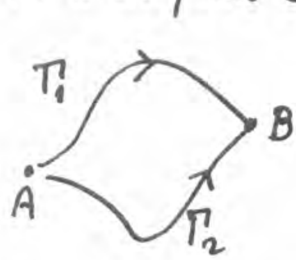
Si une surface Σ fermée est le bord d'une région V de $\mathbb{R}^3$, alors le flux d'un champ $\vec{V}(M)$ à travers Σ est égal à l'intégrale triple sur V de la divergence de ce champ.

5°) Si $n=2$, et $p=2$, on trouve la "formule de Green-Riemann" :
Soit D dans $\mathbb{R}^2$ un ouvert homéomorphe à une disque, et soit $\Gamma=\partial D$ son bord. Si $P(x,y)$ et $Q(x,y)$ sont de classe C^1 dans un ouvert contenant D et Γ, on a :

$$\int_\Gamma P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy.$$



6°) Il résulte du 2°) que, si un champ dérive d'un potentiel $-f$, sa circulation le long d'un arc Γ joignant un point A à un point B ne dépend que de A et de B, et non de l'arc Γ suivi, pourvu qu'on fasse varier cet arc dans un ouvert homéomorphe à une boule où f soit de classe C^1. On retrouve là un fait déjà signalé à la Leçon n° 11.



7°) De même il résulte du 3°) que, si un champ $\vec{W}(M)$ est le rotationnel d'un champ $\vec{V}(M)$, alors le flux de $\vec{W}(M)$ à travers une surface Σ ne dépend que du bord Γ de Σ [et est égal à la circulation de $\vec{V}(M)$ le long de Γ]; donc ce flux ne change pas quand on fait varier Σ, tout en lui conservant le même bord Γ, dans un ouvert homéomorphe à une boule où le rotationnel $\vec{W}(M)$ en question soit défini et de classe C^1.

8°) Soit U un ensemble ouvert homéomorphe à une boule de $\mathbb{R}^3$. Si un champ $\vec{V}(M)$ a son rotationnel identiquement nul dans U, alors la circulation de $\vec{V}(M)$ le long de toute courbe fermée (ou circuit) Γ dans U est nulle. Si un champ $\vec{W}(M)$ a sa divergence identiquement nulle dans U, alors le flux de $\vec{W}(M)$ à travers toute surface fermée Σ contenue dans U est nul.

V. Exemples et exercices.

Exemple 1. En posant $\rho^2 = x^2+y^2+z^2$, considérons, dans $\mathbb{R}^3$ privé de l'origine, le champ newtonien de pôle O :

$$\vec{V}(M) = \left(-\frac{x}{\rho^3} , -\frac{y}{\rho^3} , -\frac{z}{\rho^3} \right) .$$

Soit $\quad \omega = -\dfrac{1}{\rho^3}\,(x\,dy\wedge dz + y\,dz\wedge dx + z\,dx\wedge dy)$

le flux élémentaire de ce champ. A la leçon n° 10, Exercice 4, on a vu que $d\omega \equiv 0$. Cependant on a constaté, à la leçon n° 11, § II, que le flux de ce champ à travers une sphère de centre O vaut -4π, qui n'est pas nul ! Mais ceci n'est pas en contradiction avec la Remarque n° 8 ci-dessus ; bien au contraire, ce contre-exemple très simple souligne la nécessité, dans l'énoncé de cette Remarque, d'une hypothèse topologique sur U. Cette hypothèse (être homéomorphe à une boule) n'est pas vérifiée pour l'ouvert $\mathbb{R}^3$ privé de 0.

En fait le flux du champ newtonien à travers une surface fermée Σ de $\mathbb{R}^3$ ne passant pas par 0 :

cas a)

a) vaut 0 si Σ n'entoure pas l'origine, car une telle Σ peut toujours être enfermée dans un ouvert U homéomorphe à une boule qui ne contient pas la singularité à l'origine ;

b) vaut -4π si Σ entoure l'origine, car une telle Σ peut être déformée en une sphère S de centre 0 sans passer par la singularité, donc le flux à travers Σ est égal au flux à travers S.

cas b)

Exercice 1. Dans $\mathbb{R}^3$, soit $L_{a,b}$ la surface latérale du cylindre $x^2+y^2=1$, $a<z<b$, la normale étant orientée vers l'extérieur.

1°) Calculez par une intégrale double le flux du champ newtonien de pôle 0 à travers $L_{a,b}$. Soit $I_{a,b}$ la valeur trouvée.

2°) Soit D_h la surface du disque $x^2+y^2<1$, $z=h$. La normale à cette surface est orientée dans le sens de Oz. Calculez le flux J_h à travers D_h du champ newtonien de pôle 0 [On suppose $h\neq 0$].

3°) On suppose $b>0$, $a\neq 0$, $a<b$. Etablir par la formule de Stokes une relation entre $I_{a,b}$, J_a et J_b. Vérifiez cette relation sur vos résultats des 1°) et 2°), en discutant selon le signe de a.

Exercice 2. Dans $\mathbb{R}^3$ on pose $\rho^2=x^2+y^2+z^2$.

1°) Pour $a>0$, calculez $\displaystyle\iint_{\rho=a} x\,dy\wedge dz + y\,dz\wedge dx + z\,dx\wedge dy$.

2°) Soit $u = u(\rho)$ une fonction de classe C^1 pour $\rho > 0$. Montrez que
$$\iint_{\rho=a} \frac{\partial u}{\partial x}\, dy \wedge dz + \frac{\partial u}{\partial y}\, dz \wedge dx + \frac{\partial u}{\partial z}\, dx \wedge dy = 4\pi a^2 u'(a)$$

3°) En appliquant ce résultat et la formule de Stokes, trouvez toutes les $u = u(\rho)$ telles que $\Delta u \equiv 0$ pour $\rho \neq 0$.

Soit $v = v(x, y, z)$ une fonction de classe C^2 qui, en tout point de $\mathbb{R}^3$, même à l'origine, est <u>harmonique</u>, c'est-à-dire telle que $\Delta v \equiv 0$. On pose $u(\rho) = \frac{1}{\rho}$.

a) Montrez que, pour $\rho > 0$, l'intégrale :
$$\iint_{x^2+y^2+z^2=\rho^2} \left(v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x}\right) dy \wedge dz + \left(v\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial v}{\partial y}\right) dz \wedge dx + \left(v\frac{\partial u}{\partial z} - u\frac{\partial v}{\partial z}\right) dx \wedge dy$$
est indépendante de ρ.

b) En faisant $\rho = a$, puis en faisant tendre $\rho > 0$ vers 0, montrez que la valeur de v à l'origine ne dépend que des valeurs de v sur la sphère $\rho = a$. Exprimez $v(0,0,0)$ à l'aide d'une intégrale prise sur la surface de cette sphère, obtenant ainsi <u>la formule de la moyenne pour les fonctions harmoniques.</u>

<u>Exercice 3</u>. Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $z = z$.

Soit $\omega = 4z^3 (x\, dz \wedge dx - y\, dy \wedge dz) - (x^2 + y^2)(x\, dy \wedge dz + y\, dz \wedge dx - 4z\, dx \wedge dy)$.

1°) Exprimez ω en r, θ, z. 2°) Calculez $d\omega$.

3°) Déterminez deux fonctions $h(r)$ et $k(z)$ de classe C^1, telles que $k(1) = 1$, et telles qu'en posant $\omega_1 = rz[h(r)\, d\theta + k(z)\, dr]$, on ait $d\omega_1 = \omega$.

4°) Soit S la surface $\{x^2 + y^2 + z^2 = 2\ ;\ x > 0\ ;\ y > 0 ; -1 < z < 1\}$. Calculez $\iint_S \omega$.

5°) Soit le champ de forces $\vec{V}(M) = (P, Q, R)$, où

$P(x,y,z) = z^4 x - zy(x^2+y^2)$; $Q(x,y,z) = zx(x^2+y^2) + z^4 y$; $R(x,y,z) = 0$.

a) Mettez ce champ en relation avec ω_1.

b) Calculez son travail le long du cercle $x^2+y^2=1$; $z=1$.

c) Calculez son travail le long d'une spire de l'hélice $r=1$; $z=2\theta$.

VI. Indications sur les Exercices proposés dans cette Leçon.

Exercice 1. $I_{a,b} = 2\pi \left[\dfrac{b}{\sqrt{1+b^2}} - \dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}} \right]$;

$J_h = 2\pi \left[1 - \dfrac{h}{\sqrt{1+h^2}} \right]$ si $h>0$; $= 2\pi \left[-1 - \dfrac{h}{\sqrt{1+h^2}} \right]$ si $h<0$.

Si $a>0$, on a $I_{a,b} = J_a - J_b$. Si $a<0$, on a
$I_{a,b} = J_a - J_b + 4\pi$.

Exercice 2 1) $4\pi a^3$ 3) $u(\rho) = \dfrac{1}{\rho} + C^{te}$.

Exercice 3 1) $\omega = 4z^3 r \, dz\wedge dr - r^4 \, d\theta \wedge dz + 4 z r^3 \, dr \wedge d\theta$.

2) $d\omega = 0$.

3) $h(r) = r^3$; $k(z) = z^3$.

4) $\iint_S \omega = \pi$.

5) b) 2π.

c) $4\pi^2$.