UNIVERSITÉ
DE NANCY I

CENTRE
DE TÉLÉ-ENSEIGNEMENT
UNIVERSITAIRE
DE NANCY II

$(\vec{MA}, \vec{MB})$ et $(\vec{M'A}, \vec{M'B})$ ne sont pas égaux (ce sont les deux angles de vecteurs, dont l'image par X est α)

Ainsi l'un des deux arcs $\widehat{AB}$ de Γ_α, est l'ensemble des points tels que $(\vec{MA}, \vec{MB}) = \alpha_1$, et l'autre l'ensemble des points M tels que $(\vec{MA}, \vec{MB}) = \pi + \alpha_1$

Remarque : [illegible] facilement, que le lieu des points tels que $\widehat{AMB} = u$ (comme angle de vecteurs) est formé de 2 arcs d'extrémités [illegible] A et B.

algèbre et géométrie

MODULE **AG 3 :**

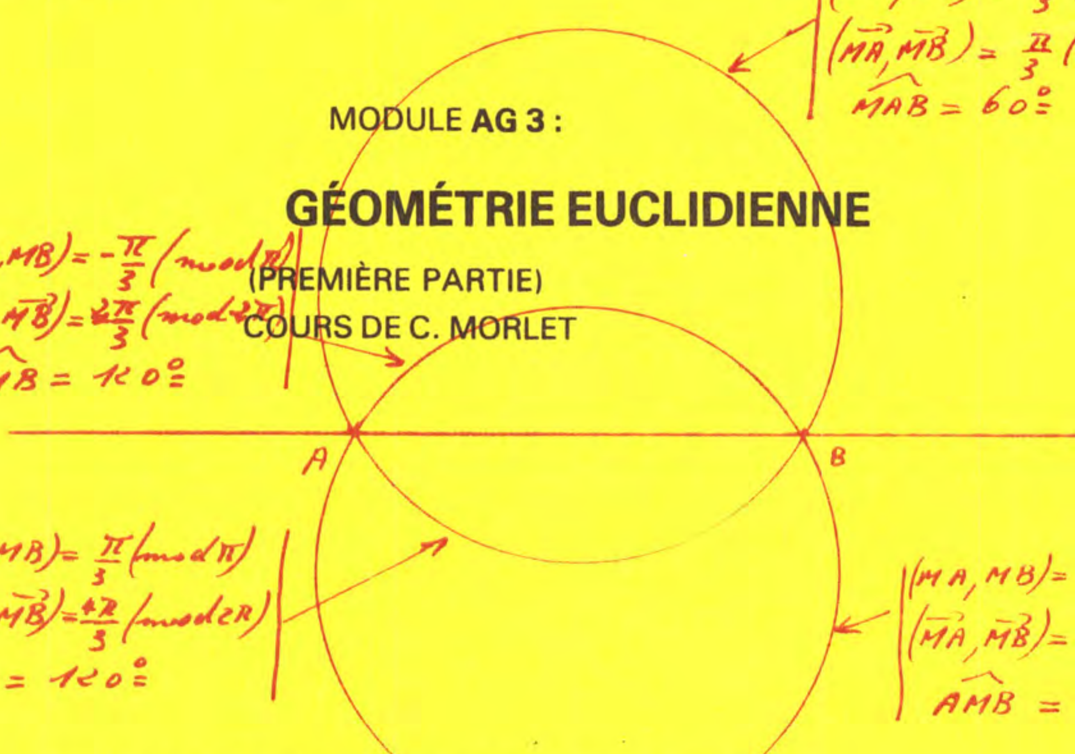
GÉOMÉTRIE EUCLIDIENNE

(PREMIÈRE PARTIE)

COURS DE C. MORLET

$(MA, MB) = \frac{\pi}{3} \pmod{\pi}$
$(\vec{MA}, \vec{MB}) = \frac{\pi}{3} \pmod{2\pi}$
$\widehat{MAB} = 60°$

$(MA, MB) = -\frac{\pi}{3} \pmod{\pi}$
$(\vec{MA}, \vec{MB}) = \frac{2\pi}{3} \pmod{2\pi}$
$\widehat{AMB} = 120°$



$(MA, MB) = \frac{\pi}{3} \pmod{\pi}$
$(\vec{MA}, \vec{MB}) = \frac{4\pi}{3} \pmod{2\pi}$
$\widehat{AMB} = 120°$

$(MA, MB) = -\frac{\pi}{3} \pmod{\pi}$
$(\vec{MA}, \vec{MB}) = -\frac{\pi}{3} \pmod{2\pi}$
$\widehat{AMB} = 60°$

DIPLÔME D'ÉTUDES UNIVERSITAIRES GÉNÉRALES

SCIENCES DES STRUCTURES ET DE LA MATIÈRE
MATHÉMATIQUE PHYSIQUE INFORMATIQUE
SCIENCES DE L'ÉDUCATION

© la maquette de la couverture a été réalisée par le L.E.P. Cyfflé - NANCY

Édité et imprimé par l'Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques - (Université de Nancy I - Faculté des Sciences) -
B.P. 239 - 54506 VANDOEUVRE-les-NANCY CEDEX
Dépôt légal : 4e trimestre 1987
n° de la publication : 2-85406-105-5

Le Responsable de la collection : Philippe LOMBARD

Réf. N 522 1

AG_3 : Première partie

Les principaux groupes de transformations de la géométrie métrique plane

Introduction : Depuis la fin du 19$^{\text{ième}}$ siècle, la géométrie a cessé d'être (uniquement) la science des figures, pour devenir celle de leurs transformations. Les transformations géométriques (translations, homothéties, rotations, ...) sont en effet un puissant outil de démonstration, soit qu'elles soient considérées isolément, soit qu'on considère l'ensemble des transformations conservant des propriétés données. Elles forment alors ce qu'on appelle les groupes de transformations.

Dans cette première partie nous étudierons

. Les transformations qui conservent la direction des droites - Ce sont les dilatations (chapitre I)

. Les transformations qui conservent la distance. Ce sont les isométries (chapitres II, III, IV)

. Les transformations qui conservent le rapport des distances. Ce sont les similitudes.

(chapitre VII)

Le chapitre préliminaire est consacré à une "mise au point" sur la notion algébrique de groupe. Il n'est pas conseillé de le lire d'abord ; il vaut mieux l'étudier au fur et à mesure des besoins. On peut lire les chapitres I, II et III en ne connaissant que les § 1, 2 de ce chapitre préliminaire. Les § 3 et 4 ne servent que dans les chapitres III et VII.

Table des chapitres de la 1ère partie.

Chapitre préliminaire : Les groupes

§1 Définition et quelques exemples

Un groupe est un ensemble muni d'une loi de composition (on notera $a * b$ le composé de a et b) telle que

- Quels que soient a, b et c :

$$(a*b)*c = a*(b*c)$$

- Il existe un élément e (appelé élément neutre) tel que, quelque soit a :

$$a*e = e*a = a$$

- Quelque soit a, il existe un élément u tel que

$$a*u = u*a = e$$

Nota : Lorsque la loi est notée $a \times b$ ou $a.b$, l'élément u tel que $u \times a = a \times u = e$ est appelé l'inverse de a, et noté a^{-1}.

Lorsque, pour tout couple (a, b), on a : $a*b = b*a$, on dit que le groupe est commutatif. On note alors (très souvent) $a+b$ le composé de a et b. Dans ce cas l'élément u tel que $a+u = u+a = e$, est appelé l'opposé de a, et noté $-a$.

Exemples :

a) $\mathbb{R}$ muni de l'addition est un groupe commutatif. De même $\mathbb{Z}$ muni de l'addition, ou $\mathbb{Q}$ muni de l'addition. Pourquoi $\mathbb{N}$ muni de l'addition n'est il pas un groupe ?

$\mathbb{R}^*$ (i.e : $\mathbb{R}$ privé de 0) muni de la multiplication est un groupe commutatif. De même $\mathbb{Q}^*$ muni de la multiplication. Pourquoi $\mathbb{Z}^*$ muni de la multiplication n'est il pas un groupe ? Pourquoi $\mathbb{R}^*$ muni de la division n'est il pas un groupe ?

b) Soit E un ensemble, on notera Biject(E) l'ensemble des applications bijectives de E dans E. On munit Biject(E) d'une loi de composition en associant à f et g leur composée $f \circ g$. Alors Biject(E) est un groupe.

Pourquoi n'aurait on pas obtenu un groupe si l'on était parti des applications surjectives (ou des applications injectives) de E dans E ?

Quel est l'élément neutre de Biject(E) ?

c) Soit $GL(n, \mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $n \times n$ (à coefficients réels) inversibles (c'est à dire de rang n). Alors, muni de la multiplication des matrices, $GL(n, \mathbb{R})$ est un groupe.

Exercice : Montrer que, si E a au moins 3 éléments, $Bijet(E)$ n'est pas un groupe commutatif.

Montrer que (dès que $n \geq 2$), $GL(n, \mathbb{R})$ n'est pas un groupe commutatif.

§2 : Les sous-groupes

Soit H un sous-ensemble du groupe G, on dit que H est un sous-groupe de G, si :

α) L'élément neutre de G est dans H

β) Le composé de deux éléments quelconques de H, est un élément de H.

γ) Si un élément a appartient à H, son inverse (ou opposé) est aussi dans H.

Il en résulte que, muni de "la même" loi de composition que G (ce qui est possible à cause de β), H est un groupe ; il a même élément neutre que G ; et un élément de H a même inverse dans G et dans H.

Exercice : Montrer que, pour que le sous-ensemble H de G soit un sous-groupe, il faut et il suffit que H soit non vide, et que, quels que soient a et b dans H, ab^{-1} soit dans H.

Exemples :

a) $(\mathbb{Z}, +)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Q}, +)$ qui est un sous groupe de $(\mathbb{R}, +)$

$(\{+1, -1\}, \times)$ est un sous groupe de $(\mathbb{R}^*, \times)$

$(\mathbb{R}^*, \times)$ n'est pas un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.

b) Soit e un élément de l'ensemble E, alors l'ensemble G_e des bijections de E qui laissent e fixe, est un sous-groupe de Biject(E).

Soit $F \subset E$, l'ensemble $G_{(F)}$ des bijections de E qui envoient bijectivement F dans lui même, est un sous groupe de Biject (E).

L'ensemble des bijections croissantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, est un sous groupe de Biject $(\mathbb{R})$.

c) Les matrices de la forme $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ forment un sous-groupe de $GL(2, \mathbb{R})$

Les matrices de la forme $\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ forment un sous-groupe de $GL(2, \mathbb{R})$

Les matrices de $GL(3, \mathbb{R})$ dont les coefficients situés en dessous de la diagonale (i.e : n° ligne > n° colonne) sont nuls, forment un sous-groupe de $GL(3, \mathbb{R})$.

§3 Les homomorphismes

Soit H et G deux groupes, et soit $f : H \to G$

On dit que f est un homomorphisme, si (en notant $\times_H$ et $\times_G$ les deux lois de groupe)

- $f(e_H) = e_G$
- Quels que soient a et b dans H :
  $f(a \times_H b) = f(a) \times_G f(b)$
- Quel que soit a dans H : $f(a^{-1}) = [f(a)]^{-1}$

Exercice : Montrer que f est un homomorphisme si et seulement si, quels que soient a et b dans H :
$$f(a \times_H b) = f(a) \times_G f(b)$$

Exemples

L'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ définie par $x \to e^x$ est un homomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathbb{R}^*, \times)$.

L'application $M \to \det M$ est un homomorphisme de $GL(n, \mathbb{R})$ dans $(\mathbb{R}^*, \times)$.

Noyau d'un homomorphisme

Le noyau de $f : H \to G$ est l'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = e_G$. Il n'est jamais vide, car il contient e_H. C'est un sous-groupe de H (en effet si $f(a) = f(b) = e_G$, alors $f(a \times_H b^{-1}) = f(a) \times_G [f(b)]^{-1} = e_G \times_G e_G^{-1} = e_G$). Le noyau de f sera noté $\operatorname{Ker} f$.

Résolution des équations du type $f(x) = g$:

Il est possible qu'une telle équation n'ait pas de solution (autrement dit que f ne soit pas surjective). Supposons qu'on en ait une x_0. Alors pour toute solution x_1 : $f(x_1 \times_H (x_0)^{-1}) = f(x_1) \times_G [f(x_0)]^{-1}$ $= g \times_G g^{-1} = e_G$. Ainsi $\alpha = x_1 \times_H (x_0)^{-1}$ est un élément de Ker f ; autrement dit $x_1 = \alpha \times_H x_0$ où α est un élément du noyau de f.

Réciproquement si a est dans le noyau de f : $f(a \times_H x_0) = f(a) \times_G f(x_0) = e_G \times_G g = g$. Donc $a \times_H x_0$ est aussi solution de l'équation proposée.

Nous obtenons ainsi la règle classique : Pour avoir toutes les solutions de $f(x) = g$, nous en cherchons une, soit x_0 (s'il en existe !), puis nous la composons (à gauche) avec tous les éléments du noyau de f.

Image d'un homomorphisme

L'image de $f : H \to G$ est l'ensemble des g de G pour lesquels l'équation $f(x) = g$ a (au moins) une solution. On la note Im f.

Exercice : Montrer que Im f est un sous-groupe de G

Exercice : Démontrer que "Ker $f = \{e_H\}$" équivaut à "f est injective". Tandis que "$\operatorname{Im} f = G$" équivaut à "f est surjective".

Exercice : Si $f : H \to G$ et $g : K \to H$ sont des homomorphismes de groupes, alors $f \circ g : K \to G$ est un homomorphisme de groupes.

Si $f : H \to K$ est un homomorphisme de groupe bijectif, alors $f^{-1} : K \to H$ est aussi un homomorphisme de groupes. On dit alors que f est un isomorphisme de H sur K

§4 : Groupes quotients

Classes modulo un sous-groupe

Nous considérons un sous-groupe H d'un groupe G. Nous appellerons classe à gauche d'un élément y de G, l'ensemble des éléments de G de la forme hy, où h est dans H.

On notera que

- La classe de e_G est H
- Si y' est dans la classe de y, alors les classes de y et y' coïncident. En effet si $y' = h_1 y$, un élément qui s'écrit hy s'écrit aussi $(hh_1^{-1}) y'$; tandis qu'un élément qui s'écrit hy' s'écrit aussi $(hh_1)y$.

Ainsi deux classes distinctes sont disjointes. Les "classes à gauche modulo H" forment donc une partition de G. On notera ${}_H\backslash G$ l'ensemble de ces classes.

Nous pourrions définir de la même façon les classes à droite : la classe à droite de y est l'ensemble des éléments de la forme $y.h$, où h est dans H. L'ensemble des classes à droite sera noté G/H.

Sous-groupes distingués

Notons que la classe à droite et la classe à gauche d'un même y, ne sont pas toujours identiques. Par exemple : Soit H le sous-groupe de $GL(2,\mathbb{R})$ formé des matrices de la forme $\begin{pmatrix}1 & \alpha\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. La classe à gauche de $M=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ est l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix}1+2\alpha & \alpha\\ 2 & 1\end{pmatrix}$; sa classe à droite est l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix}1 & \alpha\\ 2 & 2\alpha+1\end{pmatrix}$.

Nous dirons que le sous-groupe H de G est distingué, si, pour tout y dans G, les classes à droite et à gauche coïncident.
Exercice : Démontrer que y est distingué si et seulement si, quel que soit y dans G, $yHy^{-1} = H$ (yHy^{-1} est l'ensemble des éléments de la forme yhy^{-1} avec h dans H)

Groupes quotients

Lorsque H est un sous-groupe distingué de G l'ensemble G/H (qui est identique à $H\backslash G$) est appelé l'ensemble quotient de G par H.

Il est naturellement muni d'une structure de groupe.

Plus précisément : notons X l'application de G dans G/H qui à tout y associe sa classe. Il existe une unique loi de composition sur G/H, telle que

- G/H soit un groupe
- $X : G \to G/H$ soit un homomorphisme.

Démonstration : Soit u et v deux classes, choisissons y dans u et z dans v, on posera $u.v = X(yz)$ [Notons que si X doit être un homomorphisme, on a forcément $X(yz) = u.v$]. Pour que cette définition soit licite, il faut que $X(yz)$ soit indépendant des choix de y et z dans u et v. Pour nous en convaincre remplaçons y par $y' = hy$ et z par $z' = h'z$, alors $y'z' = hyh'z$; mais (H étant distingué) yh' s'écrit aussi $h''y$, donc $y'z' = hh''yz$, ce qui montre que yz et $y'z'$ sont dans la même classe

Exercice : Montrer que la classe H de e_G est élément neutre dans G/H.

Montrer que si y est dans la classe u, la classe de y^{-1} est l'inverse de la classe u

Montrer que, quelles que soient les classes u, v, w, on a $(uv)w = u(vw)$. On utilisera pour cela la surjectivité de X.

Exemple : l'exemple le plus connu de groupe quotient est $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, quotient du groupe $\mathbb{Z}$ par le sous-groupe des multiples de n (il est distingué puisque $\mathbb{Z}$ est commutatif).

La classe de p modulo $n\mathbb{Z}$ est l'ensemble des nombres de la forme $p+kn$ $(k\in\mathbb{Z})$. Il y a n classes, celle de 0 (qui est $n\mathbb{Z}$), celle de 1, de 2, ... de $n-1$. La somme des classes de a et de b est la classe de $a+b$ (ou encore celle du reste de la division de $a+b$ par n). Tout ceci a été vu dans le cours d'arithmétique ; on y a même muni $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ d'un produit, mais c'est une toute autre affaire.

On verra d'autres exemples de groupes quotients aux chapitres IV, V, ...

Exercice : Soit H un sous-groupe de G, si G/H a 2 éléments, alors H est distingué

Exercice : Soit G_e le sous groupe de Biject(E) formé des bijections qui laissent e $(\in E)$ invariant, G_e est il distingué ?

Exercice : Si G est commutatif, alors G/H est commutatif.

Chapitre I : Les dilatations

Dans tout ce chapitre nous nous plaçons dans un plan P, afin de fixer les notations. Mais il n'y aurait rien à changer s'il s'agissait de géométrie de l'espace. D'ailleurs les exercices proposés relèvent tantôt de la géométrie plane, tantôt de la géométrie de l'espace.

§ 1 : Propriétés élémentaires.

Nous dirons qu'une application $f : P \to P$ est une dilatation si

d'une part elle est injective

d'autre part, pour toute paire de points (A, B), la droite $f(A)f(B)$ est parallèle à la droite AB.

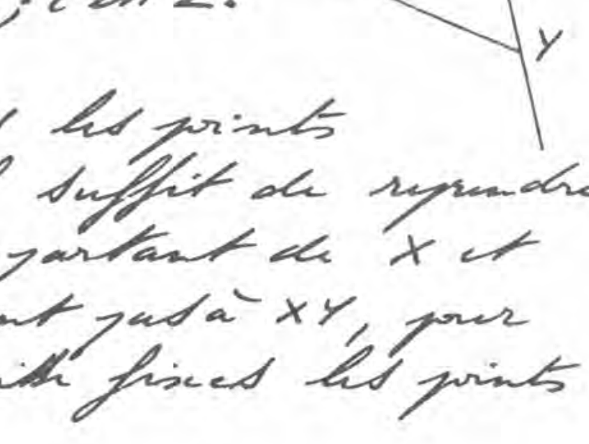
Exemples : Soit t la translation de vecteur $\vec{v}$; pour toute paire (A,B) nous avons $\overrightarrow{t(A)t(B)} = \overrightarrow{AB}$, donc t est une dilatation. Soit h une homothétie de rapport λ ; pour toute paire (A, B) nous avons $\overrightarrow{h(A)h(B)} = \lambda \overrightarrow{AB}$, donc h est une dilatation.

<u>Théorème</u> : Étant donnés des couples de points (A, B) et (A', B') tels que les droites AB et $A'B'$ soient parallèles, il existe une dilatation et une seule qui envoie A sur A' et B sur B'. Cette dilatation est soit l'identité, soit une translation, soit une homothétie. Notons qu'il en résulte que toute dilatation est soit l'identité, soit une translation, soit une homothétie.

Pour la démonstration nous utiliserons le lemme suivant :

<u>Lemme</u> : Une dilatation f qui a deux points fixes X et Y, est l'identité.

Démonstration du lemme : Soit Z un point qui n'est pas sur la droite XY. Alors $f(Z)$ doit être sur la parallèle à XZ passant par X, c'est à dire sur XZ. De même $f(Z)$ doit être sur XY. Mais les droites XZ et XY, ont un seul point commun ; c'est Z. Donc $f(Z) = Z$.



Ainsi f laisse fixes les points non situés sur XY. Il suffit de reprendre le même argument en partant de X et d'un point n'appartenant pas à XY, pour se convaincre que f laisse fixes les points de la droite XY.

Démonstration du théorème : Puisque les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ sont parallèles, il existe un nombre λ, tel que $\overrightarrow{A'B'} = \lambda \overrightarrow{AB}$.

Si $\lambda = 1$, on a $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$, donc $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'} - \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{BB'}$. Ainsi la translation de vecteur $\vec{v} = \overrightarrow{AA'}$ envoie A sur A', et B sur B'.

Si $\lambda \neq 1$, alors il existe un unique point O tel que $\overrightarrow{OA'} - \lambda \overrightarrow{OA} = 0$ (c'est le barycentre de A et A' munis des poids $-\lambda$ et 1). L'homothétie h de centre O et de rapport λ envoie A sur A'. Elle envoie B sur B_1 tel que $\overrightarrow{OB_1} = \lambda \overrightarrow{OB}$; c'est à dire tel que $\overrightarrow{A'B_1} = \overrightarrow{A'O} + \overrightarrow{OB_1} = \lambda \overrightarrow{AO} + \lambda \overrightarrow{OB} = \lambda \overrightarrow{AB}$, ce qui montre que $B_1 = B'$.

Nous avons donc démontré l'existence d'une dilatation f qui envoie A sur A' et B sur B'. Celle ci est soit une translation (qui peut être l'identité si $\overrightarrow{AA'} = 0$), soit une homothétie. Il nous reste à montrer qu'il n'y en a pas d'autre.

Supposons donc qu'une dilatation g envoie A sur A' et B sur B'. Puisque f est bijective, considérons $F = f^{-1} \circ g$. C'est une dilatation (la composée de deux dilatations est clairement une dilatation). Et F a deux points fixes A et B. Donc (cf le lemme) $F = Id$; ce qui signifie que $f = g$, et termine la démonstration.

§ 2 : Le groupe des dilatations.

Ainsi, parler des dilatations, c'est considérer que les homothéties et les translations font partie d'un même type de transformations. Un tel point de vue est intéressant car - comme nous l'avons déjà remarqué au cours de la démonstration ci-dessus - d'une part toutes ces transformations sont inversibles et ont pour inverses des dilatations, d'autre part la composée de deux dilatations est une dilatation (et de plus l'identité est une dilatation).

Notons $\mathcal{D}(P)$ l'ensemble des dilatations du plan P, c'est un sous-ensemble du groupe $Biject(P)$, et les propriétés évidentes ci-dessus prouvent que c'est un sous-groupe de $Biject(P)$ (cf : définition des sous groupes).

Remarque : À toute dilatation d nous pouvons associer son rapport $r(d)$ ($r(d)=1$ si d est une translation ; si d est une homothétie, $r(d)$ est son rapport). Pour tout couple (A,B) nous avons $\overrightarrow{d(A)d(B)} = r(d)\,\overrightarrow{AB}$.

Nous obtenons ainsi une application $\mathcal{D}(P) \to \mathbb{R}^*$. Cette application est un homomorphisme de groupes ; c'est à dire que $r(d_1 d_2) = r(d_1) r(d_2)$ (facile !), que $r(d^{-1}) = 1/r(d)$, et que $r(Id) = 1$.

On notera que le noyau de cet homomorphisme est le groupe $\mathcal{T}$ des translations.

§3 : Etude de la loi de composition

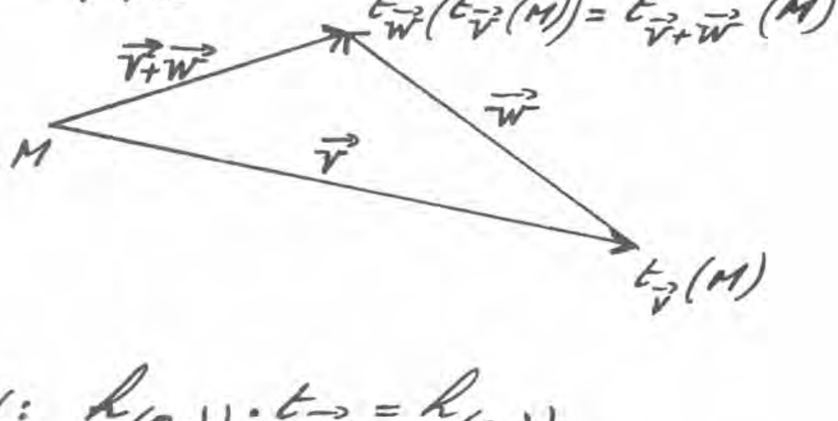
Etant données deux dilatations d_1 et d_2 dont on connait les éléments caractéristiques (vecteur pour une translation, centre et rapport pour une homothétie), comment va-t-on déterminer les éléments caractéristiques de $d_1 \cdot d_2$?

Notons d'abord que la relation $r(d_1 d_2) = r(d_1)\, r(d_2)$ nous permet de déterminer si la composée est une homothétie ou une translation (éventuellement de vecteur nul).

Nous aurons cinq cas de figure

Premier cas : deux translations

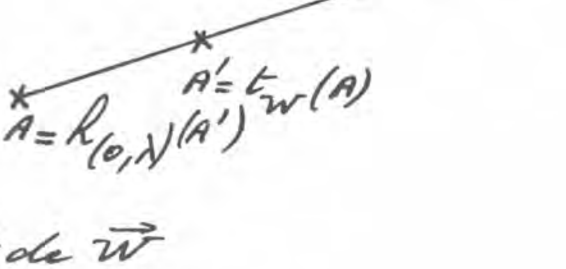
$$t_{\vec{V}} \cdot t_{\vec{W}} = t_{\vec{V}+\vec{W}}$$



Deuxième cas : $h_{(O,\lambda)} \cdot t_{\vec{W}} = h_{(A,\lambda)}$

le point A est le seul point tel que $h_{(O,\lambda)} \cdot t_{\vec{W}}(A) = A$. Il est défini par

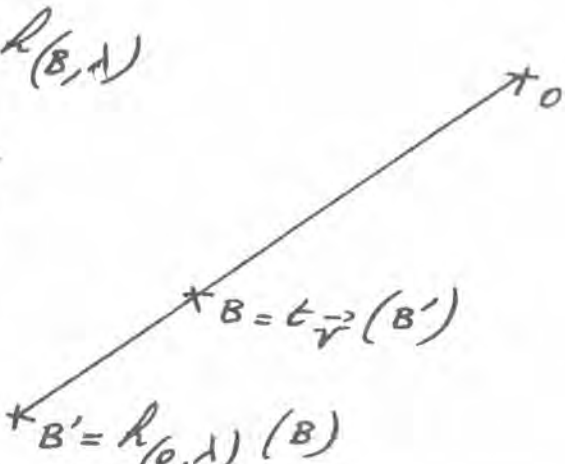
$$\vec{OA} = \lambda\,\vec{OA'} \text{ et } \vec{AA'} = \vec{W}.$$



Donc $\vec{OA} = \dfrac{\lambda}{1-\lambda}\,\vec{W}$

Noter le parallélisme de $\vec{OA}$ et de $\vec{W}$

Troisième cas : $t_{\vec{v}} \circ h_{(O,\lambda)} = h_{(B,\lambda)}$



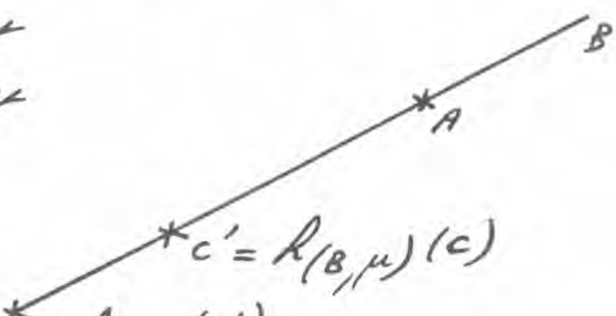
Le point B est le seul point fixe de $t_{\vec{v}} \circ h_{(O,\lambda)}$. Il est défini par

$\vec{OB'} = \lambda \vec{OB}$ et $\vec{B'B} = \vec{v}$

Donc $\vec{OB} = \frac{1}{1-\lambda} \vec{v}$

Noter le parallélisme de $\vec{OB}$ et de $\vec{v}$.

Quatrième cas : $h_{(A,\lambda)} \circ h_{(B,\mu)} = h_{(C,\lambda\mu)}$ $(\lambda\mu \neq 1)$



Le point C est le seul point fixe de $h_{(A,\lambda)} \circ h_{(B,\mu)}$. Il est défini par

$\vec{BC'} = \mu \vec{BC}$ et $\vec{AC} = \lambda \vec{AC'}$.

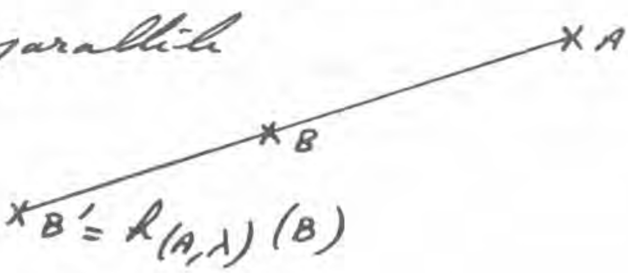
Donc $\vec{BC} = \frac{1-\lambda}{\lambda\mu - 1} \vec{AB}$

Noter l'alignement des trois centres.

Cinquième cas : $h_{(A,\lambda)} \circ h_{(B,1/\lambda)} = t_{\vec{v}}$.

Si on pose $B' = h_{(A,\lambda)} \circ h_{(B,1/\lambda)}(B) = h_{(A,\lambda)}(B)$, on a $\vec{BB'} = \vec{v}$.

Noter que $\vec{v}$ est parallèle à $\vec{AB}$.



§4 : Propriétés des dilatations

Ce sont les propriétés communes aux

homothéties et aux translations. Voici - sans démonstrations - les principales:

• Toute droite D a pour image une droite D' parallèle à D. Donc les angles sont conservés.

• Les distances sont multipliées par la valeur absolue du rapport. Les aires sont multipliées par le carré du rapport.

• (Dans l'espace) L'image d'un plan Q est un plan Q' parallèle à Q. Des plans perpendiculaires ont pour images des plans perpendiculaires. Les volumes sont multipliés par le cube de la valeur absolue du rapport.

Exercices sur le chapitre I

Exercice 1 (Dilatations et cercles dans le plan)

a) Soit Γ et Γ' deux cercles (de centres O et O', et de rayons r et r') du plan P. Montrer que si une dilatation d est telle que $d(\Gamma)=\Gamma'$, alors la valeur absolue de son rapport est r'/r. En déduire qu'il existe exactement deux dilatations qui envoient Γ sur Γ'. A quelle condition sont elles toutes deux des homothéties?

b) Soit Γ et Γ' deux cercles de rayons distincts, montrer que toute tangente commune à Γ et Γ' passe par le centre d'une homothétie qui transforme Γ en Γ'.

c) On considère 3 cercles Γ, Γ' et Γ'' de rayons 2 à 2 distincts. Montrer que les 6 centres des homothéties transformant ces cercles (2 à 2) l'un en l'autre, sont des points 3 à 3 alignés.

Exercice 2 (Dilatations et sphères)

a) Soit 2 sphères Σ et Σ' de centres O et O', et de rayons r et r'. Montrer qu'il existe exactement 2 dilatations qui transforment Σ en Σ'.

b) On considère 4 sphères $\Sigma, \Sigma', \Sigma'', \Sigma'''$ de rayons 2 à 2 distinctes. On a ainsi $2\times C_4^2 = 12$ centres d'homothéties de ces sphères prises 2 à 2. Montrer que ces points sont 3 à 3 alignés et 6 à 6 coplanaires.

Exercice 3 (Homothétiques d'un triangle)

a) Soit ABC et $A'B'C'$ deux triangles du plan P, à côtés parallèles (i.e. : AB et $A'B'$ sont parallèles, ainsi que BC et $B'C'$, ainsi que CA et $C'A'$). Montrer qu'il existe une unique dilatation qui envoie A sur A', B sur B', et C sur C'. On pourra chercher l'image de C par la dilatation qui envoie A sur A' et B sur B'.

b) Soit ABC et MNP deux triangles, construire un triangle $M'N'P'$ qui soit l'image de MNP par une dilatation, et tel que A soit sur $M'N'$, B sur $N'P'$ et C sur $P'M'$. Est-il possible qu'il n'y ait pas de solution à ce problème ?

c) (En utilisant b) construire un triangle $A_1B_1C_1$, qui soit l'image de ABC par une dilatation et tel que A_1 soit sur MN, B_1 sur NP et C_1 sur PM. Est-il possible qu'il n'y ait pas de solution à ce problème ?

Exercice 4 (Cercles tangents à 2 droites)

On considère deux droites D et D'.

a) Quelles sont les dilatations d telles que $d(D) = D$ et $d(D') = D'$ (on distinguera deux cas suivant que D et D' sont sécantes ou parallèles). Montrer qu'elles forment un groupe.

b) Soit A un point qui n'est ni sur D ni sur D'. On suppose que D et D' sont sécantes en O, et on note S_A le secteur (défini par D et D') qui contient A. Tracer un cercle Γ_0 contenu dans S_A et tangent à D et D'. Montrer que tout cercle contenu dans S_A et tangent à D et D', est transformé de Γ_0 par une homothétie de centre O.

c) Tracer les cercles tangents à D et à D' et qui passent par A (on pourra d'abord chercher les homothéties de centre O qui envoient Γ_0 sur un tel cercle)

d) On suppose maintenant que D et D' sont parallèles, et on choisit A entre D et D'. En adaptant la méthode de c), construire les cercles passant par A et tangents à D et à D'.

e) (plus difficile) On suppose D et D' sécantes en O; et on note S l'un des 4 secteurs qu'elles définissent. Soit C un cercle contenu dans S. Soit Γ un cercle tangent à C à D et à D'. Déterminer les dilatations qui transforment C en Γ_0, puis celles qui transforment Γ en Γ_0 et celles qui transforment Γ en C. En déduire une construction de tous les cercles qui sont tangents à C, à D et à D'.

<u>Exercice 5</u> (Sphères inscrites dans un cone)

Soit Γ un cone de révolution, on appelle sphère inscrite dans Γ, toute sphère qui est centrée sur l'axe de Γ, et qui est tangente à toutes les génératrices de Γ.

a) Montrer que 2 telles sphères inscrites sont transformées l'une de l'autre par une homothétie de centre le sommet S du cone.

b) Soit P un plan ne passant pas par S. Déterminer les sphères inscrites à Γ et tangentes à P (on pourra chercher d'abord les plans parallèles à P et tangents à une sphère inscrite Σ_0 donnée a priori) On pourra s'inspirer du c) de l'exercice 4.

c) Trouver de même les sphères inscrites dans un cylindre de révolution Γ et tangentes à un plan P donné.

<u>Exercice 6</u> (Le théorème de Pappus)

On considère 2 droites d et d', et des points A, C, E sur d et B, D, F sur d'. On suppose que AB et DE sont parallèles, ainsi que BC et EF, et on veut démontrer que CD et FA sont parallèles

a) On suppose que d et d' sont parallèles

Montrer qu'il existe des translations t_1 et t_2 telles que $t_1(A) = E$ et $t_1(B) = D$, et que $t_2(F) = B$ et $t_2(E) = C$. Qu'est ce que $t_1 t_2$ et $t_2 t_1$? Conclure

b) Adapter la démonstration au cas où d et d' sont sécantes en O (O est bien sûr distinct de A, B, C, D, E et F).

Exercice 7 (Le théorème de Ménélaüs)

Soit ABC un triangle et M, N, P des points situés respectivement sur BC, CA et AB (et distincts de A, B et C)

a) On suppose que $\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \times \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \times \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = 1$, en composant l'homothétie de centre M qui envoie B sur C, et l'homothétie de centre N qui envoie C sur A, démontrer que M, N et P sont alignés.

b) Démontrer que, inversement, si M, N et P sont alignés, alors $\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \times \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \times \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = 1$

Exercice 8 (Cercle d'Euler d'un triangle)

Soit A, B, C un triangle, et A', B', C' des milieux des cotés BC, CA et AB.

a) Montrer qu'il existe une homothétie h telle que $h(A) = A'$, $h(B) = B'$ et $h(C) = C'$. Quel est son rapport ? son centre ?

b) Soit O le centre du cercle circonscrit à ABC, H son orthocentre et G son centre de gravité. Expliquer pourquoi O est l'ortho

centre de $A'B'C'$. En déduire que
$\vec{GO} = \frac{-1}{2}\vec{GH}$.

c) Soit Γ le cercle circonscrit à ABC et $\gamma = h(\Gamma)$. Pourquoi γ est il centré au milieu I de HO?

d) Le cercle γ passe par $A'B'C'$. Pourquoi passe-t-il aussi par les pieds des hauteurs de ABC? Pourquoi passe-t-il aussi par les milieux des segments HA, HB, HC?

<u>Exercice 9</u> (Autour de 3 cercles de même rayon)

On considère 3 cercles Γ_A, Γ_B et Γ_C de même rayon R et centrés en A, B, C. On suppose qu'ils ont un point O en commun et que Γ_A et Γ_B se recoupent en C', Γ_B et Γ_C en A', et Γ_C et Γ_A en B'. On note A'', B'' et C'' les milieux de BC, CA et AB.

En étudiant les dilatations qui transforment l'un en l'autre les triangles ABC, $A'B'C'$ et $A''B''C''$, montrer que $A'B'C'$ sont sur un même cercle de rayon R.

Chapitre II : Les propriétés élémentaires des isométries planes.

Dans tout ce qui suit nous utiliserons le produit scalaire, étudié dans la leçon 6 de AG1. Rappelons que le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ est un nombre, noté $\vec{v}\cdot\vec{w}$, et que

1) $\vec{v}\cdot\vec{w} = \vec{w}\cdot\vec{v}$

2) $$\left.\begin{array}{l} \vec{v}\cdot(\vec{w}+\vec{w}\,') = \vec{v}\cdot\vec{w} + \vec{v}\cdot\vec{w}\,' \\ (\vec{v}+\vec{v}\,')\cdot\vec{w} = \vec{v}\cdot\vec{w} + \vec{v}\,'\cdot\vec{w} \\ (\lambda\vec{v})\cdot\vec{w} = \vec{v}\cdot(\lambda\vec{w}) = \lambda(\vec{v}\cdot\vec{w}) \end{array}\right\}$$

3) $\vec{v}\cdot\vec{v}$ (que l'on note $\vec{v}^{\,2}$) est le carré de la longueur de $\vec{v}$. Il est donc strictement positif si $\vec{v}$ est non nul.

4) $\vec{v}\cdot\vec{w} = \|\vec{v}\|\,\|\vec{w}\|\cos(\vec{v},\vec{w})$ (où $\|\vec{x}\|$ désigne la longueur du vecteur $\vec{x}$). Cette propriété ne sera pas utilisée dans le présent chapitre. nous l'étudierons en détail dans les chapitres III et IV.

§1 : <u>Le groupe des isométries d'un plan</u>

Par définition, une isométrie du plan P, est une application $f : P \longrightarrow P$ telle que, pour tout couple (A,B) de points de P, on ait : $AB = f(A)f(B)$. Ce qu'on exprime en disant que f conserve les distances.

Nous connaissons déjà certaines isométries :

Les translations : Pour toute translation t, nous avons $\overrightarrow{t(A)t(B)} = \overrightarrow{AB}$, ce qui implique $t(A)t(B) = AB$.

Les symétries orthogonales : Si σ est la symétrie par rapport à la droite D, alors s est une isométrie. C'est bien connu.

Note : Dans ce qui suit nous réserverons le mot symétrie pour désigner les symétries orthogonales par rapport à des droites. Les symétries centrales seront appelées des demi-tours.

Remarque : La composée de deux isométries de P, est une isométrie de P. De même si une bijection $f : P \to P$ est une isométrie, son inverse est aussi une isométrie.

Théorème : Etant donnés trois points non alignés $A\,B\,C$ du plan P, et trois points $A'B'C'$ de P, tels que $AB = A'B'$, $BC = B'C'$ et $CA = C'A'$, il existe une isométrie f et une seule du plan P, telle que $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ et $f(C) = C'$. Celle ci peut s'écrire soit comme la composée de 2 symétries, soit comme la composée de 3 symétries.

Démonstration : Il existe une symétrie s qui envoie A sur A' (Si $A \neq A'$, s a pour axe la médiatrice de AA' ; si $A = A'$ on prend une symétrie quelconque d'axe passant par A). Posons $s(B) = B_1$ et $s(C) = C_1$.

Il existe une symétrie s' telle que $s'(A') = A'$ et $s'(B_1) = B'$ (si $B_1 \neq B'$, s' est la symétrie d'axe la médiatrice de B_1B', (qui passe par A') ; si $B_1 = B'$, s' est la symétrie d'axe $A'B_1$). Posons $s's(C) = C_2$.

Nous avons $C_2A' = CA = C'A'$ et $C_2B' = CB = C'B'$. Donc :

ou bien $C_2 = C'$, et alors $f = s'.s$ envoie A sur A', B sur B' et C sur C'.

ou bien $C_2 \neq C'$ et alors A' et B' sont sur la médiatrice de C_2C'. Soit alors s'' la symétrie d'axe cette médiatrice, posons $f = s''.s'.s$. Nous avons $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ et $f(C) = C'$.

Nous avons ainsi construit une isométrie f répondant aux conditions posées. Il nous reste à montrer qu'il n'en existe pas d'autre. Notons que f est inversible : si $f = s'.s$, alors $(s.s').f = Id$, si $f = s''.s'.s$, alors $(s.s'.s'').f = Id$. Si alors g est une isométrie qui envoie A sur A', B sur B' et C sur C', $f^{-1}.g$ est une isométrie qui laisse fixes A, B et C. Ceci implique que $f^{-1}.g = Id$, car s'il existait un M tel que $f^{-1}.g(M) \neq M$, les points A, B et C seraient sur la médiatrice de $M\, f^{-1}\circ g(M)$, ce qui est impossible puisqu'on les a supposés non alignés (Notons que c'est la seule utilisation que nous ferons de cette hypothèse). Mais dire que $f^{-1}\circ g = Id$, c'est dire que $g = f$.

<u>Conséquences de ce théorème.</u>

<u>Conséquence 1</u> : Toute isométrie est une composée de symétries. En effet soit g une isométrie, choisissons 3 points $A\,B\,C$ non alignés, il existe une unique (c'est donc g !!) isométrie qui envoie A sur $g(A)$, B sur $g(B)$ et C sur $g(C)$; et nous l'avons construite comme une composée de 2 ou 3 symétries.

<u>Conséquence 2</u> : Toute isométrie est inversible, et son inverse est une isométrie. En effet le produit $s_1 \dots s_k$ a pour inverse $s_k \dots s_1$ (car $s_1 \cdot s_1 = \dots = s_k \cdot s_k = Id$).

<u>Conséquence 3</u> : L'ensemble $G(P)$ des isométries du plan P est un sous-groupe du groupe des bijections de P. Nous venons de voir que toute isométrie est bijective, nous avons donc $G(P) \subset Bijct(P)$. Par ailleurs l'identité est une isométrie, l'inverse d'une isométrie est une isométrie, et la composée de deux isométries est une isométrie.

<u>Conséquence 4</u> : Une isométrie transforme une droite en une droite, un segment en

un segment, des droites parallèles en des droites parallèles (car les symétries possèdent ces propriétés). De même une isométrie conserve les angles (le mot angle étant pris ici au sens banal d'angle de secteurs). Une isométrie conserve les aires.

§2 : Les isométries comme applications affines

Lemme : Soit f une isométrie, et $A\,B\,C\,D$ des points tels que $\vec{AB} = \vec{CD}$, alors on a aussi $\overrightarrow{f(A)f(B)} = \overrightarrow{f(C)f(D)}$.

En effet, si I est le milieu commun à AD et BC, $f(I)$ sera le milieu commun à $f(A)f(D)$ et $f(B)f(C)$ (puisque f conserve les distances et les alignements).

Considérons maintenant une isométrie f et un vecteur $\vec{V}$. Choisissons A et B tels que $\vec{AB} = \vec{V}$; d'après le lemme ci-dessus, le vecteur $\overrightarrow{f(A)f(B)}$ est indépendant du choix de A et B; nous le noterons $\vec{f}(\vec{V})$. Ainsi à tout vecteur $\vec{V}$ du plan P, f associe un vecteur $\vec{f}(\vec{V})$. Nous avons donc défini une application $\vec{f} : \vec{P} \longrightarrow \vec{P}$, on l'appelle l'application vectorielle associée à f.

Pour tout couple $(\vec{V}, \vec{W})$ de vecteurs de P, on a $\vec{f}(\vec{V}+\vec{W}) = \vec{f}(\vec{V}) + \vec{f}(\vec{W})$. Car si $\vec{AB} = \vec{V}$ et $\vec{BC} = \vec{W}$: $\vec{f}(\vec{V}+\vec{W}) = \vec{f}(\vec{AC}) = \overrightarrow{f(A)f(C)}$
$= \overrightarrow{f(A)f(B)} + \overrightarrow{f(B)f(C)} = \vec{f}(\vec{AB}) + \vec{f}(\vec{BC}) = \vec{f}(\vec{V}) + \vec{f}(\vec{W})$

Pour tout $\vec{v}$ et tout scalaire λ, on a $\vec{f}(\lambda\vec{v}) = \lambda\vec{f}(\vec{v})$. En effet considérons ABC tels que $\vec{AB} = \vec{v}$ et $\vec{AC} = \lambda\vec{v}$, alors A, B, C sont alignés; donc $f(A), f(B), f(C)$ le sont aussi. donc il existe μ tel que $\overrightarrow{f(A)f(C)} = \mu\,\overrightarrow{f(A)f(B)}$ Puisque $AC = |\lambda|\,AB$ et $f(A)f(C) = |\mu|\,f(A)f(B)$, et que f est une isométrie, on a $|\mu| = |\lambda|$. Il reste à comparer les signes : si $\lambda < 0$, B et C sont de part et d'autre de A, donc $f(B)$ et $f(C)$ sont de part et d'autre de $f(A)$ (c'est vrai si f est une symétrie, donc aussi lorsque f est un produit de symétries), donc $\mu < 0$. De même si $\lambda > 0$, ...

Nous avons ainsi démontré que $\vec{f}$ est une application linéaire de $\vec{P}$ dans lui même.

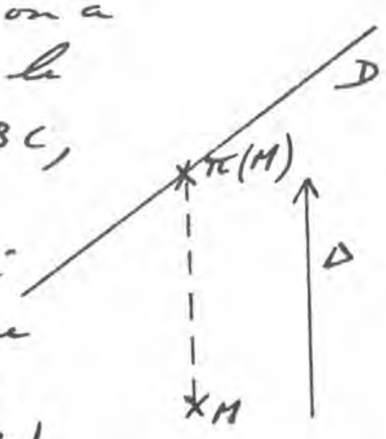
<u>Définition</u> : De façon générale nous dirons que $g : P \to P$ est une application affine, s'il existe une application linéaire $\vec{g} : \vec{P} \longrightarrow \vec{P}$ telle que, quels que soient A et B dans P, on ait : $\vec{g}(\vec{AB}) = \overrightarrow{g(A)g(B)}$.

Nous venons de démontrer que les isométries de P sont des applications affines. Mais nous connaissons d'autres applications affines:

. Les translations, car $\overrightarrow{t(A)t(B)} = \vec{AB}$ (ce sont d'ailleurs des isométries)

. Les homothéties : Si h est de rapport λ, on a $\overrightarrow{h(A)h(B)} = \lambda \overrightarrow{AB}$; donc $\vec{h}$ est la multiplication par λ.

Les projections : Soit π la projection de P sur D parallèlement à Δ. Alors π est affine. En effet si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, on a aussi $\overrightarrow{\pi(A)\pi(B)} = \overrightarrow{\pi(C)\pi(D)}$ (car le milieu I commun à AD et BC, se projette sur le milieu de $\pi(A)\pi(D)$ et de $\pi(B)\pi(C)$), ceci permet de définir $\vec{\pi}$ (comme ci-dessus pour les isométries).



On a $\vec{\pi}(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{\pi}(\vec{v})+\vec{\pi}(\vec{w})$ (cf ci-dessus pour les isométries). Et $\vec{\pi}(\lambda\vec{v}) = \lambda\vec{\pi}(\vec{v})$ s'écrit : "si $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AB}$, alors $\overrightarrow{\pi(A)\pi(C)} = \lambda \overrightarrow{\pi(A)\pi(B)}$", ou encore "si $\overline{AC} = \lambda \overline{AB}$, alors $\overline{\pi(A)\pi(C)} = \lambda \overline{\pi(A)\pi(B)}$". C'est le théorème de Thalès.

Le lecteur se convaincra facilement des propriétés suivantes (Voir aussi le chapitre VIII)

Si $f : P \to P$ et $g : P \to P$ sont affines d'applications linéaires associées $\vec{f}$ et $\vec{g}$, alors $f \circ g$ est affine d'application linéaire associée $\vec{f} \circ \vec{g}$.

Si $f : P \to P$ est affine et bijective, alors $f^{-1} : P \to P$ est affine et $\overrightarrow{f^{-1}} = (\vec{f})^{-1} : P \to P$.

§3 : Expression analytique des isométries en repère orthonormé.

Soit $f : P \to P$ une application affine, et $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère de P. Nous allons déterminer les formules qui permettent de calculer les coordonnées (X, Y) de $f(M)$, à partir des coordonnées (x, y) de M.

Pour cela nous pouvons écrire

$$\overrightarrow{Of(M)} = \overrightarrow{Of(O)} + \vec{f}(\overrightarrow{OM})$$

Puisque $\vec{f}$ est linéaire, il existe une matrice A (2×2) telle que les coordonnées (x_1, y_1) de $\vec{f}(\overrightarrow{OM})$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ de $\vec{P}$, soient données à partir des coordonnées (x, y) de $\overrightarrow{OM}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ par le produit matriciel

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Si (u, v) sont les coordonnées de $\overrightarrow{Of(O)}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$, on a alors l'égalité matricielle

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Nous allons maintenant chercher les formules de la symétrie s, par rapport à la droite D d'équation $ax + by = c$ (nous normaliserons les formules en supposant que $a^2 + b^2 = 1$). Soit $M(x, y)$ et $s(M)(X, Y)$.

Les vecteurs $\overrightarrow{MS(M)} = (X-x)\vec{i} + (Y-y)\vec{j}$ et $a\vec{i} + b\vec{j}$ sont colinéaires (et orthogonaux à D). Il existe donc λ tel que $X = x + \lambda a$ et $Y = y + \lambda b$. Le milieu I de $MS(M)$ a pour coordonnées $(x + \frac{\lambda}{2} a, y + \frac{\lambda}{2} b)$; il est sur D, donc

$$a\left(x + \frac{\lambda}{2} a\right) + b\left(y + \frac{\lambda}{2} b\right) = c$$

soit $ax + by + \frac{\lambda}{2}(a^2+b^2) = c$ (où $a^2+b^2=1$)

ou encore $\lambda = 2(c - ax - by)$

Donc :

$$X = x + 2a(c - ax - by)$$
$$Y = y + 2b(c - ax - by)$$

Ce qui s'écrit matriciellement

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2ac \\ 2bc \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-2a^2 & -2ab \\ -2ab & 1-2b^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Ces formules sont bien du type de celles qui correspondent aux applications affines $(2ac, 2bc)$ sont les coordonnées de $S(O)$

La matrice A de $\vec{S}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1-2a^2 & -2ab \\ -2ab & 1-2b^2 \end{pmatrix}$$

(puisque $a^2+b^2=1$: $1-2b^2 = -(1-2a^2)$)

Pour obtenir les formules d'une isométrie f quelconque, nous pouvons la décomposer en un produit de symétries; et composer les formules de ces symétries.

Exemple : Supposons $f = s'\circ s$, où s est la symétrie d'axe D $(x = 2)$ et s' la symétrie d'axe D' $\left(\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y = 1\right)$. D'après le calcul ci-dessus les formules de s et s' sont respectivement

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

et $$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

D'où les formules de f :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right]$$

Soit $$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Notons que, dans tous ces calculs, nous travaillons en axes orthonormés. La raison en est que, en axes orthonormés, la distance (qui est conservée par les isométries) a une expression particulièrement simple. Ceci nous donne des calculs un peu plus simples (mais pas fondamentalement différents de ceux qu'on obtiendrait dans des axes quelconques). En particulier les matrices 2×2 que l'on obtient ne sont pas quelconques; comme on va le voir.

§4 : Les matrices orthogonales 2×2

Une matrice $A = \begin{pmatrix} t & u \\ v & w \end{pmatrix}$ est dite orthogonale si $t^2+v^2=u^2+w^2=1$ et $tu+vw=0$. On remarquera que ces conditions s'écrivent aussi $A.{}^tA = I_2$ (où ${}^tA = \begin{pmatrix} t & v \\ u & w \end{pmatrix}$ est la transposée de A), ou encore ${}^tA.A = I_2$.

Notons que le produit de deux matrices orthogonales 2×2, est une matrice orthogonale 2×2. Vous pouvez le vérifier par un calcul direct, mais ceci résulte aussi de l'égalité ${}^t(AB) = {}^tB.{}^tA$: si A et B sont orthogonales, on a ${}^t(AB).(AB) = {}^tB.{}^tA.A.B = {}^tB.I_2.B = {}^tB.B = I_2$. Par ailleurs I_2 est orthogonale, et l'inverse d'une matrice orthogonale A est orthogonale (c'est ${}^tA$, et l'égalité ${}^t(A^{-1})A^{-1}$ traduit ${}^t({}^tA).{}^tA = A.{}^tA = I_2$). Tout ceci se traduit en disant que les matrices orthogonales 2×2 forment un sous-groupe du groupe $GL(2,\mathbb{R})$ du groupe de toutes les matrices 2×2 inversibles; nous le noterons $O(2)$.

Il est facile de vérifier que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1-2a^2 & -2ab \\ -2ab & 1-2b^2 \end{pmatrix}$ est orthogonale. La matrice qui correspond (toujours en axes orthonormés !!!) à une isométrie quelconque, est un produit de telles matrices; elle est donc aussi orthogonale.

Réciproquement si une application affine

a, en axes orthonormés, des formules du type $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, où A est orthogonale, alors c'est une isométrie.
En effet si $A(x,y)$ et $B(x',y')$ sont 2 points quelconques, les coordonnées de leurs transformés sont

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + A\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

D'où les coordonnées de $\overrightarrow{f(A)f(B)}$

$$\begin{pmatrix} X'-X \\ Y'-Y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x'-x \\ y'-y \end{pmatrix}$$

Si $A = \begin{pmatrix} t & u \\ v & w \end{pmatrix}$, alors $X'-X = t(x'-x) + u(y'-y)$ et $Y'-Y = v(x'-x) + w(y'-y)$, donc

$$\begin{aligned} \overrightarrow{f(A)f(B)}^2 &= (X'-X)^2 + (Y'-Y)^2 \\ &= [t(x'-x)+u(y'-y)]^2 + [v(x'-x)+w(y'-y)]^2 \\ &= (t^2+v^2)(x'-x)^2 + (u^2+w^2)(y'-y)^2 \\ &\quad + 2(tu+vw)(x'-x)(y'-y) \\ &= (x'-x)^2 + (y'-y)^2 = \overrightarrow{AB}^2 \end{aligned}$$

pourvu que A soit orthogonale.

<u>Remarque finale</u> : Pour poursuivre l'étude des isométries planes nous avons besoin de la notion d'angle (orienté de 2 vecteurs). Dès lors deux attitudes sont possibles. Ou bien on considère cette notion comme intuitive, et on s'en sert pour étudier les isométries. Ou bien on se sert des formules des isométries pour les classifier, et on en

déduit une définition abstraite des angles orientés, du cosinus, du sinus, ...
Nous ferons successivement ces deux études.
Dans le chapitre III, nous donnerons dans un "rappel sur les angles orientés" les propriétés intuitives dont nous avons besoin, puis (ces propriétés étant "admises") nous les utiliserons pour étudier les isométries.
Dans le chapitre IV nous donnerons, par un calcul direct sur les matrices orthogonales, une classification des isométries; nous en déduirons une définition des angles orientés. Ces deux études sont donc indépendantes, mais elles mènent aux mêmes résultats.

Exercices sur le chapitre II

Exercice 1 (Le produit de 2 symétries)

Soit s et s' les symétries par rapport à des droites D et D'.

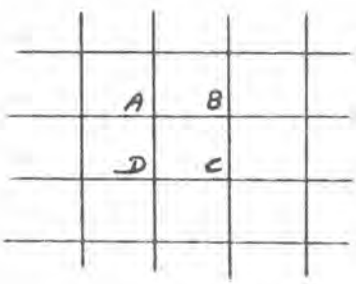
a) Si D et D' sont parallèles (distinctes) $s \circ s'$ n'a pas de point fixe. Si D et D' sont sécantes en O, $s \circ s'$ a un seul point fixe.

b) Si D et D' sont parallèles, $s \circ s'$ est une translation.

c) Si D et D' sont perpendiculaires, $s \circ s'$ est le demi-tour (symétrie centrale) autour de O. De plus $s' \circ s = s \circ s'$.

Exercice 2

Le quadrilatère $ABCD$ est un rectangle. On note s_{AB}, s_{BC}, s_{CD} et s_{DA} les symétries d'axes AB, BC, CD et DA.



Montrer que $f = s_{AB} \circ s_{BC} \circ s_{CD} \circ s_{DA}$ est une translation, dont on précisera le vecteur. On pourra commencer par chercher les images de D, de A, ... par f.

Exercice 3 :

Soit s, s' et s'' trois symétries dont les axes D, D' et D'' sont parallèles. Montrer que $f = s \circ s' \circ s''$ est une symétrie dont l'axe est parallèle à D, D' et D''.

Exercice 4 : Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on considère les points $A\begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix}$, $B\begin{vmatrix} 2 \\ 3 \end{vmatrix}$, $A'\begin{vmatrix} 0 \\ 2 \end{vmatrix}$ et $B'\begin{vmatrix} \sqrt{7}/2 \\ 3/2 \end{vmatrix}$

a) Écrire les formules de la symétrie S par rapport à la médiatrice de AA'. Calculer $S(B)$

b) Écrire les formules de la symétrie S' par rapport à la médiatrice de $B'S(B)$

c) Écrire les formules de $S' \circ S$.

d) $S' \circ S(A) = A'$ et $S' \circ S(B) = B'$; il existe une autre isométrie qui envoie A sur A' et B sur B'. Écrire les formules.

Exercice 5 (Translations et demi-tours)

a) Démontrer que le produit de 2 demi-tours est une translation.

b) Soit $\mathcal{G}(P)$ l'ensemble des applications de P dans P formé des demi-tours, des translations et de l'identité. Montrer que $\mathcal{G}(P)$ est un sous groupe de $\mathcal{C}(P)$.

c) Montrer que $\mathcal{G}(P) = \mathcal{D}(P) \cap \mathcal{C}(P)$.

Exercice 6 (Axes et centres de symétrie d'une figure bornée)

a) Soit F une figure ayant un axe de symétrie Δ, et un centre de symétrie O.

Démontrer que le symétrique de O par rapport à Δ, est un centre de symétrie de F, et Δ' (symétrique de Δ par rapport à O) est un axe de symétrie de F. En déduire que, si O n'est pas sur D, la figure F a une infinité de centres et d'axes de symétrie.

b) On suppose F bornée (borné signifie "contenu dans un disque"). Montrer que si F a un axe de symétrie Δ, et un centre de symétrie O, alors O est sur Δ.

c) En s'inspirant de a) montrer que si une figure F a deux centres de symétrie distincts, elle en a une infinité. Montrer que ceci est impossible si F est bornée.

d) En s'inspirant de a) montrer que si une figure F a deux axes de symétrie parallèles (distincts), elle en a une infinité. Montrer que ceci est impossible si F est bornée.

Exercice 7

Soit D et D' deux droites, et soit A et A' des points respectivement de D et de D'.

Combien existe-t-il d'isométries f telles que $f(A) = A'$ et $f(D) = D'$?

Exercice 8

a) Soit s une symétrie et f une isométrie. Montrer que $f \circ s \circ f^{-1}$ est une symétrie. Quelle relation y a-t-il entre les axes de s et de $f \circ s \circ f^{-1}$?

b) Mêmes questions lorsque s est une symétrie et f une dilatation.

Exercice 9

Soit D une droite, déterminer toutes les isométries f telles que $f(D) = D$

Exercice 10

Soit X un sous-ensemble de P, on note G_X le sous ensemble de $G(P)$ formé des isométries f telles que $f(X) = X$.

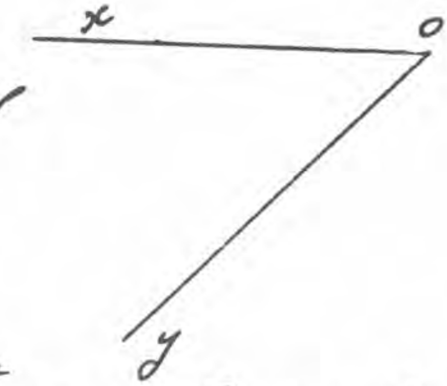
a) Montrer que G_X est un sous groupe de $G(P)$

b) Tout élément de G_X définit une bijection de X dans X, donc on a une application $\varphi : G_X \longrightarrow \text{Biject}(X)$. Montrer que c'est un homomorphisme

c) Montrer que φ est injective dès que X contient 3 points non alignés. Existe-t-il des ensembles X pour lesquels φ n'est pas injective ?

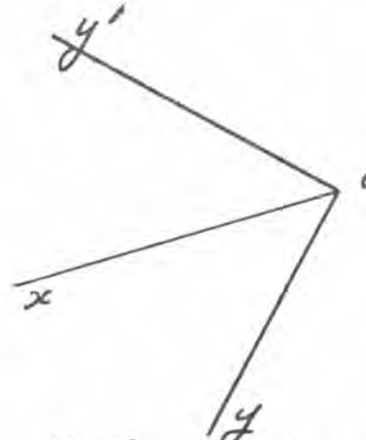
Chapitre III : Classification des isométries planes à partir d'une notion intuitive d'angle orienté.

§ 1 : "Rappels" sur les angles



Fixons une fois pour toutes un point O dans le plan P, et considérons deux demi-droites Ox et Oy d'origine O. De quel angle faut-il faire tourner Ox pour l'amener sur Oy ? S'il s'agit des demi-droites de la figure ci-contre, la réponse est 45° (on utilise en général le radian comme unité d'angle, et on ne mentionne pas l'unité, ainsi on écrira $\frac{\pi}{4}$ au lieu de 45°).

Mais Ox étant connu, si je dis que "l'angle de Ox et de Oy vaut $\frac{\pi}{4}$", je ne connais pas Oy. Parce qu'il existe deux demi-droites Oy_1 et Oy_2 qui font un angle de $\frac{\pi}{4}$ avec Ox. Nous allons donc choisir un sens de rotation privilégié, que nous appellerons sens direct. Traditionnellement le sens direct est le sens inverse de celui des aiguilles d'une montre. En faisant tourner Ox de $\frac{\pi}{4}$ dans le sens direct, on l'amène sur Oy; on exprimera ceci en disant que "la mesure principale de l'angle orienté de Ox et de Oy est $\frac{\pi}{4}$". En faisant tourner Ox de $\frac{\pi}{4}$ dans le sens rétrograde (opposé au sens direct), on obtient Oy'; on exprimera ceci en disant que "la mesure principale de l'angle orienté de Ox et de Oy' est $-\frac{\pi}{4}$".



Mais si l'on fait tourner Ox de $\frac{9\pi}{4}$ dans le sens direct on obtient aussi Oy; on a tout simplement "fait un tour de trop" (puisque $\frac{9\pi}{4} = 2\pi + \frac{\pi}{4} = 1$ tour $+ \frac{\pi}{4}$). De même si l'on fait tourner Ox de $\frac{\pi}{4} + 4\pi$, de $\frac{\pi}{4} + 6\pi$, ... dans le sens direct. Pour obtenir Oy on peut aussi faire tourner Ox de $-\frac{7\pi}{4}$ $(= \frac{\pi}{4} - 2\pi)$ – c'est à dire de $\frac{7\pi}{4}$ dans le sens rétrograde. Les nombres $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4} + 2\pi$, $\frac{\pi}{4} + 4\pi$, ... $\frac{\pi}{4} + 2n\pi$ (n entier ≥ 0), $\frac{\pi}{4} - 2\pi$, ... $\frac{\pi}{4} - 2n\pi$ (n entier ≥ 0) sont appelés les mesures de l'angle orienté de Ox et Oy; il y en a une infinité. On note ceci en écrivant $(Ox, Oy) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ (dans cette notation k est un entier positif ou négatif). Et ceci se lit: "l'angle orienté de Ox et Oy vaut $\frac{\pi}{4}$ à 2π près".

<u>La relation de Chasles</u> : Si en faisant tourner ox de α ($\alpha > 0$ ou < 0) - dans le sens direct - j'obtiens oy ; et si en faisant tourner oy de β ($\beta > 0$ ou < 0) - dans le sens direct - j'obtiens oz ; alors en faisant tourner ox de $\alpha + \beta$ - dans le sens direct - j'obtiens oz. Autrement dit la somme d'une mesure de l'angle orienté de ox et de oy, et d'une mesure de l'angle orienté de oy et de oz, est une mesure de l'angle orienté de ox et de oz. Ceci s'écrit :

$$(ox, oy) + (oy, oz) = (ox, oz) \text{ modulo } 2\pi$$

"Modulo 2π" signifie que si l'on choisit au hasard des mesures de chacun des angles qui interviennent, on n'obtient pas deux nombres égaux, mais deux nombres qui diffèrent d'un multiple entier de 2π.

On notera que parmi l'infinité de mesures de (ox, oy), nous avons pu en distinguer une, la mesure principale (qui est la seule $> -\pi$ et $\leq +\pi$). Mais cette distinction est artificielle (et sans grand intérêt), puisque la somme des mesures principales de (ox, oy) et de (oy, oz) n'a aucune raison d'être la mesure principale de (ox, oz).

<u>Angles de vecteurs</u>: Tout vecteur $\vec{v}$ non nul définit une demi-droite d'origine o

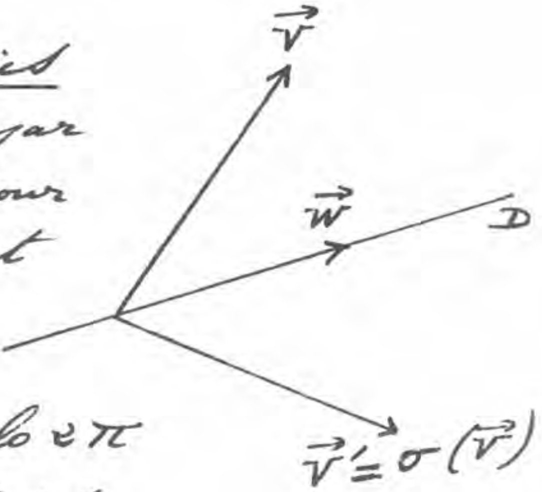
(formée des M tels que $\overrightarrow{OM} = \lambda \vec{V}$ $(\lambda > 0)$). ceci nous permet de parler de l'angle orienté de deux vecteurs non nuls (c'est l'angle des demi-droites d'origine O définies par ces vecteurs).

<u>Notons les relations</u> :

$$(\vec{V}, \vec{W}) = -(\vec{W}, \vec{V}) \text{ modulo } 2\pi.$$
$$(-\vec{V}, \vec{W}) = (\vec{V}, \vec{W}) + \pi \text{ modulo } 2\pi$$
$$(\vec{V}, -\vec{W}) = (\vec{V}, \vec{W}) + \pi \text{ modulo } 2\pi$$

<u>Angles orientés et symétries</u>

Si σ est la symétrie par rapport à la droite D, pour tout vecteur $\vec{V}$, et pour tout vecteur $\vec{W}$ porté par D,



on a :

$$(\vec{V}, \vec{W}) = (\vec{W}, \vec{\sigma}(\vec{V})) \text{ modulo } 2\pi$$

Ainsi pour deux vecteurs quelconques, nous aurons

$$\begin{aligned}(\vec{\sigma}(\vec{X}), \vec{\sigma}(\vec{Y})) &= (\vec{\sigma}(\vec{X}), \vec{W}) + (\vec{W}, \vec{\sigma}(\vec{Y})) \text{ modulo } 2\pi \\ &= (\vec{W}, \vec{X}) + (\vec{Y}, \vec{W}) \text{ modulo } 2\pi \\ &= (\vec{Y}, \vec{X}) \text{ modulo } 2\pi.\end{aligned}$$

§2 : <u>Angles orientés et déplacements</u>

Soit f une isométrie ; nous savons que f s'écrit comme un produit de symétries : $f = \sigma_1 \ldots \sigma_n$. Choisissons deux vecteurs $\vec{X}$ et $\vec{Y}$, et appliquons (n fois) la dernière formule du §1.

$$(\vec{f}(\vec{x}), \vec{f}(\vec{y})) = (\vec{\sigma_1} \dots \vec{\sigma_n}(\vec{x}), \vec{\sigma_1} \dots \vec{\sigma_n}(\vec{y})) \text{ modulo } 2\pi$$
$$= \begin{cases} (\vec{x}, \vec{y}) \text{ modulo } 2\pi & \text{si } n \text{ pair} \\ (\vec{y}, \vec{x}) \text{ modulo } 2\pi & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$$

Ainsi : ou bien quels que soient $\vec{x}$ et $\vec{y}$, on a $(\vec{f}(\vec{x}), \vec{f}(\vec{y})) = (\vec{x}, \vec{y})$ modulo 2π, ou bien, quels que soient $\vec{x}$ et $\vec{y}$, on a $(\vec{f}(\vec{x}), \vec{f}(\vec{y})) = (\vec{y}, \vec{x})$ modulo 2π. Notons que dans le premier cas toute décomposition de f en produit de symétries comporte un nombre pair de symétries ; dans le second cas un nombre impair.

On appelle déplacements les isométries dont les décompositions en produits de symétries comportent un nombre pair de symétries, c'est à dire celles qui conservent les angles. Nous noterons $\mathcal{S}\mathcal{G}(P)$ l'ensemble de tous les déplacements du plan P.

C'est un sous groupe du groupe $\mathcal{G}(P)$ des isométries de P. En effet d'une part la composée de deux déplacements est un déplacement, d'autre part l'inverse d'un déplacement (l'inverse de $f = \sigma_1 \dots \sigma_n$ est $f^{-1} = \sigma_n \dots \sigma_1$) est un déplacement, enfin Id est un déplacement.

Les isométries qui ne sont pas des déplacements (il en existe, par exemple les symétries) sont appelées des antidéplacements. La composée de deux antidéplacements est un déplacement. Ceci implique que $S\mathcal{G}(P)$ est un sous groupe distingué de $\mathcal{G}(P)$, et que le groupe quotient a deux classes : l'une est formée des déplacements, l'autre des antidéplacements.

<u>Remarque</u> : Soit F une figure et g une isométrie. Prenons une feuille de calque et décalquons F en une figure F_1. Puis essayons d'appliquer F_1 sur $g(F)$.

Si g est la symétrie par rapport à une droite D, décalquons deux points A et B de D en A_1 et B_1 ; puis retournons la feuille de calque de façon à amener A_1 sur A et B_1 sur B. Alors F_1 s'applique sur $g(F)$.

Si g est le produit de 2 symétries, nous devrons ainsi retourner 2 fois la feuille de calque, ce qui revient à ne pas la retourner du tout. Autrement dit nous amènerons F_1 sur $g(F)$ par simple glissement de la feuille.

De façon générale, si g est un déplacement, on amène F_1 sur $g(F)$ par glissement de la feuille. Si g est un antidéplacement il faut la retourner.

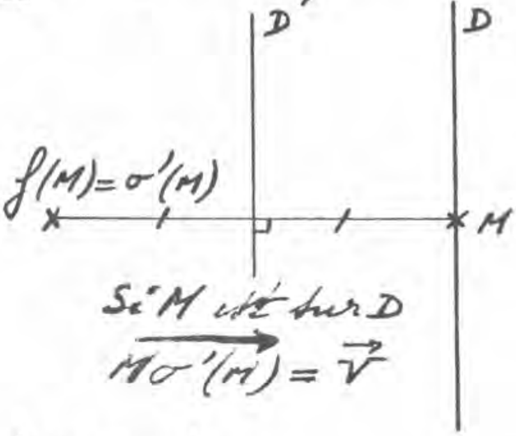
§4 : Les différents types de déplacements

Nous savons (chap II) que toute isométrie est le produit de 2 ou de 3 symétries. Les déplacements sont donc les isométries qui sont le produit de 2 symétries.

Soit donc $f = \sigma'\sigma$ où σ et σ' sont les symétries par rapport à deux droites D et D'. Trois cas sont possibles

• Si $D = D'$, alors $\sigma' = \sigma = \sigma^{-1}$ et $f = Id$.

• Si D et D' sont parallèles (distinctes), alors f est une translation. Pour nous en convaincre choisissons des axes orthonormés tels que D et D' aient pour équations $x = a$ et $x = a'$. Alors les formules de σ et de σ' s'écrivent



$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2a - x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2a' - x \\ y \end{pmatrix}$$

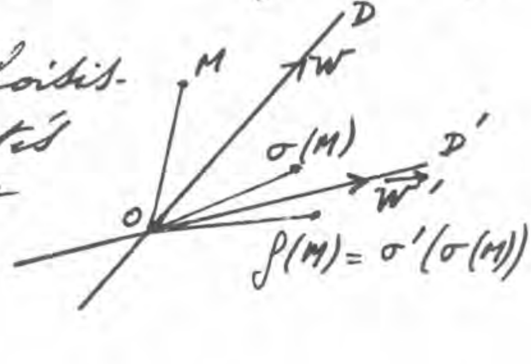
Donc celles de f s'écrivent :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2a' - 2a + x \\ y \end{pmatrix}$$

ce sont les formules d'une translation, les coordonnées du vecteur $\vec{V}$ de cette translation sont $(2a' - 2a, 0)$.

• Si D et D' sont sécantes en un point O, alors f est une rotation.

Pour nous en convaincre, choisissons des vecteurs $\vec{W}$ et $\vec{W}'$ portés par D et par D'. Pour tout point M nous aurons :



$$(\overrightarrow{OM},\vec{w}) = (\vec{w},\overrightarrow{O\sigma(M)}) \text{ modulo } 2\pi$$
$$(\overrightarrow{O\sigma(M)},\vec{w}') = (\vec{w}',\overrightarrow{O\sigma'\sigma(M)}) \text{ modulo } 2\pi$$

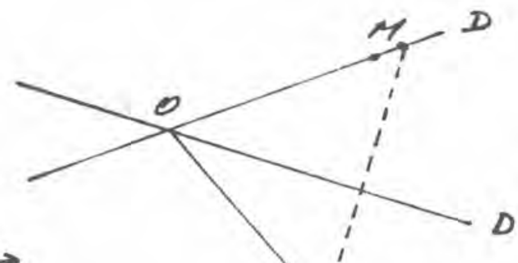
donc :

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{O\sigma'\sigma(M)}) &= (\overrightarrow{OM},\vec{w}) + (\vec{w},\vec{w}') + (\vec{w}',\overrightarrow{O\sigma'\sigma(M)}) \text{ modulo } 2\pi \\ &= (\vec{w},\overrightarrow{O\sigma(M)}) + (\vec{w},\vec{w}') + (\overrightarrow{O\sigma(M)},\vec{w}') \text{ modulo } 2\pi \\ &= 2(\vec{w},\vec{w}') \text{ modulo } 2\pi .\end{aligned}$$

Donc $f(M) = \sigma'\sigma(M)$ est obtenu en faisant tourner M autour de O d'un angle égal à 2 fois l'angle de $\vec{W}$ et $\vec{W}'$.

On notera qu'il y a un arbitraire dans le choix de $\vec{W}$ et $\vec{W}'$: c'est leur sens. Si on change le sens de l'un d'eux l'angle de $\vec{W}$ et $\vec{W}'$ est modifié d'un demi-tour. Mais l'angle de la rotation est le double, on retrouve donc bien le même.

Notons que si M est sur la droite D, l'angle de la rotation est aussi l'angle de $\overrightarrow{OM}$ et de $\overrightarrow{O\sigma'(M)}$.



§5 : Etude de la composée de deux déplacements

Etant donnés deux déplacements dont nous connaissons les éléments fondamentaux (vecteur pour une translation, centre et angle pour une rotation), comment déterminer les éléments fondamentaux de leur composé ?

Il y a cinq cas de figure.

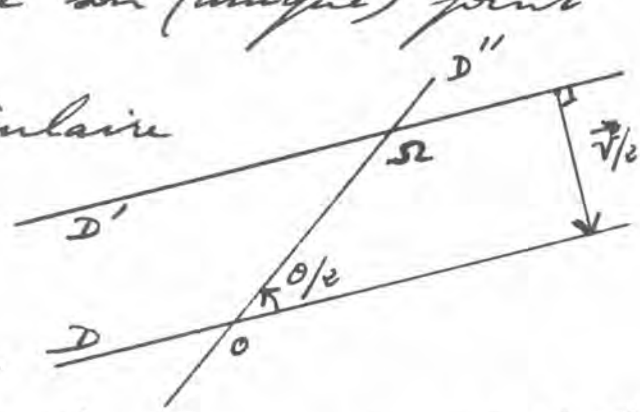
Premier cas : Les deux déplacements sont des translations, alors la composée est une translation - C'est bien connu.

Deuxième cas : $f = r_{O,\theta} \cdot t_{\vec{v}}$?

Pour tout vecteur $\vec{x}$, on a

$$(\vec{x}, \vec{f}(\vec{x})) = (\vec{x}, \vec{t}_{\vec{v}}(\vec{x})) + (t_{\vec{v}}(\vec{x}), \vec{f}(\vec{x})) \text{ modulo } 2\pi$$
$$= (t_{\vec{v}}(\vec{x}), \vec{r}_{O,\theta} \cdot \vec{t}_{\vec{v}}(\vec{x})) \text{ modulo } 2\pi$$
$$= \theta \text{ modulo } 2\pi$$

Par conséquent f est une rotation de même angle que $r_{O,\theta}$. Pour déterminer son centre nous allons construire son (unique) point invariant.

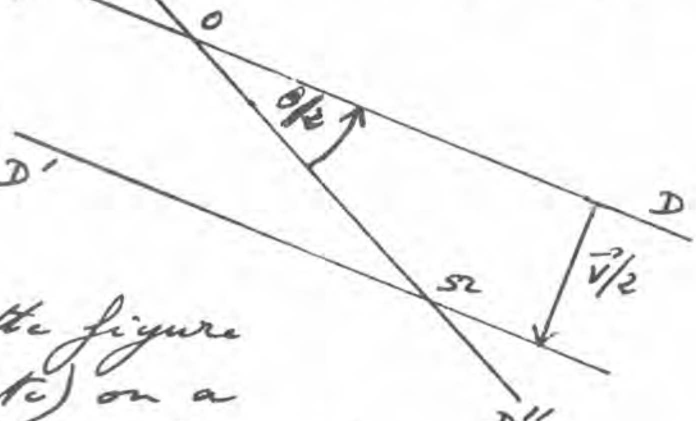


Soit D la perpendiculaire au vecteur $\vec{v}$ qui passe par O. Alors (cf: § 4) il existe une droite D' parallèle à D et une droite D'' passant par O, et telles que $r_{O,\theta} = \sigma_{D''} \cdot \sigma_D$ et $t_{\vec{v}} = \sigma_D \cdot \sigma_{D'}$ (figure ci-dessus). Alors $f = (\sigma_{D''} \cdot \sigma_D) \cdot (\sigma_D \cdot \sigma_{D'}) = \sigma_{D''} \cdot \sigma_{D'}$ et le point invariant de f est l'intersection Ω de D'' et de D'.

Troisième cas : $f = t_{\vec{v}} \cdot r_{O,\theta}$?

On montre (comme ci-dessus) que f est

une rotation d'angle θ. Et on construit (comme ci-dessus) son centre en décomposant $r_{0,\theta}$ et $t_{\vec{v}}$ sous la forme $t_{\vec{v}} = \sigma_{D'} \cdot \sigma_D$ et $r_{0,\theta} = \sigma_D \cdot \sigma_{D''}$.



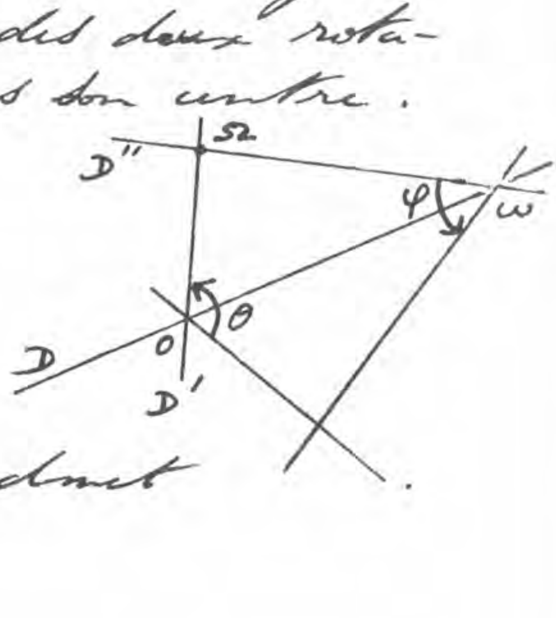
Exercice : Dans cette figure (et dans la précédente) on a marqué l'angle $\theta/2$. Pourquoi ceci est il – stricto sensu – incorrect ? (Si vous ne trouvez pas la réponse, lisez le chapitre VI, § 5)

<u>Quatrième cas</u> : $f = r_{0,\theta} \cdot r_{\omega,\varphi}$? (lorsque $\theta + \varphi \neq 0$ modulo 2π)

Pour tout vecteur $\vec{X}$, nous avons

$$(\vec{v}, \vec{f}(\vec{v})) = (\vec{v}, \vec{r}_{0,\theta}(\vec{v})) + (r_{0,\theta}(\vec{v}), \vec{f}(\vec{v})) \text{ modulo } 2\pi$$
$$= \theta + \varphi \text{ modulo } 2\pi$$

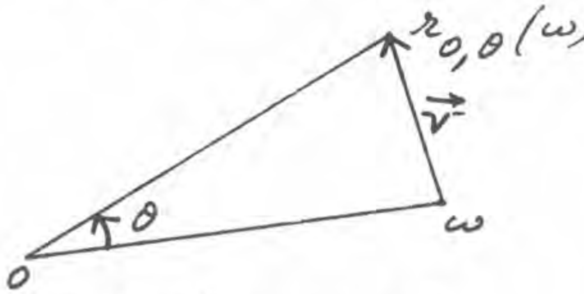
Ainsi f est une rotation dont l'angle est la somme des angles des deux rotations données. Déterminons son centre. Pour cela notons D la droite $O\omega$. Nous allons déterminer D' et D'' telles que $r_{0,\theta} = \sigma_{D'} \cdot \sigma_D$ et $r_{\omega,\varphi} = \sigma_D \cdot \sigma_{D''}$ (voir figure ci-contre, qui admet



D comme axe de symétrie). On a alors $f = \sigma_{D'} \circ \sigma_{D''}$, donc Ω est le centre de la rotation f.

<u>Cinquième cas</u> : $f = r_{O,\theta} \circ r_{\omega,\varphi}$? (lorsque $\theta + \varphi = 0$ modulo 2π)

Le même calcul que précédemment nous montre que f est une translation. Son vecteur est clairement $\vec{V} = \overrightarrow{\omega\, r_{O,\theta}(\omega)}$



§ 6 : Les différents types d'anti-déplacements

Puisque toute isométrie est le produit d'au plus 3 symétries, nous pouvons affirmer que tout antidéplacement est

- soit une symétrie
- soit le produit de 3 symétries

Nous sommes donc amenés à étudier les produits de 3 symétries. Pour cela nous utiliserons le lemme suivant

Lemme : Soit σ et σ' des symétries dont les axes D et D' sont perpendiculaires. Alors $\sigma \circ \sigma' = \sigma' \circ \sigma$, et ce déplacement est le demi-tour autour de l'intersection de D et D' (c'est à dire la symétrie centrale, de centre ce point).

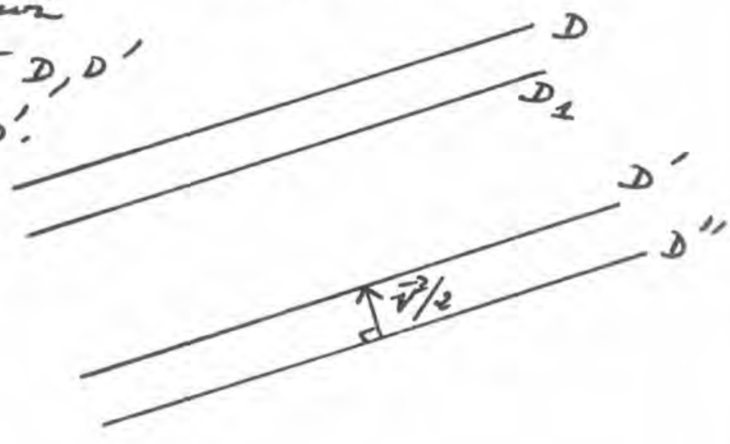
C'est une conséquence immédiate de l'étude du produit de 2 symétries d'axes concourants, faite au §4.

<u>Etude des composées de 3 symétries.</u>

Soit $f = \sigma.\sigma'.\sigma''$, où σ, σ' et σ'' sont des symétries d'axes respectifs D, D', D''. Nous distinguerons 3 cas.

<u>Premier cas</u> : D, D' et D'' sont parallèles

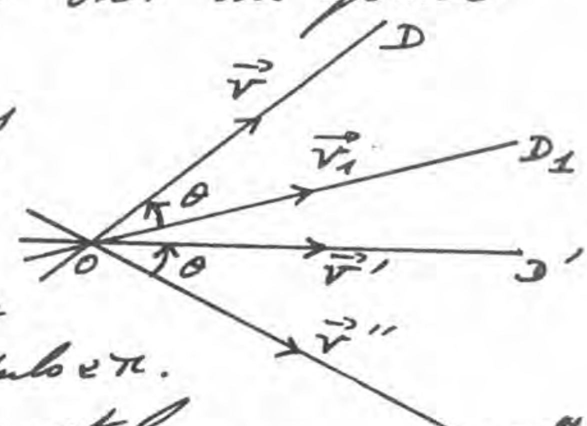
Soit $t_{\vec{v}/2}$ la translation perpendiculairement à D, D' et D'' qui amène D'' sur D'.



Nous savons (cf : §4) que $\sigma'.\sigma'' = t_{\vec{v}}$. Soit $D_1 = t_{-\vec{v}/2}(D)$ et σ_1 la symétrie par rapport à D_1. On a de même $\sigma_1.\sigma = t_{-\vec{v}}$. Donc $\sigma_1.f = (\sigma_1.\sigma).(\sigma'.\sigma'') = t_{-\vec{v}}.t_{\vec{v}} = Id$. Il en résulte que f est l'inverse de σ_1, c'est à dire σ_1.

<u>Deuxième cas</u> : D, D' et D'' ont un point commun O.

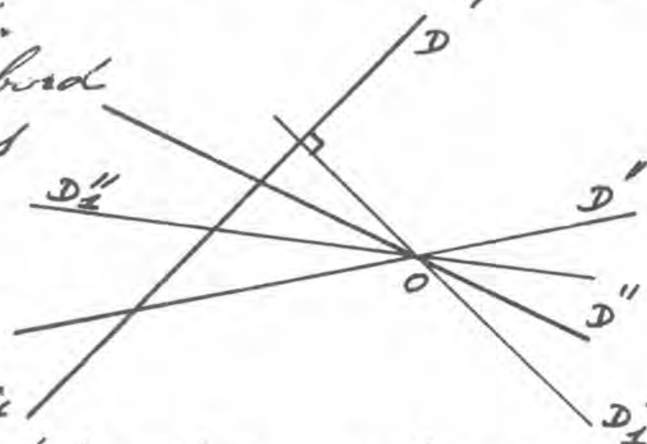
Choisissons des vecteurs non nuls $\vec{v}, \vec{v}', \vec{v}''$ portés respectivement par D, D' et D''. Soit $\vec{v}_1$ un vecteur tel que $(\vec{v}, \vec{v}_1) = (\vec{v}', \vec{v}'')$ modulo 2π.



Alors (d'après le §4) $\sigma_1.\sigma$ est la rotation de centre O et d'angle

$2(\vec{V},\vec{V_1})$ modulo 2π; de même $\sigma'.\sigma''$ est la rotation de centre O et d'angle $2(\vec{V''},\vec{V'})$ modulo 2π. Donc $\sigma_1.\sigma.\sigma'.\sigma'' = \sigma_1.f$ est la rotation de centre O et d'angle $2(\vec{V},\vec{V_1}) + 2(V'',V')$ modulo $2\pi = 0$ modulo 2π; c'est donc l'identité. Ainsi $f = \sigma_1$.

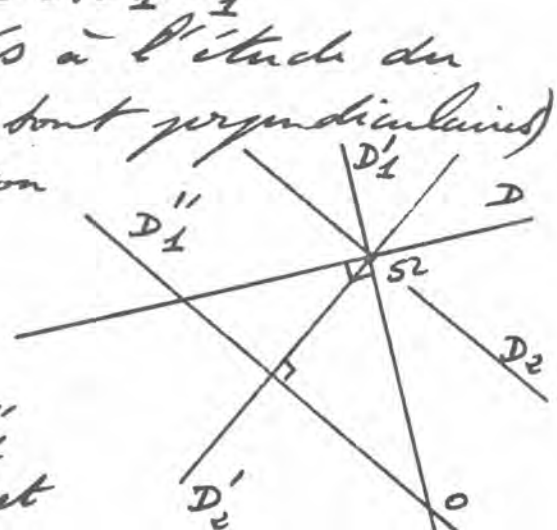
<u>Troisième cas</u>: D, D' et D'' ne sont ni parallèles ni concourantes.



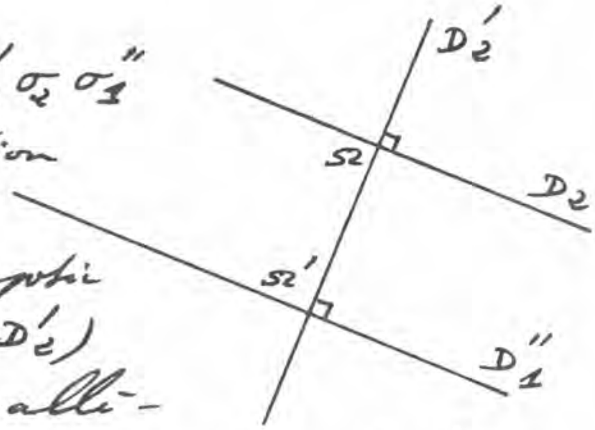
Nous supposerons d'abord que D' et D'' sont sécantes en un point O. Notons alors D'_1 la perpendiculaire à D passant par O, et σ'_1 la symétrie d'axe D'_1. Nous savons (deuxième cas, ci-dessus) que $\sigma''_1 = \sigma'_1.\sigma'.\sigma''$ est la symétrie par rapport à une droite D''_1 passant par O. Nous avons alors:

$$f = \sigma.\sigma'.\sigma'' = \sigma.\sigma'_1.\sigma'_1.\sigma'.\sigma'' = \sigma.\sigma'_1.\sigma''_1$$

(Nous sommes ainsi ramenés à l'étude du cas où les 2 "premiers" axes sont perpendiculaires)



Notons Ω l'intersection de D et de D'_1. Notons D'_2 la perpendiculaire à D''_1 passant par Ω, et D_2 la parallèle à D''_1 passant par Ω. Notons σ'_2 et σ_2 les symétries correspondantes. D'après le lemme $\sigma.\sigma'_1 = \sigma_2.\sigma'_2 = \sigma'_2.\sigma_2$. Donc



$f = \sigma\cdot\sigma'_1\cdot\sigma''_1 = \sigma_2\sigma'_2\sigma''_1 = \sigma'_2\sigma_2\sigma''_1$

Or $\sigma_2\cdot\sigma''_1$ est la translation de vecteur $2\overrightarrow{\Omega'\Omega}$ (cf: §4). Donc f est la composée d'une symétrie (d'axe D'_2) et d'une translation parallèlement à cet axe (notons que ces deux transformations commutent). C'est ce qu'on appelle une symétrie glissée.

Il resterait à envisager le cas où D' et D'' sont parallèles. Les droites D et D' ne peuvent alors être parallèles (car on serait dans le premier cas). Alors on applique la construction ci-dessus à $f^{-1} = \sigma''\sigma'\sigma$, en remarquant que l'inverse d'une symétrie glissée est une symétrie glissée.

Nous avons ainsi démontré que les antidéplacements sont

- les symétries
- les symétries glissées.

§7 : La critique du présent chapitre

Voir §7 du chapitre IV.

Exercices sur le chapitre III

Exercice 1

Soit ABC un triangle isocèle rectangle en A. Soit $\sigma_{AB}, \sigma_{AC}, \sigma_{BC}$ les symétries par rapport aux côtés AB, AC et BC.

a) $f = \sigma_{AB}\sigma_{AC}\sigma_{BC}$ est une symétrie glissée. Quel est son axe ? Quel est son vecteur ?

b) Même question pour $\sigma_{AB}\sigma_{BC}\sigma_{CA}$.

c) Soit $h = \sigma_{AB}\sigma_{BC}\sigma_{CA}\sigma_{AB}$ et $k = \sigma_{BC}\sigma_{CA}$. Montrer que h et k sont des rotations et que leurs centres sont symétriques par rapport à AB.

Exercice 2

Soit ABC un triangle équilatéral, soit ρ la rotation de centre A qui envoie B sur C, soit ρ' la rotation de centre B qui envoie C sur A.

a) Qu'est ce que $f = \rho' \circ \rho$?

b) Qu'est ce que $g = \rho \circ \rho'$?

Exercice 3 (Les isométries du triangle équilatéral)

Soit ABC un triangle équilatéral. Soit $\mathcal{G}$ l'ensemble des isométries f qui envoient l'ensemble $\{A, B, C\}$ sur lui même.

a) Montrer que $\mathcal{G}$ est un sous groupe de $G(P)$

b) Déterminer les symétries de $\mathcal{G}$.

c) Déterminer tous les éléments de $\mathcal{G}$ (il y en a 6).

d) Montrer que $\mathcal{G}$ ne contient pas d'autre élément que les 6 que l'on a obtenus ci-dessus (s'inspirer de la question c de l'exercice 10 du chapitre II)

Exercice 4 (Isométries du pentagone régulier)

Soit ABCDE un pentagone régulier. On note $\mathcal{G}$ l'ensemble des isométries qui envoient l'ensemble $\{A,B,C,D,E\}$ sur lui-même. Alors $\mathcal{G}$ est un sous groupe de $\mathcal{G}(P)$

a) Montrer que $\mathcal{G}$ contient 5 symétries

b) Montrer que $\mathcal{G}$ contient 5 déplacements

c) Montrer que $\mathcal{G}$ ne contient pas d'autre élément que les 10 que l'on a ainsi déterminés.

Exercice 5

Soit ABC un triangle équilatéral. On note σ_{AB}, σ_{BC} et σ_{CA} les symétries par rapport à AB, BC et CA.

Alors $f = \sigma_{AB} \circ \sigma_{BC} \circ \sigma_{CA}$ est une symétrie glissée. Quel est son axe ? Quel est son vecteur ?

Exercice 6

Soit t la translation de vecteur $\vec{v}$. Déterminer toutes les isométries f telles que $f \circ f = t$.

Exercice 7

Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe. On construit extérieurement à ce quadrilatère les triangles ABA', BCB', CDC' et DAD' isocèles rectangles en A', B', C' et D'. On note $\rho_{A'}$, $\rho_{B'}$, $\rho_{C'}$ et $\rho_{D'}$ les rotations de centres respectifs A', B', C' et D' et qui envoient respectivement A sur B, B sur C, C sur D et D sur A.

a) Qu'est ce que $\rho_{D'} \circ \rho_{C'} \circ \rho_{B'} \circ \rho_{A'}$

b) Montrer que les rotations $\rho_{B'} \circ \rho_{A'}$ et $\rho_{D'} \circ \rho_{C'}$ ont pour centre le milieu de AC

c) En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{A'C'}$ et $\overrightarrow{B'C'}$ sont perpendiculaires et ont même longueur.

Exercice 8

Soit ABC un triangle. On construit, extérieurement à ABC, des triangles équilatéraux ABC', BCA' et CAB'. Soit C'', A'' et B'' les centres de ces triangles. On note $\rho_{C''}$, $\rho_{A''}$ et $\rho_{B''}$ les rotations de centres respectifs C'', A'' et B'', et qui envoient respectivement A sur B, B sur C et C sur A.

a) Qu'est ce que $\rho_{B''} \circ \rho_{A''} \circ \rho_{C''}$?

b) En déduire que le triangle $A''B''C''$ est équilatéral.

c) Montrer que les segments $A'C$, $B'C$ et $C'B$ ont même longueur.

Exercice 9

On considère deux droites distinctes D et D', et un point A qui n'est sur aucune de ces droites. Construire un triangle équilatéral ABC tel que B soit sur D et C sur D'.

Est il possible qu'il y ait une infinité de solutions ? Est il possible qu'il y en ait une seule ? Est il possible qu'il n'y en ait aucune ?

Exercice 10

Soit ρ une rotation et s une symétrie, montrer que $s\rho s$ est une rotation. Construire son centre. Quel est son angle ?

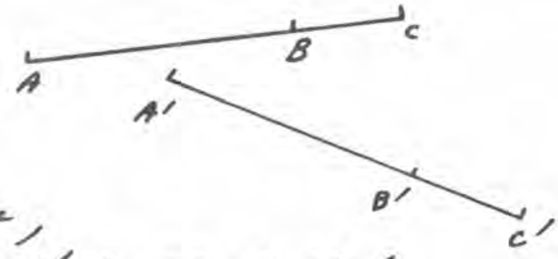
Exercice 11

Soit A, B, C trois points alignés, et soit f une isométrie. Montrer que les milieux de $Af(A)$, $Bf(B)$ et $Cf(C)$ sont alignés. On pourra envisager d'abord le cas où f est un antidéplacement.

Exercice 12

Soit s, s' et s'' les symétries d'axes D, D' et D''. Montrer que si $s \circ s' \circ s''$ est une symétrie, alors ou bien D, D', D'' sont parallèles, ou bien D, D', D'' ont un point en commun.

<u>Exercice 13</u>



Dans la figure ci-contre ABC sont alignés dans cet ordre, ainsi que $A'B'C'$. Les droites AB et $A'B'$ ne sont pas parallèles. De plus $AB = A'B'$ et $BC = B'C'$.

a) Démontrer que les médiatrices des segments AA', BB' et CC' ont un point en commun.

b) Que se passerait-il si les droites AB et $A'B'$ étaient parallèles.

<u>Exercice 14</u> : On donne n points $I_1, \dots, I_n$ du plan ; existe-t-il un polygone à n côtés, dont les milieux des côtés soient (successivement) $I_1, \dots, I_n$?

On peut commencer par faire la figure pour $n = 3$, $n = 4$, ...

Chapitre IV : Une étude abstraite des déplacements et des angles.

Dans ce qui suit nous supposons connu le chapitre II. L'objectif étant de retrouver par le calcul la classification du chapitre III, celui-ci n'est pas supposé connu ; il n'est cependant pas inutile de l'avoir lu si l'on veut comprendre certaines subtilités...

§1 : Le groupe des matrices orthogonales directes

Nous avons défini au chapitre II les matrices orthogonales 2×2, ce sont les matrices 2×2 telles que $A.{}^tA = {}^tA.A = I_2$. Elles forment un groupe noté $O(2)$.

Puisque $\det A = \det {}^tA$, et que $\det(MN) = \det M \times \det N$, nous aurons donc pour toute matrice orthogonale 2×2 :

$$\det I_2 = 1 = \det A \det {}^tA = (\det A)^2.$$

Donc $\det A$ est égal à $+1$ ou à -1.

Nous noterons $SO(2)$ l'ensemble des matrices orthogonales 2×2 dont le déterminant est $+1$. On les appelle les matrices orthogonales directes.

Exercice : Vérifier que $SO(2)$ est un sous groupe de $O(2)$

Vérifier qu'il est distingué.

Vérifier que le groupe quotient a deux éléments.

Soit $A = \begin{pmatrix} t & u \\ v & w \end{pmatrix}$ dans $O(2)$ (ce qui signifie $t^2+v^2=u^2+w^2=1$ et $tu+vw=0$). Posons $\varepsilon = \det A = tw-uv \; (=\pm 1)$. Alors

$$\varepsilon w = tw^2 - uvw = t - tu^2 - uvw$$
$$= t - u(tu+vw) = t.$$

De même $\varepsilon v = twv - uv^2 = twv - u + ut^2$

$$= -u + t(wv+tu) = -u$$

On a donc : $A = \begin{pmatrix} t & -\varepsilon v \\ v & \varepsilon t \end{pmatrix}$ (avec $\varepsilon = \pm 1$)

Ainsi les matrices de $SO(2)$ s'écrivent $\begin{pmatrix} t & -v \\ v & t \end{pmatrix}$ avec $t^2+v^2=1$.

Exercice : Vérifier que $SO(2)$ est un groupe commutatif.

Vérifier que si B est dans $O(2)$ mais pas dans $SO(2)$ (ie : $\det B = -1$), alors $BAB^{-1} \; (= BA\,{}^tB) = {}^tA$.

§ 2 : Déplacements et antidéplacements

Théorème : Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et $(O', \vec{I}, \vec{J})$ deux repères orthonormés. Soit $\vec{I} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j}$ et $\vec{J} = \gamma\vec{i} + \delta\vec{j}$. Alors la matrice (de changement de base) $V = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$ est orthogonale.

Soit f une isométrie, et soit A (resp. B) la matrice de $\vec{f}: \vec{P} \to \vec{P}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ (resp. $(\vec{I}, \vec{J})$). Alors $B = V^{-1}.A.V$

Démonstration : Pour démontrer la 1ère assertion il suffit de remarquer que (puisque $\vec{i}, \vec{j}$ est orthonormée) : $\alpha^2+\beta^2 = \gamma^2+\delta^2 = 1$ traduit le fait que $\vec{I}^2 = \vec{J}^2 = 1$, et $\alpha\gamma+\beta\delta = 0$ traduit le fait que $\vec{I}.\vec{J} = 0$.
La seconde assertion est une application des calculs généraux de changement de base (Voir AG2) : V est la matrice de $\underset{(\vec{I},\vec{J})}{\vec{P}} \xrightarrow[V]{Id} \underset{(\vec{i},\vec{j})}{\vec{P}}$. On écrit donc

$$\underset{(\vec{I},\vec{J})}{\vec{P}} \xrightarrow[V]{Id} \underset{(\vec{i},\vec{j})}{\vec{P}} \xrightarrow[A]{} \underset{(\vec{i},\vec{j})}{\vec{P}} \xrightarrow[V^{-1}]{Id} \underset{(\vec{i},\vec{j})}{\vec{P}}$$

et, en oubliant les intermédiaires, on obtient

$$\underset{(\vec{I},\vec{J})}{\vec{P}} \xrightarrow[V^{-1}.A.V]{Id.\vec{f}.Id} \underset{(\vec{I},\vec{J})}{\vec{P}}$$

Conséquence : La formule $B = V^{-1}.A.V$ implique que $\det B = \det A$; par conséquent B est dans $SO(2)$ si et seulement si A est dans $SO(2)$. Autrement dit le fait que la matrice de $\vec{f}$ soit dans $SO(2)$ ne dépend pas du repère dans lequel on travaille. Nous dirons que f est un déplacement si la matrice de $\vec{f}$ (dans tous les repères orthonormés) est une matrice de $SO(2)$.

Exercice : Soit f et g deux isométries, alors $\vec{f} \circ \vec{g} = \overrightarrow{(f \circ g)}$. Donc si A, B et C sont les matrices de $\vec{f}$, $\vec{g}$ et $\overrightarrow{(f \circ g)}$ dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on a $C = A \cdot B$. En déduire

a) que les déplacements forment un sous-groupe (noté $\mathcal{S}G(P)$) du groupe $G(P)$ des isométries de P.

b) que le produit de 2 isométries qui ne sont pas des déplacements, est un déplacement. En déduire que $\mathcal{S}G(P)$ est distingué dans $G(P)$, et que le groupe quotient a 2 éléments.

<u>Remarque</u> : On pourrait formaliser ce qui précède de la façon suivante :

En associant à toute isométrie f le déterminant de la matrice de $\vec{f}$ (dans un repère orthonormé quelconque) on définit un homomorphisme D de $G(P)$ dans le groupe $\{+1, -1\}$ (sous groupe de $\mathbb{R}^*$). Le noyau de cet homomorphisme est $\mathcal{S}G(P)$

<u>Remarque</u> : On peut vérifier que cette classification est la même que celle que l'on a

obtenue au chapitre III. C'est à dire que

. Les déplacements sont de deux sortes : ceux dont l'application linéaire est l'identité (c'est à dire dont la matrice A est I_2), ce sont les translations (ou l'identité). Et ceux dont l'application linéaire n'est pas l'identité (c'est à dire $A \neq I_2$); ils ont un (unique) point fixe (ce sont les rotations).

. Les antidéplacements sont de deux sortes : ceux qui ont une droite de points fixes (ce sont les symétries) et ceux qui n'ont pas de point fixe, mais une droite globalement invariante (ce sont les symétries glissées).

Voir exercices 3 à 7.

§3 : Angles des rotations - Angles de vecteurs

Le groupe $\mathcal{C}(P)$ des translations est un sous groupe du groupe $\mathcal{SG}(P)$. Ce sous groupe est distingué. En effet la classe à gauche de f est formée des g de la forme $t \circ f$ (où t est une translation); c'est à dire des g tels que $g \circ f^{-1}$ soit une translation. Mais dire que $g \circ f^{-1}$ est une translation c'est dire que $\vec{g} \circ \vec{f}^{-1} = Id$, ou encore $\vec{f} = \vec{g}$. Et on montre de même que la classe à droite de f est formée des g tels que $\vec{g} = \vec{f}$.

Le groupe quotient $\mathcal{SG}(P)/\mathcal{C}(P)$ est -

par définition - le groupe des angles. Nous le noterons $\mathcal{A}(P)$ (ou encore $\mathcal{A}$).

Explicitons la construction de ce groupe quotient. Deux déplacements f et g ont même angle (ie : sont dans la même classe modulo les translations) s'il existe une translation t telle que $t \cdot f = g$ (et aussi une translation t' telle que $f \cdot t' = g$) ; c'est à dire si $g \cdot f^{-1}$ est une translation. La somme des angles de f et de g est l'angle de $f \cdot g$. Notons que la loi de composition du groupe des angles est habituellement appelée la somme, et notée par le signe + ; ce qui est "naturel" puisque ce groupe est commutatif, comme nous le verrons au § 4.

<u>Remarque</u> : Considérons deux demi-droites Ax et By, il existe un unique déplacement qui envoie Ax sur By. En effet si on note A_1 et B_1 les points de Ax et By tels que $AA_1 = BB_1 = 1$, il existe deux isométries f et g qui envoient A sur B et A_1 sur B_1 (donc qui envoient Ax sur By) ; on sait que $g = f \cdot \sigma$ où σ est une symétrie - donc un antidéplacement - il en résulte que une et une seule de ces deux isométries est un déplacement.

Par définition l'angle de cet unique déplacément sera appelé l'angle des demi-droites Ax et By ; et noté (Ax, By).

Si $f(Ax) = By$ et $g(By) = Cz$, alors $g \cdot f(Ax) = Cz$; il en résulte que l'angle (Ax, Cz) est la somme des angles de (Ax, By) et de (By, Cz) ; c'est la classique relation de Chasles.

Laissons au lecteur de justifier, à partir de cette remarque, la notion d'angle de deux vecteurs.

§4: Orientation du plan.

Soit f un déplacement ; soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé ; notons $A_f = \begin{pmatrix} u & v \\ v & -u \end{pmatrix}$ la matrice de $\vec{f}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$. Dans un autre repère orthonormé $(O', \vec{I}, \vec{J})$ nous aurions obtenu la matrice $B_f = V^{-1} \cdot A_f \cdot V$, où V est la matrice de changement de base (cf: §2). Dès lors 2 cas sont possibles

- ou bien V est dans $SO(2)$, et alors $B_f = A_f$ (car $SO(2)$ est commutatif, donc $V^{-1} \cdot A_f \cdot V = A_f \cdot V^{-1} \cdot V = A_f$)
- ou bien V n'est pas dans $SO(2)$ et alors $B_f = {}^tA_f$ (cf: Exercice à la fin du §1)

Nous dirons que deux repères orthonormés $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et $(O', \vec{I}, \vec{J})$ ont la même orientation si la matrice de changement de base V (de $(\vec{i}, \vec{j})$ à $(\vec{I}, \vec{J})$ ou de $(\vec{I}, \vec{J})$ à $(\vec{i}, \vec{j})$, elles sont inverses l'une de l'autre) est dans $SO(2)$.

Si cette matrice n'est pas dans $SO(2)$, nous dirons que les deux repères ont des orientations opposées.

<u>Exercice</u> : Montrer que si $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et (O', I_1, J_1) ont même orientation, ainsi que $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et $(O'', \vec{I_2}, \vec{J_2})$, alors $(O', \vec{I_1}, \vec{J_1})$ et $(O'', \vec{I_2}, \vec{J_2})$ ont la même orientation.

Montrer que si $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et $(O', \vec{I_1}, \vec{J_1})$ ont des orientations opposées, ainsi que $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et $(O'', \vec{I_2}, \vec{J_2})$, alors $(O', \vec{I_1}, \vec{J_1})$ et $(O'', \vec{I_2}, \vec{J_2})$ ont même orientation.

Etant donné un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on partage l'ensemble de tous les repères en deux classes, dans l'une on met les repères qui ont même orientation que $(O, \vec{i}, \vec{j})$, dans l'autre tous les repères qui ont avec $(O, \vec{i}, \vec{j})$ des orientations opposées. Montrer que deux repères quelconques de la même classe ont même orientation ; montrer que deux repères quelconques n'appartenant pas à la même classe ont des orientations opposées.

Ces deux classes sont appelées les deux orientations P. Orienter P c'est choisir de ne travailler qu'avec les repères de l'une de ces classes, on les appelle alors les repères directs. Pour fixer une orientation de P, on donne un repère R de P, et on choisit de travailler avec les repères qui ont même orientation que R.

Lorsque P est orienté, à tout déplacement f est associée une matrice A_f de $SO(2)$ (c'est la matrice de $\vec{f}$ dans n'importe quelle base directe). Nous obtenons ainsi une application $\mathcal{SG}(P) \longrightarrow SO(2)$. On vérifie que c'est un homomorphisme de groupes.

Deux déplacements f et g définissent la même matrice, si et seulement si $\vec{f} = \vec{g}$, c'est à dire si et seulement si ils ont même angle (cf : § 3). On en déduit une bijection du groupe des angles $\mathcal{A}(P)$ avec $SO(2)$.

<u>Exercice</u> : Démontrer que cette bijection est un isomorphisme de groupes.

<u>Conséquence</u> : Puisque $SO(2)$ est commutatif, le groupe des angles $\mathcal{A}(P)$ est commutatif ; ce que l'on avait annoncé au § 3.

Laissons au lecteur le soin de se convaincre que choisir une orientation — au sens que nous venons de définir — c'est choisir un sens de rotation privilégié, comme nous l'avions fait au chapitre III.

§ 5 : <u>Sinus et cosinus d'un angle</u>

Fixons une orientation de P ; à tout

angle ω est associée une matrice de la forme $\begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix}$ (où $u^2+v^2=1$). Par définition :

- u est le cosinus de ω
- v est le sinus de ω

Notons que si nous avions choisi l'autre orientation, nous aurions obtenu la matrice transposée $\begin{pmatrix} u & v \\ -v & u \end{pmatrix}$. Nous aurions donc le même cosinus (le cosinus d'un angle ne dépend pas de l'orientation choisie) Mais nous aurions obtenu un sinus opposé (le sinus d'un angle dépend - par son signe - de l'orientation choisie).

<u>Exercice</u> : Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère orthonormé direct. Soit f un déplacement d'angle ω. Montrer que $\cos\omega = \vec{\imath} \cdot \vec{f}(\vec{\imath})$ et $\sin\omega = \vec{\jmath} \cdot \vec{f}(\vec{\imath})$

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs, montrer que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v})$ (on pourra travailler dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ tel que $\vec{\imath} = \dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$.

<u>Exercice</u> : Soit α et β deux angles (on pourra considérer que ce sont les angles de deux déplacements f et g. Quelle relation y a-t-il entre les matrices associées, dans une orientation donnée, à $\vec{f}$, à $\vec{g}$ et à $\vec{f \circ g}$? En déduire

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

§6 : Enoncé du théorème de mesure des angles

Théorème : Il existe un homomorphisme $\theta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{A}(P)$ et un seul, tel que

a) θ soit surjectif

b) l'application $\varphi : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(t) = \dfrac{\sin(\theta(t))}{t}$ ait une limite égale à 1 pour $t = 0$ (Ceci suppose P orienté !).

La démonstration de l'existence de θ sera faite au chapitre V. Nous démontrerons ici l'unicité, après quelques préliminaires. Nous supposerons pour l'instant qu'il existe un homomorphisme θ possédant les propriétés a et b.

Etude du noyau de θ : Soit p l'angle plat (angle des demi-tours) ; $2p = p + p = 0$. Puisque θ est surjectif, il existe un nombre $t (\neq 0)$ tel que $\theta(t) = p$; on a donc $\theta(2t) = 2p = 0$; ceci montre que le sous-groupe (de $\mathbb{R}$) $\operatorname{Ker}\theta$ n'est pas réduit à $\{0\}$.

Il existe $\varepsilon > 0$, tel que $\operatorname{Ker}\theta \cap]-\varepsilon, \varepsilon[$ soit réduit à $\{0\}$. En effet, s'il n'en était pas ainsi, pour tout entier n, on pourrait trouver t_n tel que $\theta(t_n) = 0$ et $-\frac{1}{n} < t_n < \frac{1}{n}$. La suite t_n serait donc une suite convergeant vers 0, et l'on aurait

$$\lim_n \frac{\sin(\theta(t_n))}{t_n} = \lim_n \frac{0}{t_n} = 0$$

ce qui contredit la condition b.

Soit $X = \{t \in \operatorname{Ker}\theta, t > 0\}$; c'est un ensemble de nombres au moins égaux à ε ; il a donc une borne inférieure a supérieure ou égale à ε (donc non nulle)

Je dis que a appartient à $\operatorname{Ker}\theta$. En effet s'il n'en était pas ainsi, il existerait (puisque $a = \inf X$) x dans X tel que $a < x < a + \varepsilon$; et (puisque $a = \inf X$) il existerait y dans X tel que $a < y < x$. Alors $x - y$ serait un élément de $\operatorname{Ker}\theta$ (car x et y sont dans $\operatorname{Ker}\theta$) compris strictement entre 0 et ε (car $a < y < x < a + \varepsilon$). Et ceci contredit le fait que $\operatorname{Ker}\theta \cap]-\varepsilon, +\varepsilon[= \{0\}$.

Il en résulte que $a\mathbb{Z}$ (ensemble des multiples entiers de a) est un sous-groupe de $\operatorname{Ker}\theta$. Je dis que $a\mathbb{Z} = \operatorname{Ker}\theta$. En effet s'il n'en était pas ainsi, il existerait b dans $\operatorname{Ker}\theta$ qui ne serait pas multiple entier de a. Il existerait un entier n tel que $na < b < (n+1)a$. Et $b - na$ serait un élément de $\operatorname{Ker}\theta$, strictement positif (donc un élément de X) et strictement plus petit que a. Ce qui contredit la définition de a.

Ce nombre a sera noté 2π. C'est la définition du nombre π

Soit α un angle ; l'équation $\theta(t) = \alpha$ a des racines (car θ est surjective) ; pour les avoir toutes, on en détermine une, soit t_0, et on lui ajoute tous les éléments de $\operatorname{Ker} \theta$, c'est à dire tous les multiples de 2π. Ces racines sont les mesures (en radians) de l'angle α.

Exemple : soit p l'angle plat ; ses mesures sont des nombres t tels que $2\,\theta(t) = \theta(2t) = 2p = 0$, c'est à dire des nombres t tels que $2t$ soit multiple entier de 2π. On obtient ainsi les multiples de π, mais il faut ôter les multiples pairs, qui sont les éléments de $\operatorname{Ker} \theta$. Donc les mesures de p sont les nombres de la forme $\pi + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

On notera que parmi toutes les mesures d'un angle il en existe une, et une seule, qui vérifie $-\pi < t \leq \pi$ (car pour tout nombre t_0, il existe un unique entier k tel que $-\pi < t_0 + 2k\pi \leq \pi$) ; c'est la mesure principale. Ceci signifie que la restriction de θ à $]-\pi, \pi]$ est une bijection de $]-\pi, \pi]$ sur $\mathcal{A}(P)$.

<u>Les fonctions numériques sinus et cosinus</u>

Nous définirons, pour tout nombre t, $\sin t = \sin(\theta(t))$ et $\cos t = \cos(\theta(t))$, ce qui nous donne deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. La condition b du théorème se traduit par le fait que $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable en 0, de dérivée 1.

Les formules établies en exercice à la fin du § 5, nous donnent

$$\cos(t+t') = \cos t \cos t' - \sin t \sin t'$$

$$\sin(t+t') = \sin t \cos t' + \cos t \sin t'$$

En particulier $\cos t = \cos^2 \frac{t}{2} - \sin^2 \frac{t}{2} = 1 - 2\sin^2 \frac{t}{2}$. On en déduit que $\cos$ est dérivable en 0, de dérivée $-2\sin 0 \cos 0 = 0$. On en déduit alors que $\cos$ est dérivable (pour toute valeur de t) de dérivée $-\sin$, en effet :

$$\frac{\cos(t+h)-\cos t}{h} = \cos t \, \frac{\cos h - 1}{h} - \sin t \, \frac{\sin h}{h}$$

Puisque $\sin$ est dérivable en 0, $\lim\limits_{h=0} \frac{\sin h}{h} = 1$
De même la dérivée de $\cos$ en 0 nous donne $\lim\limits_{h=0} \frac{1-\cos h}{h} = 0$. Donc $\lim\limits_{h=0} \frac{\cos(t+h)-\cos t}{h} = -\sin t$.
De même $\sin$ est dérivable, de dérivée $\cos$.

On en déduit que $\cos$ est continue ; puisque $\cos 0 = 1$, ceci implique que $\cos$ est positif sur un intervalle de la forme $]-\eta, \eta[$. Et $\sin$ (dont la dérivée est $\cos$) est croissante sur cet intervalle.

Nous pourrions ainsi déduire de θ toutes les propriétés connues des fonctions $\sin$ et $\cos$.

<u>Démonstration de l'unicité de θ :</u>

Si nous avions un autre homomorphisme

θ_1 vérifiant a et b, nous en déduirions de même deux fonctions sinus et cosinus (notées $\sin_1$ et $\cos_1$). Et nous aurions de même $(\sin_1)' = \cos_1$ et $(\cos_1)' = -\sin_1$.

Ainsi les fonctions sin et $\sin_1$ sont des solutions de l'équation différentielle $y'' + y = 0$, elles prennent toutes deux la valeur 0 en 0, et ont pour dérivée 1 en 0. Le théorème classique d'unicité des solutions d'une équation différentielle (cours d'analyse) nous dit qu'elles sont égales

De même cos et $\cos_1$ sont égales car elles vérifient $y'' + y = 0$, sont égales à 1 en 0, et ont pour dérivée 0 en 0.

Ainsi (une orientation de P étant fixée) les deux angles $\theta(t)$ et $\theta_1(t)$ ont même sinus et même cosinus ; ils sont donc égaux (car $\mathcal{A}(P) \longrightarrow SO(2)$ est bijectif - voir fin du §4).

§7 : Critique des chapitres III et IV

Essayons de dégager la distinction entre "point de vue axiomatique" et "point de vue constructif", déjà évoquée au chapitre II. Mettons de côté le fait que le chapitre III est plus "géométrique", alors que le chapitre IV est entièrement "calculatoire";

il est d'ailleurs possible de construire les angles sans aucun calcul matriciel, en écrivant "géométriquement" les produits de symétries. La différence la plus évidente entre ces deux chapitres, se situe alors au niveau du langage : Dans le chapitre III on n'a jamais dit ce qu'était l'angle de 2 vecteurs ; tout y est décrit en termes de "mesures-de-l'angle-de $\vec{V}$ et de $\vec{W}$" Ceci donne un langage assez lourd, en particulier parceque les égalités s'écrivent toujours "modulo 2π" (à la relecture je vois d'ailleurs apparaître quelques écarts de langage - A vous de les trouver.) Dans le chapitre IV au contraire on définit l'ensemble des angles (comme ensemble de classes d'équivalence), et la somme de deux angles. Ceci permet de se passer de la mesure dans bien des cas (celle ci n'intervient que pour faire le lien entre les 2 langages). On notera aussi que l'on peut, le plus souvent (c'est à dire tant qu'on n'utilise ni le sinus, ni la mesure), se passer d'orienter le plan ; ce qui montre que la terminologie "d'angle orienté" est tout à fait inadaptée.

Dans toute la suite nous adopterons la terminologie du chapitre IV, mais nous choisirons une orientation - même si cela n'est pas indispensable, ceci nous permettra d'évoquer un "angle de $\frac{\pi}{3}$" (qui sans cette précaution n'aurait pas de nom !).

Ajoutons que les constructions du type de celle du chapitre IV furent mises à la mode dans les années 1950-60. Elles étaient à la base des programmes de lycée en 1970-80 (qui étaient d'ailleurs beaucoup plus abstraits que ce qui a été écrit ici – on le verra dans AG4).

Exercices sur le chapitre IV

Exercice 1

Soit $GL^+(n, \mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $n \times n$ de déterminant strictement positif.

a) Montrer que $GL^+(n, \mathbb{R})$ est un sous groupe distingué de $GL(n, \mathbb{R})$

b) Montrer que le groupe quotient a 2 éléments

Exercice 2

Soit $SL(n, \mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $n \times n$ de déterminant 1

a) Montrer que $SL(n, \mathbb{R})$ est un sous groupe distingué de $GL(n, \mathbb{R})$

b) Montrer que le groupe quotient G est isomorphe au groupe multiplicatif $\mathbb{R}^*$. Pour construire un isomorphisme de G sur $\mathbb{R}^*$, on associera à toute matrice M de $GL(n, \mathbb{R})$ le nombre $\det M$.

Exercice 3

Un repère orthonormé étant donné dans le plan P, on considère l'application $f : P \to P$ définie par :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad (\alpha^2 + \beta^2 = 1)$$

Montrer que, si $\alpha \neq 1$, elle a un unique point fixe. Calculer (en fonction de α, β, u et v) les coordonnées de ce point fixe).

Exercice 4

Un repère orthonormé étant donné dans le plan P, on considère l'application $f : P \to P$ définie par

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (\alpha^2+\beta^2=1)$$

Les nombres α et β étant donnés, comment faut-il choisir u et v pour que f ait (au moins) un point fixe ? Montrer que les points fixes de f forment alors une droite.

Exercice 5

Un repère orthonormé étant donné dans le plan P, on considère l'application $f : P \to P$ définie par

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

a) Montrer que f est une symétrie glissée

b) Soit $A\left|\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right.$ et $B\left|\begin{matrix}2\\0\end{matrix}\right.$; déterminer les milieux A' et B' de $Af(A)$ et de $Bf(B)$. Soit $M\left|\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right.$; déterminer le milieu de $Mf(M)$ et vérifier qu'il est aligné avec A' et B'.

c) Vérifier que l'image d'un point de la droite $A'B'$, est un point de la droite $A'B'$.

Exercice 6

Un repère orthonormé étant donné dans P, on considère les points $A\left|\begin{matrix}1\\3\end{matrix}\right.$; $B\left|\begin{matrix}6\\3\end{matrix}\right.$, $C\left|\begin{matrix}1\\5\end{matrix}\right.$

et $D\left|\begin{matrix}5\\2\end{matrix}\right.$. On a donc $AB = CD = 5$.

a) Il existe un déplacement f et un antidéplacement g tels que $f(A) = g(A) = C$ et $f(B) = g(B) = D$. Montrer que f est une rotation, et g une symétrie glissée (avec un minimum de calculs)

b) Déterminer le centre de f et l'axe de g (avec un minimum de calculs)

Exercice 7

Un repère orthonormé étant fixé dans P, on considère l'application $f : P \to P$ définie par :

$$f : \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

a) Démontrer que f est une symétrie glissée.

b) Déterminer (avec un minimum de calculs) son vecteur et son axe.

Chapitre V : Géométrie et nombres complexes

Dans le cours d'algèbre et arithmétique, on a donné une définition algébrique de $\mathbb{C}$. Résumons ce que nous allons utiliser ici.

- $\mathbb{C}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, muni d'une base $1, i$.
- $\mathbb{C}$ est muni d'une multiplication définie par :

$$(a+bi)(c+di) = (ac-bd)+(ad+bc)i$$

(donc $1^2 = 1$ et $i^2 = -1$). Ceci en fait un corps commutatif.

Nous oublierons tout l'aspect géométrique développé dans le cours d'algèbre et arithmétique. Plus précisément nous allons le reprendre en détail.

§1 Identifications de $\mathbb{C}$ à un plan P.

Considérons un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'un plan P (qui sera orienté par ce repère). A tout point $M \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}$ de P, nous associons le nombre complexe $z = x+iy$. Le nombre z est quelquefois appelé l'affixe de M (dans ce repère). Nous avons ainsi défini une bijection $\mathcal{R} : P \longrightarrow \mathbb{C}$ (qui dépend du repère choisi)

Nous allons utiliser cette construction de 2 façons :

- d'une part pour décrire certaines propriétés des nombres complexes au moyen d'un langage géométrique.
- d'autre part pour traduire, en termes de nombres complexes, certains calculs de géométrie analytique dans P.

<u>Notation</u> : Dans ce qui suit lorsque nous écrirons $M(z)$, M sera un point de P, et z son affixe (dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$)

§2 : Module et argument.

Par définition le module de $z = x + iy$ est le nombre réel positif $|z| = (x^2+y^2)^{1/2}$. C'est la longueur OM. Si $M(z)$ et $M'(z')$, alors $MM' = |z - z'|$.

Notons U le point de P d'affixe 1, c'est à dire le point tel que $\vec{OU} = \vec{u}$. Par définition, si $M(z)$ (où $z \neq 0$) l'angle $(\vec{OU}, \vec{OM})$ est appelé l'argument de z. (Ainsi l'argument de z est un angle du plan P identifié à $\mathbb{C}$ par le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$).

Si $M(z)$ et $M(z')$, dire que z et z'

ont même argument, c'est dire que $\overrightarrow{OM} = \lambda \overrightarrow{OM'}$ (λ réel > 0), donc que $z = \lambda z'$. Autrement dit des nombres complexes non nuls ont même argument si et seulement si z/z' est réel positif.

Soit $\zeta = \alpha + i\beta$ un nombre complexe de module 1 (ie : $\alpha^2 + \beta^2 = 1$). Considérons l'application $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $\varphi(z) = \zeta \cdot z$. Grâce à la bijection de $\mathbb{C}$ avec P, nous pouvons la considérer comme une application de P dans lui même. A $M(z = x+iy)$, elle associe $M'(X+iY)$, où $X + iY = (\alpha + i\beta)(x+iy)$; ainsi X et Y sont définis par

$$X = \alpha x - \beta y \quad \text{et} \quad Y = \alpha y + \beta x$$

ou encore matriciellement

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Puisque $\alpha^2 + \beta^2$, on reconnait ici les formules d'une rotation de centre O.

Soit μ le point d'affixe ζ ; l'angle de la rotation est égal à $(\overrightarrow{OU}, \overrightarrow{O\mu})$ (puisque l'image de U est μ). Cet angle est donc l'argument de ζ. Mais c'est aussi l'angle de $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$. Donc

$$\begin{aligned} \operatorname{Arg} \zeta = (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) &= (\overrightarrow{OU}, \overrightarrow{OM'}) - (\overrightarrow{OU}, \overrightarrow{OM}) \\ &= \operatorname{Arg}(X+iY) - \operatorname{Arg} z = \operatorname{Arg}(\zeta z) - \operatorname{Arg} z \end{aligned}$$

Ainsi $\operatorname{Arg}(\zeta z) = \operatorname{Arg} \zeta + \operatorname{Arg} z$. Cette relation

démontrée pour $|z| = 1$, est vraie en toute généralité. Elle implique
$$\mathrm{Arg}(1/z) = -\mathrm{Arg}\, z.$$
Remarque : La matrice de cette rotation s'écrit $\begin{pmatrix} \mathrm{Re}\, z & -\mathrm{Im}\, z \\ \mathrm{Im}\, z & \mathrm{Re}\, z \end{pmatrix}$; ce qui signifie que $\cos(\mathrm{Arg}\, z) = \mathrm{Re}\, z$ et $\sin(\mathrm{Arg}\, z) = \mathrm{Im}\, z$.

<u>En termes de groupes</u> : Dans tout ceci nous utilisons 4 groupes

• le groupe (multiplicatif) C^* des nombres complexes non nuls

• le groupe (multiplicatif) T des nombres complexes de module 1 (sous-groupe du précédent)

• le groupe SO_0 des rotations de centre O dans P

• le groupe $\mathcal{A}$ des angles de vecteurs de P.

Entre ces groupes nous avons les homomorphismes suivants.

• $C^* \longrightarrow T$ (qui à z associe $z/|z|$) qui est surjectif. Son noyau est le groupe multiplicatif des réels positifs.

• $T \longrightarrow SO_0$ (qui à z associe l'application $\zeta \to z\zeta$ considérée comme une rotation de centre O dans P). Il est bijectif.

• $T \longrightarrow \mathcal{A}(P)$ (qui à z associe son argument) C'est un isomorphisme (composé du précédent et de $SO_0 \to \mathcal{A}$ qui à toute rotation associé son angle).

Remarque : On notera que l'argument tel qu'il était défini dans Algèbre et Arithmétique, était un nombre défini à un multiple de 2π près. C'est la classique confusion de l'angle et de ses mesures, que nous avons vue au chapitre III.

§2 : Définition de la mesure des angles

Au §6 du chapitre IV nous avons affirmé l'existence d'un homomorphisme surjectif $\theta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{A}(P)$, tel que $\lim_{t=0} \frac{\sin(\theta(t))}{t} = 1$. Nous allons construire cet homomorphisme.

Remarquons d'abord que, vu l'isomorphisme $T \longrightarrow \mathcal{A}(P)$, il nous suffit de construire un homomorphisme $\theta' : \mathbb{R} \longrightarrow T$ surjectif, tel que $\lim_{t=0} \frac{\mathrm{Im}\ \theta'(t)}{t} = 1$.

Pour cela nous définissons l'exponentielle complexe $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. C'est, par définition la somme de la série $u_0 = 1, u_1 = z, \ldots, u_n = \frac{z^n}{n!}$ (Voir cours d'analyse - An 3) Cette application vérifie $\exp(z+z') = \exp z \exp z'$ et aussi $\exp 0 = 1$ et $\exp(-z) = 1/\exp z$. Il en résulte que c'est un homomorphisme de $\mathbb{C}$ (groupe additif) dans $\mathbb{C}^*$ (groupe multiplicatif). Par ailleurs $\exp(\bar{z}) = \overline{(\exp z)}$, il en résulte que $|\exp(it)|^2 = \exp(it)\exp(\overline{it}) =$

$\exp 0 = 1$. Ainsi $t \to \exp(it)$ est un homomorphisme de $\mathbb{R}$ dans T.

C'est l'homomorphisme cherché. La relation $\lim\limits_{t=1} \frac{\operatorname{Im} \theta(t)}{t} = 1$ résulte facilement de la théorie des séries entières. La surjectivité est plus délicate à montrer.

§3 : Utilisation des nombres complexes dans le calcul des isométries.

Soit un déplacement f de P. Il a des formules du type

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$(\text{où } \alpha^2 + \beta^2 = 1)$$

dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$

Donc $X + iY = (\gamma + i\delta) + (\alpha + i\beta)(x + iy)$. Ainsi, en posant $a = \alpha + i\beta$ et $b = \gamma + i\delta$, on peut dire que à $M(z)$ il associe $M'(Z)$, où $Z = az + b$ (notons que $|a| = 1$).

Réciproquement, si a et b sont deux nombres complexes avec $|a| = 1$, l'application $z \to Z = az + b$ s'écrit matriciellement

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} b \\ \operatorname{Im} b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \operatorname{Re} a & -\operatorname{Im} a \\ \operatorname{Im} a & \operatorname{Re} a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Et, puisque $(\operatorname{Re} a)^2 + (\operatorname{Im} a)^2 = 1$, c'est un déplacement de P.

Ainsi les déplacements de P s'identifient (grâce à la bijection $P \to \mathbb{C}$) aux applications de $\mathbb{C}$ dans lui même, de la forme $z \to pz + q$ ($p \in T$ et $q \in \mathbb{C}$).

Plus précisément si $p = 1$, l'application $z \to 1.z + q$ est une translation : à $M(z)$ elle associe $M'(z+q)$. Si $p \neq 1$ (et $|p| = 1$) l'application $z \to pz + q$ a un point fixe unique (défini par l'équation $z = pz + q$; c'est donc $q/(1-p)$) ; c'est la rotation d'angle $\operatorname{Arg} p$, et de centre ce point fixe.

Exemple : Trouver les formules de la rotation de centre $A\,(1+i)$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Le nombre complexe d'argument $\frac{\pi}{3}$ et de module 1 est $p = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Donc cette rotation s'écrit

$$z \longrightarrow \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z + q$$

Il reste à déterminer q de telle façon que A soit le point fixe ; on obtient

$$(1+i) = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1+i) + q$$

donc $q = (1+i)\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

De façon analogue les antidéplacements s'écrivent (dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{où } \alpha^2 + \beta^2 = 1$$

On vérifie facilement qu'ils correspondent aux applications de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, de la forme $z \longrightarrow Z = a\bar{z} + b$ (où $a = \alpha + i\beta$ et $b = \gamma + i\delta$).

Ainsi les isométries de $\mathcal{P}$ ont, en termes de nombres complexes, des formules particulièrement simples ; la simplification est due essentiellement au fait que les produits matriciels sont remplacés par de simples produits de nombres complexes, plus faciles à effectuer.

Exemple : Trouver la nature et les éléments caractéristiques de l'application $M(z) \longrightarrow M'(Z)$ définie par :

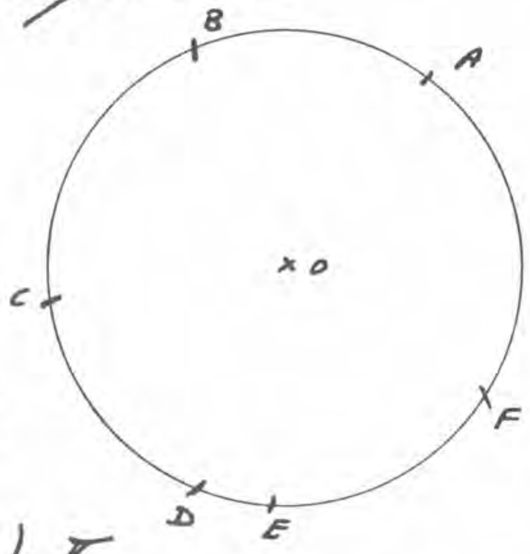
$$Z = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)\bar{z} + 1 .$$

C'est un antidéplacement, c'est à dire une symétrie éventuellement glissée. Son axe est le lieu des milieux des segments MM'. Donc (en prenant $z = 0$) cet axe passe par $\frac{1}{2}\left[0 + \left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)\bar{0} + 1\right)\right] = \frac{1}{2}$, et aussi (en prenant $z = 1$) par $\frac{1}{2}\left[1 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)\bar{1} + 1\right]$ $= 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{i}{2\sqrt{2}}$.

Le vecteur de glissement est $\vec{V} = \overrightarrow{AA'}$, pour A appartenant à l'axe. En prenant $A = \frac{1}{2}$, on a $\overrightarrow{AA'} =$ (le vecteur identifié au nombre complexe) $\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)\frac{1}{2} + 1\right) - \frac{1}{2}$.

Exercices sur le chapitre V

Exercice 1



Sur un cercle de rayon R, et de centre O, on considère six points A(a), B(b), C(c), D(d), E(e) et F(f)

On suppose que

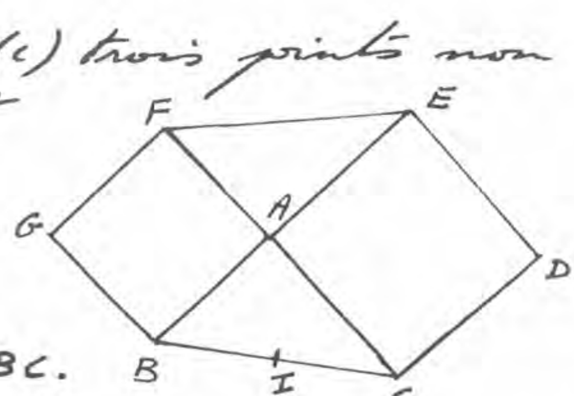
$(\vec{OA}, \vec{OB}) = (\vec{OC}, \vec{OD}) = (\vec{OE}, \vec{OF}) = \frac{\pi}{3}$

a) Quelles relations y a-t-il entre a, b, c, d, e, f et le nombre j ($|j| = 1$ et $\text{Arg}\, j = \frac{2\pi}{3}$)

b) Calculer en fonction de a, c, e et j les affixes des milieux de BC, DE et FA. Puis montrer que ces 3 milieux sont les sommets d'un triangle équilatéral.

Exercice 2

Soit A(a), B(b), C(c) trois points non alignés. Extérieurement au triangle ABC, on construit des carrés ACDE et BAFG.



Soit I le milieu de BC. Montrer que AI et FE sont perpendiculaires.

Exercice 3 (cf: Exercice 8 du chapitre III)

Soit $A(a)\,B(b)\,C(c)$ un triangle. On construit extérieurement à ce triangle des triangles équilatéraux ABA', BCB' et CAC'. Soit A'', B'', C'' les centres de ces triangles.

a) Calculer les affixes de A', B', C' (on remarquera qu'il y a 2 cas de figure suivant qu'en tournant autour de ABC dans le sens $ABCA$, on tourne dans le sens direct, ou dans le sens indirect).

b) Calculer les affixes de A'', B'', C'', puis montrer que le triangle $A''B''C''$ est équilatéral

Exercice 4

Soit une rotation f représentée, en termes de nombres complexes, par la formule $z \to az + b$ ($|a| = 1$). Déterminer les déplacements g tels que $g^2 = f$.

Exercice 5

Trouver, en termes de nombres complexes, les formules de la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$, qui envoie $A(1+i)$ sur $B(3-i)$.

Exercice 6

Soit $A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$ trois points Soit $M(m)$, $N(n)$ et $P(p)$ les milieux de

BC, CA et AB. Soit ρ la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Soit $N' = \rho(N)$ et $P' = \rho^{-1}(P)$.

a) Déterminer les formules de ρ.

b) Calculer les affixes de M, N' et P'.

c) Démontrer que le triangle M N' P' est équilatéral.

Exercice 7

Soit ABCD un quadrilatère. Soit A', B', C', D' les milieux de AB, BC, CD, DA. Soit ρ_A (ρ_B, ρ_C, ρ_D) la rotation de centre A' (B', C', D') et d'angle $\frac{\pi}{2}$. On pose $\rho_A(B) = A''$, $\rho_B(C) = B''$, $\rho_C(D) = C''$, $\rho_D(A) = D''$.

Soit a, b, c, d les affixes de A, B, C, D. Calculer les affixes de A'', B'', C'', D''; puis vérifier que les deux segments A''C'' et B''D'' sont perpendiculaires et de même longueur.

Exercice 8

Soit A(a), B(b), C(c) trois points, montrer que, pour qu'ils soient les sommets d'un triangle équilatéral, il est nécessaire et suffisant que l'une des relations suivantes soit vérifiée

$$a + jb + j^2c = 0$$
$$a + j^2b + jc = 0$$

(où $|j| = 1$ et $\operatorname{Arg} j = \frac{2\pi}{3}$)

Exercice 9

Soit $A(a)$ $B(b)$ et $C(c)$ trois points. Soit ρ la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$. On pose $N=\rho(C)$ et $P=\rho^{-1}(B)$.

a) Calculer les affixes de N et P.

b) Montrer qu'il existe une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ qui transforme B en C et N en P.

c) Déterminer le centre de cette rotation.

Exercice 10

Déterminer un nombre complexe z tel que $\operatorname{Arg} z = \frac{\pi}{4}$ et $\operatorname{Arg}(1-z) = -\frac{\pi}{3}$. Combien en existe-t-il ?

Exercice 11

Soit $P(z) = z^4 - uz^3 + vz^2 - wz + x$ un polynome de degré 4.

a) On suppose $u=0$, montrer que les 4 racines de P ont une somme nulle. Montrer alors que ces quatre racines sont les affixes des sommets d'un carré, si et seulement si $v = w = 0$

b) Soit $Q(z) = P(z + \frac{u}{4})$. Calculer Q. Quelle relation existe-t-il entre les racines de P et celles de Q.

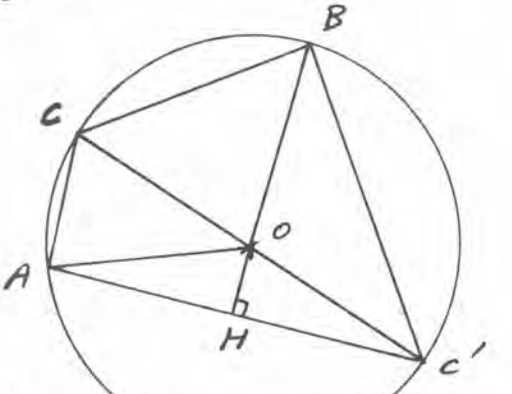
Montrer que les racines de P sont les affixes des sommets d'un carré si et seulement si $v = \frac{3}{8}u^2$ et $w = \frac{1}{16}u^3$ (et $x \neq \frac{u^4}{256}$)

Chapitre VI : Le théorème de l'arc capable et les angles de droites

§1 : Angle au centre et angle inscrit

Théorème : Soit Γ un cercle de centre O, et A, B, C trois points de Γ, alors

$$2(\vec{CA}, \vec{CB}) = (\vec{OA}, \vec{OB})$$



Démonstration : Soit C' le point diamétralement opposé à C. Alors

$$2(\vec{CC'}, \vec{CA}) = (\vec{OC'}, \vec{OA})$$

C'est clair si C' = A, les 2 angles étant nuls. Si C' est différent de A, notons H le milieu de AC'. Alors

$(\vec{CC'}, \vec{CA}) = (\vec{OC'}, \vec{OH})$ (car $\vec{CC'} = 2\vec{OC'}$ et $\vec{CA} = 2\vec{OH}$)

$(\vec{OC'}, \vec{OH}) = (\vec{OH}, \vec{OA})$ (par symétrie d'axe OH)

Donc : $2(\vec{CC'}, \vec{CA}) = (\vec{OC'}, \vec{OH}) + (\vec{OH}, \vec{OA})$

$$= (\vec{OC'}, \vec{OA})$$

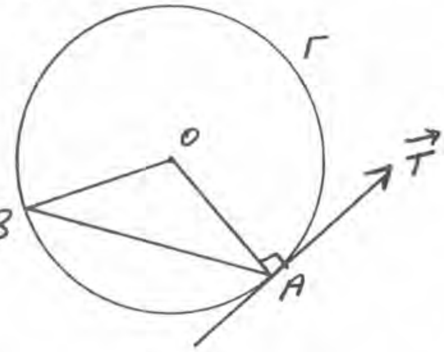
On démontrerait de même l'égalité $2(\vec{CC'}, \vec{CB}) = (\vec{OC'}, \vec{OB})$. Il en résulte que

$2(\vec{CA}, \vec{CB}) = 2(\vec{CA}, \vec{CC'}) + 2(\vec{CC'}, \vec{CB}) = (\vec{OA}, \vec{OC'}) + (\vec{OC'}, \vec{OB})$
$= (\vec{OA}, \vec{OB})$.

§2 : le cas limite de la tangente

Théorème : Soit A et B deux points d'un cercle Γ de centre O ; et soit $\vec{T}$ un vecteur porté par la tangente en A. Alors

$$2(\vec{T}, \vec{AB}) = (\vec{OA}, \vec{OB})$$



Démonstration :

$$(\vec{T}, \vec{AB}) = (\vec{T}, \vec{OA}) + (\vec{OA}, \vec{AB})$$

Donc

$$2(\vec{T}, \vec{AB}) = 1\text{plat} + (\vec{OA}, \vec{AB}) - (\vec{OB}, \vec{BA})$$

(car, par symétrie, on a $(\vec{OA}, \vec{AB}) = -(\vec{OB}, \vec{BA})$). Donc

$$2(\vec{T}, \vec{AB}) = 1\text{plat} + (\vec{OA}, \vec{AB}) - [1\text{plat} + (\vec{OB}, \vec{AB})]$$
$$= (\vec{OA}, \vec{AB}) + (\vec{AB}, \vec{OB}) = (\vec{OA}, \vec{OB})$$

Remarque : Si un point M parcourt le cercle (en restant différent de A et B), on a constamment $2\left(\frac{\vec{MA}}{MA}, \vec{MB}\right) = (\vec{OA}, \vec{OB})$. Si M tend vers A, le vecteur unitaire $\frac{\vec{MA}}{MA}$ tend vers un vecteur $\vec{T}$ tangent en A, et le vecteur $\vec{MB}$ tend vers $\vec{AB}$, ainsi l'angle $(\vec{MA}, \vec{MB})$ tend vers $(\vec{T}, \vec{AB})$. Et puisque $2\left(\frac{\vec{MA}}{MA}, \vec{MB}\right)$ est constamment égal à $(\vec{OA}, \vec{OB})$, on a aussi "à la limite" $2(\vec{T}, \vec{AB}) = (\vec{OA}, \vec{OB})$.

Ainsi ce théorème concernant la tangente apparait comme un cas limite du précédent. Le raisonnement ci-dessus est un peu rapide, mais on peut le rendre entièrement correct, en précisant ce qu'on entend par "limite d'un vecteur" et par "limite d'un angle"; et ainsi on peut déduire ce second théorème du premier.

§3 : Le théorème de l'arc capable

C'est l'énoncé suivant :

Soit $ABCD$ quatre points, alors

- Si $ABCD$ sont alignés, $2(\vec{CA},\vec{CB}) = 2(\vec{DA},\vec{DB})$
- Si $ABCD$ sont cocycliques, $2(\vec{CA},\vec{CB}) = 2(\vec{DA},\vec{DB})$

Et réciproquement si $2(\vec{CA},\vec{CB}) = 2(\vec{DA},\vec{DB})$, alors $ABCD$ sont soit alignés, soit cocycliques.

En effet : Si $ABCD$ sont alignés, $2(\vec{CA},\vec{CB})$ et $2(\vec{DA},\vec{DB})$ sont l'angle nul. Si $ABCD$ sont cocycliques, alors $2(\vec{CA},\vec{CB}) = 2(\vec{DA},\vec{DB}) = (\vec{OA},\vec{OB})$, où O est le centre du cercle (cf : §1)

Réciproquement si $2(\vec{CA},\vec{CB}) = 2(\vec{DA},\vec{DB}) = \alpha$; alors :

- ou bien $\alpha = 0$, et les angles $(\vec{CA},\vec{CB})$ et $(\vec{DA},\vec{DB})$ sont soit nuls, soit plats ; donc C et D sont sur la droite AB.
- ou bien $\alpha \neq 0$, et les deux angles $(\vec{CA},\vec{CB})$ et $(\vec{DA},\vec{DB})$ ne sont ni nuls, ni plats. Donc C et D ne sont pas sur la droite AB. Soit alors Γ_C et Γ_D les cercles circonscrits à ABC et ABD ; soit $\vec{T_C}$ et $\vec{T_D}$ des vecteurs tangents en A à ces cercles. Alors (cf : §1 et 2)

$$2(\vec{T_C},\vec{AB}) = 2(\vec{CA},\vec{CB}) = 2(\vec{DA},\vec{DB}) = 2(\vec{T_D},\vec{AB})$$

Il en résulte que $(\vec{T_C},\vec{AB}) - (\vec{T_D},\vec{AB})$ (qui est égal à $(\vec{T_C}, \vec{T_D})$) est soit 0, soit un plat. Ceci prouve que les tangentes en A aux deux cercles coïncident ; ce qui implique que les deux cercles coïncident. Donc ABCD sont cocycliques

<u>Traduction en termes de nombres complexes</u>

Fixons un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ de P ; ce qui identifie P à $\mathbb{C}$.

Soit $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$ et $D(d)$ quatre points de P. Alors $\vec{CA}$ et $\vec{CB}$ correspondent aux nombres complexes $a-c$ et $b-c$, et l'angle $(\vec{CA}, \vec{CB})$ est l'argument de $\frac{a-c}{b-c}$. De même $(\vec{DA}, \vec{DB}) = \mathrm{Arg}\left(\frac{a-d}{b-d}\right)$.

Ainsi la condition $2(\vec{CA}, \vec{CB}) = 2(\vec{DA}, \vec{DB})$ se traduit par $2\,\mathrm{Arg}\left(\frac{a-c}{b-c}\right) = 2\,\mathrm{Arg}\left(\frac{a-d}{b-d}\right)$; ou encore $2\,\mathrm{Arg}\left(\frac{a-c}{b-c} \times \frac{b-d}{a-d}\right) = 0$, qui s'écrit aussi $\mathrm{Arg}\left[\left(\frac{a-c}{b-c} \times \frac{b-d}{a-d}\right)^2\right] = 0$. Ce qui se traduit par "$\frac{a-c}{b-c} \times \frac{b-d}{a-d}$ est réel".

Le nombre $\beta(a,b,c,d) = \frac{a-c}{b-c} \times \frac{b-d}{a-d}$ est appelé le birapport des 4 nombres a, b, c, d (pris dans cet ordre). Il est réel si et seulement si ABCD sont cocycliques ou alignés.

§4: <u>Les angles de droites</u>

Au chapitre III nous avons introduit les angles de vecteurs pour mesurer "comment il faut faire tourner une demi-droite pour l'amener sur une autre". Nous pouvons de la même façon chercher "comment il faut faire tourner une droite D pour l'amener sur une droite D'". Évidemment si la rotation de α radians (dans le sens direct) amène D sur D', les rotations de $\alpha+\pi$, $\alpha-\pi$, $\alpha+k\pi$, $\alpha-k\pi$ radians amènent aussi D sur D' (car en faisant tourner D — ou D' — d'un demi-tour, on la ramène sur elle même, en échangeant les deux bouts). Ainsi les angles de droites sont des objets dont la mesure est définie à π près. Bien sûr ce point de vue qui consiste à confondre l'angle et sa mesure peut être formalisé. De la façon suivante:

Soit $\mathcal{A}$ le groupe des angles (de vecteurs). Soit $\mathcal{A}_0$ le sous-groupe de $\mathcal{A}$ formé de 0 et de l'angle plat p. Il est distingué (puisque $\mathcal{A}$ est commutatif). Nous noterons $\mathcal{A}'$ le groupe quotient ; c'est le groupe des angles de droites.

Soit D et D' deux droites, choisissons des vecteurs (non nuls) $\vec{v}$ et $\vec{v}'$ portés par D et D'. L'angle $(\vec{v},\vec{v}')$ ne dépend pas uniquement de D et D' : si l'on change $\vec{v}$ (ou $\vec{v}'$) en son opposé, cet angle est augmenté de p. Ainsi à D et D' nous ne pouvons pas associer un angle de vecteur, mais deux angles de vecteurs différant de p ; c'est à dire une classe de $\mathcal{A}$ modulo $\mathcal{A}_0$, ou encore un élément de $\mathcal{A}'$. Cette classe est appelée l'angle des droites D et D', et notée (D, D').

Exercice : Démontrer les égalités (dans $\mathcal{A}'$)

$$(D, D') = -(D', D)$$
$$(D, D') = (D, D') + (D', D'')$$

Démontrer que D et D' sont parallèles si et seulement si $(D, D') = 0$; qu'elles sont perpendiculaires si et seulement si $2(D, D') = 0$ (et $(D, D') \neq 0$)

Notons que le passage au quotient de $\mathcal{A}$ par $\mathcal{A}_0$, nous donne une application surjective $\chi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}' = \mathcal{A}/\mathcal{A}_0$. C'est un homomorphisme.

Si nous composons χ et l'homomorphisme de mesure des angles $\theta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{A}$, nous obtenons $\theta' = \chi \circ \theta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{A}'$, dont le noyau est formé des t tels que $\theta(t)$ soit 0 ou p, c'est à dire des multiples de π. Pour tout angle de droite ω, on appelle mesures de ω les racines de l'équation (en t) $\theta'(t) = \omega$. Ces mesures diffèrent 2 à 2 d'un multiple de π (ie : d'un élément du noyau de θ') ; c'est bien ce qu'on attendait.

§5 : L'homomorphisme de doublement

Soit deux droites D et D', et soit σ_D et

$\sigma_{D'}$ les symétries d'axes ces droites; soit α l'angle ($\alpha \in \mathcal{A}$) du déplacement $\sigma_{D'} \cdot \sigma_D$. Je dis que α ne dépend que de l'angle (de droites) de D et D'. En effet si D_1, D'_1 sont telles que $(D_1, D'_1) = (D, D')$, notons f un déplacement tel que $f(D) = D_1$; alors $f(D') = D''_1$ est parallèle à D'_1. Il existe donc une translation t telle que $t \cdot f(D') = D'_1$. On vérifie facilement que $\sigma_{D_1} = f \cdot \sigma_D \cdot f^{-1}$ et $(t \cdot f) \cdot \sigma_{D'} \cdot (t \cdot f)^{-1} = \sigma_{D'_1}$. Alors

$$\sigma_{D'_1} \sigma_{D_1} = t \cdot f \cdot \sigma_{D'} \cdot f^{-1} \cdot t \cdot f \cdot \sigma_D \cdot f^{-1}$$

Dans cette suite d'isométries $f^{-1} \cdot t \cdot f$ est une translation τ, et $\tau \cdot \sigma_D = \sigma_D (\sigma_D \tau \sigma_D)$, où $\sigma_D \tau \sigma_D$ est une translation τ'. Donc

$$\sigma_{D'_1} \cdot \sigma_{D_1} = t \cdot f \cdot (\sigma_{D'} \cdot \sigma_D) \cdot \tau' \cdot f^{-1}$$

Et, puisque angle de t = angle de $\tau' = 0$ et angle de f = − angle de f^{-1}, nous obtenons

$$\text{angle de } \sigma_{D'_1} \cdot \sigma_{D_1} = \text{angle de } \sigma_{D'} \cdot \sigma_D$$

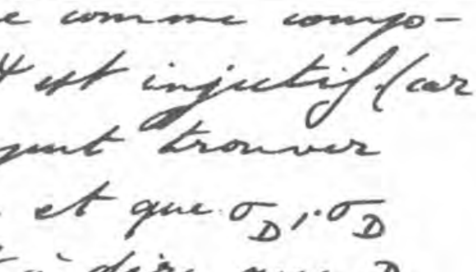
Nous pouvons donc définir une application $\Psi : \mathcal{A}' \longrightarrow \mathcal{A}$ de la façon suivante: Choisissons D et D' tels que $(D, D') = u$ ($u \in \mathcal{A}'$) et posons $\Psi(u)$ = angle de $\sigma_{D'} \cdot \sigma_D$ (dans $\mathcal{A}$). Nous venons de démontrer que le résultat de cette construction ne dépend pas du choix de D et D'.

Exercice : Démontrer que Ψ est un homomorphisme de groupes, c'est à dire que

. $\Psi(0)=0$
. $\Psi(D',D)=-\Psi(D,D')$
. $\Psi(D,D'')=\Psi(D,D')+\Psi(D',D'')$

On remarquera que Ψ est surjectif (car tout angle dans $\mathcal{A}$ est l'angle d'un déplacement qui peut s'écrire comme composé de 2 symétries) et que Ψ est injectif (car "$\Psi(u)=0$" signifie que l'on peut trouver 2 droites telles que $(D,D')=u$ et que $\sigma_{D'}\circ\sigma_D$ soit une translation, c'est à dire que D et D' soient parallèles).

Ainsi $\Psi : \mathcal{A}' \longrightarrow \mathcal{A}$ est un isomorphisme de groupes. On l'appelle l'homomorphisme de doublement, pour la raison suivante :



Soit $u=(D,D')$, soit $\vec{V}$ un vecteur porté par D, et $\vec{V_1}$ son symétrique par rapport à D' ; alors $\Psi(u)$ est l'angle $(\vec{V},\vec{V_1})$, puisque $\vec{\sigma}_{D'}\circ\vec{\sigma}_D(\vec{V})=\vec{V_1}$.

Soit $\vec{W}$ un vecteur porté par D'. Alors $(D,D')=\chi(\vec{V},\vec{W})$ (χ homomorphisme $\mathcal{A}\to\mathcal{A}'$, de passage au quotient). Et $(\vec{V},\vec{V_1})=(\vec{V},\vec{W})+(\vec{W},\vec{V_1})$ $=2(\vec{V},\vec{W})$; donc $\Psi.\chi(\vec{V},\vec{W})=2(\vec{V},\vec{W})$.

Ainsi l'homomorphisme composé $\mathcal{A}\xrightarrow{\chi}\mathcal{A}'\xrightarrow{\Psi}\mathcal{A}$ est la multiplication par 2. On montrerait de même que

$\mathcal{A}' \xrightarrow{\psi} \mathcal{A} \xrightarrow{\chi} \mathcal{A}'$ est la multiplication par 2 dans $\mathcal{A}'$.

On notera d'ailleurs que le double d'un angle de droite, dont les mesures sont définies modulo π, est "naturellement" un "truc" dont les mesures sont définies à 2π près – c'est à dire un angle de vecteurs. De même la moitié d'un angle de vecteurs, dont les mesures sont définies à 2π près, est un angle de droites dont les mesures sont définies à π près.

<u>Nouvel énoncé du théorème de l'arc capable</u>

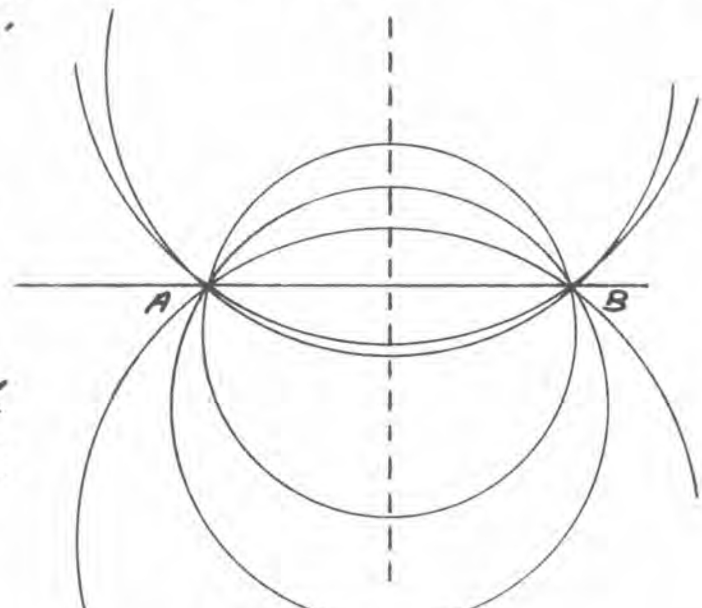
Dans l'énoncé donné au §3, la condition $2(\vec{CA}, \vec{CB}) = 2(\vec{DA}, \vec{DB})$ s'écrit, compte tenu de ce qui précède : $\psi(CA, CB) = \psi(DA, DB)$ Soit, puisque ψ est injectif : $(CA, CB) = (DA, DB)$

Et on obtient ainsi l'énoncé classique du théorème de l'arc capable :

Soit A, B, C, D 4 points du plan, alors $(CA, CB) = (DA, DB)$ si et seulement si A, B, C, D sont cocycliques ou alignés.

§6 : <u>Quelques lieux géométriques</u>

Soit A et B deux points. Soit $\alpha (\neq 0)$ un angle de droites. Soit T_α la droite passant par A telle que $(T_\alpha, AB) = \alpha$. Alors un point M du plan est tel que $(MA, MB) = \alpha$, si et seulement si il est sur le cercle Γ_α passant par B et tangent en A à T_α (c'est le théorème du §c) (et bien sûr $M \neq A$ et $M \neq B$). Ainsi le lieu des points M tels que $(MA, MB) = \alpha$, est ce cercle privé des points A et B. Tandis que le lieu des points M tels que $(MA, MB) = 0$, est la droite AB privée de A et B.



L'ensemble des cercles passant par A et B, et la droite AB, forment ce qu'on appelle le faisceau de cercles de points base A et B.

Notons P_{AB} le plan privé de A et de B. Alors les traces sur P_{AB} des cercles (et de la droite) de ce faisceau, sont une partition de P_{AB}; chacune des courbes de cette partition est, pour un certain α, le lieu des points M tels que $(MA, MB) = \alpha$.

Soit maintenant $\lambda > 0$, cherchons les points M tels que $\frac{MA}{MB} = \lambda$, c'est à dire $\overrightarrow{MA}^2 - \lambda^2 \overrightarrow{MB}^2 = 0$. Pour $\lambda = 1$, on trouve les points de la médiatrice de AB (nous la noterons C_1). Pour $\lambda \neq 1$, notons G_λ le barycentre de $(A, 1)$ et $(B, -\lambda^2)$. Alors

$$\overrightarrow{MA}^2 - \lambda^2 \overrightarrow{MB}^2 = \left(\overrightarrow{MG_\lambda} + \overrightarrow{G_\lambda A}\right)^2 - \lambda^2 \left(\overrightarrow{MG_\lambda} + \overrightarrow{G_\lambda B}\right)^2$$

$$\overrightarrow{MA}^2 - \lambda^2 \overrightarrow{MB}^2 = (1-\lambda^2)\overrightarrow{MG_\lambda}^2 + 2\overrightarrow{MG_\lambda}\cdot\left(\overrightarrow{G_\lambda A} - \lambda^2 \overrightarrow{G_\lambda B}\right) + \overrightarrow{G_\lambda A}^2 - \lambda^2 \overrightarrow{G_\lambda B}^2$$

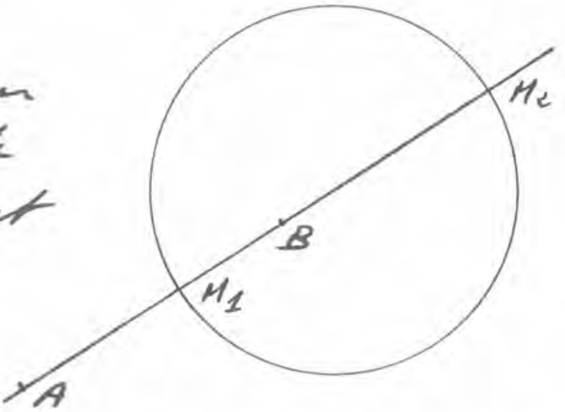
$$= (1-\lambda^2)\overrightarrow{MG_\lambda}^2 + \lambda^4 \overrightarrow{G_\lambda B}^2 - \lambda^2 \overrightarrow{G_\lambda B}^2$$

$$= (1-\lambda^2)\left[\overrightarrow{MG_\lambda}^2 - \lambda^2 \overrightarrow{G_\lambda B}^2\right]$$

Ainsi le lieu des points M tels que $\frac{MA}{MB} = \lambda$, est le lieu des points M tels que $\overrightarrow{MG_\lambda}^2 = \lambda^2 \overrightarrow{G_\lambda B}^2$; c'est à dire le cercle C_λ de centre G_λ et de rayon $\lambda G_\lambda B$.

Notons que ce cercle admet la droite AB pour diamètre; il coupe cette droite aux points M_1 et M_2 tels que

$$\frac{\overline{M_1A}}{\overline{M_1B}} = -\lambda \text{ et } \frac{\overline{M_2A}}{\overline{M_2B}} = \lambda$$

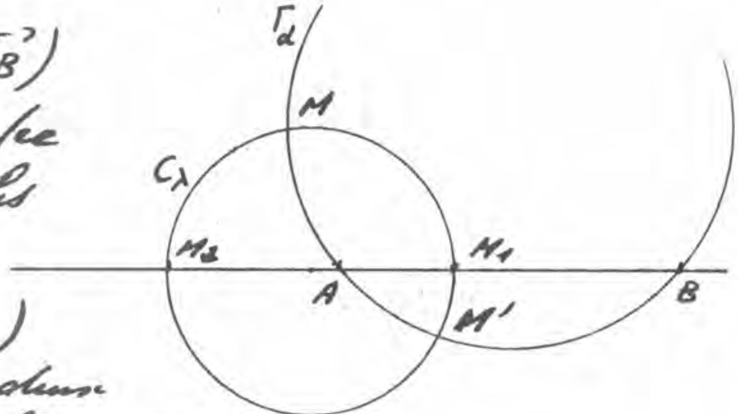


Pour le tracer on peut tracer d'abord M_1 et M_2

Les cercles C_λ ($\lambda > 0$ et $\lambda \neq 1$) et la médiatrice C_1, forment une nouvelle partition de P_{AB}. Nous l'appellerons le faisceau de cercles de points limites A et B.

Quels que soit l'angle de droites α, et le nombre λ ($\lambda > 0$), $T_\alpha \cap C_\lambda$ est formé de deux points. Autrement dit il existe exactement deux points M et M' tels que $(MA, MB) = (M'A, M'B) = \alpha$ et $\frac{MA}{MB} = \frac{M'A}{M'B} = \lambda$ (fig. page suivante)

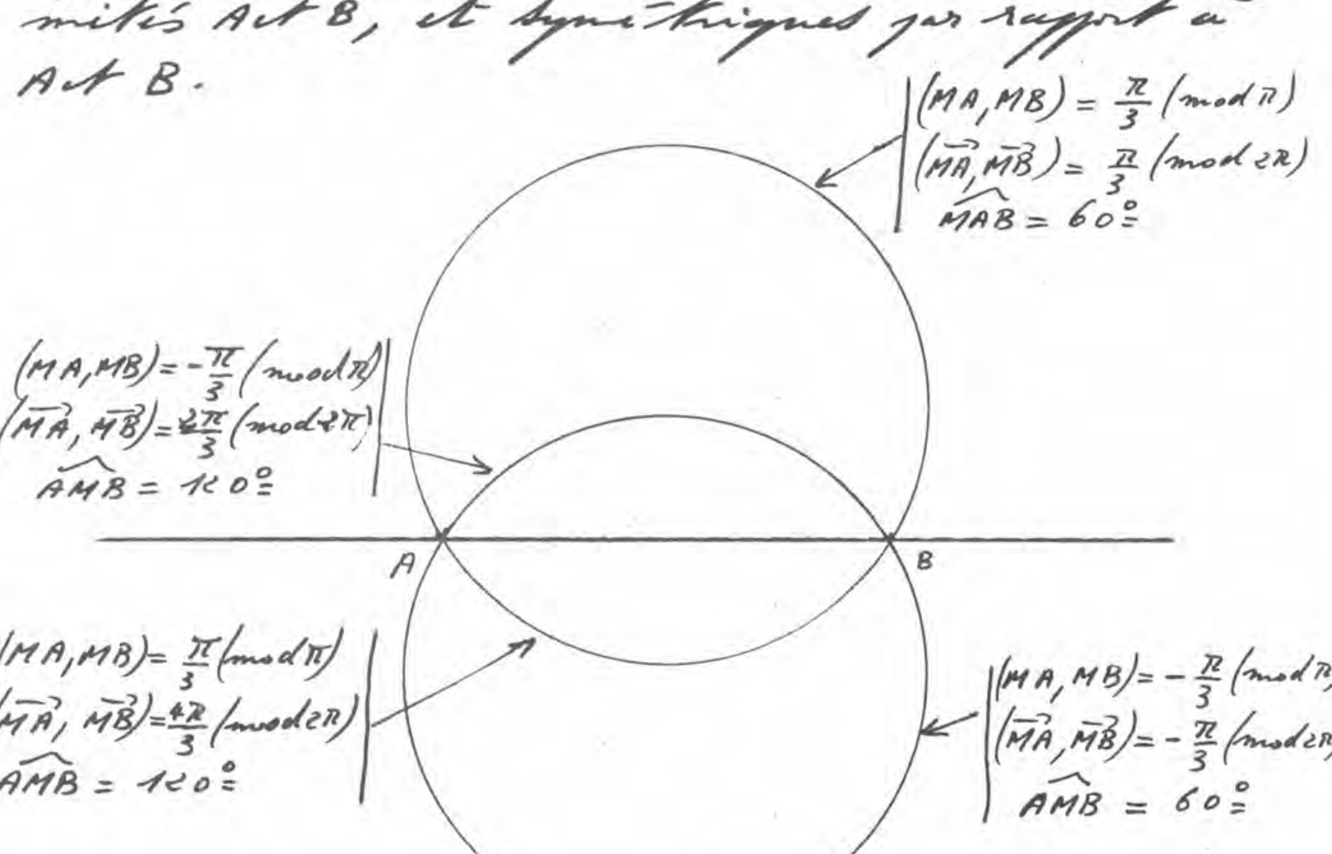
En fait les deux angles de vecteurs



$(\vec{MA},\vec{MB})$ et $(\vec{M'A},\vec{M'B})$ ne sont pas égaux (ce sont les deux angles de vecteurs, dont l'image par X est α)

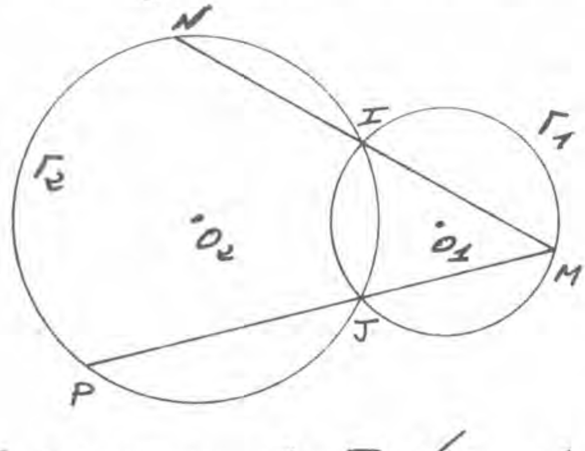
Ainsi l'un des deux arcs $\widehat{AB}$ de Γ_α, est l'ensemble des points tels que $(\vec{MA},\vec{MB})=\alpha_1$, et l'autre l'ensemble des points M tels que $(\vec{MA},\vec{MB})=\pi+\alpha_1$

<u>Remarque</u> : On se convainc facilement, que le lieu des points tels que $\widehat{AMB}=u$ (comme angle de vecteurs) est formé de 2 arcs d'extrémités A et B, et symétriques par rapport à A et B.



Exercices sur le chapitre VI

Exercice 1



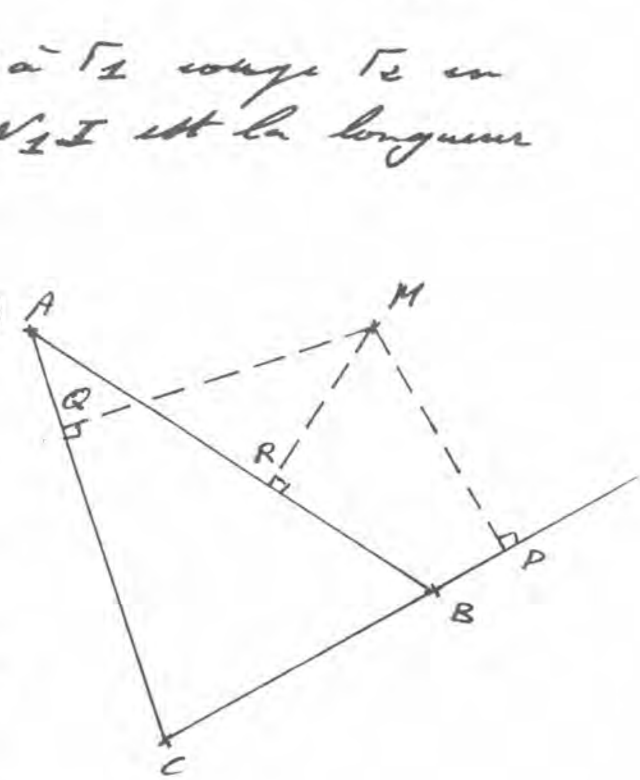
Les deux cercles sont sécants en I et J. On choisit M sur Γ_1, on note N et P les points où les droites MI et MJ recoupent Γ_2 (on suppose donc $M \neq I$, $M \neq J$, et on suppose que MI et MJ ne sont pas tangentes à Γ_2)

1) Montrer que $\measuredangle((IN, IP)) = (\overrightarrow{O_1 I}, \overrightarrow{O_1 J}) - (\overrightarrow{O_2 I}, \overrightarrow{O_2 J})$
En déduire que $(\overrightarrow{O_2 N}, \overrightarrow{O_2 P})$ et NP sont indépendants du choix de M sur Γ_1

2) On choisit maintenant M_0 sur la tangente en I à Γ_2. La droite $M_0 J$ recoupe Γ_2 en P_0. Montrer que $P_0 I$ est la longueur MP précédente.

3) La tangente en I à Γ_1 coupe Γ_2 en I et en N_1. Montrer que $N_1 I$ est la longueur MP précédente.

Exercice 2 (Droite de Simpson)

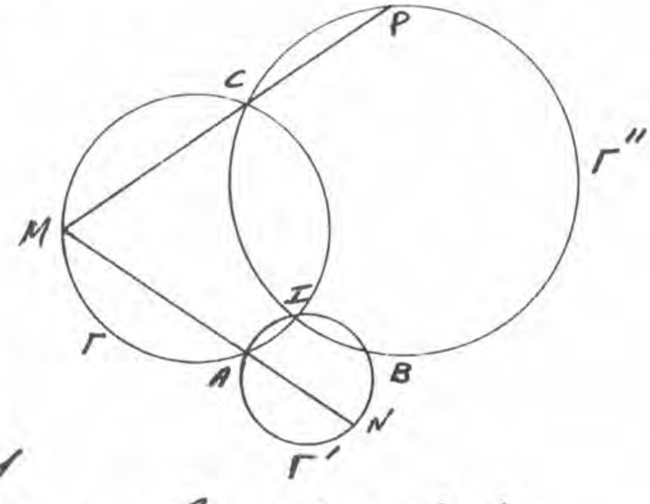


Soit ABC un triangle et M un point. On note P, Q, R les projections de M sur les droites BC, CA, AB.

a) On suppose que P, Q, R

sont distincts des points A, B, C. Montrer que $(RP, RB) = (MP, MB)$ et $(RQ, RA) = (MQ, MA)$
En déduire que $(RP, RQ) = (MP, MB) + (MA, MQ)$
En déduire que P, Q, R sont alignés si et seulement si M est sur le cercle circonscrit à ABC

b) On suppose que $P = B$ (et Q et R distincts de A, B et C). En modifiant la démonstration précédente, montrer que P, Q, R sont alignés si et seulement si M est sur le cercle circonscrit à ABC.



Exercice 3

Les 3 cercles ont en commun le point I. Ils se recoupent en A, B et C. On choisit sur Γ un point M (distinct de A et C); les droites MC et MA recoupent les cercles Γ' et Γ'' (on suppose donc qu'elles ne leur sont pas tangentes) en N et P (distincts de B et C).

a) Démontrer les égalités (dans $\mathfrak{D}'$)

$(BN, MN) = (IB, IA)$

$(BP, MP) = (IB, IC)$

$(MP, MN) = (IC, IA)$

En déduire que B, N et P sont alignés

b) On suppose maintenant que M a été choisi de telle façon que MC soit tangente à Γ''.

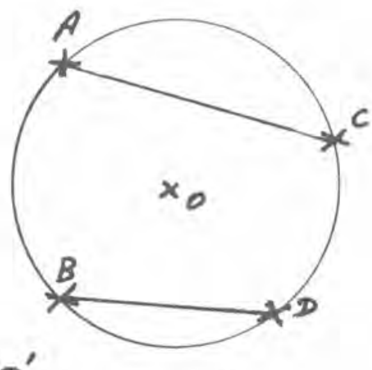
En modifiant la démonstration précédente, montrer que C, B et N sont alignés

c) On suppose maintenant que M a été choisi de façon que $N = B$. Montrer que PB est la tangente en B à Γ'.

Exercice 4

Soit ABC un triangle et soit H son orthocentre. Démontrer que les symétriques de H par rapport aux côtés du triangle, sont sur le cercle circonscrit.

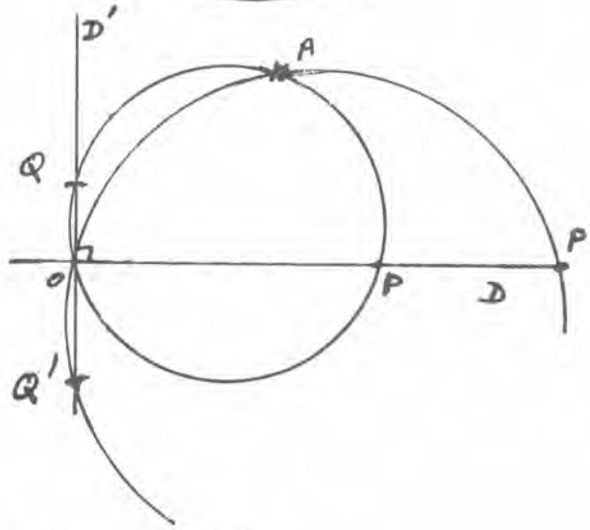
Exercice 5



Démontrer que

$$4(AC, BD) = (\vec{OC}, \vec{OD}) + (\vec{OA}, \vec{OB})$$
$$= (\vec{OC}, \vec{OB}) + (\vec{OA}, \vec{OD})$$

Exercice 6

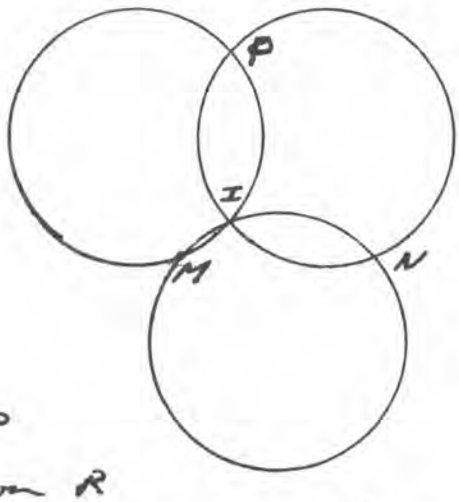


a) Le point A est équidistant de D et de D'. Montrer que le triangle APQ est isocèle rectangle

b) En déduire que $PP' = QQ'$.

Exercice 7 (Fig sur la page suivante)

Les 3 cercles Γ, Γ' et Γ'' ont même rayon R. Ils ont un point I en commun, et se recoupent en M, N et P



a) Montrer que

$(PI, PN) = -(MI, MN)$

$(PI, PM) = -(NI, NM)$

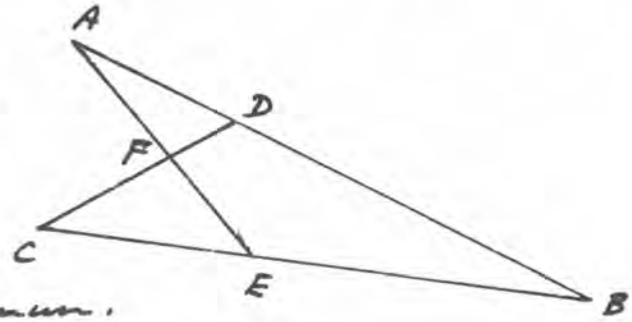
b) En déduire que

$(PM, PN) = -(MI, NI)$

c) En déduire que M N P sont sur un cercle de rayon R

(On comparera avec l'exercice 9 du chapitre I)

Exercice 8



Sur cette figure, il y a quatre triangles. Leurs 4 cercles circonscrits ont un point commun.

Pour s'en convaincre :

a) Montrer que les cercles C E F et C B D ne sont pas tangents en C. Ils ont donc un second point commun Ω.

b) Montrer que $(\Omega E, \Omega B) = (DC, DB) - (FC, FE)$

En déduire que Ω est sur le cercle A E B

c) Démontrer de même que Ω est sur le cercle AFD.

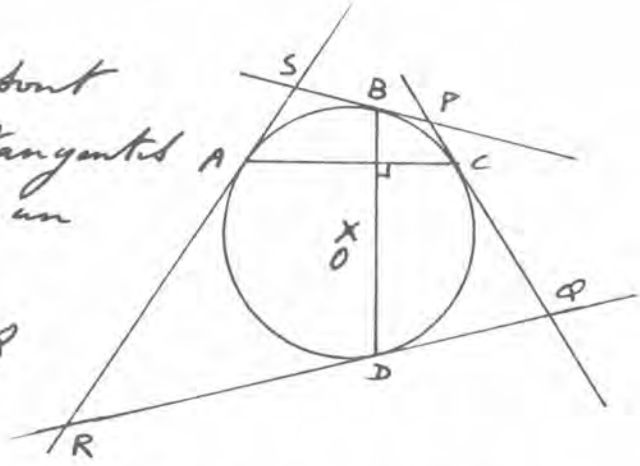
Exercice 9

Deux cercles de même rayon se coupent en A et B

a) Une droite passant par B les recoupe en M et N. Montrer que le triangle MAN est isocèle.

b) La tangente à l'un en B recoupe l'autre en P. Montrer que le triangle ABP est isocèle

Exercice 10 :



Les cordes AC et BD sont perpendiculaires. Les tangentes en ces 4 points forment un quadrilatère RSPQ. Alors les points R, S, P et Q sont cocycliques

Pour s'en convaincre

a) Montrer que $(OA, OD) + (OC, OB) = 0$, où O est le centre du cercle (comparer avec l'exercice 5)

b) En déduire que $(SR, QR) = (SP, QP)$, et que PQRS sont cocycliques.

Exercice 11

On donne deux droites D_1 et D_2 non parallèles et un point A non situé sur elles. Une droite variable Δ passe par A, ses symétriques par rapport à D_1 et D_2 se coupent en M

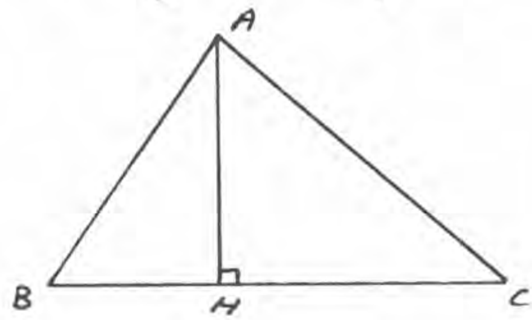
Quel est le lieu du point M ?

(On pourra montrer d'abord que l'angle des deux droites symétriques de Δ, est indépendant du choix de Δ)

Appendice au chapitre VI : Cas de figure et éléments orientés

Considérons 2 exercices

<u>Exercice A</u> : Soit ABC un triangle tel que $AB = 4$, $BC = 6$, $CA = 5$.
Calculer la hauteur AH.



Par application du théorème de Pythagore

(1) $HC^2 - HB^2 = AC^2 - AB^2 = 9$

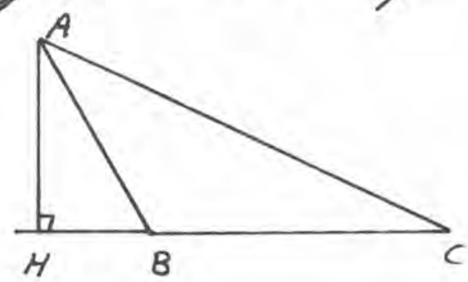
(2) Soit $9 = (HC + HB)(HC - HB) = BC(HC - HB) = 6(HC - HB)$

Donc HB et HC sont racines du système

(3) $$\begin{cases} HC - HB = \dfrac{9}{6} \\ HC + HB = 6 \end{cases}$$

D'où $HC = \dfrac{15}{4}$ et $AH^2 = AC^2 - HC^2 = \dfrac{175}{16}$

Recommençons avec un triangle ABC tel que $AB = 3$, $BC = 4$ et $AC = 6$



Nous

(1) $HC^2 - HB^2 = AC^2 - AB^2 = 27$

(2) $27 = (HC - HB)(HC + HB) =$
$BC(HC + HB) = 4(HC + HB)$

D'où

(3) $$\begin{cases} HC + HB = \dfrac{27}{4} \\ HC - HB = 4 \end{cases}$$

D'où $HC = \dfrac{43}{8}$; d'où $AH^2 \ldots$

Ce second calcul n'est pas tout à fait identique au premier, car cette fois, B se trouve entre H et C; le cas de figure est différent. Il pourrait aussi arriver que C soit entre B et H. Mais il est possible de donner un calcul valable dans tous les cas de figure. Pour cela orientons la droite BC (par exemple de C vers B), et utilisons les mesures algébriques; on aura

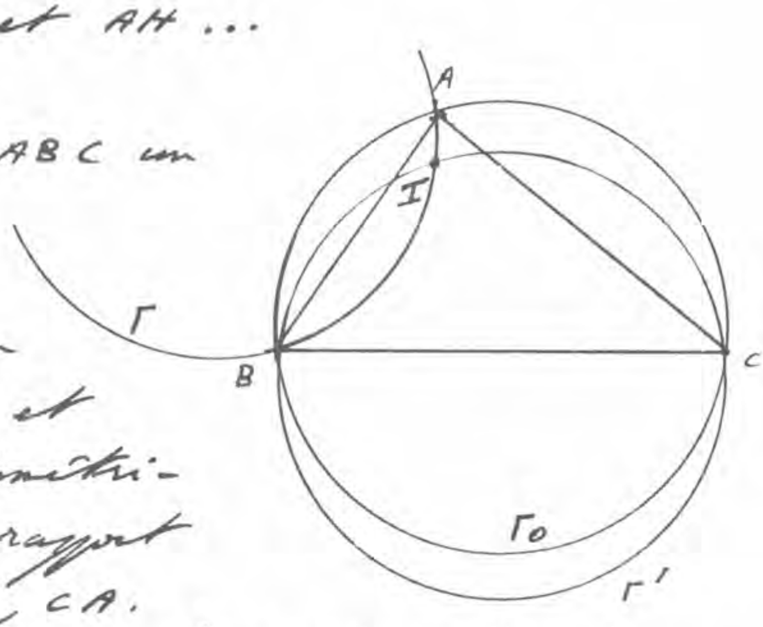
(1) $\overline{HB}^2 - \overline{HC}^2 = AB^2 - AC^2$

(2) $AB^2 - AC^2 = (\overline{HB} - \overline{HC})(\overline{HB} + \overline{HC}) = \overline{CB}\,(\overline{HB} + \overline{HC})$

D'où

(3) $\begin{cases} \overline{HB} + \overline{HC} = (AB^2 - AC^2)/\overline{CB} \\ \overline{HB} - \overline{HC} = \overline{CB}. \end{cases}$

D'où $\overline{HC}$, $\overline{HB}$, et AH ...



Exercice B : Soit ABC un triangle tel que $AB = 4$, $BC = 6$ et $CA = 5$. Soit Γ_0 son cercle circonscrit, et soit $\Gamma, \Gamma', \Gamma''$ les symétriques de Γ_0 par rapport aux droites AB, BC, CA.

Montrer que les cercles Γ, Γ' et Γ'' ont un point commun (Si on a traité l'exercice 4 du chapitre VI, on sait que ce point est l'orthocentre de ABC)

Nous allons d'abord donner une démonstration utilisant les angles de secteurs (et l'énoncé banal du théorème de l'arc capable, utilisant les angles de secteurs - cf : § 6)

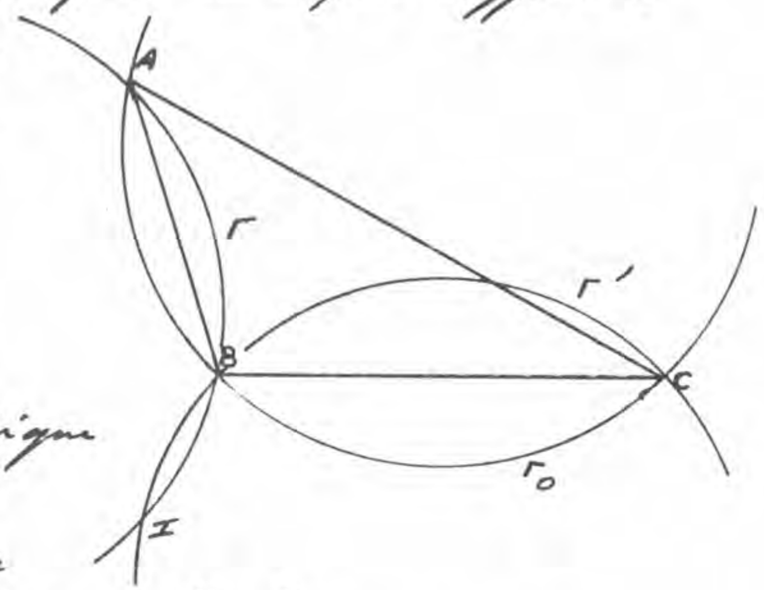
Soit I le second point d'intersection des cercles Γ et Γ' (ces deux cercles se rencontrent en A, et un autre point, puisqu'ils ne sont pas tangents en A).

(4) Alors $\widehat{AIB} = \pi - \widehat{ACB}$ et $\widehat{BIC} = \pi - \widehat{BAC}$

(5) Donc $\widehat{AIC} = 2\pi - \widehat{AIB} - \widehat{BIC} = \widehat{ACB} + \widehat{BAC}$

(6) Donc $\widehat{AIC} = \pi - \widehat{ABC}$ (somme des angles d'un triangle)

(7) D'où, puisque I et B sont du même côté de la droite AC, le symétrique de I par rapport à BC se trouve sur l'arc de Γ_0 qui ne contient pas A.



Recommençons avec un triangle tel que :
$AB = 4$, $BC = 6$ et $CA = 8$

Cette fois le symétrique de I par rapport à BC et A sont sur le même arc d'extrémités B et C de Γ_0. Donc

(4) Donc $\widehat{BIC} = \widehat{BAC}$. De même $\widehat{AIB} = \widehat{ACB}$

(5) Donc $\widehat{CIA} = \widehat{CIB} + \widehat{BIA} = \widehat{BAC} + \widehat{BCA} =$

(6) Donc $\widehat{CIA} = \pi - \widehat{CBA}$ (angles d'un triangle)

(7) Donc le symétrique de I par rapport à AC se trouve sur l'arc de Γ_0 d'extrémités B et C et qui ne contient pas B (on se sert ici du fait

que B et I sont du même coté de AC.

Laissons au lecteur le soin d'envisager tous les cas de figure ; et raisonnons en termes d'angles de droites :

Notons I le second point d'intersection de Γ et Γ'. Au cas où les 2 cercles seraient tangents en B, faire dans ce qui suit $I = B$ et $IB =$ "la tangente commune à ces deux cercles". On notera que l'on peut se placer dans le cas où I n'est ni A, ni C (puisque les cas $I = A$ et $I = C$ sont évidents). Alors

(4) $(IA, IB) = -(CA, CB)$ et $(IB, IC) = -(AB, AC)$

(5) $(IA, IC) = (IA, IB) + (IB, IC) = -(CA, CB) - (AB, AC)$

(6) $(IA, IC) = (CB, AB) = -(AB, CB)$

(7) Donc le symétrique de I par rapport à AC, est sur le cercle qui passe par A, B et C.

<u>A quoi servent les éléments orientés ?</u>

Ces deux exercices ont en commun de donner lieu à des cas de figure : les positions relatives de BHC, ou de I par rapport aux cotés, dépendent des longueurs des cotés du triangle. Lorsque nous étudions l'un de ces cas figure (ie : si nous donnons des valeurs numériques aux cotés AB, BC, CA) les raisonnements en termes de longueurs, ou d'angles de secteurs, nous donnent des démonstrations simples. Mais il faut les modifier un peu lorsque l'on passe d'un cas de figure à un autre, les éléments orientés (mesures algébriques, angles de vecteurs ou de droites, vecteurs) permettent d'écrire une démonstration valable dans tous les cas; c'est leur raison d'être.

Comparons les différents arguments. Dans l'exercice A on part de $HB^2 - HC^2 = AB^2 - AC^2$; et $HB^2 - HC^2$ peut s'écrire $\overline{HB}^2 - \overline{HC}^2$ (ligne 1). Puis on écrit $HB^2 - HC^2 = (HB - HC)(HB + HC)$; et dans ces deux parenthèses, l'une est égale à BC (ou à $-BC$), mais ce n'est pas toujours la même (ligne 2). Avec les valeurs algébriques, nous avons $\overline{HB}^2 - \overline{HC}^2 = (\overline{HB} - \overline{HC})(\overline{HB} + \overline{HC}) = \overline{CB}(\overline{HB} + \overline{HC})$. Notons que c'est la relation de Chasles qui remplace le raisonnement sur les segments mis bout à bout. Il reste un système linéaire.

De même pour l'exercice B nous partons (ligne 4) de l'énoncé du théorème de l'arc capable (avec les outils utilisés). Puis nous utilisons la relation de Chasles, au lieu de l'addition des secteurs adjacents (ligne 5). Puis la relation de Chasles au lieu d'un argument de somme des angles d'un triangle (ligne 6). Enfin l'arc capable (ligne 7).

Toutefois il est à remarquer que les 2 types de preuves (sans ou avec éléments orientés) se déroulent parallèlement. Il est donc possible de raisonner d'abord sur un cas de figure, en termes de longueurs, ou d'angles de secteurs; et on peut ensuite traduire en termes d'éléments orientés, pour traiter en même temps tous les cas de figure.

<u>Remarque finale</u> : Il apparaît sur ces deux exemples que la considération des valeurs algébriques (ou des angles de droites) n'a d'intérêt que lorsque la figure n'est pas figée (i.e : lorsque quelques données sont arbitraires). Ainsi des exercices du type "$\overline{AB} = 3$, $\overline{BD} = -4$, $\overline{DC} = -7$ et $\overline{EC} = -4$, combien vaut $\overline{AE}$" ne sont que des artifices qui ne donnent aucune idée de l'utilité des mesures algébriques. Pour qu'ils soient pertinents il faudrait que dans les valeurs données figurent une lettre (i.e : une indétermination). On comparera utilement avec ce qu'on pose – trop souvent – en classe de 3ème ou de 4ème.

Chapitre VII : Les similitudes planes.

§1 : Généralités sur les similitudes.

Nous appellerons similitude de rapport r ($r>0$) du plan P, toute application f de P dans lui même, telle que, quelque soient les points M et N, on ait : $f(M)f(N) = r\,MN$.

Théorème : Pour que $f : P \to P$ soit une similitude, il faut et il suffit qu'il existe une homothétie h (de rapport r) et une isométrie g telles que $f = g \circ h$.

Démonstration : La condition est évidemment suffisante. Montrons qu'elle est nécessaire : Soit f une similitude de rapport r. Choisissons une homothétie h de rapport r (quelconque !). Alors $g = f \circ h^{-1}$ conserve les distances (puisque h^{-1} les divise par r, et g les multiplie par r) ; donc g est une isométrie et $f = g \circ h$.

Conséquences de ce théorème

a) Toute similitude est bijective (car composée de deux applications bijectives). L'inverse d'une similitude de rapport r, est une similitude de rapport $\frac{1}{r}$.

b) La composée de deux similitudes de rapports r et r', est une similitude de rapport rr'. Notons que ces propriétés signifient que l'ensemble $\mathcal{S}(P)$ des similitudes du plan P, est un sous-groupe de $Biject(P)$.

Ce sous-groupe contient le groupe des dilatations (car il contient les homothéties et les translations) et le groupe des isométries. C'est en fait le plus petit sous-groupe de $Biject(P)$ qui contient $\mathcal{D}(P)$ et $\mathcal{O}(P)$.

c) Toute similitude est une application affine car (si $f = g \cdot h$) :

$$\overrightarrow{f(M)f(N)} = \overrightarrow{g \cdot h(M)\, g h(N)} = \vec{g}\left(\overrightarrow{h(M)h(N)}\right) = \vec{g}\left(r\overrightarrow{MN}\right)$$
$$= r \cdot \vec{g}\left(\overrightarrow{MN}\right).$$

Son application linéaire associée est $r\vec{g}$.

d) A toute similitude on peut associer son rapport. On obtient ainsi une application de $\mathcal{S}(P)$ dans $]0, \infty[$, c'est un homomorphisme de groupes ($]0, \infty[$ est un groupe pour la multiplication).

§2 : <u>Calcul des similitudes planes</u>

<u>Formules matricielles</u> : D'après la démonstration du théorème du §1, toute similitude f s'écrit $g \cdot h$, où (un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ étant donné) h est une homothétie de centre O, dont les formules s'écrivent :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r x \\ r y \end{pmatrix}$$

et où g est une isométrie, dont les formules s'écrivent
$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}a & -\varepsilon b\\ b & \varepsilon a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$
($\varepsilon = \pm 1$ et $a^2+b^2=1$).

En composant ces formules, on voit que f s'écrit
$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}ra & -r\varepsilon b\\ rb & r\varepsilon a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$
Soit, en posant $\alpha = ra$ et $\beta = rb$:
$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\alpha & -\varepsilon\beta\\ \beta & \varepsilon\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$
(avec comme seules conditions $\varepsilon = \pm 1$ et $\alpha^2+\beta^2 \neq 0$)

Réciproquement toute application dont les formules s'écrivent
$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}P & -\varepsilon Q\\ Q & \varepsilon P\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$
(où $\varepsilon = \pm 1$ et $P^2+Q^2 \neq 0$) est la composée de l'homothétie de centre O, qui s'écrit $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}\sqrt{P^2+Q^2}\,x\\ \sqrt{P^2+Q^2}\,y\end{pmatrix}$, et de l'isométrie qui s'écrit $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}P' & -\varepsilon Q'\\ Q' & \varepsilon P'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ (où l'on a posé $P' = P/\sqrt{P^2+Q^2}$ et $Q' = Q/\sqrt{P^2+Q^2}$).

<u>Formules complexes</u> : De la même façon, si P est identifié à $\mathbb{C}$ par le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$, et si $f = g \circ h$ est une similitude (où h est l'homothétie de centre O et de rapport r), alors
- les formules complexes de h s'écrivent
$$z \longrightarrow Z = rz.$$
- les formules complexes de l'isométrie g

s'écrivent

soit $z \longrightarrow Z = az + b$ (si g est un déplacement – i.e : $\varepsilon = +1$) où $|a| = 1$

soit $z \longrightarrow Z = a\bar{z} + b$ (si g est un antidéplacement – i.e : $\varepsilon = -1$) où $|a| = 1$

En composant ces formules, on voit que f s'écrit :

$$z \longrightarrow Az + b \quad \text{ou} \quad z \longrightarrow A\bar{z} + b$$

où l'on a posé $A = ra$.

Réciproquement toute formule du type

$$z \rightarrow Vz + v \quad \text{ou} \quad z \longrightarrow V\bar{z} + v$$

définit une similitude de P, composée de l'homothétie $z \rightarrow |V|z$ et de l'isométrie $z \rightarrow uz + v$ ou $z \rightarrow u\bar{z} + v$ (on a posé $u = V/|V|$)

§ 3 : Angles et similitudes

Soit f une similitude (qui s'écrit $g \cdot h$ comme ci-dessus). Et soit $A \neq B$ et $C \neq D$ quatre points. Alors

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = (\overrightarrow{h(A)h(B)}, \overrightarrow{h(C)h(D)}) = \begin{cases} = (\overrightarrow{f(A)f(B)}, \overrightarrow{f(C)f(D)}) \\ \text{si } g \text{ est un déplacement} \\ = -(\overrightarrow{f(A)f(B)}, \overrightarrow{f(C)f(D)}) \\ \text{si } g \text{ est un antidéplacement} \end{cases}$$

Il existe ainsi deux sortes de similitudes

. Celles qui conservent les angles (composées d'une homothétie et d'un déplacement) On les appelle les similitudes directes. Ce sont celles dont les formules complexes s'écrivent

$z \to az+b$.

- Celles qui "invertent" les angles (c'est-à-dire celles qui sont composées d'une homothétie et d'un antidéplacement). On les dit "indirectes". Ce sont celles dont les formules complexes s'écrivent $z \to a\bar{z}+b$.

Exercice : Soit $\mathcal{S}^+(P)$ l'ensemble des similitudes directes du plan P. Montrer que $\mathcal{S}^+(P)$ est un sous-groupe distingué de $\mathcal{S}(P)$. Puis montrer que le groupe quotient $\mathcal{S}(P)/\mathcal{S}^+(P)$ a deux éléments.

Soit f une similitude directe et $A \neq B$ deux points. Alors $(\vec{AB}, \overrightarrow{f(A)f(B)})$ est indépendant du choix de A et B. En effet si $f = g \cdot h$, où h est une homothétie de rapport positif, on a

$$(\vec{AB}, \overrightarrow{f(A)f(B)}) = (\vec{AB}, \overrightarrow{h(A)h(B)}) + (\overrightarrow{h(A)h(B)}, \overrightarrow{g\cdot h(A)\, g h(B)})$$
$$= (\overrightarrow{h(A)h(B)}, \overrightarrow{g\cdot h(A)\, g\cdot h(B)})$$

ainsi $(\vec{AB}, \overrightarrow{f(A)f(B)})$ est l'angle du déplacement g (quels que soient A et B). Cet angle est aussi appelé l'angle de la similitude directe f.

Exercice : On définit une application de $\mathcal{S}^+(P)$ dans $\mathcal{A}(P)$ en associant à toute similitude directe, son angle. Montrer que cette application est un homomorphisme de groupe surjectif. Quel est son noyau ?

Exercice : On considère la similitude directe de formules complexes $z \to az+b$ ($a \in \mathbb{C}^*$)
Quel est son angle ?

§4 : Les différents types de similitudes directes

(Pour l'étude des différents types de similitudes indirectes, voir l'exercice 14)

Les similitudes directes de rapport 1 sont les déplacements, c'est à dire les rotations et les translations.

Les similitudes directes de rapport différent de 1 ont toutes un unique point fixe. En effet elles s'écrivent $z \to z' = az+b$ (avec $|a| \neq 1$) ; le point fixe est défini par l'équation $z_0 = az_0 + b$; c'est le point $z_0 = b/(1-a)$ ($1-a$ est non nul, puisque $|a| \neq 1$).

Puisque $Z = az+b$ et $z_0 = az_0+b$, on a aussi $Z - z_0 = a(z-z_0)$, ce qui s'écrit :

$$Z - z_0 = |a|\frac{a}{|a|}(z - z_0)$$

Ainsi la similitude apparait comme la composée

- de $z \to z'$ tel que $z' - z_0 = \frac{a}{|a|}(z - z_0)$
- de $z' \to Z$ tel que $Z - z_0 = |a|(z' - z_0)$

La première de ces applications est la rotation de centre $M(z_0)$ (c'est son point fixe !) et d'angle $\operatorname{Arg}\frac{a}{|a|} = \operatorname{Arg} a$. La seconde est l'homothétie de centre $M(z_0)$ et de rapport $|a|$.

Toute similitude directe de rapport $\neq 1$ est donc la composée d'une rotation et d'une homothétie de même centre (la rotation peut - bien sûr - être réduite à l'identité)

On notera que dans le cas où g et h ont même centre, elles commutent, on a donc $f = g \circ h = h \circ g$.

Exercice : Soit A un point de P, et $\mathcal{S}_A^+$ l'ensemble des similitudes directes qui laissent A fixe. Montrer que $\mathcal{S}_A^+$ est un sous-groupe de $\mathcal{S}_A$. Montrer que $\mathcal{S}_A^+$ est commutatif. Montrer que $\mathcal{S}_A^+$ est isomorphe au groupe multiplicatif $\mathbb{C}^*$.

§5 : <u>Caractérisation d'une similitude directe par l'image de deux points.</u>

<u>Théorème</u> : Soit $M \neq N$ et $M' \neq N'$ 4 points de P. Il existe une similitude directe f et une seule, telle que $f(M) = M'$ et $f(N) = N'$.

Démonstration : Nous utiliserons un calcul dans $\mathbb{C}$. Notons m, n, m', n' les affixes de M, N, M', N'. Les similitudes f telles que $f(M) = M'$ et $f(N) = N'$, sont définies par une formule du type $z \to az + b$, telle que $m' = am + b$ et $n' = an + b$. Pour déterminer a et b nous résoudrons le système (en a et b)

$$\begin{cases} m' = am + b \\ n' = an + b \end{cases}$$

Ce système a une unique solution :

$$a = \frac{m' - n'}{m - n} \quad \text{et} \quad b = \frac{m'n - n'm}{n - m}$$

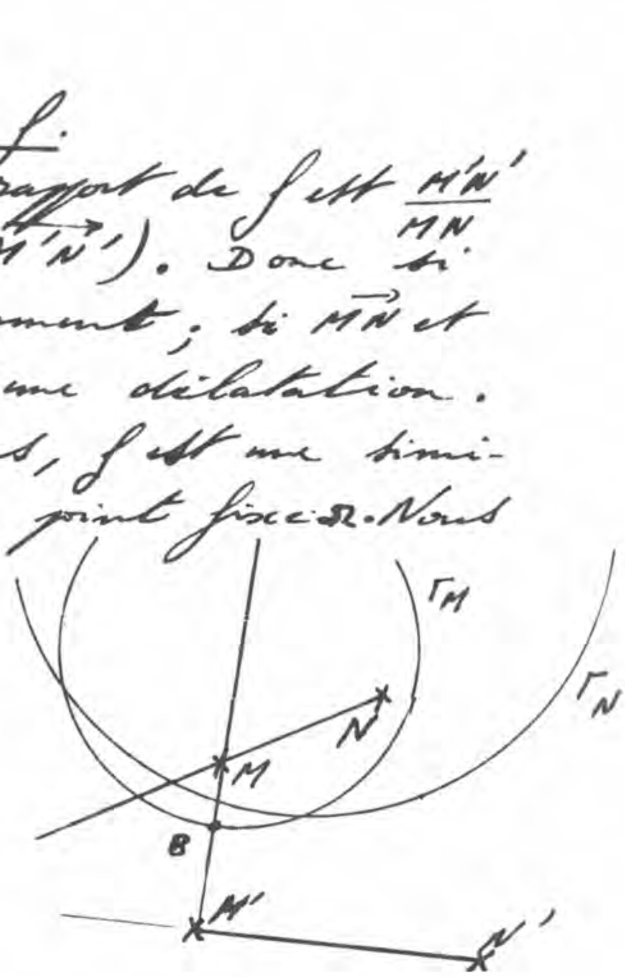
Il y a donc une similitude et une seule.

<u>Exercice</u> : Démontrer que, dans les mêmes conditions, il existe une unique similitude inverse g telle que $g(M) = M'$ et $g(N) = N'$. Quelle est la nature de la transformation $g \cdot f^{-1}$?

<u>Construction du centre de f.</u>

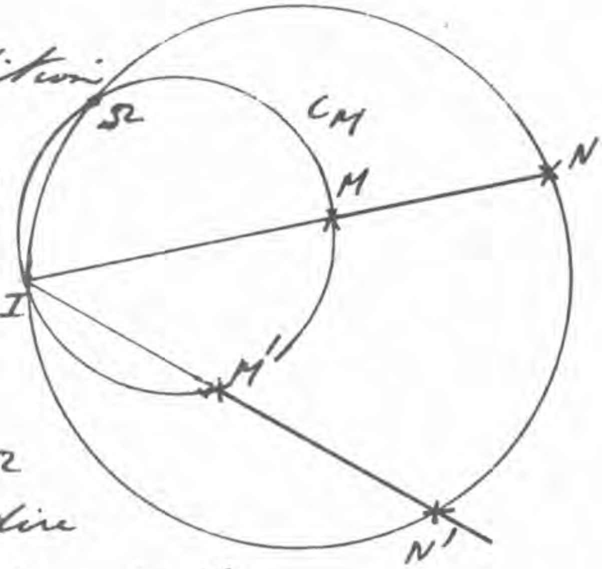
Il est clair que le rapport de f est $\frac{M'N'}{MN}$ et que son angle est $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'})$. Donc si $M'N' = MN$, f est un déplacement ; si $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{M'N'}$ sont parallèles, f est une dilatation.

Eliminons ces deux cas, f est une similitude ayant un unique point fixe Ω. Nous allons le construire.



D'abord $\frac{M'\Omega}{M\,\Omega} = \frac{M'N'}{MN}$. Le lieu des points P tels que $\frac{M\Omega}{M'\Omega} = \lambda\ (\neq 1)$ est un cercle centré sur MM'. Donc ceci nous donne un premier cercle (ayant pour diamètre les points A et B de MM' tels que $\overline{AM'} = \frac{M'N'}{MN}\overline{AM}$ et $\overline{BM'} = -\frac{M'N'}{MN}\overline{BM}$) et qui contient Ω. Soit Γ_M ce cercle.

De même la condition $\frac{\Omega N'}{\Omega N} = \frac{M'N'}{MN}$, nous permet d'affirmer que Ω se trouve sur un certain cercle Γ_N. Ces cercles ont au moins un point commun (puisque Ω existe). On peurait montrer que (les conditions $\frac{M'N'}{MN} \neq 1$ et MN non parallèle à $M'N'$ impliquent que) ces deux cercles ne sont pas confondus. Ils ont donc en général deux points communs, l'un est Ω, l'autre le point fixe de la similitude inverse g qui envoie M sur M' et N sur N' (Voir exercice ci dessus)



D'autre part la condition $(\vec{MN}, \vec{M'N'}) = (\vec{\Omega M}, \vec{\Omega M'})$ implique $(MN, M'N') = (IM, IM')$ (où I est l'intersection des droites MN et $M'N'$). D'après le chapitre VI, ceci signifie que M, M', I, Ω sont cocycliques, c'est à dire que Ω est sur le cercle circonscrit à IMM'. Soit C_M ce cercle.

De la même façon Ω est sur le cercle INN'. Soit C_N. Ces deux cercles ont au moins un point commun, c'est le point I. En général ils en ont un autre qui est Ω. Plus précisément, on démontre

Exercice : a) Montrer que si C_M et C_N sont tangents en I, alors il existe une homothétie h de centre I telle que $h(M) = N$ et $h(M') = N'$. Et alors $I = \Omega$

b) Montrer que si C_M et C_N sont sécants en I et J, alors il n'existe aucune homothétie h de centre I telle que $h(M)=N$ et $h(M')=N'$. Et alors $I \neq \Omega$ (Donc $J=\Omega$)

c) Montrer qu'on ne peut avoir $C_M = C_N$

Exercices sur le chapitre VII

Exercice 1

a) Soit $A(1)$, $B(1+i)$, $A'(2-i)$ et $B'(3-2i)$. Trouver l'image de $C(3+i)$ par la similitude directe qui envoie A sur A' et B sur B'.

b) Trouver l'image de C par la similitude indirecte qui envoie A sur A' et B sur B'

Nota : On peut chercher d'abord les formules de ces deux similitudes. Mais on peut aussi s'efforcer ne pas écrire ces formules.

Exercice 2

Soit deux points $M(t)$ et $N(t)$ animés de mouvements linéaires uniformes

a) Soit s la similitude directe telle que $s(M(0)) = N(0)$ et $s(M(1)) = N(1)$. Montrer que, pour tout t, $s(M(t)) = N(t)$.

b) Quel est le lieu du milieu I du segment MN ?

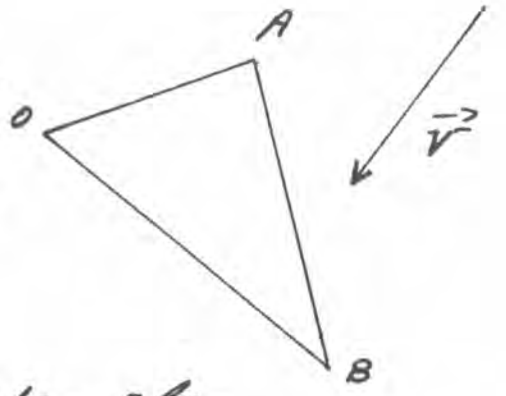
c) On construit le carré $MPNQ$ de diagonale MN. Quel est le lieu des points P et Q ?

Exercice 3 :

Soit deux points $M(t)$ et $N(t)$ parcourant deux cercles C_1 et C_2 uniformément et à la même vitesse angulaire

En s'inspirant de l'exercice 2, montrer qu'il existe une similitude directe s, telle que, quelque soit t, $s(M(t)) = N(t)$

Exercice 4



Soit s la similitude directe de centre O qui envoie A sur B. Soit t la translation de vecteur $\vec{v}$.

Alors $t \circ s$ est une similitude directe. Construire son centre.

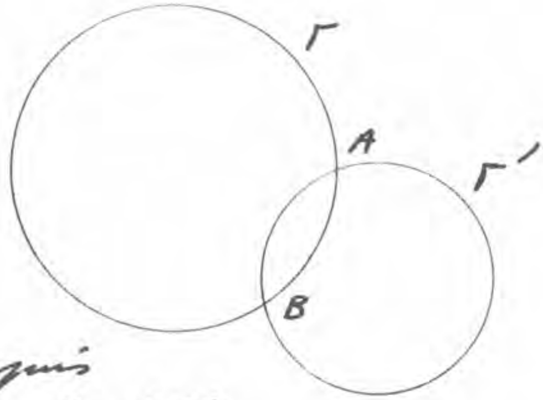
Exercice 5

Soit D et D' deux droites, et soit A un point qui ne leur appartient pas. Construire un triangle ABC isocèle rectangle en B tel que B soit sur D et C sur D'.

Est il possible qu'il y ait une infinité de solutions ? qu'il y en ait une seule ? qu'il n'y en ait pas du tout ?

Exercice 6

Soit ABC et MNP deux triangles tels que $(AB, BC) = (MN, NP)$ et $(BC, CA) \equiv (NP, PM)$. Démontrer qu'il existe une similitude directe qui envoie A sur M, B sur N et C sur P.



Exercice 7

Soit 2 cercles sécants en A et B.

A tout point M de Γ on associe la droite AM, puis le point M' intersection de AM et de Γ' (avec les conventions suivantes: Si M = A, alors AM est la tangente à Γ en A. Si AM est tangente à Γ', alors M' = A).

a) Soit M et N deux points quelconques de Γ, il existe une similitude directe f qui envoie M sur N et M' sur N'. Quel est son centre ?

b) En déduire que la similitude directe de centre B qui transforme Γ en Γ' envoie (quelque soit M) M sur M'.

Exercice 8

Soit O un point du plan, soit G_0 l'ensemble des similitudes directes laissant O fixe.

a) Montrer que G_0 est un sous-groupe de $\mathcal{S}(P)$

b) Montrer que G_0 est commutatif.

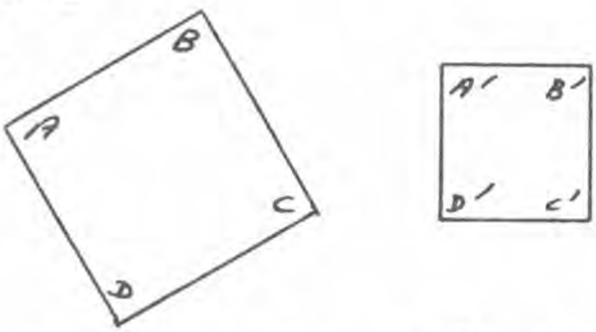
c) Montrer que G_0 n'est pas un sous groupe distingué de $\mathcal{S}(P)$.

Exercice 9

On donne un cercle Γ et un point A. Pour tout point M ($\neq A$) de Γ on construit le carré $ANMP$ de diagonale AM. Quel est le lieu des points N et P ?

Exercice 10

Soit s une similitude directe. A toute droite Δ on associe le point $\alpha(\Delta)$ intersection de Δ et de $s(\Delta)$ (ce qui suppose que l'angle de Δ n'est ni 0 ni l'angle plat)



a) Montrer que si Δ et Δ' sont parallèles, alors $\alpha(\Delta)$, $\alpha(\Delta')$ et O sont alignés

b) Il existe (visiblement !) une similitude directe qui envoie A sur A', B sur B', C sur C' et D sur D' (où $ABCD$ et $A'B'C'D'$ sont les carrés ci-dessus). Déterminer son centre en utilisant (uniquement) une règle non graduée.

Exercice 11

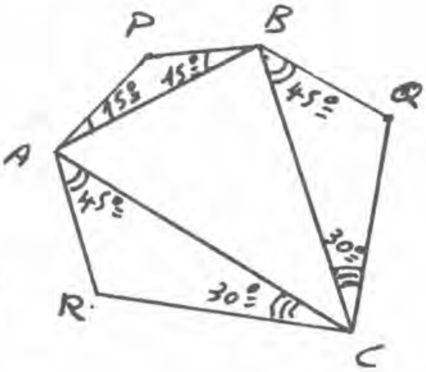
Soit $\mathcal{G}$ un sous groupe de $\mathcal{S}(P)$. On suppose que tout élément de $\mathcal{G}$ a (au moins) un point fixe

a) Soit g et g' dans $\mathcal{G}$, qu'est ce que la transformation $g\cdot g'\cdot g^{-1}\cdot g'^{-1}$? En déduire que G est commutatif.

b) Montrer qu'il existe un point qui est fixe par tous les g de G.

Exercice 12

Soit ABC un triangle, on construit extérieurement à ABC des points RPQ comme ci-contre.



Démontrer que le triangle PQR est isocèle rectangle

Pour cela on notera s_Q la similitude directe de centre Q qui envoie B sur C, et s_R la similitude directe de centre R qui envoie C sur A, et on démontrera que P est le centre de $s_R \circ s_Q$.

Exercice 13

Soit ABC et MNP deux triangles. Soit Δ une droite passant par A. Tracer un triangle $M'N'P'$ directement semblable à MNP (ie : il existe une similitude directe f telle que $f(M) = M'$, $f(N) = N'$ et $f(P) = P'$) et tel que M' et N' soient sur Δ, que la droite $N'P'$ passe par C et la droite $M'P'$ par B.

Montrer que ABC et MNP étant donnés tels que $(BA, BC) \neq (MN, NP)$ ou $(CA, CB) \neq (MN, MP)$, il existe une seule droite Δ pour laquelle la construction est impossible.

Exercice 14

On considère une similitude indirecte f, dont les formules complexes s'écrivent $z \to a\bar{z} + b$ (avec $|a| \neq 1$; donc ce n'est pas un antidéplacement).

a) Montrer qu'elle a un point fixe $M_0(z_0)$ (on montrera d'abord que f^2 a un point fixe)

b) Écrire les formules de l'homothétie de centre M_0 et de rapport $|a|$.

c) Montrer que f est la composée d'une symétrie d'axe passant par M_0 et d'une homothétie de centre M_0. Préciser l'axe de cette symétrie

Exercice 15

Le triangle ABC est rectangle en A. Il existe une similitude directe qui envoie A sur B et C sur A. Construire (le plus simplement possible) son point fixe.