VI 37

UNIVERSITÉ
DE NANCY I

CENTRE
DE TÉLÉ-ENSEIGNEMENT
UNIVERSITAIRE
DE NANCY II

algèbre et géométrie

MODULE AG 2 :

TECHNIQUES DE CALCUL EN ALGÈBRE LINÉAIRE

(DEUXIÈME PARTIE)

COURS DE C. MORLET

DIPLÔME D'ÉTUDES UNIVERSITAIRES GÉNÉRALES
SCIENCES DES STRUCTURES ET DE LA MATIÈRE
MATHÉMATIQUE PHYSIQUE INFORMATIQUE
SCIENCES DE L'ÉDUCATION

Édité et imprimé par l'**Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques** (Université de Nancy I - Faculté des Sciences)
B.P. 239 - 54506 VANDOEUVRE-les-NANCY CEDEX
Dépôt légal : 1er trimestre 1987
n° de la publication : 2-85406-100-4

Le Responsable de la collection : Philippe LOMBARD

Réf. N 521$_2$

Introduction : Nous allons maintenant considérer des applications d'un espace vectoriel dans un autre. Pour qu'une telle application soit intéressante (du point de vue des espaces vectoriels) il faut qu'elle "respecte la somme et le produit par les scalaires". De telles applications sont dites linéaires (§1). Le calcul des applications linéaires se fait, lorsque les espaces sont munis de bases, au moyen de tableaux de nombres appelés matrices.

Plan de la leçon :

Première partie

Deuxième partie

Première partie : Matrices et applications linéaires

§a : <u>Définition et exemples d'applications linéaires</u>

<u>Définition IV 1</u> : Étant donnés deux espaces vectoriels F et E, on dit qu'une application $f : F \to E$ est <u>linéaire</u>, si elle vérifie les deux conditions suivantes :

ℓ_1) Quels que soient X et Y dans F, on a $g(X+Y) = g(X) + g(Y)$.

ℓ_2) Quels que soient X dans F, et le scalaire λ, on a $g(\lambda X) = \lambda g(X)$.

<u>Exemple 1</u> : Considérons l'espace vectoriel de dimention $n+1$ formé des polynomes de degré au plus n. Nous le noterons E_{n+1} (cf : Leçon 2, §f). Considérons p nombres $x_1, \dots, x_p$. A tout polynome P, nous pouvons associer le vecteur $(P(x_1), \dots, P(x_p))$ de $\mathbb{R}^p$. Ceci définit une application

$$\varphi : E_{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^p$$

Elle est linéaire

<u>Exemple 2</u> : Considérons toujours les mêmes

espaces de polynomes. Pour $p \geq n-1$, nous avons une application

$$\delta : E_{n+1} \longrightarrow E_{p+1}$$

qui à tout polynome associe sa dérivée. Elle est linéaire.

<u>Exemple 3</u>: Au § f de la leçon 2, nous avons défini un isomorphisme $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow E_{n-1}$. C'est une bijection de $\mathbb{R}^n$ sur E_{n-1}. Elle est linéaire.

<u>Exemple 4</u>: L'application $E_{n+1} \longrightarrow E_{n+1}$ qui au polynome P associe $aP + bP' + cP''$ (où a, b, c sont des constantes) est linéaire

<u>Exemple 5</u>: Considérons l'espace $\vec{E}$ des vecteurs de l'espace de la géométrie, et $\vec{P}$ le sous-espace de $\vec{E}$ formé des vecteurs parallèles au plan P. En projetant l'espace sur P parallèlement à une droite Δ, on obtient une application

$$\pi_\Delta : \vec{E} \longrightarrow \vec{P}$$

Elle est linéaire.

<u>Exemple 6</u>: Considérons un plan P, et $\vec{P}$ l'espace vectoriel des vecteurs de P. Orientons P. et tout vecteur $\vec{V}$ de $\vec{P}$, nous pouvons associer le vecteur $r(\vec{V})$ de même longueur que $\vec{V}$, et tel que $(\vec{V}, r(\vec{V})) = +\frac{\pi}{2}$. Nous avons ainsi défini une application linéaire $\vec{r} : \vec{P} \longrightarrow \vec{P}$

§ 6 : Matrices associées à une application linéaire

La matrice naturelle de $g : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

Soit $g : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une application linéaire, notons $V_1, \dots, V_p$ les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ qui sont les images par g des vecteurs $(e_1, \dots, e_p)$ de la base naturelle de $\mathbb{R}^p$.

La <u>matrice naturelle</u> de g est le tableau de scalaires à p colonnes et n lignes, obtenu en écrivant :

. dans la 1ère colonne, les coordonnées, dans la base naturelle de $\mathbb{R}^n$, du vecteur V_1.

. dans la 2de colonne, les coordonnées, dans la base naturelle de $\mathbb{R}^n$, du vecteur V_2.

. et ainsi de suite.

<u>Exemple</u> : Supposons $p = 3$ et $n = 2$; supposons $g(e_1) = (1,3)$, $g(e_2) = (3,0)$ et $g(e_3) = (1,4)$. Alors la matrice naturelle de g est

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

<u>Nota</u> : Nous écrirons le tableau entre deux grandes parenthèses. Ceci permet, lorsque l'on écrit plusieurs matrices sur la même ligne, de savoir où chacune d'elles commence et se termine.

<u>Théorème IV$_2$</u> : Une application linéaire $g : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est caractérisée par sa

matrice naturelle. De plus, tout tableau de nombres à p colonnes et n lignes, est la matrice naturelle d'une application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$.

Autrement dit : la correspondance que nous venons de définir, est une bijection de l'ensemble $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$ des applications linéaires de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$, sur l'ensemble $\mathcal{M}(p, n)$ des matrices (ie : des tableaux de scalaires) à n lignes et p colonnes.

<u>Démonstration</u> : Tout vecteur X de $\mathbb{R}^p$ s'écrit $X = x_1 e_1 + \cdots + x_p e_p$; donc si g est linéaire $g(X) = g(x_1 e_1) + \cdots + g(x_p e_p) = x_1 g(e_1) + \cdots + x_p g(e_p)$ Donc si l'on connait les $g(e_i)$, on peut calculer $g(X)$. Or les $g(e_i)$ sont donnés par la matrice naturelle ; donc la matrice naturelle de g caractérise g.

Inversement toute matrice M à p colonnes et n lignes définit p vecteurs de $\mathbb{R}^n$ (donnés par ses p colonnes) ; notons les $V_1, \ldots, V_p$. L'application $\theta : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n$ qui à tout $X = x_1 e_1 + \cdots + x_p e_p$ de $\mathbb{R}^p$, associe $\theta(X) = x_1 V_1 + \cdots + x_p V_p$, est linéaire ; et elle a pour matrice naturelle la matrice M donnée.

<u>La matrice d'une application linéaire $g : F \to E$ dans des bases données de E et F.</u>

Nous allons maintenant nous placer dans un cadre un peu plus général : E sera un espace vectoriel de dimension n, et $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ une base de E; F sera un espace vectoriel de dimension p, et $(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ une base de F. Considérons alors une application linéaire $g: F \rightarrow E$.

Nous pouvons considérer le tableau à p colonnes et n lignes formé des coordonnées des vecteurs $g(\varphi_1), \dots, g(\varphi_p)$ dans la base $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$: Nous mettons dans la 1ère colonne les coordonnées de $g(\varphi_1)$, dans la seconde celles de $g(\varphi_2)$, et ainsi de suite. Ce tableau est appelé la "<u>matrice de g dans les bases $(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ et $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$</u>".

<u>Exemple 1</u>: Considérons l'espace E_4 des polynomes de degré au plus 3, muni de la base $(1, x, x^2, x^3)$, et l'espace E_3 des polynomes de degré au plus 2, muni de la base $(1, x, x^2)$. Considérons l'application $\delta: E_4 \longrightarrow E_3$, qui à tout polynome associe sa dérivée. On a $\delta(1) = 0$, $\delta(x) = 1$, $\delta(x^2) = 2x$ et $\delta(x^3) = 3x^2$. donc la "matrice de δ dans les bases $(1, x, x^2, x^3)$ et $(1, x, x^2)$" s'écrit

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

<u>Exemple 2</u>: Considérons la même application linéaire $\delta: E_4 \longrightarrow E_3$, mais munissons E_4 de la base $(1, 1+x, 1+x+x^2, 1+x+x^2+x^3)$ et E_3 de la base $(1, 1+x, (1+x)^2)$. On a alors

$\delta(1) = 0$, $\delta(1+x) = 1$, $\delta(1+x+x^2) = 1+2x = -1+2x(1+x)$ et $\delta(1+x+x^2+x^3) = 1+2x+3x^2 = 2-4x(1+x)+3x(1+x)^2$. Donc la "matrice de δ dans les bases $(1, 1+x, 1+x+x^2, 1+x+x^2+x^3)$ et $(1, 1+x, (1+x)^2)$" s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Nous avons changé les bases utilisées, sans changer δ, et nous obtenons une autre matrice.

<u>Attention</u> : La matrice de $g : F \longrightarrow E$ dans les bases $(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ et $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ dépend non seulement de g, mais aussi des deux bases $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ et $(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$. Il faut donc considérer l'expression "matrice de g dans les bases $(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ et $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$" comme un tout, et ne pas en oublier un morceau. L'expression "matrice de g" n'a pas de sens, tant qu'on n'a pas précisé dans quelles bases on travaille.

Dans le cas où les espaces sont $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^n$, et où on prend comme bases, les bases naturelles, on abrège l'expression en parlant de "matrice naturelle". C'est ce que nous avons fait au début du §.

Lorsque l'on considère une application linéaire $g : E \longrightarrow E$ (avec le même espace au départ et à l'arrivée), on parlera de "matrice de g dans <u>la</u> base $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$", pour exprimer que les deux bases choisies sont identiques.

Théorème IV$_3$: Choisissons des bases $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ de E et $(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ de F. En associant à toute application linéaire $g : F \longrightarrow E$ sa matrice dans les bases $(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ et $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$, on définit une bijection de l'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ des applications linéaires de F dans E, sur l'ensemble $\mathcal{M}(p, n)$ des matrices à n lignes et p colonnes. Cette bijection dépend, comme on l'a vu, des bases choisies ; nous étudierons au § h, comment elle varie lorsqu'on modifie ces bases.

Démonstration : Elle est analogue à celle de IV$_2$.

Pour l'injectivité : On remarque que la matrice détermine les vecteurs $g(\varphi_j)$ (pour $j = 1, \dots, p$), donc détermine $g(X)$ pour tout X (puisque si $X = a_1 \varphi_1 + \dots a_p \varphi_p$, on a $\varphi(X) = a_1 g(\varphi_1) + \dots + a_p g(\varphi_p)$).

Pour la surjectivité : Notons V_j $(j = 1, \dots, p)$ les vecteurs dont les coordonnées, dans la base $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ forment les p colonnes de la matrice donnée ; et pour tout vecteur $X = a_1 \varphi_1 + \dots + a_p \varphi_p$ de F, posons

$$g(X) = a_1 V_1 + \dots + a_p V_p$$

On vérifie facilement que g est linéaire ; et sa matrice dans les bases $(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ et $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ est la matrice donnée.

Exercice : On considère l'espace vectoriel de dimension 4 des polynomes de degré au plus 3. Notons le E_4. L'application $g : E_4 \longrightarrow E_4$ qui à P associe $P + P' + P''$ est linéaire

1) Quelle est la matrice de g dans la base $(1, x, x^2, x^3)$?

2) Quelle est la matrice de g lorsque l'on munit E au départ de la base $(1, 1+x, (1+x)(1+2x), (1+x)(1+2x)(1+3x))$ et à l'arrivée de la base $(1, 1+x, x^2, x^3)$?

3) Quelle est sa matrice dans la base $(x^3, x^2, x, 1)$?

§C : Image d'une application linéaire

De façon générale on appelle image d'une application $g : A \to B$ l'ensemble des b appartenant à B, tels qu'il existe x dans A, avec $g(x) = b$. C'est à dire l'ensemble des b de B pour lesquels l'équation $g(x) = b$, a – au moins – une solution.

Théorème IV$_4$: L'image d'une application linéaire $g : F \longrightarrow E$ est un sous-espace vectoriel de E. Si $(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ est une base de F, ce sous-espace est le sous-espace engendré par $(g(\varphi_1), \dots, g(\varphi_p))$. L'image de l'application linéaire g sera notée $\operatorname{Im} g$ (et quelquefois $g(F)$).

<u>Démonstration</u> : Tout vecteur φ de F s'écrit $\varphi = a_1 \varphi_1 + \dots + a_p \varphi_p$; donc $g(\varphi) = a_1 g(\varphi_1) + \dots + a_p g(\varphi_p)$. Donc tout vecteur de $\operatorname{Im} g$ est combinaison linéaire des $g(\varphi_j)$. Autrement dit

$$\operatorname{Im} g \subset [g(\varphi_1), \dots, g(\varphi_p)].$$

Inversement une combinaison linéaire des $g(\varphi_j)$ s'écrit $\alpha_1 g(\varphi_1) + \dots + \alpha_p g(\varphi_p)$, donc est l'image de $\alpha_1 \varphi_1 + \dots + \alpha_p \varphi_p$. Ce qui prouve que l'on a

$$[g(\varphi_1), \dots, g(\varphi_p)] \subset \operatorname{Im} g.$$

<u>Corollaire</u> : Si $g : F \to E$ est linéaire, avec F de dimension p, et E de dimension n, alors $\operatorname{Im} g$ est un espace vectoriel de dimension au plus égale à $\inf(p, n)$.

En effet : $\dim(\operatorname{Im} g) \leq n$, puisque $\operatorname{Im} g \subset E$; et $\dim(\operatorname{Im} g) \leq p$, puisque $\operatorname{Im} g$ a un système générateur à p éléments.

<u>Nota</u> : $\operatorname{Im} g = E$ signifie que g est surjective, et équivaut à $\dim(\operatorname{Im} g) = \dim E$. $\operatorname{Im} g = \{0\}$ signifie que g est l'application nulle $F \to \{0\} \subset E$.

<u>Détermination de l'image</u> :

Soit $g : F \to E$ une application linéaire, et soit $(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ et $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ des bases de F et E respectivement. Supposons que l'on connaisse la matrice de g dans ces bases. Pour déterminer une base de $\operatorname{Im} g$, nous devons déterminer une base de

$[g(\varphi_1), \dots, g(\varphi_p)]$. Nous connaissons ces p vecteurs qui sont donnés par les colonnes de la matrice. La méthode du pivot nous permet d'extraire de la famille de vecteurs $(g(\varphi_1), \dots, g(\varphi_p))$ une sous-famille qui est une base de $[g(\varphi_1), \dots, g(\varphi_p)]$.

Exemple 1 : Considérons l'application de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ dont la matrice naturelle est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer une base de $\operatorname{Im} g$, c'est trouver une base du sous-espace de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $(1,2,0)$, $(2,1,3)$, $(1,-1,3)$ et $(1,1,1)$. On réduit par la méthode du pivot

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \end{matrix} \Longrightarrow \begin{matrix} 1 & 2 & 1 & \boxed{1} \\ 1 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{matrix} \Longrightarrow \begin{matrix} 0 & 3 & 3 & \boxed{1} \\ \boxed{1} & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Et on conclut que $g(e_1) = (1,2,0)$ et $g(e_4) = (1,1,1)$ forment une base de $\operatorname{Im} g$

Exemple 2 : Considérons le cas où $E = F = E_3$ (espace des polynomes de degré au plus 2), et $g : E_3 \to E_3$ défini par $g(P)(x) = P(x) + xP'(x)$. Prenons comme base de E_3, les polynomes $(1, (x+1), (x+1)^2)$ (cf : leçon 2, §2).

On a $g(1) = 1$

$$g(1+x) = 2x + 1 = 2(x+1) - 1$$

$$g((1+x)^2) = 3x^2 + 4x + 1 = 3(x+1)^2 - 2(x+1)$$

Donc la matrice de g dans cette base s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

On réduit

$$\begin{matrix} \boxed{1} & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \boxed{1} & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{2} & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{3} \end{matrix}$$

Et on conclut que $\mathrm{Im}\, g = E_3$; autrement dit g est est surjective.

<u>Vocabulaire</u> : La dimension de l'image de $g : F \to E$ est aussi appelée le rang de g. Si cette application est représentée par une matrice M, ce rang est (au sens qu'on a donné à ce mot au § c de la leçon 3) le rang du tableau M.

<u>Exercices</u> : 1) Déterminer une base de l'image de l'application linéaire $g : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$, dont la matrice naturelle est :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2) On considère l'application $g : E_4 \to E_4$ (E_4 espace des polynomes de degré au plus 3) définie par $g(P) = P - P' - P''$. Montrer

qu'elle est surjective.

3) On considère $h : E_3 \longrightarrow E_3$ (le même E_3) qui à $P(x)$ associe $2P(x) - x^2 P''(x)$. Quelle est l'image de h?

§d: Noyau d'une application linéaire.

On appelle noyau de l'application linéaire $g : F \longrightarrow E$, l'ensemble des vecteurs de F dont l'image par g est nulle. Le noyau de g sera noté $\operatorname{Ker} g$ ("Ker" est l'abréviation du mot anglais "kernel"); on le note aussi $g^{-1}(0)$.

Théorème IV$_5$: Le noyau d'une application linéaire $g : F \rightarrow E$ est un sous espace vectoriel de F.

Les dimensions du noyau et de l'image de g sont liées par la relation :

$$\dim(\operatorname{Im} g) + \dim(\operatorname{Ker} g) = \dim F$$

Démonstration : La première assertion est claire : elle signifie seulement que si x et y sont dans $\operatorname{Ker} g$ (ie : $g(x) = g(y) = 0$), alors $x + y$ est dans $\operatorname{Ker} g$ (ie : $g(x+y) = 0$), et aussi, quel que soit le scalaire λ, λx est dans $\operatorname{Ker} g$ (ie ; $g(\lambda x) = 0$).

Pour démontrer la seconde assertion nous allons choisir une base de F un peu particulière : Prenons une base $(f_1, \dots, f_k)$ de $\operatorname{Ker} g$ (k est donc la dimension de $\operatorname{Ker} g$) et choisissons des vecteurs $f_{k+1}, \dots, f_p$ tels que $(f_1, \ldots, f_p)$ soit une base de F (cf: §e de la leçon 2). Alors

$\mathrm{Im}\, g = [g(f_1), \ldots, g(f_p)] = [g(f_{k+1}), \ldots, g(f_p)]$ puisque $g(f_1) = \cdots = g(f_k) = 0$.

Mais les vecteurs $g(f_{k+1}), \ldots, g(f_p)$ sont indépendants. En effet : l'équation $x_{k+1}\, g(f_{k+1}) + \cdots + x_p\, g(f_p) = 0$, équivaut à $x_{k+1} f_{k+1} + \cdots + x_p f_p \in \mathrm{Ker}\, g$. Elle a une solution si et seulement si il existe des scalaires $x_1, \ldots, x_k$ tels que

$$x_{k+1} f_{k+1} + \cdots + x_p f_p = x_1 f_1 + \cdots + x_k f_k$$

Mais, puisque $(f_1, \ldots, f_p)$ est une famille libre, une telle égalité n'est possible que si $x_1 = \cdots = x_p = 0$. Nous avons donc démontré que $x_{k+1}\, g(f_{k+1}) + \cdots + x_p\, g(f_p) = 0$, implique $x_{k+1} = \cdots = x_p = 0$. donc les vecteurs $g(f_{k+1}), \ldots, g(f_p)$ sont indépendants.

Donc ces vecteurs forment une base de $\mathrm{Im}\, g$. Donc $\dim(\mathrm{Im}\, g) = p - k = \dim F - \dim(\mathrm{Ker}\, g)$.

<u>Théorème IV 6</u> : Pour que l'application linéaire $f : F \longrightarrow E$ soit injective, il faut et il suffit que $\mathrm{Ker}\, g = \{0\}$.

<u>Démonstration</u> : Si g est injective, $\mathrm{Ker}\, g$ a au plus un élément, or 0 est dans $\mathrm{Ker}\, g$; donc $\mathrm{Ker}\, g = \{0\}$.

Réciproquement si $\mathrm{Ker}\, g = \{0\}$, et si $g(x_1) = g(x_2)$, alors $g(x_1 - x_2) = g(x_1) - g(x_2) = 0$, donc $x_1 - x_2$ est dans $\mathrm{Ker}\, g$, c'est à dire nul ; et on a $x_1 = x_2$.

Corollaire IV$_7$: L'application linéaire $g : F \to E$ est injective si et seulement si $\dim(\mathrm{Im}\, g) = \dim F$.

Corollaire IV$_8$: Soit g une application linéaire de F dans E. Si $\dim F = \dim E$ (et, en particulier si $F = E$), les assertions suivantes sont équivalentes

- g est bijective
- g est injective
- g est surjective
- $\mathrm{Ker}\, g = \{0\}$.
- $\mathrm{Im}\, g = E$
- $\dim(\mathrm{Im}\, g) = \dim E$

Corollaire IV$_9$: Soit $g : F \to E$ une application linéaire ; considérons e dans E, et l'équation $g(x) = e$ (qui, des bases étant données dans F et E, se traduit par un système linéaire)

• Pour qu'elle ait au moins une solution il faut et il suffit que e soit dans $\mathrm{Im}\, g$. En particulier si le rang de g est égal à la dimension de E, il y a une solution (au moins) quel que soit e.

• Pour qu'il y ait une solution unique (au cas où il y en a une !) il faut et il suffit que $\mathrm{Ker}\, g$ soit réduit à 0 ; c'est à dire que le rang de g soit égal à la dimension de F.

Si $\mathrm{Ker}\, g$ n'est pas réduit à 0, et si x_1

est une solution, alors, quel que soit y dans $\operatorname{Ker} g$, $x_1 + y$ est encore une solution, et inversement la différence de deux solutions, est un élément du noyau de g. Autrement dit : pour avoir toutes les solutions de $g(x) = e$, on détermine une d'elles (s'il en existe), et on lui ajoute toutes les solutions de $g(y) = 0$ (qui est souvent appelée l'équation homogène associée à $g(x) = e$).

Tout ceci n'est bien-sûr qu'un nouvel éclairage sur les résultats des § c et d de la leçon 2.

<u>Détermination du noyau</u> :

Considérons une application linéaire $g : F \longrightarrow E$ donnée par sa matrice M dans des bases $(\varphi_1, \ldots, \varphi_p)$ et $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ de F et de E, et essayons de déterminer une base de $\operatorname{Ker} g$.

Nous supposons bien sûr que celui ci n'est pas réduit à 0, c'est à dire que le rang de g (et de M) n'est pas égal à $p = \dim F$.

Pour exposer la méthode nous allons reprendre l'application de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ qui a servi d'exemple au § précédent. Sa matrice naturelle est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Ses colonnes donnent donc les coordonnées, dans la base naturelle $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de $\mathbb{R}^3$, des images par g des vecteurs $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$ de la base naturelle de $\mathbb{R}^4$.

Après réduction par la méthode du pivot nous obtenons le tableau

$$M' = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & \boxed{1} \\ \boxed{1} & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ce tableau est formé des coordonnées des vecteurs $g(\varphi_1), g(\varphi_2), g(\varphi_3), g(\varphi_4)$ dans une base $(\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \varepsilon'_3)$ de $\mathbb{R}^3$. Nous avons donc $g(\varphi_1) = \varepsilon'_2$, $g(\varphi_2) = 3\varepsilon'_1 - \varepsilon'_2$, $g(\varphi_3) = 3\varepsilon'_1 - 2\varepsilon'_2$ et $g(\varphi_4) = \varepsilon'_1$. Il en résulte que les vecteurs $\varphi_2 - 3\varphi_4 + \varphi_1$ et $\varphi_3 - 3\varphi_4 + 2\varphi_1$ sont dans $\operatorname{Ker} g$.

Et ces deux vecteurs sont indépendants puisque le tableau de leurs coordonnées dans la base $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$, s'écrit

$$\begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -3 & -3 \end{matrix}$$

Nous avons donc deux vecteurs indépendants de $\operatorname{Ker} g$. comme $\operatorname{Ker} g$ est de dimension 2 $(= \dim F - \dim(\operatorname{Im} g))$, ils forment une base.

La méthode employée est générale, on va l'appliquer à un autre exemple.

Considérons F et E de dimensions 5 et

4, des bases $(\varphi_1, \dots, \varphi_5)$ et $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_4)$ de F et de E, et l'application linéaire $g : F \to E$ qui, dans ces bases, a pour matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

Nous la réduisons par la méthode du pivot unitaire

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & 3 & 6 & 6 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \boxed{1} & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cette dernière matrice est formée des coordonnées des vecteurs $g(\varphi_j)$ dans une base $\varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_4$. En fait un certain nombre des $g(\varphi_j)$ sont égaux à des ε_i (puisque nous avons fait une réduction unitaire). Ici $g(\varphi_1) = \varepsilon'_1$ et $g(\varphi_3) = \varepsilon'_3$. Les autres $g(\varphi_j)$ sont des combinaisons linéaires de ces derniers. Ici on a

$$\begin{aligned} g(\varphi_2) &= \varepsilon'_1 + \varepsilon'_3 = g(\varphi_1) + g(\varphi_3) \\ g(\varphi_4) &= 3\varepsilon'_1 + 2\varepsilon'_3 = 3g(\varphi_1) + 2g(\varphi_3) \\ g(\varphi_5) &= \varepsilon'_1 + 2\varepsilon'_3 = g(\varphi_1) + 2g(\varphi_3) \end{aligned}$$

Nous en déduisons des vecteurs :

$V_1 = \varphi_2 - \varphi_1 - \varphi_3$, $V_2 = \varphi_4 - 3\varphi_1 - 2\varphi_3$, $V_3 = \varphi_5 - \varphi_1 - 2\varphi_3$ qui appartiennent à Ker g. Ils sont au nombre de $\dim F - rg(g) = \dim(\operatorname{Ker} g)$. Pour montrer qu'ils forment une base de Ker g, il suffit donc de montrer qu'ils sont indépendants.

On pourrait employer la méthode du pivot, mais on peut aussi tenir le raisonnement suivant : Supposons donnés des scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que

$$\lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \lambda_3 V_3 = 0$$

En remplaçant les V_j par leur définition nous obtenons une relation du type

$$\alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2 + \alpha_3 \varphi_3 + \alpha_4 \varphi_4 + \alpha_5 \varphi_5 = 0$$

Et tous les α_i sont nuls puisque les φ_i sont indépendants. Or il existe un i_0 tel que $V_1 = \varphi_{i_0}$ + "combinaisons des autres φ_i" (ici $i_0 = 2$), et que φ_{i_0} n'intervienne pas dans les autres vecteurs V_j. Donc on a $\lambda_1 = \alpha_{i_0}$, ce qui prouve que $\lambda_1 = 0$. De même pour λ_2 et λ_3.

La méthode est donc générale.

<u>Exercices</u> : 1) On considère l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ dont la matrice naturelle s'écrit

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Déterminer une base de son noyau et une base de son image.

2) On considère l'application de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ dont la matrice naturelle s'écrit :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Déterminer une base de son noyau et une base de son image.

3) On considère l'espace E_4 des polynomes de degré au plus 3. On définit une application $f : E_4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ en associant à tout polynome P, le vecteur $(P(2), P(3))$ de $\mathbb{R}^2$.

Montrer que f est linéaire, puis déterminer une base de son noyau.

4) On considère l'espace vectoriel E_5 des polynomes de degré au plus 4. On définit une application $g : E_5 \longrightarrow E_5$ qui à tout polynome $P(x)$ associe le polynome $3P'(x) - x\,P''(x)$.

Montrer que g est linéaire, puis déterminer une base de son noyau et une base de son image.

Deuxième partie : Calcul matriciel

§1 : Espaces vectoriels de matrices

Fixons deux espaces vectoriels F et E, de dimensions respectives p et n.

Espaces d'applications linéaires

Soit f et g deux applications linéaires de F dans E ; l'application $f+g$ de F dans E, définie par $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ (pour tout x) est linéaire (vérification facile). Cette application $f+g$ est appelée la somme de f et g.

Soit f une application linéaire de F dans E, et λ un scalaire ; l'application λf de F dans E, définie par $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$ (pour tout x) est linéaire (vérification facile) ; cette application λf est appelée le produit de f par le scalaire λ.

On vérifie sans peine que l'ensemble $\mathcal{L}(F, E)$ de toutes les applications linéaires de F dans E, muni de cette somme et de ce produit par les scalaires, est un espace vectoriel (au sens que nous avons donné à ce terme au § f de la leçon II).

<u>Espaces vectoriels de matrices.</u>

Notons $\mathcal{M}(p,n)$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes. Nous définirons dans $\mathcal{M}(p,n)$:

1) une somme, en posant

$$\begin{pmatrix} m_{11} & \dots & m_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n1} & \dots & m_{np} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m'_{11} & \dots & m'_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ m'_{n1} & \dots & m'_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11}+m'_{11} & \dots & m_{1p}+m'_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n1}+m'_{n1} & \dots & m_{np}+m'_{np} \end{pmatrix}$$

L'élément qui est à la place (i,j) dans $M+M'$, est la somme des éléments qui sont à la place (i,j) dans M et dans M'.

2) un produit par les scalaires, en posant

$$\lambda \begin{pmatrix} m_{11} & \dots & m_{1p} \\ \vdots & & \\ m_{n1} & \dots & m_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda m_{11} & \dots & \lambda m_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda m_{n1} & \dots & \lambda m_{np} \end{pmatrix}$$

L'élément qui est à la place (i,j) dans λM, est le produit par λ de l'élément qui est à la place (i,j) dans M.

Ici encore, muni de ces lois, $\mathcal{M}(p,n)$ est un espace vectoriel (au sens du § f de la leçon II). D'ailleurs $\mathcal{M}(p,n)$ est naturellement en bijection avec $\mathbb{R}^{np}$:

à la matrice $\begin{pmatrix} m_{11} & \dots & m_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n1} & \dots & m_{np} \end{pmatrix}$, on associe

$(m_{11}, \dots, m_{1p}, m_{21} \dots m_{2p}, \dots, m_{n1}, \dots, m_{np})$

dans $\mathbb{R}^{np}$. Et cette bijection est un isomorphisme (au sens du § 9 de la leçon II)

<u>Expression dans des bases</u>

Donnons nous des bases $(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ et $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ de F et de E. D'après le § 6 ci-dessus, cette donnée permet de construire une bijection :

$$\Theta : \mathcal{L}(F, E) \longrightarrow \mathcal{M}(p, n)$$

Pour $f : F \to E$ et $g : F \to E$, nous avons $\Theta(f+g) = \Theta(f) + \Theta(g)$. En effet, pour fabriquer $\Theta(f+g)$, on met dans la j-ème colonne les coordonnées (dans la base (ε_i)) de $(f+g)(\varphi_j)$. Or $(f+g)(\varphi_j) = f(\varphi_j) + g(\varphi_j)$, donc ces coordonnées sont les sommes des coordonnées (dans la même base (ε_i) de E) des vecteurs $f(\varphi_j)$ et $g(\varphi_j)$; autrement dit ce sont les sommes des éléments correspondants des j-èmes colonnes des matrices $\Theta(f)$ et $\Theta(g)$.

De même puisque $(\lambda f)(\varphi_j) = \lambda f(\varphi_j)$, dans la j-ème colonne de $\Theta(\lambda f)$ nous trouvons les produits par λ des éléments de la j-ème colonne de $\Theta(f)$.

Ainsi en composant Θ et la bijection $\mathcal{M}(p, n) \to \mathbb{R}^{np}$ définie ci-dessus, nous obtenons un isomorphisme de $\mathcal{L}(F, E)$ avec $\mathbb{R}^{np}$. Rappelons que celui-ci dépend des bases choisies dans F et dans E.

§ 5 : Produits de matrices

Le produit de 2 matrices

Considérons deux matrices A et B, A ayant p colonnes et n lignes, et B ayant p lignes et q colonnes. Le produit A.B est une matrice qui a n lignes (autant que B) et q colonnes (autant que A). Il est défini comme suit :

La i-ème $(i=1,\dots,n)$ ligne de A s'écrit $(a_{i1},\dots,a_{ip})$; la k-ième $(k=1,\dots,q)$ colonne de B s'écrit $(b_{1k},\dots,b_{pk})$, l'élément qui est au croisement de la i-ème ligne et de la k-ième colonne dans A.B est

$$a_{i1}\,b_{1k}+\dots+a_{ip}\,b_{pk}=\sum_{j=1}^{p} a_{ij}\,b_{jk}.$$

Exemple :

$$A=\begin{pmatrix}1&3&7&1\\0&1&2&2\\2&4&4&1\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B=\begin{pmatrix}3&1\\-1&3\\4&2\\0&1\end{pmatrix}$$

Alors AB a 3 lignes et 2 colonnes (notons que BA n'existe pas puisque le nombre des colonnes de B n'est pas égal au nombre des lignes de A). Et on a

$$AB=\begin{pmatrix}1\times3+3\times(-1)+7\times4+1\times0 & 25\\0\times3+1\times(-1)+2\times4+2\times0 & 9\\2\times3+4\times(-1)+4\times4+1\times0 & 23\end{pmatrix}$$

On pourra retenir le schéma :

$$i\to\begin{pmatrix}\ A\ \end{pmatrix}\begin{pmatrix}B\\ \uparrow\\ j\end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{pmatrix}AB\\ \uparrow\\ j\end{pmatrix}\leftarrow i$$

Exercice : Effectuer le produit AB, où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Effectuer le produit XY, où

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Composition des applications linéaires

Nous considérons maintenant trois espaces vectoriels G, F et E de dimensions respectives q, p et n. Nous considérons aussi deux applications linéaires $g : G \to F$ et $f : F \to E$. Nous pouvons composer ces deux applications en

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "f\cdot g"'] & F \arrow[r, "f"] & E \end{tikzcd}$$

$(f\cdot g)(x) = f(g(x))$.

Il est très facile de vérifier que $f\cdot g$ est aussi linéaire.

Donnons nous maintenant des bases $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$, $(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ et $(\gamma_1, \dots, \gamma_q)$ de E, F et G respectivement. Dans les bases (ε_i) et (φ_j), f a une matrice A. Dans les bases (φ_j) et (γ_k) g a une matrice B. Nous allons démontrer que la matrice de $f\cdot g$ dans les bases (ε_i) et (γ_k) est $A\cdot B$.

Posons $A = (a_{ij})$ ($i = 1, \dots, n$ et $j = 1, \dots, p$) et $B = (b_{jk})$ ($j = 1, \dots, p$ et $k = 1, \dots, q$).
Nous avons

$$f(\varphi_j) = a_{1j}\,\varepsilon_1 + \dots + a_{nj}\,\varepsilon_n = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\,\varepsilon_i$$

$$\text{et } g(\gamma_k) = b_{1k}\,\varphi_1 + \dots + b_{pk}\,\varphi_p = \sum_{j=1}^{p} b_{jk}\,\varphi_j$$

$$\text{Donc } f(g(\gamma_k)) = f\Big(\sum_{j=1}^{p} b_{jk}\,\varphi_j\Big) = \sum_{j=1}^{p} b_{jk}\, f(\varphi_j)$$

$$f(g(\gamma_k)) = \sum_{j=1}^{p} b_{jk} \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\,\varepsilon_i = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n} b_{jk}\,a_{ij}\,\varepsilon_i$$

Mais au lieu de sommer d'abord par rapport à i et ensuite par rapport à j, nous pouvons sommer d'abord par rapport à j puis par rapport à i. Donc

$$f(g(\gamma_k)) = \sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{p} b_{jk}\,a_{ij}\Big)\varepsilon_i$$

Et nous reconnaissons dans la parenthèse le coefficient de l'élément de la place (i, k) du produit $A.B$.

<u>Des notations commodes</u>

Il est commode de résumer la phrase "A est la matrice de $f : F \to E$ dans les bases (φ_j) de F et (ε_i) de E", par la notation abrégée :

$$\underset{(\varphi_j)}{F} \xrightarrow[A]{f} \underset{(\varepsilon_i)}{E}$$

Avec cette notation, le résultat que nous venons de démontrer, se résume en :
Lorsque l'on compose $\underset{(\varphi_j)}{F} \xrightarrow[A]{f} \underset{(\varepsilon_i)}{E}$ et

$\underset{(\gamma_k)}{G} \xrightarrow[B]{g} \underset{(\varphi_j)}{F}$, on obtient (en accolant simplement les deux formules):

$$\underset{(\gamma_k)}{G} \xrightarrow[B]{g} \underset{(\varphi_j)}{F} \xrightarrow[A]{f} \underset{(\varepsilon_i)}{E}$$

Et, en oubliant l'espace intermédiaire F:

$$\underset{(\gamma_k)}{G} \xrightarrow[A.B]{f.g} \underset{(\varepsilon_i)}{E}$$

En n'oubliant pas que la composée de $g: G \to F$ et $f: F \to E$ est $f.g$ (et non $g.f$!)

§9: L'algèbre des matrices.

<u>Le produit des matrices est associatif</u>; c'est à dire que l'on a (quelles que soient A, B et C) $(A.B).C = A.(B.C)$. On pourrait le montrer en calculant les deux produits; il est plus simple de considérer des applications linéaires f, g, h telles que (avec la notation que nous venons d'introduire):

$$\underset{(\varphi_j)}{F} \xrightarrow[A]{f} \underset{(\varepsilon_i)}{E} \;;\; \underset{(\gamma_k)}{G} \xrightarrow[B]{g} \underset{(\varphi_j)}{F} \text{ et } \underset{(\eta_l)}{H} \xrightarrow[C]{h} \underset{(\gamma_k)}{G}$$

On a alors $\underset{(\gamma_k)}{G} \xrightarrow[A.B]{f.g} \underset{(\varepsilon_i)}{E}$ et $\underset{(\eta_l)}{H} \xrightarrow[B.C]{g.h} \underset{(\varphi_j)}{F}$

Donc aussi $\underset{(\eta_l)}{H} \xrightarrow[(A.B).C]{(f.g).h} \underset{\varepsilon_i}{E}$ et $\underset{(\eta_l)}{H} \xrightarrow[A.(B.C)]{f.(g.h)} \underset{(\varepsilon_i)}{E}$

L'égalité $A.(B.C) = (A.B).C$ résulte alors du fait que $f.(g.h) = (f.g).h$.

<u>Le produit des matrices est distributif par rapport à l'addition</u>; c'est à dire

que (quelles que soient A_1, A_2, B, B_1, B_2 et A)

$$(A_1 + A_2) \cdot B = A_1 \cdot B + A_2 \cdot B$$

et $$A \cdot (B_1 + B_2) = A \cdot B_1 + A \cdot B_2$$

Pour s'en convaincre on se ramène (comme ci-dessus) à ajouter et composer des applications linéaires ; car les égalités analogues pour les applications linéaires sont évidentes.

<u>On appelle matrice identité d'ordre n</u>, et on note I_n, la matrice $n \times n$ qui a des 1 aux places de la forme (i, i) et des 0 partout ailleurs. C'est à dire

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & & 1 \end{pmatrix}$$

Nous noterons que si l'on considère un espace E de dimension n, muni d'une base (ε_i), la matrice I_n est la matrice de l'application identique de E dans les bases (ε_i) et (ε_i).

Il en résulte que chaque fois que les produits $A \cdot I_n$ et $I_n \cdot B$ ont un sens (i.e : si A a n colonnes, et B n lignes) on a $A \cdot I_n = A$ et $I_n \cdot B = B$.

Le produit des matrices n'est pas commutatif

C'est à dire que lorsque les produits $A \cdot B$ et $B \cdot A$ existent, ils sont en général différents. Pour s'en convaincre on les calculera en prenant

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrices inversibles

On dit qu'une matrice A carrée à n lignes et n colonnes est inversible si il existe une matrice B (à n lignes et n colonnes) telle que $A \cdot B = B \cdot A = I_n$.

Soit A la matrice de $f : F \to E$ dans des bases (φ_j) et (ε_i), alors

a) Soit g l'application linéaire de E dans F, dont la matrice dans les bases (ε_i) et (φ_j) est B. La matrice de $g \cdot f : F \to F$ dans les bases (φ_j) et (φ_j) est $B \cdot A$, c'est à dire I_n. Donc $g \cdot f(\varphi_j) = \varphi_j$, quel que soit φ_j ; donc $g \cdot f$ est Id_F (application identique de F).

De même $f \cdot g = Id_E : E \to E$. Il en résulte que f est bijective.

b) Inversement si f est bijective (c'est à dire si $rg\, A = n$; cf théorème IV 6), et si l'on note B la matrice de f^{-1} dans les bases (ε_i) et (φ_j), on a $A \cdot B = B \cdot A = I_n$.

Nous pouvons donc énoncer :

<u>Théorème IV 10</u> : Soit A la matrice de $f: F \to E$ dans les bases (φ_j) et (e_i), avec $\dim F = \dim E = n$. Alors les trois conditions suivantes sont équivalentes :

a) A est inversible.

b) f est bijective.

c) $\operatorname{rg} A = n$.

Calcul de l'inverse d'une matrice

Soit A une matrice carrée $n \times n$, de rang n (donc inversible). On se propose de calculer son inverse.

Pour simplifier je vais décrire la méthode de calcul sur le cas particulier de la matrice 3×3 :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Notons $V_1 = (2,1,0)$, $V_2 = (3,2,1)$ et $V_3 = (0,3,2)$ les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ qui constituent les colonnes de A. Notons (e_1, e_2, e_3) la base naturelle de $\mathbb{R}^3$. Puisque A est de rang 3, les vecteurs V_1, V_2, V_3 forment une base de $\mathbb{R}^3$. Et A peut être considérée comme la matrice correspondant à

$$\underset{(V_j)}{\mathbb{R}^3} \xrightarrow{Id_{\mathbb{R}^3}} \underset{(e_i)}{\mathbb{R}^3}$$

D'après ce que nous avons vu ci-dessus, l'inverse de A est la matrice qui correspond à :

$$\underset{(e_i)}{\mathbb{R}^3} \xrightarrow{Id_{\mathbb{R}^3}} \underset{(V_j)}{\mathbb{R}^3}$$

Autrement dit l'inverse de A a pour colonnes les coordonnées de e_1, e_2, e_3 dans la base (V_1, V_2, V_3).

Dès lors pour calculer l'inverse de A, écrivons en un tableau les coordonnées de $V_1, V_2, V_3, e_1, e_2, e_3$ dans la base (e_1, e_2, e_3); ce qui revient à écrire à droite de A la matrice I_3

$$\begin{array}{cccccc} 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Et réduisons le par la méthode du pivot simple, en choisissant les pivots dans les 3 colonnes de gauche. Nous pouvons choisir ainsi 3 pivots, puisque $\text{rg} A = 3$.

$$\Rightarrow \begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & -6 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & -4 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & -4 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{2} & -\frac{9}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{3}{2} \end{array}$$

Et maintenant par des opérations de 2de et de 3ème espèce nous transformons la partie gauche du tableau en la matrice I_3

$$\Rightarrow \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{2} & -\frac{9}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -4 & 1 & -2 & 1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{2} & -\frac{9}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{array}$$

Nous savons que ce tableau final est formé des coordonnées des vecteurs $V_1, V_2, V_3, e_1, e_2, e_3$ dans une certaine base de $\mathbb{R}^3$ (cf : Leçon II, § k et l). Il suffit de regarder la partie gauche du tableau pour se convaincre que cette base est (V_1, V_2, V_3). Donc la partie droite est formée des coordonnées de e_1, e_2, e_3 dans la base (V_1, V_2, V_3) ; c'est la matrice inverse de A.

<u>Exercices</u> : 1) Inverser les matrices

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 3 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

2) Soit le tableau double

$$\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 6 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 2 & 3 & 2 \end{array}$$

Notons A la partie gauche et M la partie droite, on vérifie aisément que A est inversible.

Réduire le tableau de façon à transformer la partie gauche en la matrice I_3. Démontrer que la partie droite du tableau ainsi obtenu est $A^{-1}M$ (où A^{-1} est l'inverse de A)

§2 : Changements de bases.

Considérons une application linéaire $f : F \longrightarrow E$, et sa matrice M dans des bases (φ_j) de F et (ε_i) de E.

Considérons une autre base (φ'_j) de F, et une autre base (ε'_i) de E. Pour se donner ces bases nous nous donnerons les coordonnées des φ'_j dans la base (φ_j), et les coordonnées des ε'_i dans la base ε_i, ce qui revient à se donner les matrices de :

$$\underset{(\varphi'_j)}{F} \xrightarrow[A]{Id_F} \underset{(\varphi_j)}{F} \quad \text{et} \quad \underset{(\varepsilon'_i)}{E} \xrightarrow[B]{Id_E} \underset{(\varepsilon_i)}{E}$$

Alors pour calculer la matrice de f dans les bases (φ'_j) et (ε'_i), nous écrivons

$$\underset{(\varphi'_j)}{F} \xrightarrow[A]{Id_F} \underset{(\varphi_j)}{F} \xrightarrow[M]{f} \underset{(\varepsilon_i)}{E} \xrightarrow[B]{Id_E} \underset{(\varepsilon'_i)}{E}$$

Mais C est l'inverse B^{-1} de B, donc la matrice de f dans les bases (φ'_j) et (ε'_i) est $B^{-1} \cdot M \cdot A$

Exercices : 1) Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dont la matrice naturelle est :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ecrire la matrice de f dans la base $(V_1 = (2,1,2),\ V_2 = (0,1,3),\ V_3 = (2,0,3))$ (c'est à dire la matrice de $\underset{(V_i)}{\mathbb{R}^3} \xrightarrow{f} \underset{(V_i)}{\mathbb{R}^3}$)

2) On considère l'application $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ dont la matrice naturelle est :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

et les bases $(V_1 = (1,0,1),\ V_2 = (0,1,1),\ V_3 = (1,1,0))$ et $(W_1 = (1,0,1,0),\ W_2 = (2,1,0,1),\ W_3 = (1,1,0,1)$, $W_4 = (3,0,0,2))$ de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^4$.

Calculer la matrice de f dans ces bases.

3) Soit $f : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ une application linéaire dont la matrice naturelle est

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & -4 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & -5 & 1 \end{vmatrix}$$

Montrer que M est de rang 3, et construire une base de $\mathbb{R}^5$ dont les 2 derniers vecteurs forment une base de $\operatorname{Ker} f$. Construire une base de $\mathbb{R}^4$ dont les 3 premiers vecteurs sont une base de $\operatorname{Im} f$.

Montrer que l'on peut choisir ces bases de façon que f ait pour matrice

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit $g : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$, de rang 3. Démontrer qu'il existe des bases de $\mathbb{R}^5$ et de $\mathbb{R}^4$ dans lesquelles la matrice de g est M_1. Démontrer qu'il existe des bases de $\mathbb{R}^5$ et de $\mathbb{R}^4$ dans lesquelles la matrice de g est M.

4) Soit $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ dont la matrice naturelle est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Trouver une base de $\mathbb{R}^4$ dont le premier vecteur est dans $\operatorname{Ker} f$, et les 3 derniers dans $\operatorname{Im} f$.

Que peut on dire de la matrice de f dans une telle base ?

§i : <u>Un abus de notations</u>

Considérons $f : F \to E$ et des bases (ε_i) de E et (φ_j) de F, dans lesquelles f a pour matrice M.

Soit v un vecteur de F, nous pouvons considérer l'application linéaire χ_v de $\mathbb{R}$ dans F, qui à 1 associe v (notons que 1 est une base de l'espace vectoriel (de dimension 1) $\mathbb{R}$). Pour calculer la valeur de f sur v, nous calculerons la valeur en 1 de $f.\chi_v$. Par exemple : $v = (1, 0, 2, 3)$ dans $\mathbb{R}^4$ et $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ a pour matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

La matrice de $\chi_{\vec{v}}$, dans les bases naturelles de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^4$, a une seule colonne, c'est :

$$N = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

La matrice de $f \circ \chi_{\vec{v}}$ (dans les bases naturelles) est

$$M.N = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 24 \end{pmatrix}$$

Et $f(\vec{v})$ est la valeur en 1 de $f \circ \chi_{\vec{v}}$, donc $f(\vec{v}) = (7, -3, 24)$.

Ceci revient tout simplement à considérer les vecteurs comme des matrices à 1 colonne. C'est une convention assez habituelle. Son principal intérêt est de ramener à un produit de matrices le calcul de la valeur d'une application linéaire sur un vecteur.

Quelques exercices sur la leçon IV

A] On considère la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer $M^3 - 3M^2 - 4M$. En déduire que, pour tout $n \geq 3$, il existe des scalaires α, β, γ tels que $M^n = \alpha M^2 + \beta M + \gamma I_3$.
Calculer ces scalaires lorsque $n = 10$

B] On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Déterminer α et β tels que $M^3 = \alpha M + \beta I_3$
Déterminer a et b tels que $M^{10} = aM + bI_3$

C] On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Démontrer qu'il est impossible de trouver des scalaires α et β tels que M^3 soit égale à $\alpha M + \beta I_3$.
Déterminer des scalaires a, b, c tels que $M^3 = aM^2 + bM + cI_3$

D] On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Existe-t-il une matrice N telle que $M \cdot N = I_3$?

E] Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une application linéaire, telle que $f^2 + f = 0$

Démontrer que, pour tout x, le vecteur $x + f(x)$ est dans $\operatorname{Ker} f$, et le vecteur $f(x)$ est dans $\operatorname{Ker}(f + Id_{\mathbb{R}^n})$. En déduire que $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Ker}(f + Id_{\mathbb{R}^n})$ sont supplémentaires

F] Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une application linéaire telle que $f^2 = Id_{\mathbb{R}^n}$.

Démontrer que, pour tout x, le vecteur $f(x) + x$ est dans $\operatorname{Ker}(f - Id_{\mathbb{R}^n})$, et que le vecteur $f(x) - x$ est dans $\operatorname{Ker}(f + Id_{\mathbb{R}^n})$. En déduire que $\operatorname{Ker}(f + Id_{\mathbb{R}^n})$ et $\operatorname{Ker}(f - Id_{\mathbb{R}^n})$ sont supplémentaires.

G] Soit E_n l'espace des polynomes de degré au plus $n-1$. Soit $f : E_n \longrightarrow E_n$ définie par $f(P(X)) = P(X+1) - P(X)$.

Démontrer que P est linéaire et déterminer son noyau et son image

H] Soit E_n l'espace des polynomes de degré au plus $n-1$. Soit $f : E_n \rightarrow E_n$ définie par $f(P(X)) = P(X+1) + P(X-1) - 2\,P(X)$.

Démontrer que P est linéaire et déterminer son noyau et son image.

I] Soit E_n l'espace des polynomes de degré au plus $n-1$. Soit $f : E_n \to E_n$ qui à P associe $P+P'$ (P' est la dérivée de P).

Démontrer que P est surjective. Puis résoudre l'équation $P(X)+P'(X) = X^3$.

J] Soit E un espace de dimension 2, et soit $f : E \to E$ une application linéaire telle que $f^2 + f + Id_E = 0$.

Démontrer que pour tout vecteur $X (\neq 0)$, les vecteurs X et $f(X)$ forment une base de E.

On considère une autre application linéaire $g : E \to E$ telle que $g^2 + g + Id_E = 0$. Démontrer qu'il existe une application linéaire bijective $\theta : E \to E$ telle que $f = \theta g \theta^{-1}$.

K] On considère un espace vectoriel E, et deux sous espaces supplémentaires F et G de E. Soit $f : F \to G$ une application linéaire. Soit H l'ensemble des vecteurs de E de la forme $x + f(x)$ $(x \in F)$. Démontrer que H est un sous-espace supplémentaire de G.

<u>Introduction</u> : Considérons le tableau carré

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{array}$$

et réduisons le par la méthode du pivot simple ; nous obtenons

$$\Rightarrow \begin{array}{ccc} \boxed{1} & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & -3 & -7 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc} \boxed{1} & 0 & -2/3 \\ 0 & 0 & 2/3 \\ 0 & \boxed{-3} & -7 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 \\ 0 & \boxed{-3} & 0 \end{array}$$

Nous aurions pu faire d'autres choix dans la réduction ; nous aurions obtenu

$$\Rightarrow \begin{array}{ccc} -7 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & \boxed{1} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc} 0 & -2 & 0 \\ \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \boxed{1} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc} 0 & \boxed{-2} & 0 \\ \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{array}$$

ou encore

$$\Rightarrow \begin{array}{ccc} -3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & \boxed{1} & 1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 2 \\ \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc} 0 & 0 & \boxed{2} \\ \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \end{array}$$

ou encore

$$\Rightarrow \begin{array}{ccc} 0 & 1{,}5 & 3{,}5 \\ 0 & -0{,}5 & -0{,}5 \\ \boxed{2} & 1 & 1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 2 \\ 0 & \boxed{-0{,}5} & 0{,}5 \\ \boxed{2} & 0 & 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc} 0 & 0 & \boxed{2} \\ 0 & \boxed{-0{,}5} & 0 \\ \boxed{2} & 0 & 0 \end{array}$$

Dans tous les cas nous trouvons 3 pivots (c'est le théorème du rang). Faisons le produit des pivots ; nous trouvons toujours 2 ou -2.

<u>Exercice</u> : Au cours des 4 leçons précédentes nous avons étudié un certain nombre de tableaux carrés. En choisir un ou deux, les réduire de plusieurs façons différentes

et vérifier que, s'ils sont de rang maximum, la valeur absolue du produit des pivots est indépendante des choix faits au cours de la réduction.

Reprenons maintenant les 4 réductions et au moyen d'opérations élémentaires de 3ème espèce, amenons les pivots sur la diagonale principale (ie : aux places de la forme $(i;i)$). Nous avons

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 \\ 0 & -3 & 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 \end{matrix}$$

Avec un seul échange

ou encore

$$\begin{matrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

Avec un seul échange

ou encore

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{matrix}$$

Avec deux échanges

ou encore

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -0{,}5 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{matrix}$$

Avec un seul échange

Dans chacun des cas multiplions le produit des pivots par $(-1)^r$, où r est le nombre d'échanges de lignes que nous avons faits. Nous trouvons toujours 2.

<u>Exercice</u> : Choisir un tableau carré 4×4 de rang 4, le réduire de plusieurs façons

différentes par des opérations de 1ère espèce, puis amener les pivots sur la diagonale principale par r opérations de 3ième espèce. Constater alors que le produit de $(-1)^r$ par le produit des pivots est indépendant des choix que l'on a faits

L'objet de cette leçon est d'expliquer ces phénomènes, qui pour l'instant ne sont que des constatations sur des exemples. L'invariant des tableaux carrés que l'on a ainsi mis en évidence, s'appelle le déterminant.

Dans l'unité AG 1 (compléments à la 6ième leçon) on a déjà étudié les déterminants des tableaux 2×2 et 3×3. Les § a et b sont consacrés à des rappels sur ces cas déjà étudiés, ceux-ci sont destinés à montrer (dans des cas simples où les calculs explicites sont très faciles) les propriétés générales des déterminants. A partir du § c, on étudie le cas général des tableaux $n\times n$. Cette étude repose sur un "théorème d'existence des déterminants" qui est d'abord admis (sa démonstration ne se trouve qu'au § i).

Plan de la leçon

Première partie

§a : Les déterminants d'ordre 2.

Deuxième partie

Appendice

Première partie : Propriétés des déterminants

§a : Les déterminants d'ordre 2

Par définition le déterminant du tableau 2×2 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est le nombre $\Delta = ad - bc$

Première propriété du déterminant : Il est linéaire par rapport à chacune de ses lignes. C'est à dire que

$$\det\begin{pmatrix} a+\lambda a' & b+\lambda b' \\ c & d \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \lambda \det\begin{pmatrix} a' & b' \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c+\lambda c' & d+\lambda d' \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \lambda \det\begin{pmatrix} a & b \\ c' & d' \end{pmatrix}$$

En particulier si le tableau a une ligne nulle, son déterminant est nul.

Deuxième propriété du déterminant : Il est invariant par les opérations élémentaires de 1ère espèce. C'est à dire que

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a+\lambda c & b+\lambda d \\ c & d \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a & b \\ c+\lambda a & d+\lambda b \end{pmatrix}$$

Les démonstrations - très simples - sont laissées au soin du lecteur éventuel.

<u>Troisième propriété du déterminant</u> : Si l'on fait une opération élémentaire de $3^{ième}$ espèce, il est multiplié par -1. C'est à dire que :

$$\text{dét}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = -\,\text{dét}\begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}$$

<u>Conséquence</u> : Si nous réduisons $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ par la méthode du pivot simple, trois cas sont possibles

ou bien le tableau n'est pas de rang 2, et alors après une seule étape nous obtenons un tableau ayant une ligne nulle. Alors le déterminant est nul.

ou bien nous obtenons un tableau de la forme $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$, et alors le déterminant est $\alpha\beta$ (ie : le produit des pivots)

ou bien nous obtenons un tableau de la forme $\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix}$, que nous transformons en $\begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ par une opération de $3^{ième}$ espèce. Alors le déterminant (du tableau initial) est $-\alpha\beta$.

En particulier le déterminant est nul si et seulement si le tableau n'est pas de rang 2 (ie : de rang maximum)

<u>Quatrième propriété du déterminant</u> : Il est invariant par "symétrie autour de la diagonale principale" (ie : le tableau T' qui a à la place (i,j) l'élément qui est à la place (j,i) dans T, a même déter-

minant que T). C'est-à-dire

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

<u>Déterminant de deux vecteurs</u>

Étant donné un espace vectoriel E de dimension 2, muni d'une base $\mathcal{B}$, on définit le "déterminant de deux vecteurs V_1 et V_2 dans la base $\mathcal{B}$" comme étant la quantité :

$$\det_{\mathcal{B}}(V_1, V_2) = \det\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$$

où (x_1, y_1) et (x_2, y_2) sont les coordonnées de V_1 et V_2 dans la base $\mathcal{B}$.

La propriété 4, implique que les propriétés "relatives aux lignes" se transposent en des "propriétés relatives aux colonnes". En transposant les propriétés 1, 2 et 3, nous obtenons :

$$\det_{\mathcal{B}}(V_1, V_2+\lambda V_2') = \det_{\mathcal{B}}(V_1, V_2) + \lambda \det_{\mathcal{B}}(V_1, V_2')$$
$$\det_{\mathcal{B}}(V_1+\lambda V_1', V_2) = \det_{\mathcal{B}}(V_1, V_2) + \lambda \det_{\mathcal{B}}(V_1', V_2)$$
$$\det_{\mathcal{B}}(V_1, V_2) = \det_{\mathcal{B}}(V_1+\lambda V_2, V_2) = \det_{\mathcal{B}}(V_1, V_2+\lambda V_1)$$
$$\det_{\mathcal{B}}(V_1, V_2) = -\det_{\mathcal{B}}(V_2, V_1).$$

§ b : <u>Les déterminants d'ordre 3.</u>

Par définition le déterminant du tableau 3×3 :

$$T = \begin{matrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{matrix}$$

est le nombre :

$$\Delta = ab'c'' + a'b''c + a''bc' - a''b'c - ab''c' - a'bc''$$

Cette expression est un peu compliquée; au lieu de la retenir, nous retiendrons un procédé mnémotechnique qui permet de la rétablir. C'est le "procédé de Sarrus".

Nous recopions d'abord en dessous du tableau T, la 1ère et la 2de ligne de T. Le tableau à 5 lignes ainsi obtenu a 3 "obliques descendantes"

$$\begin{array}{ccc} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{array}$$

Elles nous donnent les produits $ab'c''$, $a'b''c$ et $a''bc'$; nous en faisons la somme.

Ce tableau a 3 "obliques montantes"

$$\begin{array}{ccc} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{array}$$

Elles nous donnent les produits $a''b'c$, $ab''c'$ et $a'bc''$; nous retranchons leur somme à la somme précédente, et nous obtenons le déterminant de T.

<u>Première propriété du déterminant</u>: Il est linéaire par rapport à chacune des lignes. C'est à dire :

$$\det\begin{pmatrix} a+\lambda\alpha & b+\lambda\beta & c+\lambda\gamma \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} + \lambda \det\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$$

et des formules analogues que je laisse au lecteur le soin d'écrire, et de vérifier par un calcul - facile mais un peu long - à partir de la définition du déterminant.

<u>Deuxième propriété du déterminant</u> : Si deux lignes du tableau sont identiques, alors le déterminant est nul. On le vérifie aisément sur la définition.

Il en résulte que les opérations élémentaires de 1ère espèce ne changent pas le déterminant. En effet :

$$\det\begin{pmatrix} a+\lambda a' & b+\lambda b' & c+\lambda c' \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} + \lambda \det\begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$$

et le dernier de ces déterminants est nul.

<u>Troisième propriété du déterminant</u> : Une opération élémentaire de 3ème espèce, le multiplie par -1. C'est une conséquence des propriétés 1 et 2 ; en effet :

D'après la propriété 2 le déterminant de

$$\begin{pmatrix} a+a' & b+b' & c+c' \\ a+a' & b+b' & c+c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$$

est nul ; or d'après la propriété 1, il est la somme de 4 déterminants :

d'une part dét $\begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$ et dét $\begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$ qui sont nuls d'après la propriété 2, d'autre part dét $\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$ et dét $\begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ a & b & c \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$ qui sont donc opposés ; ce que l'on cherchait à démontrer. La même démonstration est évidemment valable si l'on échange les lignes 1 et 3, ou 2 et 3.

<u>Quatrième propriété du déterminant</u> : Si T et T' sont deux tableaux symétriques l'un de l'autre par rapport à la diagonale principale (ie : si $t'_{ij} = t_{ji}$, pour toute place (i,j)), alors dét T $=$ dét T'.

Pour s'en convaincre on remarque que dans la définition de Δ, le passage de T à T' conserve le 1er terme, échange les deux suivants, conserve le 4ième et échange les deux derniers.

Il en résulte que les propriétés 1, 2, 3 énoncées pour les lignes se transposent pour les colonnes.

<u>Déterminant de 3 vecteurs</u> : Soit E un espace vectoriel de dimension 3 muni d'une base $\mathcal{B}$. Soit V_1, V_2, V_3 des vecteurs de E dont les coordonnées, dans la base $\mathcal{B}$, sont

respectivement (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) et (x_3, y_3, z_3). Alors on appelle déterminant de (V_1, V_2, V_3) dans la base $\mathcal{B}$, le scalaire :

$$\det_{\mathcal{B}}(V_1, V_2, V_3) = \det\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$$

<u>Exercice</u> : Choisir 3 vecteurs indépendants de $\mathbb{R}^3$. calculer leur déterminant dans la base naturelle (e_1, e_2, e_3), puis dans la base $(e_1 - e_2, 2e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3)$, et vérifier ainsi que $\det_{\mathcal{B}}(V_1, V_2, V_3)$ dépend non seulement de (V_1, V_2, V_3), mais aussi de $\mathcal{B}$.

<u>Calcul du déterminant</u> : Pour calculer le déterminant d'un tableau 3x3, nous pouvons appliquer le "procédé de Sarrus". Mais nous pouvons aussi :

. d'abord réduire le tableau par la méthode du pivot simple (cela ne change pas le déterminant d'après la propriété 2)

. puis, par r opérations de 3ième espèce, amener les pivots sur la diagonale, ce qui multiplie le déterminant par $(-1)^r$ (d'après la propriété 3).

. il ne reste alors qu'à calculer le produit des termes diagonaux du tableau obtenu, et à le multiplier par $(-1)^r$

C'est le calcul que nous avons fait

dans l'introduction.

Notons que si le tableau est de rang 3 ceci nous donne un déterminant non nul (puisque c'est, au signe près, le produit des pivots). Par contre si le tableau n'est pas de rang 3, la réduction nous amène à un tableau ayant une ligne nulle, et même déterminant que le tableau initial ; donc celui ci est nul.

§c : Les déterminants d'ordre n.

Nous noterons $\mathcal{T}_n$ l'ensemble des tableaux à n lignes et n colonnes ($n \geqslant 2$). Nous appellerons "théorie des déterminants d'ordre n" toute application

$$\text{dét} : \mathcal{T}_n \longrightarrow \mathbb{R}$$

vérifiant les propriétés suivantes :

A] Linéarité par rapport aux lignes :

A1] Si les éléments de la i-ème ligne du tableau T s'écrivent $t_{ij} = t'_{ij} + t''_{ij}$ ($j = 1, \dots, n$), alors $\text{dét}\, T = \text{dét}\, T' + \text{dét}\, T''$ (où l'on note T' (resp. T'') le tableau obtenu en remplaçant dans T les t_{ij} par les t'_{ij} (resp. les t''_{ij})).

A2] Si l'on multiplie une ligne du tableau T par λ, on obtient un tableau T_λ tel que $\text{dét}\, T_\lambda = \lambda\, \text{dét}\, T$.

B] Antisymétrie : Si deux lignes d'un tableau T sont identiques, alors $\text{dét}\, T = 0$

c] Si l'on note T_0 le tableau dont les coefficients diagonaux sont des 1, et dont tous les autres coefficients sont nuls (T_0 est donc la matrice Id_n de la leçon 4), alors dét $T_0 = 1$

On notera que les définitions données aux § a et b nous donnent des "théories des déterminants à l'ordre 2 et à l'ordre 3".

Nous démontrerons les deux théorèmes

Théorème V 1 : Pour tout n il existe une théorie des déterminants d'ordre n.

Théorème V 2 : Pour tout n il n'existe qu'une seule théorie des déterminants d'ordre n.

Le théorème V 1 sera démontré au § i. Dans les § d à h nous supposons donc qu'il existe une théorie des déterminants à l'ordre n, et nous travaillons dans une telle théorie, choisie une fois pour toutes. Le théorème V 2 sera démontré au § d.

§ d : Calcul des déterminants d'ordre n

Théorème V 3 : Soit T un tableau, si nous lui faisons subir une opération élémentaire de 1^{re} espèce nous obtenons un tableau T'

tel que dét T' = dét T.

<u>Démonstration</u> : Elle a été faite au § 6 (cf : étude de la deuxième propriété) dans le cas des déterminants d'ordre 3. La démonstration générale est en tous points analogue, mais son écriture nécessite des notations compliquées ; je l'omets.

<u>Théorème V 4</u> : Soit T un tableau, si nous lui faisons subir une opération élémentaire de 3^{ième} espèce, nous obtenons un tableau T'' tel que dét T'' = − dét T.

<u>Démonstration</u> : Elle a été faite au § 6 (cf : troisième propriété du déterminant) dans le cas des tableaux 3×3. La démonstration générale est en tous points analogue ; mais son écriture nécessite des notations assez compliquées ; je l'omets.

Ces théorèmes nous permettent de calculer le déterminant d'un tableau n×n en utilisant la méthode du pivot. Le processus est celui qui a été décrit dans l'introduction : par une réduction par la méthode du pivot simple, puis par r opérations de 3^{ième} espèce, on transforme le tableau en un tableau dont les éléments non diagonaux (i.e : ceux qui sont à une place

(i,j) telle que $i \neq j$) sont nuls. D'après les propriétés A_2 et C (de la définition du $\S$ c) le déterminant de ce tableau est le produit de ses éléments diagonaux ; et ce produit est $(-1)^2$ fois le déterminant du tableau donné. Nous obtenons ainsi un déterminant non nul chaque fois que le tableau $n \times n$ donné est de rang n ; s'il est de rang inférieur à n, au cours de la réduction nous écrirons un tableau ayant une ligne nulle, dont le détermi nant – égal à celui du tableau initial – est nul.

Ceci démontre en particulier le

<u>Théorème V_5</u> : Le déterminant d'un tableau $n \times n$ est nul si et seulement si le rang de ce tableau est strictement inférieur à n.

<u>Démonstration du théorème V_2</u> : Elle est faite, puisque nous avons décrit un processus qui, étant donnée une théorie des déterminants d'ordre n :

$$\det : \mathcal{T}_n \longrightarrow \mathbb{R}$$

nous permet de calculer sa valeur sur un tableau donné, et ce processus est universel (i.e. : ne dépend pas de la théorie $\det : \mathcal{T}_n \to \mathbb{R}$ considérée). En d'autres termes si nous avons plusieurs théories des déterminants d'ordre n, leurs valeurs sur un tableau quelconque T, sont obtenues par ce même processus, donc elles coïncident sur T (et ceci quelque soit T !).

Exercices : 1) Montrer que :

$$\text{dét}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -18$$

2) Calculer :

$$\text{dét}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3) Calculer

$$\text{dét}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

§e : Le déterminant de n vecteurs

Dans tout ce qui suit nous considérons un espace vectoriel E de dimension n, et une base $\mathcal{B}$ de E.

Soit $V_1, \ldots, V_n$ des vecteurs de E ; les coordonnées des V_i, dans la base $\mathcal{B}$, nous donnent un tableau $n \times n$. Le déterminant de ce tableau est appelé le déterminant de $(V_1, \ldots, V_n)$ dans la base $\mathcal{B}$, et noté $\text{dét}_{\mathcal{B}}(V_1, \ldots, V_n)$.

D'après le théorème V_5, ce déterminant est nul si et seulement si ces vecteurs sont dépendants

Ce déterminant dépend des vecteurs $V_1, \ldots, V_n$, mais aussi de $\mathcal{B}$ (cf : exercice proposé au § b). Nous étudierons au § f la variation en fonction de $\mathcal{B}$. Faisons d'abord la liste de quelques propriétés simples

Linéarité par rapport aux colonnes : Quels que soient les vecteurs $V_1, \ldots, V_n$ et V_i', on a :

$$\det_{\mathcal{B}}(V_1, \ldots, V_i + \lambda V_i', \ldots, V_n) = \det_{\mathcal{B}}(V_1, \ldots, V_i, \ldots, V_n) + \lambda \det(V_1, \ldots, V_i', \ldots, V_n)$$

Démonstration : Si les vecteurs $V_1, \ldots, V_{i-1}, V_{i+1}, \ldots, V_n$ sont dépendants, les 3 déterminants sont nuls et la formule est claire. Dans ce qui suit nous supposons donc que ces $n-1$ vecteurs sont indépendants.

Les 3 déterminants considérés correspondent à 3 tableaux T_λ, T et T' identiques à la i-ème colonne près. Nous allons les réduire simultanément, en choisissant les mêmes pivots dans les trois tableaux ; ces pivots étant dans pris dans les colonnes $1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n$. Nous pourrons ainsi choisir $n-1$ pivots (car $V_1, \ldots, V_{i-1}, V_{i+1}, \ldots, V_n$ sont indépendants). Ensuite, par r opérations de $3^{ème}$ espèce (les mêmes sur les trois tableaux), nous amenons les pivots sur la diagonale (ie : le pivot de la i-ème colonne

à la place (i,i)). Nous obtenons ainsi 3 tableaux $\overline{\overline{T}}_\lambda$, $\overline{\overline{T}}$ et $\overline{\overline{T}}'$, tels que :
dét $\overline{\overline{T}}_\lambda = (-1)^r$ dét T_λ, dét $\overline{\overline{T}} = (-1)^r$ dét T et dét $\overline{\overline{T}}' = (-1)^r$ dét T'.

Ces trois tableaux sont de la forme

$$\begin{matrix} p_1 & 0 & \cdots & \times & \cdots & 0 \\ 0 & p_2 & \cdots & \times & & \vdots \\ 0 & 0 & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \times & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \times & \cdots & p_n \end{matrix}$$

Ils ne diffèrent que par la i-ème colonne. Dans cette colonne nous trouvons les coordonnées de $V_i + \lambda V'_i$, de V_i ou de V'_i, dans une certaine base $\mathcal{B}_1$. Nous nous attacherons au coefficient de la place (i,i). Celui de $\overline{\overline{T}}$ sera noté α_i ; celui de $\overline{\overline{T}}'$ sera noté α'_i ; celui de $\overline{\overline{T}}_\lambda$ est alors $\alpha_i + \lambda\alpha'_i$.

Je dis que dét $\overline{\overline{T}}$ $(= (-1)^r \text{dét}_{\mathcal{B}}(V_1, \dots, V_i, \dots, V_n))$ est égal à $p_1 \times \dots \times p_{i-1} \times \alpha_i \times p_{i+1} \times \dots \times p_n$. Si $\alpha_i = 0$ c'est clair puisque $\overline{\overline{T}}$ a une ligne nulle, donc un déterminant nul. Si $\alpha_i \neq 0$ nous terminons la réduction (en prenant α_i comme dernier pivot) et par application des règles A_1 et C (de la définition des déterminants), nous obtenons le résultat.

De même nous pouvons démontrer :

$$(-1)^r \text{dét}_{\mathcal{B}}(V_1, \dots, V'_i, \dots, V_n) = p_1 \times \dots \times p_{i-1} \times \alpha'_i \times p_{i+1} \times \dots \times p_n$$

et

$$(-1)^r \text{dét}_{\mathcal{B}}(V_1, \dots, V_i + \lambda V'_i, \dots, V_n) = p_1 \times \dots \times p_{i-1} \times (\alpha_i + \lambda\alpha'_i) \times p_{i+1} \times \dots \times p_n$$

Et sur ces 3 expressions la formule à démontrer est évidente.

<u>Antisymétrie</u> : Si deux des vecteurs V_i sont égaux, alors $\text{dét}_{\mathcal{B}}(V_1, \dots, V_n) = 0$.

En effet les vecteurs $V_1, \dots, V_n$ sont alors dépendants, et on applique le théorème V_5.

Il en résulte que si l'on échange deux des vecteurs V_i, le déterminant est multiplié par -1.

Nous avons (au § d, Th V 4) rencontré un phénomène analogue pour les lignes ; nous avions alors éludé la démonstration. Grâce à de meilleures notations, nous allons ici l'écrire en détail :

Supposons que nous échangions V_i et V_j, nous pouvons alors écrire (en oubliant les vecteurs des colonnes autres que i et j) :

$$\begin{aligned}
&\text{dét}_{\mathcal{B}}(\dots, V_i + V_j, \dots, V_i + V_j, \dots) \\
&= \text{dét}_{\mathcal{B}}(\dots, V_i, \dots, V_i, \dots) + \text{dét}_{\mathcal{B}}(\dots, V_i, \dots, V_j, \dots) \\
&+ \text{dét}_{\mathcal{B}}(\dots, V_j, \dots, V_i, \dots) + \text{dét}_{\mathcal{B}}(\dots, V_j, \dots, V_j, \dots)
\end{aligned}$$

De ces 5 déterminants le 1er, le 2ème et le 5ème sont nuls ; donc la somme du 3ème et du 4ème est nulle ; c'est le résultat cherché.

§ f : <u>Effet d'un changement de base</u>

<u>Théorème V_6</u> : Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C} = (C_1, \dots, C_n)$ deux bases de E, et soit $(V_1, \dots, V_n)$ des vecteurs de E, alors

$$\text{dét}_{\mathcal{B}}(C_1, \dots, C_n) \times \text{dét}_{\mathcal{C}}(V_1, \dots, V_n) = \text{dét}_{\mathcal{B}}(V_1, \dots, V_n)$$

<u>Démonstration</u>: Puisque $\det_{\mathcal{B}}(c_1, \dots, c_n)$ est non nul, il existe α tel que :

$$\alpha \times \det_{\mathcal{B}}(c_1, \dots, c_n) = \det_{\mathcal{B}}(V_1, \dots, V_n)$$

Il s'agit de calculer α.

Écrivons les tableaux T_1 et T_2 correspondant aux vecteurs c_i et aux vecteurs V_i, exprimés dans la base $\mathcal{B}$. Nous avons donc $\alpha \det T_1 = \det T_2$. Nous allons faire sur T_1 et T_2 une série d'opérations élémentaires (les mêmes sur les deux tableaux). D'abord nous faisons celles d'une réduction de T_1 par la méthode du pivot simple (il y aura n pivots puisque $c_1, \dots, c_n$ sont indépendants). Nous obtenons deux tableaux T_1' et T_2' tels que $\det T_1' = \det T_1$ et $\det T_2' = \det T_2$. Puis nous amenons les pivots sur la diagonale par r opérations de $3^{\text{ème}}$ espèce. Nous obtenons des tableaux T_1'' et T_2'' tels que $\det T_1'' = (-1)^r \det T_1$ et $\det T_2'' = (-1)^r \det T_2$. Puis par des opérations de 2^{de} espèce nous ramenons les pivots à la valeur 1. Ceci nous donne des tableaux $T_1'''(= T_0)$ et T_2''' ; et, d'après la propriété A_2 (de la définition des déterminants), $\det T_1'' = k \det T_1'''$ et $\det T_2'' = k \det T_2'''$ (où k est le produit des pivots). Nous avons donc :

$$\det T_2 = \det T_2' = (-1)^r \det T_2'' = (-1)^k k \det T_2'''$$

et $\det T_1 = \det T_1' = (-1)^r \det T_1'' = (-1)^k k \det T_0$

Donc $\alpha = \det T_2'''$.

Or T_1''' et T_2''' sont formés des coordonnées des vecteurs c_i et des vecteurs V_i, dans une certaine base de E. Puisque $T_1''' = T_0$, cette base est $\mathcal{C}$. Donc $\alpha = \det_{\mathcal{C}}(V_1, \dots, V_n)$. Ce qui termine la démonstration de V_6.

§9: Le déterminant d'une matrice carrée.

Une matrice carrée $n \times n$ est un tableau carré, on peut donc parler de son déterminant.

On vérifie facilement que le déterminant d'une somme de matrices, n'est (en général) pas la somme de leurs déterminants. Par contre

Théorème V_7 : Le déterminant du produit de deux matrices $n \times n$, est égal au produit des déterminants de ces deux matrices. C'est à dire $\det M.N = \det M . \det N$

Démonstration: Si l'une des deux matrices n'est pas de rang n, le produit n'est pas non plus de rang n, donc les deux membres de l'égalité sont nuls.

Supposons maintenant que M et N soient de rang n. Soit $\mathcal{B}$ une base de $\mathbb{R}^n$, il existe une base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^n$ telle que N soit la matrice de $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}) \xrightarrow{Id} (\mathbb{R}^n, \mathcal{C})$. De même il existe une base $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^n$ telle que M soit la matrice de $(\mathbb{R}^n, \mathcal{C}) \xrightarrow{Id} (\mathbb{R}^n, \mathcal{D})$. Il en résulte que MN est la matrice de $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}) \xrightarrow{Id} (\mathbb{R}^n, \mathcal{D})$. Si $\mathcal{C} = (C_1, \dots, C_n)$ et $\mathcal{D} = (D_1, \dots, D_n)$, d'après le théorème V_6, nous avons :

$\det_{\mathcal{B}}(D_1,\dots,D_n) = \det_{\mathcal{B}}(C_1,\dots,C_n)\det_{\mathcal{C}}(D_1,\dots,D_n)$
qui n'est autre que l'égalité cherchée
$\det MN = \det N \cdot \det M$.

Corollaire : Pour toute matrice carrée $n \times n$ de rang n, on a $\det(M^{-1}) = 1/\det M$.

Car le théorème nous dit que
$\det(M^{-1})\det(M) = \det(M^{-1}M) = \det T_0 = 1$

§ h : Déterminant d'un endomorphisme

Considérons un espace vectoriel E de dimension n, et un endomorphisme φ de E, c'est à dire une application linéaire $\varphi : E \longrightarrow E$.

Considérons une base $\mathcal{B}$ de E et la matrice M de $(E,\mathcal{B}) \xrightarrow{\varphi} (E,\mathcal{B})$. Si $\mathcal{C}$ est une autre base de E et M' la matrice de $(E,\mathcal{C}) \xrightarrow{\varphi} (E,\mathcal{C})$, nous savons (cf : Leçon 4 § h) qu'il existe une matrice inversible A telle que $M' = AMA^{-1}$. On déduit alors du § g ci-dessus que

$$\det M' = \det A \cdot \det M \cdot \det A^{-1} = \det M$$

Ce déterminant qui ne dépend donc que de φ et pas de la base dans laquelle on l'exprime est appelé le déterminant de l'endomorphisme φ. Il est bien sûr nul si et seulement si φ est non inversible.

On démontre facilement (en utilisant le théorème V 7) que si φ et ψ sont deux endomorphismes de E, on a :

$$\det(\varphi \cdot \psi) = \det \varphi \cdot \det \psi$$

Si φ est inversible $\det(\varphi^{-1}) = 1/\det\varphi$.

<u>Théorème V 8</u> : Soit φ un endomorphisme de l'espace vectoriel E, et soient $V_1, \dots, V_n$ des vecteurs de E. Alors quelle que soit la base $\mathcal{B}$ de E, on a :

$$\det_{\mathcal{B}}(\varphi(V_1), \dots, \varphi(V_n)) = \det\varphi \times \det_{\mathcal{B}}(V_1, \dots, V_n)$$

<u>Démonstration</u> : Si $V_1, \dots, V_n$ sont dépendants, $\varphi(V_1), \dots, \varphi(V_n)$ le sont aussi, donc les deux membres sont nuls. Si $V_1, \dots, V_n$ sont indépendants, ils forment une base $\mathcal{V}$, et $\det\varphi = \det_{\mathcal{V}}(\varphi(V_1), \dots, \varphi(V_n))$. L'égalité à démontrer est alors (aux notations près) celle du théorème V 6.

Seconde partie : Existence des déterminants

§i : La démonstration du théorème d'existence

Pour rendre valide tout ce qui précède il nous reste à démontrer le théorème V 1 ; c'est à dire à démontrer que, pour tout n, il existe une théorie des déterminants d'ordre n.

Pour cela nous raisonnerons par récurrence sur n. L'existence de théories des déterminants à l'ordre 2 et 3 est assurée par les § a et b. Nous allons donc supposer que, pour un certain n, nous avons su démontrer l'existence d'une théorie des déterminants d'ordre $n-1$; et nous allons démontrer l'existence d'une théorie des déterminants d'ordre n.

Considérons un tableau $n \times n$:

$$T = \begin{matrix} t_{11} & \cdots & t_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ t_{n1} & \cdots & t_{nn} \end{matrix}$$

Nous noterons $T_{i\alpha}$ le tableau obtenu en rayant la i-ème ligne et la α-ème colonne de T. Il est d'ordre $n-1$, nous le noterons

$\text{dét}_{n-1} T_{i\alpha}$. Ce déterminant est appelé le <u>mineur</u> de la place $(i;\alpha)$ dans le tableau T.

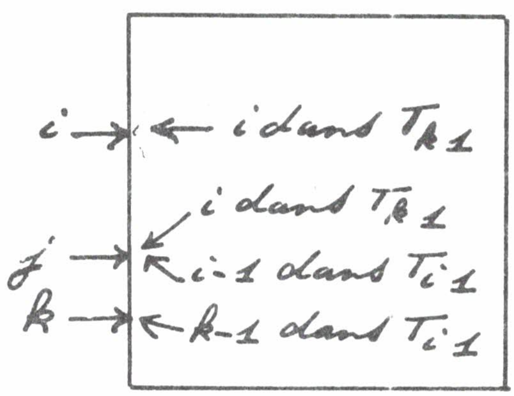
Nous poserons :

$$\text{dét}_n T = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} t_{i1} \, \text{dét}_{n-1} T_{i1}$$

Ceci définit clairement une application $\text{dét}_n : \mathcal{E}_n \longrightarrow \mathbb{R}$. Nous allons montrer qu'elle possède les propriétés A_1, A_2, B et C (cf : §c)

La propriété C est clairement vérifiée

<u>Démonstration de B</u> :



Supposons que les lignes i et k de T soient identiques.

Si $j \neq i$ et $j \neq k$, le tableau T_{j1} a deux lignes identiques, donc $\text{dét}_{n-1} T_{j1}$ est nul. Nous avons donc :

$$\text{dét}_n T = (-1)^{i+1} t_{i1} \, \text{dét}_{n-1} T_{i1} + (-1)^{k+1} t_{k1} \, \text{dét}_{n-1} T_{k1}$$

Les tableaux T_{i1} et T_{k1} ont des lignes identiques, mais pas dans le même ordre. En supposant $i<k$, on obtient T_{i1} à partir de T_{k1} de la façon suivante : on prend la ligne i de T_{k1}, et on la met à la place de la ligne $k-1$, en décalant d'un numéro les lignes $i+1, i+2, \dots, k-1$. Cette transformation peut encore se faire par échanges de lignes 2 à 2 : on échange i et $i+1$; puis, dans le tableau obtenu $i+1$ et $i+2$; puis, dans le tableau obtenu $i+2$ et $i+3$; … ; jusqu'à

l'échange de $k-2$ et $k-1$. Il y a ainsi $k-1-i$ échanges successifs. Chacun de ces échanges multiplie par -1 le déterminant du tableau $(n-1)\times(n-1)$ sur lequel on travaille ; donc $\text{dét}_{n-1} T_{i1} = (-1)^{k-1-i}\,\text{dét}_{n-1} T_{k1}$

Il en résulte que

$\text{dét}_n T = (-1)^{i+1} t_{i1} (-1)^{k-1-i}\,\text{dét}_{n-1} T_{k1} + (-1)^{k+1} t_{k1}\,\text{dét}_{n-1} T_{k1}$

Et, puisque $t_{i1} = t_{k1}$, nous avons $\text{dét}_n T = 0$

<u>Démonstration de A_2</u> : Si nous multiplions par λ les éléments de la ligne i :

a) Pour $j \neq i$, $(-1)^{j+1} t_{j1}\,\text{dét}_{n-1} T_{j1}$ est multiplié par λ ; car t_{j1} n'est pas changé, mais qu'une ligne du tableau T_{j1} est multipliée par λ.

b) $(-1)^{i+1} t_{i1}\,\text{dét}_{n-1} T_{i1}$ est multiplié par λ ; car t_{i1} est multiplié par λ, et que T_{i1} n'est pas modifié

Donc $\text{dét}_n T$ est multiplié par λ.

<u>Démonstration de A_1</u> : Nous noterons T_{kj}, T'_{kj} et T''_{kj} les mineurs des tableaux T, T' et T''.

. Si $j=i$, les tableaux T_{i1}, T'_{i1} et T''_{i1} sont identiques (on a en effet supprimé la seule ligne par laquelle T, T' et T'' diffèrent).

. Si $j\neq i$, les tableaux T_{j1}, T'_{j1} et T''_{j1} sont identiques à une ligne près (la i-ème si $j>i$; la $(i-1)$ ième si $j<i$). Et dans cette ligne, chaque élément de

T_{j1} est la somme des éléments de même place de T'_{j1} et T''_{j1}. Il en résulte (par application de A_1 aux déterminants d'ordre $n-1$) que

$$\text{dét}_{n-1} T_{j1} = \text{dét}_{n-1} T'_{j1} + \text{dét}_{n-1} T''_{j1}$$

De ces calculs on déduit :

$$\text{dét}_n T = \sum_{j \neq i} (-1)^{j+1} t_{j1} \, \text{dét}_{n-1} T_{j1} + (-1)^{i+1} t_{i1} \, \text{dét}_{n-1} T_{i1}$$

d'où

$$\text{dét}_n T = \sum_{j \neq i} (-1)^{j+1} t_{j1} \left(\text{dét}_{n-1} T'_{j1} + \text{dét}_{n-1} T''_{j1} \right) + (-1)^{i+1} (t'_{i1} + t''_{i1}) \, \text{dét}_{n-1} T_{i1}$$

d'où

$$\text{dét}_n T = \text{dét}_n T' + \text{dét}_n T''.$$

Ce qui termine la démonstration du théorème V1.

§7 : Symétrie du déterminant

On appelle transposé d'un tableau T, le tableau T^t défini par : l'élément qui est à la place (i,j) dans T^t, est égal à l'élément qui est à la place (j,i) dans T.

Exemple :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Théorème V9 : Soit T un tableau carré, alors $\text{dét}\, T = \text{dét}\, T^t$.

Démonstration : A tout tableau T à n lignes et n colonnes, associons $\text{dét}(T^t)$. Nous obtenons une application :

$$\varphi : \mathcal{C}_n \longrightarrow \mathbb{R}$$

Cette application possède les propriétés A_1 et A_2 (car le déterminant est linéaire par rapport aux colonnes; § e), la propriété B (car le déterminant est antisymétrique par rapport aux colonnes; § e), et la propriété C (car $T_0^t = T_0$). Il résulte donc du théorème V_2, que φ est le déterminant.

§ k: <u>Développement par rapport à une ligne ou une colonne.</u>

Rappelons qu'au § i nous avons défini le mineur de la place (i,j) dans le tableau $(n \times n)$ T, comme le déterminant du tableau $(n-1)\times(n-1)$ T_{ij} obtenu en rayant la ligne i et la colonne j du tableau T. Nous appellerons cofacteur de la place (i,j) le nombre:

$$\tau_{ij} = (-1)^{i+j}\,\text{dét}\,T_{ij}$$

Avec cette convention, la formule de définition des déterminants d'ordre n (cf § i), s'écrit:

$$\text{dét}\,T = \sum_{i=1}^{n} t_{i1}\,\tau_{i1}$$

Cette formule est encore appelée le développement de dét T par rapport à la 1ère colonne (car les t_{i1} sont les éléments de la 1ère colonne de T).

De façon générale pour toute colonne j, nous avons la formule:

$$\text{dét}\, T = \sum_{i=1}^{n} t_{ij}\, \tau_{ij}$$

qui est appelé le développement par rapport à la j-ème colonne.

Et nous avons aussi, pour toute ligne i, la formule

$$\text{dét}\, T = \sum_{j=1}^{n} t_{ij}\, \tau_{ij}$$

qui est appelé le développement par rapport à la i-ème ligne.

<u>Démonstration</u> : Pour obtenir la première de ces formules, on applique la formule connue (qui correspond à la 1^{re} colonne) au tableau T' obtenu en échangeant les colonnes 1 et j de T ; le calcul est alors immédiat.

Pour obtenir la seconde formule, on applique la première au tableau transposé T^t.

Ces formules de développements par rapport aux lignes et aux colonnes sont des outils précieux dans le calcul des déterminants ; en particulier dans le cas où une ligne (ou bien une colonne) comporte beaucoup de zéros.

<u>Exemple</u> : Soit à calculer

$$A = \text{dét} \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Développons par rapport à la 2de colonne

$$A = \lambda \times (-1)^{2+1} \times \text{dét} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} + 3 \times (-1)^{2+4} \times \text{dét} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Et il nous reste à appliquer la règle de Sarrus.

Nous aurions pu aussi développer par rapport à la 3ième ligne - Nous aurions eu

$$A = 1 \times (-1)^{3+3} \times \text{dét} \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} + 1 \times (-1)^{3+4} \times \text{dét} \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Bien sûr si le tableau ne comporte pas de zéros, on peut en faire apparaître par des opérations élémentaires. Si on en fait apparaître un maximum, on retombe sur le calcul au moyen de la méthode du pivot, qui a été décrite dans l'introduction.

<u>Exercice</u>: Calculer les déterminants suivants

$$B = \text{dét} \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \text{dét} \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -\alpha & 0 & 3 \\ 1 & \alpha & 0 & 3 & \alpha \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Inversion d'une matrice carrée.

Considérons une matrice carrée $T=(t_{ij})$ et notons τ le tableau des cofacteurs, c'est à dire le tableau carré qui a à la place (i,j), le cofacteur de la place (i,j) dans le tableau T. Faisons le produit matriciel $T\cdot\tau^t$. Nous obtenons une matrice carrée dont :

a) les éléments diagonaux sont égaux à $\text{dét}\, T$ (ceci est la traduction de formule de développement par rapport aux lignes).

b) les éléments non diagonaux sont nuls ; car $\sum_{j=1}^{n} t_{ij}\,\tau_{i'j}$ est, d'après la formule de développement par rapport aux lignes, le déterminant du tableau T' dont les lignes de n° différent de i' sont celles de T, et dont la i'-ème ligne est la i-ème ligne de T ; ce tableau T' a (si $i\neq i'$) 2 lignes égales (celles de n° i et i'), donc son déterminant est nul.

Nous avons donc $T\cdot\tau^t=(\text{dét}\, T)\, I_n$. Si la matrice T est inversible, c'est à dire si $\text{dét}\, T\neq 0$ (cf : §9), ceci nous donne :

$$T^{-1}=\frac{1}{\text{dét}\, T}\,\tau^t$$

Par exemple si $T=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}$

le tableau des cofacteurs s'écrit

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -2 & -5 & 4 \\ -3 & 9 & -5 \end{pmatrix}$$

et on a

$$T \cdot \tau^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -3 & -5 & 9 \\ -2 & 4 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & 0 & 0 \\ 0 & -11 & 0 \\ 0 & 0 & -11 \end{pmatrix}$$

Donc $T^{-1} = \dfrac{-1}{11} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -3 & -5 & 9 \\ -2 & 4 & -5 \end{pmatrix}$

Résultat que l'on pourra retrouver en utilisant la méthode décrite en IV g.

<u>Exercices</u> : Calculer par les deux méthodes connues, les inverses des matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercices sur la leçon V

A] Calculer

$$\det\begin{pmatrix} 1 & \cos t & \sin t \\ 1 & \cos u & \sin u \\ 1 & \cos v & \sin v \end{pmatrix}$$

B] Calculer

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

C] Calculer

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

D] Calculer

$$\det\begin{pmatrix} t & 1 & 1 & 1 \\ 1 & t & 1 & 1 \\ 1 & 1 & t & 1 \\ 1 & 1 & 1 & t \end{pmatrix}$$

E] Calculer

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{pmatrix}$$

F] Calculer

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{pmatrix}$$

G] Calculer
$$\det\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 & a^4 \\ 1 & b & b^2 & b^4 \\ 1 & c & c^2 & c^4 \end{vmatrix}$$

H] Calculer
$$\det\begin{vmatrix} \alpha+\beta & 2\alpha & 2\alpha & 2\alpha & 2\alpha \\ 2\beta & \alpha+\beta & 2\alpha & 2\alpha & 2\alpha \\ 2\beta & 2\beta & \alpha+\beta & 2\alpha & 2\alpha \\ 2\beta & 2\beta & 2\beta & \alpha+\beta & 2\alpha \\ 2\beta & 2\beta & 2\beta & 2\beta & \alpha+\beta \end{vmatrix}$$

I] Calculer
$$\det\begin{vmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \\ t & t^2 & t^3 & 1 \\ t^2 & t^3 & 1 & t \\ t^3 & 1 & t & t^2 \end{vmatrix}$$

J] On dit qu'une matrice M est antisymétrique si $M^t = -M$ (ie : $m_{ij} = -m_{ji}$). Démontrer que les matrices antisymétriques $n \times n$, avec n impair, ne sont pas inversibles.

K] On dit qu'une matrice M est orthogonale, si $M \cdot M^t = Id$. Démontrer que le déterminant d'une matrice orthogonale est égal à $+1$ ou à -1.

L] Si une matrice inversible est symétrique (ie : $M = M^t$), alors son inverse est symétrique.

Appendice : Déterminants comme polynomes de leurs coefficients

§1 : Le déterminant comme polynome de ses coefficients

La signature d'une permutation

Nous noterons S_n le groupe des bijections de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$ sur lui même, c'est à dire l'ensemble des permutations de $\{1, \ldots, n\}$

Une permutation σ de $\{1, \ldots, n\}$ étant donnée, nous appellerons inversion de σ, tout couple (i, j) tel que $i < j$ et $\sigma(i) > \sigma(j)$. Nous noterons $I(\sigma)$ le nombre des inversions de σ.

Exemples :

$n = 5$ et $\{1, 2, 3, 4, 5\} \xrightarrow{\ \sigma\ } \{3, 1, 2, 4, 5\}$
les inversions sont $(1, 3)$ et $(3, 2)$; donc $I(\sigma) = 2$.

$n = 6$ et $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \xrightarrow{\ \sigma\ } \{2, 1, 3, 6, 5, 4\}$
les inversions sont $(1, 2), (4, 5), (4, 6)$ et $(5, 6)$; donc $I(\sigma) = 4$.

Le nombre $s(\sigma) = (-1)^{I(\sigma)}$ est appelé la signature de σ.

Considérons la transvection τ_{ij}, c'est à dire la permutation qui laisse fixes les nombres différents de i et j, et échange i et j. Les inversions de τ_{ij} sont (i, j) d'une part, et d'autre part, pour tout α compris entre i et j (s'il y en a !) (i,α) et (α,j). Il y a donc un nombre impair d'inversions, et $s(\tau_{ij})=-1$.

<u>Lemme</u> : Pour tout couple de permutations, nous avons $s(\sigma)s(\omega)=s(\sigma\omega)$.

<u>Démonstration</u> : Nous distinguerons 4 sortes de couples d'entiers (entre 1 et n)

Ceux qui sont invertis par ω, et dont l'image par ω est invertée par σ. Il y en a p.

Ceux qui sont invertis par ω, mais dont l'image par ω n'est pas invertie par σ. Il y en a q.

Ceux qui ne sont pas invertis par ω, mais dont l'image par ω est invertie par σ. Il y en a r

Ceux qui ne sont pas invertis par ω, et dont l'image par ω n'est pas invertie par σ. Il y en a s.

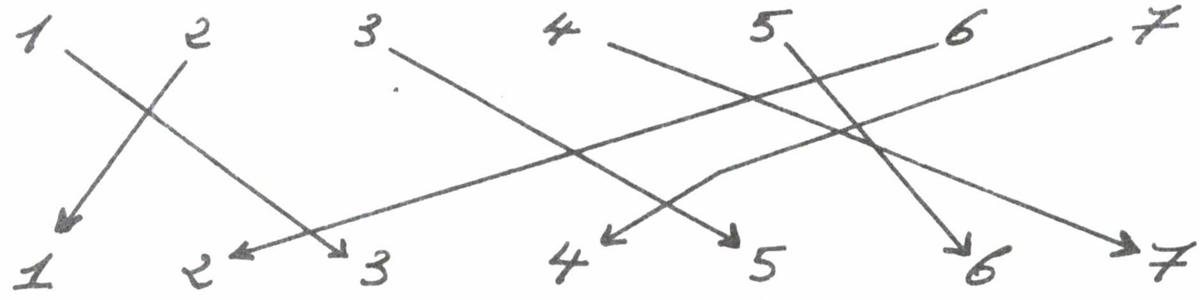
Il est clair que $I(\omega)=p+q$, $I(\sigma)=p+r$ et $I(\sigma\omega)=q+r$. D'où le résultat.

Pour calculer la signature d'une permutation nous pouvons donc

. Soit déterminer le nombre de ses inversions, et appliquer la définition de la signature

. Soit l'écrire comme un produit de transpositions (on se convainc facilement que c'est toujours possible). et s'il y a k transpositions dans ce produit, la signature est $(-1)^k$.

Soit encore employer le procédé graphique suivant



On dessine le diagramme sagittal de la permutation. En tordant un peu les flèches, on peut s'arranger pour que jamais 3 d'entre elles ne passent par un même point. On compte alors le nombre d'intersections de 2 flèches; s'il y en a k, la signature est égale à $(-1)^k$

Sur le dessin ci-dessus c'est clair puisque 2 flèches quelconques ont au plus un point commun. Le nombre des intersections est donc égal au nombre des inversions. Mais le résultat reste vrai si, les flèches étant tordues, certaines d'entre elles se coupent en plusieurs points (car le nombre des points communs de 2 d'entre elles est pair si elles correspondent à un couple (i,j) qui n'est pas une inversion, et impair si elles correspondent à un couple (i,j) qui est une inversion).

Expression générale du déterminant

Donnons nous un tableau $T=(t_{i,j})$ carré d'ordre n, et posons:

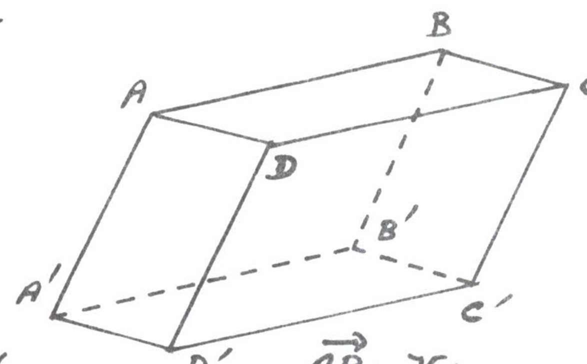
$$\partial(T) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} s(\sigma)\, t_{1,\sigma(1)} \times \cdots \times t_{n,\sigma(n)}$$

et alors $\partial(T)$ est le déterminant de T. Nous ne le démontrerons pas – Il suffit bien sûr pour le faire, de vérifier les propriétés A, B et C du § c.

Notons que dans cette expression $\partial(T)$ apparait comme la somme de $n!$ termes (car $\mathcal{S}_n$ a $n!$ éléments). Pour fabriquer un de ces termes on choisit une permutation σ, on prend les $t_{i,\sigma(i)}$ (il y en a un et un seul dans chaque ligne, et un et un seul dans chaque colonne); on fait leur produit, et on le multiplie par $s(\sigma)$. Le terme le plus simple est le produit des éléments diagonaux de T (ici $\sigma = Id$, et $s(\sigma) = 1$)

§ m : Volumes n-dimensionnels

Considérons l'espace de la géométrie, muni d'une base orthonormée $e = (e_1, e_2, e_3)$. Pour trois vecteurs quelconques V_1, V_2, V_3, le produit mixte (V_1, V_2, V_3) est (pourvu que e soit directe) le déterminant de ces vecteurs dans la base e. Et nous savons que sa valeur absolue est le volume du pavé $ABCDA'B'C'D'$ construit sur ces trois vecteurs. C'est encore 6 fois le volume du tétraèdre $ABDA'$ construit sur ces



$\vec{AB} = V_1$

$\vec{AD} = V_2$ et $\vec{AA'} = V_3$.

trois vecteurs. Si les trois vecteurs sont liés ces solides sont aplatis, et leurs volumes sont nuls.

Lorsque l'on travaille dans une base b non orthonormée, on a :

$\det_b(V_1, V_2, V_3) = \det_e(V_1, V_2, V_3) \det_b(e_1, e_2, e_3)$
(cf : théorème V_6). Donc, dans toute base, la valeur absolue du déterminant est proportionnelle au volume du tétraèdre construit sur les 3 vecteurs considérés.

On se convainc facilement que, dans le plan de la géométrie, pour toute base $b = (b_1, b_2)$, $|\det_b(V_1, V_2)|$ est proportionnel à la surface du triangle construit sur V_1 et V_2. Lorsque b est orthonormée c'est 2 fois cette surface.

Dans un espace vectoriel quelconque de dimension n, à n vecteurs $V_1, V_2, \dots, V_n$, et à un vecteur A nous associerons le n-simplexe $T(A; V_1, \dots, V_n)$. C'est l'ensemble des vecteurs M tels que

$$M - A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i V_i$$

avec tous les λ_i compris entre 0 et 1. Pour $n = 2$, on obtient un triangle ; pour $n = 3$ un tétraèdre.

Une base b étant donnée, on pose

$$\mathrm{Vol}(T(A, V_1, \dots, V_n)) = |\det_b(V_1, \dots, V_n)|$$

Et pour tout domaine polyédral D, on définit le volume n-dimensionnel de D de la façon suivante : on subdivise D en n-simplexes $T_1, \ldots, T_k$, et on pose

$$Vol(D) = Vol(T_1) + \ldots + Vol(T_k).$$

On démontre que le résultat obtenu est indépendant de la subdivision choisie. Et on peut vérifier que l'on obtient ainsi – pour les domaines polynomiaux – une notion de volume qui a toutes les propriétés du volume dans l'espace de la géométrie. En particulier :

a) Si $A \subset B$, alors $Vol(A) \leq Vol(B)$

b) Si un sous-espace de dimension $n-1$ partage A en deux domaines A_1 et A_2, alors $Vol(A) = Vol(A_1) + Vol(A_2)$

c) Si A est aplati (ie : contenu dans un sous espace de dimension $n-1$), alors $Vol(A)$ est nul

d) Si A' est obtenu en translatant A, alors $Vol(A') = Vol(A)$.

On notera que dans cette définition du volume, la base b sert d'unité de volume.

§n : Orientations d'un espace vectoriel

Attention : dans tout ce qui suit l'ordre dans lequel on considère les vecteurs d'une base joue le role essentiel.

Soit E un espace de dimension n, et $\mathcal{B}(E)$ l'ensemble de toutes les bases de E. Soit e une de ces bases, nous partageons

$\mathcal{B}(E)$ en deux classes, en mettant
dans une classe toutes les bases ε telles que $\det_e(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) > 0$
dans l'autre classe toutes les bases ε telles que $\det_e(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) < 0$.

Notons que si deux bases φ et ψ sont dans la même classe nous avons (d'après V 6) $\det_\varphi(\psi_1, \dots, \psi_n) > 0$, par contre si elles ne sont pas dans la même classe nous avons $\det_\varphi(\psi_1, \dots, \psi_n) < 0$. Il en résulte que le partage en ces deux classes ne dépend pas du choix de e.

Orienter E c'est faire jouer un rôle privilégié à l'une de ces deux classes de bases.

<u>Exemple dans le plan</u> : Soit E l'espace des vecteurs de la géométrie plane. Soit $e = (e_1, e_2)$ une base orthonormée directe. Toute autre base s'écrit $V_1 = r_1(\cos\theta_1\, e_1 + \sin\theta_1\, e_2)$ $V_2 = r_2(\cos\theta_2\, e_1 + \sin\theta_2\, e_2)$ (avec $\theta_2 - \theta_1 \neq k\pi$) et $\det_e(V_1, V_2) = r_1 r_2 \sin(\theta_2 - \theta_1)$. Ainsi lorsque $\sin(\theta_2 - \theta_1) > 0$, la base (V_1, V_2) est dans la même classe que e, lorsque $\sin(\theta_2 - \theta_1) < 0$ elle est dans l'autre classe. Mais $\sin(\theta_2 - \theta_1) > 0$ signifie tout simplement que l'on peut passer de la demi droite portant V_1, à celle qui porte V_2, par une rotation dans le sens direct dont l'angle est entre 0 et π. Autrement dit (V_1, V_2) est directe au sens habituel.

Inversement si $\sin(\theta_2 - \theta_1) < 0$, on passe de V_1 à V_2 par une rotation d'angle compris entre 0 et $-\pi$; autrement dit (V_1, V_2) est une base rétrograde. On a donc bien retrouvé la classification habituelle en bases directes et bases rétrogrades.

<u>Exemple dans l'espace</u> : Soit E l'espace des vecteurs de la géométrie. Soit V un vecteur non nul de E, si X et Y sont deux vecteurs non colinéaires et perpendiculaires à V, alors (V, X, Y) est une base de E. Soit (X', Y') un autre couple de vecteurs non colinéaires et perpendiculaires à V, alors le tableau des coordonnées de (V, X', Y') dans la base (V, X', Y') s'écrit

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont les coordonnées de (X', Y') dans la base (X, Y) du plan perpendiculaire à V. Il en résulte que

$$\det_{(V,X,Y)} (V, X', Y') = \det_{(X,Y)} (X', Y')$$

Et par conséquent si l'on a choisi une orientation de E, il existe dans le plan P perpendiculaire à V une classe de bases privilégiées (les bases (X, Y) telles que (V, X, Y) soit directe. Ces bases de P forment elles mêmes une orientation de P. Orienter E, c'est donc, pour tout vecteur V, orienter le plan perpendiculaire à V. Si l'on remplace V par −V, le plan P ne change pas, mais son orientation (induite par V et par celle de l'espace ambiant) est inversée.

Il resterait à montrer que la classique règle du bonhomme d'Ampère (ou du tire-bouchon) donne une orientation de l'espace. Pour cela il faudrait montrer que lorsqu'on "déplace" une base directe, elle reste directe. Ces questions seront abordées dans AG_3.

<u>Introduction</u> : Tous les problèmes d'algèbre linéaire, que nous avons posés et résolus par la méthode du pivot, peuvent être traités par des calculs de déterminants. C'est ce que nous allons voir dans la première partie de cette leçon. En fait ce traitement par les déterminants, s'il fait théoriquement double emploi avec la méthode du pivot, est mieux adapté au traitement des problèmes à paramètres (et par contre dans les cas numériques donne des calculs plus longs), et est donc un outil précieux dans tous les problèmes abstraits.

La seconde partie de la leçon est consacrée à la recherche des vecteurs propres d'une application linéaire. Nous avons vu que certains problèmes devenaient très simples si on les exprimait dans une base "qui leur était bien adaptée" (leçon III). De même, étant donnée une application linéaire $f : E \to E$, on peut se demander s'il existe une base dans laquelle f est (ie : a une matrice) très simple (par exemple une matrice dont seuls les éléments diagonaux sont non nuls). C'est l'étude de ce problème qui nous amène à introduire les vecteurs propres et les valeurs propres.

Plan de la leçon

Première partie

§a : Rang d'un tableau et déterminants.
§b : Les formules de Cramer.
§c : Résolution des systèmes linéaires au moyen de déterminants.
§d : Le résultant de deux polynomes.
§e : Applications géométriques.
§f : Faut-il utiliser la méthode du pivot ou la méthode des déterminants ?

Deuxième partie

§g : Valeurs propres et vecteurs propres.
§h : Polynomes caractéristiques.
§i : Diagonalisation des applications linéaires $f : E \to E$.
§j : Utilisations de la diagonalisation.

Appendice : Algèbre linéaire sur un corps autre que $\mathbb{R}$.

Première partie : Résolution des systèmes linéaires et déterminants

§a : Rang d'un tableau et déterminants

Considérons un tableau T ayant p colonnes et n lignes. Nous avons défini le rang de T comme le nombre des pivots que l'on obtient lorsque l'on réduit T (ce nombre étant indépendant des choix que l'on fait au cours de la réduction). Nous allons montrer que le rang de T peut aussi être calculé au moyen des déterminants.

Nous savons déjà (cf : Th V_5) qu'un tableau $n \times n$ est de rang n si et seulement si son déterminant est non nul. Pour généraliser ce résultat nous introduirons la notion de "déterminant d'ordre k extrait de T".

Pour obtenir un tableau $k \times k$ ($p \geqslant k$; $n \geqslant k$) à partir de T, il suffit de rayer $n-k$ lignes et $p-k$ colonnes. Le déterminant d'un tel tableau $k \times k$ est appelé un déterminant d'ordre k extrait de T.

<u>Exemple</u> : Du tableau $T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, nous

pouvons extraire 4 déterminants 3x3, obtenus en enlevant successivement la 1ère, la 2ème, la 3ème et la 4ème colonne.

Nous pouvons en extraire 3x6 déterminants 2x2, en rayant 1 ligne (il y a 3 façons de le faire) et 2 colonnes (il y a 6 façons de le faire).

De façon générale le nombre des déterminants d'ordre k que l'on peut extraire d'un tableau p x n, est égal à $C_p^k \times C_n^k = C_p^{p-k} \times C_n^{n-k}$.

<u>Théorème VI 1</u> : Soit T un tableau p x n, on suppose que

1) Tous les déterminants d'ordre k+1 (s'il en existe !) extraits de T sont nuls.

2) Il existe un déterminant d'ordre k extrait de T, qui est non nul.

Alors T est de rang k.

Cet énoncé est (à cause de III § 6) équivalent au suivant :

<u>Théorème VI 2</u> : Considérons p vecteurs $V_1, \dots, V_p$ de $\mathbb{R}^n$, et le tableau T de leurs coordonnées dans la base naturelle. Supposons que :

1) Tous les déterminants d'ordre k+1 (s'il en existe !) extraits de T sont nuls.

2) Il existe un déterminant d'ordre k extrait de T, qui est non nul.

Alors le sous espace engendré par les vecteurs $V_1, \dots, V_p$ est de dimension k.

<u>Démonstration</u> : Considérons un déterminant Δ d'ordre k extrait de T qui est non nul. Il est formé à partir des lignes $i_1, \dots, i_k$ et des colonnes $j_1, \dots, j_k$. Le théorème résulte clairement des deux lemmes suivants :

<u>Lemme VI_3</u> : Les vecteurs $V_{j_1}, \dots, V_{j_k}$ sont indépendants.

<u>Lemme VI_4</u> : Si $k < p$, pour tout j (différent des indices $j_1, \dots, j_k$), V_j est une combinaison linéaire des vecteurs $V_{j_1}, \dots, V_{j_k}$.

<u>Démonstration de VI_3</u> : Considérons l'application linéaire $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$, qui à $x = (x_1, \dots, x_n)$ associe $\varphi(x) = (x_{i_1}, \dots, x_{i_k})$. Les vecteurs $\varphi(V_{j_1}), \dots, \varphi(V_{j_k})$ sont indépendants, puisque le tableau de leurs coordonnées est Δ (il a un déterminant non nul, et on applique V_5). Donc les vecteurs $V_{j_1}, \dots, V_{j_k}$ sont indépendants (car si on avait une relation de dépendance $\alpha_1 V_{j_1} + \dots + \alpha_k V_{j_k} = 0$ (α_i non tous nuls), on aurait aussi la relation de dépendance $\alpha_1 \varphi(V_{j_1}) + \dots + \alpha_k \varphi(V_{j_k}) = 0$). Et VI_3 est ainsi démontré.

<u>Démonstration de VI_4</u> : Écrivons le tableau

T' des coordonnées de $(V_{j_1}, \dots, V_{j_k}, V_j)$. Choisissons un indice de ligne i, et écrivons l'une en dessous de l'autre les lignes d'indice $i, i_1, \dots, i_k$ de T'. Nous obtenons un tableau carré T_i'' à $k+1$ lignes et $k+1$ colonnes. Son déterminant est nul puisque :

* ou bien i est l'un des indices $i_1, \dots, i_k$, et alors T_i'' a deux lignes identiques.

* ou bien i n'est pas l'un des indices $i_1, \dots, i_k$ et alors T_i'' est, à l'ordre des lignes et des colonnes près, un déterminant d'ordre $k+1$ extrait de T, et on a fait l'hypothèse que ceux-ci sont tous nuls.

Développons maintenant T_i'' par rapport à sa 1ère ligne (celle qui correspond à l'indice i). En notant $t_{\alpha\beta}$ l'élément de la αième ligne et la βième colonne de T, nous obtenons

$$0 = \det T_i'' = t_{ij_1} M_{j_1} + \dots + t_{ij_k} M_{j_k} + T_{ij} M_j$$

Les $M_{j_1}, \dots, M_{j_k}, M_j$ sont (au signe près) les $k+1$ déterminants d'ordre k que l'on peut fabriquer avec les lignes $i_1, \dots, i_k$ de T'; ils sont donc indépendants de i ; et M_j qui est formé à partir des colonnes $j_1, \dots, j_k$, est égal à $(-1)^k \Delta$, et est donc non nul. En divisant cette relation par M_j, nous obtenons

$$t_{ij} = -(M_{ij_1}/M_{ij})\, t_{ij_1} - \dots - (M_{ij_k}/M_j)\, t_{ij_k}$$

Et, puisque les M_{ij} sont indépendants de i, ceci se traduit par la relation vectorielle :

$$V_j = -(M_{ij1}/M_{ij})\, V_{j1} - \dots - (M_{ijk}/M_{ij})\, V_{jk}$$

Et ainsi VI_4 est démontré.

<u>Remarque 1</u> : On remarquera que, dans la démonstration de VI_4 nous n'avons pas utilisé tous les déterminants d'ordre $k+1$ de T, mais seulement ceux qui contiennent Δ.

<u>Remarque 2</u> : En démontrant VI_4 nous avons donné une méthode explicite (en termes de déterminants) pour calculer V_j en fonction des $V_{j1}, \dots, V_{jk}$.

<u>Exemple</u> : Considérons dans $\mathbb{R}^4$ les vecteurs $V_1 = (1, 2, 3, 4)$, $V_2 = (2, 3, 1, 0)$, $V_3 = (1, 0, 1, 0)$ et $V_4 = (2, 1, 7, 8)$. Leur tableau s'écrit :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 7 \\ 4 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Son déterminant est nul (le lecteur pourra le vérifier). Soit Δ formé des 3 dernières lignes et des trois premières colonnes.

$$\Delta = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et dét } \Delta = 12$$

Les relations ci-dessus s'écrivent : quelque soit i :

$$0 = t_{i1} \,\text{dét}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} + t_{i2}\left[-\text{dét}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 7 \\ 4 & 0 & 8 \end{pmatrix}\right]$$
$$+ t_{i3} \,\text{dét}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 7 \\ 4 & 0 & 8 \end{pmatrix} + t_{i4}\left[-\text{dét}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right]$$

Soit $24\,t_{i1} - 12\,t_{i2} + 24\,t_{i3} - 12\,t_{i4} = 0$.
C'est à dire :

$$24\,V_1 - 12\,V_2 + 24\,V_3 = 12\,V_4$$

On retrouvera facilement cette relation en réduisant T par la méthode du pivot, en s'efforçant de choisir les 3 pivots dans les 3 premières colonnes.

<u>Exercice</u> : On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^5$:

$V_1 = (1, 0, 2, 0, 1)$ $\quad V_2 = (2, 0, 3, 1, 4)$
$V_3 = (3, 1, 1, 2, 1)$ $\quad V_4 = (2, 1, 0, 1, -2)$

Écrire leur tableau et vérifier que tous les déterminants d'ordre 4 que l'on peut en extraire, sont nuls. Trouver un déterminant d'ordre 3, formé à partir des 3 premières colonnes, et qui est non nul. Par le procédé décrit ci-dessus, déterminer α, β, γ tels que

$$V_4 = \alpha\, V_1 + \beta\, V_2 + \gamma\, V_3$$

Retrouver cette relation par une réduction du tableau par la méthode du pivot.

§6 : Les formules de Cramer

Considérons un système linéaire à n équations et n inconnues. Nous pouvons le considérer sous la forme vectorielle. Nous avons alors n vecteurs $V_1, \dots, V_n$ dans $\mathbb{R}^n$, et un vecteur W de $\mathbb{R}^n$; et nous cherchons les familles de scalaires $(x_1, \dots, x_n)$ telles que :

$$x_1 V_1 + \dots + x_n V_n = W$$

Supposons que le rang de ce système soit n, ceci signifie (d'après IV 5) que le déterminant du tableau carré des premiers membres est non nul; c'est à dire que $\Delta = \det_{\mathcal{E}}(V_1, \dots, V_n) \neq 0$ (où $\mathcal{E}$ est la base naturelle de $\mathbb{R}^n$). Le système a alors une solution unique $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Nous allons l'exprimer en termes de déterminants.

Nous avons $W = \lambda_1 V_1 + \dots + \lambda_n V_n$; donc, quelque soit i :

$$\begin{aligned}
&\det_{\mathcal{E}}(V_1, \dots, V_{i-1}, W, V_{i+1}, \dots, V_n) \\
&\quad = \sum_{j=1}^{n} \det_{\mathcal{E}}(V_1, \dots, V_{i-1}, \lambda_j V_j, V_{i+1}, \dots, V_n) \\
&\quad = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \det_{\mathcal{E}}(V_1, \dots, V_{i-1}, V_j, V_{i+1}, \dots, V_n) \\
&\quad = \lambda_i \det_{\mathcal{E}}(V_1, \dots, V_{i-1}, V_i, V_{i+1}, \dots, V_n)
\end{aligned}$$

puisque les $n-1$ autres déterminants de cette somme sont nuls, pour avoir 2 colonnes égales. Nous avons donc

$$\lambda_i = \det_{\mathcal{E}}(V_1, \dots, V_{i-1}, W, V_{i+1}, \dots, V_n) / \Delta$$

(puisque $\Delta \neq 0$).

Cette formule est connue sous le nom de formule de Cramer. Le dénominateur est le déterminant du tableau T des premiers membres, le numérateur est le déterminant du tableau T_i obtenu à partir de T, en remplaçant la i-ème colonne par la colonne des seconds membres.

<u>Exercices</u>: 1) Vérifier que le système suivant :

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$$

est de rang 3. Le résoudre par les formules de Cramer.

2) Même question pour

$$\begin{cases} 3x + y - z + t = 0 \\ 2x - y \quad\; - t = 1 \\ x - 2y + z + 2t = 0 \\ x + y - z + 3t = 2 \end{cases}$$

§c : <u>Résolution des systèmes linéaires au moyen de déterminants</u>

Considérons un système linéaire à p inconnues et n équations. Interprétons le vectoriellement. Nous avons p vecteurs $V_1, \dots, V_p$ dans $\mathbb{R}^n$, et un vecteur W de $\mathbb{R}^n$, et nous cherchons les familles de scalaires $(x_1, \dots, x_p)$ telles que

$$x_1 V_1 + \dots + x_p V_p = W$$

Pour le résoudre nous chercherons d'abord son rang. Pour cela, d'après VI_1 et VI_2 nous chercherons le plus grand nombre k tel qu'il existe un déterminant d'ordre k extrait du tableau T des premiers membres, et qui soit non nul. Nous choisirons un tel déterminant Δ (que nous appellerons déterminant principal). Il est formé à partir des lignes $i_1, \ldots, i_k$ et des colonnes $j_1, \ldots, j_k$.

<u>Existence de solutions</u> : Pour qu'il existe (au moins) une solution, il faut et il suffit que le vecteur W soit dans le sous-espace E engendré par $V_{j_1}, \ldots, V_{j_k}$. D'après VI_2, E est de dimension k. Pour que W soit dans E, il faut et il suffit que $[V_{j_1}, \ldots, V_{j_k}, W] = E$, c'est à dire que $[V_{j_1}, \ldots, V_{j_k}, W]$ soit de dimension k; et pour cela il faut et il suffit que tous les déterminants d'ordre $k+1$, tirés du tableau des vecteurs $V_{j_1}, \ldots, V_{j_k}, W$ soient nuls (toujours d'après VI_2). Ces déterminants sont appelés les déterminants caractéristiques - relatifs au choix de Δ comme déterminant principal.

Il y a C_n^{k+1} déterminants caractéristiques; mais (d'après la remarque qui suit la preuve de VI_4) il suffit de vérifier que ceux qui "contiennent Δ" (ie : qui contiennent les lignes $i_1, \ldots, i_k$) sont nuls. Il n'y en a que $n-k$.

<u>Exemple</u> : Soit à résoudre le système à 4 inconnues et 5 équations:

$$\begin{cases} x - y + z - t = 1 \\ 2x + y + z + t = 2 \\ 3x \quad + 2z \quad = 3 \\ x + 2y - z - 2t = 1 \\ 3x + 3y \quad - t = 3 \end{cases}$$

Son tableau de coefficients s'écrit

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & -1 & 3 \end{array}$$

Avec les premiers membres, on peut former 5 déterminants d'ordre 4. On vérifie qu'ils sont tous nuls. Par contre le déterminant d'ordre 3 formé des 3 premières colonnes et des lignes 1, 2 et 4 est non nul il s'écrit :

$$\Delta = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{donc dét } \Delta = -3$$

Nous écrivons 2 déterminants caractéristiques :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Ils sont tous deux nuls. Donc il y a des solutions.

<u>Calcul des solutions</u> : Les vecteurs $V_{j_1}, \dots, V_{j_k}$ forment une base de E ; numérotons

$V_{j_{k+1}}, \dots, V_{j_n}$ les $n-k$ derniers vecteurs V_j. Ils sont dans E, et quels que soient $\lambda_{j_{k+1}}, \dots, \lambda_{j_n}$, le vecteur $W' = W - \lambda_{j_{k+1}} V_{j_{k+1}} - \dots - \lambda_{j_n} V_{j_n}$ est aussi dans E. Il existe donc une unique famille de scalaires $\lambda_{j_1}, \dots, \lambda_{j_k}$ telle que $W' = \lambda_{j_1} V_{j_1} + \dots + \lambda_{j_k} V_{j_k}$.

Ceci revient à dire que pour avoir une solution, on choisit arbitrairement les inconnues relatives aux vecteurs d'indices $j_{k+1}, \dots, j_n$ (appelées inconnues non principales) et on calcule alors celles qui sont d'indices $j_1, \dots, j_k$ (appelées inconnues principales) et qui sont alors uniquement déterminées (on comparera à ce qu'on a vu à la leçon I).

Considérons — après choix de $\lambda_{j_{k+1}}, \dots, \lambda_{j_n}$ — le système

$$(S) \quad W' = x_{j_1} V_{j_1} + \dots + x_{j_k} V_{j_k}$$

Et notons (S') le système formé des lignes $i_1, \dots, i_k$ de (S). Ces deux systèmes ont une solution unique — Pour S, c'est ce que nous venons de démontrer, et S' est un système $k \times k$ de rang k (son déterminant est Δ). Comme toute solution de S est évidemment solution de S', c'est que S et S' ont la même solution. On calcule donc la solution de S' par les formules de Cramer (cf : § 6 ci-dessus)

Exemple : Nous reprendrons l'exemple ci-dessus. La seule inconnue non principale (relative au déterminant principal que nous avons choisi) est t. Nous choisissons une valeur t_0 de t, et nous obtenons le système

$$(S)\begin{cases} x - y + z = 1 + t_0 \\ 2x + y + z = 2 - t_0 \\ 3x + 2z = 3 \\ x + 2y - z = 1 + 2t_0 \\ 3x + 3y = 3 + t_0 \end{cases}$$

Le système (S') est formé des lignes 1, 2 et 4 de (S); et la seule solution de (S) est la seule solution de (S'). Il suffit de résoudre (S') par les formules de Cramer.

Exercices : 1) Résoudre par la méthode des déterminants le système :

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x - y - z = 0 \\ x - 2z = -1 \end{cases}$$

2) Même question pour

$$\begin{cases} x - 2y - z + t = 1 \\ 2x - y + z = 0 \\ x - 3y - t = 0 \\ 3x - 4y + z - t = 0 \\ 2x - 5y - z = 1 \end{cases}$$

Reprendre ensuite la résolution par la méthode du pivot. Et vérifier qu'on a bien les mêmes résultats.

3) En utilisant la méthode des déterminants, montrer que le système suivant n'a pas de solution

$$\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ x + y - z = 2 \\ 3x - y + 3z = 0 \\ x - 2y + z = 1 \end{cases}$$

§d : Le résultant de deux polynomes

Une conséquence classique du traitement des systèmes linéaires par les déterminants est la théorie du résultant.

Soit $P(X) = a_0 + a_1 X + \dots + a_p X^p$ $(a_p \neq 0)$

et $Q(X) = b_0 + b_1 X + \dots + b_q X^q$ $(b_q \neq 0)$

deux polynomes. Nous allons chercher une condition, portant sur les a_i et les b_j, nécessaire et suffisante pour que P et Q soient premiers entre eux (ie : n'aient pas de facteur commun de degré > 0).

D'après le théorème de Bezout s'il existe des polynomes U et V tels que $UP + VQ = 1$, les polynomes P et Q sont premiers entre eux.

Pour essayer de construire de tels polynomes, nous considérons l'espace E_{p+q} des polynomes de degré au plus $p+q-1$ (il est de dimension $p+q$). Il contient les polynomes

$$\varepsilon_1(X) = P(X), \quad \varepsilon_2(X) = X P(X), \dots, \varepsilon_q(X) = X^{q-1} P(X)$$

$$\varepsilon_{q+1}(X) = Q(X), \quad \varepsilon_{q+2}(X) = X Q(X), \dots, \varepsilon_{p+q}(X) = X^{p-1} Q(X)$$

Essayons de résoudre l'équation (à $p+q$ inconnues et $p+q$ équations)

$$\lambda_1 \varepsilon_1 + \dots + \lambda_{p+q}\,\varepsilon_{p+q} = 1$$

D'après le § b si son déterminant est non nul elle a une solution (d'ailleurs unique) $\lambda_1, \dots, \lambda_{p+q}$. En posant alors $U(X) = \lambda_1 + \dots + \lambda_p X^{p-1}$ et $V(X) = \lambda_{p+1} + \lambda_{p+2} X + \dots + \lambda_{p+q} X^{q-1}$, nous avons $PU + QV = 1$, donc P et Q sont premiers entre eux.

Si par contre ce déterminant est nul, l'équation

$$\lambda_1 \varepsilon_1 + \dots + \lambda_{p+q}\,\varepsilon_{p+q} = 0$$

a une solution non nulle. Celle-ci nous donne une relation du type $UP + VQ = 0$, avec $d^\circ U < d^\circ Q$ et $d^\circ V < d^\circ P$. Donc Q divise UP; si Q et P étaient premiers entre eux, d'après le théorème de Gauss, Q diviserait U; ce qui est absurde puisque $d^\circ Q > d^\circ U$.

Le déterminant de ce système est appelé le résultant de P et Q; il s'écrit :

$$\Delta \quad \begin{vmatrix}
a_0 & 0 & \dots & 0 & b_0 & 0 & \dots & 0 \\
a_1 & a_0 & & 0 & b_1 & b_0 & & \vdots \\
\vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_p & a_{p-1} & & & b_q & \vdots & & \\
0 & a_p & \dots & a_0 & 0 & b_q & \dots & 0 \\
0 & 0 & & \vdots & 0 & \vdots & & b_0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & \dots & a_p & 0 & 0 & \dots & b_q
\end{vmatrix}$$

Si a_p et b_q sont non nuls, alors Δ est nul si et seulement si P et Q ont un facteur commun (de d° > 0).

Conséquence : On sait que, pour qu'un polynome $P(X) = a_0 + \dots + a_p X^p$ $(a_p \neq 0)$ ait une racine double (réelle ou complexe), il faut et il suffit que P et P' aient un facteur commun. Pour cela il faut et il suffit que le résultant de P et de P' soit nul ; ce résultant s'appelle le discriminant de P.

Exercices : 1) Vérifier que le discriminant de $P(X) = aX^2 + bX + c$ s'écrit $\Delta = a(4ac - b^2)$. Puis vérifier que $\Delta = 0$ si et seulement si P s'annule en la racine de $P'(X) = 0$.

2) On considère $P(X) = X^3 + pX + q$. Vérifier que son discriminant s'écrit $\Delta = 4p^3 + 27q^2$. Vérifier que $\Delta = 0$ si et seulement si $P(\alpha)P(\beta) = 0$, où α et β sont les 2 racines du polynome $P'(X) = 3X^2 + p$.

§e : Applications géométriques

Intersections de droites dans le plan

Soit 3 droites dans le plan dont les équations s'écrivent $ax + by = c$, $a'x + b'y = c'$ et $a''x + b''y = c''$, ont elles un point commun ?

Elles ont un point commun si et seulement si le système suivant a une solution

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \\ a''x+b''y=c'' \end{cases}$$

S'il est de rang 2, on choisit un déterminant principal ; il est formé des lignes i_1 et i_2. Alors les deux droites correspondantes sont sécantes. Leur point commun est sur la $3^{ème}$ droite si et seulement le (seul) déterminant caractéristique est nul. Il s'écrit (au signe près)

$$D = \det \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$$

Si le système est de rang 1, c'est que l'on a $ab'-ba' = a'b''-b'a'' = a''b-b''a = 0$. Les trois droites donc parallèles ou confondues. Et D est alors nul, puisque les 2 premières colonnes sont proportionnelles.

Et bien sûr le système ne peut être de rang 0 (ceci signifierait $a=b=a'=b'=a''=b''=0$, et les droites "n'existeraient pas"). Il en résulte que D est nul si et seulement si

- ou bien les 3 droites sont concourantes.
- ou bien les 3 droites sont parallèles.

<u>Exercice</u> : Dans l'espace on considère 4 plans P_1, P_2, P_3, P_4 donnés par des équations

$$a_i x + b_i y + c_i y = d_i$$

$(i = 1, 2, 3, 4)$.

Montrer que :

$$\det \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = 0$$

si et seulement si

ou bien P_1, P_2, P_3, P_4 sont concourants.

ou bien P_1, P_2, P_3, P_4 sont parallèles à une même droite

ou bien P_1, P_2, P_3, P_4 sont parallèles.

Alignement de points du plan.

Soit $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$ et $C(c_1, c_2)$ trois points du plan. Sont ils alignés?

Pour qu'ils le soient il faut et il suffit qu'il existe 3 scalaires u, v, w tels que $(u,v) \neq (0,0)$ et que

$$\begin{cases} u\,a_1 + v\,a_2 + w = 0 \\ u\,b_1 + v\,b_2 + w = 0 \\ u\,c_1 + v\,c_2 + w = 0 \end{cases}$$

Ainsi u, v, w sont solutions d'un système homogène à 3 inconnues.

Ce système a une solution différente de la solution évidente $(0,0,0)$ (ie : il a plusieurs solutions) si et seulement si son déterminant est nul. Celui ci s'écrit

$$D = \det \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix}$$

Et il est clair qu'une solution non nulle de ce système ne peut être de la forme

$(0,0,w)\ (w\neq 0)$. Donc les 3 points sont alignés si et seulement si $D=0$.

<u>Remarque</u> : Il en résulte que l'équation de la droite (AB) s'écrit

$$\det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ x & y & 1 \end{pmatrix} = 0$$

<u>Exercice</u> : On considère des points $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(\ _1, b_2, b_3)$, $C(c_1, c_2, c_3)$ et $D(d_1, d_2, d_3)$ de l'espace ; montrer qu'ils sont coplanaires si et seulement si

$$\det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 1 \\ d_1 & d_2 & d_3 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

§ f : Faut-il utiliser la méthode du pivot ou la méthode des déterminants ?

Nous disposons maintenant de deux méthodes pour résoudre les systèmes linéaires. Quels sont leurs avantages respectifs ?

Deux cas sont possibles : ou bien le système est purement numérique ; ou bien il contient, au premier membre, des coefficients indéterminés (ou dépendant d'une indéterminée).

Si les coefficients du premier membre sont indéterminés, la méthode du pivot s'applique mal. Prenons un exemple.

Soit à résoudre

$$\begin{cases} (1-\lambda)x + \lambda y = 3 \\ (1+\lambda)x + (3-\lambda)y = 1 \end{cases}$$

Il nous faut choisir un pivot parmi les 4 coefficients $1-\lambda$, λ, $1+\lambda$, $3-\lambda$. Pour cela il nous faut supposer que ce coefficient est non nul. Nous prendrons par exemple $1-\lambda$ comme pivot, et il nous faudra faire une étude spéciale dans le cas où $\lambda = 1$. Nous aurons ainsi une discussion en fonction des valeurs de λ.

La méthode des déterminants nous dit qu'il y a solution unique si et seulement si $(1-\lambda)(3-\lambda)-(1+\lambda)\lambda \neq 0$; c'est à dire si $3-5\lambda \neq 0$. Il nous faut donc étudier à part le cas où $\lambda = 3/5$. Et dans ce cas nous avons

$$\begin{cases} \frac{2}{5}x + \frac{3}{5}y = 3 \\ \frac{8}{5}x + \frac{12}{5}y = 1 \end{cases}$$

donc il n'y a aucune solution.

Nous voyons ainsi apparaître l'inconvénient de la méthode du pivot : elle nous oblige à considérer à part le cas $\lambda = 1$, qui n'est pas un vrai cas particulier du système, mais un cas qui devient particulier avec le choix du pivot que nous avons fait. Nous avons donc une discussion inutile. En fait pour $\lambda = 1$, après un calcul différent, nous obtiendrons un résultat qui coïncidera avec la valeur pour $\lambda = 1$ des formules générales (pour $\lambda \neq 1$). Notre discussion sera donc inutilement compliquée. La méthode des déterminants a le mérite de ne faire apparaître comme valeur particulière de λ, que $\lambda = 3/5$, qui est une vraie valeur particulière pour le système. Evidemment pour un système 2×2, on parviendra tout de même à mener la discussion à bien. Mais dans le cas d'un système $n \times n$, on aura à chaque choix de pivot un nouveau "faux cas particulier", et la discussion deviendra bien difficile!

Ainsi la méthode des déterminants est la plus appropriée chaque fois que le système contient des paramètres.

Mais on peut aussi s'intéresser à la taille du système. Et alors on s'aperçoit que la méthode des déterminants devient alors très vite impraticable à cause de la longueur des calculs. Par exemple lorsqu'un système 20×10 est de rang 10, nous calculerons $C_{20}^{10} = 184756$ déterminants 10×10 pour montrer que le rang n'est pas 10; puis $C_{20}^{9} \times C_{10}^{9} = 1679600$ déterminants 9×9, pour constater qu'il n'est pas de rang 9; puis $C_{20}^{8} \times C_{10}^{8} = 125970 \times 45$ déterminants 8×8; c'est bien long.

On pourrait penser à travailler en sens contraire, c'est-à-dire calculer d'abord les déterminants 2×2, puis les déterminants 3×3, ... Mais il n'est pas certain que ce soit plus rapide. En fait la méthode des déterminants devient impraticable dès que les systèmes sont "grands"; et ceci même si l'on dispose d'un bon ordinateur. On démontre que la longueur des calculs croît comme $n!$; alors que pour la méthode du pivot la croissance est en n^3.

La méthode du pivot est donc la seule qui permet – pratiquement – de résoudre les systèmes de grande dimension. C'est celle que l'on utilise pour les calculs sur ordinateurs

Pourtant lorsque les systèmes deviennent très grands la méthode du pivot a aussi ses limites. Mais il est hors de question de les indiquer ici.

Seconde partie : Valeurs propres et vecteurs propres.

§ 9 : Valeurs propres et vecteurs propres

Considérons un espace vectoriel E et une application linéaire $f : E \longrightarrow E$.

On appelle valeur propre de f, tout scalaire λ tel que le noyau de $f - \lambda Id_E$ ne soit pas réduit à 0.

On appelle vecteur propre de f, tout vecteur V <u>non nul</u> tel que $f(V)$ soit colinéaire à V, c'est à dire tel que $f(V) = \mu V$.

Notons que si $f(V) = \mu V$ et $V \neq 0$, le noyau de $f - \mu Id_E$ n'est pas réduit à 0, et ainsi μ est une valeur propre de f (elle est dite associée au vecteur propre V). Inversement si λ est une valeur propre, tout élément X non nul de $Ker(f - \lambda Id_E)$, est un vecteur propre (puisque $f(X) = \lambda X$) ; un tel vecteur propre est dit associé à la valeur propre λ.

On remarquera qu'une application

linéaire $f : E \to E$ peut ne pas avoir de valeur propre ni de vecteur propre. Par exemple si E est l'espace de dimension 2 des vecteurs de la géométrie plane, notons $f : E \to E$ la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$. C'est une application linéaire sans vecteur propre.

Recherche des valeurs propres.

Supposons que E soit de dimension n, et soit $\{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E, alors f est définie par sa matrice M dans cette base.

La matrice de $f - \lambda \, Id_E$ dans cette base est $M - \lambda I_n$ (I_n matrice identité $n \times n$). Dire que $Ker(f - \lambda \, Id_E)$ n'est pas réduit à 0, c'est dire que le déterminant de $M - \lambda I_n$ est nul (cf : I § h). Pour déterminer les valeurs propres de f, nous cherchons les scalaires λ, tels que $dét(M - \lambda I_n) = 0$.

Exemple : Supposons $\dim E = 3$, et supposons que M s'écrive :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

alors

$$M - \lambda I_3 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 3 \\ 1 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

La méthode de Sarrus nous donne alors

$$\det(M-\lambda I_3) = 8-6\lambda+5\lambda^2-\lambda^3$$
$$=(4-\lambda)(2-\lambda+\lambda^2)$$

Donc $\det(M-\lambda I_3)$ est nul pour $\lambda=4$ (et seulement pour $\lambda=4$ puisque l'équation $x^2-2x+2=0$ n'a pas de racine réelle).

Nous avons donc une seule valeur propre. Les vecteurs propres associés sont les éléments non nuls de $\mathrm{Ker}(f-4\,\mathrm{Id}_E)$.

$$M-4I_3=\begin{pmatrix}-3 & 2 & 1\\ 0 & -3 & 3\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

Donc – en utilisant les méthodes de IV § d – on obtient que $\mathrm{Ker}(f-4\,\mathrm{Id}_E)$ est de dimension 1, et engendré par le vecteur V de coordonnées $(1, 1, 1)$. Les vecteurs propres de f sont les vecteurs de la forme αV $(\alpha \neq 0)$.

<u>Exercices</u> : 1) Soit $n=3$ et $E=\mathbb{R}^3$; soit f dont la matrice naturelle est

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de f.

2) Soit $n=3$ et $E=\mathbb{R}^3$; soit $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ dont la matrice naturelle est

$$B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de g.

3) Soit E l'espace des polynomes de degré au plus 3 (E est de dimension 4), et soit $f : E \to E$ défini par

$$f : P(X) \longrightarrow XP'(X) - P(X)$$

Montrer que les vecteurs propres de f sont les polynomes constants (non nuls) et les polynomes de la forme αX^k ($\alpha \neq 0$ et $k \leq 3$)

§k : Polynomes caractéristiques

Soit M une matrice carrée $n \times n$, le déterminant de $M - \lambda I_n$ est un polynome de degré n en λ. On l'appelle le polynome caractéristique de M.

On aura pu le constater sur les exemples ci-dessus. Démontrons que c'est général. Les coefficients de $M - \lambda I_n$ sont des polynomes de degré 0 ou 1 en λ. Or (cf V. §l) le déterminant est une somme de termes qui sont, au signe près, des produits de n de ces coefficients. Ainsi $\det(M - \lambda I_n)$ est un polynome, de degré au plus n, en λ. Mais les seuls coefficients qui contiennent λ, sont ceux de la diagonale ; il existe donc un seul terme qui est de degré n en λ ; c'est le produit des coefficients diagonaux, il s'écrit :

$$(m_{11}-\lambda)(m_{22}-\lambda)\ \dots\ (m_{nn}-\lambda)$$
ainsi le déterminant lui même est de degré (exactement) n, avec comme terme de plus haut degré $(-\lambda)^n$.

Considérons maintenant une application linéaire $f: E \to E$, et deux bases (e) et (ε) de E. Dans ces bases f a pour matrices M et M', et (cf IV k) il existe une matrice inversible A telle que $M' = AMA^{-1}$. Nous aurons alors

$$\begin{aligned}
& & \det(M'-\lambda I_n) &= \det(AMA^{-1}-\lambda A I_n A^{-1}) \\
& & &= \det(A(M-\lambda I_n)A^{-1}) \\
&(\text{cf } V\ \S g) & &= \det A \det(M-\lambda I_n)\det A^{-1} \\
&(\text{cf } V\ \S g) & &= \det(M-\lambda I_n)
\end{aligned}$$

Autrement dit le polynome caractéristique ne dépend que de f (et il ne dépend pas de la base dans laquelle on fait les calculs).

Nous pouvons donc parler du polynome caractéristique d'une application linéaire $f: E \longrightarrow E$. Ses racines sont les valeurs propres de f.

<u>Remarque</u> : Les coefficients de $\det(M-\lambda I_n)$ s'expriment polynomialement en fonction des coefficients de M. Il n'est pas question de détailler ici ces expressions assez compliquées. Toutefois on peut signaler :

a) que le terme constant est le déterminant de M (c'est $\det(M - 0 I_n)$).
b) que les termes de degré n et $n-1$ sont ceux du produit des coefficients diagonaux $(m_{11}-\lambda)\times\cdots\times(m_{nn}-\lambda)$; ils s'écrivent donc :

$$(-\lambda)^n + \left(\sum_{i=1}^{n} m_{ii}\right)(-\lambda)^{n-1}$$

La quantité $m_{11}+\cdots+m_{nn}$ est appelée la trace de M (ou de $f: E \to E$ puisque, comme tous les coefficients du polynôme caractéristique, elle ne dépend pas de la base dans laquelle on exprime f).

§i: Diagonalisation des applications linéaires $f: E \to E$.

On dit qu'une application linéaire $f: E \to E$ est diagonalisable, si il existe une base de E dont les vecteurs sont tous des vecteurs propres de f.

Soit $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ une telle base, et M la matrice de f dans cette base. Pour tout i, on a $f(\varepsilon_i) = \lambda_i \varepsilon_i$; donc, dans la colonne i de M, seul le coefficient diagonal est (peut être) non nul : c'est λ_i. Autrement dit M est une matrice diagonale (i.e : dont tous les coefficients sont nuls, à l'exception de ceux dont les numéros de ligne et de colonne coïncident).

<u>Exemple</u> : Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dont la matrice naturelle est

$$M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit $\varepsilon_1 = (1, 1, 1)$; on a $f(\varepsilon_1) = 3\varepsilon_1$
Soit $\varepsilon_2 = (2, -1, -1)$; on a $f(\varepsilon_2) = 0 \ (= 0\varepsilon_2)$
Soit $\varepsilon_3 = (1, -1, 0)$; on a $f(\varepsilon_3) = -\varepsilon_3$

On vérifie aisément que $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Dans cette base la matrice de f est

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Et bien sûr $M = A M_0 A^{-1}$ où A est la matrice de

$$\underset{\text{Base Nat}}{\mathbb{R}^3} \xrightarrow{Id} \underset{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)}{\mathbb{R}^3}$$

<u>Exercices</u> : 1) On considère les applications linéaires f, g et h de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$, dont les matrices naturelles sont

$$M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad N_0 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad P_0 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Déterminer tous les vecteurs propres de chacune de ces applications. Dire si elles sont diagonalisables.

2) Mêmes questions pour l'application linéaire $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, dont la matrice

naturelle est

$$M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Une condition nécessaire pour que $f : E \to E$ soit diagonalisable, est que son polynome caractéristique soit un produit de facteurs du 1er degré.

En effet, si f est diagonalisable, son polynome caractéristique est celui d'une matrice diagonale Δ. Or on constate facilement que

$$\det \begin{pmatrix} \delta_1 - \lambda & 0 & & 0 \\ 0 & \delta_2 - \lambda & & \vdots \\ \vdots & 0 & & 0 \\ 0 & \vdots & & \delta_n - \lambda \end{pmatrix} = (\delta_1 - \lambda)(\delta_2 - \lambda) \cdots (\delta_n - \lambda)$$

Une condition suffisante pour que f soit diagonalisable, est que son polynome caractéristique soit un produit de facteurs du 1er degré, 2 à 2 distincts. (c'est à dire qu'il ait toutes ses racines réelles et distinctes).

En effet si le polynome caractéristique a toutes ses racines réelles distinctes, notons les $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. A chacune nous pouvons associer un vecteur propre, soient $V_1, \dots, V_n$ ces vecteurs propres. Je dis qu'ils forment une base de E.

Pour s'en convaincre, il suffit bien sûr de démontrer qu'ils sont indépendants. Soit donc $\alpha_1 V_1 + \cdots + \alpha_n V_n = 0$ une combinaison linéaire entre les V_i, il s'agit de prouver que $\alpha_i = 0$, pour tout i. Considérons :

$$g = (f - \lambda_1 Id_E) \cdots (f - \lambda_{i-1} Id_E)(f - \lambda_{i+1} Id_E) \cdots (f - \lambda_n Id_E)$$

c'est à dire la composée de tous les $f - \lambda_j Id_E$ pour $j \neq i$. Nous avons :

$$g(V_i) = (\lambda_i - \lambda_1) \cdots (\lambda_i - \lambda_{i-1})(\lambda_i - \lambda_{i+1}) \cdots (\lambda_i - \lambda_n) V_i$$

et, puisque les λ_j sont deux à deux distincts, $g(V_i) \neq 0$. Par contre, pour $j \neq i$, $g(V_j) = 0$, puisque

$$g(V_j) = (\lambda_i - \lambda_1) \cdots (\lambda_j - \lambda_j) \cdots (\lambda_j - \lambda_n) V_j$$

En appliquant g à notre relation linéaire nous obtenons donc $g(0) = \alpha_i g(V_i)$, d'où $\alpha_i = 0$ puisque $g(V_i) \neq 0$.

<u>Remarque</u> : La condition nécessaire et la condition suffisante que nous venons d'énoncer laissent une large catégorie d'applications linéaires pour lesquelles nous ne pouvons pas conclure au vu du polynome caractéristique : celles dont le polynome a toutes ses racines réelles , mais a une ou plusieurs racines multiples. Dans ce cas il se peut que l'application soit diagonalisable, il se peut qu'elle ne le soit pas. C'est ce

qu'on pourra constater en résolvant l'exercice suivant.

<u>Exercice</u> : On considère les applications linéaires de $\mathbb{R}^3$ dans lui même, dont les matrices naturelles sont

$$M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad N_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad P_0 = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 7 \\ -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer leurs polynomes caractéristiques (ils ont tous une racine multiple), et étudier la possibilité de les diagonaliser.

§ j : Utilisations de la diagonalisation

Voici une liste - non exhaustive - de problèmes dont la solution est facilitée par l'écriture d'une matrice M sous la forme $A^{-1}\Delta A$ (Δ diagonale)

<u>Calcul de M^n</u> : Soit M une matrice, nous cherchons à calculer M^n (n entier positif si M n'est pas inversible, n entier quelconque si M est inversible).

Si M est diagonale ($m_{ij} = 0$ si $i \neq j$, et $m_{ii} = \mu_i$), alors M^2 est diagonale et le i-ème élément diagonal de M^2 est μ_i^2. De même M^n est diagonale, et son i-ème élément diagonal est μ_i^n.

Si M est diagonalisable, c'est à dire si $M = A^{-1}\Delta A$ (Δ diagonale), alors

$$M^n = (A^{-1}\Delta A)(A^{-1}\Delta A)\cdots(A^{-1}\Delta A)$$
$$= A^{-1}\Delta (AA^{-1})\Delta(AA^{-1})\cdots(AA^{-1})\Delta A$$
$$= A^{-1}\Delta^n A.$$

Et si M (et Δ) est inversible, on a
$M^{-n} = (M^n)^{-1} = (A^{-1}\Delta^n A)^{-1} = A^{-1}(\Delta^n)^{-1}A$.

<u>Exemple</u> : $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

alors $M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

<u>Exercices</u> : Calculer

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^n \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}^n \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ -2 & 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}^n$$

<u>Etude de certaines suites récurrentes.</u>

Considérons la suite définie par $u_0 = a$, $u_1 = b$ et, pour tout $n \geq 2$: $u_n = u_{n-1} + 2u_{n-2}$. Essayons de calculer u_n.

Pour tout $n \geq 0$, considérons la matrice colonne : $V_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$

La relation de récurrence s'écrit alors

$$V_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} V_{n-1} = M \cdot V_{n-1}$$

Pour calculer V_n, à partir de $V_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, il nous suffit de calculer M^n.

Or $M=\begin{pmatrix}0&1\\2&1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-1\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\-2&1\end{pmatrix}$

Donc $M^n=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-1\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^n&0\\0&-1^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\-2&1\end{pmatrix}$

Et, en calculant $M^n\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$, on obtient
$u_n=\ 2^n\frac{a+b}{3}+(-1)^n\frac{2a-b}{3}$

Très souvent on propose un calcul assez différent ; du type suivant :
Les suites qui vérifient la relation $x_n=x_{n-1}+2x_{n-2}$, forment un vectoriel S. Celui ci est de dimension 2, avec comme base $\alpha=(\alpha_n)$ définie par $\alpha_0=1$, $\alpha_1=0$, et $\beta=(\beta_n)$ définie par $\beta_0=0$ et $\beta_1=1$.

Cherchons dans S des suites géométriques. Si (t^n) est dans S, c'est que, pour tout n, $t^n=t^{n-1}+2t^{n-2}$. C'est à dire $t^2=t+2$, donc $t=2$ ou $t=-1$. Les deux suites géométriques 2^n et $(-1)^n$ forment une base de S.

Pour calculer u_n il nous suffit de calculer les nombres x et y tels que (pour tout n) : $u_n=x\,2^n+y(-1)^n$. Ceux ci sont définis par :

$$u_0=a=x+y$$
$$u_1=b=2x-y.$$

D'où $x=\frac{a+b}{3}$ et $y=\frac{2a-b}{3}$, et on retrouve
$u_n=2^n\frac{a+b}{3}(-1)^n\frac{2a-b}{3}$.

<u>Exercice</u> : Calculer les termes successifs de la suite u_n si

1) $u_0 = 1,\ u_2 = 2$ et $u_{n+1} = u_n - u_{n-1}$

2) $u_0 = 1,\ u_2 = 2,\ u_3 = 3$ et
$u_{n+1} = -u_n + 2u_{n-1} + 2u_{n-2}$

Étude de certaines équations différentielles

Soit à déterminer 2 fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, y et z, telles que

$$\begin{cases} y' = y + z \\ z' = 3y - z. \end{cases}$$

Ceci s'écrit encore $\begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$

Or $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

D'où $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$

En posant $\begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$, nous avons

$$\begin{pmatrix} Y' \\ Z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix}$$

C'est à dire $Y' = 2Y$ et $Z' = -2Z$. Nous aurons donc $Y = \lambda e^{2t}$ et $Z = \mu e^{-2t}$. D'où

$$\begin{cases} \lambda e^{2t} = 3y + z \\ \mu e^{-2t} = y - z. \end{cases}$$

D'où $y = \frac{1}{4}(\lambda e^{2t} + \mu e^{-2t})$ et $z = \frac{1}{4}(\lambda e^{2t} - 3\mu e^{-2t})$

Exercices: Résoudre de même

$$\begin{cases} y' = x + 2u \\ z' = x + y + u \\ u' = 2x + u \end{cases}$$

$$\begin{cases} y' = y + 2z \\ z' = 2y + z + u \\ u' = y + z + 3u \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = x + 3y \\ y' = 3x + y + 4z \\ z' = 4y + z \end{cases}$$

Quelques exercices sur la leçon VI

A] Les vecteurs de $\mathbb{R}^4$ suivants sont-ils indépendants ?

$$V_1 = (\lambda,\ 2-\lambda,\ 3\lambda,\ 2\lambda)$$
$$V_2 = (3-\lambda,\ 2,\ 1,\ 1)$$
$$V_3 = (1,\ -\lambda,\ 2\lambda-1,\ 3+2\lambda)$$

B] Résoudre, en discutant suivant les valeurs de λ :

$$\begin{aligned} x + \lambda y - z &= 1 \\ (2\lambda-1)x + y - \lambda z &= 0 \\ (2\lambda+3)x + \lambda y + (1-\lambda)z &= 0 \end{aligned}$$

C] Résoudre, en discutant suivant les valeurs de λ :

$$\begin{aligned} x - \lambda y - z &= 3 \\ 2x - \lambda y + (1-\lambda)z &= 1 \\ \lambda x - y + 2\lambda z &= 0 \\ 2\lambda x - y + \lambda z &= 0 \end{aligned}$$

D] On donne dans $\mathbb{R}^3$, les vecteurs
$V_1 = (\alpha-2,\ 2,\ -1)$ $V_2 = (2,\ \alpha,\ 2)$, $V_3 = (2\alpha,\ 2(\alpha+1),\ (\alpha+1))$

Déterminer (en discutant suivant les valeurs de α) toutes les relations de dépendance entre V_1, V_2 et V_3.

E] Dans un plan rapporté à un système d'axes (Ox, Oy), on considère le triangle A, B, C dont les sommets ont pour coordonnées $A(\alpha, \alpha')$, $B(\beta, \beta')$ et $C(\gamma, \gamma')$. On suppose, bien entendu, que A, B et C ne sont pas alignés.

On définit les points M_t, N_u et P_v sur les droites AB, BC et CA, par ($t \neq 0$, $u \neq 0$, $v \neq 0$) :

$$\frac{\overline{AM_t}}{\overline{BM_t}} = t \ , \ \frac{\overline{BN_u}}{\overline{CN_u}} = u \text{ et } \frac{\overline{CP_v}}{\overline{AP_v}} = v.$$

a) Calculer les coordonnées de M_t, N_u, P_v. Démontrer que M_t, N_u et P_v sont alignés si et seulement si $tuv = 1$

b) Démontrer que les droites CM_t, AN_u et BP_v sont concourantes (ou parallèles) si et seulement si l'on a $tuv + 1 = 0$

(On comparera avec les théorèmes de Céva et Ménélaüs étudiés dans AG1)

F] Soit $f : E \to E$ telle que $f^2 = -Id_E$. Quelles sont les valeurs propres de f ?

G] Soit $f : E \to E^3$ telle que $f^3 = f$. Démontrer que $\ker f$, $\ker(f - Id_E)$ et $\ker(f + Id_E)$ sont supplémentaires.

En déduire que f est diagonalisable.

H] Soit M une matrice carrée, démontrer que $\det(M - \lambda I) \det(M + \lambda I) = \det(M^2 - \lambda^2 I)$

En déduire que si $f : E \to E$ n'a pas de vecteur propre, alors f^2 n'a pas de valeur propre positive.

I] Soit U et N deux matrices. On suppose qu'il existe un entier k tel que $N^k = 0$, et que $UN = NU$

a) Démontrer que $V+N$ est inversible si et seulement si V est inversible (lorsque V est inversible, on écrira $V+N = V(Id + NV^{-1})$ et on calculera le produit de $Id + NV^{-1}$ et de $Id - NV^{-1} + N^2V^{-2} - \cdots + (-1)^{k-1} N^{k-1} V^{1-k}$).

b) Démontrer que $\det V = \det(V+N)$ (on pourra montrer que $\det(V+tN)$ est un polynome de t, et que celui-ci est constant).

J] Soit $f : E \to E$ telle que $f^k = 0$ (pour un certain $k \geq 1$). Démontrer que f ne peut être diagonalisable que si elle est nulle)

Appendice :

Dans tout ce qui précède les scalaires sont des nombres réels. Nous aurions pu faire la même étude en choisissant pour scalaires des nombres complexes, ou des nombres rationnels. Par contre nous n'aurions pas pu utiliser des nombres entiers, car à de multiples reprises, nous avons utilisé le quotient de deux scalaires. Ainsi tout ceci est valable en choisissant les scalaires dans un corps quelconque. Par exemple nous aurions pu nous servir de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (p entier et premier); mais pas de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ si n n'est pas premier.

C'est pour des raisons de commodité de lecture que nous avons préféré travailler avec un corps particulier. Mais dans les autres unités nous nous réservons le droit d'utiliser l'algèbre linéaire sur un autre corps (en particulier sur $\mathbb{C}$).