MATHEMATIQUES

POUR L'ELEVE DE SECONDE

FASCICULE 1

IREM DE LORRAINE

Edité et imprimé par l'**Institut de Recherche sur l'enseignement des Mathématiques** - (Université de Nancy I - Faculté des Sciences) - B.P. 239 - 54506 VANDOEUVRE-les-NANCY CEDEX
Dépôt légal : 3e trimestre 1988
n° de la publication : 2-85406-111-X

Le Responsable de la publication : Claude MORLET

réf. II.12_3

FASCICULE 1

******

DANS LE FASCICULE 2 : ***(parution octobre - novembre 1988)***

Chapitre III : Vecteurs et angles
Chapitre IV : Analyse

DANS LE FASCICULE 3 : ***(parution janvier 1989)***

Chapitre V : Espace
Chapitre VI : Compléments de géométrie et statistiques

CHAPITRE I

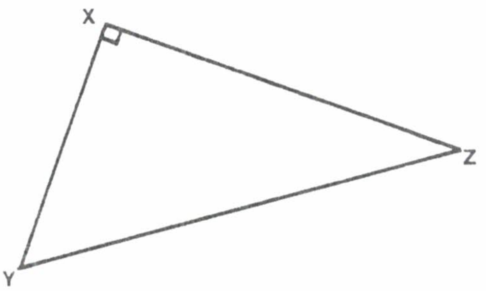
REVISIONS DE GEOMETRIE

Toutes les connaissances utiles à la résolution des exercices de géomètrie proposés dans ce premier chapitre font partie des programmes de collège. Elles sont résumées dans le répertoire.

Première série d'exercices

La première série d'exercices (I_1 à I_{18}) fait essentiellement appel au théorème de Pythagore, c'est à dire aux deux énoncés suivants :

***Théorème* (de Pythagore) :**

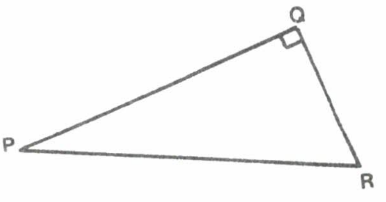


Si le triangle XYZ est rectangle en X (C'est à dire si l'angle $\widehat{YXZ}$ est droit), alors

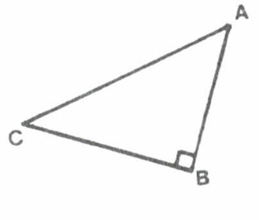
$$XY^2 + XZ^2 = YZ^2$$

Ainsi lorsque nous connaissons les longueurs de deux côtés d'un triangle rectangle nous pouvons calculer la longueur du troisième .

Exemples :



$\widehat{PQR}$ = 90° ; PQ = 4 cm et RQ = 2 cm
donc RP = $\sqrt{4^2+2^2}$ cm = 4,4721... cm



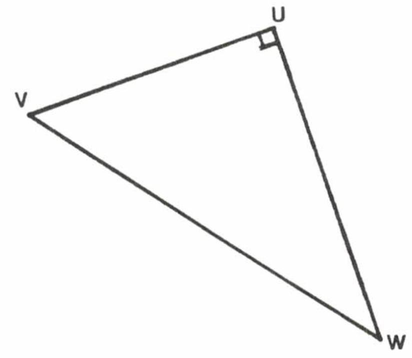
$\widehat{ABC}$ = 90° , AB = 2 cm et AC = 3 cm
donc BC = $\sqrt{3^2-2^2}$ cm = 2,236... cm

***Théorème réciproque* (du théorème de Pythagore) :**

Si dans le triangle UVW les longueurs des côtés vérifient la relation

$$UV^2 + UW^2 = VW^2$$

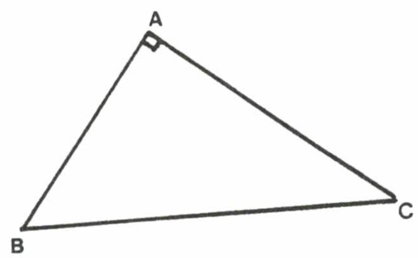
alors l'angle $\widehat{VUW}$ est droit (ce qu'on exprime en disant que le triangle est rectangle en U).



Si nous connaissons les longueurs des trois côtés d'un triangle , nous pouvons donc (par un calcul) dire s'il est rectangle :

Si $AB^2 + BC^2 = AC^2$, alors l'angle $\widehat{ABC}$ est droit (d'après le second énoncé).

Si $AB^2 + BC^2 \neq AC^2$, alors l'angle $\widehat{ABC}$ n'est pas droit (D'après le premier énoncé) .

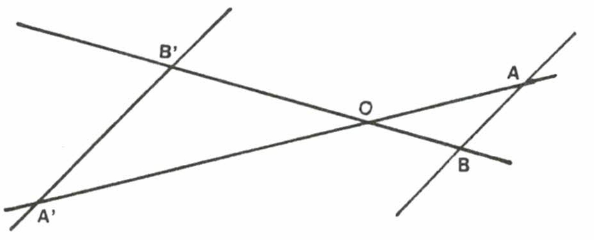


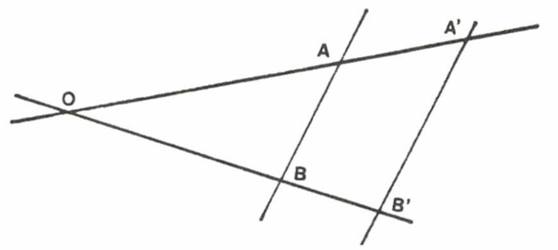
Deuxième série d'exercices

La deuxième série d'exercices (I_{19} à I_{41}) fait essentiellement appel au théorème de Thalès , c'est-à-dire aux trois énoncés suivants :

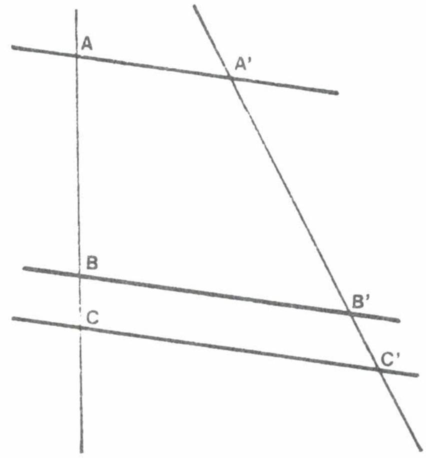
***Théorème* (de Thalès) - première forme**

Si A, A' et O sont alignés
Si B, B' et O' sont alignés
et si les droites AB et BB sont parallèles ,
alors : $\dfrac{OA}{OA'} = \dfrac{OB}{OB'} = \dfrac{AB}{A'B'}$





__Théorème__ (de Thalès) - seconde forme



Si A, B et C sont alignés

Si A',B' et C' sont alignés

et si les droites AA', BB' et CC' sont parallèles ,

alors : $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$

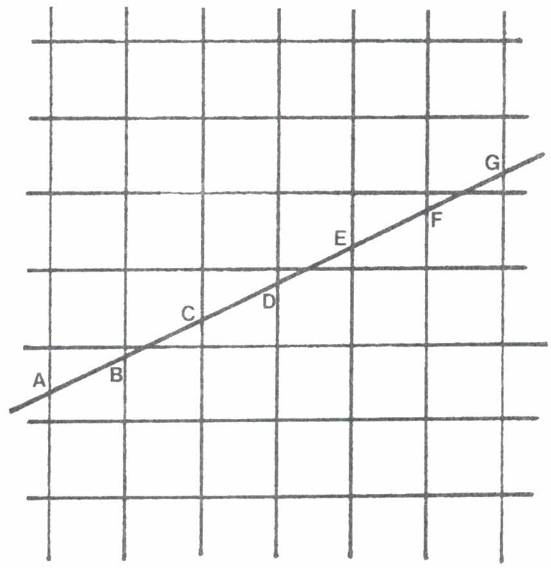
ou encore : $\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$; $\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$ ...

Exemple :

Une droite coupe les "verticales" du quadrillage en A, B, C, D, E, F . Alors

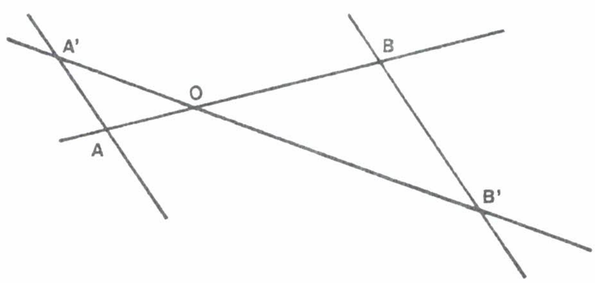
AB = BC = CD = DE = EF

Et aussi AC = 2 AB , BE = 3 BA ...



Application : Sur le bord d'un feuille de papier , marque un segment XY ; puis , au moyen d'une feuille de papier quadrillé , partage ce segment en 7 parties égales.

__Théorème__ (de Thalès) réciproque

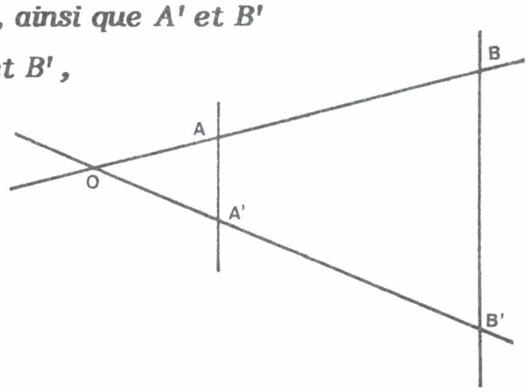


Si O, A et B sont alignés

Si O, A' et B' sont alignés

Si $\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'}$,

et si : $\left\{\begin{array}{l}\text{ou bien A et B sont du même coté de O, ainsi que A' et B'}\\ \text{ou bien O est entre A et B et entre A' et B' ,}\end{array}\right.$

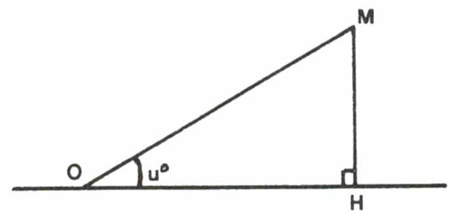


alors les droites AA' et BB' sont parallèles.

Troisième série d'exercices

La troisième série d'exercices (I_{42} à I_{67}) fait appel à la trigonométrie . Rappelons la définition du cosinus et du sinus d'un angle .

Cosinus d'un angle :

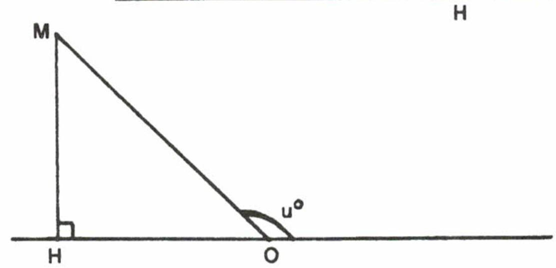


Si l'angle est inférieur à un angle droit

$$\cos u^\circ = \frac{OH}{OM}$$

Si l'angle est supérieur à un angle droit

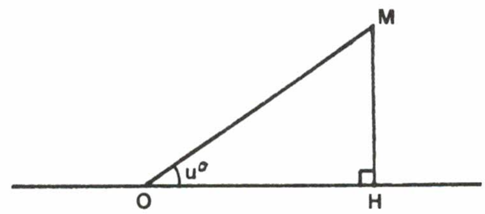
$$\cos u^\circ = -\frac{OH}{OM}$$



Sinus d'un angle :

$$\sin u^\circ = \frac{MH}{OM}$$

(dans tous les cas de figure)

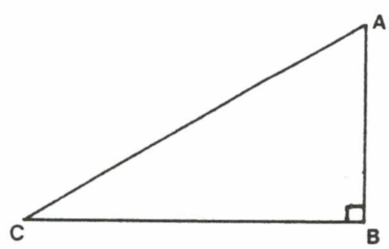


Remarque : On pose $\tan u^\circ = \dfrac{\sin u^\circ}{\cos u^\circ}$

On a vu que , grâce au théorème de Pythagore , lorsque l'on connait les longueurs de deux côtés d'un triangle rectangle , on peut calculer la longueur du troisième . On peut donc aussi connaitre le sinus et le cosinus de ses angles ; puisque :

$$\frac{CB}{AC} = \cos \widehat{BCA} = \sin \widehat{BAC}$$

$$\frac{AB}{AC} = \cos \widehat{BAC} = \sin \widehat{BCA}$$

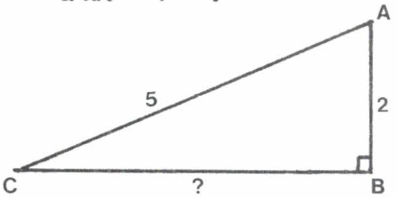


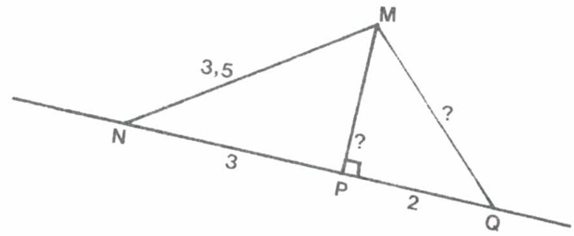
Ceci permet de déterminer ces angles . En effet , si tu sais que cos u = x , tu obtiens u en tapant sur ta calculette : $\boxed{x}$ $\boxed{\text{Inv}}$ $\boxed{\text{Cos}}$ (sur certaines calculettes : $\boxed{x}$ $\boxed{\text{Sec}}$ $\boxed{\text{Cos}}$). La calculette utilise les unités d'angle classiques : degré , radian ou grade . Le résultat est donné dans l'unité que tu as choisie (grâce à une touche généralement marquée $\boxed{\text{DRG}}$).

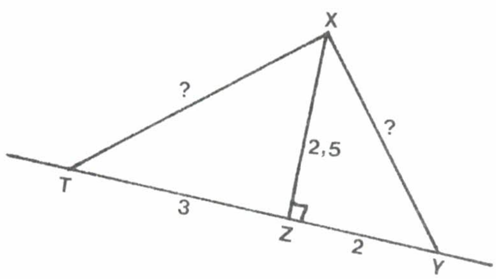
Inversement , si tu connais un angle (non droit) et un côté du triangle ABC rectangle en B , tu peux déterminer les deux autres côtés .

Première série : LE THEOREME DE PYTHAGORE

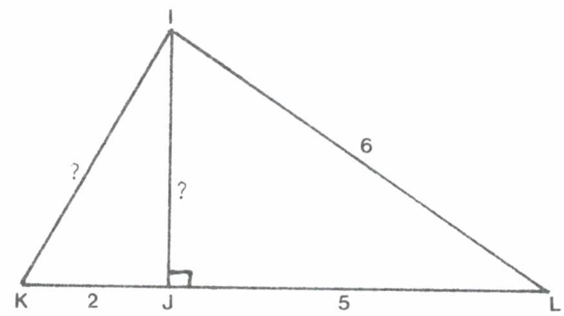
☆ **Exercice I_1 :** *Dans les figures ci-dessous, calcule la longueur des segments marqués d'un " ? " .*







le triangle XTY est-il rectangle ?



☆ **Exercice I_2 :**

a) *Trace un rectangle $MNPQ$ tel que $MN = 8$ cm et $NP = 4$ cm. Place sur le segment MN le point B tel que $MB = 2$ cm. Place sur le segment NP le point A tel que $AP = 1$ cm.*

b) *Calcule QB, QA et AB.*

c) *Démontre que le triangle ABQ est rectangle.*

☆ **Exercice I_3 :**

a) *Trace un carré $ABCD$ de côté 8 cm. Place sur les segments AB, BC, CD, DA les points A', B', C' et D' tels que $AA' = BB' = CC' = DD' = 3$ cm.*

b) *Calcule $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$ et $D'A'$.*

c) *Calcule $A'C'$ et $B'D'$; puis démontre que le quadrilatère $A'B'C'D'$ est un carré.*

☆☆ **Exercice I_4 :**

a) Trace un carré $ABCD$ de côté 5 cm . Place sur le segment AB le point E tel que $EB = 1$ cm . Place sur le segment AD le point M tel que $EM = 5$ cm . Mesure puis calcule AM .

b) Place sur le segment BC le point N tel que $EN = 5$ cm . Mesure puis calcule BN .

c) Mesure MN . Puis calcule sa valeur exacte ; et au moyen de ta calculette, donnes-en une mesure approchée à 10^{-4} près.

☆ **Exercice I_5 :** Les côtés d'un losange mesurent 6 cm . L'une de ses diagonales mesure 4 cm . Quelle est la longueur de l'autre diagonale ?

☆☆ **Exercice I_6 :** Un triangle équilatéral ABC a ses côtés de longueur a . (Faire la figure avec $a = 7$ cm) . La perpendiculaire à BC passant par A , coupe BC en H .

a) Pourquoi H est-il le milieu de BC ?

b) Calcule la hauteur AH et l'aire du triangle ABC .

c) Calcule les autres hauteurs du triangle ABC .

☆☆ **Exercice I_7 :** Un triangle ABC est tel que $BC = a$ et $AB = AC = 2a$. (Faire la figure avec $a = 4$ cm) .

a) Calcule la hauteur AH du triangle ABC .

b) Calcule la hauteur BK du triangle ABC .

c) Calcule la longueur CK .

☆ **Exercice I_8 :** Dans un repère orthonormé (unité 1 cm), place les points A (-3;7) , B (-2;4) et C (8;7) .

a) Calcule AB , BC et CA .

b) Le triangle ABC est-il rectangle ?

☆☆ **Exercice I$_9$** : *Dans un repère orthonormé (unité 1 cm), place les points P (2;-3), Q (-7;5). Place ensuite les points suivants (s'ils sont sur la feuille) :*

A (6;7,5), B (-10;-10), C (34;33), D (-78;-92), E (-78;-93).

Parmi les points A, B, C, D, E quels sont ceux qui se trouvent sur la perpendiculaire à la droite PQ, qui passe par P ?

☆ **Exercice I$_{10}$** : *Dans un repère orthonormé (unité 1 cm), place les points A (1;4), B (-7;-2) et D (4;0).*

a) *Mesure puis calcule AB, BD et DA. Vérifie, par une mesure puis par un calcul, que l'angle BAD est droit.*

b) *Place le point C tel que $ABCD$ soit un rectangle. Détermine les coordonnées de C.*

☆☆ **Exercice I$_{11}$** : *Sur un papier quadrillé à petits carreaux (de 1/2 cm de côté) trace un repère orthonormé (unité 1 cm) dont les axes sont des lignes du quadrillage. Trace le cercle de centre A (1;3) et de rayon 6,5 cm.*

Quels sont les points de ce cercle qui ont des coordonnées entières ? Quels sont les points de ce cercle qui sont des nœuds du quadrillage ?

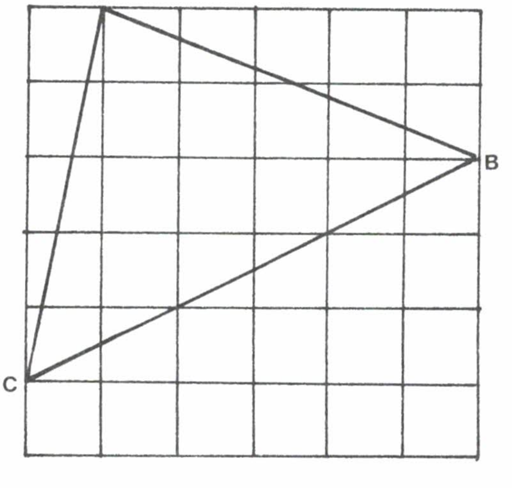
☆ **Exercice I$_{12}$** : *Dans un repère orthonormé (unité 1 cm) place les points A (8;5), B (-2;-1) et C (5;10).*

a) *Calcule AB, BC et CA.*

b) *Vérifie que le triangle ABC est rectangle et calcule son aire.*

c) *Quelle est la distance de A à la droite BC ?*

☆☆ **Exercice I$_{13}$** : *Le quadrillage a pour côté 1 cm. Calcule l'aire du triangle ABC, les longueurs AB, BC, CA et les hauteurs du triangle ABC.*



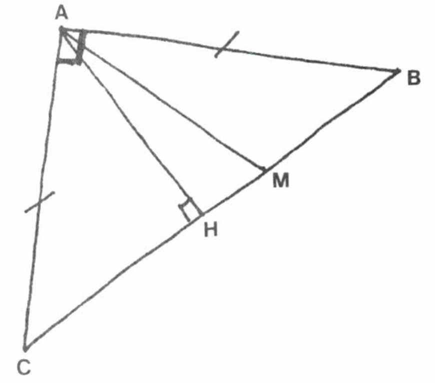
☆ ***Exercice I_{14} :***

a) *Trace un triangle équilatéral ABC dont les côtés mesurent 10 cm .*

b) *Peux-tu expliquer pourquoi ses trois hauteurs sont égales ?*

c) *Calcule la longueur de ses hauteurs, et son aire.*

☆☆ ***Exercice I_{15} :*** *J'ai fait ci-contre un croquis à main levée.*



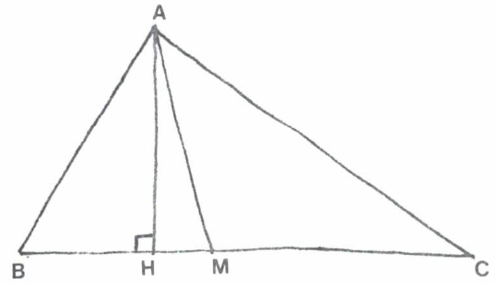
a) *Fais une figure précise, sachant que $AB = 8$ cm et $BM = 3$ cm .*

b) *Calcule BC .*

c) *Pourquoi H est-il le milieu de BC ? Calcule AH .*

d) *Mesure puis calcule AM .*

☆☆☆ ***Exercice I_{16} :***



Voici un croquis fait à main levée. (M est le milieu de BC) .

a) *Fais une figure précise, sachant que $AH = 6$ cm , $AM = 7$ cm et $AC = 11$ cm*

b) *Calcule BC et AB .*

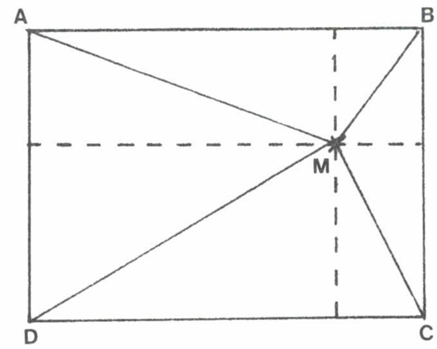
☆☆☆ ***Exercice I_{17} :*** *On donne deux nombres quelconques, démontre l'égalité :*

$$(a+b)^2 = (a-b)^2 + 4\,ab$$

Si a et b sont les carrés de deux entiers, $4ab$, $(a-b)^2$ et $(a+b)^2$ sont aussi des carrés d'entiers.

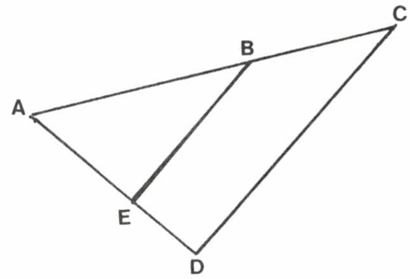
En utilisant cette remarque, construis sept triangles rectangles dont les trois côtés ont pour longueurs un nombre entier de centimètres.

☆☆☆**Exercice I_{18}** : *Le quadrilatère ABCD est un rectangle. Le point M est à l'intérieur de ce rectangle. Démontre que* $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$.

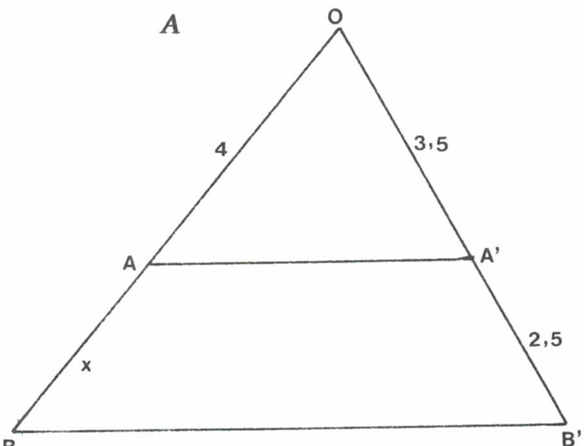


Deuxième série : LE THEOREME DE THALES

☆ ***Exercice I_{19}*** : *Dans cette figure les droites BE et CD sont parallèles. Sachant que $AB = 3$ cm , $CB = 2$ cm et $CD = 4$ cm , calcule la longueur BE.*

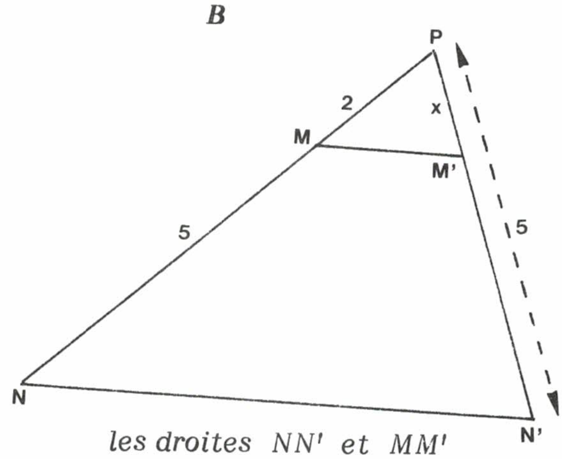


☆ ***Exercice I_{20}*** : *Dans les figures ci-dessous, calcule la longueur x :*



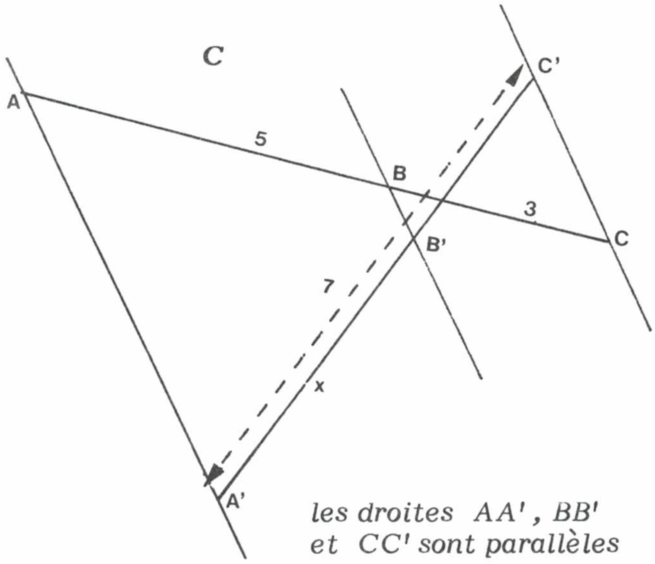
les droites BB' et AA' sont parallèles

$x = AB$



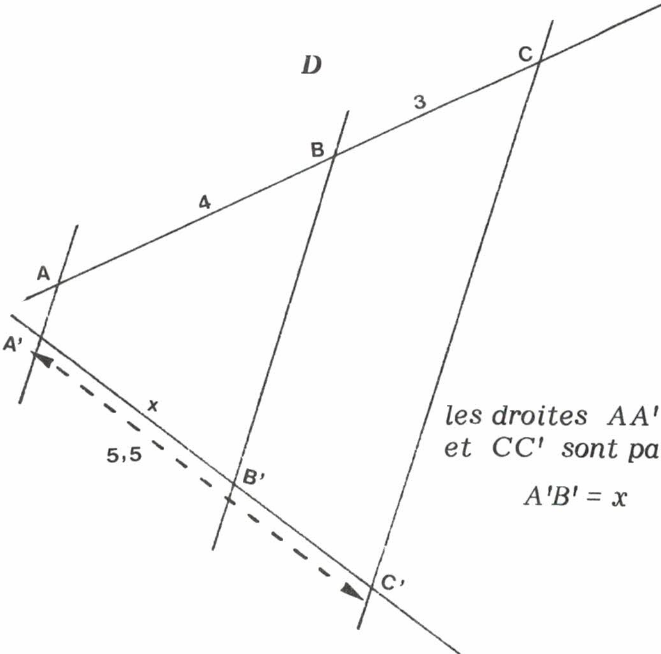
les droites NN' et MM' sont parallèles

$x = BM'$



les droites AA', BB' et CC' sont parallèles

$x = A'B'$

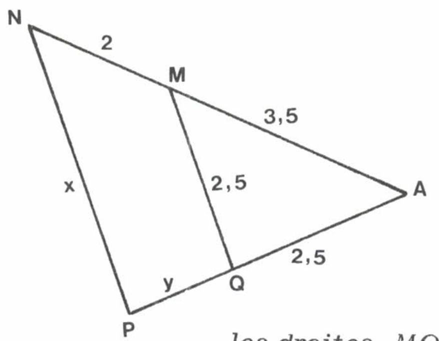


les droites AA', BB' et CC' sont parallèles

$A'B' = x$

☆☆ **Exercice I_{21} :** *Dans les figures ci-dessous, calcule les longueurs x et y :*

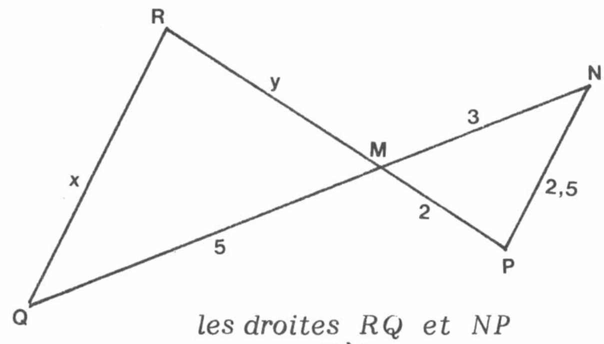
A



les droites MQ et PN sont parallèles

$x = NP \qquad y = PQ$

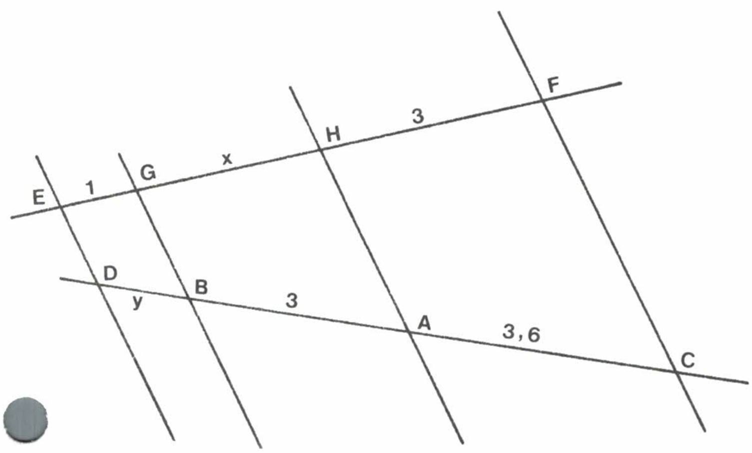
B



les droites RQ et NP sont parallèles

$x = RQ \qquad y = RM$

C

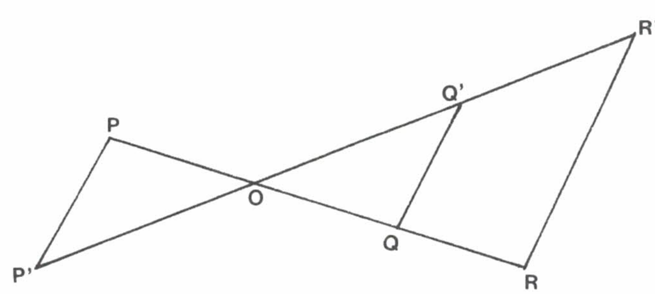


les droites AH , BG , CF et DE sont parallèles

$x = HG \qquad y = BD$

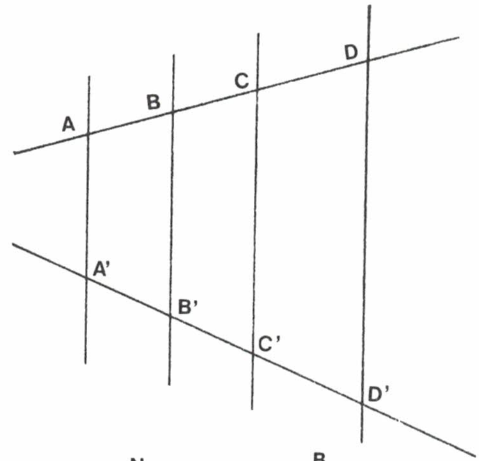
☆ **Exercice I_{22} :** *Dans cette figure les droites PP' , QQ' sont parallèles. Sachant que :*

P'Q' = 6 cm , Q'R' = 2,4 cm ,
QR = 1,6 cm , OQ = 2 cm
et RR' = 3,5 cm ,

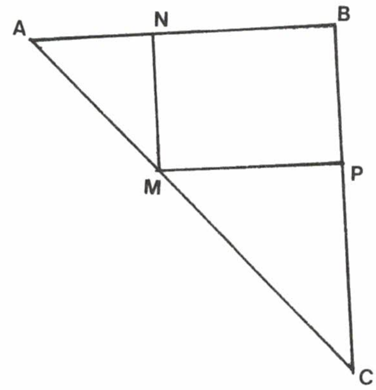


et sachant que O est le milieu de PQ , calcule QR , OQ' , QQ' , PP'.

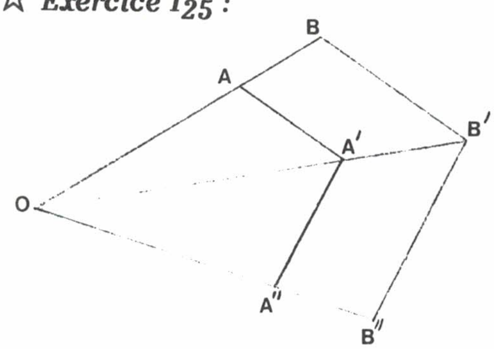
☆☆ **Exercice I_{23} :** *Les droites AA', BB', CC' et DD' sont parallèles. De plus $AC = 2{,}3$ cm , $CD = 1{,}5$ cm , $A'D' = 4$ cm et $B'C' = 1{,}2$ cm ; calcule les longueurs $A'B'$ et $C'D'$.*



☆☆ **Exercice I_{24} :** *Dans cette figure les droites AB et MP sont parallèles, ainsi que MN et BC. Sachant que $AB = 4$ cm , $AC = 6$ cm et $BC = 4{,}5$ cm, et que $AN = \frac{2}{3} NB$, calcule les longueurs AM , CP et MP.*

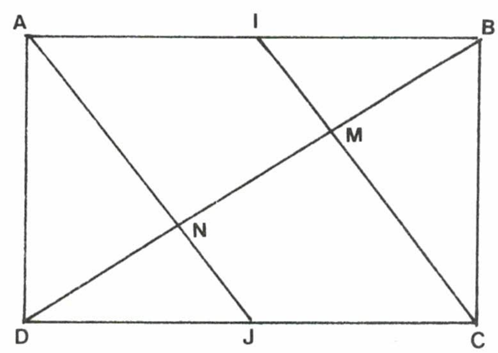


☆ **Exercice I_{25} :**



Dans cette figure, AA' et BB' sont parallèles, ainsi que $A'A''$ et $B'B''$. Compare $\frac{OA}{OB}$ et $\frac{OA'}{OB'}$ puis démontre que AA'' et BB'' sont parallèles.

☆☆ **Exercice I_{26} :** *Le quadrilatère $ABCD$ est un rectangle. Les points I et J sont les milieux des segments AB et DC.*



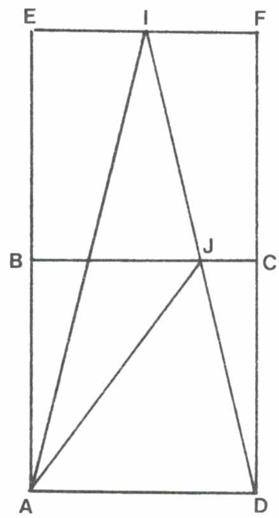
a) *Pourquoi CI et AJ sont-elles parallèles ?*

b) *Pourquoi a-t-on $MN = MB$?*

c) *Pourquoi a-t-on $MN = ND$?*

d) *Refais la figure en partant d'un trapèze (ou d'un parallélogramme) $ABCD$. A-t-on encore $DN = NM = MB$?*

☆☆☆ **Exercice I_{27}** : *Les quadrilatères ABCD et BEFC sont des carrés de côté a. Le point I est le milieu du segment EF.*



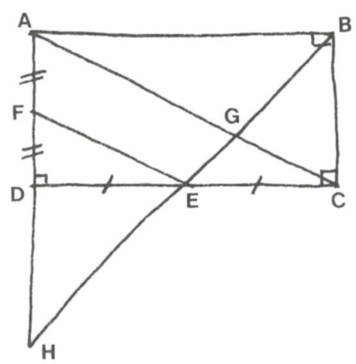
a) Calcule CJ.

b) Calcule AJ.

c) Calcule l'aire du triangle AIJ.

d) Calcule la distance de J à la droite AI.

☆☆☆ **Exercice I_{28}** :



J'ai fait cicontre un croquis à main levée.

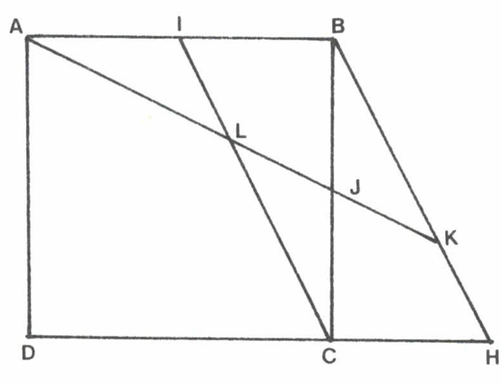
a) Fais une figure précise, sachant que $AB = 8$ cm et $BC = 4\sqrt{2}$ cm.

b) Calcule AC, EF, DH et AG.

c) Calcule BE et BG.

d) Pourquoi les droites AG et BG sont-elles perpendiculaires ?

☆☆☆ **Exercice I_{29}** :



Le quadrilatère ABCD est un carré de côté a. Les points I et J sont les milieux des segments AB et BC. Les droites CI et BH sont parallèles.

a) Calcule AJ.

b) Pourquoi a-t-on $LJ = JK$?

c) Calcule $\frac{AL}{LK}$.

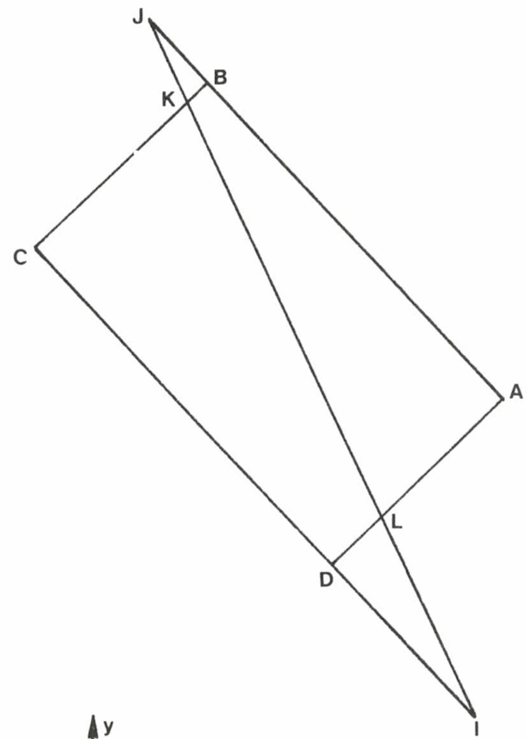
d) Calcule AL, LJ et JK.

e) Que valent IL et LC ?

☆☆☆ **Exercice I_{30}** : *Trace un parallélogramme ABCD tel que $AB = CD = 9$ cm. Marque le point M du segment AB tel que $AM = 3$ cm. Marque le point N du segment CD tel que $CN = 3$ cm.*

Les droites AN et CM coupent la diagonale BD en U et V. Pourquoi a-t-on $DU = VB = 2UV$?

☆☆☆ **Exercice I_{31}** : *J'ai fait ci-contre un croquis à main levée.*

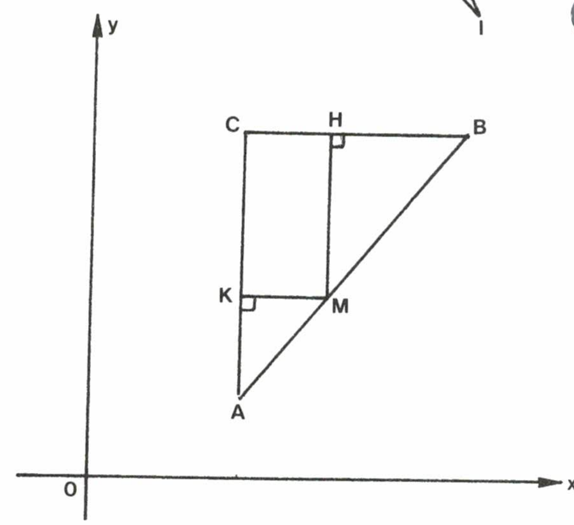


a) *Fais une figure précise, sachant que ABCD est un rectangle, que DC = 10 cm , BJ = 2 cm , DI = 4 cm et IJ = 18 cm .*
(Tu peux commencer par calculer AD) .

b) *Calcule IL , LK et KJ .*

c) *Calcule BK et LD .*

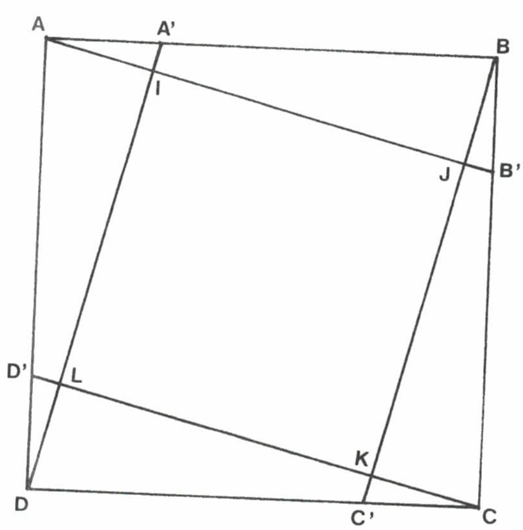
☆☆☆ **Exercice I_{32}** : *Dans un repère orthonormé (unité 1 cm) (0x,0y) , le point A a pour coordonnées (2;1) , B a pour coordonnées (5;4,5) , et C a pour coordonnées (2;4,5) .*
Le point M est sur le segment AB .



a) *Pourquoi a-t-on* $\frac{AK}{AC} = \frac{CH}{CB}$?

b) *Notons 2 + t l'abscisse de M , démontre que l'ordonnée de M est* $1 + \frac{7}{6}t$.

☆☆☆ **Exercice I_{33}** :



ABCD est un carré de côté a .
$AA' = BB' = CC' = DD' = \frac{a}{4}$.

a) *Calcule AB' .*

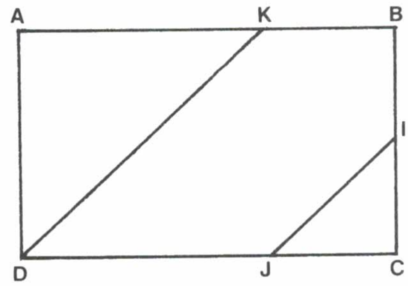
b) *Calcule* $\frac{D'L}{AI}$.

c) *Calcule* $\frac{IJ}{AI}$.

d) *Calcule AI , IJ , JB' en admettant que JB' = D'L .*

e) *Soit 0 le point d'intersection des droites AC et BD . Donne l'image des 12 points de la figure par la symétrie de centre 0 . Cela te permet-il d'expliquer pourquoi l'on a JB' = D'L ?*

☆☆☆ **Exercice I_{34}** : *Le quadrilatère ABCD est un rectangle. Le point K est tel que $AK = \frac{2}{3}\ AB$; I est le milieu du segment BC ; les droites DK et IJ sont parallèles.*



a) *Démontre que $DJ = AK$; puis que les droites KJ et AB sont perpendiculaires.*

b) *Soit $AB = L$ et $BC = l$. Calcule, en fonction de L et de l , les longueurs DK , KI et DI . Comment faut-il choisir L/l pour que le triangle DKI soit rectangle en K ?*

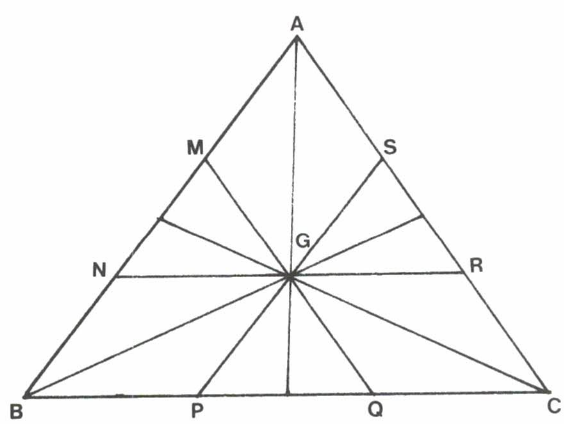
☆☆☆ **Exercice I_{35}** :

a) *Dessine un quadrilatère ABCD , choisis un point M sur le segment AB ; la parallèle à AC passant par M coupe BC en N ; la parallèle à BD passant par N coupe CD en P ; la parallèle à CA passant par P coupe DA en Q . Démontre que QM est parallèle à BD .*

b) *Le résultat reste-t-il vrai lorsque M est choisi sur la droite AB , mais pas entre A et B ?*

c) *Dessine un pentagone ABCDE , choisis un point M sur AB ; puis, selon le même processus que précédemment, trace N sur BC tel que MN soit parallèle à AC , puis P sur CD tel que N soit parallèle à BD , Q sur DE ..., R sur EA ... Est-ce que RM est parallèle à EB ?*

☆☆ **Exercice I_{36}** : *Un triangle ABC a pour centre de gravité G . Les parallèles aux côtés passant par G recoupent les côtés en MNPQRS (comme sur la figure) .*



a) *Calcule* $\dfrac{BP}{BC}$ *et* $\dfrac{QC}{BC}$.

Calcule de même $\dfrac{BN}{BA}, \dfrac{MA}{BA},$ $\dfrac{AS}{AC}$ *et* $\dfrac{RC}{AC}$.

b) *Démontre que MS est parallèle à BC , QR parallèle à AB et PN parallèle à AC .*

☆☆☆ **Exercice I_{37} :**

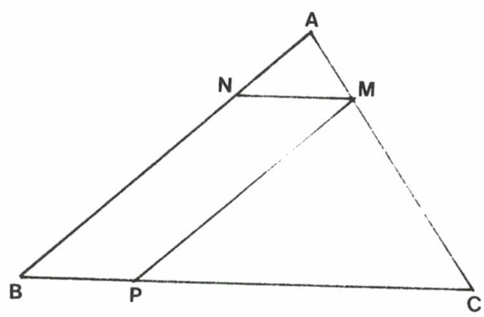
a) Dessine un triangle ABC , puis une droite Δ qui coupe le segment AB en C' , le segment AC en B' , et la droite BC en A' . Est-il possible que A' soit entre B et C ? Soit Δ' la parallèle à Δ passant par A ; elle coupe la droite BC en M . Démontre :

$$\frac{MA'}{CA'} = \frac{AB'}{CB'} \quad \text{et} \quad \frac{MA'}{BA'} = \frac{AC'}{BC'}$$

puis $$\frac{AB'}{CB'} \times \frac{BC'}{AC'} \times \frac{CA'}{BA'} = 1$$

b) Recommence l'exercice en choisissant une droite Δ telle que C' soit entre A et B , et B' hors du segment AC .

☆☆☆ **Exercice I_{38}** : Le point M est sur le segment AC et $MC = 3\ MA$. La droite MN est parallèle à BC ; la droite MP est parallèle à AB .



1) Détermine les nombres u , v , w tels que :

Aire $BPMN = u$ Aire AMN

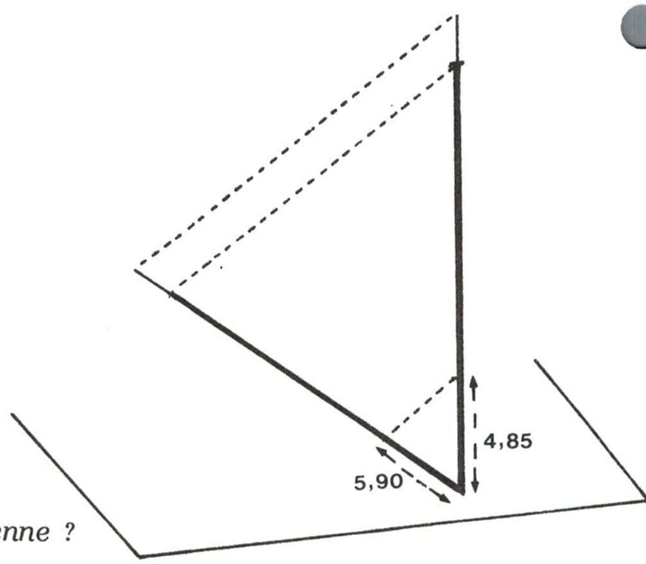
Aire $BPMN = v$ Aire CMP

Aire $AMN = w$ Aire CMP

2) Même question lorsque $MC = k\ MA$ (k quelconque) .

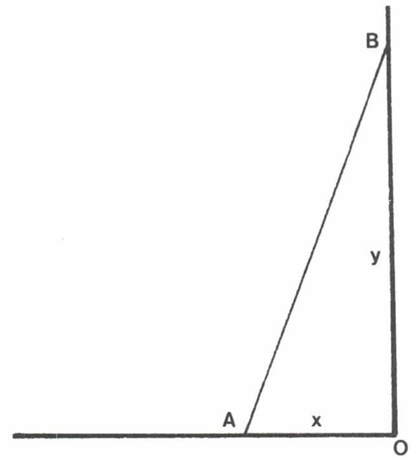
☆☆ **Exercice I_{39}** : Un mât est surmonté d'une antenne. Il est éclairé par le soleil et porte une ombre sur le sol.

Une traverse située à 4,85 m de hauteur, porte son ombre à 5,90 m du pied du mât. L'ombre du mât est longue de 23 m , celle de l'antenne de 5,50 m .



Quelle est la hauteur du mât ? Celle de l'antenne ?

☆☆☆ **Exercice I_{40}** : *On pose une échelle le long d'un mur. Pour que l'équilibre soit bon on estime que le pied (c'est-à-dire $OA = x$) doit être au moins égal au cinquième de la hauteur $OB = y$. Pour qu'elle ne risque pas de glisser, il faut que x soit au plus égal au quart de y.*

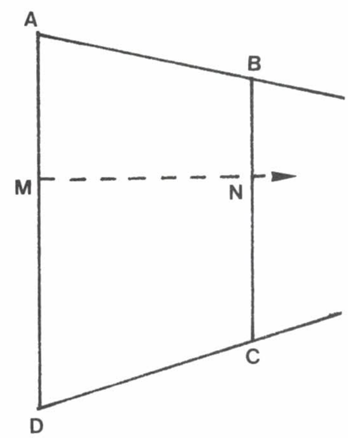


1) *On dispose d'une échelle de 5 m de long, quelles sont les hauteurs y que l'on peut atteindre ?*

2) *On veut que la hauteur y soit égale à 6 m. Entre quelles valeurs la longueur de l'échelle doit-elle être comprise ?*

☆☆☆ **Exercice I_{41}** : *Sur cette figure les droites AD et BC sont parallèles. De plus $BC = 3{,}5$ cm, $AD = 5$ cm et $AM = 2$ cm.*

Comment faut-il choisir le point N sur le segment BC, pour que les droites AB, CD et MN aient un point commun ?



Troisième série : LA TRIGONOMETRIE

☆ **Exercice I_{42} :** *Un triangle UVW est rectangle en U. Calcule ses côtés et ses angles dans les cas suivants :*

a) $UV = 7$ cm et $WU = 8$ cm

b) $UV = 3$ cm et $\widehat{UVW} = 30°$

c) $UV = 4$ cm et $\widehat{UWV} = 45°$

d) $UV = 7$ cm et $UW = 18$ cm

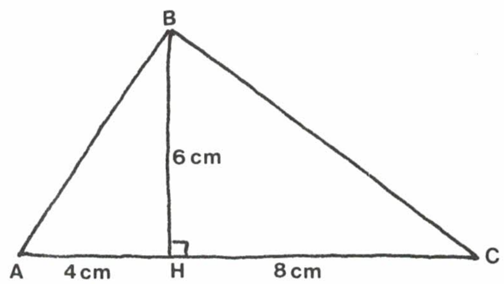
☆ **Exercice I_{43} :**

a) *Trace un triangle ABC tel que* $\widehat{BAC} = 90°$, $BA = 7$ cm et $CA = 10$ cm.

b) *Calcule BC.*

c) *Que vaut l'angle ABC ?*

☆ **Exercice I_{44} :**



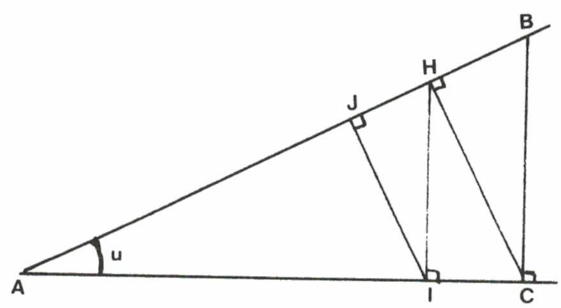
Voici un croquis fait à main levée.

a) Calcule AB et BC.

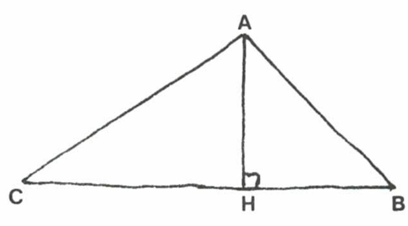
b) Calcule $\widehat{BAC}$ et $\widehat{ACB}$.

c) Calcule $\widehat{ABC}$.

☆☆☆ **Exercice I_{45} :** *Dans la figure ci-contre, comment aurait-il fallu choisir l'angle u, pour que J soit le milieu du segment AB ?*



☆ **Exercice I_{46} :**



a) *Trace un triangle ABC et sa hauteur AH, tels que* $AH = 3$ cm, $HB = 3$ cm et $AC = 6$ cm (*et tels que H soit entre B et C*).

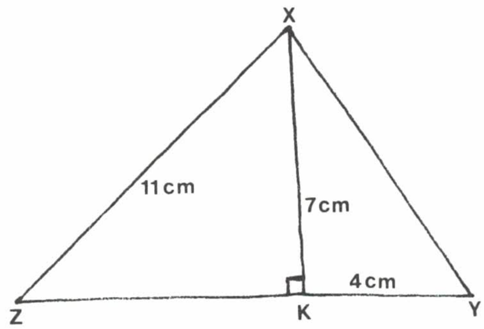
b) Calcule $\widehat{ABH}$.

c) Calcule CH et $\widehat{ACH}$.

☆ **Exercice I_{47} :** *Dans le parallélogramme $ABCD$, on a $AB = 7$ cm, $BC = 6$ cm et $\widehat{ABC} = 45°$. Dessine $ABCD$ et calcule son aire.*

☆☆ **Exercice I_{48} :** *Les diagonales d'un losange mesurent 5 cm et 7 cm. Quelle est la longueur des côtés ? Peux-tu calculer ses angles ?*

☆ **Exercice I_{49} :** *Voici un croquis fait à main levée.*



a) Calcule XY et YZ.

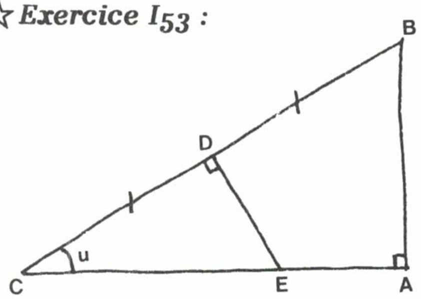
b) Que valent $\widehat{XYZ}$ et $\widehat{YXZ}$?

☆☆ **Exercice I_{50} :** *Les diagonales d'un rectangle mesurent 9 cm. Elles forment entre elles un angle de 30°. Que valent la longueur et la largeur ?*

☆☆ **Exercice I_{51} :** *Dans un losange $UVWX$, on a $\widehat{UVW} = 30°$. Calcule la longueur des diagonales, sachant que les côtés mesurent 6 cm.*

☆☆ **Exercice I_{52} :** *Un losange de côté 7 cm a un angle égal à 45°. Quelle est la longueur de ses diagonales ?*

☆☆ **Exercice I_{53} :**



J'ai fait ci-contre un croquis à main levée.

a) Fais une figure précise, sachant que $AB = 3$ cm et $u = 30°$.

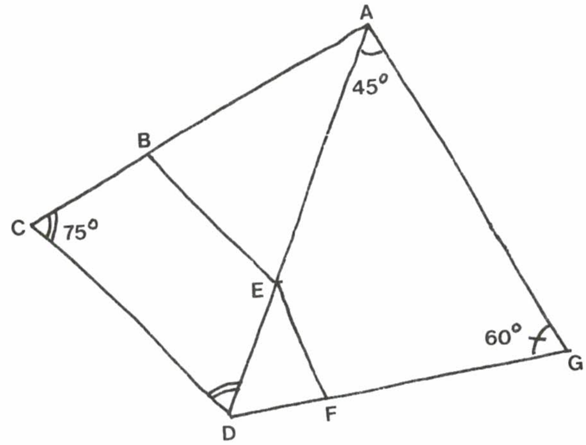
b) Calcule BC et AC.

c) Calcule CE et AE.

d) Calcule DE.

<u>Nota</u> : $\sin 30° = \frac{1}{2}$ et $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

☆☆☆ **Exercice I_{54}** : *J'ai fait ci-contre un croquis à main levée.*



a) *Fais une figure précise, sachant que $AB = 3$ cm et $BC = 2$ cm, et que BE est parallèle à CD, et EF parallèle à AG.*

b) *Calcule* $\frac{DF}{DG}$.

c) *Trace la hauteur DH du triangle ADG. Calcule DH. Calcule DG, puis DF.*

☆☆ **Exercice I_{55} :**

a) *Choisis une longueur l. Trace un triangle isocèle ABC tel que :*

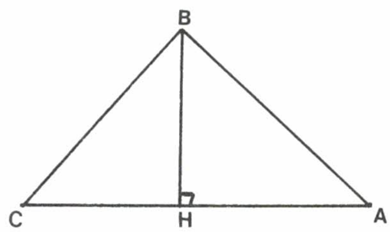
$$AB = AC = 2l \quad \text{et} \quad BC = l$$

b) *Trace la hauteur AH. Pourquoi H est-il le milieu de BC ?*

c) *Calcule AH.*

d) *Que valent les angles du triangle ABC ?*

☆ **Exercice I_{56} :**



a) *Trace un triangle ABC et sa hauteur BH, tels que $AB = 7$ cm, $BH = 5$ cm et $HC = 5$ cm (et tels que H soit entre A et C).*

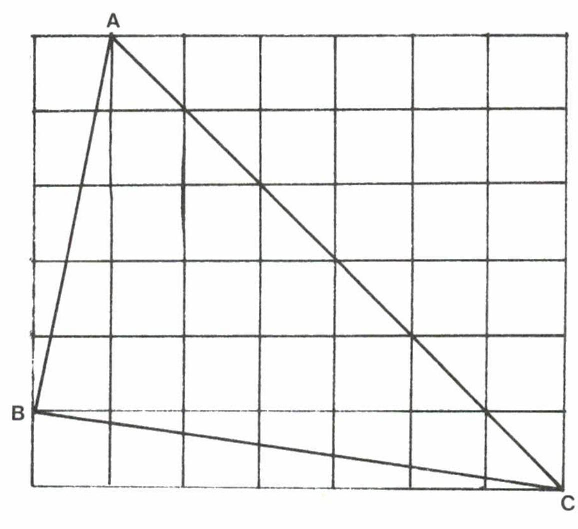
b) *Calcule AH et BC.*

c) *Que valent $\widehat{HAB}$, $\widehat{HCB}$ et $\widehat{ABC}$?*

☆☆ **Exercice I_{57} :**

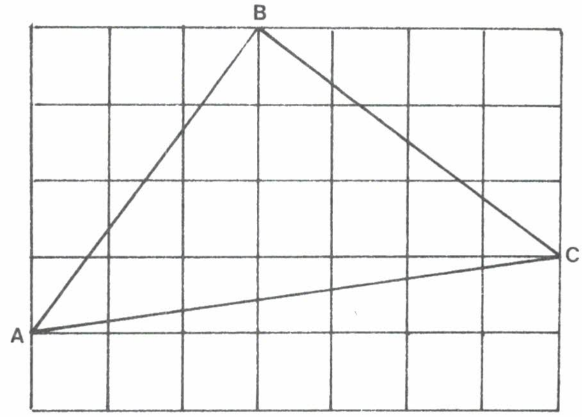
Le quadrillage a pour côté 1 cm.

Calcule les angles du triangle ABC.



☆☆ **Exercice I_{58} :**

Le quadrillage a pour côté 1 cm . Démontre que le triangle ABC est isocèle et calcule ses angles.



☆☆ **Exercice I_{59} :** *Dans un repère orthonormé (unité 1 cm) place les points M (-3;2) , N (2,5;0,5) et P (0;-3) .*

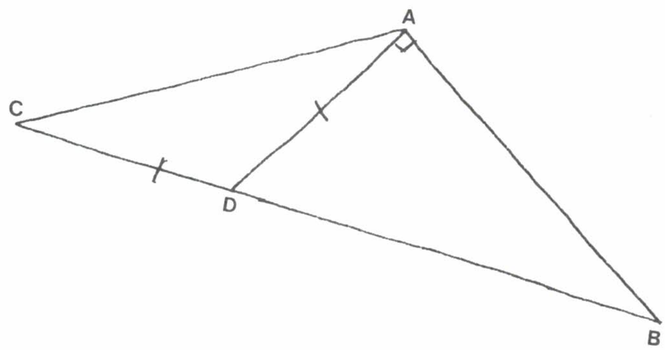
Calcule les angles du triangle MNP .

☆☆☆ **Exercice I_{60} :** *J'ai fais ci-contre un croquis à main levée.*

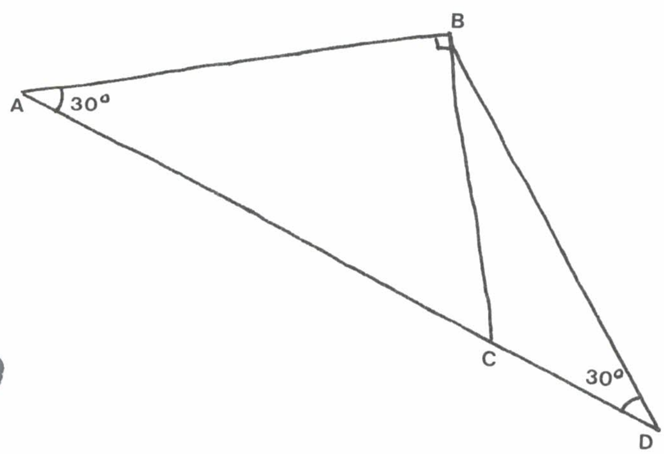
a) *Fais une figure précise, sachant que AB = 5 cm et BD = 6 cm .*

b) *Calcule CD .*

c) *Que valent les angles $\widehat{ADB}$ et $\widehat{ACD}$?*



☆☆☆ **Exercice I_{61} :**



J'ai fait ci-contre un croquis à main levée.

a) *Fais une figure précise, sachant que AC = 8 cm .*

b) *Calcule BC , et l'aire du triangle ABC .*

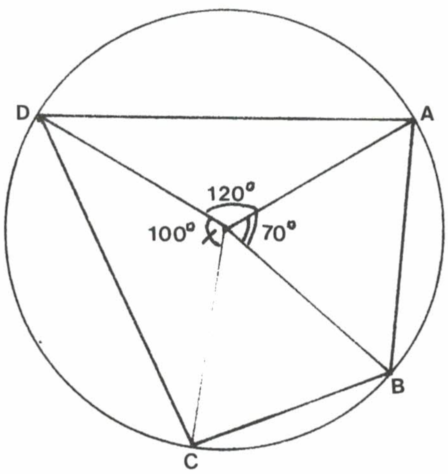
c) *Comment aurai-il fallu choisir AC pour que l'aire du triangle ABC soit égale à 27 cm^2 ?*

☆☆☆ **Exercice I_{62} :** *Dans le triangle UVW, on a $UW = 10$ cm, et $\widehat{VUW} = 80°$. Son aire est 63 cm^2.*

a) *Dessine le triangle UVW.*

b) *Calcule UV et VW.*

☆☆☆ **Exercice I_{63} :**



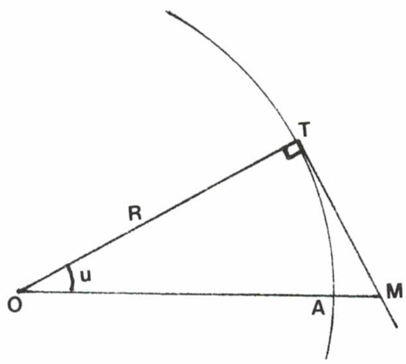
Les quatre points $ABCD$ sont sur un cercle de rayon 4 cm.

a) *Calcule l'aire du quadrilatère $ABCD$.*

b) *Calcule le périmètre du quadrilatère $ABCD$.*

☆☆☆☆ **Exercice I_{64} :**

A) *Soit un cercle de rayon R, et deux points A et T de ce cercle. On note $\widehat{AT} = l$.*



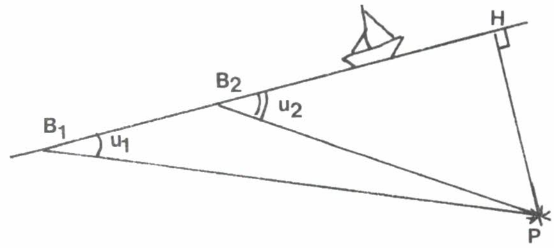
a) *Si tu connais l et R, que fais-tu pour avoir u (en degrés) ?*

b) *Pourquoi a-t-on $AM = \dfrac{R}{\cos u} - R$?*

B) *<u>Application</u> : Un phare situé en A a une altitude de 30 m. A quelle distance de A est-il visible pour un observateur situé au niveau de la mer ?*
(Pour calculer le rayon de la terre tu peux utiliser le fait que l'équateur mesure 40 000 km).

C) *A quelle distance ce phare est-il visible pour un observateur situé à une altitude de 10 m ?*

☆☆☆☆ Exercice I_{65} :



Un bateau se déplace d'un mouvement rectiligne uniforme. Il passe au large d'un phare P.

A 13 h 45 il est en B_1, on mesure l'angle u_1 de la trajectoire et de B_1P, et on trouve 31,1°. A 14 h 20 il est en B_2, on mesure l'angle de la trajectoire et de B_2P, et on trouve 47,1°. Entre ces deux instants il a parcouru 7,4 km.

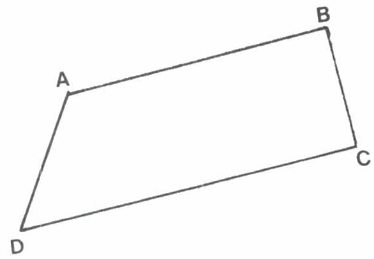
a) *Montre que* $HP = B_1H \times \dfrac{\sin u_1}{\cos u_1}$ *(que l'on note aussi* $B_1H \times \tan u_1$*) ; et que* $HP = B_2H \times \tan u_2$.

b) *Déduis-en que :*

$$\frac{HP}{\tan u_1} - \frac{HP}{\tan u_2} = B_1B_2$$

Calcule HP et détermine l'heure de passage au point H.

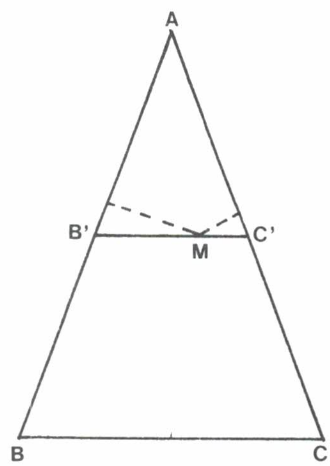
☆☆☆ Exercice I_{66} :



On connaît les longueurs des côtés d'un trapèze $ABCD$: les côtés parallèles AB et CD mesurent respectivement 45 et 60 cm ; $AD = 17$ cm et $BC = 8$ cm.

Avec ces renseignements tu dois pouvoir tracer correctement le trapèze (à l'échelle $\frac{1}{4}$) et calculer son aire. Pour cela tu peux utiliser le point M intersection des droites AD et BC, et démontrer que BC est perpendiculaire à AB et à DC.

☆☆☆☆ Exercice I_{67} :



a) Le triangle ABC est isocèle. Le segment $B'C'$ est parallèle au côté BC. Montrer que la somme $d(M,AB) + d(M,AC)$ est indépendante de la position du point M sur le segment $B'C'$.

b) On considére maintenant un triangle équilatéral UVW. Montrer que la somme $d(M,UV) + d(M,VW) + d(M,WU)$ est indépendante de la position du point M à l'intérieur de ce triangle.

Thème : CAS D'EGALITE DES TRIANGLES

Etant donné deux figures F et F' dessinées sur deux feuilles distinctes, on dit que F et F' sont superposables, si l'on peut appliquer ces deux feuilles l'une sur l'autre de telle façon que F et F' viennent en correspondance. Lorsque F et F' sont sur une même feuille, on dira qu'elles sont superposables si prenant l'image de F sur une feuille de calque, on obtient sur cette feuille une figure F_1 qui est superposable à F'.

Lorsque deux figures F et F' sont symétriques par rapport à une droite D, elles sont superposables ; pour les superposer il suffit de plier la feuille selon D. De même si F' est obtenue à partir de F par une translation ou une symétrie centrale, F et F' sont superposables.

Précision de vocabulaire : *Lorsque nous dirons que deux triangles ABC et $A'B'C'$ sont superposables, nous supposerons toujours que la superposition de ABC à $A'B'C'$, amène A sur A', B sur B' et C sur C'. Ceci implique :*

$$AB = A'B' , \; BC = B'C' \text{ et } CA = C'A'$$
$$\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'} , \; \widehat{CBA} = \widehat{C'B'A'} \text{ et } \widehat{ACB} = \widehat{A'C'B'}$$

Nous allons chercher des conditions permettant d'affirmer que deux triangles sont superposables.

LE PREMIER CAS D'EGALITE

Soit deux triangles ABC et MNP tels que :

$$AB = MN , \; \widehat{BAC} = \widehat{NMP} \text{ et } \widehat{ABC} = \widehat{MNP} ,$$

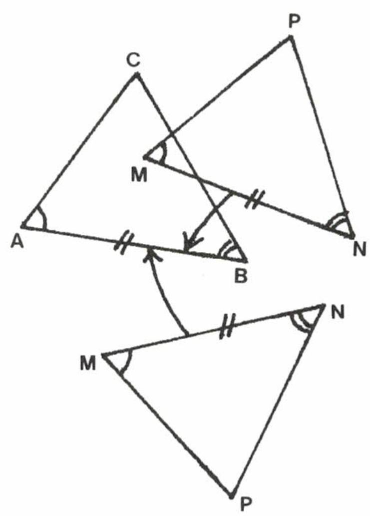
alors ces deux triangles sont superposables.

Puisque AB = MN , on peut superposer M à A et N à B . Il y a deux façons de le faire :

ou bien P et C sont de part et d'autre de la droite AB,

ou bien P et C sont du même coté de la droite AB .

C'est cette seconde solution que nous adoptons .



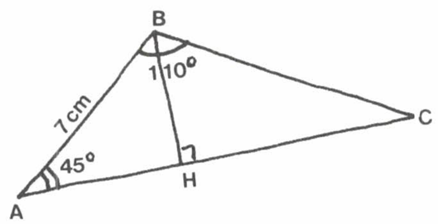
Alors , puisque $\widehat{MNP} = \widehat{ABC}$, la demi-droite [NP) est appliquée sur la demi-droite [BC) . De même, puisque $\widehat{NMP} = \widehat{BAC}$, la demi-droite [MP) est appliquée sur la demi-droite [AC) . Et par conséquent le point P , intersection de [NP) et de [MP) , est appliqué sur le point C , intersection de [BC) et de [AC) .

Il en résulte bien sûr que les conditions :

$$AB = MN \quad , \quad \widehat{BAC} = \widehat{NMP} \quad \text{et} \quad \widehat{ABC} = \widehat{MNP} \quad ,$$

entraînent que $BC = NP$, $CA = PM$ *et* $\widehat{BCA} = \widehat{NPM}$. *En d'autres termes si dans un triangle* ABC *, on connaît la longueur* AB *et les deux angles* $\widehat{BAC}$ *et* $\widehat{ABC}$ *, le troisième angle et les longueurs des deux autres côtés sont déterminés. Il est facile de calculer le troisième angle puisque la somme des trois angles est égale à* $180°$ *. On peut aussi calculer les longueurs des deux autres côtés. C'est l'objet des exercices qui suivent.*

☆ ***Exercice 1 :***

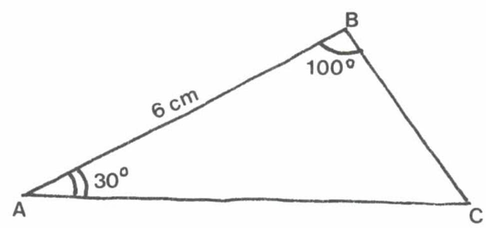


Voici un croquis fait à main levée.

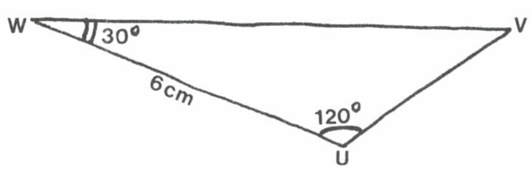
1) *Fais une figure précise.*
2) *Calcule* AH *et* BH .
3) *En utilisant ta calculette, calcule* BC , HC *et* AC .

☆ ***Exercice 2 :*** *Voici un croquis fait à main levée.*

1) *Fais une figure précise.*
2) *En utilisant ta calculette, calcule* AC *et* BC .



☆☆ ***Exercice 3 :***



Voici un croquis fait à main levée.

1) *Fais une figure précise.*
2) *En utilisant ta calculette, calcule* UV *et* VW .

☆☆ ***Exercice 4 :*** *Dans le triangle* XYZ *, on a* $XY = 7$ cm , $\widehat{XYZ} = 40°$ *et* $\widehat{YXZ} = 80°$.

1) *Dessine le triangle* XYZ .
2) *En utilisant ta calculette, calcule* YZ *et* ZX .
3) *Calcule la longueur de la médiane issue de* Z .

☆☆☆ **Exercice 5 :** *Dans le triangle ABC , on a AB = 10 cm ,* $\widehat{ABC} = 30°$ *et* $\widehat{BCA} = 40°$ *.*

1) *Dessine le triangle ABC .*

2) *En utilisant ta calculette, calcule les longueurs de ses hauteurs.*

LE SECOND CAS D'EGALITE

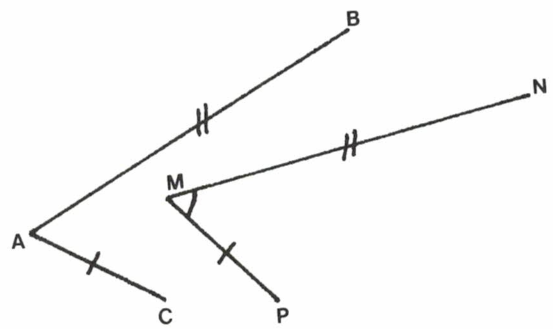
Soit deux triangles ABC et MNP tels que :

$$\widehat{BAC} = \widehat{NMP} \quad , \quad AB = MN \quad \text{et} \quad AC = MP \quad ,$$

alors ces deux triangles sont superposables.

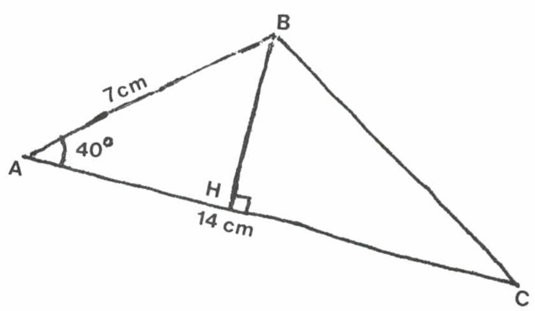
Puisque $\widehat{BAC} = \widehat{NMP}$, on peut amener M sur A de façon que la demi-droite [MN) vienne sur la demi-droite [AB) , et la demi-droite [MP) sur la demi-droite [AC) .

Alors, puisque AB = MN , le point N vient sur B . Et , puisque AC = MP , P vient sur C . Autrement dit le triangle MNP est superposé au triangle ABC .



Il en résulte que $\widehat{CBA} = \widehat{PNM}$, $\widehat{BCA} = \widehat{NPM}$ *et BC = NP . Autrement dit, si dans un triangle ABC , on connaît l'angle* $\widehat{BAC}$ *, et les côtés AB et AC (appelés quelquefois côtés adjacents à l'angle* $\widehat{BAC}$*) , la longueur du troisième côté, et les deux autres angles sont déterminés. On peut calculer ces deux angles et ce troisième côté. C'est l'objet des exercices suivants.*

☆ **Exercice 6 :**



Voici un croquis fait à main levée.

1) *Fais une figure précise.*

2) *Calcule AH et BH .*

3) *Calcule HC et BC .*

4) *Que vaut l'angle ACB ?*

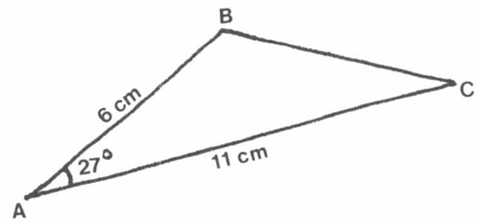
5) *Que vaut l'aire de ce triangle ?*

☆☆ **Exercice 7 :** *Voici un croquis fait à main levée.*

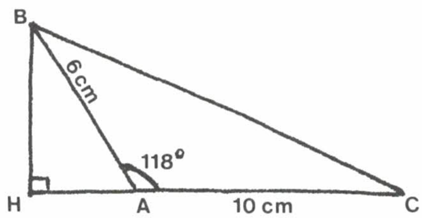
1) Fais une figure précise.

2) Calcule BC .

3) Que vaut $\widehat{ACB}$?



☆☆ **Exercice 8 :**



Voici un croquis fait à main levée.

1) Fais une figure précise.

2) Calcule AH , BH et BC .

3) Que vaut $\widehat{ACB}$?

☆☆☆ **Exercice 9 :** *Le triangle ABC est tel que $\widehat{BAC} = 45°$, AC = 10 cm et BC = 8,5 cm .*

1) Trace le triangle ABC .

2) Calcule la longueur de la hauteur issue de C .

3) Calcule l'angle $\widehat{ABC}$.

LE TROISIEME CAS D'EGALITE

Soit deux triangles ABC et MNP tels que :

AB = MN , NP = BC et PM = CA ,

alors ces deux triangles sont superposables.

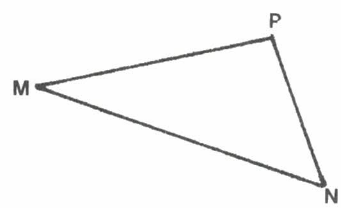
Puisque AB = MN , il est possible de superposer M à A et N à B ; il y a deux façons de le faire :

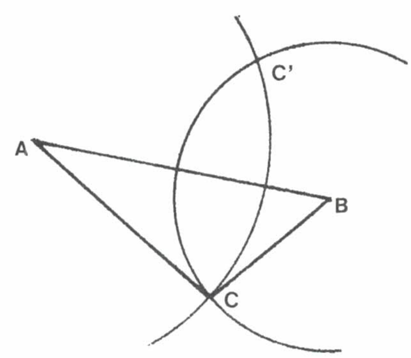
ou bien P et C sont de part et d'autre de la droite AB ,

ou bien P et C sont du même coté de la droite AB .

C'est cette seconde solution que nous adoptons .

Puisque MP = AC , le point P est venu sur un point du cercle de centre A et passant par C . De même, puisque NP = BC , le point P est venu sur un point du cercle de centre B et passant par C .

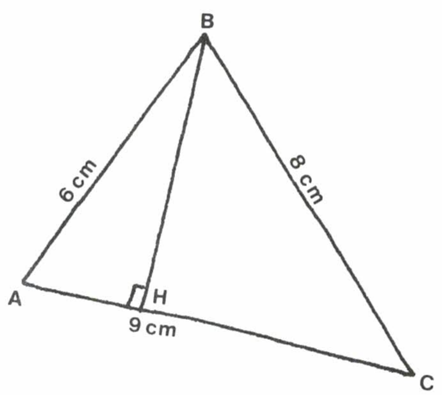




Ces deux cercles ont deux points communs, le point C et son symétrique C' par rapport à AB . Puisque P et C sont du même côté de AB , c'est que P est venu sur C .

Il en résulte que les angles des deux triangles sont égaux. Autrement dit, si l'on connaît les longueurs des côtés d'un triangle, ses angles sont déterminés. On peut calculer ces angles à partir des longueurs des côtés. C'est l'objet des exercices suivants.

☆☆ ***Exercice 10 :***



Voici un croquis fait à main levée.

1) *Fais une figure précise.*

2) *En appliquant deux fois le théorème de Pythagore, démontre que :*

$$HC^2 - HA^2 = 28$$

3) *Calcule* $HC + HA$, *puis* $HC - HA$, *puis* HC *et* HA .

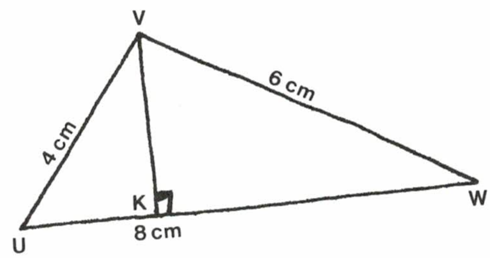
4) *Calcule* HB , *puis les angles* $\widehat{BAC}$ *et* $\widehat{BCA}$.

☆☆ ***Exercice 11 :*** *Voici un croquis fait à main levée.*

1) *Fais une figure précise.*

2) *Calcule* UK *et* KW .

3) *Calcule les angles du triangle* UVW .



☆☆☆ ***Exercice 12 :*** *Le triangle* ABC *est tel que :*

$$AB = 6 \text{ cm} \quad , \quad BC = 11 \text{ cm} \quad \text{et} \quad CA = 7 \text{ cm} \quad .$$

Dessine le triangle ABC , *cherche le pied de la hauteur issue de* B , *puis calcule ses angles.*

☆☆☆ ***Exercice 13 :*** *Trace un triangle* ABC *tel que :*

$$AC = 5 \text{ cm} \quad , \quad CB = 6 \text{ cm} \quad \text{et} \quad AC = 9 \text{ cm} \quad .$$

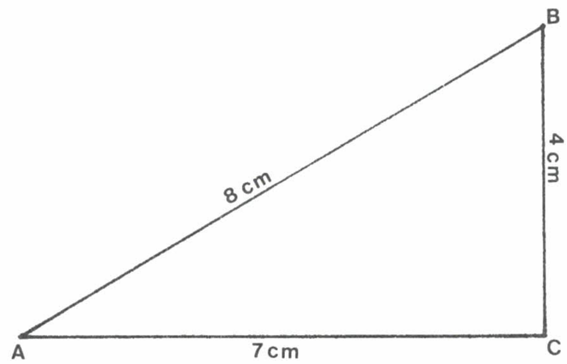
a) *Soit* H *le pied de la hauteur issue de* B . *Calcule* AH *et* CH .

b) *Que valent les angles du triangle ?*

☆☆☆ ***Exercice 14 :*** *Trace un triangle MNP tel que :*

$$MP = 7\ cm \quad , \quad MN = 4\ cm \quad \text{et} \quad PN = 9\ cm \quad .$$

Soit K le pied de la hauteur issue de N. Calcule KP et KM. Que valent les angles du triangle ?



Note sur un cas particulier : *On a tracé ci-contre un triangle ABC tel que $AC = 7$ cm , $CB = 4$ cm et $BA = 8$ cm. Il n'est pas rectangle car $8^2 = 64 \neq 7^2 + 4^2 = 65$ (cf : théorème réciproque de Pythagore) . Mais l'angle en C est presque droit, et la figure ne nous permet pas de savoir si le pied H de la hauteur issue de B , est entre A et C.*

Suivant la méthode utilisée à l'exercice 10 , nous écrirons :

$$AH^2 + HB^2 = 8^2$$
$$CH^2 + HB^2 = 4^2$$
$$AH^2 - CH^2 = 64 - 16 = 48$$
$$(AH-CH)(AH+CH) = 48$$

Mais , ne sachant pas si H est entre A et C , nous ne saurons pas si nous avons :

$$AH - CH = AC \quad , \quad \text{ou bien} \quad AH + CH = AC$$

Dès lors il devient nécessaire de raisonner en termes de valeurs algébriques :

Orientons la droite AC (par exemple de la gauche vers la droite) . C'est à dire posons $\overline{XY} = XY$ si X et Y sont deux points de la droite AC , tels que Y soit à droite de X ; et posons $\overline{XY} = - XY$ si X et Y sont deux points de la droite , tels que Y soit à gauche de X . Alors l'égalité $AH^2 - CH^2 = 48$, est équivalente à :

$$\overline{AH}^2 - \overline{CH}^2 = 48$$

soit $$(\overline{AH}-\overline{CH})(\overline{AH}+\overline{CH}) = 48$$

D'après la relation de Chasles $\overline{AH} - \overline{CH} = \overline{AC} = 7$ *(+7 car on a orienté AC de A vers C) . D'où :*

$$\overline{AH} + \overline{CH} = 48/7$$

soit (relation de Chasles) $$(\overline{AC}+\overline{CH}) + \overline{CH} = 48/7$$

d'où $\qquad 2\,\overline{CH} = -7 + 48/7$

donc $\qquad \overline{CH} = -1/14$

Ce qui nous montre que $CH = 1/14$, et que H est à gauche de C , donc entre A et C . Donc $\widehat{BCA}$ est inférieur à un angle droit, et $\cos \widehat{BCA} = \dfrac{HC}{BC} = \dfrac{1/14}{4} = \dfrac{1}{56}$. Donc $\widehat{BCA}$ peu différent de $88{,}97°$.

☆☆☆ **Exercice 15 :**

1) Trace quatre triangles :

ABC tel que $AB = 7{,}6$ cm , $BC = 10{,}2$ cm et $CA = 6{,}8$ cm
DEF tel que $DE = 5$ cm , $EF = 9$ cm et $FD = 7{,}5$ cm
GHI tel que $GH = 6{,}2$ cm , $HI = 7{,}6$ cm et $IG = 4{,}4$ cm
JKL tel que $JK = 4{,}4$ cm , $KL = 8{,}1$ cm et $LJ = 6{,}8$ cm

2) Compare les angles $\widehat{BAC}$, $\widehat{EDF}$, $\widehat{HGI}$ et $\widehat{KJL}$.

☆☆☆ **Exercice 16 :**

1) Trace un segment AB de longueur $10{,}2$ cm .
Trace M tel que $AM = 10{,}2$ cm et $BM = 0{,}2$ cm
Trace N tel que $AN = 6{,}8$ cm et $BN = 7{,}6$ cm
Trace P tel que $AP = 8$ cm et $BP = 6{,}4$ cm
Trace Q tel que $AQ = 4{,}4$ cm et $BQ = 9{,}2$ cm

2) Calcule les angles $\widehat{AMB}$, $\widehat{ANB}$, $\widehat{APB}$ et $\widehat{AQB}$.

3) Parmi les points M , N , P , Q , quels sont ceux qui se trouvent sur le cercle de diamètre AB ? Quels sont ceux qui sont à l'intérieur ? à l'extérieur ?

☆☆☆☆ **Exercice 17 :** Dans un parallélogramme $ABCD$, on a $AB = 4$ cm , $AC = 9$ cm et $BD = 10$ cm . Calcule BC .

☆☆☆☆ **Exercice 18 :** Dans un parallélogramme $ABCD$, on a $AB = 6$ cm , $BC = 8$ cm et $AC = 9$ cm . Calcule BD .

☆☆☆☆ **Exercice 19 :** Le triangle XYZ est tel que $XY = 8$ cm . Le point X est à 9 cm du milieu I de YZ . Le point Y est à $7{,}5$ cm du milieu J de XZ .

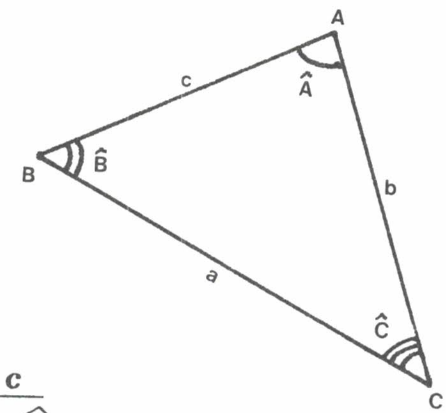
1) Trace le triangle XYZ .

2) Calcule YZ et ZX .

Thème : <u>ECHELLES - TRIANGLES SEMBLABLES</u>

(mesures angulaires de distances)

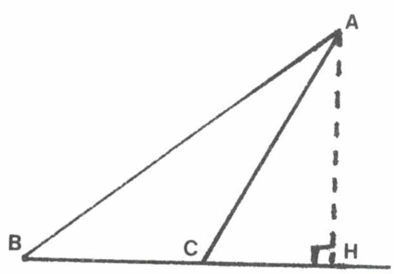
I) UNE FORMULE



Considérons un triangle ABC. Notons a , b , c les longueurs de ses côtés, et $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ ses angles (comme indiqué sur la figure). Nous allons démontrer la formule :

$$\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}}$$

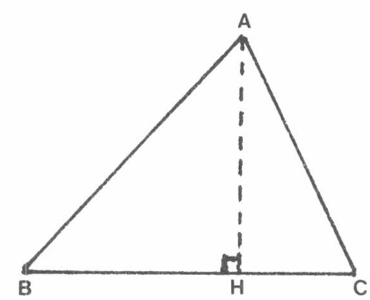
Pour cela nous allons calculer l'aire S du triangle ABC.



Dans le triangle ABH , nous avons

$$AH = AB \sin \widehat{B}$$

c'est-à-dire $AH = c \sin \widehat{B}$



On notera qu'il y a deux cas de figure.

Grace à la formule classique donnant l'aire du triangle, on en déduit :

$$S = \frac{1}{2}\, a \times c \sin \widehat{B}$$

☆☆ **Exercice 1 :** *Démontre de même que* $AH = b \sin \widehat{C}$, *et* $S = \frac{1}{2}\, a \times b \sin \widehat{C}$.
Démontre qu'on a aussi $S = \frac{bc}{2} \sin \widehat{A}$.

On a donc $2S = ac \sin \widehat{B} = cb \sin \widehat{A} = ba \sin \widehat{C}$
D'où, en divisant par abc :

$$\left(\frac{2S}{abc}\right) = \frac{\sin \widehat{B}}{b} = \frac{\sin \widehat{A}}{a} = \frac{\sin \widehat{C}}{c}$$

☆ **Exercice 2** : *Un triangle ABC est tel que* $\widehat{A} = 60°$, $\widehat{B} = 50°$ *et* $BC = a = 6$ *cm.*
Calcule les longueurs des côtés AC et BA. Calcule son aire.

II) LES REPRODUCTIONS A L'ECHELLE

Deux triangles ABC et A'B'C' sont dits semblables s'il existe r (> 0) tel que $A'B' = r\ AB$, $B'C' = r\ BC$ et $C'A' = r\ CA$. Autrement dit A'B'C' est la reproduction de ABC à l'échelle r .

Remarque : Deux triangles ABC et A'B'C' qui ont les mêmes angles (c'est à dire tels que $\widehat{A} = \widehat{A'}$, $\widehat{B} = \widehat{B'}$ et $\widehat{C} = \widehat{C'}$) sont semblables .

En effet ,d'après la formule du **1)** , il existe deux nombres x et x' tels que :

$$AB = x \sin \widehat{C} \qquad BC = x \sin \widehat{A} \qquad CA = x \sin \widehat{B}$$

$$A'B' = x' \sin \widehat{C'} \qquad B'C' = x' \sin \widehat{A'} \qquad C'A' = x' \sin \widehat{B'}$$

Puisque $\sin \widehat{A} = \sin \widehat{A'}$, $\sin \widehat{B} = \sin \widehat{B'}$ et $\sin \widehat{C} = \sin \widehat{C'}$, on en déduit :

$$\frac{x'}{x} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA}$$

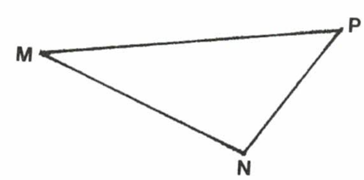
Donc A'B'C' est la reproduction de ABC à l'échelle x'/x .

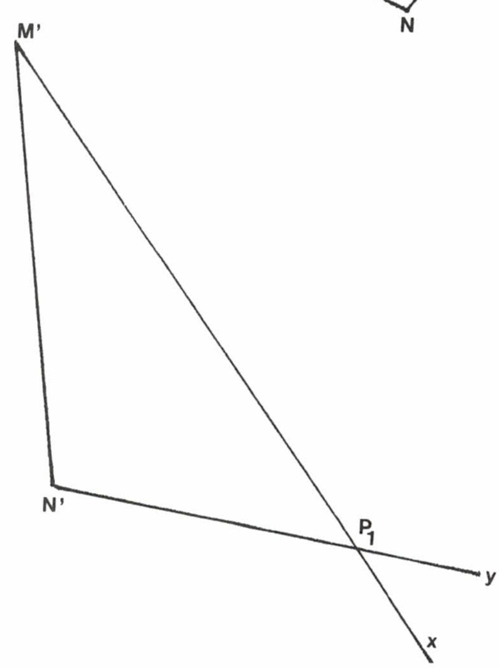
Inversement si deux triangles sont semblables ils ont les mêmes angles .

Considérons en effet deux triangles semblables MNP et M'N'P' . Construisons deux demi-droites M'x et N'y telles que $\widehat{N'M'x} = \widehat{NMP}$ et $\widehat{M'N'y} = \widehat{MNP}$ de telle sorte que P' et ces deux demi-droites soient du même coté de la droite M'N'. Alors ces deux demi-droites se coupent en un point P_1 (*); le triangle $M'N'P_1$ a les mêmes angles que MNP (**), donc (d'après ce que nous avons démontré précédemment) il est semblable à MNP , et aussi à M'N'P' . Donc

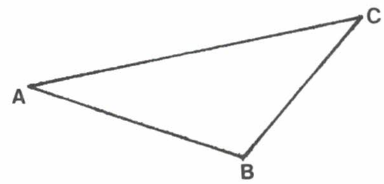
$$\frac{N'P'}{N'P_1} = \frac{M'P'}{M'P_1} = \frac{M'P'}{M'P'} = 1$$

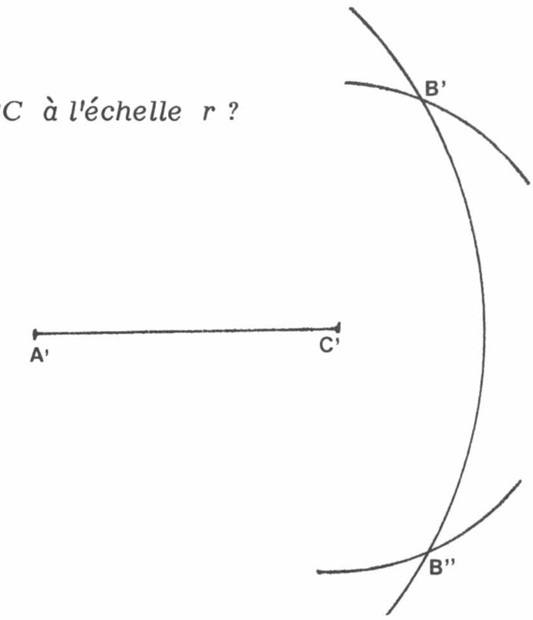
Ainsi $M'P_1 = M'P'$ et $N'P_1 = N'P'$; comme (par construction) P' et P_1 sont du même coté de la droite M'N' , ceci implique (***) que P' et P_1 sont confondus. Donc le triangle M'N'P' et le triangle MNP ont les mêmes angles .





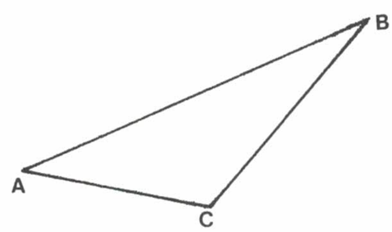
Comment reproduire un triangle ABC à l'échelle r ?

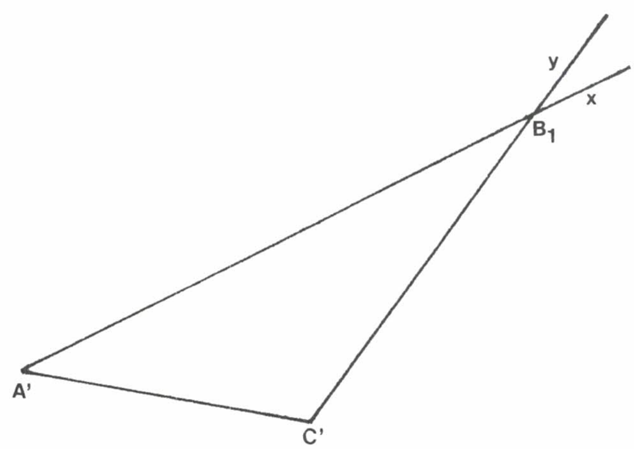




On peut d'abord tracer A' et C' tels que $A'C' = r\ AC$. Puis tracer le cercle de centre A' et de rayon $r\ AB$ et le cercle de centre C' et de rayon $r\ CB$.

Ces deux cercles ont deux points communs B' et B'' qui nous donnent deux triangles semblables à ABC : les triangles $A'B'C'$ et $A'B''C'$.





On peut aussi tracer le même segment $A'C'$ puis tracer (du même coté de la droite $A'C'$) deux demi-droites $A'x$ et $C'y$ telles que :

$$x\widehat{A'C'} = B\widehat{A}C \quad \text{et} \quad y\widehat{C'A'} = B\widehat{C}A$$

Ces deux demi-droites ont un point commun(*) B_1 . Le triangle AB_1C et le triangle ABC sont semblables , puisqu'ils ont les mêmes angles .

☆☆☆ **Exercice 3 :** *Dans le texte qui précède, un certain nombre de points méritent quelques précisions.*

a) *En (*) , explique pourquoi ces deux demi-droites ont un point commun.*

b) *en (**) , explique pourquoi .*

c) *En (***) , explique pourquoi le point $P_1 = P'$.*

III) MESURER LA DISTANCE A LAQUELLE SE TROUVE UN POINT INACCESSIBLE

☆☆ **Exercice 4 :** *Soit un triangle ABC , et supposons qu'on ait mesuré : $AB = 131,5$ m , $\widehat{A} = 77,15°$ et $\widehat{B} = 81,14°$*

Avec ces données tu peux retrouver la longueur AC .

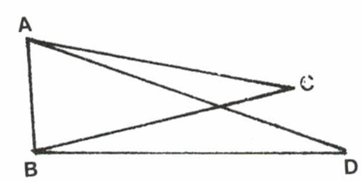
Première méthode : Fais une figure précise à une échelle suffisamment petite pour qu'elle tienne sur la feuille (par exemple $\frac{1}{2000}$ — en dessinant AB assez près de l'un des petits côtés de la feuille) ; puis mesure AC .

*Seconde méthode : Détermine $\widehat{C}$, puis AC et BC grâce à la formule du **I)** .*
*Si tu as étudié le thème " cas d'égalité des triangles " , tu as déjà fait de tels calculs (exercices 1 à 5) , mais directement grâce à tes connaissances en trigonométrie. La formule du **I)** permet des calculs plus rapides.*

On peut ainsi déterminer la distance de A à C , par deux mesures d'angles, et une mesure de longueur, mais sans aller au point C . Tu comprendras facilement qu'une telle méthode peut être précieuse lorsqu'on veut mesurer des distances sur le terrain. Pour en savoir plus tu peux traiter quelques-uns des exercices suivants.

☆☆ **Exercice 5 :** *On peut aussi mesurer la distance séparant deux points inaccessibles.*

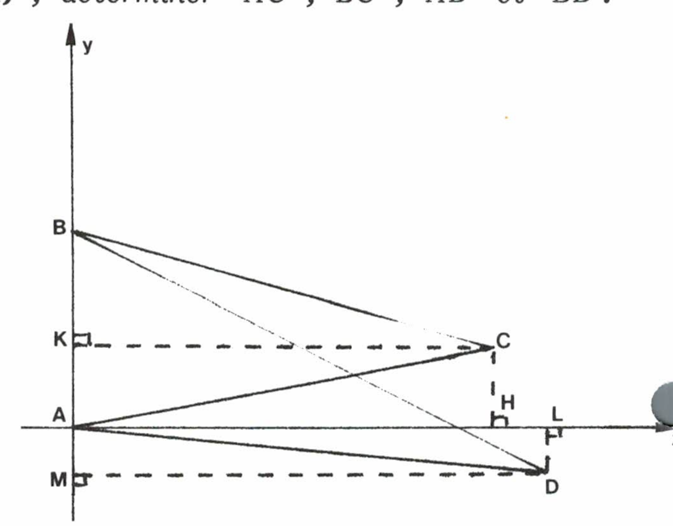
Considérons quatre points situés à peu près comme sur le croquis ci-contre. On a toujours $AB = 131,5$ m, $\widehat{BAC} = 77,15°$, $\widehat{ABC} = 81,14°$. On a $\widehat{DAB} = 61,11°$ et $\widehat{ABD} = 95,17°$. Et on se propose de déterminer la distance CD .



Tu peux d'abord faire un dessin (par exemple à l'échelle $\frac{1}{2000}$) et mesurer sur ce dessin.

*Tu peux aussi grâce à la formule du **I)** , déterminer AC , BC , AD et BD . Mais cela ne suffit pas.*

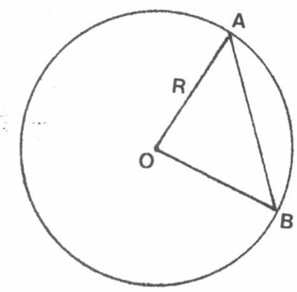
Alors choisis un système d'axes orthonormés, par exemple le système (Ax,Ay) de la figure ci-contre. Calcule alors CH et CK ; puis DL et DM ; c'est-à-dire les coordonnées de C et D . Tu peux alors en déduire la longueur CD .



☆☆☆ **Exercice 6 :** *Essayons de mesurer la distance de la terre à la lune. Pour cela nous allons choisir deux points A et B sur la terre, et un point précis L sur la lune ; et nous essaierons, comme à l'exercice 4, de mesurer AB et les angles $\widehat{ABL}$ et $\widehat{BAL}$.*

1) *Choisissons A et B sur un même méridien, assez éloignés l'un de l'autre ; par exemple A de latitude $45°\ 17'$ Nord et B de latitude $1°\ 11'$ Sud.*

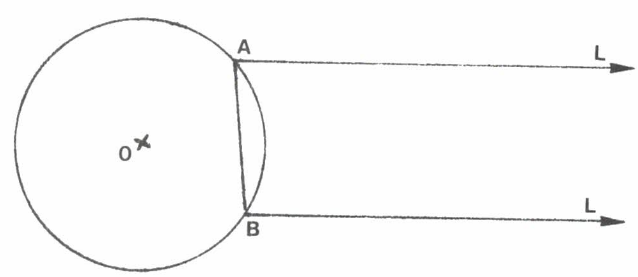
En notant O le centre de la terre, calcule $\widehat{AOB}$, puis la distance AB.



***(Attention :** ce qui nous intéresse c'est la longueur du " segment " AB, et non la longueur de l'arc de méridien AB). On rappelle que la longueur d'un méridien est 20000 km.*

2) *On mesure $\widehat{ABL} = 116°\ 20'$ et $\widehat{BAL} = 62°\ 59'$. Calcule $\widehat{ALB}$ puis BL.*
Imagine une procédure permettant de mesurer les angles $\widehat{ABL}$ et $\widehat{BAL}$ (en utilisant le fait que, si E est une étoile lointaine, AE et BE sont deux droites parallèles).

3) *On suppose que nos mesures d'angles sont faites avec une incertitude de une minute d'arc. Pour évaluer l'erreur que cela peut entraîner sur BL, recommence les calculs de la question précédente avec :*



a) $\widehat{ABL} = 116°\ 21'$ et $\widehat{BAL} = 63°$
b) $\widehat{ABL} = 116°\ 21'$ et $\widehat{BAL} = 62°\ 58'$
c) $\widehat{ABL} = 116°\ 19'$ et $\widehat{BAL} = 63°$
d) $\widehat{ABL} = 116°\ 19'$ et $\widehat{BAL} = 62°\ 58'$

Que constates-tu ? Que penses-tu de l'erreur faite en 2) dans le calcul de BL ?

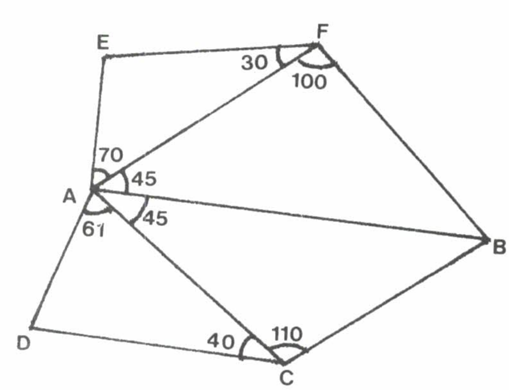
☆☆☆ **Exercice 7 :** *Voici un croquis.*

a) *Fais une figure précise à l'échelle $\frac{1}{7}$ sachant que $AB = 73$ cm.*

b) *Calcule les longueurs AC, AE et AD.*

c) *Calcule EB, ED et BD.*

d) *Que vaut l'angle $\widehat{EBD}$?*



☆☆☆ **Exercice 8 :** *Un triangle ABC est tel que $\widehat{ABC} = 59°$ et $\widehat{BCA} = 42°$, son aire est 17 cm^2.*

- *Comment peux-tu faire pour construire un tel triangle ?*
- *Quelles sont les longueurs des côtés de ce triangle ?*

☆☆☆ **Exercice 9 :** *Dans un triangle ABC on note h_A, h_B et h_C les longueurs des hauteurs issues respectivement de A, B et C ; démontre que :*

$$h_A \sin \hat{A} = h_B \sin \hat{B} = h_C \sin \hat{C}$$

☆☆☆ **Exercice 10 :** *Dans un triangle ABC, les hauteurs issues de A et de B ont même longueur. Démontre que ce triangle est isocèle.*

☆☆☆ **Exercice 11 :** *Dans un triangle ABC, on a $\hat{A} = 20°$ et $b = 2a$. Que vaut l'angle $\hat{C}$?*

◆ Fiche 1 : CALCUL FRACTIONNAIRE I

Nota : Tous les résultats doivent être donnés sous forme fractionnaire.

1

$\frac{1}{3} + \frac{1}{7} =$ $\qquad$ $\frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} =$ $\qquad$ $\frac{1}{5} + \frac{1}{20} + \frac{1}{15} =$

$\frac{2}{3} + \frac{4}{5} =$ $\qquad$ $-\frac{2}{5} + \frac{1}{9} + \frac{1}{4} =$ $\qquad$ $\frac{1}{6} + \frac{2}{15} + \frac{1}{7} =$

$\frac{3}{4} + \frac{5}{8} =$ $\qquad$ $\frac{1}{15} + \frac{1}{10} + \frac{2}{3} =$ $\qquad$ $-\frac{3}{4} + \frac{1}{6} + \frac{5}{8} =$

$-\frac{2}{3} + \frac{1}{6} =$ $\qquad$ $-\frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{3}{7} =$ $\qquad$ $\frac{1}{5} + \frac{2}{25} + \frac{1}{15} =$

$\frac{3}{2} + \frac{1}{4} =$ $\qquad$ $\frac{1}{4} + \frac{3}{10} + \frac{1}{15} =$ $\qquad$ $-\frac{1}{4} + \frac{3}{5} + \frac{1}{10} =$

2

$\frac{1}{3} + \frac{1}{7} - \frac{1}{6} =$ $\qquad$ $2 + 1{,}2 - \frac{1}{4} =$ $\qquad$ $\frac{3}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} =$

$0{,}5 + \frac{1}{4} =$ $\qquad$ $\frac{3}{35} + \frac{2}{21} - \frac{1}{10} =$ $\qquad$ $\frac{2}{35} + \frac{1}{49} - \frac{1}{14} =$

$-1{,}2 + \frac{1}{5} =$ $\qquad$ $-\frac{3}{2} + 0{,}5 - \frac{1}{6} =$ $\qquad$ $-\frac{1}{17} - \frac{2}{51} + \frac{1}{34} =$

$0{,}67 - \frac{2}{3} =$ $\qquad$ $\frac{2}{3} + 0{,}333 =$ $\qquad$ $\frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \frac{5}{18} =$

$-1{,}31 - \frac{4}{3} =$ $\qquad$ $1{,}67 + \frac{1}{3} =$ $\qquad$ $-\frac{1}{36} - \frac{7}{45} + \frac{1}{54} =$

3

$\frac{1}{3} - \frac{2}{7} - \frac{3}{18} =$ $\qquad$ $\frac{6}{5} + 0{,}7 + \frac{1}{4} =$ $\qquad$ $\frac{1}{4} - 0{,}17 + \frac{21}{6} =$

$\frac{2}{5} - \frac{7}{15} + \frac{21}{25} =$ $\qquad$ $-2 + 1{,}11 + \frac{3}{4} =$ $\qquad$ $-0{,}7 - \frac{3}{6} + \frac{1}{4} =$

$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{10}{8} =$ $\qquad$ $\frac{3}{111} + \frac{1}{74} - \frac{1}{4} =$ $\qquad$ $-\frac{2}{11} + \frac{3}{121} - \frac{1}{55} =$

$-0{,}7 - \frac{7}{2} + \frac{6}{4} =$ $\qquad$ $\frac{2}{91} + \frac{1}{13} - \frac{1}{2} =$ $\qquad$ $\frac{10}{17} - \frac{3}{68} + \frac{1}{2} =$

$\frac{10}{14} - \frac{1}{7} + \frac{1}{4} =$ $\qquad$ $\frac{2}{84} - \frac{1}{7} + \frac{10}{21} =$ $\qquad$ $\frac{10}{23} - \frac{3}{92} + \frac{1}{4} =$

4

$\frac{3}{4} \times \frac{5}{4} - \frac{1}{8} =$ $\qquad$ $\frac{2}{3} \times \frac{5}{6} + \frac{1}{9} =$ $\qquad$ $\frac{3}{4} \times \frac{2}{3} + \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} =$

$-\frac{3}{4} \times \frac{2}{9} - \frac{1}{3} =$ $\qquad$ $\frac{3}{7} \times \frac{21}{4} - \frac{3}{4} =$ $\qquad$ $\frac{2}{7} \times \frac{7}{8} - \frac{8}{7} \times \frac{21}{4} =$

$\frac{2}{14} + \frac{3}{5} \times \frac{10}{7} =$ $\qquad$ $-\frac{3}{11} \times \frac{121}{7} + \frac{3}{14} =$ $\qquad$ $\frac{3}{4} - \frac{7}{5} \times \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4}\right) =$

$\frac{3}{21} - \frac{2}{5} \times \frac{10}{7} =$ $\qquad$ $\frac{7}{4} \times \frac{3}{11} - \frac{2}{33} =$ $\qquad$ $-\frac{3}{4} - \frac{7}{8} \times \frac{2}{3} =$

$\frac{3}{7} + \frac{4}{49} \times \frac{7}{6} =$ $\qquad$ $\frac{8}{9} - \frac{2}{3} \times \frac{5}{6} =$ $\qquad$ $-\frac{2}{3} \times \frac{3}{7} - \frac{2}{21} =$

5

$3 \times \frac{4}{6} - \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{\frac{3}{4} - \frac{1}{3}} =$ $\qquad$ $2 \times \frac{5}{3} + \frac{0{,}5 - \frac{1}{3}}{\frac{1}{15} + \frac{1}{2}} =$

$\frac{3}{\frac{2}{5}} - \frac{\frac{2}{3}}{4} + \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{2}} =$ $\qquad$ $\frac{\frac{3}{5}}{\frac{2}{15}} - \frac{2{,}5}{1{,}5 + \frac{3}{4}} =$

$\frac{3}{\frac{2}{7}} - \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{3}} + \frac{\frac{20}{3}}{\frac{5}{6}} =$ $\qquad$ $\frac{3{,}5}{\frac{7}{4}} - \frac{\frac{3}{2}}{0{,}75} =$

$\frac{3{,}75}{\frac{15}{7}} - \frac{7{,}2}{\frac{12}{14}} - \frac{0{,}5}{\frac{4}{3}} =$ $\qquad$ $\frac{13{,}5}{\frac{9}{4}} - \frac{\frac{9}{4}}{13{,}5} =$

6

$\frac{\frac{3}{2} \times \frac{7}{30} - 0{,}5}{0{,}3 - \frac{2}{3} \times 4} =$ $\qquad$ $\frac{0{,}5 - \frac{3}{4}}{2{,}5 - 3 \times \frac{7}{5}} - \frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{6}} =$

$\frac{\frac{3}{4} \times \frac{2}{9} - 3 \times \frac{7}{18}}{3{,}5 - \frac{7}{6}} =$ $\qquad$ $\frac{2 - 3 \times \frac{4}{9}}{3 - \frac{7}{4} \times \frac{2}{3}} + \frac{0{,}5}{\frac{3}{2}} =$

$\frac{2{,}5 - \frac{15}{4} \times 6}{3{,}5 - 4{,}2 \times \frac{3}{2}} =$ $\qquad$ $\frac{0{,}5 + \frac{3}{4}}{\frac{7}{4} - 0{,}25} + \frac{3}{\frac{2}{9}} =$

• *Fiche 2 : PUISSANCES de 10*

(1) Donne l'écriture décimale des nombres :

$1,743 \times 10^{4} =$

$2,3 \times 10^{3} + 1,32 \times 10^{4} =$

$3,7 \times 10^{-4} + 0,31 =$

$3,15 \times 10^{6} + 1,01 \times 10^{7} =$

$5,41 \times 10^{-5} + 1,11 \times 10^{-4} =$

$1,234 \times 10^{-5} + 1,11 \times 10^{-1} =$

$2,43 \times 10^{-4} + 3,47 \times 10^{-1} =$

$3,17 \times 10^{10} + 1,43 \times 10^{4} =$

$2,11 \times 10^{-10} + 1,01 \times 10^{-1} =$

$1,11 \times 10^{-7} + 1,43 \times 10^{4} =$

(2) Donne l'écriture scientifique (nombre décimal ayant un chiffre non nul à gauche de la virgule, multiplié par une puissance de 10) des nombres :

$0,732 + 4,11 \times 10^{-3} =$

$1,11 \times 10^{-5} + 7,43 \times 10^{4} =$

$1,11 \times 10^{-7} + 0,4321 =$

$2,17 \times 10^{16} + 1,17 \times 10^{14} =$

$1,114 \times 10^{14} + 1,17 \times 10^{10} =$

$3,11 \times 10^{5} + 9,63 \times 10^{5} =$

$0,0017 + 4,1 \times 10^{-4} =$

$0,1101 + 3,17 \times 10^{-2} =$

$1,11 \times 10^{-7} + 3,17 \times 10^{-6} =$

$3,11 \times 10^{-5} + 0,0000017 =$

(3) Donne l'écriture décimale et l'écriture scientifique des nombres :

$\dfrac{4,11 \times 10^{-7}}{0,5 \times 10^{-3}} =$

$\dfrac{2,1 \times 10^{-4}}{0,7 \times 10^{4}} =$

$\dfrac{3,4 \times 10^{-5}}{0,17 \times 10^{-7}} =$

$\dfrac{2,1 \times 10^{4}}{3 \times 10^{6}} =$

$\dfrac{3,1 \times 10^{8}}{2,5 \times 10^{-2}} =$

$(2 \times 10^{3})^{2} + (0,3)^{3} =$

$(5 \times 10^{3}) + (3 \times 10^{-1})^{2} =$

$(3 \times 10^{-3})^{2} + (2 \times 10^{2})^{4} =$

$(2 \times 10^{5})^{2} + (3 \times 10^{2})^{2} =$

$(0,04)^{3} + (3 \times 10^{3})^{2} =$

4) On appelle "meilleur arrondi avec 3 chiffres significatifs" de $a,bcde \ldots \times 10^{-n}$:

. le nombre $a,bc \times 10^{-n}$ si $0 \leq d \leq 4$

. le nombre $(a,bc + 0,01) \times 10^{-n}$ si $5 \leq d \leq 9$

Exemples : $1,72341 \times 10^{-n}$ donne $1,72 \times 10^{-n}$

$1,79710 \times 10^{-n}$ donne $1,80 \times 10^{-n}$

Calcule les meilleurs arrondis avec 3 chiffres significatifs de :

$1,37 \times 10^{4} + 1,432 \times 10^{5}$ ...

$\dfrac{1,231 + 10^{-4} + 3,2 \times 10^{5}}{2 \times 10^{-3}}$ ...

$1,372 \times 10^{4} + 1742$ ...

$\dfrac{2,131 \times 10^{4} + 2 \times 10^{-6}}{5 \times 10^{3}}$ ...

$3,24 \times 10^{5}/2,31 \times 10^{-7}$ ...

$\dfrac{2 \times 10^{4} + 3 \times 10^{2}}{7 \times 10^{5} + 3 \times 10^{-6}}$ ...

$0,43 + \dfrac{5,1 \times 10^{-6}}{1,7 \times 10^{4}}$ ...

$\dfrac{3 \times 10^{5} + 2 \times 10^{-5}}{7 \times 10^{-5} + 3 \times 10^{12}}$ ...

5) Calcule les meilleurs arrondis avec trois chiffres significatifs de :

a) $\dfrac{2,01}{3,09}$ ... $\dfrac{2}{3}$ ... $\dfrac{2,09}{3,01}$ ...

b) $\dfrac{4,00}{7,08}$ ... $\dfrac{4,08}{7,00}$ ... $\dfrac{4}{7}$ ...

6) Calcule les meilleurs arrondis avec cinq chiffres significatifs de :

$\dfrac{1,343 \times 10^{71} + 3 \times 10^{-41}}{2 \times 10^{-103}}$

$\dfrac{2,7 \times 10^{41} + 1,5 \times 10^{57}}{4 \times 10^{56}}$

$\dfrac{3,41 \times 10^{-51} + 2,5 \times 10^{63}}{5 \times 10^{153}}$

$\dfrac{3 \times 10^{18} + 5 \times 10^{83}}{2,5 \times 10^{83}}$

$\dfrac{2,5 \times 10^{37} - 3 \times 10^{-56}}{4 \times 10^{93}}$

$\dfrac{3,5 \times 10^{-51} + 7 \times 10^{171}}{3,5 \times 10^{170}}$

(Fiche 3) <u>LES CALCULETTES SCIENTIFIQUES</u>

A TOI DE CHOISIR ...

Il existe quatre types de machines à calculer de poche :

Les machines dites "quatre opérations" . Ce sont les plus simples ; elles permettent de faire les additions, soustractions, multiplications et divisions ; le plus souvent elles donnent les racines carrées.

Les machines dites "scientifiques" . Elles donnent en plus les cosinus , sinus , tangentes , et quelques fonctions que tu ne connais pas encore comme l'exponentielle et le logarithme.

Les machines dites "programmables" . Elles sont identiques aux précédentes, mais elles permettent d'enregistrer les programmes de calcul ; ce qui fait gagner beaucoup de temps lors de calculs répétitifs.

Les "ordinateurs de poche" . Ce sont de véritables ordinateurs, utilisant un langage informatique (le BASIC) .

Pour un élève de seconde, la calculette "quatre opérations" est insuffisante, puisque la trigonométrie figure au programme. Tu dois donc te procurer au moins une calculatrice scientifique. Pour quelques dizaines de francs supplémentaires, tu auras une machine programmable. Mais pour moins de 500 F , on peut acheter un ordinateur de poche dix fois plus performant, et plus facile d'emploi ; si tu envisages des études scientifiques il sera, bien après ta sortie du lycée, un auxiliaire précieux.

Rappelons que lors des examens toutes ces machines sont utilisables ; les seules restrictions sont : fonctionner sur piles, ne pas comporter d'imprimante, et d'être de format inférieur à 21×15 (cm) .

L'essentiel du travail qui va être proposé est prévu pour les calculettes scientifiques (éventuellement programmables) .

ECRITURE D'UN NOMBRE EN NOTATION SCIENTIFIQUE

Lorsqu'un nombre est très petit (en valeur absolue) — par exemple 0,0000171 - ou très grand — par exemple 1 371 200 000 — son écriture comporte souvent beaucoup de zéros. Ceux-ci ne servent qu'à indiquer la place de la virgule. Pour éviter *ces zéros , on écrit ces nombres en notation scientifique : c'est-à-dire sous la forme du produit d'une puissance de 10 (positive ou négative) par un nombre décimal ayant un chiffre et un seul à gauche de la virgule.*

Exemple : $0{,}0000171 = 1{,}71 \times 10^{-5}$

$1\,371\,200\,000 = 1{,}3712 \times 10^{9}$

Les calculatrices scientifiques utilisent cette notation.

A l'affichage : $1{,}71 \times 10^{-5}$ *est écrit* $1{,}71\ E\,{-5}$ *ou* $1{,}71^{-5}$ *(l'exposant étant quelquefois en petits caractères) .*

A la frappe : $1{,}71 \times 10^{-5}$ *s'écrit* $\boxed{1}\boxed{\cdot}\boxed{7}\boxed{1}\boxed{E}\boxed{5}\boxed{+/-}$ *(la touche E est quelquefois marquée* $\boxed{Exp}$ *) .* **Attention** *: employer la touche* $\boxed{+/-}$ *pour écrire le signe " - " du " -5 " , et non la touche* $\boxed{-}$ *qui correspond à la soustraction.*

QU'EST-CE QU'UN PROGRAMME ?

Calculons $(1{,}713)^2 + 3 \times 1{,}713$ *.*

Voici une première méthode *: on tape 1,713 , puis on appuie sur* $\boxed{\times}$ *, puis on tape 1,713 , puis on appuie sur* $\boxed{+}$ *, puis on tape 3 , puis on appuie sur* $\boxed{\times}$ *, puis on tape 1,713 , et enfin on appuie sur* $\boxed{=}$ *. La machine affiche alors 8,073369 .*

Nous venons d'écrire un "programme" permettant de calculer, avec la machine que tu as dans les mains, l'expression $(1{,}713)^2 + 3 \times 1{,}713$ *. On le notera, en abrégé :*

$$\boxed{1{,}713}\boxed{\times}\boxed{1{,}713}\boxed{+}\boxed{3}\boxed{\times}\boxed{1{,}713}\boxed{=}$$

Voici une deuxième méthode *: c'est-à-dire un deuxième programme permettant de calculer* $(1{,}713)^2 + 3 \times 1{,}713$ *:*

$$\boxed{1{,}713}\boxed{x^2}\boxed{+}\boxed{3}\boxed{\times}\boxed{1{,}713}\boxed{=}$$

La touche $\boxed{x^2}$ *nous donne le carré de 1,713 , que nous calculions précédemment par* $\boxed{1{,}713}\boxed{\times}\boxed{1{,}713}$ *.*

Voici une troisième méthode *: c'est-à-dire un troisième programme possible*

$$\boxed{1{,}713}\boxed{+}\boxed{3}\boxed{=}\boxed{\times}\boxed{1{,}713}\boxed{=}$$

Cette fois nous avons calculé d'abord $1{,}713 + 3$ *, et nous avons multiplié le résultat* *obtenu par 1,713 . Nous avons donc calculé (1,713+3) × 1,713 , que nous savons être égal à* $(1{,}713)^2 + 3 \times 1{,}713$ *.*

Ainsi nous serons parfois amenés à transformer algébriquement l'expression à calculer, avant d'écrire un programme.

Voici une quatrième méthode :

$$\boxed{1{,}713}\ \boxed{Min}\ \boxed{+}\ \boxed{3}\ \boxed{=}\ \boxed{\times}\ \boxed{RM}\ \boxed{=}$$

C'est le même calcul que le précédent, mais, pour éviter de taper deux fois 1,713 , nous l'avons conservé en mémoire grâce à $\boxed{Min}$ *(sur certaines machines* $\boxed{STO}$ *) et nous l'avons recherché grâce à* $\boxed{RM}$ *(sur certaines machines* $\boxed{RCL}$ *) .*

Parmi tous ces programmes, certains permettent un calcul plus rapide ; nous les considérerons comme plus performants.

LES MACHINES NE SONT PAS TOUTES IDENTIQUES

Exécutons le programme $\boxed{3}\boxed{+}\boxed{4}\boxed{\times}\boxed{5}\boxed{=}$ *sur une calculette scientifique, nous obtenons 23 (c'est-à-dire 3 + 4 × 5) . Mais si on utilise une machine "quatre opérations" à très bon marché, on obtiendra 35 ? C'est que la machine aura calculé d'abord 3 + 4 , et aura multiplié le résultat obtenu par 5 ; alors qu'une machine plus perfectionnée aura calculé d'abord 4 × 5 , puis ajouté 3 (comme lorsqu'on calcule à la main) .*

Ainsi tout programme est relatif à une machine donnée. Ceci a pour conséquence que tout ce qui est écrit ici ne s'applique peut être pas exactement à la calculette que tu as entre les mains. Les variantes possibles sont :

- *d'abord le changement de nom de certaines commandes (* $\boxed{STO}$ *au lieu de* $\boxed{Min}$ *,...) .*
- *ensuite ta machine a peut être des commandes supplémentaires. A moins qu'elle ne soit privée de certaines commandes décrites ici.*
- *enfin la précision des calculs varie d'une machine à l'autre : en général 8 chiffres, mais quelquefois plus.*

En conséquence le présent texte ne peut en aucun cas remplacer le manuel d'utilisation de la machine. Il est uniquement destiné à te permettre de mieux comprendre.

COMMENT FONCTIONNE LA MACHINE ?

Toute calculatrice, tout ordinateur est constitué :

d'une part d'un microprocesseur ; c'est lui qui calcule.

d'autre part de mémoires, c'est-à-dire de cases dans lesquelles le microprocesseur copie (par des procédés électromagnétiques) les données du calcul, les résultats intermédiaires, et le programme (par exemple le signe + d'une addition non encore effectuée) . Dans un ordinateur il y a des centaines, des milliers,... de mémoires. Dans une calculette il n'y en a que quelques unes, dont un très petit nombre nous intéresse.

Ces mémoires sont de deux sortes :

D'une part celles que le microprocesseur utilise à sa guise, sans que tu puisses intervenir. On les appelle les "registres" de la machine. Dans les manuels d'utilisation elles sont notées x , y , z ,... Le nombre qui est dans x , est, en permanence, recopié sur le cadran. D'autre part une (ou plusieurs) mémoire est à ta disposition, c'est-à-dire que tu peux à tout moment y copier un nombre, ou rechercher le nombre qui s'y trouve. On la notera M (M_1 , M_2 ,... s'il y en a plusieurs).

QUE SE PASSE-T-IL LORSQU'ON FAIT UNE ADDITION ?

Pour calculer 3,1 + 5,31 , on utilise le programme $\boxed{3{,}1}\boxed{+}\boxed{5{,}31}\boxed{=}$. *Voici l'état des mémoires de la machine au cours de ce calcul :*

	3,1	+	5,31	=
x	3,1	3,1	5,31	8,41
y	Rien	3,1	3,1	?
z	Rien	Rien	Rien	Rien
M	Rien	Rien	Rien	Rien
Mémoires opératoires	Rien	+	+	Rien

Lorsqu'on tape 3,1 , ce nombre est écrit dans x (au fur et à mesure de l'écriture) . Lorsqu'on tape $\boxed{+}$, *le signe opératoire est gardé, et le nombre situé dans x est recopié dans y . On tape alors 5,31 qui s'écrit dans x ; et il ne se passe rien, car la machine ne peut savoir si on a fini de taper le second nombre.*
C'est la touche $\boxed{=}$ *qui lui donne l'ordre d'effectuer l'opération. Le résultat se trouve alors dans x (donc aussi sur le cadran) . Ce qui se trouve alors dans y , dépend de la machine ; ce peut être l'ancien contenu de y , ou celui de x , ou encore 0 .*

Lors d'une soustraction, d'une multiplication ou d'une division, le fonctionnement est tout à fait analogue.

LA PRIORITE DES OPERATIONS

Le programme $\boxed{2}\boxed{+}\boxed{3}\boxed{\times}\boxed{4}\boxed{=}$ *, nous permet de calculer* $2 + 3 \times 4$ *. Voici l'état des mémoires au cours de son exécution :*

	2	+	3	×	4	=	
x	2	2	3	3	4	12	14
y	Rien	2	2	3	3	2	?
z	Rien	Rien	Rien	2	2	?	?
M	Rien	Rien	Rien	Rien	Rien	Rien	Rien
Mémoires opératoires	Rien	+	+	× puis +	× puis +	+	Rien

Le début du processus est analogue au précédent. Mais lorsque l'on appuie sur $\boxed{\times}$ *, la machine retient qu'il faudra faire d'abord une multiplication, puis une addition ; en même temps le contenu de* y *est copié dans* z *, et celui de* x *dans* y *(ainsi on pourra écrire le troisième nombre dans* x*) . La touche* $\boxed{=}$ *déclenche l'éxécution. En deux temps. D'abord la machine multiplie* x *par* y *(4 par 3) , écrit le résultat dans* x *et décale le contenu de* z *dans* y *. Puis elle effectue l'addition.*

Les machines les plus élémentaires (c'est-à-dire celles qui coûtent le moins cher) n'ont pas de registre z *. Lorsque l'on tape* $\boxed{\times}$ *, elles effectuent tout de suite l'addition de* x *et de* y *; c'est pourquoi l'exécution de ce même programme donnera* $(2+3) \times 4 = 20$ *.*

Voici un dernier exemple :

	2	×	5	+	3	×	4	=	
x	2	2	5	10	3	3	4	12	22
y	Rien	2	2	10	10	3	3	10	?
z	Rien	Rien	Rien	Rien	Rien	10	10	?	?
M	Rien	Rien	Rien	Rien	Rien	Rien	Rien	Rien	Rien
Mémoires opératoires	Rien	×	×	+	+	× puis +	× puis +	+	Rien

LES FONCTIONS PREPROGRAMMEES

La touche $\boxed{\sqrt{}}$: pour obtenir $\sqrt{17}$ on tape $\boxed{17}$ puis $\boxed{\sqrt{}}$. Le fait d'appuyer sur $\boxed{\sqrt{}}$ met en œuvre un programme (assez compliqué) qui calcule la racine carrée du nombre qui se trouve dans x (et met le résultat obtenu dans x). C'est une fonction préprogrammée de la machine. Il y en a d'autres.

Voici les principales :

La touche $\boxed{x^2}$: donne le carré (du nombre qui est dans x).

La touche $\boxed{\sqrt[3]{}}$: donne la racine cubique (du nombre qui est dans x). Rappelons que $\sqrt[3]{a} = b$ signifie $a = b^3$.

La touche $\boxed{1/x}$: donne l'inverse (du nombre qui est dans x).

La touche $\boxed{\cos}$: donne le cosinus. La machine utilise les trois unités d'angles : degré, radian, grade. Si tu veux calculer $\cos 18°$, tu commences par sélectionner l'unité "degré" (grâce à la touche marquée $\boxed{DRG}$) puis tu tapes $\boxed{18}\boxed{\cos}$.

De même pour le calcul du sinus ou de la tangente.

La touche $\boxed{Inv}\boxed{\cos}$ (notée quelquefois $\boxed{\cos^{-1}}$ ou encore $\boxed{Sec}\ \boxed{\cos}$) permet de calculer l'angle dont le cosinus est le nombre situé dans x. Pour connaître l'angle dont le sinus est 0,5, tu tapes donc $\boxed{0,5}\boxed{Inv}\boxed{\cos}$, et tu obtiens 60 (si la machine est réglée sur "degré").

De même pour le sinus ou la tangente.

La touche $\boxed{x^y}$: pour calculer 2^3, tu peux taper $\boxed{2}\boxed{\times}\boxed{2}\boxed{\times}\boxed{2}\boxed{=}$, mais aussi $\boxed{3}\boxed{x^y}\boxed{2}\boxed{=}$. Lorsque tu tapes $\boxed{x^y}$, le nombre qui était dans x, est recopié dans y ; puis tu tapes 2, l'état des registres est alors $x = 2$, $y = 3$; et lorsque tu appuies sur $\boxed{=}$, la machine effectue l'opération x^y, c'est-à-dire 2^3. Sur certaines machines cette touche est remplacée par une touche $\boxed{y^x}$; pour calculer 2^3 il faut alors taper d'abord le 2 puis le 3.

Tu remarqueras que pour $(-2)^3$ la machine affiche le signal d'erreur (alors que $(-2)^3 = -8$). Ceci est dû à la méthode de calcul qu'elle utilise : elle ne donne pas les puissances des nombres négatifs.

Les touches $\boxed{\ln}$, $\boxed{\log}$, $\boxed{e^x}$ correspondent à des fonctions que tu ne connais pas encore.

LA (OU LES) MEMOIRES (S)

Une mémoire est à ta disposition pour stocker une donnée ou un résultat partiel que tu dois réutiliser plus tard. Elle est accessible par divers types de touches :

$\boxed{Min}$ *(quelquefois* $\boxed{STO}$ *) recopie dans* M *le nombre qui était dans* x *. Donc* $\boxed{1{,}7}\,\boxed{Min}$ *nous donne* $x = 1{,}7$ *et* $M = 1{,}7$ *.*

$\boxed{MR}$ *(quelquefois* $\boxed{RCL}$ *) recopie dans* x *le nombre qui était dans* M *. Donc si* $x = 3{,}1$ *et* $M = 2{,}7$ *, et si on appuie sur* $\boxed{MR}$ *on obtient* $x = 2{,}7$ *et* $M = 2{,}7$ *.*

Mais d'autres touches permettent quelquefois de modifier le contenu de M *. Citons* $\boxed{M+}$ *(ou* $\boxed{STO+}$ *) qui ajoute au contenu de* M *, le contenu de* x *. Par exemple, si* $M = 2{,}7$ *et* $x = 3{,}1$ *,* $\boxed{M+}$ *donne* $M = 5{,}8$ *et* $x = 3{,}1$ *.*

De même $\boxed{M-}$ *.*

Enfin certaines machines possèdent des touches permettant d'échanger le contenu de deux mémoires. Par exemple $\boxed{x \leftrightarrow y}$ *fait passer de* $x = 2$ *et* $y = 3$ *à* $x = 3$ *et* $y = 2$ *. On trouve aussi* $\boxed{x \leftrightarrow M}$ *et* $\boxed{y \leftrightarrow M}$ *. Ces touches sont parfois notées* $\boxed{Exch}$ *.*

Dans les machines qui possèdent plusieurs mémoires M_1 *,* M_2 *,... (en particulier dans les machines programmables) , les commandes sont analogues ; mais pour chacune d'elles , il faut préciser le numéro de la case mémoire que l'on utilise.*

ET AUSSI ...

La plupart des machines scientifiques permettent de calculer des expressions munies de parenthèses. N'oublie pas de fermer les parenthèses qui ont été ouvertes !

◆ *Fiche 3 :* LES CALCULETTES SCIENTIFIQUES

(1) Donne trois programmes de calcul de chacune des expressions suivantes :

$3^4 + 7 \times 3$ puis $(1{,}713)^4 + 7 \times 1{,}713$

$2^2 + \frac{1}{2}$ puis $(3{,}171)^2 + \frac{1}{3{,}171}$

$3\pi + \frac{1}{3^2}$ puis $3{,}17\pi + \frac{1}{(3{,}17)^2}$

$5^3 + 3 \times 5^2 + 5$ puis $(5{,}11 \times 10^{-4})^3 + 3 \times (5{,}11 \times 10^{-4})^2 + 5{,}11 \times 10^{-4}$

$7^4 + 7^2 + 1$ puis $(2{,}17 \times 10^{-3})^4 + (2{,}17 \times 10^{-2})^2 + 1$

(2) Pour chacune des expressions suivantes, donne un programme de calcul, en essayant de prévoir (sans utiliser la machine) ce qu'à chaque étape, on va lire sur le cadran :

$3 \times 7 + 2$ $\qquad$ $2 \times 8 + 3 \times 5$

$3 \times 0{,}1 + 2 \times 10^{-2} + 4{,}11 \times 10^{-7}$

$\frac{7}{4} \times 3$ $\qquad$ $\frac{3}{4} + \frac{7}{8}$

(3) Voici des programmes de calcul. Peux-tu, sans utiliser la machine :

. prévoir ce qu'à chaque étape, on va lire sur le cadran.

. retrouver l'expression algébrique que l'on va ainsi calculer :

$\boxed{4}\ \boxed{\times}\ \boxed{3}\ \boxed{-}\boxed{2}\ \boxed{\times}\ \boxed{7}\ \boxed{=}$

$\boxed{4}\ \boxed{\times}\ \boxed{3}\ \boxed{-}\boxed{2}\ \boxed{=}\ \boxed{\times}\ \boxed{7}\ \boxed{=}$

$\boxed{4}\ \boxed{\times}\ \boxed{3}\ \boxed{=}\boxed{-}\ \boxed{2}\ \boxed{\times}\ \boxed{7}\ \boxed{=}$

$\boxed{3}\ \boxed{-}\ \boxed{2}\ \boxed{\div}\boxed{5}\ \boxed{=}\ \boxed{\times}\ \boxed{3}\ \boxed{=}$

$\boxed{3}\ \boxed{-}\ \boxed{2}\ \boxed{=}\boxed{\div}\ \boxed{5}\ \boxed{\times}\ \boxed{3}\ \boxed{=}$

$\boxed{2}\ \boxed{+}\ \boxed{3}\ \boxed{-}\boxed{4}\ \boxed{\times}\ \boxed{7}\ \boxed{=}$

(4) Ecris des programmes de calcul des expressions suivantes, en t'efforçant de trouver le plus rapide :

$$\frac{\frac{3}{1{,}71} + 2{,}11}{\frac{2}{3{,}15} + 3{,}11} \qquad \frac{17{,}1 + 3 \times 10^{-3}}{5{,}3 \times 10^{7} - 2{,}1 \times 10^{6}}$$

$(\frac{2}{1{,}7} + 3{,}15) \times (2{,}15 - 3{,}15) \times (3{,}17 - 0{,}41)$

$(2{,}11 \times 10^{-7} + 3{,}4 \times 10^{-6})(2{,}17 \times 10^{4} - 2{,}1 \times 10^{3})$

$(3{,}17 \times 10^{-4} - 2{,}11 \times 10^{-5})/(2{,}11 \times 10^{-3} + 0{,}11)$

(5) Ecris des programmes de calcul des expressions suivantes :

$$(\cos 37°)^3 - \cos(2\times 37°)$$

$$\cos 78° + \cos 37 \text{ rad}$$

$$\sin 75\text{gr} - \cos 22{,}5°$$

$$\sqrt{1+(3{,}1)^2} - \sqrt{1-(3{,}1)^2\times 10^{-4}}$$

$$\frac{1}{\cos 17°} - \frac{2}{\cos 34°}$$

(6) Calcule x dans les cas suivants :

$\cos(x°) = 0{,}1$

$\tan(x \text{ rad}) = 2{,}1$

$\sin(x°) = 0{,}17$

$\sin(x \text{ gr}) = 0{,}11$

(7) Voici des programmes de calcul. Tu dois pouvoir :

- retrouver l'expression qu'ils permettent de calculer.
- donner les contenus successifs des mémoires x , y , z , M au cours de ce calcul

$\boxed{3}\ \boxed{+}\ \boxed{5}\ \boxed{\times}\ \boxed{7}\ \boxed{=}$

$\boxed{3}\ \boxed{+}\ \boxed{5}\ \boxed{=}\ \boxed{\times}\ \boxed{7}\ \boxed{+}\boxed{3}\ \boxed{=}$

$\boxed{3}\ \boxed{\times}\ \boxed{4}\ \boxed{+}\ \boxed{5}\ \boxed{\times}\ \boxed{6}\ \boxed{=}$

$\boxed{3}\ \boxed{\text{Min}}\ \boxed{\times}\ \boxed{7}\ \boxed{+}\ \boxed{9}\ \boxed{-}\boxed{\text{MR}}\ \boxed{=}$

$\boxed{3}\ \boxed{+}\ \boxed{4}\boxed{\text{Min}}\ \boxed{+}\ \boxed{7}\boxed{-}\ \boxed{\text{MR}}\ \boxed{=}$

$\boxed{3}\ \boxed{\text{Min}}\ \boxed{+}\ \boxed{7}\ \boxed{=}\boxed{\text{M+}}\ \boxed{-}\ \boxed{\text{MR}}\ \boxed{=}$

(8) Voici des expressions. Pour chacune d'elles tu dois pouvoir écrire :

- un programme utilisant les parenthèses mais pas la mémoire.
- un programme utilisant la mémoire mais pas les parenthèses.

$$(3{,}11 + 2{,}43\times 2{,}17)(7{,}31\times 3{,}14 - 0{,}17)$$

$$(2{,}17 - 0{,}43\times 7{,}2)/(2{,}43 - 0{,}71\times 2{,}3 - 0{,}71\times 2{,}3\times 10^{-4})$$

$$(3{,}17 - 0{,}43/2{,}16) + \frac{2{,}41-0{,}7\times 10^{-2}}{2{,}11-3{,}1\times 10^{-4}}$$

$$(3{,}11 - 0{,}43\times 2{,}17)\left(\frac{3{,}1}{2{,}4-3/4}\right)$$

$$(\cos 17° + \cos 33°)\left(\frac{1}{\sin 17°} + \frac{1}{\sin 33°}\right)$$

$$(\tan 12° - \tan 31°)\times\frac{\cos 37°}{\cos 37° - \cos 2°}$$

CHAPITRE II

LE CALCUL LINEAIRE

série 1 : Fonctions affines et équations de droites
série 2 : Problèmes à une inconnue
série 3 : Systèmes d'équations et d'inéquations

thème : Interpolation linéaire
thème : Programmation linéaire

fiche 4 : Calcul fractionnaire 2
fiche 5 : Equations linéaires 1
fiche 6 : Pourcentages

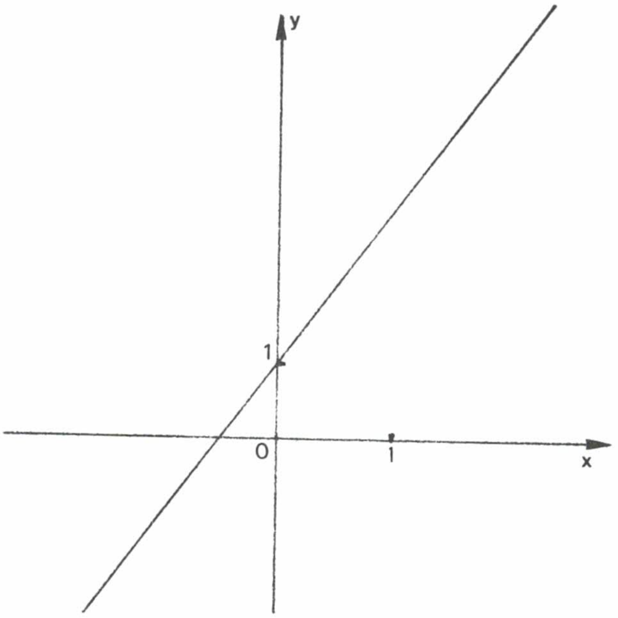
Série 1 : FONCTIONS AFFINES ET EQUATIONS DE DROITES

REPRESENTATION GRAPHIQUE DES FONCTIONS AFFINES

A tout nombre x associons le nombre $f(x) = 2x + 1$; nous avons ainsi défini une fonction affine. De façon générale, une fonction affine est une correspondance de la forme $x \to ax + b$; elle est définie par deux nombres :

- *le nombre b qui est la valeur de la fonction pour $x = 0$,*
- *le nombre a qui est appelé le " taux d'accroissement " ou le " coefficient directeur " .*

A toute fonction $x \to f(x)$ nous associerons un objet géométrique : son graphique. Pour cela choisissons un repère orthogonal $(0x,0y)$; le graphique de $x \to f(x)$ (dans ce repère) est l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que $y = f(x)$.



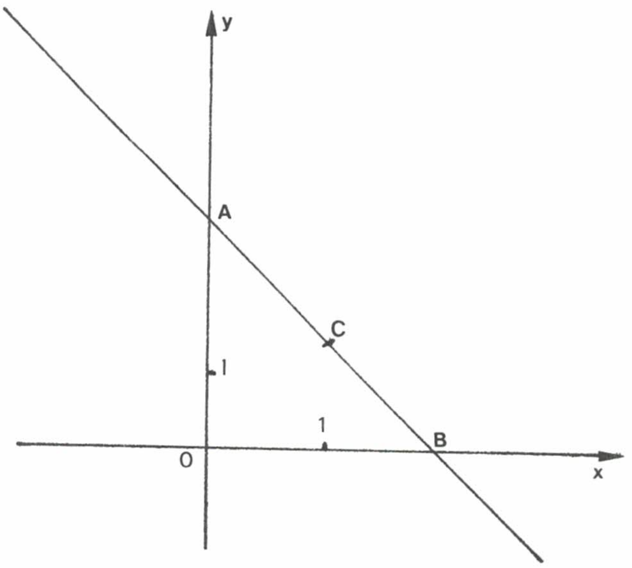
L'étude des graphiques des fonctions sera faite dans la séquence 5 (et dans les classes ultérieures !) ; nous n'étudierons ici que les graphiques des fonctions affines ; ce sont des droites. Ceci a été démontré en classe de troisième ; nous n'y reviendrons pas. Ainsi, pour tracer le graphique d'une fonction affine, il nous suffit d'en trouver deux points.

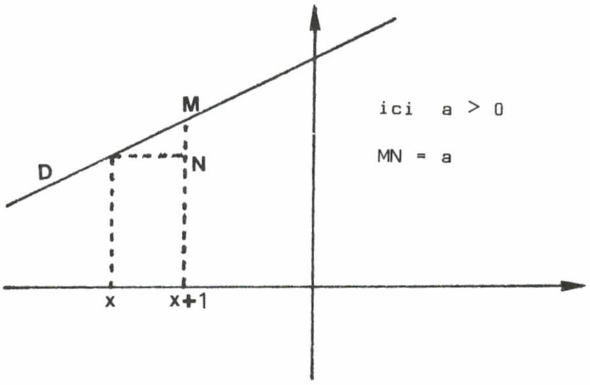
Tracé du graphique de :

$$x \to f(x) = -1,5x + 3$$

Pour $x = 0$, $f(x) = 3$; donc $A(0;3)$ est sur le graphique. Pour $x = 2$, $f(x) = 0$, donc $B(2;0)$ est sur le graphique. Le graphique est la droite AB .

<ins>Vérification</ins> : $f(1) = 1,5$, donc $C(1;1,5)$ est sur le graphique ; c'est clair sur la figure.

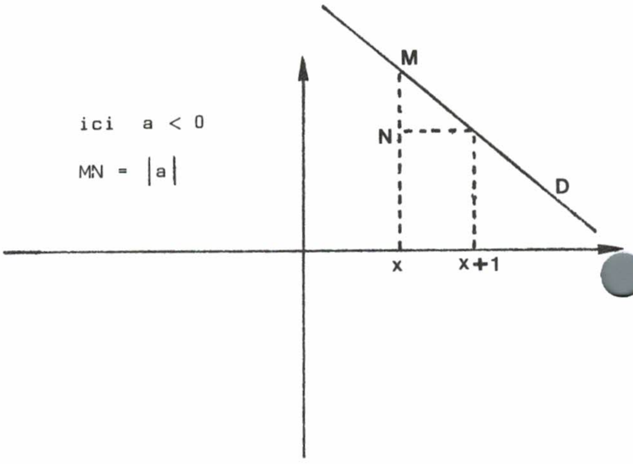




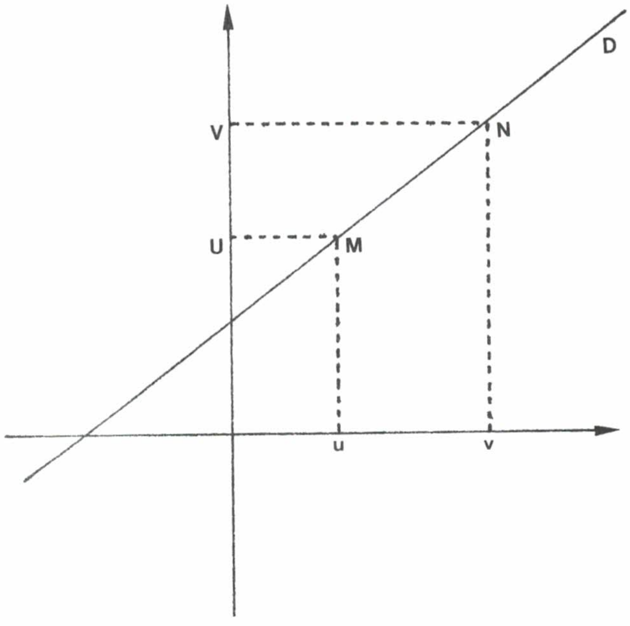
***Vocabulaire* : Dans la formule :**

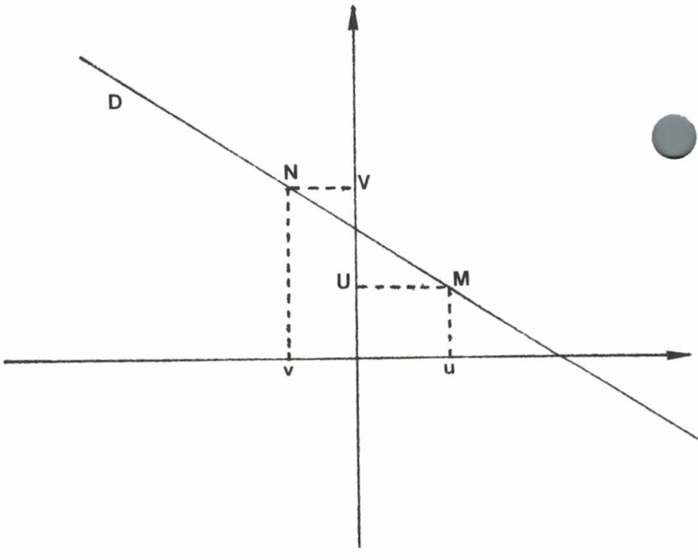
$$f(x) = ax + b$$

le nombre a s'appelle le coefficient directeur. (Quand le graphique est un repère orthonormé, on dit aussi la " pente ") *. Le coefficient directeur peut être mesuré sur le dessin (figures ci-contre).*



Si D a pour équation $y = ax + b$, alors sur les figures ci-dessous : $U = au + b$ et $V = av + b$.





Donc $V - U = av - au = a(v - u)$.

Ce qui s'écrit aussi $a = \dfrac{V-U}{v-u}$, et nous donne une formule pour calculer le coefficient directeur d'une droite dont on connaît deux points.

EQUATIONS DE DROITES

Donnons-nous un plan muni d'un repère. Donnons-nous trois nombres u, v, w (pour que ce qui suit ait un sens, nous supposerons que u et v ne sont pas tous deux nuls). Et cherchons les points $M(x,y)$ tels que $ux + vy + w = 0$.

Un exemple : Cherchons les points $M(x,y)$ tels que $2x - y + 3 = 0$.

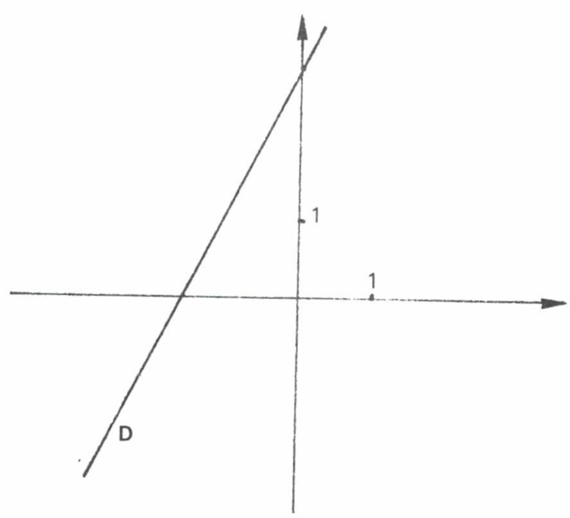
Si x et y sont deux nombres tels que $2x - y + 3 = 0$, alors on a aussi $y = 2x + 3$. Inversement, si deux nombres x et y sont tels que $y = 2x + 3$, on aura aussi $2x - y + 3 = 0$. Autrement dit les points $M(x,y)$ tels que $2x - y + 3 = 0$, sont les mêmes que ceux tels que $y = 2x + 3$. Nous exprimerons ceci en disant que les deux "équations" (on dit aussi "relations") $2x - y + 3$ et $y = 2x + 3$ sont équivalentes.

Nous savons que les points M tels que $y = 2x + 3$ sont les points du graphique de la fonction affine :

$$x \to f(x) = 2x + 3$$

c'est-à-dire les points d'une droite D.

Nous dirons que "$2x - y + 3 = 0$" est une équation de cette droite D (dans le repère choisi).



De façon générale, les points $M(x,y)$ tels que $ux + vy + w = 0$ sont les points d'une droite D. Nous dirons que D est la droite d'équation $ux + vy + w = 0$.

Deux cas sont possibles :

premier cas : *Si v est non nul : les équations :*

$$ux + vy + w = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{u}{v}x + y + \frac{w}{v} = 0$$

sont équivalentes (au sens décrit dans l'exemple : les points $M(x,y)$ qui vérifient l'une, vérifient aussi l'autre). De même :

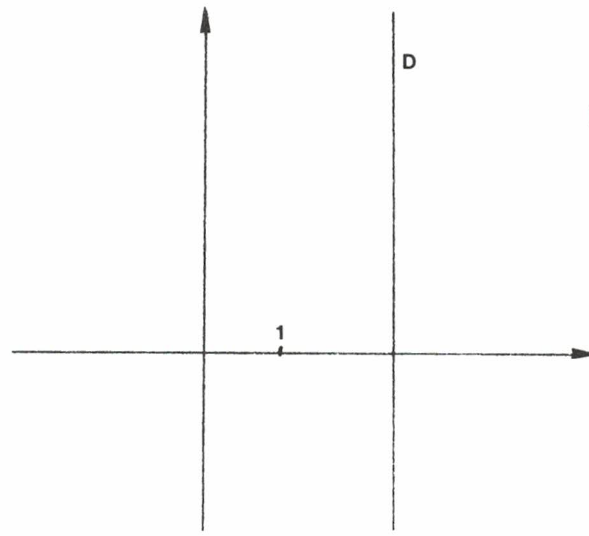
$$\frac{u}{v}x + y + \frac{w}{v} = 0 \qquad \text{et} \qquad y = -\frac{u}{v}x - \frac{w}{v}$$

sont équivalentes. Et donc les points $M(x,y)$ tels que $ux + vy + w = 0$ sont les points du graphique de la fonction affine $x \to f(x) = -\frac{u}{v}x - \frac{w}{v}$ (cf : l'exemple ci-dessus).

deuxième cas : *Si $v = 0$. Alors l'équation :*

$$ux + vy + w = 0$$

se réduit à $ux + w = 0$. Et, puisque $u \neq 0$ (nous avons supposé que u et v n'étaient pas tous deux nuls), ceci équivaut à $x = -\frac{w}{u}$. Donc les points considérés sont ceux qui ont pour abscisse $-\frac{w}{u}$. Ils forment une droite parallèle à Oy.



D est l'ensemble des points tels que

$$2x - 5 = 0$$

(c'est-à-dire $x = \frac{5}{2}$)

Remarque : *Les équations $ux + vy + w = 0$, $2ux + 2vy + 2w = 0$, $-ux - vy - w = 0$, $-3x - 3y - 3w = 0$,... sont toutes équivalentes. De façon générale, si $r \neq 0$, les deux équations $ux + vy + w = 0$ et $rux + ruy + rw = 0$ sont équivalentes. Ainsi une droite donnée n'a pas une seule équation, elle en a une infinité.*

Nous venons de voir que parmi toutes les équations d'une même droite D il en existe :

- ***soit une qui s'écrit $y = ax + b$ (si D non parallèle à Oy),***
- ***soit une qui s'écrit $x = c$ (si D parallèle à Oy).***

On l'appellera l'équation réduite de D.

Remarque : *Deux droites sont parallèles si et seulement si elles ont même coefficient directeur.*

Première série d'exercices :

REPRESENTATION GRAPHIQUE D'UNE FONCTION AFFINE
COEFFICIENT DIRECTEUR ET PENTE D'UNE DROITE

☆ **Exercice II_1 :** *On fera la figure en axes orthonormés (unité 1 cm).*

a) *Le graphique de la fonction* $y = 2x + 1$ *est une droite* D_1. *Détermine deux points de cette droite, puis trace-la. Quelle est sa pente ?*

b) *Trace de même le graphique de* $y = 3x - 4$.

c) *Trace de même le graphique de* $y = -x + 2$.

d) *Trace de même le graphique de* $y = 1,16x + 0,41$.

e) *Trace de même le graphique de* $y = -0,2x + 0,7$.

☆ **Exercice II_2 :** *On fera la figure en axes orthogonaux (unités : 2 cm en abscisse et 1 cm en ordonnée).*

a) *Place les points* $K\ (1;3)$ *et* $L\ (2;7)$. *Trace la droite* D_1 *passant par* K *et* L. *Quel est son coefficient directeur ? Quelle est son équation réduite ?*

b) *Mêmes questions pour la droite* D_2 *passant par* $M\ (2;-1)$ *et* $N(4;5)$.

c) *Mêmes questions pour la droite* D_3 *passant par* $P\ (3;7)$ *et* $Q\ (4;2)$.

d) *Mêmes questions pour la droite* D_3 *passant par* $R\ (0,7;3,2)$ *et* $S\ (0,95;6,6)$.

e) *Mêmes questions pour la droite* D_4 *passant par* $T\ (0,1;1,4)$ *et* $W\ (-6,6;2,9)$.

☆ **Exercice II_3 :** *Axes orthonormés. (Unité 1,5 cm).*

Dans chacun des exercices suivants, trace la droite D, *détermine la pente de* D, *donne l'équation réduite de* D.

a) D *passe par* $M\ (1;3)$ *et* $N\ (4;-1,2)$.

b) D *passe par* $A\ (1;6)$ *et est parallèle à la droite d'équation* $x - y = 7$.

c) D *passe par l'origine et est parallèle à la droite d'équation* $3x - 2y = 4$.

d) D *passe par* $B\ (1;6,3)$ *et* $C\ (2,4;-6,6)$.

e) D *passe par* $P\ (-2;4)$ *et est parallèle à la droite qui passe par* $Q\ (-2;1)$ *et* $R\ (0;-4)$.

☆ **Exercice II_4** : *On fera une figure dans des axes orthogonaux (unités : 2,5 cm en abscisse et 1,5 cm en ordonnée).*

a) *On considère les points $A(1;3)$ et $B(2;-3)$. Détermine l'équation réduite de la droite AB. Détermine le point C de la droite AB dont l'ordonnée est -1,2. Détermine le point D de la droite AB dont l'abscisse est 1,7.*

b) *On considère les points $M(1,7;2,3)$ et $N(2,4;-1,2)$. Détermine les points P et Q de la droite MN, dont les ordonnées sont 5,8 et 4,5.*

☆ **Exercice II_5** : *On fera une figure en axes orthonormés (unité 1,5 cm).*

On donne les points $A(1,3;2,5)$, $B(3,4;-1,2)$ et $C(-2;-1,5)$.

a) *Dessine le point C' de la droite AB dont l'abscisse est 2,7. Quelles sont ses coordonnées ? Quelle est l'équation réduite de la droite CC' ?*

b) *Dessine le point A' de la droite BC, dont l'ordonnée est -1,3. Quelles sont les coordonnées de A' ? Quelle est l'équation réduite de la droite AA' ?*

c) *On note M l'intersection des droites AA' et CC'. Démontre que B, M et le milieu du segment AC sont alignés.*

☆☆ **Exercice II_6** : *On fera une figure en axes orthonormés (unité 2,5 cm).*

Soit $A(3\,;\,2,5)$ et $B(4;4)$.

a) *On note C le point du segment AB d'abscisse 3,7. Détermine l'ordonnée de C. Peux-tu le faire sans déterminer d'abord une équation de la droite AB ?*

b) *On note D le point d'ordonnée 3,4 de la droite AB. Détermine l'abscisse de D. Peux-tu le faire sans déterminer d'abord une équation de la droite AB ?*

☆☆ **Exercice II_7** : *Les points M, N, P ont pour coordonnées respectives $(1;3)$, $(4;6)$ et $(-3;1)$. Peux-tu, sans faire la figure, dire s'ils sont alignés ?*

☆☆ **Exercice II_8** : *Les points A, B, C, D ont pour coordonnées respectives $(1;0)$, $(-3;2)$, $(4;-5)$ et $(-3;1)$. Peux-tu, sans faire la figure, dire si les droites AB et CD sont parallèles ?*

☆☆ **Exercice II_9** : Les points A et B ont pour coordonnées respectives $(1;3)$ et $(-4;2)$.

a) Démontre que, quel que soit t, le point $M(1 + 5t , 3+t)$ est sur la droite AB.

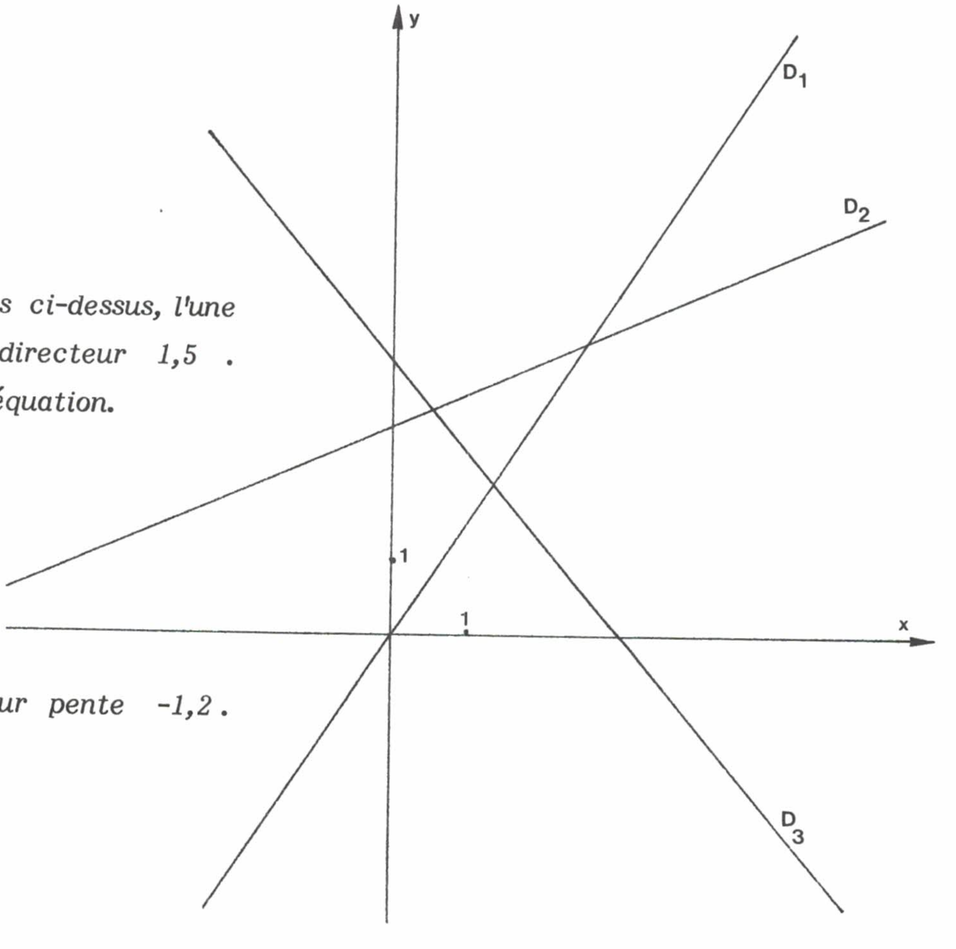
b) Comment faut-il choisir t pour que M soit aussi sur la droite DC, où $D(2;5)$ et $C(1;-3)$?

☆☆ **Exercice II_{10}** : Les points A, B, C ont pour coordonnées respectives $(1;4)$, $(3;2)$ et $(0;1)$. Démontre, sans faire la figure, qu'ils ne sont pas alignés.

☆☆ **Exercice II_{11}** : Les points A, B, C et D ont pour coordonnées respectives $(1;4)$, $(3,3)$, $(2;7)$ et $(4;6)$. Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?

☆☆ **Exercice II_{12}** : Le quadrilatère $A(1;4)$, $B(3;7)$, $C(-3;3)$, $D(-2;3)$ est-il un trapèze ?

☆ **Exercice II_{13}** :

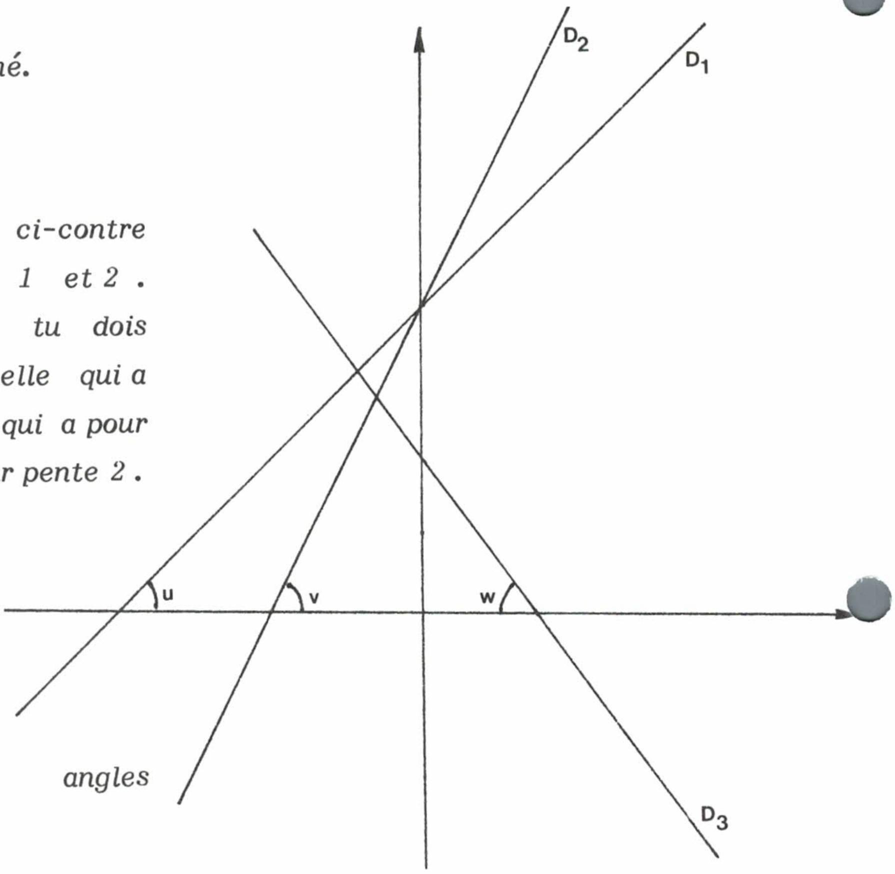


Parmi les droites ci-dessus, l'une a pour coefficient directeur 1,5. Laquelle ? Donne son équation.

Une autre a pour pente −1,2. Laquelle ?

☆☆ ***Exercice II_{14} :***

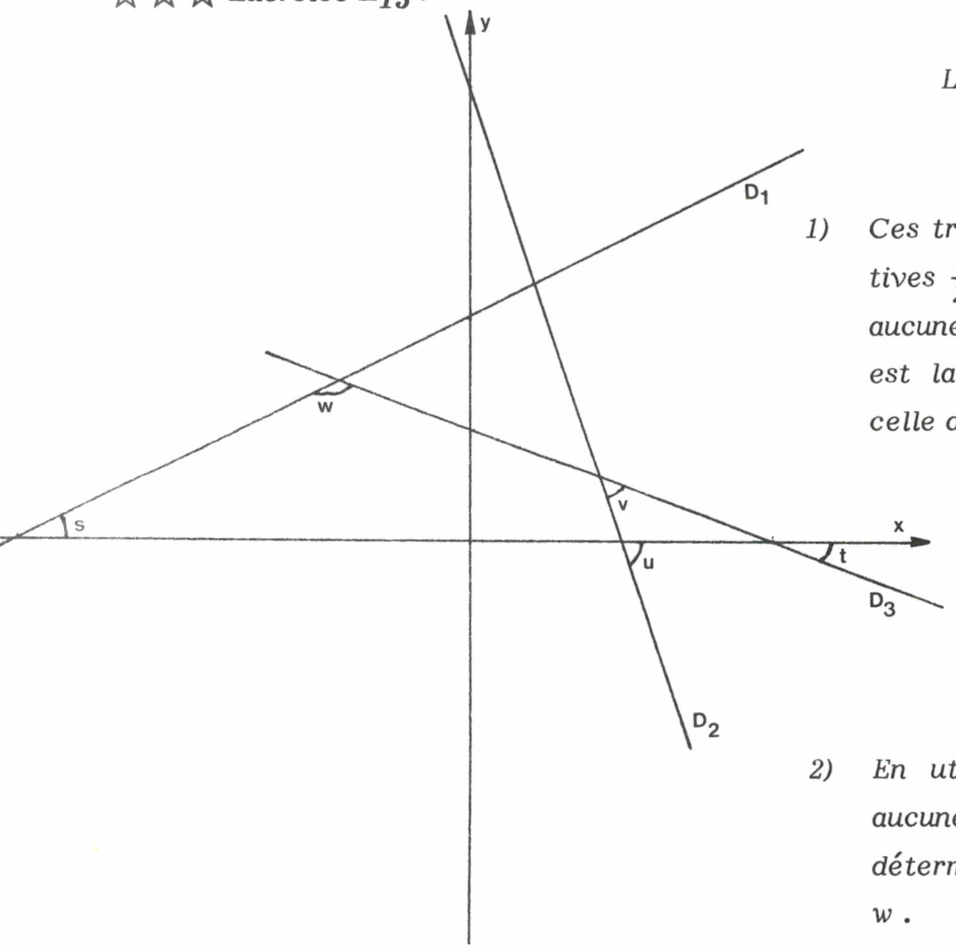
Le repère est orthonormé.



1) *Les droites dessinées ci-contre ont pour pentes* $-\frac{4}{3}$, 1 *et* 2 . *Sans aucune mesure, tu dois pouvoir déterminer celle qui a pour pente* $-\frac{4}{3}$, *celle qui a pour pente* 1 , *celle qui a pour pente* 2 .

2) *Détermine les angles* u , v *et* w .

☆☆☆ ***Exercice II_{15} :***

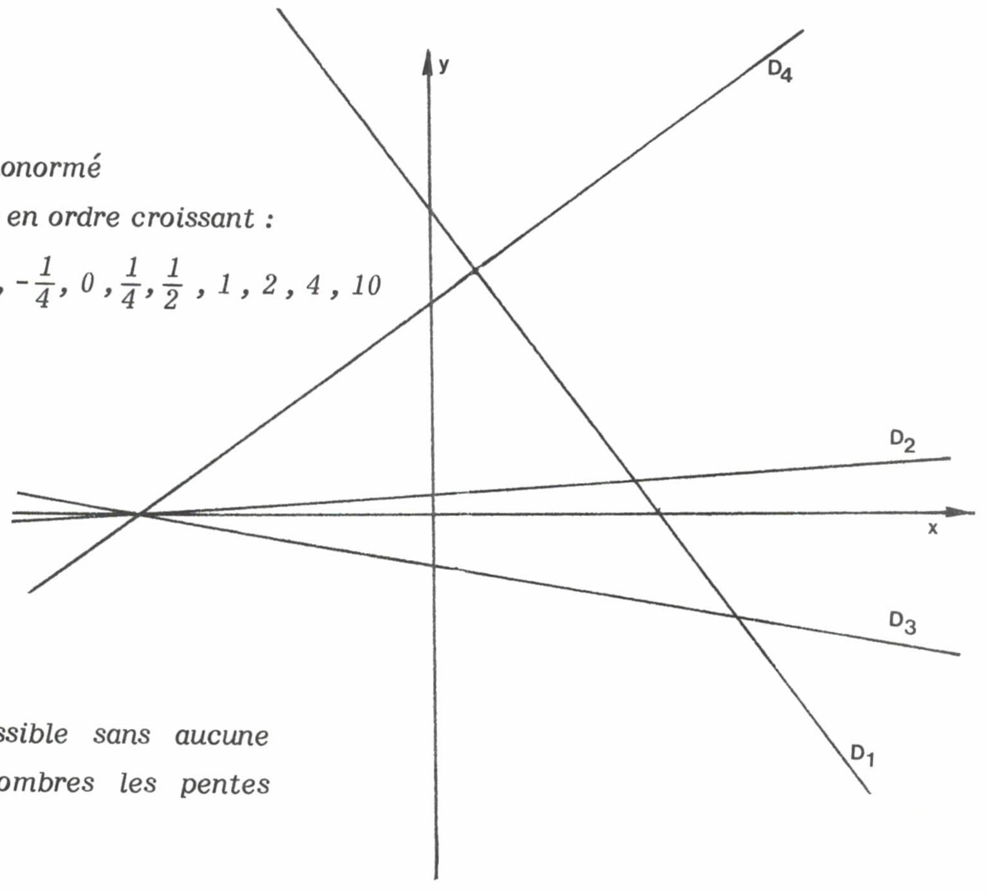


Le repère est orthonormé.

1) *Ces trois droites ont pour pentes respectives* $\frac{1}{2}$, -3 *et* $-\frac{3}{8}$. *Sans faire aucune mesure, peux-tu dire quelle est la pente de* D_1 ? *celle de* D_2 ? *celle de* D_3 ?

2) *En utilisant ta calculette (mais sans aucune mesure au rapporteur), détermine les angles* s , t , u , v *et* w .

☆☆ *Exercice II_{16} :*



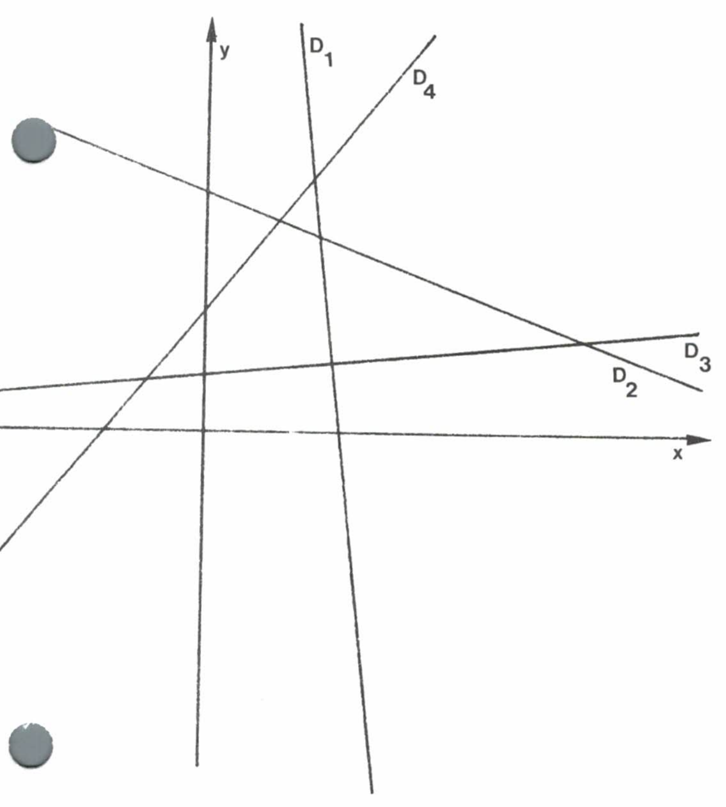
Le repère est orthonormé

Voici des nombres en ordre croissant :

$-10\,,\,-4\,,\,-2\,,\,-1\,,\,-\frac{1}{2},\,-\frac{1}{4},\,0\,,\frac{1}{4},\frac{1}{2}\,,\,1\,,\,2\,,\,4\,,\,10$

Intercale (si possible sans aucune mesure) parmi ces nombres les pentes de D_1, D_2, D_3 et D_4.

☆☆ *Exercice II_{17} :*



Le repère est orthonormé.

Voici des nombres en ordre croissant :

$-10\,;\,-4\,;\,-2\,;\,-1\,;\,-\frac{1}{2}\,;\,0\,;\,\frac{1}{2};\,1\,;\,2\,;\,4\,;\,10$

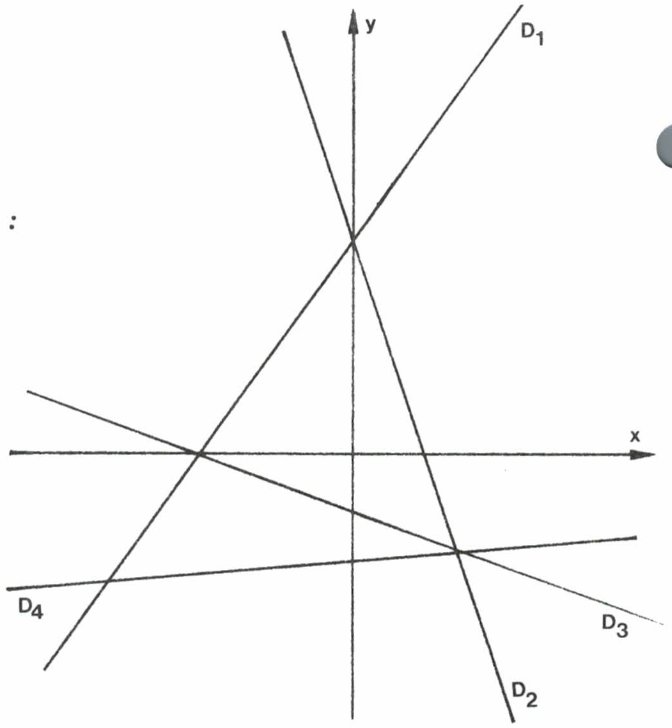
Intercale (si possible sans aucune mesure) parmi ces nombres les pentes de D_1, D_2, D_3 et D_4.

☆☆ Exercice II_{18} :

Le repère est orthonormé.

Voici des nombres en ordre croissant :

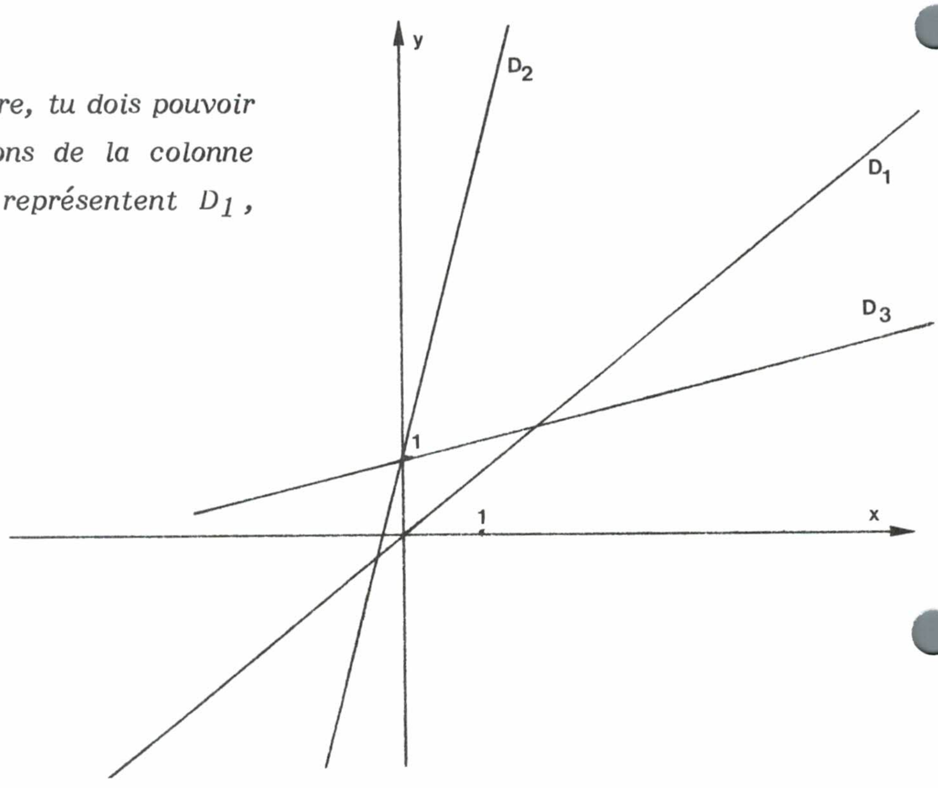
$-4\ ;\ -2\ ;\ -1\ ;\ -\frac{1}{2}\ ;\ 0\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 4\ ;\ 10\ .$



Intercale (si possible sans aucune mesure) parmi ces nombres les pentes de D_1, D_2, D_3 et D_4.

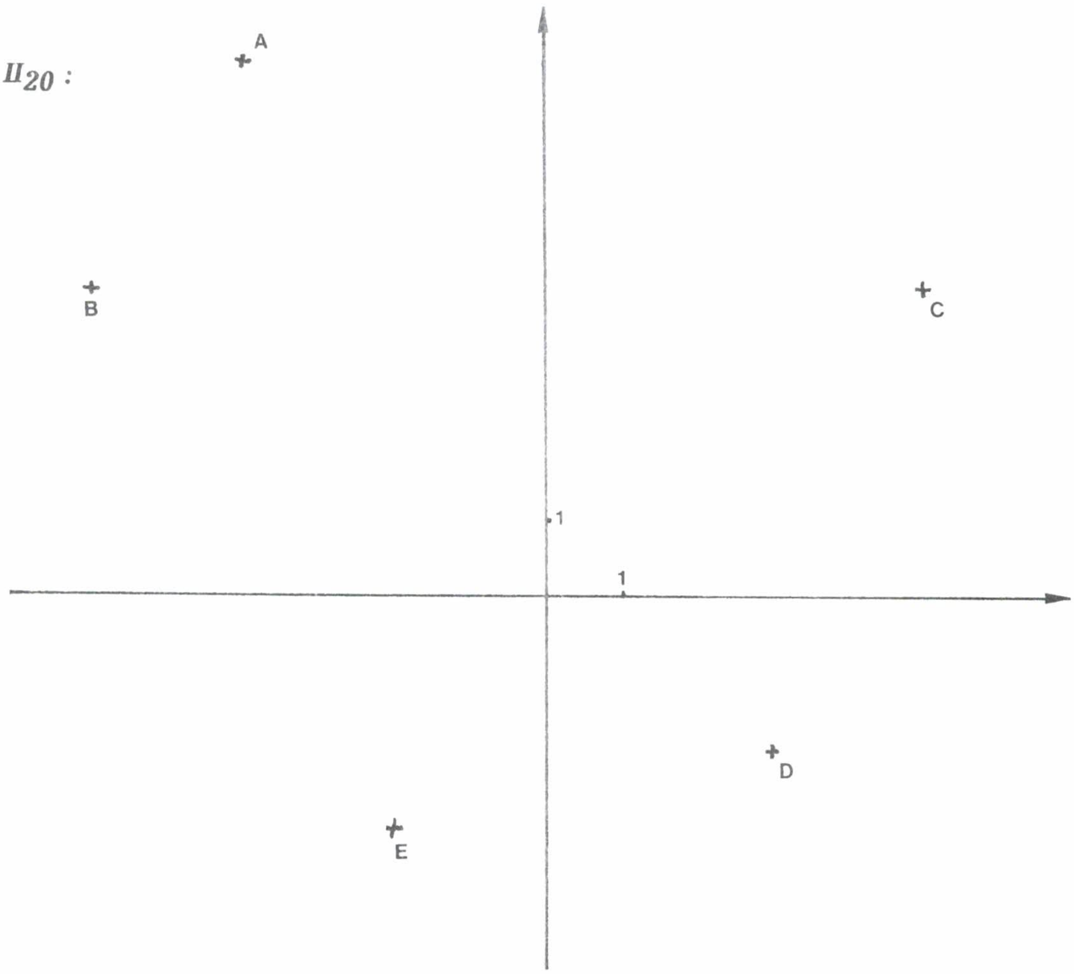
☆☆ Exercice II_{19} :

Sans aucune mesure, tu dois pouvoir dire, parmi les équations de la colonne de gauche, celles qui représentent D_1, D_2 et D_3.



	D_1	D_2	D_3
$y = 4x - 8$			
$y = -1{,}4\ x$			
$y = 0{,}8\ x$			
$y = 4x + 1$			
$3y = -2x + 4$			
$y = -\frac{3}{4}\ x - 1$			
$4y = x + 4$			

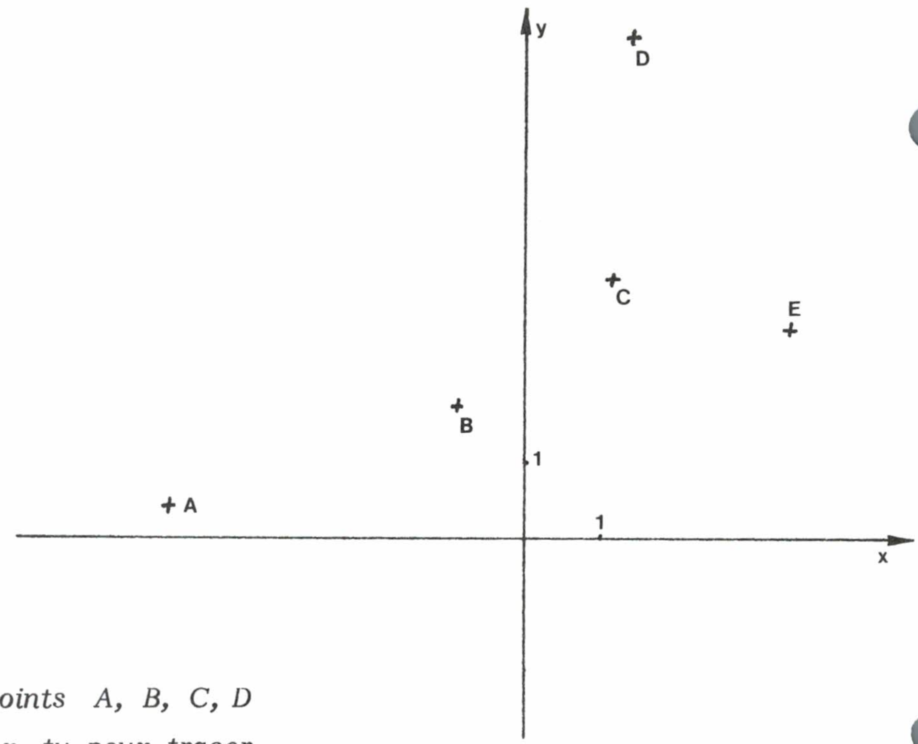
☆☆ ***Exercice II$_{20}$:***



Avec un minimum de mesures et de calculs tu dois pouvoir dire, parmi les équations de la colonne de gauche, celles qui représentent AB, BC, CD, DE, EA, AC :

	AB	BC	CD	DE	EA	AC
$5y = x - 13$						
$y = -5x - 13$						
$y = \frac{3}{2}x + 13$						
$x = 4$						
$y = -8x - 34$						
$3x - y = 11$						
$\frac{2}{3}y = x + \frac{26}{3}$						
$3x - 26 = y$						
$y = -\frac{1}{3}x + \frac{17}{3}$						

☆☆ *Exercice II_{21} :*

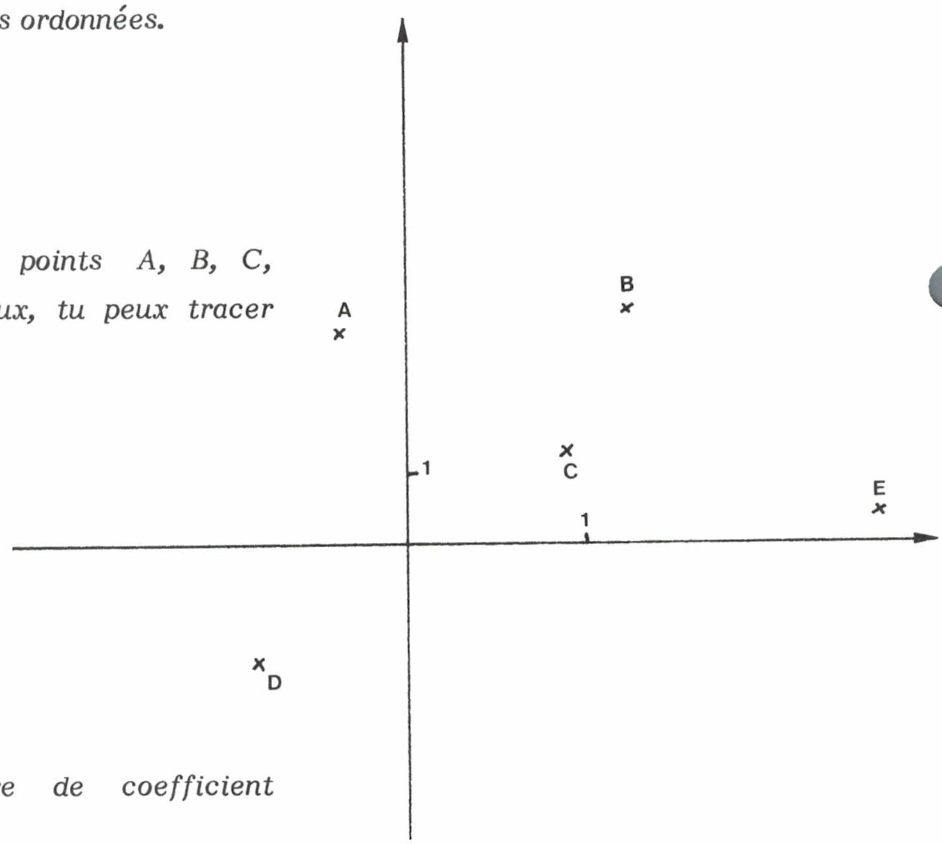


1) *En joignant les points A, B, C, D et E deux à deux, tu peux tracer dix droites. Classe-les par ordre de coefficient directeur croissant.*

   note : *essaie d'abord de faire ce classement sans rien mesurer, ni calculer. Puis, si tu n'es pas sûr de toi, mesure et calcule pour examiner les cas litigieux.*

2) *Le résultat serait-il le même si on changeait la figure en prenant 3 cm comme unité sur l'axe des ordonnées.*

☆☆ *Exercice II_{22} :*

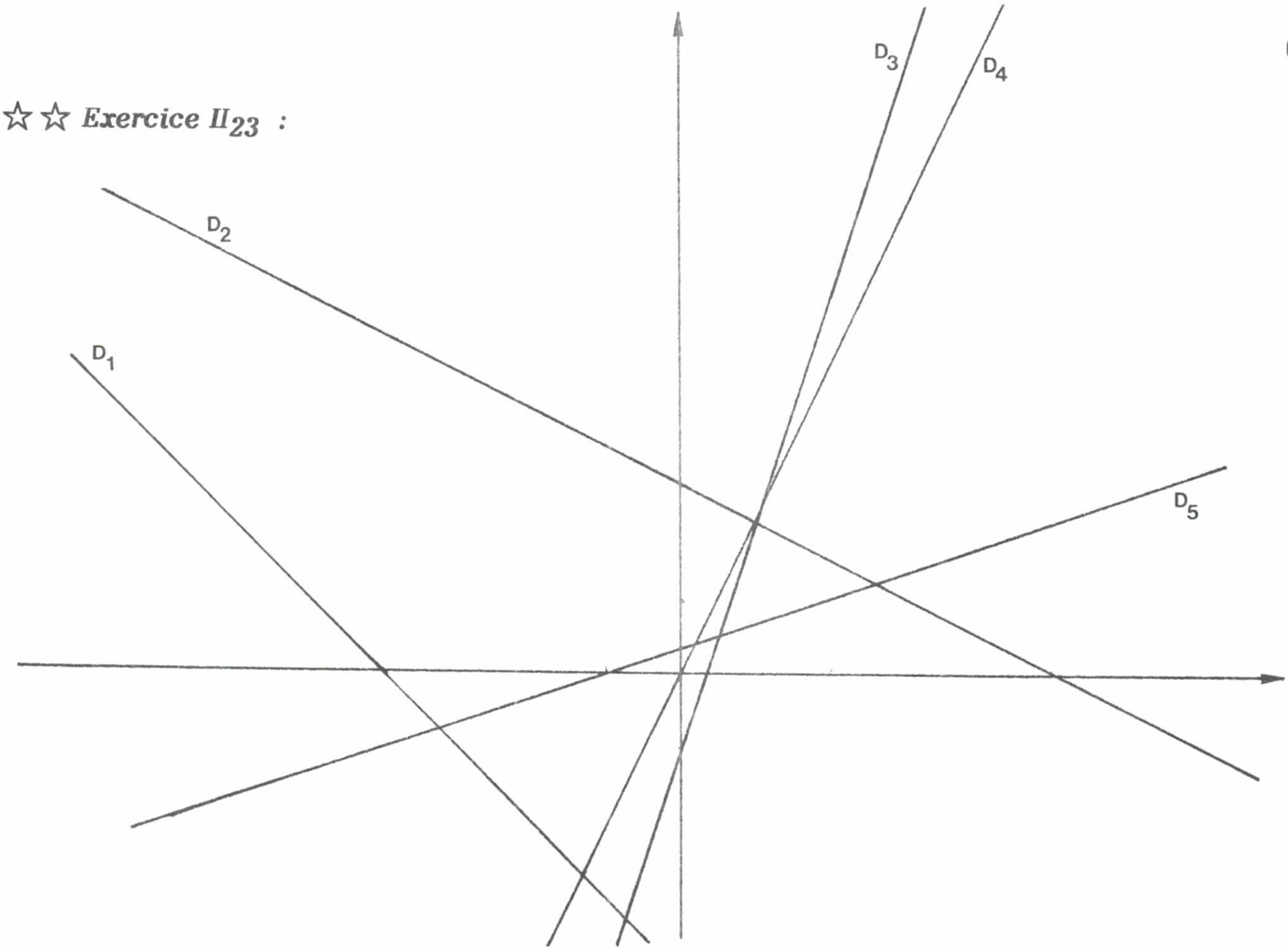


En joignant les points A, B, C, D et E deux à deux, tu peux tracer dix droites.

Classe-les par ordre de coefficient directeur croissant.

note : *essaie d'abord de faire ce classement sans rien mesurer, ni calculer. Puis, si tu n'es pas sûr de toi, mesure et calcule pour examiner les cas litigieux.*

☆☆ *Exercice II_{23} :*



Sans aucune mesure, tu dois pouvoir dire, parmi les équations de la colonne de gauche, celles qui représentent les droites D_1, D_2, D_3, D_4, D_5 :

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5
$2x = y$					
$y = -\frac{x}{2} + \frac{5}{2}$					
$y = 3x - 1$					
$y = -3x - 1$					
$y = 1 - 3x$					
$y = +\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$					
$y = -\frac{1}{3}x + 6$					
$3y = x + 1$					
$y = -x - 4$					
$2y = 6x - 2$					

Série 2 : PROBLEMES A UNE INCONNUE

Problème 1 : *J'ai acheté 3 cahiers à 4 F pièce, et 2 crayons à bille. J'ai payé 18 F. Combien coûte un crayon à bille ?*

C'est un problème que tu as peut être résolu dès le cours élémentaire. Voici la solution que tu pouvais alors imaginer : le prix des 3 cahiers est 3×4 F, soit 12 F. Le prix des 2 crayons est 18 F - 12 F, soit 6 F. Donc le prix d'un crayon est la moitié de 6 F, soit 3 F. C'est ce que nous appellerons la solution arithmétique.

Lorsque l'on connaît le calcul algébrique, on peut en donner un autre type de solution: si je connaissais le prix p d'un crayon, je pourrais calculer le prix de 3 cahiers et de 2 crayons, ce serait $(3 \times 4 + 2 \times p)$ F ; or l'énoncé me dit que ce prix total est 18 F, donc

$$3 \times 4 + 2 \times p = 18$$

J'obtiens ainsi une équation (où l'inconnue est p). Cette équation est une "traduction algébrique" de mon problème : le seul nombre p possible est la solution de $12 + 2p = 18$.

Je la résous ; je trouve $p = 3$. Et je peux alors vérifier que 3 cahiers à 4 F, et 2 crayons à 3 F, donnent un prix total de 18 F.

Une telle solution sera dite algébrique.

Problème 2 : *Ce matin je me suis promené pendant 3 heures, en marchant à 4 km/h. Cet après-midi je me suis promené pendant 2 heures. En tout j'ai parcouru 18 km. A quelle vitesse ai-je marché cet après-midi ?*

Ici encore je peux donner une solution arithmétique, en calculant successivement la distance parcourue le matin (12 km), puis la distance parcourue l'après-midi (18 km - 12 km, soit 6 km) ; puis la vitesse cherchée (6 km en 2 h, donc 3 km/h).

Mais je peux donner une solution algébrique, c'est-à-dire traduire le problème par une équation. Pour cela je donne un nom (par exemple v) à la vitesse cherchée ; je dois préciser l'unité utilisée : v sera un nombre de km/h. Alors la distance parcourue, soit 18 km, pourra aussi s'écrire $(3 \times 4 + 2 \times v)$ km. $((3 \times 4)$ km parcourus *le matin, et* $(2 \times v)$ *km parcourus l'après-midi). Donc le problème proposé se traduit par l'équation :*

$$3 \times 4 + 2 \times v = 18$$

On la résout, pour obtenir $v = 3$ *; c'est-à-dire* $v = 3km/h$ *.*

On observera que l'équation obtenue est identique (au nom de l'inconnue près) à celle que l'on avait obtenue dans le problème 1 . Ainsi, réduits à leur forme mathématique abstraite, ces deux problèmes n'en font qu'un.

Problème 3 : *Un verre gradué pèse* 160 *g lorsqu'il est vide ; on y verse* 150 cm^3 *de liquide formé pour partie d'eau (masse volumique* 1 g/cm^3*) et pour le reste d'une huile de masse volumique* $0,9$ g/cm^3 *. Le verre ainsi rempli pèse* 304 *g . Quelle quantité d'eau le verre contient-il ?*

Pour donner une solution algébrique de ce problème, appellons x *la quantité cherchée ; l'unité choisie étant le* cm^3 *. La masse de l'eau est donc* $x \times 1$ *g . Le volume de l'huile est* $(150 - x)$ cm^3 *; sa masse est* $((150 - x) \times 0,9)$ *g . La masse totale sera donc :* $[160 + x \times 1 + (150 - x) \times 0,9]$ *g . Et puisque cette masse totale est* 304 *g , nous aurons l'équation*

$$160 + x \times 1 + (150 - x) \times 0,9 = 304$$

Mais cette équation ne traduit pas complètement l'énoncé. En effet puisqu'il y a en tout 150 cm^3 *de liquide, le nombre* x *doit être compris entre* 0 *et* 150 *. Ainsi la traduction complète de l'énoncé sera*

$$\begin{cases} 160 + x + (150 - x) \times 0,9 = 304 \\ 0 < x < 150 \end{cases}$$

Nous résoudrons alors l'équation

$$160 + x + 150 \times 0,9 - 0,9x = 304$$
$$295 + 0,1x = 304$$
$$0,1x = 9$$
$$x = \frac{9}{0,1} = 90$$

Et puisque 90 *est compris entre* 0 *et* 150 *, nous pourrons affirmer qu'il y a* 90 cm^3 *d'eau. Si la solution de l'équation n'avait pas été comprise entre* 0 *et* 150 *, elle* *n'aurait pas été acceptable, et nous aurions pu affirmer que le problème n'avait pas de solution.*

Ainsi le problème posé ne s'est pas traduit par une équation, mais par un ensemble de conditions (une équation plus une double inégalité). Il en est presque toujours ainsi ; d'ailleurs si nous regardons d'un peu plus près le problème 1 nous voyons qu'à l'équation $3 \times 4 + 2 \times p = 18$ *, il aurait fallu ajouter* $p > 0$ *(car un prix n'est jamais négatif). De même dans le problème 2 nous aurions dû ajouter la condition* $v > 0$*. Dans d'autres cas le nombre cherché — que l'on appelle l'inconnue, ou l'indéterminée — devra être entier, ou entier positif ,...*

La traduction d'un problème en une ou plusieurs conditions algébriques s'appelle la mise en équation du problème. La solution d'un problème par la méthode algébrique comporte deux étapes :

> *D'abord la mise en équation*
>
> *Ensuite la recherche du nombre qui vérifie ces conditions. Il se peut d'ailleurs qu'il n'y en ait pas ; le problème proposé n'a alors pas de solution. Il se peut qu'il y en ait plus d'un ; le problème proposé a alors plusieurs solutions.*

Deuxième série d'exercices :

PROBLEMES A UNE INCONNUE

☆ **Exercice II_{24} :** *Cinq nombres entiers consécutifs* n , $n+1$, $n+2$, $n+3$, $n+4$, *ont pour somme* 245 . *Que vaut* n ?

☆ **Exercice II_{25} :** *Cinq nombres impairs consécutifs ont pour somme* 225 . *Quel est le plus petit de ces cinq nombres ?*

Solution : *Appelons* n *le plus petit de ces nombres ...*

☆ **Exercice II_{26} :** *Il y avait* n *litres d'essence dans le réservoir de ma voiture. J'en ai usé le tiers au voyage aller et* 8 *litres au voyage retour. Il en reste* 10 *litres. Combien y avait-il d'essence au départ ?*

☆☆ **Exercice II_{27} :** *Lorsque je suis parti, le réservoir de ma voiture était plein. J'en ai usé le tiers ; puis* 4 *litres, puis les trois quarts de ce qui restait. Il en reste alors* 6 *litres. Quelle est la contenance du réservoir ?*

Solution : *Notons* x *la contenance du réservoir ...*

☆ **Exercice II_{28} :** *J'ai choisi un nombre entier* n ; *je l'ai multiplié par* 3 ; *puis j'ai ajouté* 4 *au résultat ; puis j'ai divisé par* 5 ; *j'ai trouvé* 27 . *Qu'en conclus-tu ?*

☆☆ **Exercice II_{29} :** *Le père est né en* 1950 , *le fils est né en* 1976 . *En quelle année l'âge du père sera-t-il trois fois celui du fils ?*

Solution : *Soit* A *l'année où l'âge du père sera trois fois celui du fils ...*

☆ **Exercice II_{30} :** *Un marchand vend les* 3/7 *d'une pièce d'étoffe, puis* 3 *mètres de la même étoffe. Il reste alors* 8 *mètres d'étoffe. Quelle était la longueur initiale de la pièce ?*

☆ **Exercice II_{31}** : *Cinquante six pour cent des élèves de seconde sont des filles ; il y a 126 filles. Combien y a-t-il d'élèves de seconde ?*

☆☆ **Exercice II_{32}** : *Pour se rendre au lycée, Jacques parcourt les $\frac{3}{4}$ du trajet en bus à 20 km/h ; le reste du trajet est parcouru à pied à 5 km/h . En tout le trajet dure 21 mn . Quelle est la distance totale d à parcourir ?*

☆☆ **Exercice II_{33}** : *Tout autour d'un jardin carré, on réserve une allée de 1 m de large. On diminue ainsi la surface cultivable de 102 m^2 . Quelle est la longueur x du côté du carré ?*

☆ **Exercice II_{34}** : *Si on augmente l'entier n de 12 , son carré augmente de 984 . Quel est n ?*

☆ **Exercice II_{35}** : *Un carré est tel que si l'on augmente un de ses côtés de 5 mètres, et si l'on diminue l'autre de 3 mètres, on obtient un rectangle qui a la même aire. Quel est le côté de ce carré ?*

☆☆ **Exercice II_{36}** : *Un fil de cuivre de diamètre d (cm) a une longueur de 31 m . Calcule sa masse sachant que la masse volumique du cuivre est de 8,8 g/cm^3 .*

Calcule d sachant que la masse du fil est 931 g .

☆☆ **Exercice II_{37}** : *On place un capital de 12 000 F . Une partie S est placée à 4 % , le reste à 6 % . Détermine S sachant que l'intérêt annuel est de 660 F .*

☆☆ **Exercice II_{38}** : *Une somme S est partagée équitablement entre six personnes ; chacune reçoit une somme s . Si on partage S équitablement entre cinq personnes, chacune reçoit s + 5 F . Détermine s puis S .*

☆☆☆ **Exercice II_{39}** : *Deux villes X et Y sont distantes de 140 km . Une voiture part de X pour aller en Y , à la vitesse de 80 km/h ; une voiture part 18 minutes plus tard de Y pour aller vers X , à la vitesse de 65 km/h . A quelle distance de X se recontrent-elles ?*

☆☆ **Exercice II_{40}** : Un capital S est placé pour un tiers à 8 %, pour les deux autres tiers à 6 %. Calcule S sachant que l'intérêt annuel est de 1 600 F.

☆☆☆ **Exercice II_{41}** : Pierre a 4 ans de moins que Paul. Jacques est trois fois plus âgé que Pierre ; il est né 30 ans avant Paul. Quel est l'âge de Pierre ?

☆☆ **Exercice II_{42}** : Dans un repère orthonormé (unité 1 cm), place les points :

$$A(-2,-5) \quad \text{et} \quad B(3,7)$$

1) Un point C a pour coordonnées $(x,4)$. Calcule les longueurs AB, BC et CA.

2) Comment faut-il choisir x pour que l'angle ABC soit droit ? Dessine le point C ainsi obtenu.

☆☆ **Exercice II_{43}** : Quel est le diamètre d'une bille d'acier dont la masse est 171,4 g. (La masse volumique de l'acier est 7,8 kg/dm^3) ?

☆☆ **Exercice II_{44}** : Un flacon pèse 170 g lorsqu'il est vide. Lorsqu'il est plein d'une huile de masse volumique 0,91 kg/l, il pèse 877,4 g. Quelle est sa contenance ?

☆☆ **Exercice II_{45}** : De la ville A à la ville B, il y a 10 km. Pour aller de A à B il y a d'abord une montée de longueur x, puis une descente. Un cycliste monte les côtes à 10 km/h et les descend à 30 km/h. Calcule, en fonction de x, le temps qu'il met pour aller de A à B, puis le temps qu'il met au retour pour aller de B à A.

Calcule x sachant que le trajet de retour est 12 minutes plus long que le trajet aller.

☆☆☆ **Exercice II_{46}** : Un triangle ABC est tel que :

$$AB = 8 \text{ cm} \quad , \quad BC = 14 \text{ cm} \quad \text{et} \quad CA = 10 \text{ cm}$$

On prend un point D sur le segment AB, et on pose $AD = x$. La parallèle à BC passant par D coupe AC en E. La parallèle à AC passant par D coupe BC en F.

Calcule EC et FC en fonction de x.
Pour quelle valeur de x, le quadrilatère $DECF$ est-il un losange ?

☆☆ **Exercice II_{47}** : *La longueur AB du rectangle ABCD est 7 cm. Sa largeur AD est 6 cm. Le point I est sur le segment AD à 2 cm de A. Le point N est sur le segment AB et AN = x cm.*

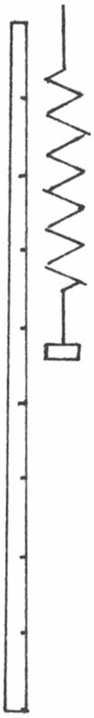
Calcule IN^2 et NC^2 en fonction de x.

Pour quelle valeur de x le triangle INC est-il rectangle en I ?

☆☆☆ **Exercice II_{48}** : *Un père et son fils décident de faire une course poursuite en bicyclette. Le fils part à 14 h et le père 45 minutes plus tard.*

A quelle heure le père aura-t-il rattrapé le fils sachant qu'ils roulent aux vitesses constantes de 30 km/h et 20 km/h ?

☆☆☆ **Exercice II_{49}** : *Un ressort est suspendu devant une règle graduée. A vide le ressort est devant la graduation x_0 (cm). Lorsqu'on attache une masse à son extrémité il s'allonge. L'allongement est proportionnel à la masse ; il est de k (cm) pour une masse de 10 g.*



a) *En face de quelle graduation x (cm) l'extrémité se trouve-t-elle, lorsqu'on attache une masse de m (grammes) ? ?*

b) *On réalise deux fois l'expérience. Pour une masse m de 51 g on a x = 71 cm. Pour une masse m de 91 g on a x = 92 cm.*

1) *Représente graphiquement x en fonction de m (unités 1 cm pour 10 g et 1 cm pour 10 cm). Détermine graphiquement x_0 et k.*

2) *Pour plus de précision, détermine x_0 et k par un calcul.*

☆☆ **Exercice II_{50}** : *De la ville A à la ville B, il y a 88 km. Un cycliste part de A vers B à midi ; il roule à 20 km/h. Un autre cycliste part de B vers A à 13 h15, à la vitesse de 25 km/h. A quelle distance $d_2(t)$ le second cycliste se trouve-t-il de A, après t minutes de trajet ? A quelle distance $d_1(t)$ le premier cycliste se trouve-t-il à la même heure ?*

Représente graphiquement $d_1(t)$ et $d_2(t)$.

Détermine graphiquement, puis par le calcul, l'heure à laquelle les deux cyclistes se rencontrent.

☆☆☆ **Exercice II_{51} :** *De la ville A à la ville B il y a 184 km. Un cycliste part de A vers B à 10 h 40, à la vitesse de 21 km/h. A midi un second cycliste part de A vers B, à 30 km/h.*

A quelle distance $d_2(t)$, le second cycliste se trouve-t-il de A, après t minutes de trajet ?

A quelle distance $d_1(t)$ de A, le premier cycliste se trouve-t-il à la même heure ?

Représente graphiquement $d_1(t)$ et $d_2(t)$.

Détermine graphiquement, puis par le calcul, l'heure et le lieu de la rencontre.

Détermine graphiquement l'heure à laquelle le premier aurait du partir pour ne pas être rattrapé ?

☆☆☆ **Exercice II_{52} :** *Pour aller de A à B, il y a d'abord x km de montée, puis un parcours à plat. La distance totale est de 30 km. Un cycliste monte les côtes à 15 km/h, il les descend à 35 km/h, et sur le plat roule à 30 km/h. Calcule la durée a (x) du trajet aller, et la durée r (x) du trajet retour.*

Représente sur un même graphique a (x) et r (x). (Unités 1 cm pour 2 km et 1 cm pour 5 minutes).

Détermine (graphiquement puis par le calcul) la valeur de x sachant que le trajet aller est plus long de 12 minutes que le trajet retour.

☆☆☆ **Exercice II_{53} :** *De la ville A à la ville B, il y a 180 km. Un véhicule part à midi de A vers B ; il roule à 60 km/h ; puis après 1 h 20 de trajet sa vitesse passe à 75 km/h. Il reste en B pendant 1 h, et revient en A à 75 km/h. Calcule la distance d(t) à laquelle il se trouve de A, t minutes après midi.*

Représente graphiquement d(t). (Unités 1 cm pour 10 km, et 1 cm pour 15 minutes).

Un observateur le voit passer à l'aller, puis, 3 h 15 plus tard, sur le trajet retour. Détermine (graphiquement puis par le calcul) où se trouve cet observateur.

☆☆ **Exercice II_{54}** : *On mélange deux liquides A et B de masses volumiques respectives $\mu_A = 0{,}9$ kg/l et $\mu_B = 1{,}4$ kg/l. On mélange 1 litre de A et x (litres) de B. Calcule la masse m (x) et le volume v (x) du mélange.*

Représente sur un même graphique m et v en fonction de x (unités 5 cm pour 1 l, et 5 cm pour 1 kg).

Détermine, graphiquement et par le calcul, pour quelle valeur de x, la masse volumique du mélange est égale à 1 kg/l.

Détermine, graphiquement puis par le calcul, pour quelle valeur de x, la masse volumique du mélange est 1,1 kg/l.

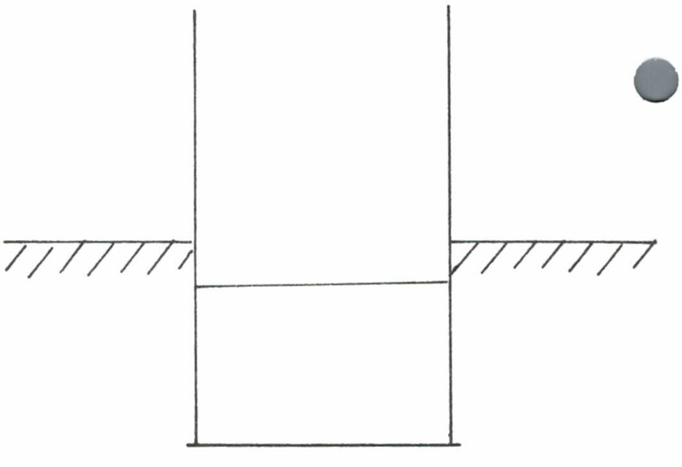
☆☆ **Exercice II_{55}** : *Dans un récipient de 100 cm^3, on verse x cm^3 d'un liquide A de masse volumique 1,4 g/cm^3 ; puis on remplit avec un liquide B de masse volumique 0,9 kg/l. Calcule, en fonction de x, la masse m et la masse volumique μ du mélange obtenu.*

Représente graphiquement μ en fonction de x (unités 1 cm pour 10 cm^3 et 10 cm pour 1 g/cm^3).

Détermine graphiquement quelle doit être la valeur de x pour que :

$$\mu = 1{,}1 \text{ g/cm}^3$$

☆☆☆☆ **Exercice II_{56}** : *Un récipient a la forme d'un cylindre de section (extérieure) 1,7 dm^2.*



Lorsqu'il est vide, il a une masse de 0,127 kg. On y verse x litres d'un liquide L de masse volumique 1,31 kg/l. Lorsqu'on le pose dans l'eau il s'enfonce d'une hauteur h (cm).

1) *Calcule h en fonction de x. On rappelle que, d'après le principe d'Archimède, le volume v de la partie immergée est tel que la masse du flacon soit $m = v\,\mu_o$ (où $\mu_o = 1$ kg/l est la masse volumique de l'eau).*

2) *Représente graphiquement h en fonction de x.*

3) *Le flacon a une hauteur de 24 cm, et une contenance de 3 litres. Est-il possible de verser suffisamment du liquide L pour que le récipient coule ?*

☆☆ **Exercice II_{57} :**

a) *Un flacon a une masse m_0 (g) lorsqu'il est vide, on y verse v (cm^3) d'un liquide de masse volumique μ (g/cm^3). Quelle est alors sa masse m ?*

b) *On réalise deux fois l'expérience. Lorsque $v = 17\ cm^3$, on a $m = 143\ g$. Lorsque $v = 86\ cm^3$, on a $m = 208\ g$.*

1) *Représente graphiquement m en fonction de μ (unités 1 cm pour 10 g et 1 cm pour 10 cm^3). Détermine graphiquement m_0 et μ.*

2) *Pour plus de précision, détermine m_0 et μ par un calcul.*

☆☆☆ **Exercice II_{58} :**

a) *Un bassin cylindrique a une hauteur de 1 m, et un diamètre de 400 cm. Un robinet a un débit de n litres par minute.*

A midi juste la hauteur d'eau dans le bassin est h_0 (cm).

b) *Quelle sera la hauteur de l'eau dans le bassin t (minutes) après midi ?*

c) *On mesure la hauteur de l'eau à midi et 8 minutes, on trouve $h = 41$ cm. On mesure cette hauteur à midi et 17 minutes, on trouve 73 cm.*

Représente graphiquement la hauteur h en fonction de t. A quelle heure a-t-on ouvert le robinet, le bassin étant vide ?

A quelle heure sera-t-il plein ?

Quel est le débit n ?

☆☆☆ **Exercice II_{59} :** *Une bouteille de gaz pèse 13,3 kg lorsqu'elle est vide et 26,1 kg lorsqu'elle est pleine. Elle alimente un appareil de chauffage qui fonctionne constamment.*

a) *A midi on pèse la bouteille et on trouve 21,4 kg. A 19 h on pèse la bouteille et on trouve 18,9 kg.*

Représente graphiquement le poids de la bouteille en fonction du temps (1 cm pour 2 kg et 1 cm pour 2 heures). Puis détermine graphiquement le moment de la mise en service, et le moment où la bouteille sera vide.

b) *Retrouve ces résultats, par le calcul, en déterminant d'abord la consommation horaire.*

☆☆☆ **Exercice II_{60}** : *Une classe désire organiser une excursion de fin d'année ; trois compagnies de cars proposent les tarifs suivants :*

La compagnie A propose un forfait de 200 F, plus 9 F par kilomètre parcouru.

La compagnie B propose un forfait de 400 F, plus 5,6 F par kilomètre parcouru.

La compagnie C propose un forfait de 600 F, plus 4 F par kilomètre parcouru.

1) *Quelle est la compagnie la plus intéressante s'il y a 100 km à parcourir ?*

2) *Exprime en fonction du nombre x de kilomètres à parcourir, les prix p_A, p_B, p_C à payer dans les trois cas.*

3) *Représente graphiquement p_A, p_B et p_C en fonction de x (1 cm pour 20 km et 1 cm pour 100 F).*

4) *Détermine, en fonction du nombre de kilomètres à parcourir, quelle est la compagnie la plus intéressante. (On précisera les valeurs remarquables par le calcul).*

☆☆☆ **Exercice II_{61}** : *Une classe projette de faire une excursion. Le prix du voyage est de 1 500 F, pour la location d'un car de 50 places. Le repas coûtera 28 F par élève, et la visite d'un musée 8 F par élève. Pour financer cette sortie, la coopérative du lycée donne une subvention de 600 F.*

On décide de demander 60 F à chaque participant.

1) *Représente sur un même graphique :*

   a) *La dépense totale d en fonction du nombre n des participants.*

   b) *La recette totale r en fonction du nombre n des participants.*

   Combien faut-il de participants pour qu'il n'y ait pas de déficit ?

2) *Représente sur ce même graphique le bilan z (recettes moins dépenses), suivant le nombre de participants.*

3) *Le maire de la commune décide de subventionner à raison de 5 F par participant. Reprendre les questions 1 et 2.*

☆☆☆ ***Exercice II_{62}*** : *La compagnie du gaz propose trois tarifs :*

tarif n°	*1*	*2*	*3*
abonnement mensuel	*10 F*	*70 F*	*0*
kwh gratuits	*0*	*7500 par an*	*0*
prix du kwh	*0,19 F*	*0,17 F*	*0,25 F pour les 2000 premiers* *0,22 F pour les 2000 suivants* *0,19 F pour les autres*

1) *Calcule selon les trois tarifs le prix à payer pour des consommations annuelles de 1750 kwh , 4000 kwh et 13 350 kwh .*

2) *Calcule selon les trois tarifs le prix à payer pour une consommation annuelle de x kwh .*

3) *Représente graphiquement ces trois prix en fonction de x (unités 1 cm pour 100 F et 1 cm pour 1000 kwh) .*

4) *Détermine graphiquement le tarif le plus avantageux suivant la consommation annuelle x (on précisera les valeurs limites par le calcul) .*

Série 3 : SYSTEMES D'EQUATIONS ET D'INEQUATIONS

1) SYSTEMES DE DEUX EQUATIONS A DEUX INCONNUES

Problème : Trouver le(s) couple(s) de nombres (x,y) qui vérifient les deux conditions suivantes :

(a) $\qquad 2x - 3y = 1$

(b) $\qquad x + 4y = 2$

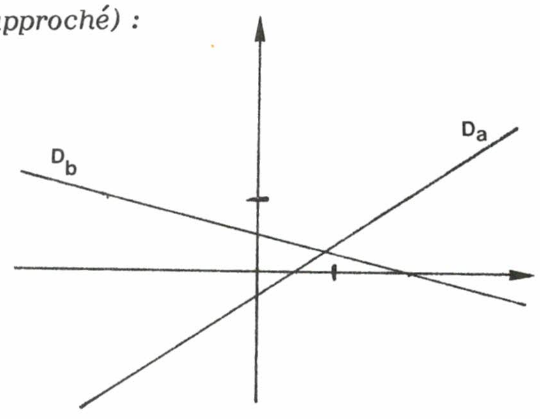
Ce problème est un système de deux équations à deux inconnues (les inconnues sont x et y).

Pour résoudre un tel problème, deux stratégies sont possibles.

Etude graphique (qui va donner un résultat approché) :

Considérons un repère orthogonal $(0x,0y)$. Les points $M(x,y)$ tels que $2x - 3y = 1$ sont les points d'une droite D_a.

De même $x + 4y = 2$ caractérise les points d'une droite D_b.



Le(s) couple(s) (x,y) solution(s) de notre problème est(sont) donc les coordonnées du(des) point(s) commun(s) à D_a et D_b. Dans le cas présent, D_a et D_b ont un unique point commun M. On lit ses coordonnées $x \approx 0{,}9$ et $y \approx 0{,}25$.

Etude algébrique (qui va donner le résultat exact) :

Supposons que l'on ait une solution (x_o,y_o). Alors

$$\begin{cases} 2x_o - 3y_o = 1 \\ x_o + 4y_o = 2 \end{cases}$$

Donc
$$\begin{cases} 2x_o - 3y_o = 1 \\ 2x_o + 8y_o = 4 \end{cases}$$

(J'ai multiplié la seconde par 2).

Donc (en faisant la différence)

$$(2x_o + 8y_o) - (2x_o - 3y_o) = 4 - 1$$

soit $11y_o = 3$ *, ou encore* $y_o = 3/11$ *.*

Ainsi nous ne savons pas encore s'il y a une (ou plusieurs) solution(s) ; mais s'il en existe, nous pouvons affirmer que y_o *aura la valeur* $3/11$ *.*

Comment sommes-nous parvenus à ce résultat ? D'abord nous avons remplacé les équations données par des équations équivalentes (en multipliant la seconde par 2) de façon qu'elles aient les mêmes termes en x_o *. Puis par différence nous avons obtenu une équation dans laquelle* x_o *avait disparu.*

Nous allons faire un calcul analogue pour calculer x *. S'il existe une solution* (x_o, y_o) *, alors*

$$\begin{cases} 2x_o - 3y_o = 1 \\ x_o + 4y_o = 2 \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} 8x_o - 12y_o = 4 \\ 3x_o + 12y_o = 6 \end{cases}$$

(J'ai multiplié la première par 4 et la seconde par 3 pour que les termes en y_o *soient les mêmes au signe près) .*

Donc $11x_o = 10$ *(J'ai ajouté les deux équations) .*

Soit $x_o = 10/11$ *.*

Ainsi la seule solution possible est $(10/11 ; 3/11)$ *. Et on vérifie facilement*

$$\begin{cases} 2 \times (10/11) - 3 \times (3/11) = 1 \\ 10/11 + 4 \times (3/11) = 2 \end{cases}$$

Bien sûr nous avons trouvé ainsi la "solution exacte" , alors que le graphique ne nous avait donné qu'une solution approchée.

Variantes de la solution algébrique :

L'idée essentielle dans le calcul que nous venons de faire est celle-ci : on cherche à déduire des deux équations données, une équation dans laquelle y *a disparu, et une équation dans laquelle* x *a disparu. Pour cela il y a plusieurs méthodes. Celle que l'on a utilisée ci-dessus te paraît peut être compliquée. En voici d'autres.*

Variante 1 : De (a) $2x - 3y = 1$, je peux déduire $3y = 2x - 1$; ou encore $y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$.
De (b) $x + 4y = 2$, je peux déduire $4y = 2 - x$; ou encore $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x$.

En égalant les deux expressions ainsi trouvées j'obtiens $\frac{2}{3}x - \frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x$. D'où je déduirai $x = 10/11$.

Et je peux faire un calcul analogue pour y.

Variante 2 : Je peux comme précédemment écrire $y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x$, et en déduire $x = 10/11$. Je peux alors remplacer x par $10/11$ dans l'une des équations initiales, par exemple (a). J'obtiens $2 \times (10/11) - 3y = 1$; j'en déduis $3y = 2 \times (10/11) - 1$ donc $y = 3/11$.

En résumé : Soit un système de deux équations à deux inconnues

$$\begin{cases} ux + vy = w \\ u'x + v'y = w' \end{cases}$$

Résoudre ce système revient (lorsqu'on s'est donné un système d'axes) à trouver les points communs à deux droites D et D'. Trois cas sont donc possibles.

- **Si D et D' sont sécantes il y a une solution unique (c'est le cas dans l'exemple numérique ci-dessus).**
- **Si $D = D'$, alors il y a une infinité de solutions (tout point $M(x,y)$ appartenant à D est solution).**
- **Si D et D' sont strictement parallèles, il n'y a pas de solution.**

On pourra retenir que si (u,v) et (u',v') sont deux couples proportionnels, c'est-à-dire si $uv' = vu'$, les deux droites sont parallèles ou confondues ; et il y a alors soit une infinité de solutions, soit pas de solution du tout. Par contre, si $uv' \neq vu'$ les deux droites sont sécantes ; et il y a une solution unique.

La quantité $\delta = uv' - vu'$ s'appelle le déterminant du système ; s'il est non nul on a une solution unique ; s'il est nul il y a, soit aucune, soit une infinité de solutions.

2) SYSTEMES DE PLUSIEURS EQUATIONS A PLUSIEURS INCONNUES

Exemple 1 : *Supposons que nous cherchions les couples (x,y) tels que*

$$\begin{cases} 3x - y = 1 \\ 2x + 3y = 2 \\ x - 4y = 7 \end{cases}$$

Cette fois nous avons deux inconnues x et y, et trois équations.

Graphiquement nous traduirons ce problème par la recherche du(des) point(s) commun(s) à trois droites ; ici les trois droites n'ont aucun point commun . Mais , avec d'autres valeurs numériques , il se pourrait que les trois droites aient un point commun , ou mêmes qu'elles soient confondues .

Algébriquement la meilleure stratégie consiste à chercher les points communs à deux des trois droites ; et, s'il y en a, de vérifier s'ils sont sur la troisième.

Exemple 2 : *Supposons que nous cherchions les triplets (x,y,z) tels que*

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x - y + z = 0 \\ 3x - y + 2z = 1 \end{cases}$$

Nous avons donc un système de trois équations à trois inconnues. Cette fois nous n'avons plus de traduction graphique. Il nous faut donc adopter la stratégie algébrique qui nous donnait les solutions précédemment.

Nous écrirons par exemple nos trois équations sous la forme

$$(a) \qquad \begin{cases} z = 2 - x - y \\ z = -2x + y \\ z = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}y \end{cases}$$

Nous en déduirons un système à deux équations et deux inconnues

$$\begin{cases} 2 - x - y = -2x + y \\ 2 - x - y = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}y \end{cases}$$

Nous la résoudrons (par une des méthodes indiquées plus haut) ; d'où $x = 0$ et $y = 1$.

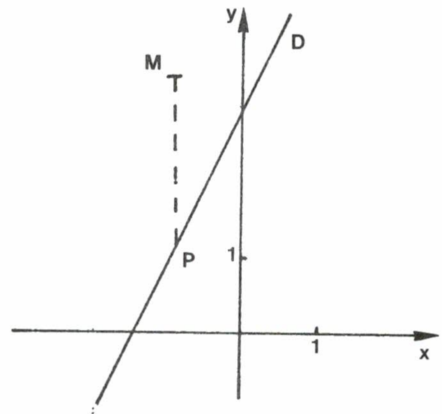
En reportant alors dans l'une des formules (a) , nous aurons $z = 1$.

Ainsi $(x = 0 , y = 1 , z = 1)$ est la seule solution du système proposé.

3) SYSTEMES D'INEQUATIONS

Exemple 1 : Cherchons les points $M(x,y)$ du plan tels que $y \geq 2x + 3$.

A tout $M(x_0,y_0)$ associons le point P situé sur la droite $D(y = 2x + 3)$, et ayant même abscisse x_0 que M. Dire que $y_0 \geq 2x_0 + 3$, c'est dire que l'ordonnée de M est supérieure à celle de P ; autrement dit que M est (sur la figure ci-contre) au-dessus de D.

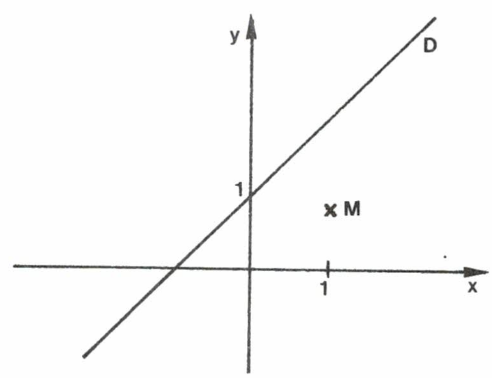


Ainsi l'inéquation $y \geq 2x + 3$ caractérise les points de l'un des demi-plans définis par D.

Exemple 2 : Cherchons les points M tels que $x + y - 1 \leq 0$.

Quels que soient (x_0,y_0) les conditions suivantes sont équivalentes :

- $x_0 + y_0 - 1 \leq 0$
- $(x_0 + y_0 - 1) - x_0 + 1 \leq 0 - x_0 + 1$
- $y_0 \leq - x_0 + 1$



Et nous sommes ramenés à un problème tout à fait analogue au précédent : l'équation $y = - x + 1$ (qui s'écrit aussi $x + y - 1 = 0$) définit une droite D ; et la condition $y + x - 1 \leq 0$ caractérise les points d'un des demi-plans définis par D.

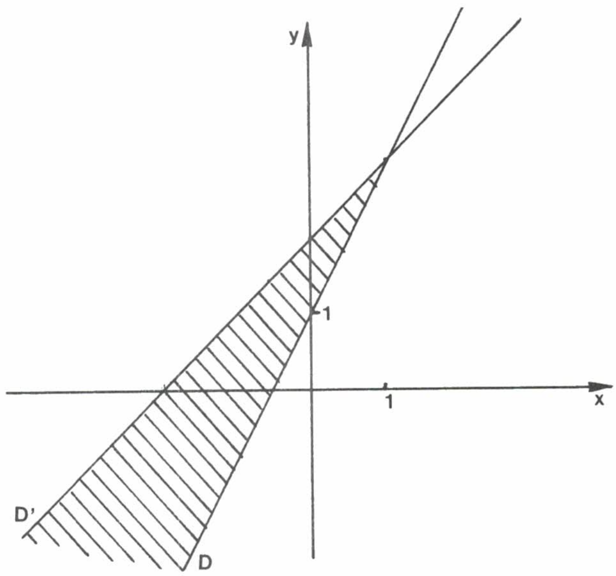
Nous retiendrons :

Toute inéquation du type $ux + vy + w \leqslant 0$ (ou $ux + vy + w \geqslant 0$) caractérise les points d'un des demi-plans définis par la droite d'équation $ux + vy + w = 0$).

Exemple 3 : Soit à trouver les points tels que

$$(b) \qquad \begin{cases} 2x - y + 1 \leq 0 \\ x - y + 2 \geq 0 \\ x + 2y + 2 = 0 \end{cases}$$

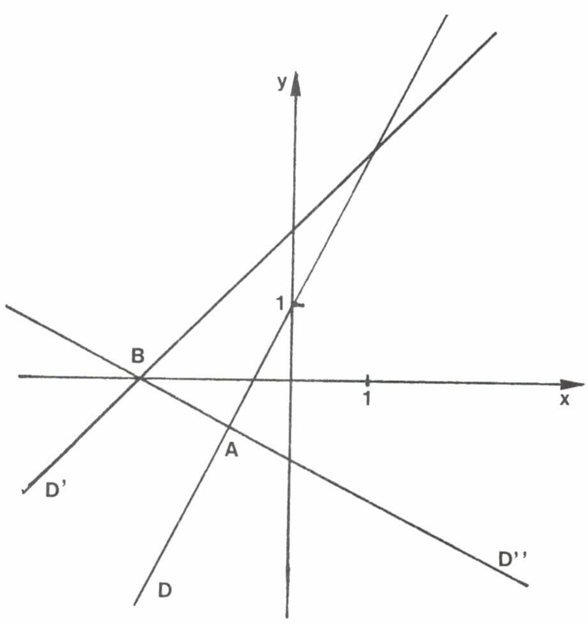
. $2x - y + 1 \leq 0$ caractérise les points de l'un des demi-plans définis par $D(2x - y + 1 = 0)$. Ce demi-plan ne contient pas l'origine (puisque $2 \times 0 - 0 + 1 > 0$) ; c'est donc celui qui est au-dessus de D.



. $x - y + 2 \geq 0$ caractérise les points de l'un des demi-plans définis par $D'(x - y + 2 = 0)$. Ce demi-plan contient l'origine (puisque $0 - 0 + 2 > 0$) ; c'est donc le demi-plan situé au-dessous de D'.

. Ainsi ($2x - y + 1 \leq 0$ et $x-y + 2 \geq 0$) caractérisent les points de l'intersection de ces demi-plans ; c'est-à-dire les points du secteur hachuré.

. Il nous reste à tenir compte de l'équation $x + 2y + 2 = 0$; elle caractérise les points d'une droite D''. Les points vérifiant les conditions (b), sont donc les points de D'' qui se trouvent dans le secteur hachuré ; c'est-à-dire les points du segment AB.



Le point A est défini par

$$\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ x + 2y + 2 = 0 \end{cases}$$

(d'où l'on déduit — voir 1) — que $A\,(-\frac{4}{5}\,;\,-\frac{3}{5})$).

Le point B est défini par

$$\begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ x + 2y + 2 = 0 \end{cases}$$

(d'où l'on déduit — voir 1) — que $B\,(-2;0)$).

Troisième série d'exercices :

SYSTEMES D'EQUATIONS ET D'INEQUATIONS

☆ **Exercice II_{63} :**

1. *Trace les droites D_1 $(2x+5y = 1)$, D_2 $(4x-y = 1)$ et D_3 $(2x-6y = 0)$.*
2. *Que constates-tu ? Peux-tu le vérifier par le calcul ?*

☆ **Exercice II_{64} :**

1. *Trace les droites D_1 $(2x+3y = 7)$, D_2 $(3x+4y = 8)$ et D_3 $(2x+6y) = 21$.*
2. *Que constates-tu ? Peux-tu le vérifier par le calcul ?*

☆☆ **Exercice II_{65} :** *Résous graphiquement, puis par le calcul, les systèmes d'équations :*

(1) $\begin{cases} x + 7y = 1 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 0{,}61x + 0{,}51y = 1 \\ 9{,}53x + 0{,}73y = 3 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x - y = 1 \\ y + 7 = 3x \end{cases}$ (4) $\begin{cases} 0{,}17x + 2{,}1y = 1{,}7 \\ 2{,}17x - 3y = 0{,}7 \end{cases}$

☆☆ **Exercice II_{66} :** *Résous les systèmes suivants, graphiquement et par le calcul :*

(a) $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x + 2y = 3 \\ x - y = 4 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 3x - 4y = -1 \\ x + 3y = 4 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ x - y = 0 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} x + 4y = 0 \\ -x - 6y = 7 \\ 4x - y = 0 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x + y - 4 = 1 \\ x - 2y + 4 = 0 \end{cases}$ (f) $\begin{cases} x - y + 1 = y \\ x + y - 1 = 1 \\ x + 2y + 1 = 4 \end{cases}$

(g) $\begin{cases} 1{,}1x + 0{,}9y = 7{,}1 \\ 2{,}1x + 0{,}8y = 7{,}3 \end{cases}$ (h) $\begin{cases} x - 0{,}17y = 1{,}2 \\ 1{,}7x - 10y = 12 \end{cases}$

☆☆ **Exercice II_{67} :** *Résous (graphiquement et par le calcul) :*

$$(a) \quad \begin{cases} 1{,}11x + 2{,}17y = 0{,}7 \\ 2{,}17x - 0{,}15y = 0{,}8 \end{cases}$$

$$(b) \quad \begin{cases} -0{,}102x + 0{,}14y = 0{,}01 \\ 0{,}201x - 0{,}17y = 0{,}02 \end{cases}$$

$$(c) \quad \begin{cases} -1{,}12x + 2{,}17y = 0{,}7 \\ 4{,}1x - 0{,}18y = 1{,}2 \end{cases}$$

☆☆ **Exercice II_{68} :** *Résous (par le calcul) les systèmes :*

$$(a) \quad \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + z = 1 \\ x + z = 4 \end{cases} \qquad (b) \quad \begin{cases} x - y + 2x = 1 \\ x + 2y = 0 \\ 3x + 4z = 2 \end{cases} \qquad (c) \quad \begin{cases} x + 3y - 1 = 0 \\ -y + z = 1 \\ 2x - z = 0 \end{cases}$$

$$(d) \quad \begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + y = 2 \\ x - 2z = 0 \end{cases} \qquad (e) \quad \begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ x + z = 2 \\ x + 2y = 1 \end{cases} \qquad (f) \quad \begin{cases} x - y + 3z = 1 \\ 2x + z = 0 \\ -2y + 4z = 1 \end{cases}$$

☆☆ **Exercice II_{69} :** *Résous :*

$$\begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} \\ x + y + z = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x = 2y = 4z \\ x + y + z = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x = 4z \\ 3y = 2z \\ x - y + z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2y \\ 3y - 2z = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

☆ ***Exercice II$_{70}$:*** *Dans un système d'axes orthogonaux, colorie la partie du plan définie par les inégalités :*

$$\begin{cases} y \geq 3x + 2 \\ x \leq 4 \end{cases}$$

☆ ***Exercice II$_{71}$:*** *Dans un système d'axes orthogonaux, colorie la partie du plan définie par les inégalités :*

$$\begin{cases} y \leq 3x - 1 \\ x \geq 4 \end{cases}$$

☆ ☆ ***Exercice II$_{72}$:*** *Quels sont les points du plan qui vérifient les conditions :*

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ x + 3y \geq 1 \end{cases}$$

☆ ☆ ***Exercice II$_{73}$:*** *Quels sont les points du plan qui vérifient :*

$$\begin{cases} x - y \leq 4 \\ y \leq 5 \\ x = 6 \end{cases}$$

☆ ☆ ***Exercice II$_{74}$:*** *Quels sont les points du plan qui vérifient :*

$$\begin{cases} 2 \leq x - y \leq 3 \\ 1 \leq 3x + 4y \leq 4 \end{cases}$$

☆ ☆ ***Exercice II$_{75}$:*** *Quels sont les points du plan qui vérifient :*

$$\begin{cases} 1 \leq 2x - y \leq 3 \\ -4 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

☆☆ **Exercice II$_{76}$:** Quels sont les points du plan définis par :

$$\begin{cases} 1 \leq 2x + y \leq 3 \\ 0 \leq 3x - y \leq 1 \\ x = 4 \end{cases}$$

☆☆ **Exercice II$_{77}$:** Que peut-on dire des abscisses des points qui vérifient :

$$\begin{cases} -3 \leq x - y \leq 2 \\ 2 \leq x + 2y \leq 4 \end{cases}$$

☆☆ **Exercice II$_{78}$:** Que peut-on dire des abscisses des points qui vérifient :

$$\begin{cases} -3 \leq x - 2y \leq 4 \\ -1 \leq x + y \leq 2 \end{cases}$$

Que peut-on dire de leurs ordonnées ?

☆☆ **Exercice II$_{79}$:** Quels sont les points du plan qui vérifient les conditions :

$$\begin{cases} 3x - y = 1 \\ 3 \leq x - 4y \leq 5 \end{cases}$$

☆☆ **Exercice II$_{80}$:** Quels sont les points du plan qui vérifient les systèmes suivants :

(a) $\begin{cases} x - 3y \leq 1 \\ 3x + 2y \leq 2 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 3 \leq x - y \leq 4 \\ 0 \leq 2x + 3y \leq 1 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ y \geq 3x \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x + y = 7 \\ 0 \leq 2x - y \leq 4 \end{cases}$

☆☆☆ **Exercice II_{81}** : *Donne un système de trois inéquations qui caractérise les points intérieurs au triangle de sommets A (1;4) , B (3;-4) et C (2;5) .*

☆☆☆ **Exercice II_{82}** : *Dans un système d'axes orthogonaux, place les points :*

A (-4;1) , B (3;2) , C (1;4) et D (-6;3)

Ces points sont les sommets d'un parallélogramme.

Donne un système de quatre inéquations qui caractérise les points intérieurs à ce parallélogramme.

☆☆ **Exercice II_{83}** : *Dans un système d'axes orthogonaux, place les points A (7;1) et B (-1;5) .*

Donne un système d'équation(s) et d'inéquation(s) qui caractérise les points du segment AB .

☆ **Exercice II_{84}** : *Trouver deux nombres entiers n et p dont la somme est 212 et tels que le plus grand soit égal à trois fois le plus petit.*

☆☆ **Exercice II_{85}** : *Trouver deux chiffres a et b dont la somme est 11 , et tels que les nombres qui s'écrivent ab et ba aient pour différence 9 .*

☆☆ **Exercice II_{86}** : *Trouver deux nombres entiers n et p dont la somme est 1028 , et tels que la division entière de n par p , ait pour quotient 13 et pour reste 48 .*

☆ **Exercice II_{87}** : *Trois paquets de gâteaux et quatre pots de confiture coûtent 50 F . Quatre paquets de gâteaux et deux pots de confiture coûtent 39 F . Quel est le prix d'un paquet de gâteaux ? d'un pot de confitures ?*

☆ **Exercice II_{88}** : *Trois livres de géographie et cinq livres de physique pèsent 820 g . Quatre livres de géographie et deux livres de physique pèsent 528 g . Combien pèse un livre de géographie ? un livre de physique ?*

☆☆ **Exercice II_{89} :** *Pour aller de la ville A à la ville B, un cycliste roule à une vitesse v km/h ; il part à 14 h 13 et arrive à 16 h 32. Au retour il est poussé par le vent et roule à (v+10) km/h ; il part à 17 h 51 et arrive à 19 h 23.*

Détermine v et la distance d de A à B.

☆☆☆ **Exercice II_{90} :** *Un véhicule parcourt un trajet de 210 km. Une partie de x km est parcourue à 90 km/h ; les y km restants sont parcourus à 60 km/h. Calcule x et y sachant que la durée totale du trajet est 2 h 43 mn.*

☆ **Exercice II_{91} :** *Détermine a et b tels que la droite d'équation réduite $y = ax + b$, passe par A (1;3) et B (-2;4).*

☆ **Exercice II_{92} :** *Détermine u et v tels que la droite d'équation $ux + vy = 1$ passe par M (2;-4) et N (3;-1).*

☆☆ **Exercice II_{93} :** *Détermine u et v tels que la droite d'équation $ux + vy = 1$ passe par P (3;-2) et B (-6;4). Que constate-t-on ? Peux-tu l'expliquer ?*

☆☆ **Exercice II_{94} :**

1) *Dans l'eau bouillante un thermomètre Celsius marque 100, un thermomètre Fahrenheit marque 212. Dans la glace fondante un thermomètre Celsius marque 0, un thermomètre Fahrenheit marque 32. Les deux graduations sont " à écarts proportionnels ", c'est-à-dire que la température Fahrenheit f et la température Celsius c, sont liées par une relation du type $f = ac + b$.*

   Détermine a et b ; puis représente graphiquement cette relation (1mm pour 20 degrés, en abscisse et en ordonnée).

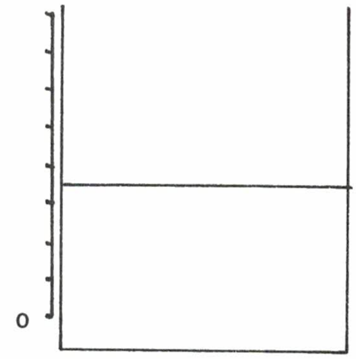
2) *A quelle température les deux thermomètres donnent-ils le même résultat ?*

☆☆ **Exercice II_{95} :**

1) *Un rail a une longueur L à 0°. Chaque fois que sa température augmente de 1°, sa longueur augmente de ε. Calcule (en fonction de L et de ε) sa longueur à 14°, sa longueur à 10°.*

2) *A 19° la longueur du rail est 20,07 m ; à - 7° elle est de 19,99 m. Calcule ε et L.*

☆☆☆ **Exercice II$_{96}$** : *Un récipient a une forme cylindrique de section s (cm^2) ; on a fixé le long de ce récipient une règle graduée en cm . Le zéro de la règle n'est pas au niveau du fond ; de telle façon que lorsqu'on met x litres de liquide dans le récipient, le niveau arrive en face du zéro.*



1) *Calcule, en fonction de x et de s, la quantité de liquide qui se trouve dans le flacon lorsque le niveau est en face de la graduation n.*

2) *Lorsqu'on met 8,2 l de liquide, le niveau est en face de la graduation 7,1 . Lorsqu'on met 11,4 l de liquide le niveau est en face de la graduation 14,1 . Calcule x et s.*

3) *A quelle distance du fond se trouve le zéro de la règle ?*

☆☆☆ **Exercice II$_{97}$** :

1) *Un flacon a une masse m (kg) lorsqu'il est vide. On verse dedans 1,07 l d'un liquide L de masse volumique μ (kg/l) , il a alors une masse de 1,33 kg . Quelle relation entre m et μ peut-on en déduire ? Représente graphiquement cette relation (unités 10 cm pour 1 l et 10 cm pour 1 kg/l).*

2) *Lorsque ce flacon contient 2,01 l du liquide L , sa masse est 2,22 kg . Détermine graphiquement, puis par le calcul, m et μ.*

3) *Un (autre) flacon a, lorsque l'on y verse 1,03 l d'un (autre) liquide L , une masse comprise entre 1,65 et 1,66 kg . Lorsque l'on y verse 2,17 l du liquide L , il a une masse comprise entre 2,68 et 2,70 kg .*

Que peut-on en déduire pour la masse du flacon vide, et pour la masse volumique du liquide L . (Fais d'abord une étude graphique, puis précise les valeurs par des calculs) .

☆☆☆☆ **Exercice II_{98}** : *Dans une éprouvette on superpose deux liquides non miscibles :*

- *du sulfure de carbone, de masse volumique 1,26 g/cm^3 ,*
- *du benzène de masse volumique 0,9 g/cm^3 .*

1) *La masse totale est 46 g , et le volume total 44 cm^3 .*

   Soit V_1 et V_2 les volumes de sulfure de carbone et de benzène. Traduire les données en deux relations de la forme $aV_1 + bV_2 = c$. Représenter graphiquement ces relations (unité 1 cm pour 5 cm^3) .

2) *En fait les mesures de masse et de volume du mélange ne sont pas aussi précises qu'à la question 1 . On sait seulement que le volume total est compris entre 42 et 45 cm^3 , et la masse totale comprise entre 45 et 47 g .*

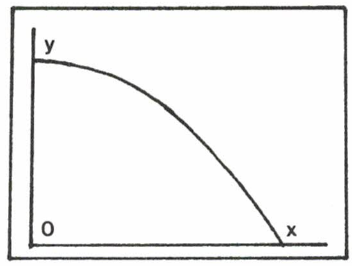
   Traduire en formules ces nouvelles données. Représenter graphiquement . Qu'en déduire pour V_1 et V_2 ?

Thème : ***INTERPOLATION LINEAIRE***

LA REPRESENTATION GRAPHIQUE DU COSINUS

On se propose de représenter graphiquement la fonction cosinus ; on choisit comme unité d'angle le degré, et on se limite aux angles compris entre 0 et 90° .

Prends une feuille de papier millimétré, marque des axes comme sur la figure. Choisis comme unité 1 pour 20 cm sur l'axe des y , et 4° pour 1 cm sur l'axe des x .



Marque alors les points correspondant à (x,cos x) pour x = 0° , 10° , 20° ,... Puis joins ces points avec ta règle, tu obtiens un dessin qui ressemble à celui de la figure ci-dessous.

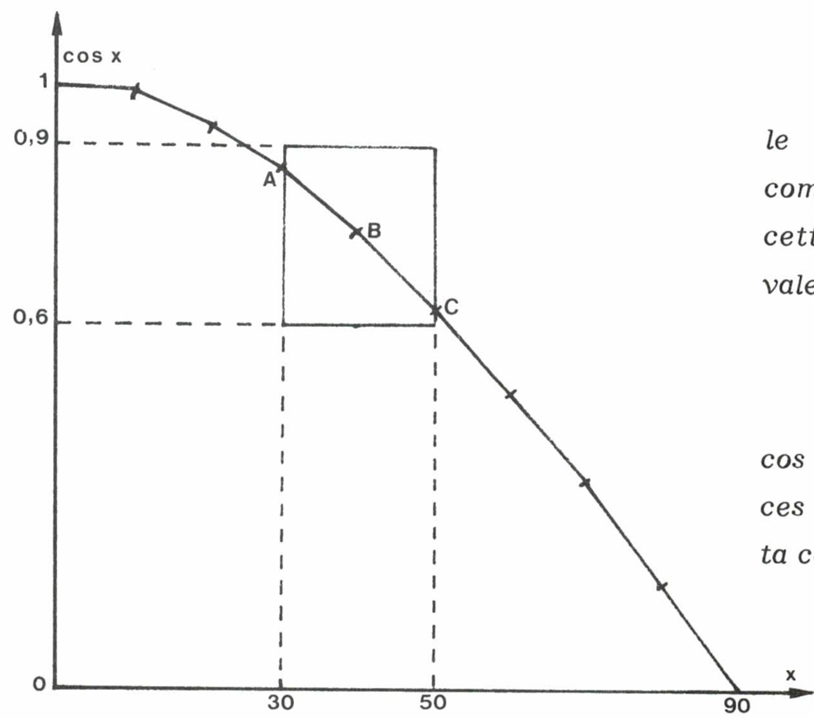


fig. 2

Maintenant, tu peux lire sur le graphique le cosinus des angles compris entre 0 et 90° . Bien sûr cette lecture ne te donnera qu'une valeur approchée.

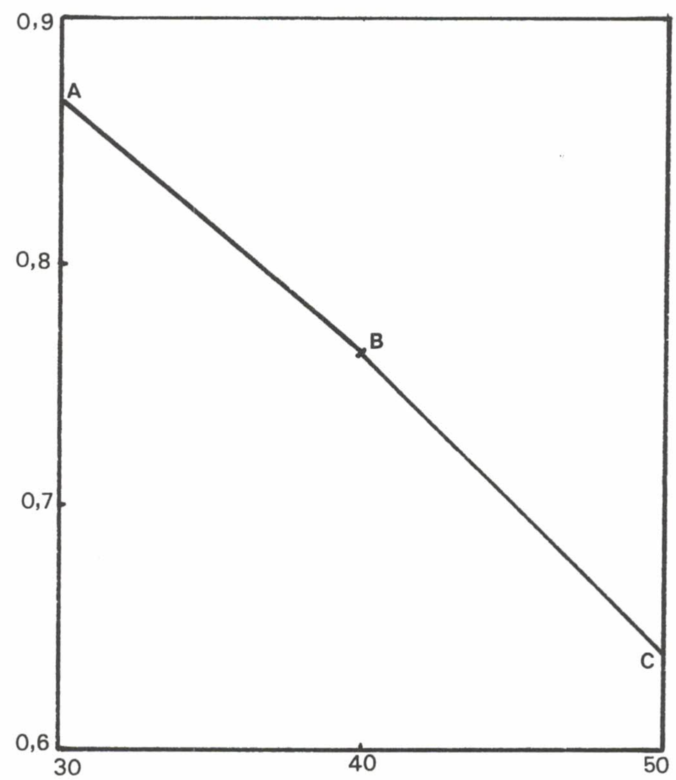
Essaie de lire ainsi cos 34° , cos 55° , cos 17° , cos 6° , et compare ces valeurs lues avec celles que donne ta calculette.

Le manque de précision des valeurs lues a deux origines.

- *D'une part le fait que ton graphique ne peut pas être parfait, quel que soit le soin avec lequel il a été dessiné. L'épaisseur du trait est de quelques dixièmes de millimètre ; or à l'échelle que tu as prise (20 cm pour 1 sur l'axe des y) une erreur de 0,1 mm représente une erreur de 0,0005 sur la lecture du cosinus.*

- *D'autre part, en joignant avec ta règle les points marqués de 10° en 10°, tu as fait comme si sur ces neuf intervalles la fonction cosinus était affine ; ce qui n'est pas vrai.*

Pour éliminer les erreurs dues à la précision du tracé, on peut faire un agrandissement du graphique. Par exemple en agrandissant à l'échelle 4 la partie du dessin qui correspond aux angles compris entre 30° et 50° (partie encadrée de la figure 2), tu obtiendras une figure analogue à la figure ci-contre. Fais cette figure et essaie d'y lire cos 34° . Compare avec ce que tu avais trouvé avec le premier dessin.



En fait tu peux calculer la valeur que tu lirais si ta figure était d'une précision parfaite. Les points A et B ont pour coordonnées (dans les axes de la fig. 2) :

pour A : (30 ; cos 30°) soit (30 ; 0,8660254)
pour B : (40 ; cos 40°) soit (40 ; 0,7660444)

Le coefficient directeur de la droite AB , est donc :

$$\frac{0{,}8660254\ldots - 0{,}7660444\ldots}{30 - 40} \approx -0{,}00999809$$

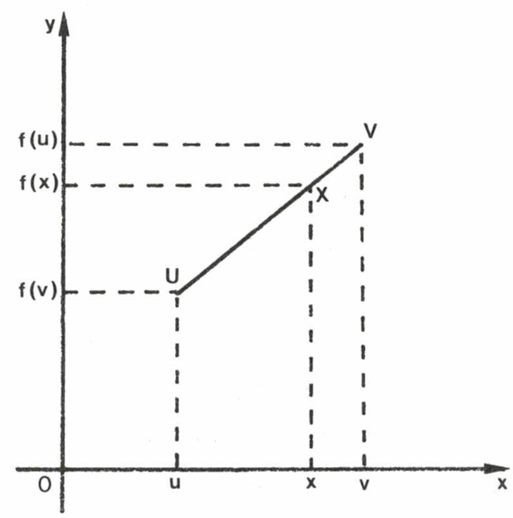
Donc tu devrais lire (si ta figure était parfaite) une valeur l telle que :

$$\frac{l - 0{,}7660444\ldots}{35 - 40} \approx -0{,}00999809$$

Soit $l = 0{,}7660444\ldots + (-5) \times (-0{,}00999809) \approx 0{,}8160349\ldots$

Alors que la calculette donne $\cos 35° = 0{,}8191520$ *, la différence entre* l *et* $\cos 35°$ *est un peu supérieure à* $3/1\,000$ *.*

Ce procédé de calcul qui consiste, connaissant les valeurs d'une fonction en deux valeurs u *et* v *, à " faire comme si elle était affine sur l'intervalle* $[u,v]$ *", s'appelle l'interpolation linéaire.*



Remarquons que ceci revient encore à supposer que pour x *entre* u *et* v *, l'accroissement* $f(x) - f(u)$ *[* $f(x) - f(u)$ *s'appelle un " accroissement " même s'il est négatif] est proportionnel à* $x - u$ *. En calculant le coefficient directeur :*

$$\frac{f(v) - f(u)}{v - u},$$

on calcule le coefficient de proportionnalité. On multiplie ensuite ce coefficient par $x - u$ *, pour obtenir la valeur de* $f(x)$ *:*

$f(v) - f(u)$	$f(x) - f(u)$	× coefficient directeur
$v - u$	$x - u$	

En particulier si $x = \frac{v+u}{2}$ *, c'est-à-dire si* x *est " juste au milieu entre* u *et* v *", alors la valeur approchée de* $f(x)$ *est :*

$$\frac{f(v) + f(u)}{2};$$

elle est " juste au milieu entre $f(u)$ *et* $f(v)$ *".*

☆ **Exercice 1 :** *Reprends ton premier graphique, et par lecture directe donne une valeur approchée de* $\cos 13°$.

On note M *et* N *les points du graphique correspondant à* $10°$ *et à* $20°$. *Donne le coefficient directeur de la droite* MN . *Puis calcule la valeur approchée de* $\cos 13°$ *obtenue par interpolation linéaire entre* $10°$ *et* $20°$. *Compare avec la valeur de* $\cos 13°$ *donnée par ta calculette ; quelle est l'erreur faite dans le calcul par interpolation ?*

☆ **Exercice 2 :** *Reprends la méthode de l'exercice 1 pour calculer* $\cos 17°$.

☆ **Exercice 3 :** *Reprends la méthode de l'exercice 1 pour calculer* $\cos 19°$.

☆ **Exercice 4 :** *Calcule par interpolation linéaire entre* $20°$ *et* $30°$, *une valeur approchée de* $\sin 24°$.

☆☆ **Exercice 5 :** *Un angle* u *a pour cosinus* $0{,}317$; *par lecture sur le graphique vérifie que* u *est compris entre* 70 *et* $80°$. *Puis par un calcul d'interpolation linéaire donne une valeur approchée de* u *plus précise.*

FONCTIONS DONNEES PAR UNE TABLE DE VALEURS

Lorsque les calculettes n'existaient pas, pour calculer le cosinus et le sinus d'un angle on disposait d'une " table trigonométrique " , qui donnait les valeurs de $\cos x$ *et* $\sin x$ *de degré en degré (document page suivante) .*

Pour connaître le cosinus d'un angle non marqué dans la table (c'est-à-dire d'un angle qui n'était pas un nombre entier de degrés) , on faisait une interpolation linéaire entre les deux valeurs les plus proches données par la table.

☆☆ **Exercice 6 :** *En utilisant la table trigonométrique calcule* $\cos 36{,}5°$. *Compare le résultat obtenu avec la valeur donnée par ta calculette. Pourquoi la table ne donne-t-elle les cosinus qu'avec quatre décimales ?*

☆ ***Exercice 7 :*** *En utilisant la table trigonométrique, calcule* $\cos 27{,}8°$ *. Calcule de même* $\cos 27{,}79°$ *. Compare avec les valeurs données par ta calculette. Comme tu peux le constater, avec une telle table il était vain de chercher à distinguer deux angles par leur cosinus , s'ils différaient de* $0{,}01$ *degré.*

☆☆ ***Exercice 8 :*** *En utilisant la table trigonométrique, calcule* $\cos 41° 18'$ *(une minute d'arc vaut* $\frac{1}{60}$ *de degré) . Puis calcule* $\cos 41° 18'$ *.*

☆☆ ***Exercice 9 :*** *Un angle* u *est tel que* $\cos u = 0{,}816$ *. D'après la table il est compris entre* $35°$ *et* $36°$ *. Donne une valeur plus précise de cet angle en faisant une interpolation linéaire. Exprime la valeur trouvée en degrés et minutes.*

☆ ***Exercice 10 :*** *La table ne donne les cosinus et sinus que des angles compris entre* 0 *et* $45°$ *. Où peux-tu lire* $\cos 63°$ *?*

Degrés	Sinus	Cosinus
1	0,0175	0,9999
2	0,0349	0,9994
3	0,0523	0,9986
4	0,0698	0,9976
5	0,0872	0,9962
6	0,1045	0,9945
7	0,1219	0,9926
8	0,1392	0,9903
9	0,1564	0,9877
10	0,1737	0,9848
11	0,1908	0,9816
12	0,2079	0,9782
13	0,2250	0,9744
14	0,2419	0,9703
15	0,2588	0,9659
16	0,2756	0,9613
17	0,2924	0,9563
18	0,3090	0,9511
19	0,3256	0,9455
20	0,3420	0,9397
21	0,3584	0,9336
22	0,3746	0,9272
23	0,3907	0,9205
24	0,4067	0,9136
25	0,4226	0,9063
26	0,4384	0,8988
27	0,4540	0,8910
28	0,4695	0,8830
29	0,4848	0,8746
30	0,5000	0,8660
31	0,5150	0,8572
32	0,5299	0,8481
33	0,5446	0,8387
34	0,5592	0,8290
35	0,5736	0,8192
36	0,5878	0,8090
37	0,6018	0,7986
38	0,6157	0,7880
39	0,6293	0,7771
40	0,6428	0,7660
41	0,6561	0,7547
42	0,6691	0,7431
43	0,6820	0,7314
44	0,6947	0,7193
45	0,7071	0,7071

AUTRES EXEMPLES. LES LIMITES DU PROCEDE

Comme on vient de le voir les valeurs approchées du cosinus et du sinus données par une table et en employant l'interpolation linéaire sont beaucoup moins précises que celles qui sont données par une calculette. Ceci justifie que l'on range les tables trigonométriques au rang des outils démodés. Mais le procédé de calcul par interpolation linéaire, s'il se trouve ainsi peu employé par les élèves de seconde ou de première, reste cependant fréquemment utilisé. Très souvent on dispose de fonctions qui n'ont été calculées — ou plus souvent mesurées — que pour certaines valeurs de la variable. Si l'on veut les évaluer — même grossièrement — pour d'autres valeurs de la variable, l'interpolation linéaire peut être un précieux outil. Voici quelques exemples.

☆☆☆ **Exercice 11 :** *Un train est passé devant la gare de X au km 214,5 à 3 h 14 ; il est passé devant la gare de Y au km 243,7 à 3 h 31 . A quelle heure est-il passé au km 231 ?*

Tu remarqueras que, dans ce cas, faire un calcul par interpolation linéaire, c'est supposer que la vitesse du train est constante. En fait il est probable que cette vitesse est, à peu près constante, donc le résultat que nous obtiendrons est raisonnable.

☆☆ **Exercice 12 :** *Un moteur développe la puissance suivante : 7 kw à 1 000 t/mn , 18 kw à 2 000 t/mn , 30 kw à 3 000 t/mn , 46 kw à 4 000 t/mn et 60 kw à 5 000 t/mn .*

Détermine, par interpolation linéaire, sa puissance à 2 300 t/mn .
A quelle vitesse doit-il tourner pour que la puissance soit de 40 kw ?

☆☆ **Exercice 13 :** *Pour maintenir une température de 20° à l'intérieur d'un immeuble, on consomme 100 l de combustible par jour lorsque la température extérieure est de 0° , 150 l lorsqu'elle est de - 5° et 220 l lorsqu'elle est de - 10° .*

Combien consomme-t-on si elle est de - 3° ?

Bien sûr tous ces calculs ne donnent un résultat plausible que parce que l'hypothèse de proportionnalité de l'accroissement de f(x) à l'accroissement de x est raisonnable. Dans le cas du cosinus on peut démontrer qu'elle l'est (ce n'est pas très difficile, mais cela nécessite toutefois qu'on ait bien compris le programme de terminale C) . Dans le cas des fonctions qui interviennent dans les trois derniers exercices, c'est notre intuition du phénomène physique en jeu qui nous dit que, faute de mieux, nous pouvons la considérer comme à peu près vraie. Et bien sûr il est des phénomènes dans lesquels elle paraît totalement inadaptée. Par exemple :

Le 3 mai à 6 h du matin la température était de 2° . Le 4 mai à 18 h elle était de 18° . Quelle était la température le 3 mai à 16 h ?

Ou encore :

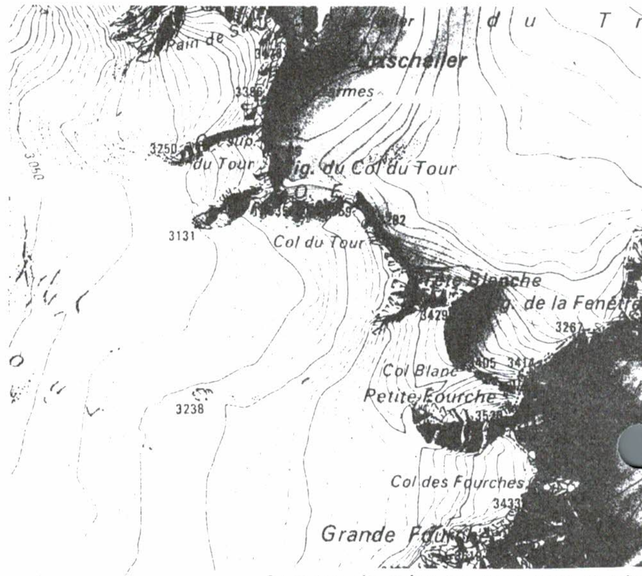
Au premier tirage du Loto la somme des nombres tirés était 87 . Au sixième tirage cette somme était 131 . Quelle était cette somme au quatrième tirage ?

☆ **Exercice 14 :** *Trouve ainsi des problèmes tirés de la vie courante, de la physique, de phénomènes économiques ,... dans lesquels cette hypothèse de proportionnalité des accroissements paraît plausible, et d'autres où elle paraît totalement inadaptée.*

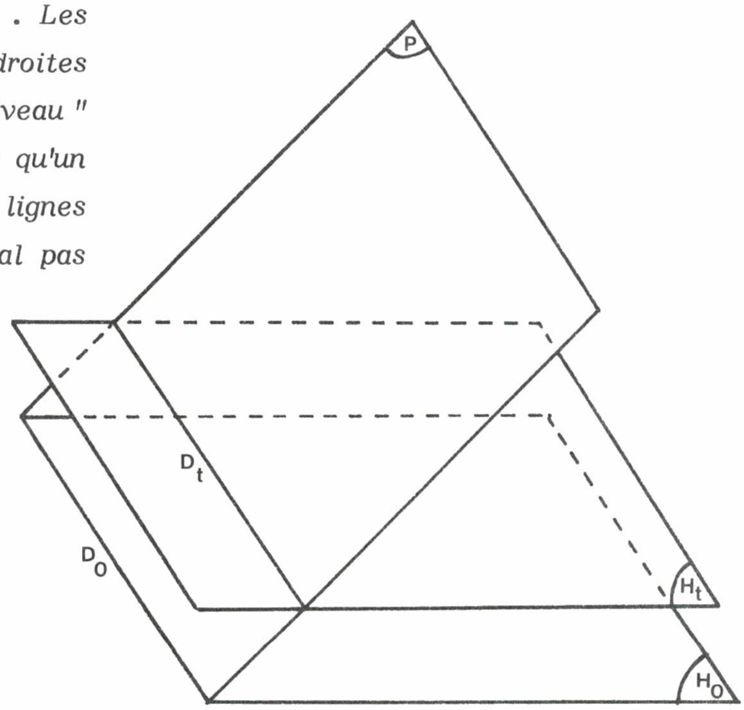
Thème : PROGRAMMATION LINEAIRE

1) LIGNES DE NIVEAU D'UN PLAN

Considérons un plan P, qui n'est pas horizontal. Soit H_t le plan horizontal formé des points qui sont à l'altitude t. La droite $D_t = P \cap H_t$ est l'ensemble des points de P qui sont à l'altitude t.
Pour une autre altitude t', nous obtiendrons une droite $D_{t'}$ parallèle à D_t (un point qui appartiendrait à D_t et à $D_{t'}$ devrait être à la fois à l'altitude t et à l'altitude t'). Les droites D_t sont appelées les " droites de niveau " ou les " lignes de niveau " du plan P. Toute surface (autre qu'un plan horizontal) a ainsi des lignes de niveau ; ce ne sont en général pas des droites.



lignes de niveau sur une carte



2) EQUATIONS DES LIGNES DE NIVEAU D'UN PLAN

Choisissons un repère $0x,0y$ dans le plan P ; pour simplifier nous supposerons que l'origine est au niveau zéro.

La droite D_1 a une équation du type $ux + vy = w$; et $w \neq 0$ puisque D_1 ne passe pas par l'origine 0.

En divisant par w *, nous obtenons une nouvelle équation de* D_1 *:*

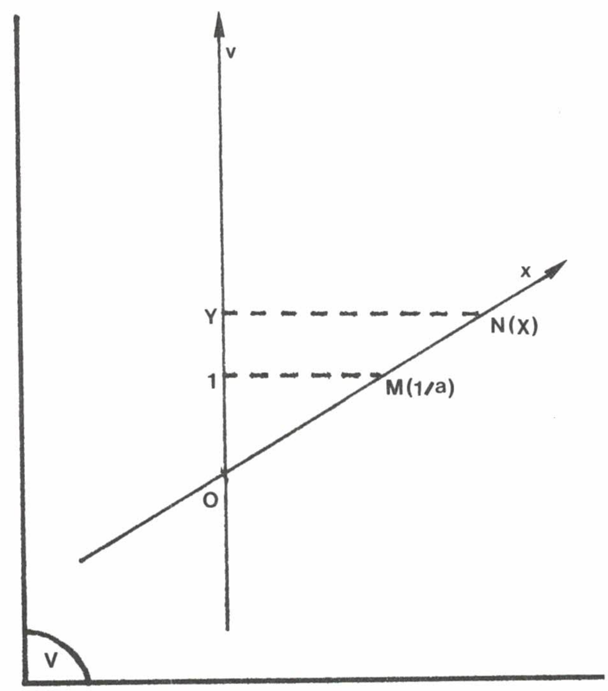
$$\frac{u}{w} x + \frac{v}{w} y = 1$$

Nous poserons $\frac{u}{w} = a$ *et* $\frac{v}{w} = b$ *, et nous aurons l'équation* $ax + by = 1$ *.*

La droite D_0 *a pour équation* $ax + by = 0$ *(puisque c'est la parallèle à* D_1 *passant par l'origine) . Les autres droites de niveau ont des équations de la forme* $ax + by = h$ *(puisqu'elles sont parallèles à* D_0 *et* D_1*) . L'altitude dépend de* h *; nous allons montrer qu'elle est égale à* h *.*

Supposons que Ox n'est pas horizontale ; si elle l'était il faudrait reprendre le raisonnement en remplaçant Ox par Oy .

La droite Ox est dans un certain plan vertical V , qui contient aussi une droite verticale passant par O . Dessinons ce plan V (Ov est la droite verticale passant par O , orientée du bas vers le haut) . Puisque Ox n'est pas horizontale, il existe sur Ox des points de toutes altitudes ; en particulier un point M d'altitude 1 . Ce point M est sur la droite D_1 ; son abscisse x est donnée par $ax + b \times 0 = 1$, donc $x = \frac{1}{a}$ (ce qui montre que l'hypothèse que Ox n'est pas horizontale, implique que a n'est pas nul) .

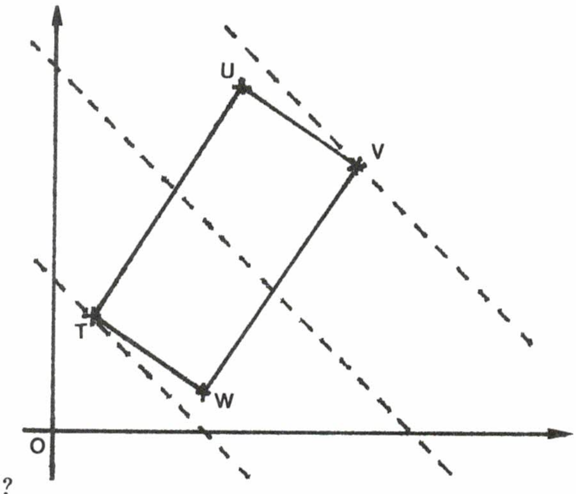


Pour avoir l'altitude du point N d'abscisse X sur Ox , il nous suffit de calculer Y ; et pour cela nous utilisons le thèorème de Thalès : $Y = X \times \frac{1}{(1/a)} = aX$.

Ainsi le point du plan V de coordonnées (X,0) a pour altitude aX . Et la droite D(h) d'équation $ax + by = h$, qui contient le point $(\frac{h}{a},0)$, a pour altitude $a \times \frac{h}{a} = h$.

3) DETERMINATION DU POINT LE PLUS ELEVE D'UN DOMAINE

Une plaque rectangulaire TUVW se trouve dans un plan P non horizontal. Dans un repère (0x,0y) du plan P, on a T (1;3), U (5;9), V (8;7) et W (4;1).



Supposons que dans ce plan l'altitude du point (x,y) soit donnée par la formule $t(x,y) = x + y$.

Quel est le point le plus élevé du rectangle ?

Les lignes de niveau sont les droites d'équation $x + y = t$. Certaines rencontrent le rectangle, d'autres pas. Il est clair que D_4 (d'équation $x + y = 4$) passe par T, que D_{15} (d'équation $x + y = 15$) passe par V, et que D_t rencontre le rectangle si et seulement si $4 \leq t \leq 15$. Donc le point le plus haut est V ; son altitude est 15.

☆☆ **Exercice 1 :** *Dans le plan P muni d'un repère orthonormé (unité 1 cm) (0x,0y), on considère le pentagone de sommets A (1;1), B (3;5), C (-3;3), D (-5;0) et E (-2;-1).*

On suppose que l'altitude d'un point M (x,y) de P est donnée par la formule $t(x,y) = 2y - x$. Détermine le point le plus élevé, et le point le moins élevé du pentagone.

☆☆ **Exercice 2 :**

a) *Dans le plan P muni d'un repère orthonormé (0x,0y) (unité 1 cm), on considère le domaine U défini par :*

$$\begin{cases} x \geq 0 \text{ et } y \geq 0 \\ 3 \leq x + y \leq 4 \end{cases}$$

Dessine ce domaine.

b) *On suppose que l'altitude du point M (x,y) est donnée par la formule :*

$$t(x,y) = 3x + y$$

Quel est le point le plus élevé de U ? Quel est le point le moins élevé de U ?

☆☆ **Exercice 3 :** *Dans un plan P muni d'un repère orthonormé (0x,0y) (unité 0,5 cm), dessine le rectangle de sommets A (4;1) , B (12;3) , C (11;7) et D (3;5).*

Dans ce plan l'altitude du point M (x,y) est donnée par la formule :

$$t(x,y) = 4x + y$$

Quel(s) est(sont) le(s) point(s) le(s) plus élevé(s) de ce rectangle ?

Remarque : *Dans tous ces cas le domaine considéré est polygonal. Et le maximum de l'altitude est obtenu, soit en un sommet, soit sur tout un côté de ce polygone. Le phénomène est général ; ce qui simplifie la recherche du maximum : on calcule les altitudes des sommets, et on cherche la plus grande.*

4) PROGRAMMATION LINEAIRE

Première partie du problème

Dans une usine on produit des frigos et des machines à laver. Elle comporte deux ateliers :

Un atelier de montage qui peut fournir 250 h de travail par jour. Le montage d'un frigo demande 1,5 h de travail. Le montage d'une machine à laver demande 2,5 h de travail.

Un atelier de peinture qui peut fournir 60 h de travail par jour. La peinture d'un frigo nécessite 0,6 h de travail, et celle d'une machine à laver 0,4 h.

La production est limitée par le fait que le fabricant de moteurs ne peut livrer plus de 110 moteurs par jour.

Notons x et y les quantités de frigos et de machines à laver construites chaque jour. Les trois contraintes ci-dessus se traduisent par les inéquations suivantes :

Passage dans l'atelier de montage :

$$1{,}5 \times x + 2{,}5 \times y \leq 250$$

Passage dans l'atelier de peinture :

$$0{,}6 \times x + 0{,}4 \times y \leq 60$$

Limitation du nombre des moteurs disponibles :

$$x + y \leq 110$$

Pour savoir quelles sont les valeurs de x et y possibles, nous allons représenter graphiquement ces trois inéquations. Choisissons un système d'axes (unité 1 cm pour 10 appareils).

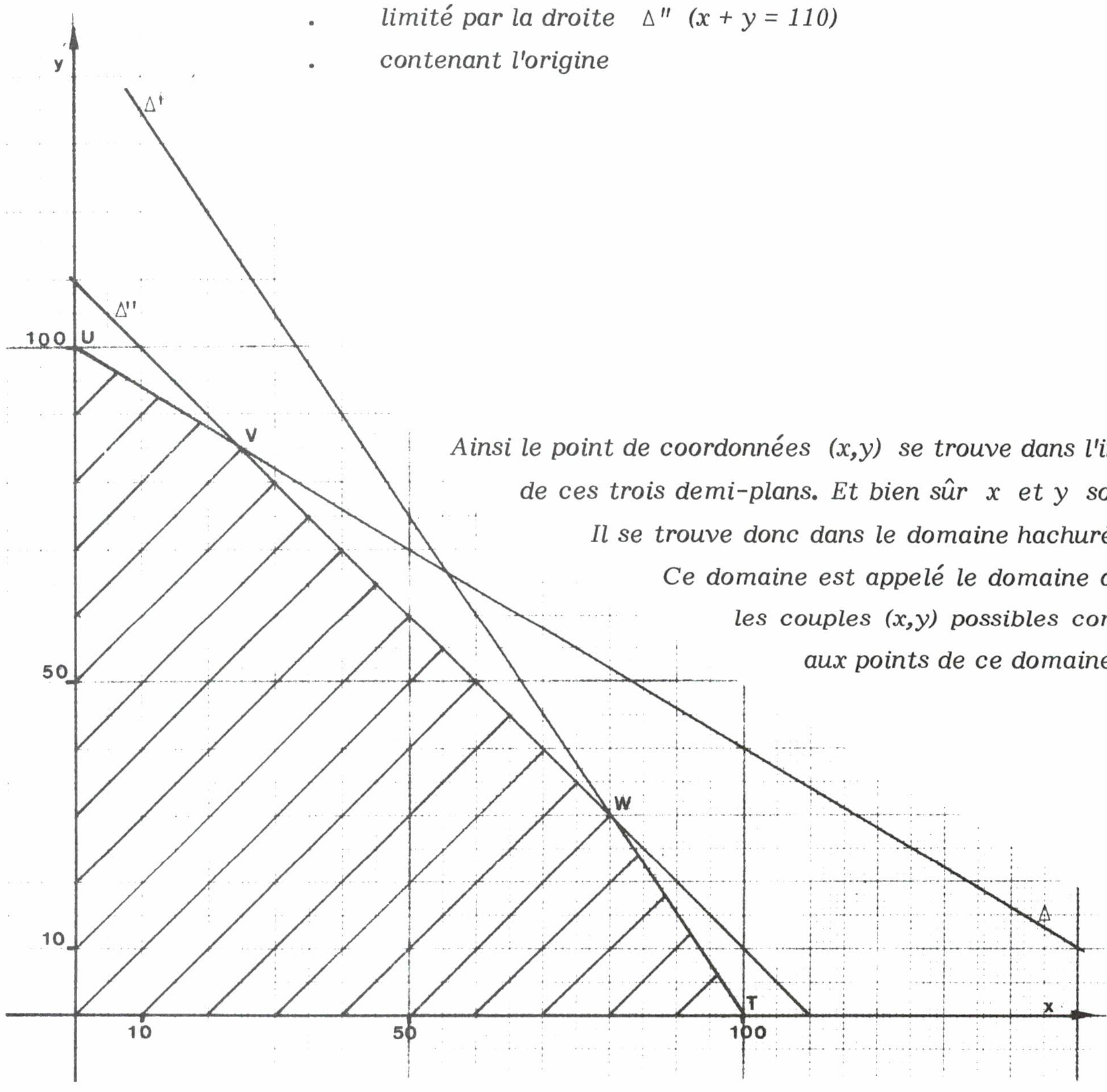
L'inéquation $1{,}5x + 2{,}5y \leq 250$ signifie que le point de coordonnées (x,y) appartient à l'un des demi-plans définis par la droite $\Delta\ (1{,}5x + 2{,}5y = 250)$. Celui qui contient 0.

De même $0{,}6x + 0{,}4y \leq 60$ signifie que le point de coordonnées (x,y) est dans le demi-plan

- *limité par la droite $\Delta'\ (0{,}6x + 0{,}4y = 60)$*
- *contenant l'origine*

Enfin $x + y \leq 110$ signifie que le point de coordonnées (x,y) est dans le demi-plan

- *limité par la droite $\Delta''\ (x + y = 110)$*
- *contenant l'origine*



Ainsi le point de coordonnées (x,y) se trouve dans l'intersection de ces trois demi-plans. Et bien sûr x et y sont positifs. Il se trouve donc dans le domaine hachuré ci-contre. Ce domaine est appelé le domaine admissible : les couples (x,y) possibles correspondent aux points de ce domaine.

Deuxième partie du problème

La vente d'un frigo dégage un bénéfice de 180 F, celle d'une machine à laver dégage un bénéfice de 200 F. Quel rythme de production faut-il adopter pour avoir un bénéfice maximum ?

Si la production est de x frigos et y machines à laver, le bénéfice est :

$$b(x,y) = 180x + 200y$$

Nous sommes ainsi ramenés à un problème formellement identique à celui qui a été résolu en 3) :

Un domaine est donné dans le plan, et nous cherchons le point (ou les points) $M(x,y)$ de ce domaine où b $(= 180x + 200y)$ prend la plus grande valeur possible.

Nous considérerons alors les droites d'équations $180x + 200y = B$ (que nous appellerons encore les lignes de niveau). Elles sont toutes parallèles. Nous cherchons celles qui rencontrent le domaine admissible. Celui-ci est limité par une ligne polygonale de sommets $0, U, V, W, T$. Nous calculons $b(0) = 0$, $b(T) = 18\,000$, $b(U) = 20\,000$, $b(V) = 21\,500$ et $b(W) = 20\,400$. La plus petite de ces cinq valeurs est 0, la plus grande est $21\,500$. La droite $180x + 200y = B$ rencontre le domaine si et seulement si $0 \leq B \leq 21\,500$. Ainsi le bénéfice maximum est 21500 F, il est obtenu au point V, c'est-à-dire pour $x = 25$ et $y = 85$.

Ce type de démarche s'appelle la " programmation linéaire " ; c'est un outil souvent utilisé en économie.

☆☆☆**Exercice 4** : *Une entreprise fabrique deux produits P_1 et P_2. Les contraintes sont les suivantes :*

- *Par jour on dispose de 100 heures de travail. Il en faut deux pour fabriquer une unité de P_1 et trois pour une unité de P_2.*
- *La matière première disponible est de 10 000 kg par jour. Il en faut 250 kg pour une unité de P_1 et 250 kg pour une unité de P_2.*
- *L'entreprise s'est engagée à livrer à l'un de ses clients 10 P_1 et 15 P_2 par jour.*

1) *On note x et y les quantités des produits P_1 et P_2 fabriqués chaque jour. Traduire ces contraintes par des inéquations portant sur x et y.*

Représenter graphiquement le domaine admissible (2,5 cm pour 10 unités sur chacun des axes).

2) *Le bénéfice sur un objet P_1 est de 80 F, il est de 100 F sur un objet P_2. Quel est le rythme journalier de fabrication qui procure le meilleur bénéfice ?*

☆☆☆☆ **Exercice 5 :** *On dispose de trois types de marchandises : 350 objets de type A, 250 objets de type B et 100 objets de type C.*

On décide de les vendre en faisant des lots. D'une part des lots à 240 F comportant 20 A, 15 B et 4 C. D'autre part des lots à 40 F comportant 3 A, 2 B et 1 C.

On fera x lots à 240 F et y lots à 40 F. Ecrire les inéquations en x et y qui expriment que le stock des trois marchandises est limité.

1) *Représenter graphiquement le domaine admissible (5 cm pour 10 unités sur l'axe des x, et 1 cm pour 10 unités sur l'axe des y).*

2) *Combien fera-t-on de lots à 240 F, et de lots à 40 F si l'on veut un bénéfice maximum ? Combien restera-t-il alors d'objets de type A, de type B, de type C ?*

☆☆☆ **Exercice 6 :** *Un élève prépare une interrogation d'histoire et géographie. Il estime que 30 minutes passées à réviser le cours d'histoire permettent de gagner un point ; tandis qu'en géographie il faut 20 minutes pour espérer le même résultat.*

Il estime qu'il lui faut " gagner " au moins 8 points.

Il décide de passer au moins une heure à étudier la géographie, et au plus deux heures à l'histoire. Il décide de passer au plus la moitié du temps à la géographie.

1) *Notons x et y les temps (en minutes) consacrés à l'étude respectivement de la géographie et de l'histoire. Traduis ces contraintes en des inéquations portant sur x et y.*

Puis représente graphiquement ces contraintes (une minute sera représentée par 0,5 mm). Et dessine le domaine admissible.

2) *Quelle est la meilleure stratégie, c'est-à-dire celle qui devrait, en un minimum de temps, lui faire gagner 8 points ?*

☆☆☆ **Exercice 7 :** *Un élève prépare une interrogation d'histoire et géographie. Il dispose de deux heures pour ses révisions.*

Il préfère la géographie et décide de lui accorder au moins la moitié de son temps. Mais il estime devoir consacrer au moins une demi-heure à l'étude du cours d'histoire.

1) *Notons x et y les temps (en minutes) consacrés à l'étude respectivement de la géographie et de l'histoire. Traduis ces contraintes en des inéquations portant sur x et y.*

   Puis représente graphiquement ces contraintes (une minute sera représentée par 0,5 mm). Et dessine le domaine admissible.

2) *Il estime que quinze minutes passées à réviser le cours d'histoire rapportent un point, et vingt minutes passées à réviser le cours de géographie rapportent un point.*

   Quelle est la meilleure stratégie ?

☆☆☆☆ **Exercice 8 :** *Dans une cafétéria, on sert deux sortes de desserts glacés, à base de cocktail exotique, de glace et de fruits confits : la coupe créole et la coupe tropicale. La confection d'une coupe créole nécessite 8 cl de cocktail exotique, 2 dl de glace et 15 g de fruits confits ; celle d'une coupe tropicale 5 cl de cocktail exotique, 2 dl de glace et 25 g de fruits confits.*

Chaque jour, l'atelier de pâtisserie peut préparer 1600 cl de cocktail exotique, 520 dl de glace et 5000 g de fruits confits.

Soit x le nombre de coupes créoles, et y le nombre de coupes tropicales servies chaque jour.

1) *Ecrire les contraintes de confection des coupes.*

   A tout couple (x,y), on associe le point M de coordonnées (x,y) dans un repère orthonormé $(0x,0y)$ (1 cm représente 20 coupes).

2) *Déterminer graphiquement l'ensemble des points M, pour lesquels les contraintes de la question précédente sont vérifiées.*

3) *Sachant qu'une coupe créole est vendue 12 F et une coupe tropicale 10 F :*

   a) *Calculer, en fonction de x et de y, la recette journalière R.*

   b) *Calculer les coordonnées du point I, intersection de la droite d'équation $8x + 5y = 1600$ et de la droite d'équation $3x + 5y = 1000$.*

   c) *Déterminer le couple (x,y), pour lequel R est maximale et calculer cette valeur maximale.*

(Bac. G, 1987)

Fiche 4 : CALCUL FRACTIONNAIRE 2

Nota : Tous les résultats numériques doivent être donnés sous forme fractionnaire.

(1)

$\frac{x}{3} = \frac{1,6}{0,12}$ x = $\frac{1}{x} = \frac{3}{4}$ x =

$\frac{3}{0,7} = \frac{x}{2,31}$ x = $\frac{x}{7} = \frac{2}{21}$ x =

$\frac{x}{4} = \frac{0,11}{1,21}$ x = $\frac{3}{x} = \frac{7}{4}$ x =

$\frac{2}{x} = \frac{3}{4}$ x = $\frac{2}{x} = \frac{1,21}{11}$ x =

$\frac{x}{3} = \frac{5}{6}$ x = $\frac{3}{x} = \frac{6,6}{1,5}$ x =

(2)

$-\frac{0,3}{7} = \frac{1}{3} \times x$ x = $-\frac{3}{2}x = \frac{2}{3}$ x =

$\frac{0,4}{3} = -\frac{3}{4} \times x$ x = $-\frac{3}{4} \times x = \frac{9}{4}$ x =

$-\frac{0,2}{x} = -\frac{2}{3} \times \frac{6}{7}$ x = $-\frac{7}{2}x = \frac{70}{3}$ x =

$-0,5x = \frac{3}{4}$ x = $-0,55x = \frac{11}{4}$ x =

$0,7x = \frac{7}{100}$ x = $-3,5 \times x = -\frac{7}{9}$ x =

(3) Classer dans l'ordre croissant les nombres (sans calculette) :

a) $\frac{3}{4}$; $\frac{31}{41}$; $\frac{29}{39}$; $\frac{31}{42}$; 1,72

b) $\frac{101}{76}$; $\frac{4}{3}$; $\frac{99}{74}$; $\frac{41}{30}$; $\frac{16}{15}$

c) $\frac{4}{5}$; $\frac{81}{101}$; $\frac{79}{100}$; $\frac{82}{98}$; 0,81

d) 0,99 ; $\frac{991}{1001}$; $\frac{127}{128}$; $\frac{79}{80}$; $\frac{298}{300}$

4 Résoudre les inéquations :

$\frac{x}{4} \geq \frac{2}{3}$	x ...	$\frac{3}{7} \leq \frac{x}{4}$	x ...
$\frac{2}{3} \times \frac{x}{4} \leq \frac{3}{7}$	x ...	$-\frac{3}{2} \times x \geq \frac{5}{4}$	x ...
$\frac{3}{4} \times x \leq \frac{3}{7} + \frac{2}{3}$	x ...	$\frac{3}{5} \times \frac{x}{3} \leq \frac{4}{3}$	x ...
$\frac{3}{2}x \leq \frac{3}{4} \times \frac{2}{7} - \frac{1}{4}$	x ...	$\frac{2}{3} \times x \leq \frac{5}{6}$	x ...
$\frac{3}{7} \times \frac{x}{4} \geq \frac{2}{3} \times \frac{3}{7} - \frac{1}{7}$	x ...	$-x \times \frac{3}{4} \leq \frac{7}{8}$	x ...

5 Résoudre les inéquations :

$\frac{3}{x} \geq \frac{1}{2}$	x ...	$-5x \leq \frac{5}{6} \times \frac{3}{2} - \frac{1}{5}$	x ...
$-3x \geq \frac{1}{4}$	x ...	$\frac{7x}{4} \geq \frac{5}{3} - \frac{1}{2} \times \frac{3}{4}$	x ...
$-\frac{x}{3} \leq \frac{1}{8}$	x ...	$\frac{7}{4x} \leq \frac{3}{2} + \frac{3}{4} \times \frac{7}{9}$	x ...
$\frac{1}{x} \leq \frac{3}{4}$	x ...	$-\frac{4x}{5} \geq \frac{3}{2} \times \frac{5}{6} - \frac{7}{3}$	x ...
$-\frac{2}{3}x \geq \frac{27}{4}$	x ...	$-\frac{5x}{3} \leq 3 - \frac{18}{4}$	x ...

6 Pour quels entiers n (positifs, négatifs ou nuls) a-t-on les inégalités :

$\frac{3}{2} \leq \frac{n}{7} \leq \frac{8}{3}$	n ...	$\frac{3}{11} \leq -\frac{n}{3} \leq \frac{4}{3}$	n ...
$\frac{3}{5} \leq -\frac{n}{4} \leq \frac{9}{13}$	n ...	$\frac{13}{4} \leq \frac{1}{5n} \leq \frac{3}{5}$	n ...
$\frac{7}{2} \leq \frac{3}{n} \leq 7$	n ...	$\frac{1}{10} \leq \frac{3}{n} \leq \frac{1}{5}$	n ...

♦ Fiche 5 : EQUATIONS LINEAIRES I

1 Trouver x .

$3x + 4 = 0$	$\frac{2}{3}x - 7 = 0$	$2x - \frac{1}{3} = 0$
$2x - 7 = 0$	$\frac{2}{3}x + 6 = 0$	$\frac{x}{4} - \frac{7}{8} = 0$
$6x - 3 = 0$	$2x - \frac{4}{3} = 0$	$2x + \frac{4}{3} = 0$
$3x - \frac{7}{2} = 0$	$5x + \frac{4}{3} = 0$	$3x - 6 = 0$
$2x + \frac{4}{3} = 0$	$\frac{2}{3}x - \frac{1}{2} = 0$	$1{,}2x + 0{,}7 = 0$

2 Trouver x .

$\frac{2}{3}x = \frac{1}{2}$	$3x = \frac{2}{5}$	$0{,}8x = 1{,}2$
$0{,}7x = \frac{10}{3}$	$\frac{3}{7} \times 2x = \frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}x = 1{,}3$
$7x = \frac{2}{0{,}4}$	$\frac{2}{0{,}3}x = \frac{0{,}5}{8}$	$\frac{3x}{4} = 1{,}3$
$\frac{1}{4} \times 7x = \frac{2}{9}$	$\frac{3}{5} \times \frac{2x}{7} = \frac{3}{7}$	$\frac{3x}{4} = \frac{3}{7} \times \frac{11}{4}$
$\frac{1}{3} \times \frac{2x}{5} = \frac{2}{3} \times \frac{4}{7}$	$\frac{3}{4}x = \frac{1}{4} \times \frac{5}{7}$	$\frac{x}{7} = \frac{3 \times 5}{7 \times 11}$

3 Résoudre les équations :

$-3x + 2 = 5$	$2 - 3x = 7$	$\frac{2}{3}x - 1 = 4$
$5x + 1 = 4$	$3 - 4x = 1$	$\frac{3}{4}x + \frac{2}{3} = \frac{3}{5}$
$3x - 1 = 3$	$2x + 7 = 1$	$\frac{2}{3}x - \frac{3}{4} = \frac{5}{7}$
$-2x + 7 = 4$	$-2x + 4 = 4$	$\frac{7}{2}x + \frac{2}{3} = -\frac{1}{4}$
$3x + 5 = 1$	$3x + 6 = -1$	$-\frac{5}{6}x + \frac{1}{3} = -\frac{5}{7}$

4 Résoudre les équations :

$5x + 2 = 3x + 2$	$2x - 4 = x - 4$
$2x + 5 = -5x$	$3 - 5x = -5 + 4x$
$5 - 2x = 7 - 8x$	$2 - 3x = -3x - 3$
$3 - 6x = 8 - 6x$	$5 + 4x = 5x - 4$
$5 - 4x = 5 - 6x$	$2x - 5 = 3 + 2x$

5 Résoudre les équations :

$3x - 6 = 2x - 4 + x$

$5x - 4 = x - 5$

$2x + 4 = 6x + 4 - 4x$

$x - 4 = 3x - 6 + 4x + 2$

$2x + 4 = 6 + 2x - 2$

$x - 7 = 2 - 3x + 4$

$x - 5 = 3 - 6x + 2$

$x - 4 = 3x - 4 - 2x$

$x - 5 = x - 4$

$2x - 1 = 3 - 2x + 4$

6 Résoudre les équations :

$\frac{3}{2}x + 1 = \frac{3}{4}$

$2x + \frac{3}{2} = \frac{7}{4}$

$\frac{2}{3}x - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

$\frac{2}{3}x - \frac{3}{4} = 1,5$

$1,5x + \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$

$0,5x + 1 = \frac{2}{3}$

$2x - 1,5 = \frac{1}{7}$

$3,5x - 1 = \frac{2}{5}$

$\frac{2}{3} - \frac{1}{4}x = \frac{3}{5}$

$0,5 - \frac{2}{3}x = \frac{1}{4}$

$0,7x - 0,4 = 0,5$

$3,1 - 0,5x = 0,7$

$2,5 - 0,3x = \frac{1}{4}$

$2,3x - \frac{1}{3} = 0,4$

$3,5 - 0,3x = \frac{1}{3}$

7 Résoudre les équations :

$\frac{4}{3}x - 1 + \frac{1}{2}x = \frac{5}{6} - 3 + x$

$2x - \frac{1}{4} + 3x - 1 = \frac{1}{2}(10x - 1) - \frac{3}{4}$

$(2x - 1) \times 3 = 2(3x + 4)$

$(3x - 1) \times \left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{1}{3}(x - 7)$

$(3x - 7) \times \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}(-2x + 5)$

$(6x - 1) \times \frac{4}{3} = \frac{2}{3}(3x - 1)$

$(3x - 5) + 2(x - 5) = 5(x - 3)$

$(x - 3) \times \left(-\frac{4}{3}\right) + \frac{3}{4}x - 5 = x$

$(x + 1) \times \left(-\frac{5}{2}\right) = -2(x + 4)$

$-x + 1 - x - 5 = -3(x + 2)$

$-2x - 1 - x - 4 = -4x - 2$

$3x - 1 + 7(x-1) = 8x - 6$

8 Résoudre :

$-3x^2 + 1 = x^2 - 7$

$2x^2 - \frac{3}{4} = x^2 - \frac{1}{2}$

$3x^2 - 1 = 2,5x^2 - 7$

$\frac{1}{x} + 3 = \frac{2}{x} - \frac{3}{4}$

$\frac{1}{x} - 7 = \frac{3}{x} + \frac{1}{2}$

$\frac{1}{x^2} - 5 = \frac{3}{x^2} + 4$

◆ *Fiche 6 : POURCENTAGES*

(1) Calculer 8% de 135

Calculer 5% de 132

Augmenter 164 de 4%

Augmenter 26 de 6%

Diminuer 165 de 2%

Diminuer 215 de 1%

(2) ► J'ai augmenté un nombre de 4% , j'ai trouvé 57,2 . Quel est ce nombre ?

► J'ai augmenté un nombre de 6% , j'ai trouvé 64,13 . Quel est ce nombre ?

(3) ► J'ai diminué un nombre de 2% , j'ai trouvé 597,8 . Quel est ce nombre ?

► J'ai diminué un nombre de 3% , j'ai trouvé 101,85 . Quel est ce nombre ?

(4) Un prix est passé de 103 F à 105,06 F . Quelle est l'augmentation en pourcentage ?

Un prix est passé de 122 F à 128,10 F . Quelle est l'augmentation en pourcentage ?

(5) Un prix est passé de 512 F à 496,64 F . Quelle est la diminution en pourcentage ?

Un prix est passé de 496 F à 471,20 F . Quelle est la diminution en pourcentage ?

(6) Un nombre x augmente de 4% , puis de 3% , puis de 6% . Quelle est l'augmentation totale en pourcentage ?

Un nombre augmente 10 fois de 2% . Quelle est l'augmentation totale en pourcentage ?

Un prix augmente chaque année de 5% . Combien d'années faut-il pour qu'il soit doublé ?

(7) Un nombre augmente de 5% , puis diminue de 3% . Quelle est la variation en pourcentage ?

Un nombre augmente de 6% , puis diminue de 6% . Quelle est la variation en pourcentage ?

Un prix a augmenté de 15% . De quel pourcentage faut-il le diminuer pour revenir au prix initial ?

8 Un nombre diminue 10 fois de 2% . Quelle est la diminution en pourcentage ?
Un nombre diminue de 7% , puis augmente de 7% . Quelle est la variation en pourcentage ?
Un nombre diminue de 2% par an ; au bout de combien d'années a-t-il diminué de moitié ?

9 Un prix augmente de 1% par mois . Au bout de combien de temps a-t-il augmenté de 12% , de 24% , de 36% .

10 Un capital de 100 000 F est placé à n% en intérêts composés. Au bout de quatre ans les 100 000 F sont devenus 121 550 F . Que vaut n ?

11 Un commerçant augmente ses prix de 10% les jours pairs, et les diminue de 10% les jours impairs. Il finit par se ruiner. Pourquoi ?

12 J'ai augmenté le nombre 721 de n% , puis je l'ai diminué de n% . J'ai trouvé 710 , 6176 . Que vaut n ?