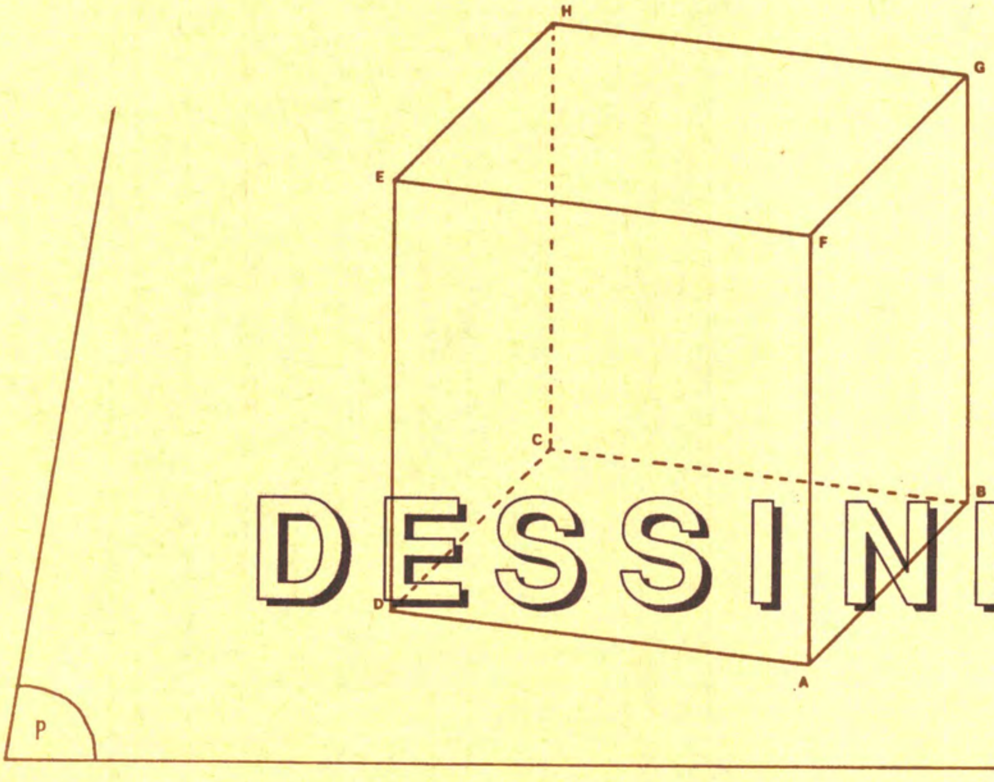
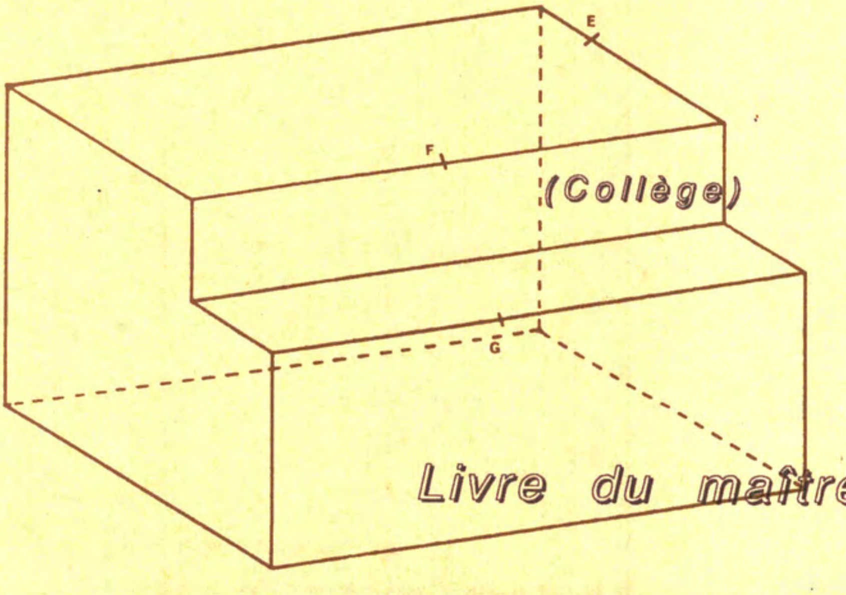


(29) • Trouve un plan parallèle au plan EGA qui coupe le cube suivant un hexagone régulier.

• Trace l'intersection correspondante.

DESSINER L'ESPACE

(Collège)



(30) On coupe cette pièce métallique par le plan qui contient E, F et G.

• Colorie la section obtenue.

Livre du maître

Édité et imprimé par l'**Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques**- (Université de Nancy I - Faculté des Sciences) -
B.P. 239 - 54506 VANDOEUVRE-les-NANCY CEDEX
Dépôt légal : 2e trimestre 1988
n° de la publication : 2-85406-110-1

Le Responsable de la collection : Bernard ANDRÉ

réf. II.8$_3$

DESSINER L'ESPACE

Livre du maître

FERRANDON Isabelle

HANS Annie

RAMOS Noëlle

SIMO Lucette

TIHA Claude

AVANT-PROPOS

Enseigner la géométrie dans l'espace aux élèves du collège peut aisément passer, aujourd'hui encore, pour une dangereuse utopie : combien seront-ils capables, en effet, d'y comprendre quoi que ce soit, alors que nombre de professeurs déjà sont eux-mêmes persuadés de " ne rien voir " dans l'espace ? Et d'abord, quelle géométrie ? Celle des coordonnées et du calcul vectoriel ? Celle des solides, des droites, des plans, des distances et de l'orthogonalité ? Est-ce bien d'actualité, alors que les mathématiques devraient être à l'heure des ensembles, des structures algébriques, de l'analyse des données, de l'informatique omniprésente ?

Certes, malgré la nullité supposée des élèves, l'effort est généralement ressenti comme louable et utile. N'y aurait-il pas, en effet, quelques retombées à espérer en direction du dessin industriel ou artistique ? Ne serait-il pas souhaitable de préparer les enfants aux outils de demain, comme la " conception assistée par ordinateur " ? N'est-il pas temps de les aider enfin à s'intégrer à la civilisation de l'image ?

Mais les grands mythes à la mode ne suffisent pas pour emporter la conviction ; l'enthousiasme des professeurs qui pratiquent déjà cette géométrie avec leurs classes ne parvient que rarement à dissiper les réticences, tant les écueils paraissent insurmontables. Insurmontables les barrières au " démontage intellectuel " des objets opaques. Insurmontables les difficultés de la représentation au tableau ou sur la feuille. Insurmontables les problèmes de vision dans l'espace posés par les figures en perspective ...

Inévitable pierre angulaire de toute géométrie dans l'espace, la PERSPECTIVE, qu'elle soit cylindrique ou conique, suffit d'ailleurs à elle seule pour condenser toutes les raisons de réserver ce domaine à de rares initiés, à ceux qui seraient non seulement capables de " voir ", mais de " comprendre la façon dont ils voient ", par une sorte de dédoublement qui leur ferait apparaître à la fois l'objet, le dessin et ... le spectateur !

Hors de la faculté de maîtriser les règles de la perspective point de salut : comment " représenter " ce que l'on ne voit pas ? Comment " se représenter " ce qui est dessiné ? Il va sans dire que si ce fascicule existe, ainsi que les fichiers d'activités auxquels il se réfère, c'est que les auteurs ont pris parti face à cette difficulté " incontournable " ...

Ils ont choisi de la contourner.

Contrairement en effet à d'autres tentatives qui optent pour une initiation progressive à l'espace au travers d'un apprentissage du dessin en perspective, ***aucun*** *des exercices proposés ici n'aborde le problème de front : le système de représentation retenu est celui que l'on rencontre dans la vie sociale ou dans le monde de la technique, l'énoncé précise au besoin les éléments qui permettent un déchiffrage de la situation puis son exploitation au niveau de la pensée logique. On peut donc dire que dans le " débat " entre l'objet et sa représentation le choix qui a été fait ici est celui de l'image, c'est-à-dire de la lecture de l'image,* ***du travail et des constructions internes à l'image.***

Nouvelle gageure ? Peut-être, mais l'intérêt manifesté par les élèves est là pour montrer que ce parti pris ne limite en rien le propos et que toutes les compétences — du dessin à l'imagination, de la réflexion à la découverte et au calcul —, absolument toutes les compétences de la géométrie sont mises en œuvre dans l'éventail des thèmes retenus. Grâce à leur simplicité, toutes les activités sont abordées par la grande majorité des enfants. Chacun peut faire quelque chose à la mesure de ses capacités et trouve ainsi, tout au long de l'année scolaire, l'occasion de réinvestir de nombreuses notions rencontrées en géométrie plane ou en arithmétique : éléments et configurations simples, polygones et solides, mesures et approximations, proportionnalité, etc.

On observera de même (en les pratiquant ...) que ces fiches d'exercices fournissent une excellente motivation pour aborder certains concepts avec plus de précision (parallélisme, orthogonalité, intersections, ...) et qu'elles constituent une incitation permanente au développement de la pensée logique, car elles permettent une initiation au raisonnement scientifique à partir d'un corpus de règles simples et peu nombreuses : axiomes implicites, non formalisés,dont l'usage est impérieux pour aboutir à des solutions ou à des constructions satisfaisantes. Au plaisir de la découverte et de l'action dans des situations où la réponse est rarement évidente (intuition, anticipation, validation), s'ajoute ainsi pour l'élève la satisfaction de convaincre en argumentant, de dire ce qu'il fait — ou mieux, ce qu'il va faire — , de communiquer avec un alter ego ou avec le professeur.

Tel est en tout cas l'objectif de ces fiches et il est évident que le rôle de l'enseignant est primordial s'il veut tirer le meilleur parti des activités proposées ici, notamment dans le cadre de la pédagogie différenciée des classes hétérogènes. Nous n'avons pas la prétention d'avoir traité ou résolu tous les problèmes que pose l'enseignement de la géométrie dans l'espace au collège, mais simplement d'apporter notre pierre à l'édifice en proposant des voies de réflexion et de recherche. Il reste au professeur à intégrer ces activités dès le début de l'année à sa progression en mathématiques, à construire des séquences pédagogiques complètes autour des thèmes proposés, à guider chacun de ses élèves pour qu'il progresse à son propre rythme, à exiger de tous une expression correcte et un langage rigoureux dans l'explicitation des solutions, à saisir l'occasion des mises au point indispensables, etc., etc. Sans oublier de contribuer à l'amélioration souhaitable de nos propositions ...

Nous espérons que ce " livre du maître " l'aidera dans sa tâche, nous voudrions pour notre part exprimer notre gratitude à tous ceux qui ont contribué à l'achèvement de ce travail et particulièrement à Monsieur Claude MORLET, sans les idées de qui ce fichier n'aurait sans doute pas vu le jour.

Nous tenons enfin à remercier Monsieur Philippe LOMBARD qui a participé à la phase de rédaction définitive des présents commentaires, ainsi que tous les professeurs qui, dans les réunions d'établissement ou au cours des actions

du P.A.F., nous ont fait part de leurs remarques et de leurs critiques, mais également de leurs difficultés, parfois de leurs réticences, à enseigner l'espace.

Ils nous ont souvent apporté des idées et des suggestions qui nous ont permis d'améliorer ou de compléter notre travail.

Les Auteurs

SOMMAIRE

Avant-Propos 1
Table 5
Avertissement 7

PREMIERE PARTIE : L'ESPACE ET SON DOUBLE 9

Chapitre 1 : L'image en perspective 10

Chapitre 2 : L'image psycho- physiologique 19

A - *L'image rétinienne* 20
B - *Le problème de l'image psychologique* 27
C - *La subjectivité de l'espace* 34

Chapitre 3 : Le langage de l'image 42

Chapitre 4 : De l'image au concept 55

A - *L'image et le concept* 58
B - *L'attitude vis-à-vis des figures* 67
C - *La découverte de lois en géométrie* 70
D - *L'initiation au raisonnement* 74

Bibliographie 78

DEUXIEME PARTIE : COMMENTAIRES SUR LES FICHES 79

Chapitre 5 : Le transfert 81

- *Fiches 1 à 13* 91

Chapitre 6 : Sections I 107

- *Fiches 14 à 35* 114

Chapitre 7 : Sections II 135

- *Fiches 36 à 45* 136

Chapitre 8 : La projection 151

- *Fiches 46 à 75* 156

Chapitre 9 : Le contre-transfert 183

- *Fiches 76 à 89* 185

AVERTISSEMENT

Le présent fascicule comporte deux parties :

La première, intitulée " L'espace et son double " , est essentiellement une réflexion sur la didactique de la géométrie dans l'espace au collège et sur le rôle de l'image dans les activités proposées aux élèves.

La seconde fait directement référence aux deux " Fichiers de l'élève " , fascicules n° 2 et n° 3 de la série " ***FICHES IREM*** *" éditée par l'IREM de Lorraine. On trouvera dans cette deuxième partie un commentaire détaillé de chacune des fiches-élèves, ainsi que des conseils généraux sur les différents thèmes traités.*

Bien que, dans l'esprit des auteurs, ces deux volets constituent un tout — puisque les activités proposées sont la mise en pratique des principes énoncés dans la première partie — , nous nous sommes efforcés de rendre leurs lectures indépendantes. Le lecteur pourra en particulier (s'il est d'abord intéressé par le commentaire des fiches-élèves) , commencer par la deuxième partie ...

La nature ne s'assigne pas de but. L'homme, oui.

Ernst Gombrich

P R E M I E R E

P A R T I E

L'E S P A C E   E T   S O N   D O U B L E

Chapitre 1 : L'IMAGE EN PERSPECTIVE

L'observateur non averti qui s'intéresserait d'un peu près à l'enseignement de la géométrie dans l'espace ne manquerait pas d'être frappé par un phénomène paradoxal : hors des sentiers battus par les divers développements du parallélépipède rectangle, ... sortis des mystérieux découpages qui finissent parfois, à grand renfort de scotch, par donner la très platonique famille des polyèdres réguliers, ... mis à part quelques emblématiques plans perpendiculaires ou parallèles que le maître encourage vainement l'élève à découvrir aux murs de la classe ou dans ses mains grandes ouvertes caressant le vide, ... il est bien rare en vérité que ***l'espace tangible*** *soit de la partie.*

La géométrie dans l'espace est-elle donc bien digne de ce nom, alors qu'une habitude perverse s'acharne ainsi à contraindre chacun au seul usage du papier, de la règle et du crayon ? A tout restreindre aux impuissantes figures de la géométrie plane ? L'espace — nous voulons dire la géométrie dans l'espace — n'est pas l'art du sculpteur : pour y briller il faut être peintre ou dessinateur ...

Confessons-le d'entrée de jeu, nos propositions pour enseigner l'espace au collège ne dérogent pas à cette règle : non seulement nous avons choisi de faire travailler les élèves avec des objets dessinés sur la feuille, mais nous avons même retenu pour cela un système de représentation que certains jugeront sans doute comme très peu réaliste. Nous allons donc essayer d'expliquer ce que cette règle nous semble avoir d'inéluctable, aussi paradoxale qu'elle puisse paraître.

Dès qu'il est question de représenter un objet sur une surface plane, la notion de réalisme à laquelle il est généralement fait appel aujourd'hui est celle de l'image photographique, qui passe pour fournir une impression de vérité inégalée, sinon indépassable. Il va sans dire qu'il n'en a pas été de même à toutes les époques, qui n'en ont pas moins connu, elles aussi, leur " impression indépassable de vérité " ... On peut cependant observer que cette vérité photographique n'est au fond rien d'autre que celle que l'on reconnaît généralement à la représentation en **perspective fuyante** *(ou* **perspective conique** *) qui fut codifiée dès le début du 15e siècle, le Quattrocento de la Renaissance italienne.*

Le principe est le même en effet. Que l'image se matérialise sur la plaque photographique placée derrière l'objectif, ou qu'elle se découpe sur une fenêtre située entre l'œil et l'objet, tout repose sur ce que l'on appelle en mathématiques une projection centrale (cf. figure 1).

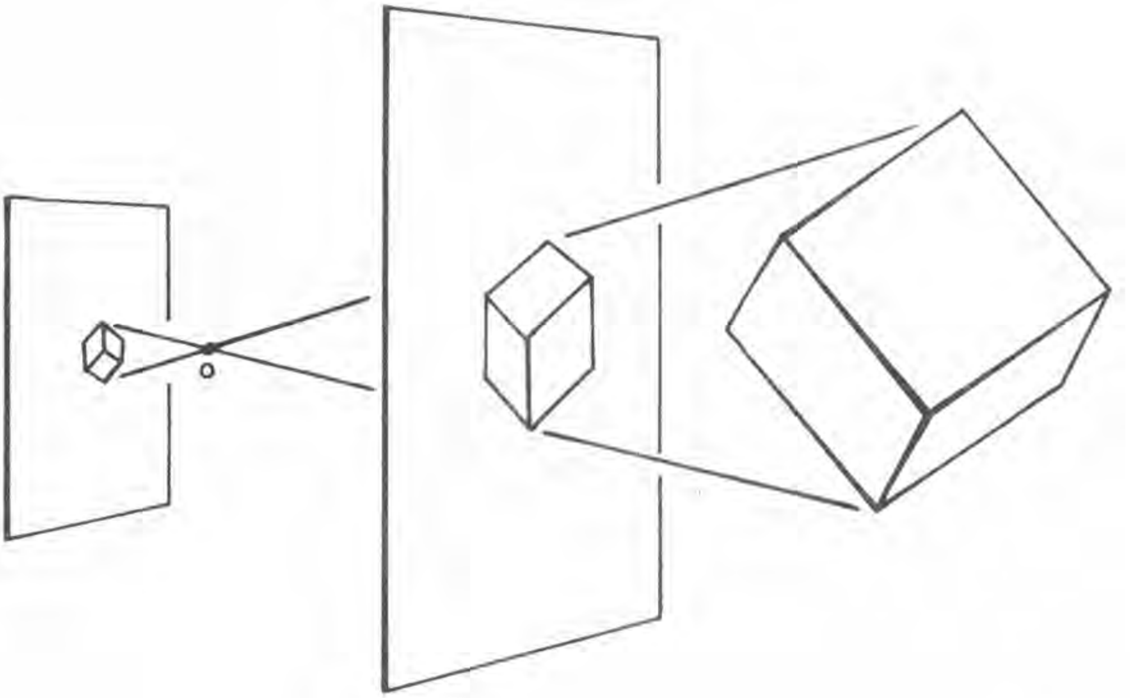


fig. 1

Le dessin de l'objet est ainsi " géométriquement déterminé " par l'objet lui-même. C'est l'intersection du " cône visuel " avec le plan de l'image. Si *on peut, d'une certaine façon, parler de réalisme parfait, cela tient évidemment à l'effet de* **trompe-l'œil** *que l'on obtient si on place un œil (unique) au point* **O** *: effaçons l'objet d'origine, son " fantôme " sur le plan image P produit exactement la même sensation visuelle sur la rétine. Exceptée l'impression de relief résultant de la vision binoculaire, l'illusion est parfaite et il est impossible de savoir si l'on est en présence de l'objet ou de son image. On remarquera cependant que ce phénomène ne se produit* **que si l'œil est placé au point 0 ...**

Nous n'entrerons pas ici dans le détail des propriétés géométriques de ce système de représentation. Notons simplement qu'il traduit de façon particulièrement frappante le raccourcissement apparent des longueurs qui est dû à l'éloignement. C'est une conséquence (ou une explication ...) de la notion de **point de fuite** *, c'est-à-dire des points du plan image vers lesquels semblent concourir les familles de droites parallèles appartenant à l'objet représenté.*

Une variante dont il serait bien difficile de préciser historiquement l'origine est très souvent pratiquée sous le nom de **perspective cavalière** *ou* **perspective cylindrique** *. On l'obtient en partant de la figure 1 en " rejetant le*

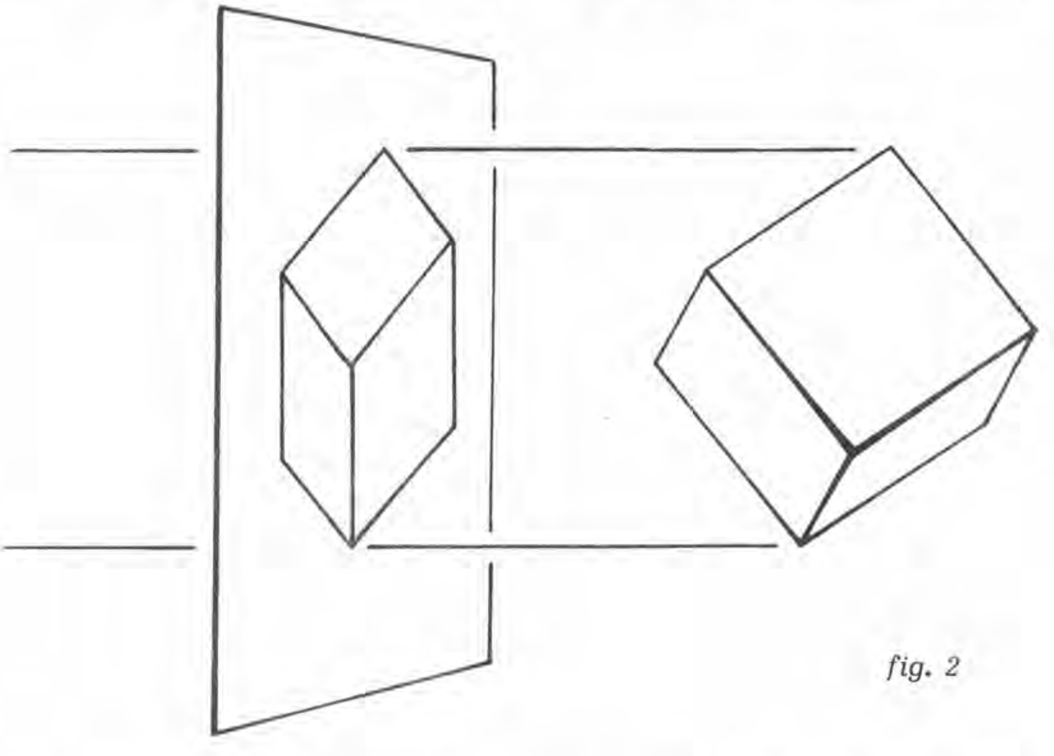


fig. 2

point **O** *à l'infini " (cf. figure 2) , elle n'a guère d'équivalent dans la vie courante si ce n'est — aux questions d'opacité près — dans les phénomènes d'ombre au soleil.*

Il s'agit tout simplement de la notion mathématique de projection parallèle. Cette représentation fournit des images très peu différentes de celles qui sont obtenues en perspective fuyante, du moins lorsque l'on a affaire à de " petits objets " , vis-à-vis desquels l'observateur (c'est-à-dire le point 0 de la figure 1) peut être considéré comme étant situé à grande distance. En revanche, il n'y a plus raccourcissement des distances en fonction de l'éloignement (plus de points de fuite) , car les droites parallèles de l'espace sont représentées ici par des droites qui sont parallèles dans le plan de la figure (cf. fig. 2).

On serait sans doute frappé de la différence entre ces deux projections sur une image représentant, par exemple, une voie de chemin de fer, tant on a pris l'habitude sur les photographies de la voir s'éloigner au fur et à mesure que l'écart diminue entre les rails, qui finissent par se rejoindre à l'horizon. Mais cette différence n'apparaît pas nécessairement à l'œil non averti sur le dessin d'un cube obtenu par l'une ou par l'autre des deux méthodes : que l'on regarde la figure 3 (obtenue en perspective fuyante) ou la figure 4 (obtenue en perspective cavalière) , on peut estimer que dans chacun de ces deux cas

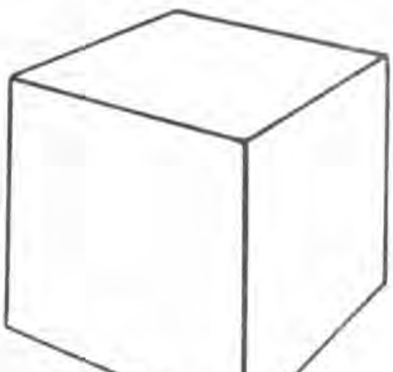


fig. 3

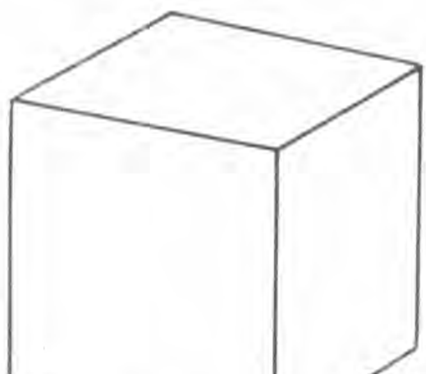


fig. 4

l'illusion est bonne. On a l'impression de voir un vrai cube, dès lors que le cube en question n'est pas vu de trop près et qu'il se trouve placé dans une position familière.

Tout est là en effet : dans cette " impression de voir un vrai cube ". On pourra certes préférer la figure 4 à la figure 3 en fonction de critères pratiques, extérieurs, au rang desquels il faudra compter en premier lieu (pour ce qui nous intéresse ici) la facilité de mise en œuvre et la simplicité des règles à faire manipuler par les élèves. Mais ***qu'adviendra-t-il si la figure se complique*** *?*

Il faut bien se rappeler en réalité que notre but n'est rien d'autre que d'expliquer telle ou telle notion géométrique, et notamment d'expliquer ce qu'est un vrai cube. Il faudra donc ***représenter*** *et il faudra pouvoir* ***reconnaître*** *. A partir du moment où un enfant qui est confronté aux figures précédentes* ***ne verrait pas*** *un cube, toutes les certitudes (les siennes et les nôtres ...) risquent fort de s'écouler si l'on n'y prend pas garde !*

Un exemple suffira pour nous faire comprendre, il nous intéresse d'ailleurs au premier chef puisqu'il concerne précisément le type de figure que nous avons retenu dans nos fiches, c'est l'exemple du cube représenté, classiquement, comme sur la figure 5 .

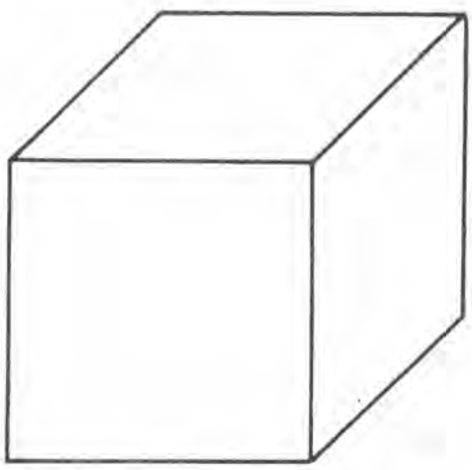


fig. 5

Comme la figure 4 , cette " variante " s'obtient par une projection parallèle du type de celles qui sont schématisées sur la figure 2 . Mais on ne peut plus guère parler de " réalisme " , car on ne verra jamais un cube de cette façon ... Le phénomène de trompe-l'œil décrit précédemment supposerait en effet un singulier strabisme : il obligerait à déplacer la feuille vers le bas *et vers la gauche, aux limites des pratiques communément admises (cf. figure 6) . La projection utilisée ici n'a plus grand chose de photographique, car le centre logique du dessin ne correspond pas avec le centre de la projection naturelle (c'est-à-dire orthogonale) de l'objet sur le plan de la feuille.*

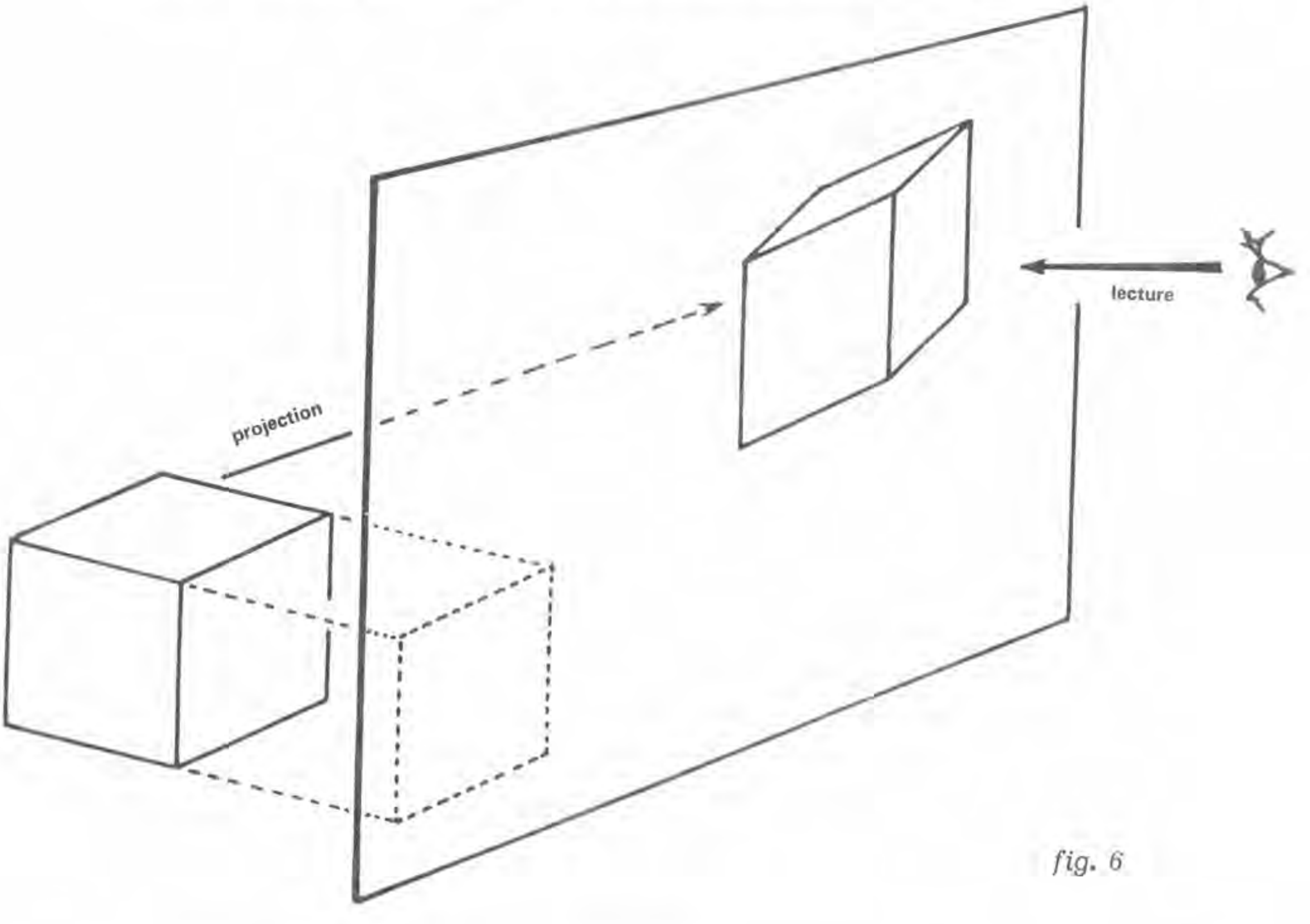


fig. 6

Nous sommes en présence ici d'un ***phénomène d'ombre*** *, le dessin du cube n'est rien d'autre que ce que l'on obtiendrait en matérialisant son ombre sur la feuille, après avoir choisi un* ***éclairage oblique*** *, ni trop rasant ni trop surplombant, de façon à ce que les faces avant et arrière apparaissent " correctement " décalées* [1] *. On ne regarde cependant le dessin obtenu que comme une image normale, jamais dans la direction des rayons lumineux. La figure 5 n'en a pas moins tout pour être un cube, elle présente même l'avantage sur les figures 3 et 4 de* ***signifier*** *que la face avant est un carré.*

---

(1) On notera au passage que l'ombre portée par un "squelette" de cube fournit ainsi une excellente justification des propriétés du dessin ...

Cependant le problème s'est encore compliqué de convaincre celui qui ne pourrait pas y voir un cube ; la question devenant encore plus embarrassante lorsqu'elle s'ajoute à celle-ci, que le professeur de mathématiques ne peut se permettre d'éluder : " qu'est-ce qu'un cube ? " . Et s'il était besoin, pour briser les dernières certitudes, de refermer définitivement le piège ... il nous suffirait maintenant d'affirmer candidement qu'aucune des figures proposées jusqu'ici n'était destinée à représenter un cube, mais quelque solide (il n'en manquerait pas, de bien irréguliers !) qui se trouve posséder les ***mêmes projections*** *qu'un cube sur les plans que nous avions choisis. Qui pourrait nous démentir ? Que reste-t-il de la force de conviction de l'image alors qu'elle est impuissante à caractériser l'objet originel, qu'elle est pourtant censée* ***représenter ?***

Certes, on nous objectera immédiatement qu'un cube est un objet suffisamment familier — ainsi que sa représentation classique ... — pour qu'un enfant n'ait généralement aucune peine à le reconnaître. C'est sûr, mais on aurait tort de rejeter trop rapidement la question au rang des sophismes, car nous n'avons choisi cet exemple que pour des raisons de commodité. Ces raisons vont précisément toutes dans le même sens : si nous avions choisi une configuration plus compliquée le lecteur aurait été sans doute plus facilement convaincu du fait que l'on peut très bien ne rien voir sur une figure, mais la difficulté aurait alors été de faire comprendre — sur un schéma ? ... — de quoi nous voulions parler.

C'est une grande partie des difficultés conceptuelles liées à la géométrie dans l'espace qui se manifeste ainsi dès que l'on réfléchit à la notion de perspective. Elles sont enfermées dans une dialectique ***lecture / écriture*** *de l'image, hors de laquelle il n'y a bien souvent plus aucune explication possible. Le pas est alors vite franchi de considérer qu'il y a d'un côté " ceux qui voient ", heureux bénéficiaires de quelque mystérieuse bosse de la géométrie, et de l'autre " ceux qui n'y verront jamais rien " , désespérément réfractaires à toutes mathématiques.*

S'il est une question qui mérite d'être posée, en préalable à tout enseignement de la géométrie dans l'espace, c'est donc bien celle de la ***puissance d'évocation de l'image*** *, notamment de l'image géométrique. Nous tâcherons* *d'étudier aux chapitres suivants la spécificité de ce problème au niveau mathématique, nous allons nous arrêter auparavant sur deux aspects de la question qui en montrent bien toutes les difficultés : nous nous intéresserons tout d'abord à l'étude de la* **vision naturelle , directe , des objets** *puis nous nous arrêterons sur le problème de* **la lecture des images planes** *, pour en analyser succinctement le caractère symbolique.*

Ce qui résulte en effet des remarques précédentes, c'est avant tout que l'image ne constitue pratiquement jamais un trompe-l'œil équivalent à l'objet. Nous l'avons noté à propos de la figure 1 , seule susceptible de remplir un tel rôle et où l'unique cas de véritable illusion optique est obtenu lorsque l'œil est placé exactement au centre 0 de la projection. Léonard de Vinci, au 15e siècle, en avait déjà parfaitement conscience lorsqu'il expliquait que " pour produire l'impression de la réalité " et " laisser croire que ce ne sont pas là choses peintes " , le tableau devrait être regardé " à travers un judas placé à la distance, à la hauteur et dans la direction adoptées par le peintre " .

Hors de ce cas très particulier, il est clair que l'image n'est jamais confondue avec l'objet mais considérée effectivement comme une image, comme une représentation de l'objet. Qu'il s'agisse de la meilleure photographie ou du plus malhabile des schémas, elle est perçue comme telle et nous sommes, en tant que lecteurs ou spectateurs, placés vis-à-vis d'une figure dans une position analogue à celle qui est résumée par la figure 6 : l'image **s'explique** *(en termes de projection) en fonction d'une certaine incidence des rayons lumineux sur l'objet et sur le plan-image, elle prend ensuite son " autonomie "* **pour être lue et interprétée** *sous un angle de lecture qui ne recherche pas le phénomène de trompe-l'œil, parce que la genèse de l'image est alors reléguée au second plan.*

En d'autres termes, pour comprendre le problème qui se pose, il ne faut pas ramener la situation à un diagramme :

OBJET ⟶ IMAGE ⟶ OEIL + CERVEAU

mais considérer deux types d'échanges :

$$\begin{tikzcd}
\textbf{OBJET} \arrow[dd] \arrow[dr] & \\
& \textbf{OEIL + CERVEAU} \\
\textbf{IMAGE} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

L'image n'est qu'un succédané de l'objet, et elle est déchiffrée comme telle. Nous devons donc analyser séparément la relation "objet véritable" / "observateur" et la relation "image plane" / "observateur".

Chapitre 2 : L'IMAGE PSYCHO-PHYSIOLOGIQUE

> Il y a toujours un coin du voile qui demande expressément à ne pas être levé ; (...) c'est là la condition même de l'enchantement.
>
> André Breton

Dès la Renaissance -- âge d'or s'il en fut de la représentation en perspective — les artistes et les théoriciens de l'art faisaient une différence entre deux notions de " perspective " . L'une, dite ***perspective artificielle*** *, rassemblait les règles à caractère mathématique qui découlent du choix d'une projection centrale et guident le travail du dessinateur. L'autre, appelée* ***perspective naturelle*** *, se rapportait au contraire aux principes mêmes de la vision véritable face au modèle, c'est-à-dire à ce qui se passe dans l'esprit d'un spectateur confronté directement aux objets et à l'espace réels.*

Posé brutalement, le problème de la " perspective naturelle " touche donc à l'une des questions les plus difficiles qui soient : " quelle conscience avons nous des formes, des objets, de l'espace ? " .

*La question n'est pas neuve et on peut évidemment se demander s'il sera possible de comprendre un jour le fonctionnement du cerveau au point de pouvoir analyser l'idée que nous nous faisons des formes environnantes ou la façon dont s'intègrent à la pensée les sensations de profondeur, d'éloignement, de volume, de relief, de mouvement qui toutes concourent à la notion même d'espace. Quoi qu'il en soit, on peut légitimement penser que les réponses devront faire appel aussi bien à la biologie qu'à la psychologie. Peut-être même à la géométrie ... Ce qui est sûr, c'est que l'on ne dispose aujourd'hui que de quelques éléments bien fragmentaires face à la complexité du problème, qu'il s'agisse, au tout premier niveau, de la notion d'****image rétinienne*** *ou qu'il s'agisse des aspects qu'il convient d'envisager ensuite* ***d'image psychologique*** *et* ***d'espace subjectif*** *.*

A. L'IMAGE RETINIENNE

Observons tout d'abord que si l'œil regarde un objet donné, l'image qui va se dessiner sur la rétine est sensiblement différente de l'image que nous avons rencontrée en perspective fuyante ou, si l'on préfère, de celle qui s'inscrirait sur une plaque photographique (cf. figures 1 et 7). En effet, bien qu'ici encore nous ayons affaire à l'équivalent d'une projection centrale, la surface de l'image n'est plus plane mais **sphérique** .

La première image que nous percevons — représentation " pré-psychologique " qui sera transmise ensuite au cerveau par le nerf optique — présente donc à l'analyse des caractéristiques différentes de celles que possèderait une image construite selon les règles de la perspective fuyante, notamment lorsque se trouve mise en jeu une portion importante de la rétine, c'est-à-dire lorsque l'angle d'ouverture du champ visuel est grand, ce qui est le cas lorsque l'on regarde une surface très étendue ou même un objet suffisamment rapproché.

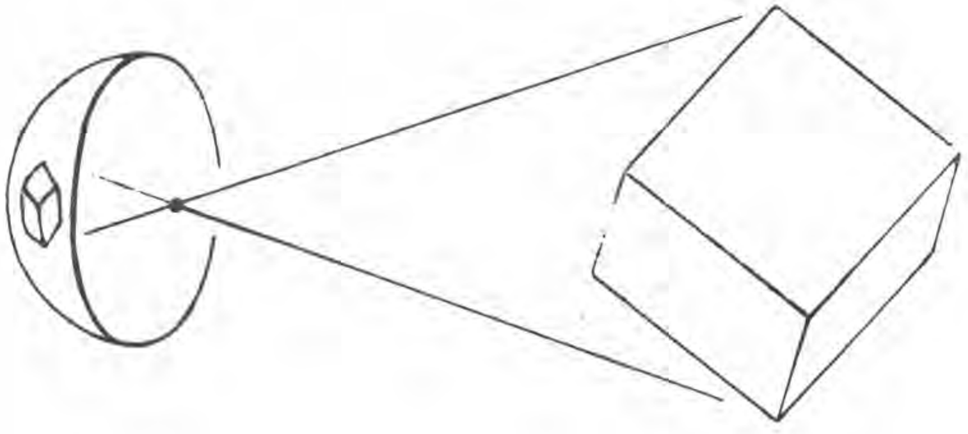


fig. 7

Le phénomène le plus frappant concernerait des droites parallèles situées dans un plan faisant face à l'observateur : comme on s'en convaincra aisément

(cf. figure 8) , les images de ces droites sur une rétine supposée hémisphérique sont des demi-cercles, et les lignes ainsi obtenues donnent par conséquent l'impression que les droites initiales se rejoignent " à l'infini " , mais ***dans les deux directions opposées*** *. On pourrait donc considérer que le phénomène doit donner naissance à deux* ***points de fuite*** *, ce qui contredirait en particulier les règles habituelles de la perspective fuyante, dans la mesure où, rappelons-le, une photographie des droites de la figure 8 prise* ***dans les mêmes conditions*** *(c'est-à-dire avec le même axe optique que l'œil schématisé) ferait apparaître tout simplement des* ***droites parallèles ...***

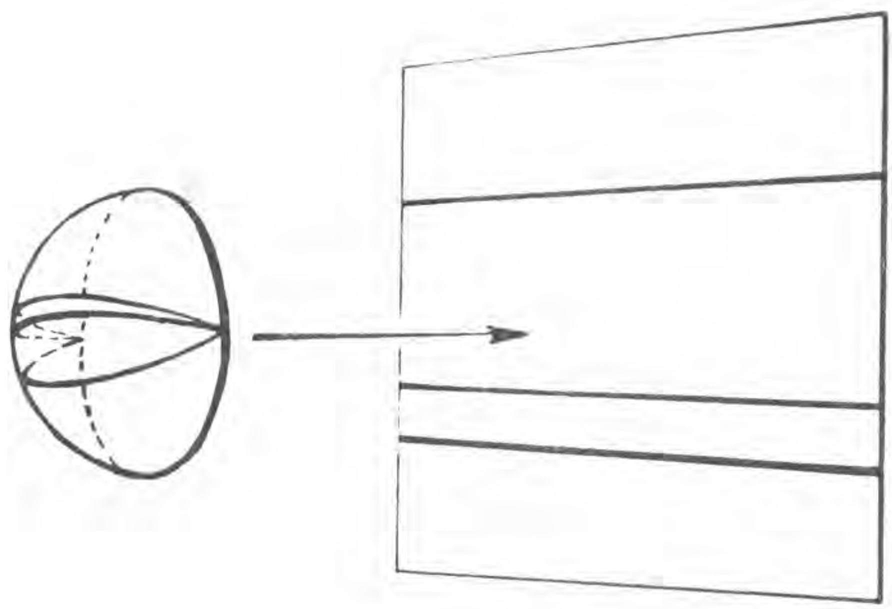


fig. 8

Lorsque l'on y réfléchit, cette remarque est rien moins qu'embarrassante. La géométrie propre à la rétine, surface sphérique sur laquelle les distances doivent être mesurées (ou comparées) en termes d'angles au centre, semble en effet remettre en cause une grande part des principes sur lesquels se fonde la perspective fuyante ; la première approche de la " perspective naturelle " réduirait ainsi à néant la base même sur laquelle la " perspective artificielle " a toujours construit sa réputation de " réalisme indépassable " ...

Les historiens et théoriciens de l'art furent parmi les premiers à s'intéresser à la question, car ils ont été confrontés en permanence à la nécessité de comprendre pourquoi les seules règles de la perspective ne suffisent pas, en général, pour expliquer le sentiment de " vérité " que peut faire naître un tableau. Il faut bien reconnaître d'ailleurs que ce n'est que durant une période historique relativement brève que les peintres obéirent au credo de la projection centrale.

En espérant trouver le moyen qui rendrait compte objectivement des phénomènes les plus ***subjectifs*** *de la vision, les historiens de l'art se sont en réalité précipités dans la faille offerte par la courbure de la rétine et les déformations de l'image rétinienne. Ils ont cru trouver là des " règles naturelles " obligeant à remettre en cause les idées reçues et, même si ces théories sont discutables, ils ont eu l'immense mérite d'explorer un domaine d'importance majeure pour la compréhension de la notion d'image géométrique. Nous nous arrêterons donc un moment sur le point de vue du plus célèbre d'entre-eux, Erwin PANOFSKY, qui fut le premier à tenter d'analyser le phénomène de la courbure rétinienne et ses conséquences " psychologiques ".*

Il s'est appuyé sur les travaux d'un mathématicien du 19e siècle, Guido HAUCK , et en 1927, dans un ouvrage qui fait aujourd'hui encore référence (1) , il développe les questions de mesure angulaire soulevées par la forme sphérique de l'œil et conclut :

" A cette discordance de l'image rétinienne et de la représentation perspective plane sur le plan purement quantitatif que, sous la Renaissance, des artistes et théoriciens n'avaient pas mis longtemps à remarquer, s'en ajoute une autre, sur le plan formel cette fois-ci, et qui provient, elle, des effets conjugués des mouvements oculaires et de la courbure rétinienne. En effet, alors qu'en projection perspective plane les lignes droites sont des droites, ces mêmes droites sont perçues par notre organe visuel comme des courbes à courbure convexe en partant du

---

(1) cF. [P]

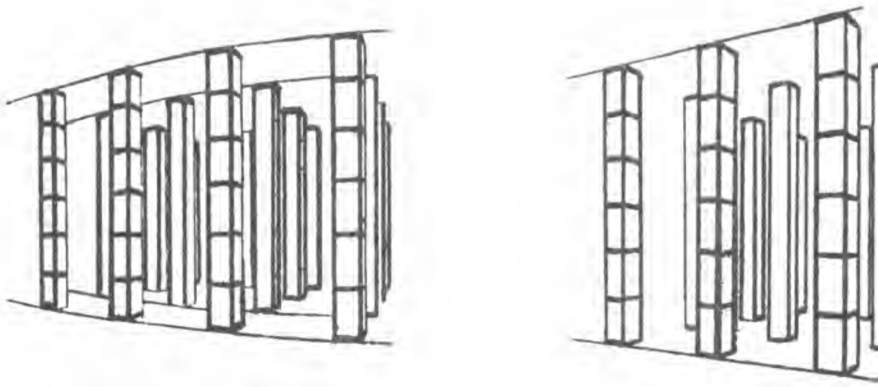


Fig. 9 Salle à colonnes construite selon les règles de la perspective (curviligne) " subjective " à gauche et selon les règles de la perspective (plane) schématique à droite (d'après Guido HAUCK) .

centre de l'image. Ainsi, un pavement en échiquier, objectivement rectiligne, semble se bomber comme un bouclier quand on s'en approche, alors qu'au contraire tel autre motif décoratif curviligne semble en quelque sorte se redresser : à telle enseigne que les lignes de fuite d'un édifice, qu'en construction perspective plane on représente par des droites, devraient être représentées par des courbes si on considère l'image rétinienne effective — sans oublier qu'en toute rigueur les verticales devraient elles aussi, contrairement au dessin de Guido HAUCK reproduit dans la figure 9 , subir une légère incurvation vers l'extérieur."

Evidemment, l'argumentation peut paraître convaincante, mais encore faut-il préciser clairement la double nature du problème qui se pose :

Si l'on cherche à atteindre un phénomène de ***trompe-l'œil*** *, c'est-à-dire à recréer sur le papier un dessin (un tableau ou une figure) qui induise sur la rétine la même image que l'objet originel, il est clair que c'est seulement la* ***perspective fuyante*** *(rectiligne) qui est susceptible de jouer ce rôle : il suffit pour cela de placer un œil (unique) au centre de projection, comme nous l'avons expliqué au chapitre précédent (cf. figure 1) . En revanche,* *la représentation curviligne suggérée par HAUCK et PANOFSKY , bien qu'elle cherche à " anticiper " la courbure apparente de l'image rétinienne, n'est en aucun cas susceptible de créer une " illusion optique " équivalente au trompe-l'œil.*

L'enjeu des remarques de PANOFSKY est ailleurs et il touche au deuxième aspect du problème : le dessin gauche de la figure 9 représentant une " salle des colonnes " , avec ***ses droites incurvées*** *, lui semble en fait capable de traduire sur une surface plane un* ***phénomène subjectif*** *indéniable, qui serait ressenti par le spectateur regardant la vraie salle ... Pour PANOFSKY la forme de l'œil* ***oblige*** *à voir les droites comme des courbes, et nul ne saurait échapper au phénomène.*

Sous ce nouvel angle, le problème nous concerne donc au plus haut point, car les figures utilisées habituellement en géométrie " oublient " de tenir compte de cette courbure, ce qui pourrait expliquer une part de leur impuissance à toujours convaincre ... Les arguments de PANOFSKY sont d'ailleurs d'autant plus troublants que celui-ci se semble pas manquer de " témoins oculaires " :

> " Cette courbure de l'image visuelle a été dans les temps modernes observée à deux reprises. Il y eut d'une part les plus grands physiciens et psychologues de la fin du 19e siècle (en particulier HELMHOLTZ, p. 151 ; HAUCK, **op. cit.** ; PETER, **op. cit.**) .
>
> Mais il y eut d'abord — et ceci semble être passé inaperçu - les plus grands mathématiciens et astronomes du début du 17e siècle, tel, le très curieux Wilhelm SCHICKHARDT, cousin de l'architecture wurtembergeois Heinrich SCHICKHARDT." (1)

Bien entendu, nous relèguerions sans aucun scrupule ce " curieux cousin " aux oubliettes de l'histoire des sciences ... en compagnie de tous les illuminés

---

(1) cf. [P]

qui tentèrent, aux diverses époques, d'empêcher les théoriciens officiels de théoriser en accord avec les coutumes les mieux établies !

Il n'empêche. L'historien de l'art enfonce définitivement le clou grâce à un témoignage sans appel :

> " Un autre savant, et non des moindres puisqu'il s'agit de KEPLER, adhéra à cette doctrine dans la mesure du moins où il admit que la queue d'une comète ou de la trajectoire d'une météorite, bien qu'objectivement rectilignes, pussent être subjectivement perçues comme courbes. Mais, ce qui est le plus intéressant dans la position de KEPLER, c'est qu'il était parfaitement conscient de la responsabilité que son éducation à base de perspective plane portait dans l'obstination qu'il mit, au début, à ignorer ou même à nier cette courbure apparente : en affirmant expliquait-il, que les lignes droites sont toujours perçues comme des droites, il avait laissé les préceptes de la perspective picturale lui imposer une conduite sans penser que l'œil n'effectue pas une projection sur une **plana tabella** mais sur la surface interne d'une sphère visuelle (KEPLER, éd. 1868, VII, p. 279 ; **ibidem** , p. 292)."

Après une telle caution, l'affaire semble donc entendue et nous sommes bien forcés de suivre PANOFSKY tirant les ultimes conséquences de sa théorie :

> " Et si, parmi nos contemporains, ceux qui sont jamais parvenus à voir ces courbures forment une infime minorité, cela tient sûrement en partie, comme pour KEPLER, à cette accoutumance à la perspective plane, renforcée par l'habitude de regarder des photographies ; accoutumance qui à son tour n'est compréhensible que par référence à un sentiment bien déterminé et spécifiquement moderne de l'espace ou, si l'on préfère, du monde.

S'il a donc fallu qu'une époque dont la vision avait été déterminée par une représentation de l'espace s'exprimant à travers la perspective plane la plus stricte commence par redécouvrir les courbures de cette sorte de sphère que constitue notre monde visuel, il est une autre époque pour qui, accoutumée qu'elle était à voir certes déjà en perspective mais non en perspective plane, ces courbures allaient tout simplement de soi à cette autre époque, c'est l'Antiquité. Nous rencontrons dans les théories optiques des Anciens ainsi que dans leurs théories sur l'art et également dans leurs philosophies, mais là sous forme de paradigmes, des observations sans cesse renouvelées telles que celles-ci : les lignes droites sont perçues comme des courbes et les lignes courbes comme des droites ; les colonnes d'un temple doivent être dotées d'une entasis (dont on sait qu'à l'époque classique elle est le plus souvent relativement faible) pour ne pas paraître s'incurver ; épistyle et stylobate doivent être construits avec une légère courbure pour éviter de donner au milieu l'impression d'une incurvation. Ainsi les célèbres courbures de l'architecture antique, notamment celles des temples doriques, sont l'illustration pratique de ces connaissances théoriques."

Le lecteur aura-t-il eu le temps de s'interroger sur cet aveu de KEPLER lui-même, postulant que la trajectoire d'un corps céleste est irréfutablement **rectiligne** *? Culpabilisera-t-il suffisamment d'avoir perdu la faculté originelle de " voir se courber les droites " pour reprocher à la civilisation moderne toute entière de l'avoir conditionné et accoutumé dans l'erreur à force de lui montrer des photographies, ou simplement des droites tracées au cordeau ou à la règle ? Le problème n'aurait sans doute qu'un intérêt anecdotique s'il ne mettait pas en lumière les énormes difficultés conceptuelles auxquelles ne peut manquer de se heurter toute réflexion sur la vision, sur le sens de la géométrie ou sur la sensation d'espace.*

En d'autres termes, le problème n'aurait pas d'intérêt si la réfutation des affirmations de PANOFSKY sur l'importance de la courbure rétinienne était chose facile ... Et ce n'est malheureusement pas le cas.

Sans prétendre pouvoir le contredire — et notamment dans sa théorie sur l'art grec — nous allons voir qu'il serait en fait bien surprenant que PANOFSKY ait prouvé quoi que ce soit en se fondant uniquement sur la géométrie de la rétine, car ce sera l'occasion ici d'analyser d'autres aspects du problème de la figure en géométrie dans l'espace.

B. LE PROBLEME DE L'IMAGE PSYCHOLOGIQUE

Bien évidemment, il y a en premier lieu une part d'hérésie logique à prétendre, comme PANOFSKY, que l'on doit voir une droite sous la forme d'une courbe — et, par corollaire, certaines courbes plus " droites " que d'autres ... alors même que la droite n'est rien d'autre que la notion géodésique servant de référence intellectuelle, par rapport à laquelle on conceptualise précisément la courbure. La question n'est cependant pas aussi simple qu'il paraît, car l'ambiguïté provient ici de la notion de " point de fuite " et illustre parfaitement la différence entre la géométrie **projective** *et la géométrie* **sphérique** *.*

Quel géomètre en effet n'a-t-il jamais eu envie de schématiser deux droites parallèles du plan sous la forme présentée figure 10 avec l'intention de traduire — ou d'expliquer — que ces deux droites " se rejoignent à l'infini " ? C'est ce même phénomène qui est manifeste, en perspective fuyante, lorsque des rails semblent se confondre à l'horizon, **à ceci près** *que l'image ne fait*

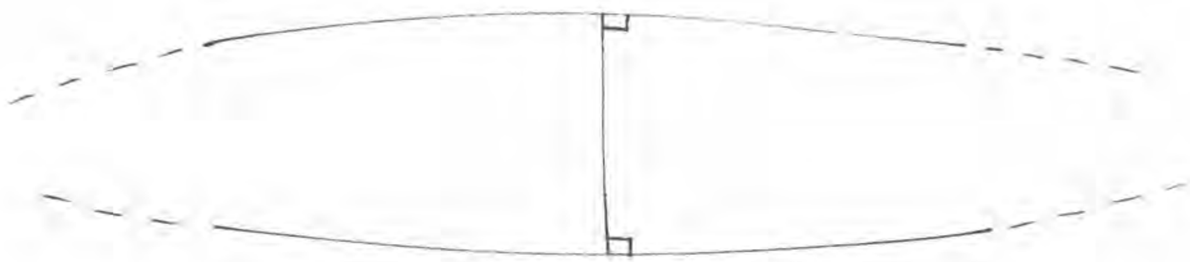


fig. 10

*alors apparaître qu'***un seul** *point de fuite, et donc que le schéma ne nécessite nullement de " tordre " les droites.*

La figure 10 , au contraire, cherche à ne privilégier aucune des deux extrémités ... , et c'est bien le problème qui surgit lorsque l'on est dans un cas analogue à celui de la figure 8 : si on regarde des droites parallèles " de face " ***il n'y a pas*** *de point de fuite, mais la tentation est grande de tourner la tête (ou les yeux) à droite ou à gauche. Dès lors, comme les droites se trouvent automatiquement dans une position oblique, un point de fuite apparaît (cf. figures 1 et 3) . Un autre point de fuite apparaîtra de l'autre côté si on renverse la position du regard mais,* ***en termes de géométrie projective*** *, ces deux phénomènes correspondent exactement au* ***même point*** *" à l'infini " .*

Bien entendu, rien n'empêche de ***penser*** *ces deux points de fuite comme différents (on se place alors tout simplement en termes de géométrie sphérique) , mais à n'en pas douter, il y aurait soit une certaine mauvaise foi, soit un strabisme exceptionnel, à prétendre que l'on* ***voit*** *effectivement ces deux points* ***en même temps*** *. C'est-à-dire que l'ambition de la figure 10 , comme d'ailleurs l'ambition de la perspective curviligne défendue par PANOFSKY, n'est pas de prétendre au trompe-l'œil, mais de* ***traduire*** *, de* ***signifier*** *un phénomène tout à fait naturel en* ***résumant*** *non pas une image visuelle, mais une image " psychologique " intégrant plusieurs vues différentes. On est plus près ici des tentatives des peintres cubistes que de la photographie. La situation est exactement la même, par exemple, si on observe une autoroute rectiligne depuis une passerelle qui l'enjambe : quand on regarde sous le pont, on voit des bords de chaussée parallèles, mais dès que l'on choisit un des côtés pour diriger horizontalement le regard, ces mêmes bords donnent l'impression de se rejoindre à l'horizon. A partir de là l'****intellectualisation*** *du phénomène implique une courbure de la chaussée qui est indispensable pour que chacune des deux extrémités corresponde à un point de fuite, ceci n'a strictement rien à voir avec la courbure de la rétine.*

En fait la théorie de PANOFSKY ne tient pas compte de la complexité du problème au niveau biologique, car tout porte à croire, au contraire, que cette courbure de la rétine n'impose en rien sa " géométrie " à l'image perçue par l'observateur.

Laissons de côté — pour simplifier — le travail simultané des deux yeux, qui devrait normalement être pris en compte, et intéressons-nous au niveau qui est sans doute le plus important pour la constitution de l'image visuelle d'un objet, c'est-à-dire à ce que pourrait être l'arrivée au cerveau des informations perçues par la rétine. Sans trop caricaturer, il faut admettre que " l'image rétinienne " est transmise point par point au cortex à travers le nerf optique. Et, bien que de nombreuses conjectures restent permises en ce qui concerne le processus global **d'interprétation** *de cette image par le cerveau, la question fondamentale est la suivante : " que reste-t-il, au moment de l'interprétation, de la forme imposée par la courbure de la rétine ? "*

La transmission des images télévisées a donné l'habitude de considérer ce genre de problème : il ne **reste rien** *de cette courbure, car une fois l'image enregistrée par la caméra, on peut la matérialiser — point par point — sur n'importe quel récepteur. La structure de celui-ci est capable de corriger (ou d'ailleurs d'apporter) toutes les déformations imaginables.*

Les mathématiques fourniraient la même réponse : le problème n'a pas de sens, car **il est mal posé ...** *D'une façon ou d'une autre, en effet, on est amené à schématiser la construction de " l'image visuelle mentale " en tenant compte de deux composantes :*

- *un système de décodage de la " conscience " à faire pâlir de jalousie les informaticiens les mieux nantis par la manne périodique des plans informatiques gouvernementaux, système dont on peut penser (du moins au niveau où nous nous plaçons) qu'il fonctionne peut-être sur des principes voisins de ceux des ordinateurs.*

- *l'ensemble des informations lumineuses provenant de la rétine et transmises par le nerf optique constitue symboliquement l'image proprement dite à décoder, c'est ce que nous avons appelé (cf. figures 11 et 12) la " projection sur le cortex " en choisissant arbitrairement de la représenter sur des plans virtuels, d'une part dans un système curviligne à la PANOFSKY (figure 11), d'autre part dans un système rectiligne classique (figure 12). Ce qu'il est important de comprendre c'est, qu'une fois*

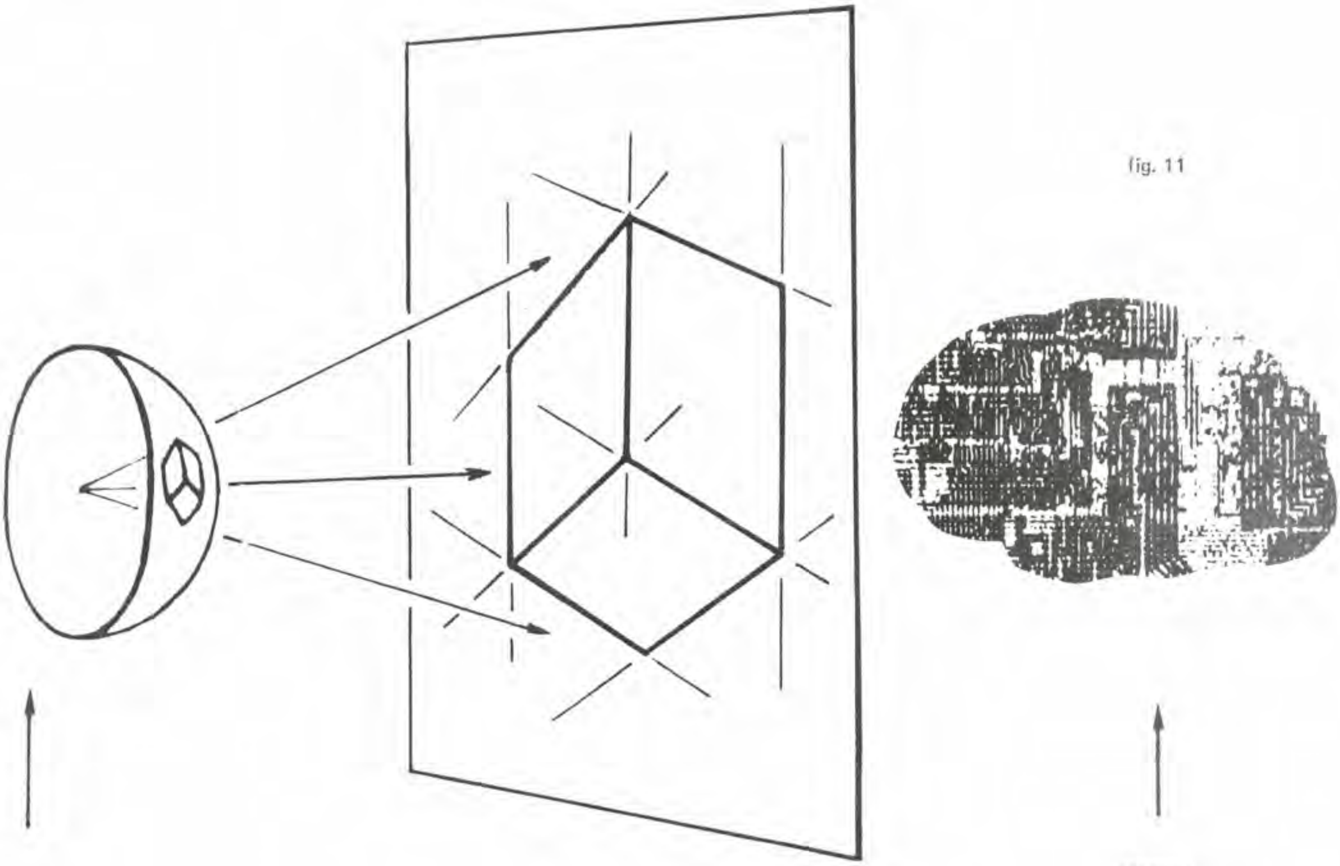


fig. 11

image
rétinienne

projection
sur le cortex

cerveau
décodeur
(détail)

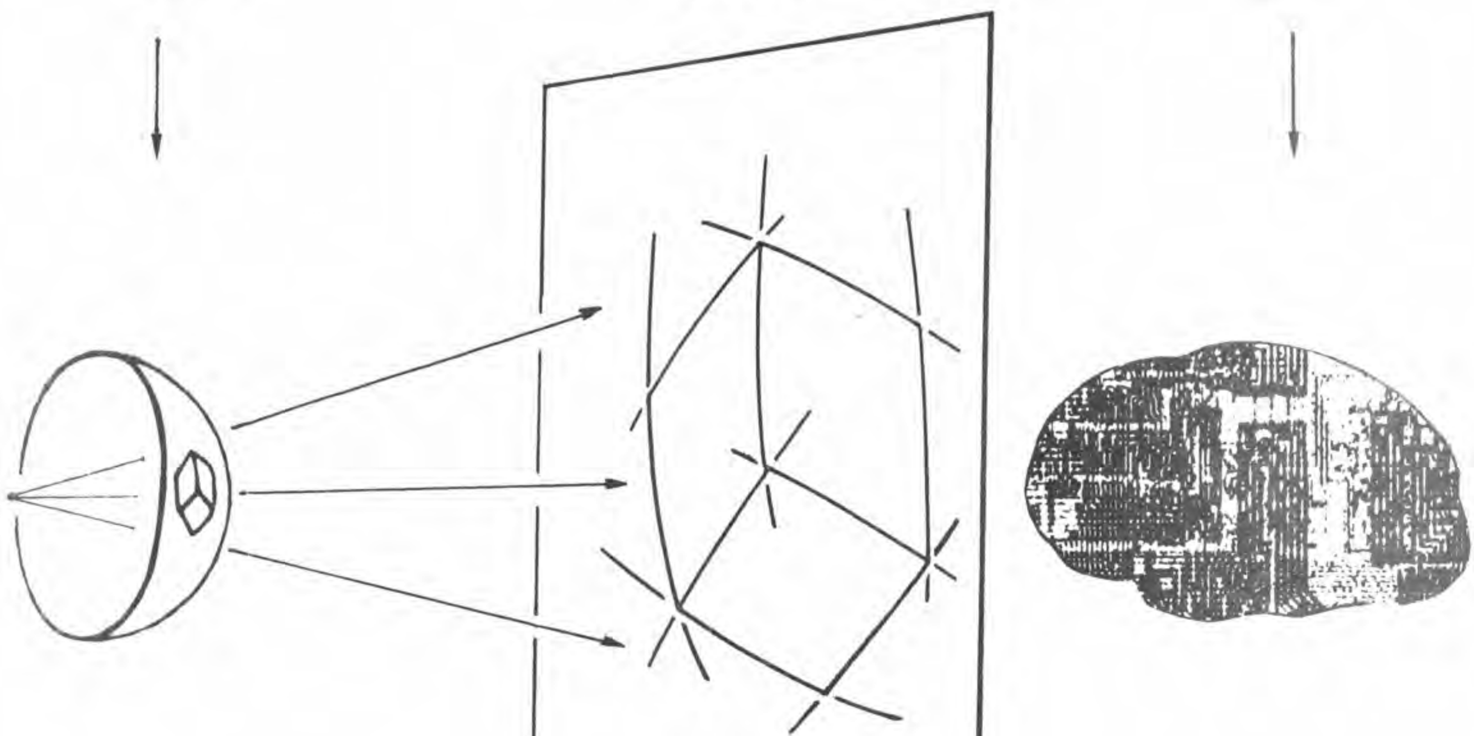


fig. 12

prélevées au niveau du nerf optique, les images provenant de la rétine permettent de recréer n'importe quel modèle de plan géométrique (1) *et que le raisonnement fondé sur la courbure sphérique de l'œil ne permet pas de conclure, car si le problème a une solution, elle est à trouver dans les principes de fonctionnement du système de décodage, c'est-à-dire du cerveau lui-même.*

Nous voilà ainsi amenés à l'aspect **psychologique** *de la question pour savoir s'il y a effectivement ou non " impression de courbure " et, même s'il n'est pas impossible que des éléments nouveaux permettent un jour d'éclairer la situation, la seule analyse qui soit possible aujourd'hui consiste à souligner le caractère* ***relatif*** *des considérations que l'on a tendance à greffer sur le problème, ainsi que l'importance de* **l'éducation** *dans la structuration progressive de la vision. C'est d'ailleurs là le point qui est sans doute le plus positif dans le témoignage de KEPLER cité par PANOFSKY, que de mettre l'accent sur l'importance de l'habitude dans le réglage du " décodeur " chargé d'interpréter l'image perçue par l'œil.*

Nous touchons ici, en effet, un point crucial hors duquel il serait artificiel de réfléchir au problème, car il n'est pas difficile de constater que la vision est un instrument dont l'usage s'apprend peu à peu au cours de la petite enfance et que les influences extérieures jouent un grand rôle dans cet apprentissage. On a ainsi observé (cf. par exemple (R)) que des chatons élevés dès la naissance dans un environnement ne comportant que des raies horizontales n'étaient plus capables, passé un certain seuil de développement, de **voir** *des formes*

---

(1) évidemment les figures 11 et 12 suggèrent que le "bon" modèle mathématique de ce que nous avons appelé "projection sur le cortex" est à chercher du côté de la notion de **variété différentiable** .

Cela dépasserait le cadre fixé ici, mais signalons que les recherches récentes en neurobiologie obligent de plus en plus à ramener le problème à un schéma de ce type, car c'est en fait une très petite partie de la rétine qui intervient dans la vision proprement dite, si bien que l'image est "recomposée" à partir de cartes fragmentaires, localisées elles-mêmes grâce aux mouvements musculaires du globe oculaire.

Il est clair par ailleurs que la combinaison des images en provenance des deux yeux (effectuée au niveau du chiasma ou du cortex) amène à prendre en compte une "variété" image visuelle qui serait, partiellement, de dimension 3 .

inhabituelles, aussi simples que des raies verticales. On constate de même que les couleurs ou le relief ne sont pris en compte par un enfant qu'à partir d'un âge assez tardif.

On peut de plus raisonnablement penser que tous les éléments extérieurs contribuent à la culture de chacun, qu'il s'agisse des situations réellement rencontrées, ou qu'il s'agisse des images elles-mêmes utilisées socialement pour **représenter** tel ou tel phénomène. Comme le signale KEPLER, les hommes n'ont sans doute pas " vu le monde " comme avant, une fois généralisé le système de la représentation en perspective fuyante, de même que l'introduction de la photographie a certainement appris à voir différemment certains phénomènes qui n'étaient même pas remarqués auparavant ... Les exemples d'actualité ne manquent pas pour faire comprendre l'importance de l'apprentissage ; il suffirait, par exemple, de remarquer la récente nouveauté introduite par les photographies réalisées avec un objectif " grand angulaire " : peu à peu s'instaure l'habitude de lire de telles images, sans y voir la " déformation " qui était sensible et choquante il y a peu de temps. On peut de même imaginer que le chaton " privé de lignes verticales " se retrouve, face à certains phénomènes qu'il devrait normalement **savoir** prendre en compte, dans la même situation que la plupart d'entre-nous devant un ciel étoilé : hormis quelques constellations comme la Grange Ourse, nous ne savons rien **voir** d'autre que des amas informes de points lumineux ...

Il nous semble en aller de la sorte dans le domaine qui nous occupe ici, à propos de la vision en géométrie, où il serait vain de croire que les éléments les plus simples puissent échapper à la notion de culture ou d'apprentissage. S'il était vrai, comme le pense PANOFSKY, que les Anciens voyaient effectivement les droites " courbes " , la question serait essentiellement de savoir pourquoi ils **voulaient** les voir courbes. De la même façon que nous aurions appris, depuis la Renaissance, qu'il est plus simple et plus pratique de les voir " droites " lorsque l'on veut éviter les paradoxes insurmontables ... Rien ne dit d'ailleurs que cette question ait un sens et ne se soit jamais posée, car il est frappant — et sans doute significatif — que les problèmes précis posés par la perspective et la géométrie des points de fuite aient suivi un cours parallèle à ceux posés par l'architecture. Ces deux sciences se sont en fait constamment nourries l'une de l'autre et on peut se demander quels panoramas ou quels paysages *seraient dignes de faire appel à d'immenses perspectives fuyantes si l'environnement habituel n'était pas en partie constitué des formes géométriques dues aux grandes échappées monumentales.*

Apprendre à " voir des droites " est une nécessité qui dépend de l'espace qui nous entoure, elle s'est constituée peu à peu au fil de la civilisation sans que la géométrie angulaire propre à la rétine y soit pour une part déterminante.

Ainsi, lorsque l'esprit est totalement privé de références, il peut très bien nous arriver de ne pas **reconnaître** *des alignements parfaitement rectilignes : chacun a sans doute eu l'expérience, la nuit, d'apercevoir une série de points lumineux se détachant sur l'obscurité totale pour former une suite approximativement rectiligne, droite parfaite ou au contraire guirlande incurvée. Que l'on veuille alors y voir précisément une droite ou une courbe et cela suffira à* **persuader** *que l'on voit vraiment l'une ou l'autre. Ce qui se passe d'ailleurs généralement, tant que l'on est privé de tout contexte, c'est que l'on a alternativement l'illusion de* **voir réellement** *chacune des possibilités, sans élément pour savoir en présence de laquelle on est placé. L'image reçue par la rétine ne suffit pas, en général, pour donner les informations suffisantes et les recherches récentes ont notamment montré que les possibilités de " mesures angulaires " précises sont très limitées au niveau rétinien : l'écart angulaire entre deux directions visées se traduit en fait surtout au travers des mouvements de la tête ou de l'œil. La plupart des illusions d'optique classiques sont là pour prouver que la vision est largement influencée par le contexte et par l'expérience personnelle de l'observateur, alors que si la rétine fournissait des écarts angulaires " fiables " , la question de savoir, par exemple, si les segments de la figure 13 sont égaux ou non ne se poserait pas ...*

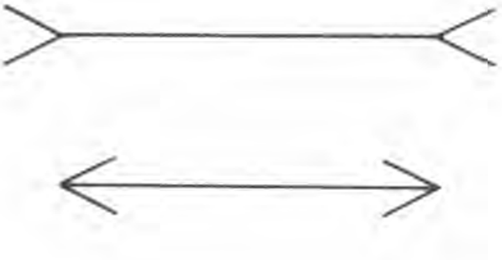


fig. 13

Il en va finalement de " l'image visuelle " comme d'une carte de géographie ; apprendre à lire un planisphère c'est apprendre à " voir " la surface terrestre. Mais chacun sait que le système de cartographie choisi peut décider de faire apparaître les méridiens (ou les parallèles) comme rectilignes ou non. Cela ne change évidemment rien à la réalité, ni même à notre conscience de la surface terrestre. La gageure de PANOFSKY est de prétendre ***comparer*** *les " cartes " utilisées par les Grecs à celles utilisées aujourd'hui, alors qu'il est impossible de disposer d'autre chose que de " l'original " et non pas des cartes de chacun.*

C. LA SUBJECTIVITE DE L'ESPACE

S'il apparaît ainsi que le sens de la vue ne se suffit pas en lui-même pour structurer, pour " rigidifier " , l'image perçue, on doit donc faire appel à une autre dimension du problème qui joue, pour l'apprentissage de la géométrie, un rôle fondamental : le ***sens de l'espace*** *. Sans d'ailleurs aller jusqu'à prétendre que l'éducation de la vision est achevée bien avant l'âge du collège et qu'il n'y ait plus matière pour " apprendre à voir " — un peu comme on apprend à* ***distinguer*** *la Grande Ourse ou Cassiopée dans un ciel étoilé, ou comme on apprend à* ***regarder*** *différemment une mésange bleue d'une mésange charbonnière — on peut admettre que l'objectif premier de la géométrie dans l'espace est précisément d'aider à structurer ce " sens de l'espace " chez l'enfant.*

En prolongeant la métaphore de la carte de géographie on peut dire, pour expliquer la différence entre cette notion nouvelle et la notion d'image visuelle, que le choix d'une carte (ou même d'un planisphère) est en fait relativement peu influencé par ***l'idée que se fait l'observateur*** *à propos de la rotondité de la terre. De même, le système curviligne de représentation en perspective utilisé sur la figure 9 n'interfère en rien avec une quelconque " courbure de l'espace " qu'il s'agirait de traduire sur le dessin. Mais entre la* ***véritable nature*** *de l'espace ou de l'univers environnants, et l'****image*** *que les yeux adressent au cerveau du spectateur, il y a un point fondamental pour l'analyse qui nous préoccupe ici : l'****idée*** *que le spectateur* ***se fait de l'espace qui l'entoure*** *, la structure, la rigidité qu'il lui confère consciemment ou inconsciemment.*

Cette structuration d'un espace abstrait, qu'il faut bien considérer comme un " référentiel " auquel est rattachée l'image visuelle (qui est toujours une image partielle) , cette structuration rassemble toutes les informations dont dispose en permanence le sujet sur l'emplacement ou sur la nature des objets qui l'entourent. Elle prend en compte l'expérience personnelle, culturelle ou sensitive, sur les distances, l'éloignement, la hauteur, et constitue ce que l'on pourrait appeler — en première analyse — la ***géométrie*** *adoptée par chaque individu* (1) *. Il n'est sans doute pas besoin de préciser que cette " idée de l'espace " évolue entre la naissance et l'âge adulte. Une grande part des recherches des psychopédagogues a précisément consisté à étudier et décrire les différentes phases de cette évolution.*

Nous renvoyons le lecteur intéressé à l'œuvre de PIAGET (voir par exemple (P1) et (P2)) , car pour résumer les points essentiels des résultats acquis, nous ne saurions résister à la tentation de citer une fois encore un historien de l'art ...

> " Les travaux des psychologues spécialisés dans la connaissance de l'esprit enfantin ont, en particulier, démontré récemment l'importance de l'activité du sujet dans la formation de notions comme celle d'espace, de mouvement, de temps sur lesquelles se fonde notre domination du monde extérieur. Il est certain, d'autre part, après les beaux travaux des PIAGET et des WALLON, que l'acquisition par l'enfant — c'est-à-dire par le futur homme - de la perception spatiale se fait non pas tout d'un coup mais par étapes, en liaison à la fois avec les progrès de la compréhension et les possibilités matérielles d'action de l'individu.
>
> L'enfant se fait, en premier lieu, une représentation confuse du monde ; sur un fond de sensations fuyantes, se détachent les

---

(1) un aveugle de naissance possède, lui aussi, un tel "référentiel", une telle "géométrie" de l'espace environnant.
Pour reprendre la remarque de la note page 31, on peut dire que le "sens de l'espace" n'est rien d'autre que la structure riemannienne choisie pour "rigidifier" la variété "image-visuelle", ou mieux, qu'elle correspond à une variété riemannienne sur laquelle se projette cette première variété.

premières répétitions et les premiers rapports. La faculté de construire un espace est sans doute immédiatement donnée à l'être humain, elle ne conditionne pas la spécificité de cet espace aussi différent pour les sociétés que pour les individus pris en particulier et inséparable de la totalité des progrès accomplis et des connaissances acquises. Un univers sans formes fixes et **a fortiori** sans mesure, c'est-à-dire sans objets et, naturellement, sans perspective, sans classes logiques de formes géométrisées, est le premier dont nous recevions l'excitation. Il est le point de départ de toute notre activité ultérieure et, fait surprenant qui prouve la possibilité théorique de son existence, il possède un caractère défini, il n'est pas seulement le futur univers spatial de l'adulte en moins riche ; toutes les observations acquises démontrent qu'il possède des qualités analogues à celles que les récentes recherches des mathématiciens ont définies comme correspondant à certaines intuitions fondamentales de la géométrie à un niveau plus large que la vision euclidienne de l'espace. Le premier univers de l'homme est topologique — déformable, fondé sur des notions de voisinage et de séparation, de succession et d'entourage, d'enveloppement et de continuité indépendamment de tout schéma formel et de toute échelle fixe de mesure. De la possibilité de concevoir un univers ainsi soustrait aux lois d'EUCLIDE, les mathématiques ne sont pas seules à nous fournir la preuve, mais également de nombreuses œuvres d'art, primitives ou contemporaines.

La seconde phase de la représentation spatiale chez l'enfant est celle où il perçoit un monde déjà plus distinct, bien qu'encore dépourvu de toute échelle permanente et abstraite de mesure. Les images élastiques, déformables et générales du début font place à des corps fixes, indépendants, pourvus de formes, susceptibles de classement et de reproduction. Cette phase correspond à une vision pour ainsi dire projective de l'espace. A une troisième phase est réservée la conception des rapports de grandeur fixe entre les objets même absents, ainsi que la conception de rapports entre des éléments isolés des objets, c'est-à-dire à la découverte des relations purement logiques et des relations asymétriques, bref à tout le système de chiffrage qui repose sur les postulats d'EUCLIDE et qui sert de base à la science ainsi qu'à la vie imaginative et affective de l'Occident depuis des générations. " (*cf.* (*F*)).

Sans être en désaccord avec ces résultats, nous voudrions attirer l'attention sur certains aspects du problème qui ne nous paraissent pas toujours suffisamment pris en compte.

Il convient de noter en premier lieu qu'une des caractéristiques manifestes de l'évolution observée chez l'enfant réside — comme on pouvait d'ailleurs s'y attendre — dans la tendance progressive à ce que l'on appelle en mathématiques " l'enrichissement des structures " . De façon plus précise, c'est le phénomène qui consiste à considérer qu'un espace (ou un ensemble) muni d'une simple **topologie** *est doté d'une structure plus " faible " que celle qui lui est conférée lorsque l'on désire prendre en compte des notions* ***affines*** *, structrure elle-même plus " faible " que celle que l'on obtient quand l'espace est rendu* ***métrique-euclidien*** *par l'adjonction du concept de distance. Le trajet inverse revient tout simplement à " oublier " peu à peu une part des propriétés pour ne plus avoir affaire qu'à des types d'espaces de plus en plus généraux.*

Curieusement, l'histoire des sciences montre une évolution exactement contraire ...

On peut certes penser que ce paradoxe provient du fait que les mathématiques ne sont pas autre chose qu'une sorte " d'introspection " dont le but serait précisément de " retrouver " peu à peu des structures originelles, " archaïques " au sens des psychologues. De telles explications oublient complètement qu'il est, parallèlement, un fait incontournable : la prise en compte — mathématiquement parlant — de structures de plus en plus " pauvres " nécessite de forger et d'utiliser des outils qui s'avèrent de plus en plus difficiles à maîtriser ou à conceptualiser. Ceci n'a évidemment rien d'étonnant si on veut bien convenir du fait que tout réside dans un passage du particulier au général, passage que les amateurs de sorites en tous genres n'ont que trop tendance à mépriser ...

Cela étant, il est rien moins qu'inquiétant de voir PIAGET écrire, par exemple :

" L'enseignement de la géométrie ne saurait trop gagner à s'adapter à l'évolution spontanée des notions *(c'est-à-dire aux diverses phases évoquées plus haut)* et cela d'autant plus que — on vient de le pressentir — cette évolution est beaucoup plus proche de la construction mathématique elle-même, que ne le sont la plupart des manuels soi-disant " élémentaires" . On a dit que la " théorie des ensembles " de CANTOR devrait s'enseigner à l'école primaire. Nous ne serions pas éloignés d'en penser autant des éléments de la topologie ... " *(cf. (P_1) .*

Puissent les responsables des programmes à venir ne pas trop en faire !

Le " fil conducteur " des expériences des psychopédagogues a effectivement été axé sur une certaine démarche axiomatique, il y aurait cependant un grave contresens à confondre la " structuration " progressive de l'idée d'espace sous une forme euclidienne — au moment de la troisième phase du développement décrit par PIAGET — avec une quelconque pensée " pré-mathématique " . Cela signifie simplement que l'environnement commence à être perçu par l'enfant comme " l'espace physique " que nous ressentons tous, mais les " lois de la physique " les plus élémentaires restent évidemment à découvrir, comme reste à acquérir la faculté de les conceptualiser et de les formaliser et, plus encore, un certain goût pour les quelques " acrobaties logiques " qui sont la base même des mathématiques.

*On a trop tendance à croire que les "concepts géométriques " sont simples et clairs à partir du moment où ils semblent s'énoncer clairement et peuvent être rattachés à des notions concrètes. La " théorie des ensembles " illustre parfaitement ce genre de confusion. Considérons par exemple la notion d'**inclusion** , qui est chose concrète, tangible, intégrée par l'enfant relativement tôt au cours de son développement. Que ne commet-on pas d'erreurs en pensant* *que " l'inclusion d'une droite dans un plan " ne relève pas d'une capacité de compréhension beaucoup plus élaborée. Sait-on le temps, les difficultés - les violences faites à la raison — qu'il a fallu pour s'apercevoir que les êtres géométriques pouvaient être regardés comme des* **ensembles de points** *? La difficulté n'est pas ici d'avoir acquis la notion d'inclusion, mais bien le fait d'arriver à* **imaginer** *droites et plans comme des* **collections de points** *, alors que la moindre tentative pour en " localiser " ou " totaliser " les points se heurte à toutes les difficultés conceptuelles de la géométrie.*

Inutile de préciser que le franchissement des phases décrites par PIAGET n'est pas **en soi** *d'une aide efficace pour surmonter de tels obstacles. Nous n'en prendrons qu'un seul autre exemple, car il concerne particulièrement la géométrie dans l'espace, c'est celui du " cube " et de la notion d'espace " de type euclidien ".*

Il est indéniable, d'une part, que la forme du cube est reconnue et intégrée très tôt par un enfant. On constate de plus que l'objet est suffisamment manipulé pour que les propriétés géométriques les plus évidentes en paraissent naturelles. Il est vrai, d'autre part, que l'espace physique environnant est structuré dès avant l'âge du collège sous une forme " euclidienne ". Cela ne signifie pas, comme nous l'avons dit plus haut, qu'il faille considérer que la " géométrie " en soit connue, mais sa " géographie " dans la conscience, n'est certainement pas très différente de celle que peut en avoir tout adulte, scientifique ou non. Une fois ces deux notions établies, il reste à se demander quel a bien pu être, un jour, le véritable " déclic " qui permit de comprendre qu'il était possible d'établir un lien entre ces deux structures apparemment si différentes ... On ne mesure plus guère aujourd'hui l'incroyable révolution qui a suivi la mise au clair de la notion de " repère cartésien " ; ce n'est pourtant pas autre chose que la découverte de ce lien : tout revient en effet à " enfermer " une portion donnée de l'espace dans un cube et à rapporter les points en question à leurs projections sur trois côtés ...

Il resterait, bien entendu, un long chemin à parcourir pour passer de là aux finesses du calcul sur les coordonnées, mais comment maîtriser les démar-

ches didactiques susceptibles de faire franchir de tels obstacles épistémologiques, alors même que l'on en a parfois perdu toute conscience ? Il en va sur ce point comme sur beaucoup d'autres : tantôt l'enseignement choisit de faire refaire à l'enfant un cheminement impossible pour l'amener à soi-disant redécouvrir des miracles inouïs, tantôt il décide de nier complètement la difficulté en le parachutant brutalement parmi des outils ou des concepts qui sont nés une fois la solution éprouvée et n'ont plus guère d'intérêt si on néglige le problème initial.

Les activités proposées ici n'ont malheureusement pas la prétention d'apporter ***la*** *solution à des difficultés de ce genre ; leur seule ambition en la matière est peut-être de chercher à " préserver les possibles " . Nombre de problèmes essentiels mériteraient pourtant d'être posés enfin* ***autrement qu'à travers le prisme déformant de la construction axiomatique des mathématiques*** *, et ceci tout particulièrement en géométrie où la difficulté de " voir " — et par conséquent de " concevoir " — passe par bien autre chose que des définitions épurées et des axiomes dont le seul intérêt semble être de masquer les vraies difficultés.*

Il est primordial, par exemple, de ne plus fonder la progression du collège sur des " impasses " aussi graves que celles qui touchent à l'importance des ***rapports*** *entre la géométrie plane et la géométrie dans l'espace : il serait fondamental de savoir à partir de quels apprentissages l'espace commence à être véritablement ressenti comme " isotrope " alors qu'il est, à l'origine, appréhendé uniquement à partir* ***d'un plan privilégié*** *— celui du sol ou celui de l'image —* ***et d'une troisième dimension*** *autonome fixant l'élévation, ou l'éloignement, par rapport à ce plan de référence. Il serait de même très important de comprendre par quelles étapes faire passer l'élève pour l'amener à sentir que " le " plan, une fois plongé dans l'espace, conserve ses propriétés* ***indépendamment de la position qu'il occupe*** *. De telles compétences constituent des préalables à toute acquisition des notions de* ***transformations géométriques*** *et la réponse aux questions précédentes devrait largement contribuer aux grands choix qui président à l'enseignement, principalement à l'âge du collège où* ***aucun*** *des concepts les plus élémentaires n'est véritablement maîtrisé.*

On oublie en effet que, **par nature** *, il y a un " concept " là où il y a* **difficulté** *pour cerner les tenants et les aboutissants d'une notion ... Si nous nous sommes attardés à la discussion d'idées quelque peu criticables à propos de théories qui font autorité en histoire de l'art, c'est aussi pour montrer de telles difficultés. Qui pourrait encore croire, après la lecture de PANOFSKY, que les concepts de* **parallèles** *— et même tout simplement de* **droite** *— sont des choses évidentes et simples à maîtriser ?*

Chapitre 3 : LE LANGAGE DE L'IMAGE

Comme nous l'avons expliqué au cours du chapitre 1 , les rapports de l'observateur à l'image proprement dite sont en fait de nature différente de ceux, fort complexes, qui le relient directement à l'objet ou à l'espace.

Une représentation quelconque — qu'elle soit artistique, technique, photographique — est toujours perçue en tant que telle, c'est-à-dire comme une " figuration " et non pas comme une " illusion optique " ; elle s'adresse à la **mémoire** *, à l'***imagination** *, et elle doit donc être conçue ou analysée dans cet esprit, c'est un* **moyen de communication** *qui est destiné à transmettre une certaine approche de la réalité que tel ou tel autre langage ne permettrait pas nécessairement de rendre efficacement.*

Comme tout langage, les images relèvent en particulier d'un **système de codage** *. Même si elles ne sont pas de purs et simples idéogrammes — dans la mesure où, par leur " forme " , elles évoquent les autres " formes " qu'elles sont censées représenter — elles possèdent toujours des caractères conventionnels, qui dépendent du contexte et sont généralement essentiels à leur compréhension immédiate. Considérons par exemple les trois dessins des figures 14 , 15 et 16 ci-après, chacun pourrait légitimement être la représentation d'un cube dans le système de la* **perspective cavalière** *. Tous les trois sont en effet obtenus par la même règle de projection parallèle oblique (1) , il est clair ce-*

---

(1) cf. chapitre 1, figure 6. Il suffit, pour s'en convaincre, de se rappeler que ces trois figures peuvent très bien correspondre à l'**ombre** d'un cube.

pendant que seule la figure 15 est habituellement perçue comme le dessin d'un " vrai " cube, mais elle ne fait qu'obéir à une règle **subjective** supplémentaire.

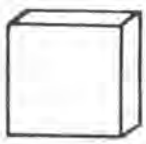


fig. 14

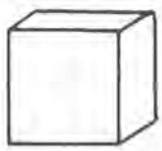


fig. 15

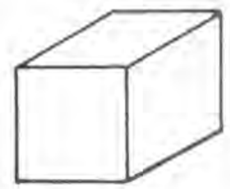


fig. 16

C'est une vérité première que toute image ne représente rien d'autre que ce que l'on **croit** y voir, ou même que ce que l'on **veut** y voir ; mais celui qui veut transmettre un message grâce à l'image doit garder à l'esprit une autre vérité, tout aussi importante : elle ne représente en fait que ce que l'on **a appris** à y voir. Consciemment ou non, le lecteur doit être **initié** s'il veut pouvoir accéder au contenu et au sens.

Les deux figures proposées par HAUCK et PANOFSKY (cf. figure 9 du chapitre 2) représentent toutes les deux la même " salle des colonnes ", elles sont simplement " écrites " dans deux systèmes différents. Aucune des deux ne peut prétendre à une plus grande parenté avec quelque réalité que ce soit : il leur suffit d'évoquer la **même chose** dans l'esprit de l'observateur, c'est-à-dire dans l'esprit de quiconque acceptera d'y voir ce que le dessinateur l'invite à découvrir. C'est l'aspect **culturel** de l'image — de son écriture et de sa lecture — qui importe ici, il n'a pas grand chose à voir avec le réalisme de la vision et il prend souvent, au contraire, un caractère assez paradoxal, même dans le domaine des formes géométriques simples. Un exemple illustre parfaitement ce phénomène : c'est celui des cartes postales ...

Les monuments comme les cathédrales (ou simplement les tours de grande hauteur) sont toujours vus par les passants et les touristes à partir de la rue *ou d'un endroit qui oblige à relever la tête pour apercevoir la totalité de l'édifice. Il suffit de faire l'expérience pour s'apercevoir qu'un tel angle de vue donne naissance à des points de fuite et donc que les verticales donnent l'impression de converger vers un certain point du ciel. Que l'on prenne alors une photographie en s'efforçant de cadrer l'ensemble du monument : elle obéira au même phénomène et aura donc l'allure schématisée sur la figure 17 ... Elle passera immédiatement pour un " travail d'amateur " qui ne rend pas correctement l'impression habituelle !*

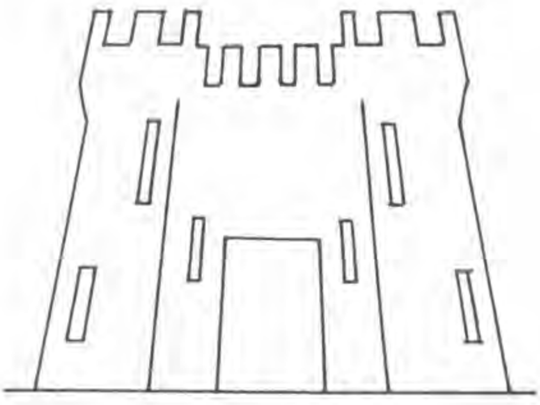


fig. 17

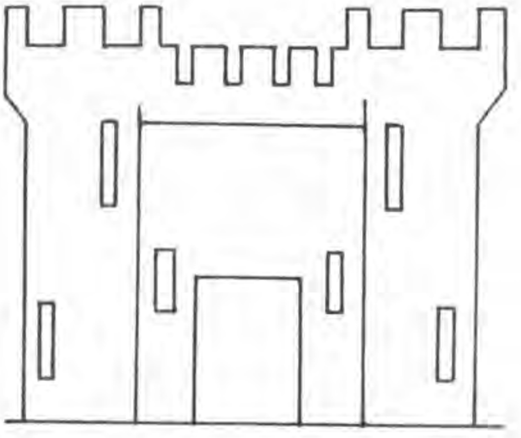


fig. 18

Dans ces conditions, s'ils veulent obtenir une photographie comme celle de la figure 18 , les photographes professionnels sont obligés à des prouesses quel que soit le recul dont ils disposent. Le plus souvent, pour obtenir des verticales qui soient rendues par des verticales, ils utilisent des appareils dont le fond est mobile et sur lesquels la plaque sensible peut prendre une position verticale même si l'axe de visée n'est pas horizontal. Le résultat n'est rien d'autre que celui qui correspond aux figures 5 et 6 du chapitre 1 , c'est-à-dire que le " réalisme " semble le plus satisfaisant alors même que la projection choisie est des moins " objectives " et cherche avant tout à éviter le phénomène du trompe-l'œil. On observera d'ailleurs que le dessin en " perspective curviligne " de la figure 9 obéit inconsciemment à la même convention puisqu'il ne fait pas subir le même sort aux verticales qu'aux horizontales.

Inversement, le " réalisme " prêté habituellement à la " perspective fuyante " peut être illusoire — voire inutile s'il ne met l'accent que sur des différences accessoires, comme celles qui séparent les figures 3 et 4 — mais il peut s'avérer indispensable. On devra par exemple y faire appel si la compréhension de la figure demande de situer correctement en profondeur les éléments de la composition, car ces informations ne peuvent être rendues par une projection cylindrique. C'est en effet la concourance des parallèles — c'est-à-dire l'existence des points de fuite — qui permet de donner l'idée ***d'éloignement*** *, alors que la représentation en perspective cavalière provoque une impression* ***d'écrasement*** *semblable à celle des photographies prises au télé-objectif.*

On devra pourtant prendre garde qu'une figure en perspective fuyante n'est ***lisible*** *qu'****à condition*** *que le sujet représenté permette lui-même de comprendre,* ***à l'avance*** *, que deux droites sont parallèles dans l'espace, sinon l'image à elle seule ne peut l'indiquer et devient incompréhensible pour celui qui ignore le contenu, même s'il connaît parfaitement le code. Nous touchons là à une* ***deuxième contrainte*** *: la nécessité d'intégrer à la lecture des informations extérieures. C'est une contrainte fondamentale en géométrie dans l'espace.*

Quiconque n'a jamais vu de polyèdre régulier a bien peu de chances d'apprendre les propriétés du dodécaèdre s'il ne dispose que de la figure 19 et s'il n'est pas doté d'une imagination exceptionnelle ... De façon analogue,

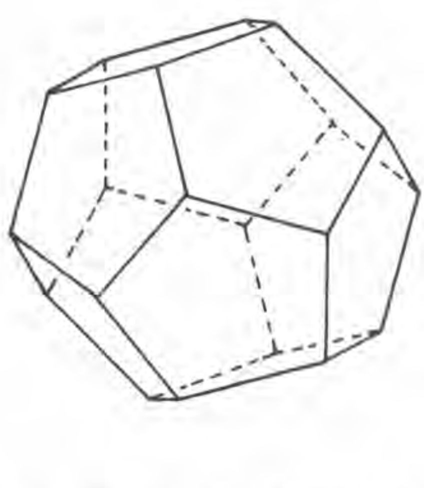


fig. 19

bien peu d'élèves, qui savent pourtant de quels volumes il s'agit, parviennent à reconnaître un tétraèdre régulier ou un cube dès lors qu'ils sont représentés dans une position inhabituelle (cf. figures 20 et 21) .

Très souvent, la transmission d'un " message " par l'image repose sur une telle part de convention dans le codage et dans le contenu que l'observateur oublie le côté artificiel du système de représentation choisi pour ne plus se

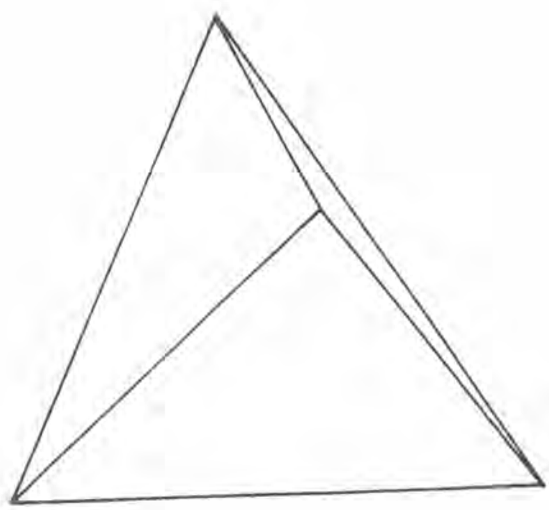


fig. 20

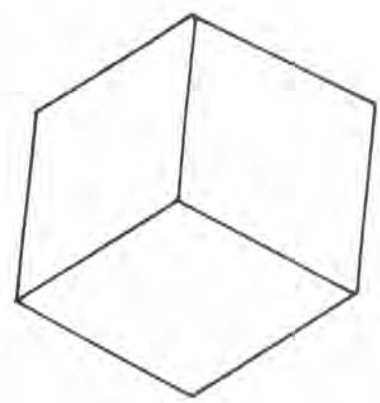


fig. 21

référer qu'à des éléments déchiffrés de façon globale parce qu'il a l'habitude de les fréquenter. Il n'existe d'ailleurs aucun système idéal permettant de lever les difficultés de " lecture " ou " d'écriture " , puisque l'on sait qu'une figure ne suffit pas à caractériser de façon univoque l'objet qu'elle représente. Cela étant, il n'en reste pas moins que le dessin en géométrie est un des points de passage obligés (que ce soit pour la communication ou pour l'apprentissage) , et lorsque l'on considère les barrières parfois insurmontables qui sont déjà dressées par la langue maternelle, il convient de prendre en compte avec la plus grande attention les multiples ambiguïtés qui peuvent brouiller le sens d'une figure.

Arrêtons-nous sur certains critères simples qui permettent, sinon d'assurer une bonne lisibilité des images, du moins d'en faciliter la lecture.

La première des règles à observer est celle de la **stabilité** *: de la même façon que la figure 22 est une figure instable — on peut y voir, selon son humeur ou son tempérament, un canard ou un lapin — , le dessin du cube de la figure 23 est instable, car il est possible de l'interpréter soit comme un*

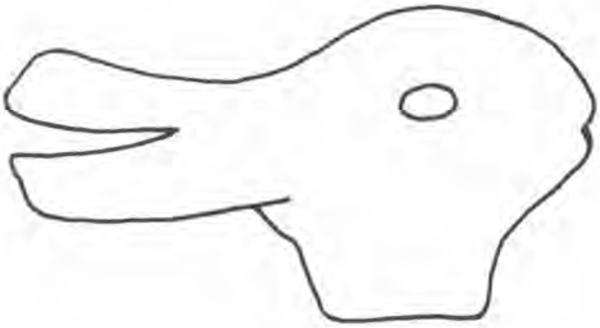


fig. 22

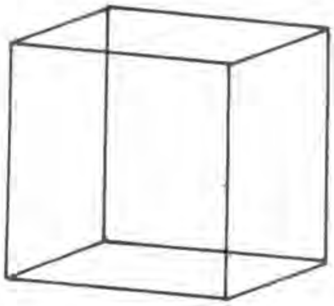


fig. 23

solide dont la face avant est le carré situé en bas à gauche, soit comme un solide ayant pour face avant le carré qui est en haut à droite. Une telle figure demande donc à être **stabilisée** *. Curieusement d'ailleurs, la notion de droite ou même de parallélisme sont des éléments secondaires dans la reconnaissance : un dessin malhabile effectué à main levée sera automatiquement corrigé à*

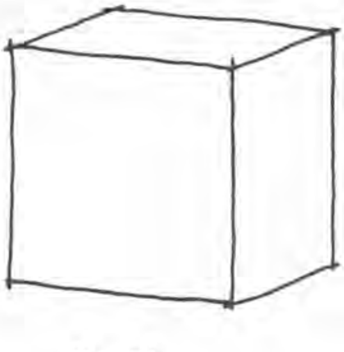


fig. 24

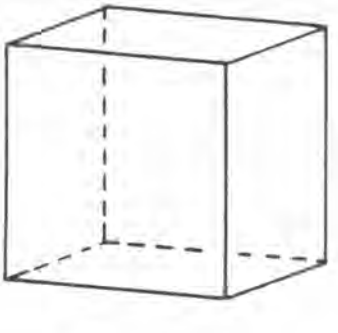


fig. 25

la lecture (cf. figure 24) , il faudra en revanche **fixer** *le cube en profondeur par un système traduisant la différence entre les arêtes visibles et les arêtes cachées.*

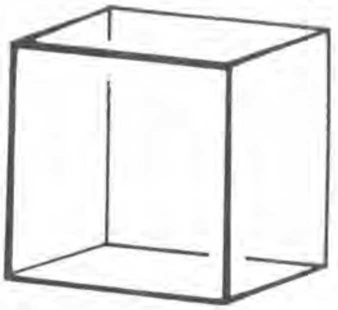


fig. 26

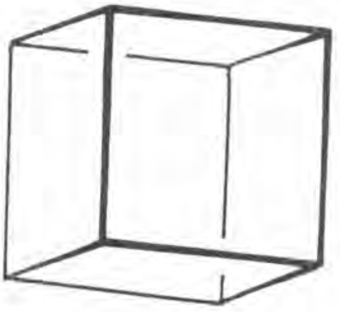


fig. 27

Les méthodes utilisées classiquement (figure 25) suffisent à stabiliser la figure sur l'une ou l'autre des formes " attractives " qui sont susceptibles de satisfaire l'esprit du spectateur. C'est donc en première analyse cette notion " d'attracteur " qui joue un grand rôle dans le décodage d'une image : une figure n'est acceptable que si elle est immédiatement rattachée à un " attracteur " connu, ou si tous les éléments qui la composent peuvent correspondre à de tels attracteurs. C'est par exemple le cas pour la figure 15 qui est "proche " des figures 3 et 4 du chapitre 1 , les figures 14 et 16 sont en revanche rattachées inconsciemment à des attracteurs " parallélépipèdes rectangles " . On pourra se convaincre aisément de la puissance et du rôle de cette notion lorsque l'on est en présence d'un conflit entre des attracteurs antagonistes : le malaise provoqué par la figure 28 peut mener jusqu'à inventer une toute autre " interprétation " , tant la stabilité du schéma oblige à y voir un objet véritable.

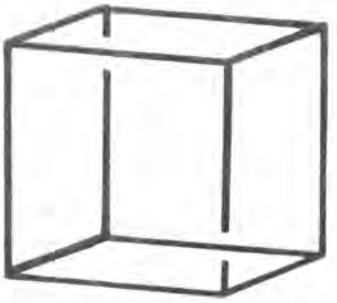


fig. 28

Parallèlement au critère de stabilité, une deuxième règle importante réside dans l'importance du **contexte** *. Pour une bonne compréhension du contenu, en effet, des éléments d'informations supplémentaires sont généralement indispensables aussi bien en ce qui concerne le " code " utilisé qu'en ce qui concerne l'objet représenté. Comme l'image ne peut caractériser la configuration dont elle provient, il devient indispensable de signaler dans les énoncés ou les commentaires les précisions manquantes : tous les dessins de cubes que nous avons proposés jusqu'ici devaient être compris comme des cubes* **parce que** *notre propos général indiquait qu'il fallait y voir des cubes et non pas des figures irrégulières susceptibles d'avoir une projection analogue. Implicitement et explicitement nous ne nous y intéressions pas ; nous avons fait en outre constamment appel à l'***habitude** *du lecteur de voir des cubes dans de telles figures. Imaginons au contraire que le système " curviligne " de PANOFSKY (cf. figure 9) soit entré dans les mœurs — par exemple pour représenter des objets de grandes dimensions — , nous l'aurions alors utilisé pour* **signaler** *que les cubes en questions devaient être imaginés comme des volumes importants. Mais il est clair que si tous nos dessins étaient courbes dans le contexte actuel, cela aurait signifié que nous nous intéressions en fait à des volumes plus ou moins bombés ou arrondis ... De même, la figure 28 ne déparerait pas dans un livre consacré aux circuits électriques, elle y trouverait un sens tout à fait différent de celui qu'elle voulait avoir ici.*

Pour donner un aperçu de quelques types d'attracteurs ou conventions particulièrement importants en géométrie dans l'espace, considérons par exemple les figures 29 et 30 ci-après. Au premier abord, la figure 29 ne peut guère manquer de " faire penser " à un prisme droit à base triangulaire : le parallélisme (qu'il s'agisse de BD , EF ou des couples AC , HF et BC , GH) **oriente la lecture** *— plus encore en perspective cavalière qu'en perspective fuyante — , de même que la* **verticalité** *et l'***horizontalité** *qui sont automatiquement conférés aux éléments principaux de dessin.*

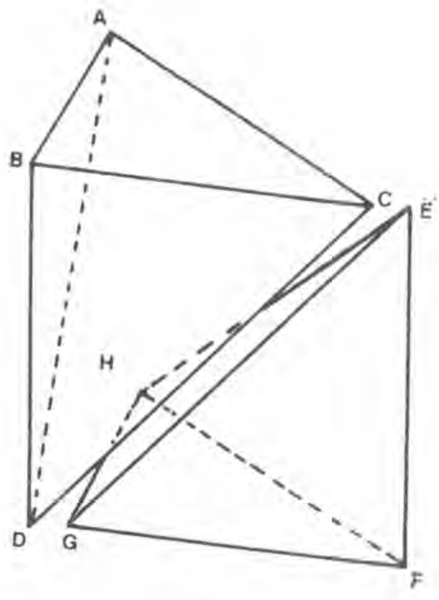


fig. 29

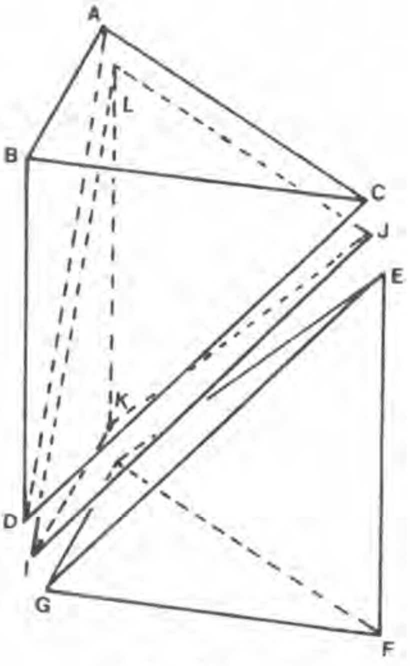


fig. 30

On observera d'ailleurs que ces deux cas " d'attractions " constituent, en géométrie dans l'espace, l'une des rares situation où fonctionne un " **attracteur-orthogonalité** " . Il est de même très rare qu'une figure fournisse efficacement l'idée **d'égalité de longueurs** ou d'**angles** et c'est une différence fondamentale avec la géométrie plane, où l'on dispose beaucoup plus aisément d'attracteurs dans le décodage des images, correspondant à des notions géométriques qui sont des moteurs essentiels pour l'intuition. A l'inverse, les figures 20 et 21 sont d'accès difficile car les égalités ou orthogonalités y sont peu évidentes.

Poursuivons l'analyse de la figure 29 . On aura noté qu'elle repose sur un " décalage " de deux volumes indépendants qui relève en fait d'une **convention tacite** au niveau de la lecture et n'introduit guère d'ambiguïté, car il renforce au contraire l'aspect spatial du schéma en mettant clairement en évidence des **éléments avant** et des **éléments arrière** . On touche cependant ici à un autre type d'habitude — c'est-à-dire à un nouvel attracteur — , car la lecture se trouve immédiatement orientée vers une idée fausse : l'évocation d'un **volume coupé en deux** est séduisante, si bien qu'une lecture trop rapide de la figure amènera à la conclusion qu'un prisme peut être décomposé en deux tétraèdres ... De telles erreurs sont fréquentes en géométrie dans l'espace. Un attracteur conduit certes à une lecture non ambigüe, mais il peut tout aussi bien guider sur une fausse piste.

On se persuadera sans peine que la " bonne " figure (celle de la décomposition schématisée par la figure 30) fait appel à une décomposition en trois tétraèdres ... et demande de réels efforts d'imagination. Le lecteur pourra aussi se laisser " attirer " par les symétries internes à cette nouvelle figure et il sera vite convaincu que des " attracteurs " pourtant privilégiés en géométrie plane fonctionnent beaucoup moins facilement dès que l'image a trois dimensions. Les tétraèdres ABCD et LKJI sont pourtant transformés l'un de l'autre dans la symétrie (oblique) de plan ACD et d'axe BK , et il en va de même de LJKI et FEHG par rapport au plan IJK ... Peut-être aurons-nous réussi à le convaincre, en tout cas, de l'instabilité inhérente à toute figure, dès lors qu'elle est complexe, même si on peut penser l'avoir " comprise " en la reconstruisant mentalement ! (1)

Le dessinateur est ainsi confronté à de nombreux obstacles s'il veut être compris, et les règles auxquelles il doit obéir reposent plutôt sur des constatations empiriques que sur une logique abrupte appliquée à la situation.

Si la perspective fuyante la plus rigoureuse est une méthode qui pourrait passer pour parfaite, elle n'en constitue pas pour autant **le** *langage de la géométrie dans l'espace permettant d'éliminer toutes les difficultés. Il n'y a pas de langage idéal et on peut tout au plus espérer trouver un système de représentation adapté à chaque situation, qui sera dégagé peu à peu au regard de l'expérience. Mais, comme c'est le cas chaque fois qu'il est question de* **langage** *, le phénomène de sélection est soumis aux pressions de l'évolution, c'est-à-dire qu'en matière de formes géométriques et d'images géométriques, " l'adaptation à la fonction passe par un processus de sélection, de mutation, puis de survivance des formes les mieux adaptées. Une fois dégagé le modèle des images qui semblent évidentes ou convaincantes, la pression sociale se charge d'éliminer les images non conformes ".* (2)

---

(1) la figure 30 n'est rien d'autre que la preuve du fait que le volume d'une pyramide est le **tiers** du volume du prisme de même base et même hauteur : les trois tétraèdres ont en effet des volumes identiques car la symétrie oblique laisse celui-ci invariant.

(2) cf. Ernst GOMBRICH, [G] .

Comme l'ont compris les " psychologues de la forme " la distance est irréductible entre les **objets** *et leurs* **images** *. Les uns participent du réel, du concret, de* **l'espace tangible** *. Les autres sont un intermédiaire entre cet espace et son " double "* **imaginaire** *, qui n'est en définitive que* **l'idée** *que nous pouvons nous faire du réel. C'est sur ce " deuxième espace " que travaille le géomètre et, plus que d'autres, il a besoin pour cela du* **langage de la figure** *, avant même d'avoir recours, ou tout simplement de pouvoir accéder, au* **calcul** *. Il est donc absolument nécessaire de réhabiliter aujourd'hui dans l'enseignement le DESSIN et l'IMAGE , en leur rendant la place qu'ils ont perdue au profit d'une approche bien trop formaliste des mathématiques. Tel est d'abord le but des activités proposées ici, auxquelles on reconnaîtra en outre — du moins nous l'espérons — la volonté plus générale d'aider l'élève à* **structurer** *l'idée qu'il peut se faire de l'espace tangible, pour en acquérir l'interprétation " cartésienne " d'un monde à trois dimensions qui nous paraît la seule capable d'aboutir à une appréhension scientifique du monde physique.*

Evidemment, le problème n'est pas simple et la seule mise en avant du DESSIN ne garantit aucunement la réussite ... Nous expliquerons plus loin les objectifs précis que nous nous sommes fixés, mais il nous faut répondre par avance à deux types d'objections que ne saurait manquer d'attirer la position que nous avons adoptée vis-à-vis de la dialectique "lecture"/"écriture" de l'image.

Par delà les réticences habituelles à la géométrie et au dessin, il est en effet difficile de se défendre de deux redoutables questions préalables : la première consistera à considérer qu'une excessive mise en avant de l'image revient à oublier d'espace, les formes, les objets, en enfermant prématurément les compétences au niveau des spéculations abstraites liées à la figure, la seconde admettra au contraire l'importance qu'il faut accorder au dessin, mais tendra précisément à donner la priorité à l'apprentissage des **règles du dessin** *, et, de préférence, à partir des objets eux-mêmes.*

Les tenants de la première objection mettront donc l'accent sur l'observation et la manipulation de **maquettes** *, les partisans de la seconde seront amenés à accomplir des prouesses pour rendre naturels les principes de la perspective cavalière.*

*Notre volonté n'est évidemment pas de dénier toute légitimité à ces points de vue ou de dénigrer les tentatives qui s'y rattachent. Bien au contraire. Et nous ne saurions d'ailleurs prétendre que certains des énoncés de nos fiches ne nécessitent pas — pour une partie des élèves — des explications de type expérimental. On notera d'autre part, et tout particulièrement à la lecture du chapitre 8 , qu'il est nettement dans nos intentions, sinon d'***apprendre*** *les règles de la perspective cavalière, du moins de* ***rendre accessible*** *aux élèves une démarche qui conduirait à ses règles. Il n'en reste pas moins que nous préconisons une attitude vis-à-vis du* ***langage de la figure*** *qui suppose à la fois un certain détachement vis-à-vis du " réalisme " et une acceptation de modèles conventionnels fondée sur des habitudes plutôt que sur des explications " constructivistes ".*

Comme nous l'avons montré, la lecture d'une figure n'est pas aussi proche qu'on pourrait le croire de la vision que l'on peut avoir des objets eux-mêmes. Et après avoir constaté, en observant les élèves, à quel point le " jeu sur l'image " est susceptible de prendre son autonomie et de devenir fécond même si le " réalisme " est relégué au second plan, on se persuadera vite que la progression dans l'apprentissage des figures n'est rien d'autre que l'acquisition d'un ***langage naturel*** *. Nombre d'enfants, pourtant handicapés dès qu'ils sont confrontés aux subtilités de la langue, montrent de telles réussites dans ce domaine qu'ils suffisent à prouver que le choix du dessin n'est nullement un obstacle à l'épanouissement logique, et qu'il constitue au contraire un antidote aux discours trop souvent hermétiques de l'enseignement des mathématiques.*

*On admettra par ailleurs sans peine que la compréhension véritable du fonctionnement du dessin lui-même requiert des compétences qui sont nettement hors de portée des élèves du collège, ou, à tout le moins, que toute explication devient artificielle si elle ne suppose pas d'entrée de jeu les savoir-faire qui sont précisément ceux que nous mettons en avant dans nos fiches. Le problème est en réalité exactement le même dès qu'il est question d'accéder à un langage : tout est matière à apprentissage — que ce soit l'****usage*** *et la* ***construction*** *des images, ou les* ***notions géométriques*** *qu'elles traduisent — et ces apprentissages seraient condamnés à l'avance si la nature ne faisait pas elle-même la plus grande part du travail !*

Le professeur est en effet confronté à une triple gageure : apprendre à la fois la **lecture** *,* *l'***écriture** *et le* **sens** *, dans un domaine où les objets à représenter sont des notions abstraites, qui déterminent presque d'elles-mêmes aussi bien la " forme " que le " fond " . Nul ne peut prétendre y parvenir par des méthodes autres qu'empiriques.*

Notre ambition est précisément de faire reconnaître la nécessité de ces empirismes dans le dédale des conventions, des artifices et des présupposés qui participent aux fondements du langage de l'image. Il nous reste à préciser les choix que nous avons été amenés à faire en ce qui concerne le " fond " , tant il est clair que l'apprentissage du **langage** *ne serait rien si le maître ne fixait pas le* **sens** *, c'est-à-dire les objectifs, qu'en l'occurrence, il poursuit ...*

Chapitre 4 : DE L'IMAGE AU CONCEPT

Comme nous l'avons observé à propos des images les plus " exactes " — ou les plus " réalistes " — comme celles que l'on obtient grâce à la photographie ou aux règles de la perspective fuyante, une ***représentation*** *n'est pratiquement jamais destinée à remplacer l'objet à partir de quelque phénomène de trompe-l'œil. Au contraire, pourrait-on dire, car tout en entretenant certains rapports avec la réalité, les figures fonctionnent essentiellement comme un langage, avec son système de codage propre, comme un langage dont le but est de* ***signifier*** *des formes et des propriétés caractéristiques et dans lequel entre une grande part de conventions.*

De la même manière qu'on le ferait pour étudier les ***mots*** *ou les* ***phrases*** *de la langue maternelle — qui relèvent, de façon fort complexe, d'un système de vision et de représentation du monde — , il convient donc avant tout de considérer que les images n'entretiennent pas seulement des rapports à la réalité, mais qu'elles participent, d'abord, à* ***l'idée que nous nous faisons de la réalité****. Entre le dessin d'un cube sur lequel le géomètre représente des arêtes droites et parallèles et n'importe quel " vrai " cube matériel, on retrouve la même différence que celle que le caricaturiste établit entre un portrait brossé à grands traits et son original ... Qui, pourtant, pourrait prétendre que la* ***ressemblance*** *n'est pas frappante ? Ou parfois même que le résultat n'est pas " plus vrai que nature " ?*

Il est ainsi possible de ***reconnaître*** *un visage sans aucune confusion mais on peut aussi constater, lorsque l'artiste a réussi, que quelques traits* *permettent à une caricature de " raconter " une personnalité complète et même de mettre en lumière des particularités psychologiques cachées. Le rapport au réel est pourtant ici bien ténu, on ne peut cependant nier la puissance de l'artiste qui, usant d'une combinatoire excessivement subtile de traits, d'ombres et de lumières, parvient à traduire ce qui lui paraît* ***significatif*** *dans la réalité en conjuguant à une attention extrême pour certains détails, une inattention égale vis-à-vis des éléments jugés étrangers ou anecdotiques. Telle ride, telle cicatrice seront purement et simplement oubliées, alors que le visage tout entier pourra très bien être recomposé à partir d'une autre imperfection, dès lors que l'artiste en décide ainsi. A lui de mettre l'accent sur l'essentiel — la* **structure** *, pourrait-on dire — de chaque visage et d'assembler ses traits selon une alchimie dont il est sûrement le seul à posséder le secret.*

Le lecteur aura sans doute compris qu'à notre sens la ***géométrie*** *n'est pas vraiment de nature différente ... Nous ne sommes pas loin de considérer en effet, avec René THOM, que le caricaturiste ou le peintre font en quelque sorte œuvre de géomètre, dans la mesure où chacun est dépositaire d'un savoir qui lui permet de donner un sens — partiel — au " monde ".*

> " La géométrie euclidienne classique peut être considérée comme une magie ; au prix d'une distorsion minime des apparences (le point sans étendue, la droite sans épaisseur,...) le langage purement formel de la géométrie décrit adéquatement la réalité spatiale. En ce sens on pourrait dire que la géométrie est une magie qui réussit. J'aimerais énoncer une réciproque : toute magie, dans la mesure où elle réussit, n'est-elle pas nécessairement une géométrie ? " *(cf. (T))*

Notre but, bien évidemment, n'est pas de chercher si telle ou telle science est une " géométrie " — ou même si l'art de la caricature, une fois " formalisé ", pourrait en être une ... —, nous voudrions simplement, pour revenir à la remarque débutant le chapitre 1 et comparant l'art du géomètre à celui du peintre plutôt qu'à celui du sculpteur, souligner combien les figures dans l'espace sont à rapprocher en fait de l'art du caricaturiste. Il parvient à conserver dans un visage ou une silhouette les seuls éléments **intéressants** *, le géomètre* *ne fait pas autre chose. A la différence près qu'il n'étudie par les " caractères " mais les* **objets** *et l'***espace** *environnants dans le but d'en maîtriser les distances, les incidences, les orientations, etc., c'est-à-dire dans le but de percer une part des secrets de la* **forme** *. Ce faisant il a effectivement mis au jour les instruments d'une " magie " , au sens où THOM emploie ce mot, et cette " magie " , pour autant que l'on puisse en juger aujourd'hui, a doublement réussi :*

Tout d'abord, en se situant dans le prolongement de la phase de " structuration euclidienne " de l'espace décrite par PIAGET (cf. chapitre 2) , la géométrie n'a pas d'autre but que de **donner un sens** *au monde spatial, d'en découvrir les lois et les propriétés de façon à savoir forger des outils susceptibles de* **prolonger** *et de* **dépasser** *les limites de notre expérience sensible. Les exemples de " réussite " seraient si nombreux, de l'architecture à la technologie, qu'il devient superflu de chercher à établir la moindre liste ... citons néanmoins, puisque nous nous sommes intéressés précédemment aux problèmes de " l'image visuelle " , les champs de l'astronomie ou de l'astrophysique — domaines par excellence de la géométrie — où il n'est question, au fond, de rien d'autre que de structurer les images imparfaites que nous recevons de l'univers.*

Mais au-delà de cette première réussite, " inévitable " pourrait-on dire mais qui suffirait à elle seule à fonder le caractère " magique " de la géométrie, il convient aussi de rappeler que, malgré son aspect " élémentaire " , la géométrie euclidienne aura permis de fournir elle-même un cadre à l'étude de ses propres limites. On sait en effet que la structuration du " monde " fondée sur la géométrie des Grecs n'aurait pas suffit pour répondre à certaines interrogations sur la nature " globale " qu'il faut conférer à l'univers afin de rendre compte de ce qui peut se passer " à l'infini " . Soulevés tout d'abord en termes de " géométries non-euclidiennes " — validité ou non du postulat des parallèles — ces problèmes ont trouvé ensuite une importance capitale en physique, par exemple dans le cadre de la " relativité générale " . Or, dans la mesure où les modèles les plus efficaces relèvent actuellement de la théorie des sous-variétés de $\mathbb{R}^n$ *, on peut à juste titre considérer que l'outil essentiel pour l'étude de tous les cas envisageables n'est pas autre chose que la généralisation naturelle de la géométrie euclidienne dans un espace à plus de trois dimensions.*

De telles découvertes sont dues au fait que les géomètres ont eu la chance de dégager peu à peu des notions simples (droites, plans, nombres, angles, vecteurs, etc.) permettant d'éclairer des situations ou des phénomènes complexes et l'on peut à bon droit parler de " magie " lorsque l'on sait le petit nombre de règles auxquelles obéissent finalement ces notions face à l'étendue des phénomènes physiques qu'elles permettent de structurer et d'expliquer. Cela ne signifie malheureusement pas que la géométrie soit une science **simple**, *ou que les* **concepts** *qu'elle manipule soient d'emblée à la portée de chacun, cela signifie qu'à partir d'un certain " état d'esprit " et d'une certaine " curiosité ", d'une aptitude au raisonnement et d'une certaine attitude vis-à-vis des figures — toutes choses qui ne s'acquièrent qu'à travers l'expérience — les outils que les géomètres ont forgés permettent de résoudre des problèmes d'une complexité apparente sans commune mesure avec celle des prémices.*

A. L'IMAGE ET LE CONCEPT

Prenons un exemple très élémentaire, au niveau de difficulté des activités qui sont proposées ici pour le collège. Considérons la figure 31 représentant un cube traversé par une droite coupant les faces visibles en A et B.

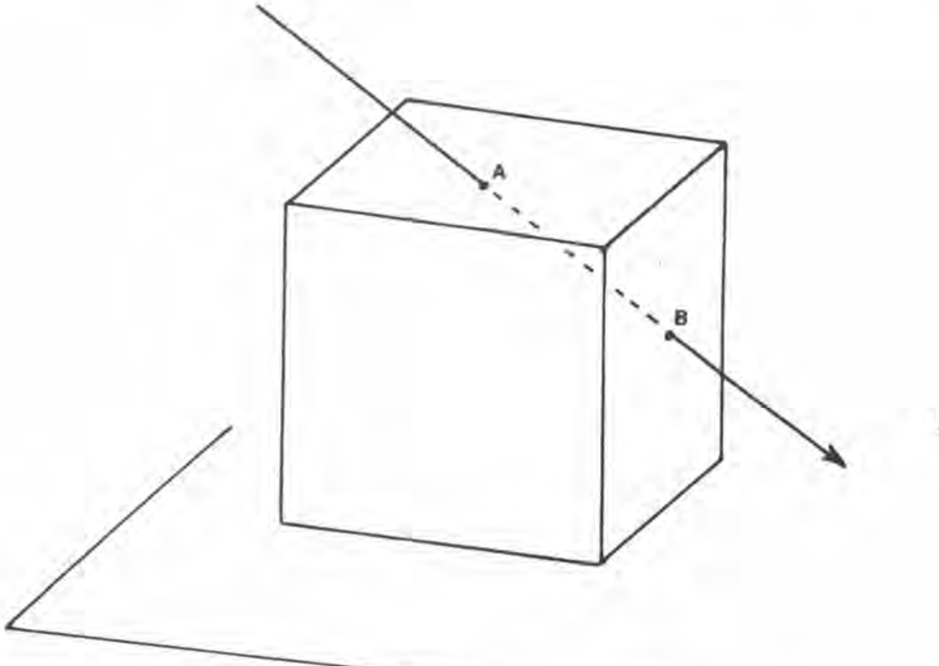


fig. 31

Alors que la simple observation de la situation réelle correspondante

— *matérialisée, par exemple, à l'aide d'un cube en bois percé d'une tige métallique — ne permettrait pas de préciser de façon vraiment satisfaisante l'endroit exact C où la droite AB doit recouper la table supportant le cube, l'exercice devient simple de construire sur la figure le point cherché, puis de le rapporter aux autres éléments connus : il suffit pour cela d'utiliser un plan intermédiaire P contenant AB et ses intersections avec les faces, comme nous l'avons schématisé sur la figure 32 .*

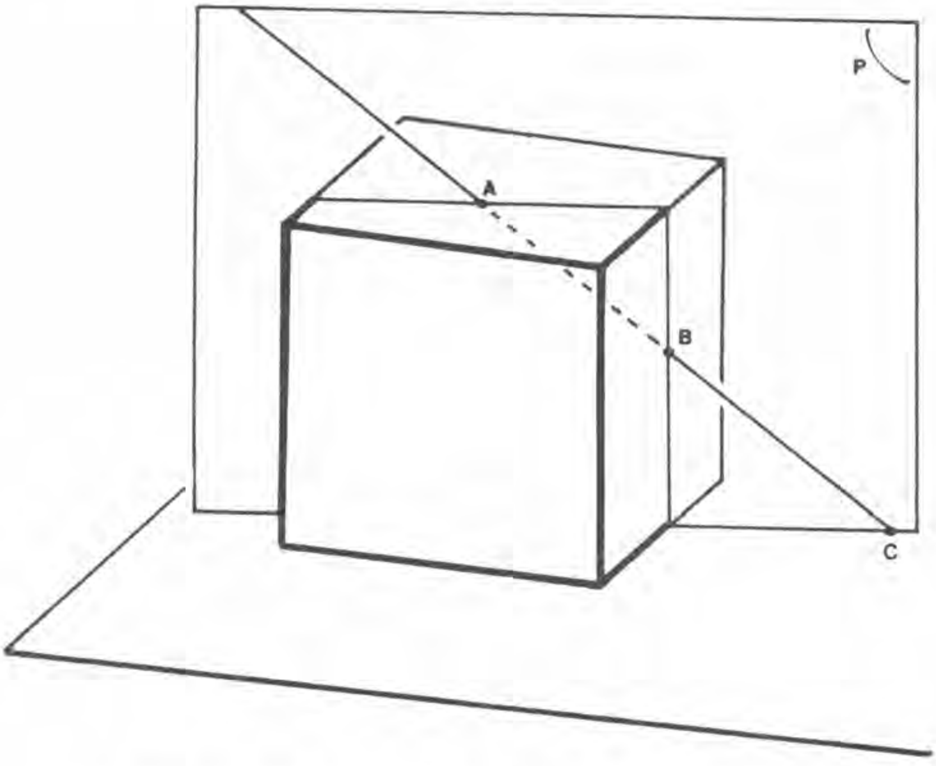


fig. 32

Ce qui est imporant ici, c'est d'abord que la figure n'entretient plus du tout les mêmes rapports au réel que ceux qu'entretiendrait une photographie, et c'est ensuite que ces rapports au réel sont devenus **secondaires** *, parce que ce sont les* **concepts** *de droite et de plan qui sont importants au moment où l'on raisonne, et non pas la façon dont la figure est obtenue à partir de l'objet initial. L'image contient à elle seule tous les éléments d'information et il suffit de l'interroger pour en percer le " secret " ... Une fois ce travail accompli sur le dessin, les données du problème auront véritablement été mises en évidence et on aura compris le rôle des paramètres influant sur la solution, puisqu'on se sera rendu compte de ce qui commande la position du plan P et de la façon dont il faut rapporter C aux points A et B dans P . On pourra alors revenir à la situation matérielle véritable pour, éventuellement, utiliser ces résultats.*

Nul doute que les compétences requises ici sont à la portée d'un élève de collège et que, même si l'exercice en question ne constitue pas un but en soi, l'activité qui serait ainsi proposée amènerait à une **connaissance de l'espace** *non seulement utile ou efficace, mais à une connaissance* **indispensable** *à la plus élémentaire des démarches scientifiques ou technologiques.*

Les avis d'ailleurs ne divergent guère sur ce point et nous risquons bien peu d'être gravement démentis, si ce n'est que de graves " malentendus " sont venus — dans la décennie précédente — compliquer le problème didactique à un point tel que certains pourront croire que les idées défendues ici contiennent en germe les ferments d'une " révolution culturelle " en matière de géométrie, et notamment de géométrie dans l'espace au collège ...

Passons sur la mode qui prévalut un temps de " faire de la géométrie " en pensant que les figures étaient inutiles, voire nuisibles, puisque leur seule fonction était ramenée à la simple paraphrase d'un texte logique ... Ce que nous voudrions surtout relativiser ici, ce sont deux grandes idées force qui ont guidé les programmes ou les commentaires jusqu'en 1978 , et dont les corollaires sont loin d'avoir disparu de la pratique actuelle.

Qu'elle soit contaminée ou non par la tendance générale au " formalisme " , la période des " maths. modernes " a mis tout d'abord en avant une question essentielle et difficile : celle de la **pertinence des outils** *qui doivent être enseignés aux générations d'élèves qu'il s'agit de préparer aux études scientifiques ou techniques du lycée. Reprenons en effet l'exemple précédent en modifiant légèrement la figure 31 de façon à utiliser les arêtes du cube initial pour former un repère cartésien. Aussi élémentaire ou élégante qu'ait pu apparaître la méthode précédente pour trouver le point C , elle est indéniablement concurrencée par une démarche analytique — ou, si l'on préfère, vectorielle — qui consisterait à introduire les coordonnées des points A et B dans le repère 0xyz , puis à chercher celles de C en écrivant les équations qui expriment l'alignement de A , B , C .*

Il est clair que ces méthodes sont ici parfaitement équivalentes, mais les tenants de la " géométrie pure " ne pourraient guère soutenir bien longtemps *que la " méthode analytique " n'offre pas un relais excessivement puissant dès que le problème se complique.*

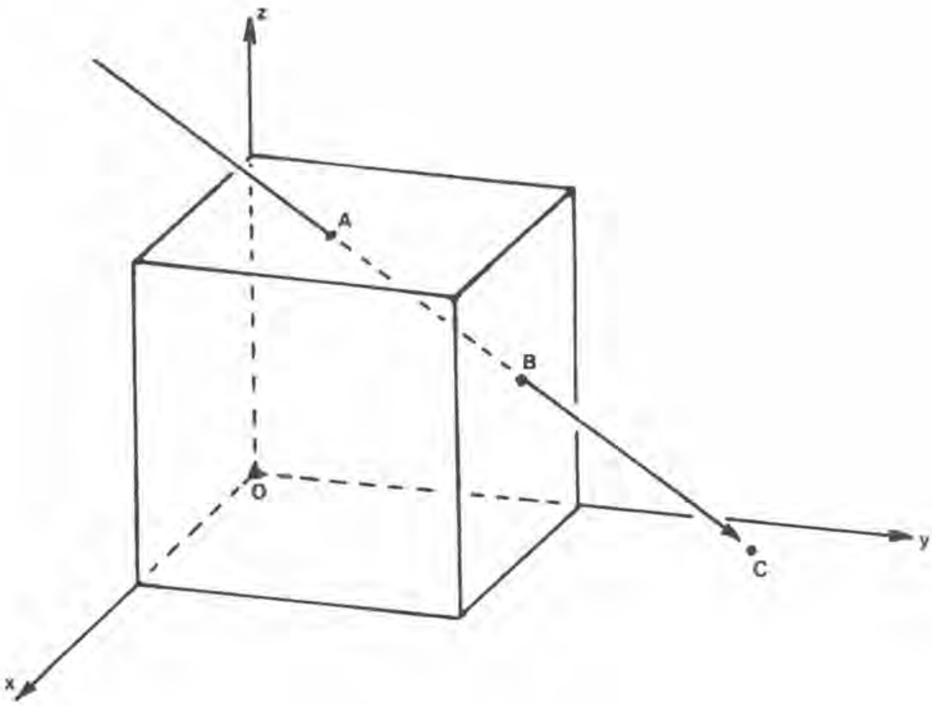


fig. 33

La question s'est donc posée — et se pose encore — de savoir quelles priorités assigner à l'enseignement des mathématiques, notamment au collège et tout particulièrement à propos d'exemples comme celui que nous venons de traiter : faut-il axer tout l'apprentissage sur le calcul vectoriel, avec ce qu'il suppose comme place donnée à l'algèbre ? Faut-il conserver au contraire des activités géométriques reposant sur des spéculations d'apparence plus gratuite, au risque de retarder l'acquisition d'algorithmes efficaces ? [1]

---

(1) voir par exemple [C] et [D] et notamment l'introduction de [D] .

Le malentendu serait de penser qu'en l'occurrence nous cherchions à opposer ces deux priorités et que, pour d'obscures raisons esthétiques, nous effectuions le choix d'une " géométrie pure " au détriment d'une " géométrie analytique " . Bien au contraire. On constatera sans peine que nous avons négligé très peu d'occasions de faire déboucher nos activités sur l'initiation à l'idée de repère et de coordonnées, car une telle introduction nous paraît fondamentale parmi les objectifs de la géométrie du collège. Il nous semblerait en revanche totalement utopique de croire que les ***figures*** *31 ou 33 ne sont pas des éléments* ***premiers*** *pour la compréhension du calcul vectoriel. Sous une forme ou sous une autre, l'entraînement à la* **vision** *de situations issues du domaine concret, l'habitude de* ***manipuler*** *des segments, des droites, des plans sur de vraies figures est un point de passage obligé avant toute introduction à des notions abstraites comme celles de* **vecteurs** *. On ne fera croire à personne que de tels concepts puissent naître d'une axiomatique formelle et non pas des figures. L'****idée est ici portée par l'image*** *, quelque nécessaires que soient — à un niveau supérieur — le passage à l'abstrait et l'usage d'un certain formalisme.*

Notre démarche est donc bien axée, elle aussi, vers l'acquisition de compétences minimales en matière de repérage, mais notre choix didactique privilégie l'image sur la définition abstraite. C'est le choix d'apporter à l'élève un " corpus " de figures ou de situations simples, sur lesquelles il pourra ensuite greffer des interprétations plus enrichissantes.

*La seconde idée force introduite à l'école, parallèlement à la théorie des ensembles, est celle d'****apprentissage de la logique*** *. On trouvera sans aucun doute, ici encore, matière à débat autour de la progression que nous avons retenue et de la position que nous avons adoptée sur une certaine notion de " rigueur mathématique " nourrie d'axiomes et de " démonstrations " .*

D'entrée de jeu, certains regretteront une sorte de " flou " laissé, dans nos commentaires sur les fiches, autour de notions clefs comme celles de ***droites*** *ou* ***plans parallèles*** *, ou celles qui touchent à la* ***conservation de la proportionnalité*** *, pour ne citer que deux exemples. Sur tous ces points, notre démarche risque effectivement de heurter des habitudes, puisque :*

1) *nous n'avons pas cherché à " démontrer " artificiellement des affirmations qui semblent généralement requérir un grand luxe de précautions oratoires ou déductives,*

2) *nous n'avons pas cherché, là où les démonstrations " manquent ", à nous abriter derrière des* ***axiomes*** *, des* ***postulats*** *ou même simplement des* ***définitions prudentes*** *afin de donner l'illusion de combler les lacunes logiques du discours.*

En d'autres termes, on pourra très bien nous reprocher en maints endroits, sinon des " fautes ", du moins des " silences " sur des questions qui sont jugées pourtant comme primordiales. Prenons l'exemple du parallélisme : on se donne malheureusement encore beaucoup de peine aujourd'hui pour établir des progressions logiques reliant des énoncés comme :

a) *deux parallèles sont des droites qui ne se coupent pas,*
b) *deux perpendiculaires à une même droite sont parallèles,*
c) *des parallèles découpent sur des sécantes des segments proportionnels,*
d) *par un point extérieur à une droite on peut mener une parallèle et une seule à une droite donnée.*

Pire, on s'efforce en général, de trouver des parcours " optimaux " entre de telles propriétés, c'est-à-dire que l'on ne s'estime vraiment satisfait que si l'on a réussi à dégager, d'une façon ou d'une autre, un système d'axiomes et de théorèmes qui veuille bien être ***non redondant*** *, tout en donnant l'illusion d'être présentable aux élèves ...*

Evidemment, de tels systèmes ne manquent pas toujours si bien que l'on arrive parfois à dérouler une théorie complète qui s'exprime de manière claire, simple, juste, concise. Bref, lorsque toutes difficultés se trouvent masquées derrière des formulations miracles du type :

a') *le parallélisme est une relation d'équivalence,*
b') *l'orthogonalité est une relation binaire sur les directions,*
c') *Thalès est une " propriété ", un " axiome " ou un " théorème ",*
d') *le " postulat " d'Euclide dit que ... , etc., etc.*

Claire, simple, juste, concise, ... mais ***pour qui*** *? Pendant un ou deux millénaires le* ***concept*** *de parallèles a posé aux géomètres des problèmes insolubles ; " bien entendu la notion n'est pas aussi simple qu'on le dit quand on veut bien y réfléchir un peu " ; mais les apparences sont sauves et l'on se sent vraiment en mathématiques — et pas en présence de vulgaires droites " physiques " ... — puisque les* ***axiomes*** *ont été signalés et que les* ***théorèmes*** *ont été démontrés. A l'élève d'admettre, par exemple, que deux perpendiculaires D , D' à une droite D" sont parallèles, étant donné que :*

1) *si D et D' se coupaient en un point A , elles se couperaient en un deuxième point A' symétrique par rapport à D" ,*
2) *A et A' étant supposés distincts, les deux droites se trouveraient en possession de deux points commun,*
3) *cela obligerait — c'est un* ***axiome*** *— deux telles droites à être confondues, etc.*

Ou à titre de " variante " :

1) *si D et D' sont distinctes elles se couperaient en un point A ,*
2) *c'est impossible, car — c'est un* ***axiome*** *— on ne peut mener par un point qu'une seule perpendiculaire à D" .*

Rien n'empêche, après de telles évidences, de ***transférer*** *en toute bonne conscience — par une opération de " transposition didactique " assez révélatrice — la plus grande part des difficultés sur le parallélisme dans des raisonnements au cours desquels il conviendra de tenir le plus grand compte du fait que deux droites sont parallèles " si et seulement si elles sont* ***soit*** *confondues,* ***soit*** *sans point commun " . L'ineptie des " démonstrations-comptines " construites à partir de là étant sans doute censée tenir lieu de difficulté spécifique à la notion de parallélisme ...*

L'alternative est pourtant claire : ou bien l'élève éprouve vraiment des difficultés avec la notion de parallélisme et ce n'est pas ce genre de progression qui va répondre à son attente ou lui apporter le moindre remède, ou bien l'élève *considère — ce qui semble somme toute assez naturel — que l'idée de parallèles correspond à celle que tout le monde manipule dans la vie courante, et alors la démarche du professeur de mathématiques risque fort —* **parce qu'elle n'ajoute rien** *— de passer pour une pure volonté de compliquer ce qui est simple. Il ne s'agit pas pour nous de prôner l'abandon de la rigueur dans ce qui est demandé aux élèves, il s'agit simplement de suggérer que cette rigueur dans le langage, dans les justifications, dans le raisonnement ne soit pas* **déviée** *de son but légitime, que les difficultés qui sont vraiment à la portée de l'élève, qu'il pourra surmonter — et qui, en cela seulement, sont* **formatrices** *— ne soient pas éliminées au profit d'un habillage logico-déductif inutile et particulièrement stérile.*

Il y a un **concept de parallèles** *. Que ce soit pour le mathématicien, le physicien, le technologue, le jardinier ou le carreleur, ce concept est le même. Il tient dans une* **image** *dégagée peu à peu de l'observation, et cette image contient notamment les quatre propriétés a), b), c) et d) évoquées plus haut. Ce sont ces aspects de " l'image-concept " qu'il convient d'abord de* **faire sentir** *aux élèves, alors que les propriétés a'), b'), c'), d') ne sont pas, en elles-mêmes, porteuses d'un sens quelconque. Lorsqu'elles le deviennent c'est uniquement pour des esprits qui auront assimilé le type de pratique contenu dans ces fiches et qui auront* **manipulé** *des droites parallèles, qui en* **auront tracé** *à partir de la propriété de Thalès, ou qui auront* **eu envie** *de se poser la question de savoir si telle droite obtenue dans une construction est bel et bien parallèle à une autre. Il y a donc pour nous un " primat " du concept sur sa formalisation, qui implique en géométrie un " primat " de l'image que l'on ne saurait contourner sans risque de tout compromettre. Plus encore en géométrie dans l'espace — lorsque l'on a, par exemple, affaire à des plans parallèles — l'objectif premier doit être la compréhension des figures, voie privilégiée d'appropriation des concepts mis en jeu, car ils ne sont pas " mathématiques " au sens dogmatique, comme certains voudraient le faire croire, ils font tout simplement partie de l'imaginaire propre à chacun de nous.*

Avant de chercher à préciser les voies par lesquelles ces principes nous semblent pouvoir être mis en œuvre, ou — si l'on préfère utiliser un mot à la mode dans toute son acception pédagogique — avant d'énumérer nos " objec-

tifs " , rappelons une fois encore ce que n'ont pas été ces " objectifs " , c'est-à-dire ce que le lecteur ne doit pas s'attendre à trouver ici.

Ce qu'il ne doit pas y chercher c'est, en premier lieu, une méthode pour expliquer aux élèves le " pourquoi " des règles de la perspective cavalière, car le passage de l'objet à l'image ne nous semble pas un sujet d'apprentissage à ce niveau dans la mesure où la compréhension des règles mises en jeu est à placer **en aval** *des compétences auxquelles nos activités s'intéressent (cf. en particulier les problèmes évoqués au chapitre 8) . Rien n'empêche évidemment de chercher à convaincre les réticents du bien-fondé de quelques règles comme celles de la conservation du parallélisme, mais il est inutile d'y insister lourdement car le " niveau de conviction " susceptible de satisfaire l'élève n'a rien à voir avec l'explication du géomètre. Cette propriété se* **constate** *sur des photographies ou sur des ombres ; le but du professeur n'est pas de l'expliquer mais de la faire* **accepter comme juste** . *C'est une " règle du jeu " dont l'expérience démontre à chaque occasion qu'elle est parfaitement acceptée.*

La deuxième absence qui sera constatée recouvre ce qui touche aux **manipulations sur les objets** *qui sont généralement destinées à faire constater sur des maquettes les propriétés géométriques dont il est question. Expliquons-nous : parler des propriétés " internes " d'un cube, d'un parallélépipède rectangle ou d'une pyramide peut s'envisager soit à partir d'un modèle solide, soit à partir d'un dessin. Nous n'avons pas voulu étendre notre propos en décrivant des séquences pédagogiques complètes fondées sur l'alternance des deux points de vue mais il est clair qu'une introduction complète au parallélépipède rectangle ne peut se limiter à la seule utilisation de ces fiches, pas plus qu'un cours de géométrie dans l'espace ne saurait se borner à l'observation " en trois dimensions " des objets étudiés. Cela étant, nous l'avons dit sous de multiples formes jusqu'ici, l'important nous paraît être d'aider l'enfant à pénétrer dans l'univers des figures pour qu'il puisse progresser dans une compréhension " de type mathématique " du monde physique. Ceci repose, à notre sens, sur trois grands axes que nous allons développer succinctement : une certaine* **attitude vis-à-vis des figures** , *la* **découverte de lois** *régissant les principaux concepts de la géométrie dans l'espace, ainsi qu'un entraînement indispensable au* **raisonnement déductif** .

B. L'ATTITUDE VIS-A-VIS DES FIGURES

La première des capacités à développer chez l'élève est celle de **voir** *sur une figure les objets ou les situations simples qui lui sont proposés. Cette faculté de voir relève tout à la fois de la possibilité de " lire " par un décodage conscient et de l'aptitude à " sentir " immédiatement — instinctivement, pourrait-on dire — tous les éléments d'une figure. Une fois ces éléments rassemblés, il reste bien souvent à recomposer les "phrases " , c'est-à-dire les* **relations** *entre ces éléments, et il n'est pas rare que l'appropriation complète d'une figure amène à toute une " gestuelle " des mains ou de la tête qui montre à quel point le spectateur est capable de s'investir dans la pénétration d'une simple image ...*

Si nous disons, pour résumer, que cet apprentissage est analogue à celui d'un langage, cela signifie en partie qu'au niveau didactique certains aspects du " contenu mathématique " des fiches doivent être considérés comme secondaires, nous avons cependant cherché à cerner quelques difficultés intrinsèques du langage des figures en géométrie dans l'espace, si bien que la progression globale que nous proposons nous paraît importante à conserver. Nous pensons en effet que la maîtrise intelligente d'une image nécessite de mettre correctement en situation les éléments qui la composent et nous avons donc mis en avant deux problèmes fondamentaux : celui des intersections mutuelles et celui du transport d'une figure.

Prenons un exemple : un rectangle vu en position oblique ne sera perçu comme un rectangle que si on parvient à situer le plan qui le porte par rapport aux éléments " stables " de la figure et si l'on parvient à " lire " directement les principales caractéristiques de la forme " rectangle " , alors qu'elles n'apparaissent plus sous leur aspect habituel à cause des effets de perspective. (cf. figure 34) .

C'est presque uniquement dans cette optique générale destinée à établir comme " automatisme " la double lecture de figures analogues à la figure 34 , *que s'articulent les cinq grandes étapes du fichier.*

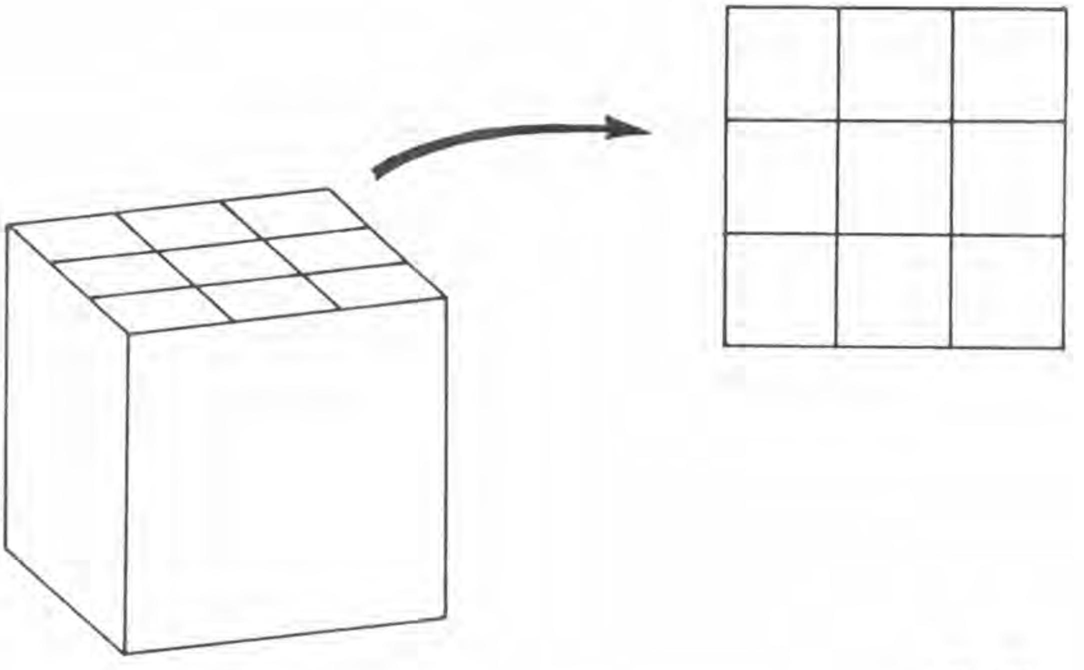


fig. 34

On trouvera dans la seconde partie des commentaires plus détaillés. Disons simplement ici que ces différentes phases sont, en gros, consacrées à quatre objectifs précis :

1) *faire saisir le type de déformation subie dans la figure 34 , c'est-à-dire " ce qui se passe " lorsqu'un objet plan connu se trouve situé dans l'espace en position horizontale ou verticale (cf. chapitre 5 :* ***le transfert*** *)*

2) *donner progressivement l'habitude de manipuler des plans obliques dont la position est déterminée par rapport à des plans qui sont plus " stables " et servent de référence : d'abord par rapport à des plans horizontaux et verticaux (cf. chapitre 6 :* ***sections I*** *) , puis par rapport à d'autres plans obliques (cf. chapitre 7 :* ***sections II*** *)*

3) *inviter à " pénétrer " par l'imagination à " l'intérieur " d'une figure, de façon à se faire une idée de ce qui serait " vu " sous un angle différent de celui qui est proposé par le dessin (cf. chapitre 8 :* ***la projection*** *)*

4) *obliger enfin à rassembler des informations qui sont données indirectement par la figure spatiale, de façon à reconstituer des figures planes " extraites " de situations plus complexes, à trois dimensions (cf. chapitre 9 :* ***le contre-transfert*** *)*

Cet apprentissage progressif s'appuie avant tout sur le ***dessin*** *, c'est-à-dire sur des problèmes de* ***constructions géométriques*** *. Ceux-ci constituent en effet le meilleur prétexte à la " lecture " et à " l'écriture " de l'image puisque, d'une part, le dessin oblige à un " passage à l'acte " sans lequel les connaissances resteraient bien superficielles et illusoires et parce que, d'autre part, notre but est d'habituer l'élève à une attitude générale d'****interrogation*** *envers la figure géométrique, interrogation qui est sans doute l'élément essentiel de toute démarche mathématique.*

Placé dans l'obligation de compléter les dessins proposés s'il veut connaître la réponse à des questions, l'élève est amené à fournir un effort d'attention inhabituel à partir des informations qui lui sont délivrées par le schéma ou par l'énoncé. Il est ainsi constamment invité à rassembler les propriétés dont il dispose et à en chercher de nouvelles si celles-ci se révèlent insuffisantes. On reconnaît là une activité tout à fait analogue à celle qui est suscitée par les " problèmes ouverts " de toutes origines, elle se trouve particulièrement naturelle en géométrie dans l'espace, où un énoncé très court joint à une figure d'accès relativement aisé permet de condenser des questions d'une richesse inattendue.

Dans ces conditions, par delà l'apprentissage immédiat du langage, on touche directement au problème du " sens " véhiculé par l'image, c'est-à-dire à la notion générale de " contenu géométrique " d'une figure. Nous pouvons dire que notre but sera atteint à partir du moment où l'élève aura acquis le *réflexe de regarder une figure en y cherchant instinctivement une* **structure** *susceptible de la ramener à des caractères simples : parallélismes, égalités d'angles ou de segments, orthogonalités ou même symétries variées.*

C'est au fond là le véritable objectif de la géométrie et, paradoxalement, même s'il s'agit ici de géométrie dans l'espace, il est encore plus axé vers la géométrie plane que vers l'espace proprement dit, tant il est vrai — surtout à ce niveau — que les configurations véritablement spatiales deviennent vite au-dessus des facultés d'analyse ordinaires. Ce n'est pas un hasard si les premières et dernières activités proposées reviennent tout simplement à transférer une figure plane dans l'espace ou, inversement, à " soustraire " un élément plan particulier d'une configuration spatiale afin de l'étudier dans " le " plan habituel de travail ... Ce sont en fait ces figures-là qui fournissent le lieu privilégié du travail géométrique et leur transport " vers l'espace " — ou " depuis l'espace " — oblige précisément à n'en retenir que les éléments structurels importants au regard du géomètre.

Privé d'un minimum de capacités à dégager ce " sens de la figure " , l'élève se trouvera immanquablement condamné à ne jamais rencontrer autre chose que des sortes de " devinettes " dans tous les problèmes de géométrie qui lui seront soumis au cours de sa scolarité.

C. LA DECOUVERTE DE LOIS EN GEOMETRIE

Parallèlement à l'acquisition d'un " corpus " d'images, l'élève se trouvera confronté progressivement à une autre nécessité des mathématiques : tenir compte de l'existence de **règles** *auxquelles sont soumis les concepts fondamentaux que l'on est amené à manipuler.*

Des notions de plans sécants ou parallèles à celles de cube ou de pyramide un nouveau " corpus " , formé cette fois de règles simples, formalisées ou non, implicites ou explicites, se trouvera peu à peu dégagé pour être réinvesti dans *les activités suivantes de la progression. Mais il n'est pas indispensable de souligner trop tôt telle ou telle propriété — surtout pas évidemment* **avant** *de la rencontrer et pas même, de préférence, dès la première rencontre —, l'important est avant tout de bien faire saisir les phénomènes en question à partir de situations qui, si elles ne sont pas toujours indiscutablement naturelles, peuvent passer pour* **concrètes** *et sont généralement abordées et comprises immédiatement. On observera, par exemple, que la " propriété de Thalès " intervient dès la première fiche. D'une part elle pourrait servir à expliquer la conservation de la proportionnalité au cours d'une projection parallèle (c'est-à-dire dans la représentation en perspective cavalière utilisée) . D'autre part elle sera souvent mise en œuvre pour la construction de droites parallèles sur le dessin. Il est* **hors de question** *de signaler le premier aspect aux élèves, mais en revanche,* **suivant la classe concernée** *, ou peut être amené à faire quelques remarques à propos de la construction des parallèles* [1] .

La deuxième " grande " propriété géométrique étudiée au collège, le théorème de Pythagore, relève d'un traitement un peu différent : elle n'est mise en jeu qu'à l'occasion de la dernière série de fiches et demande à être intégrée consciemment aux raisonnements qui sont nécessaires. Entre ces deux extrêmes, si l'on peut dire, il est clair que les exercices amènent fréquemment à rencontrer les règles d'incidence élémentaires :

- *il suffit de deux points pour déterminer une droite,*
- *trois points non alignés déterminent un plan,*
- *si un plan contient deux points A et B , il contient la droite AB ,*
- *deux plans sécants se coupent suivant une droite,*
- *des plans parallèles coupent un troisième plan suivant des droites parallèles,*
- *un point et une direction de plan déterminent un plan,*
- *deux droites qui ne se coupent pas sont coplanaires si et seulement si elles sont parallèles,*

etc., etc.

---

(1) il va sans dire qu'il ne nous paraît pas utile de soulever le problème lorsque les premières fiches sont abordées en sixième.

Bien que nous ayons parfois indiqué des éléments de démonstrations dans les commentaires (cf. deuxième partie) , nous nous sommes en général interdit de fixer une hiérarchie quelconque entre toutes les propriétés de ce type. D'abord pour laisser au professeur la possibilité d'adapter d'éventuelles explications à ses goûts personnels, au niveau de ses élèves et, peut-être, aux instructions accompagnant les programmes. Ensuite, et surtout, parce qu'un choix en la matière est toujours artificiel, dans la mesure où un enfant ne fait pas vraiment la différence entre une propriété admise et une propriété démontrée ... différence que le professeur de mathématiques est d'ailleurs très souvent le seul à ressentir.

Disons-le nettement : les propriétés précédentes sont avant tout des " lois de la nature " et l'essentiel est que l'élève en ressente la **validité** *. Ce n'est pas le fait d'en " faire un axiome " qui peut renforcer une conviction, ni même d'en " faire un théorème " si celui-ci est démontré lui-même, artificiellement, à partir d'autres propriétés à la légitimité tout aussi douteuse. On pourra tout au plus — si le besoin s'en fait sentir — étayer une conviction incertaine sur tel ou tel phénomène à l'aide d'une autre propriété, à condition que cette dernière soit mieux ancrée dans l'esprit de l'élève.*

La logique ne sert à rien à ce niveau de connaissances : elle ne saurait **convaincre** *de quoi que ce soit et il s'agit le plus souvent, au contraire, d'une espèce de " détournement " de l'initiation au raisonnement, car les éléments qui servent à bâtir la démonstration n'ont pas suffisamment d'existence concrète dans l'esprit de l'élève. Les tentatives de formalisation deviennent donc vite néfastes et c'est plutôt l'aspect informel de l'ensemble, son caractère de " jeu " , qui est important. Il convient de lui conserver cet aspect de " découverte " dont le but paraît être avant tout d'obtenir un résultat qui soit " esthétiquement " satisfaisant.*

De cette façon les exercices posent de " vraies " questions, auxquelles il faut apporter de " vraies " réponses. C'est une magnifique et rare occasion de **pratiquer** *la géométrie dans l'espace et les mathématiques, et il faut se garder de la transformer en un " apprentissage des mathématiques " . Vis-à-vis* *des* ***connaissances*** *, le professeur doit en effet s'astreindre à une grande modestie : aucun des " objectifs avoués " de ces fiches n'est en réalité un but en soi. Dessiner une ombre portée n'est pas une compétence destinée à l'évaluation pour constituer un jour l'essentiel des " annales de brevet " , pas plus que la détermination des plans qui coupent une pyramide donnée selon un parallélogramme ... Mais par delà ces " objectifs leurres " , au niveau pourrait-on dire de " l'imprégnation " , les exercices apporteront une* ***formation*** *beaucoup plus efficace que la plupart des activités qui sont habituellement greffées sur des cours magistraux.*

Réfléchir sur une situation spatiale est une excellente occasion de réassurer des connaissances en géométrie plane, puisque celles-ci doivent nécessairement être acquises si l'on veut les investir sur des plans quelconques de l'espace. Imaginer le résultat d'une construction à l'avance est le meilleur moyen de s'apercevoir de la nécessité de ***règles*** *ou de* ***principes*** *qui régissent les notions de base comme celles de parallélisme, d'intersection, de proportionnalité, d'orthogonalité, ... On se rendra compte, à l'expérience, que les élèves sont généralement forcés de se raccrocher à de telles règles, car c'est le seul moyen qui peut leur permettre d'avancer lorsqu'ils sont condamnés à travailler " en aveugle " , faute de pouvoir anticiper efficacement le résultat. Lorsque c'est le cas, que le dessin est achevé et satisfait la curiosité initiale, lorsqu'il paraît " juste " , " convaincant " , notre but est atteint ; il nous semble difficile de trouver démonstration plus efficace pour faire accepter une " règle du jeu " que le professeur tente le plus souvent d'imposer sans grand espoir de succès.*

Reste alors " l'acquisition mathématique " de l'espace , à laquelle certains penseront peut-être que nous faisons une bien petite place à force de laisser au second plan la part " théorique " de l'enseignement.

Rien n'empêche évidemment le professeur d'insister sur certaines définitions ou sur certains résultats, en parallèle avec ces activités. Nous tenons néanmoins à préciser que cela ne nous semble pas indispensable et, qu'à tout le moins les " activités " nous semblent prioritaires. Aucun cours ne fera mieux comprendre ce qui est fondamental en géométrie : que les ***lois*** *de la géométrie dans l'espace sont extrapolées à partir de celles de la géométrie plane grâce* *à l'usage de plans intermédiaires habilement choisis. Aucun cours n'habituera à dégager les propriétés nouvelles qui peuvent naître par l'adjonction d'une " troisième dimension " . Aucune présentation formelle — ensembliste ou algébrique — ne fera ressentir l'***intérêt** *de rapporter le plan, puis l'espace, à un système cartésien de repérage. Ce sont pourtant ces lois qui seules sont importantes et ce n'est pas renoncer à " la mathématique " de considérer comme mineurs les problèmes de hiérarchie entre les notions élémentaires que nous évoquions plus haut. D'une part on sait depuis l'extension de l'algèbre linéaire que de tels axiomes ne sont pas indispensables, d'autre part ce n'est pas le fait que des énoncés simples comme " par deux points passe une droite et une seule " puissent être mis à la base d'une progression logique qui intéresse le mathématicien. Leur importance vient simplement du fait qu'une fois* **dégagées** *sous cette forme, ces propriétés s'***extrapolent** *et constituent un des rares supports intuitifs pour l'appréhension des espaces de dimension supérieure. En d'autres termes, repères cartésiens et escalade dans le passage de la dimension 2 à la dimension 3 sont les seuls outils susceptibles d'aider à maîtriser la dimension n .*

L'important est donc que ces lois soient **dégagées** *, pas qu'elles soient la* **base** *d'un discours. Il n'est pas interdit de penser d'ailleurs que leur présentation comme base de la géométrie au collège ne soit pas le meilleur moyen psychologique de les mettre en évidence ...*

D. L'INITIATION AU RAISONNEMENT

Si nous avons égratigné au passage une certaine forme de démonstrations (cf. chapitre 3) parce qu'elles nous semblent tout au plus une pseudo-initiation à la logique, on aurait tort d'en conclure trop hâtivement que nous voulions inciter à l'abandon de la rigueur sous prétexte, par exemple, qu'il s'agit d'un objectif trop ambitieux pour le collège. Nous pensons au contraire que l'initiation au raisonnement est un des objectifs prioritaires de l'enseignement en mathématiques. Cette priorité n'est pas pour rien dans la conception et la mise au point des activités proposées ici, car elles constituent à nos yeux une motivation et un entraînement beaucoup plus efficace que la plupart des démarches traditionnelles. Ceci à plusieurs niveaux.

Sur le plan tout d'abord de la ***motivation*** *, on observera que tous les problèmes posés sont immédiatement abordables et demandent un minimum de pré-requis. Ils correspondent à des situations concrètes et les questions posées acquièrent ainsi un caractère* ***plausible*** *aux yeux de l'élève. Cette proximité, cette familiarité avec les données du problème donnent le plus souvent l'****envie de trouver*** *la solution, qui n'est pourtant que rarement évidente. Dès lors la trop classique question " pourquoi c'est vrai ? " , accolée à des propositions dont le caractère ésotérique ou le langage hermétique contribuent largement à éloigner définitivement l'élève des mathématiques, est remplacée par la question " est-ce que c'est vrai ? " , qui appelle bien évidemment des réponses équivalentes mais qui trouve un écho naturel dans l'esprit de l'enfant. Sans cette condition préalable, la " démonstration logique " ne correspond qu'à une problématique intéressante pour le professeur de mathématiques mais aussi éloignée des préoccupations de l'élève que des notions comme celles de " plans n'ayant qu'un nombre fini de points " ou " d'ensembles définis en compréhension ou en extension " ...*

Dès lors qu'il s'agira en revanche de convaincre d'autres élèves ou le professeur de la justesse de sa solution, on verra l'élève ***argumenter*** *pour* ***démontrer*** *la validité d'une construction, et ceci en tenant compte au maximum des hypothèses ou des différents cas possibles. C'est là l'essentiel. Viendront ensuite, peut-être, les occasions pour le professeur d'indiquer des techniques de preuves plus élaborées comme le raisonnement par l'absurde ou même, puisque certaines activités y invitent, d'indiquer des méthodes de recherche plus puissantes, comme celle dite par " analyse et synthèse " . Mais il est clair que cet apprentissage nécessite un " terrain " préparé au questionnement et que les notions mises en jeu doivent avoir acquis une réalité presque tangible dans l'esprit de l'élève.*

Au-delà de cette préparation de nature psychologique, la " démonstration " reste néanmoins un domaine d'accès difficile. Nous voudrions souligner, pour conclure, à quel point les problèmes de ***constructions géométriques*** *nous semblent une irremplaçable éducation au raisonnement.*

La solution, en effet, passe toujours par des étapes — des constructions intermédiaires — comme " je trace le milieu de ... " , " je mène la parallèle *à ... " , " je cherche l'intersection de la droite avec ... " . Chacune de ces étapes demande à être appuyée sur des éléments assurés, qui sont fournis par l'énoncé ou qui ont eux-mêmes nécessité une réflexion et une construction préalable.*

Cette obligation de **suivre un chemin** *au cours de la démarche, les* **choix possibles** *souvent ménagés entre plusieurs chemins valables, mais entre lesquels il faudra trancher pour* **se tenir à une progression** *, la possibilité enfin de définir un* **chemin optimal** *pour aboutir plus simplement au résultat, voilà autant de réflexes à acquérir pour sentir ce qu'est une " démonstration " . La structure est la même, la tournure d'esprit qui doit naître de cet apprentissage est tout à fait conforme à celle que nécessite tout raisonnement logico-déductif. Seules peut-être les " briques " qui doivent être assemblées pour bâtir une démonstration " abstraite " sont de nature différente. Et encore. On aurait tort de tenir trop systématiquement les constructions en elles-mêmes pour un simple succédané de démonstration. Tous les éléments sont réunis au contraire pour permettre un véritable apprentissage, à commencer par l'aspect ludique du domaine choisi.*

La nécessité propre aux " vraies démonstrations " de maîtriser ensuite un vocabulaire adapté aux concepts mis en jeu, l'obligation, pour la clarté des justifications, de " poser des définitions " claires et précises et d'en **assumer** *en permanence les conséquences — c'est-à-dire ici les diverses implications ou présupposés — , tous ces compléments apparaîtrons peu à peu. Mais nombre d'élèves y seront alors préparés, car ils bénéficieront d'une expérience qui leur aura fait sentir la difficulté des généralisations et la prudence indispensable pour tenir compte des différents " cas de figures " possibles. A cette condition, peut-être, un raisonnement comme ceux que nous évoquions au chapitre 3 — demandant, par exemple, de considérer que des droites " confondues " sont parallèles — deviendra d'une certaine efficacité ...*

Nous voudrions avoir convaincu le lecteur que **pratiquer la géométrie** *est un préalable indispensable. A défaut duquel l'enseignement devient une accumulation de discours soi-disant " scientifiques " , qui perdent prise d'avec le réel à un point tel que* **ni la physique , ni même les mathématiques** *n'y trouvent plus, à terme, leur compte.*

Il serait présomptueux de prétendre que " dessiner l'espace " soit la panacée qui donne à coup sûr aux élèves du collège une préparation suffisante pour leur assurer de futures études supérieures. Il s'agit cependant d'une activité privilégiée, située à mis chemin entre le concret et l'abstrait, entre l'imaginaire et le symbolique, qui constitue une des meilleurs préparations à l'approche scientifique du monde. Nous l'avons dit au début de ce fascicule : l'espace mis en jeu ici est aussi proche du réel qu'il en est éloigné, et il n'est rien d'autre, au fond, qu'un langage susceptible de donner un sens aux images qui nous entourent. C'est **ce langage** *et* **ce sens** *que nous proposons de transmettre à travers l'enseignement des mathématiques.*

Non pas en termes de " savoir " , ni même en termes de " savoir-faire " , simplement comme une **formation de l'esprit** *, pour laquelle il n'est que temps de poser le problème en termes " d'accessibilité au plus grand nombre " .*

Comme il est grand temps, enfin, de se rendre compte que le formalisme, pratiqué sous couvert de préparer à " la mathématique " , ne peut aboutir à d'autre résultat que de détourner les intelligences de toute curiosité scientifique.

BIBLIOGRAPHIE

(P) - *Erwin PANOFSKY. La perspective comme forme symbolique.*

(R) - *La Recherche en neurobiologie (Collection Points, série Sciences).*

(P_1) - *PIAGET. INHELDER. La représentation de l'espace chez l'enfant.*

(P_2) - *PIAGET. INHELDER. SZEMINSKA. La géométrie spontanée de l'enfant.*

(F) - *Pierre FRANCASTEL. Peinture et société.*

(G) - *Ernst GOMBRICH. L'écologie des images.*

(T) - *René THOM. Stabilité structurelle et morphogénèse.*

(C) - *Gustave CHOQUET. L'enseignement de la géométrie.*

(D) - *Jean DIEUDONNE. Algèbre linéaire et géométrie élémentaire.*

DEUXIEME

PARTIE

COMMENTAIRES SUR LES FICHES

Chapitre 5 : LE TRANSFERT

Les quatorze premières activités proposées sont destinées à une initiation. Elles correspondent normalement au tout premier contact de l'élève avec un type d'exercice faisant appel à des dessins de géométrie plane et à l'obligation de se " situer " dans l'espace.

Comme on le constatera au premier coup d'œil, ces figures planes ont toutes été choisies pour ne pas présenter de véritables difficultés, mais leur " analyse " constitue déjà en elle-même une part non négligeable de la réflexion. C'est par conséquent un aspect à prendre en compte au niveau de l'apprentissage, car elles fournissent une excellente occasion de réinvestir des connaissances plus ou moins bien acquises par ailleurs.

*Cela étant, les exercices sont centrés sur une seule idée de base : dessiner l'**analogue** de la figure proposée, alors que l'énoncé oblige à la voir dans une position inhabituelle. C'est généralement là quelque chose de nouveau pour l'élève, dans la mesure où la solution consiste à donner une figure " exacte " et ne peut donc se borner au dessin " à vue ", habituellement pratiqué à partir d'un modèle. Nous avons prévu, par conséquent, de nombreuses variantes du même exercice, de façon à ce que tous puissent peu à peu prendre l'habitude de surmonter cette difficulté — la figure est " la même " mais ne doit pas se représenter de la même façon — et accéder aux énoncés qui suivront.*

A partir du schéma de base (fig.35), le professeur pourra donc choisir sa propre progression selon deux critères : enrichissement de la figure plane (avec les complications qui peuvent en résulter), ou insistance sur l'assimilation *de l'opération elle-même de " transfert " de la figure, si la résistance à l'espace est très grande pour une part importante de ses élèves.*

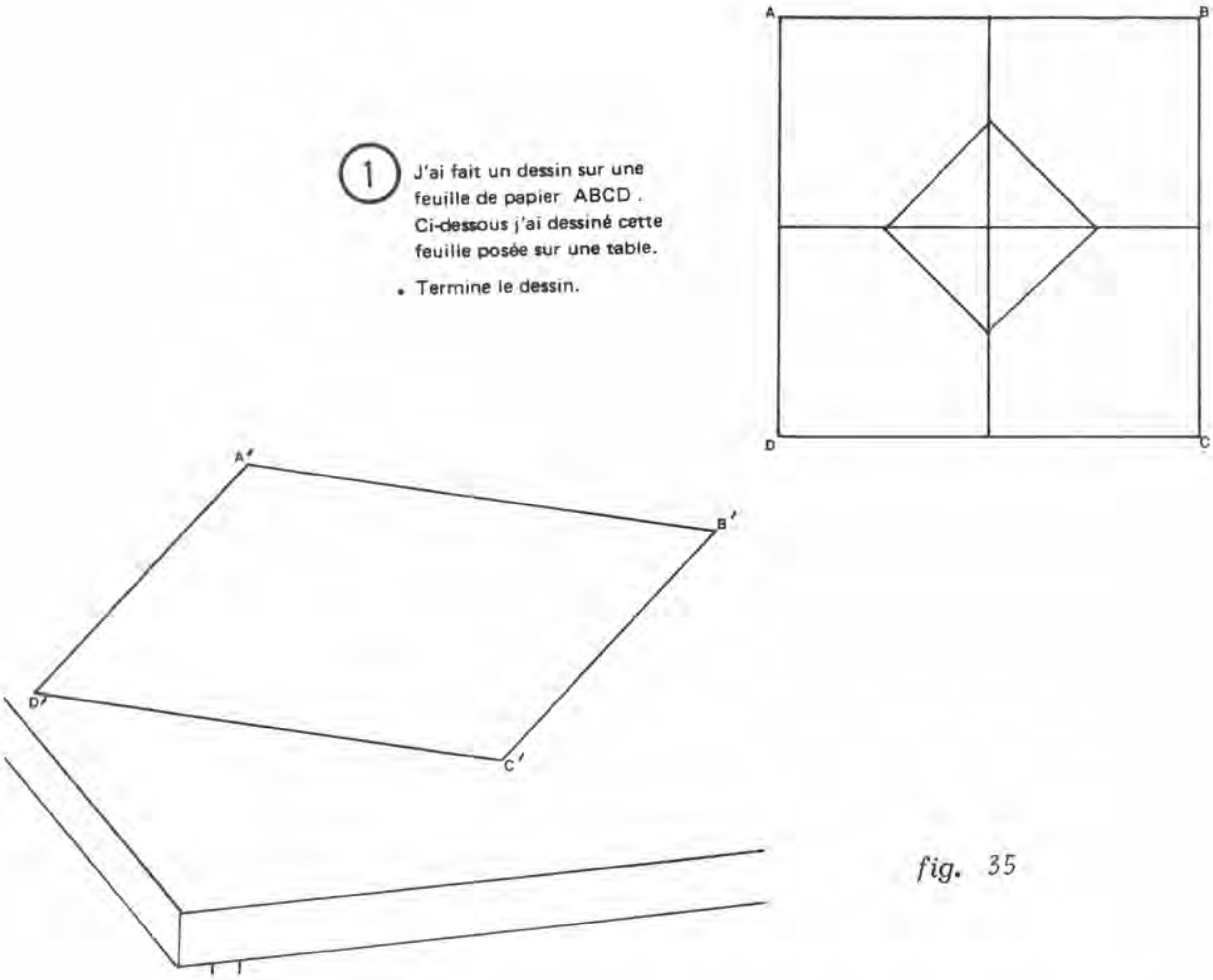


fig. 35

Avant d'indiquer nos suggestions sur chacun de ces deux aspects, rappelons que la seule règle impérative sur toute cette série (fiches 1 à 13) et de **ne rien faire d'autre que de traiter ces exercices pour eux-mêmes.** *Ils ne nécessitent aucun cours préalable et les mises au point "théoriques" a posteriori ne nous semblent pas non plus indiquées ici. Leur objectif véritable n'est rien d'autre que d'habituer les élèves à lire une figure et à travailler dans l'espace. Tant pis si les solutions trouvées ne sont pas toujours les plus élégantes, tant pis si certaines finesses de la figure donnée sont passées inaperçues. Il ne s'agit pas de créer des blocages sur des points mineurs, du moins pour les élèves moyens ...*

On observera d'autre part que la seule "géométrie" qui intervient ici *est celle du milieu et du parallélisme , avec quelques perspectives sur la notion de proportionnalité au niveau des longueurs des segments. Ces notions ne doivent pas donner lieu à des démonstrations, ni même à des tentatives d'explications extérieures, si l'élève ne pose pas de questions. Le fait, par exemple, que le quadrilatère A'B'C'D' dessiné sur la table soit un parallélogramme à côtés inégaux n'appelle pas de justification autre que celle qui consiste à faire regarder une feuille posée sur une vraie table,* ***ou mieux une photographie de cette situation*** *[1]. Il n'est pas question d'expliquer la perspective cavalière, ni même de démontrer la conservation des milieux ou du parallélisme. Encore moins d'****inventer un axiome*** *pour l'occasion :*

> *" Il est interdit de déposer le moindre*
> *formalisme le long de ces fiches ! "*
> *(C. Morlet)*

A. L'INITIATION A L'ESPACE.

Si l'accès à l'énoncé 1 n'offre habituellement que peu de réticences, c'est d'abord parce que la représentation de la table et de la feuille posée dessus relève, comme nous l'avons expliqué au Chapitre 1 , d'un système de codage tout à fait courant aujourd'hui : même si l'élève n'est pas capable, de lui-même, de réaliser le dessin proposé, il le ressent comme " juste " sans grande difficulté.

Cela ne résout évidemment en rien le problème auquel il est confronté, mais permet au professeur d'éviter les indications préalables trop nombreuses, afin de laisser d'emblée l'élève devant la nécessité de la recherche et des essais.

Pour trouver la solution, le débutant doit résoudre un ***double conflit :***

1) L'objet à dessiner est perçu de façon inconsciente ***soit dans l'espace*** *(c'est-à-dire sur la table mais vu " du dessus ") ,* ***soit sur la feuille*** *(c'est-à-dire à l'intérieur du cadre proposé, en forme de parallélogramme) . L'observateur*

---

(1) En général, le simple fait de regarder la situation réelle ne suffit pas à convaincre (nous sommes ici au cœur du conflit évoqué plus loin). En revanche,ce qui est particulièrement efficace c'est, paradoxalement, le "réalisme" du dessin obtenu une fois l'exercice terminé ...

*est en quelque sorte tantôt **intérieur** à la figure : il la voit dans l'espace sans parvenir à prendre en compte la " photographie " sur laquelle on l'oblige à travailler, tantôt il est **extérieur** à cette figure et n'arrive plus à la considérer autrement que comme une simple configuration plane, dépourvue de signification spatiale.*

*2) la géométrie intrinsèque au carré ABCD et au petit carré dessiné à l'intérieur est de nature **métrique** , alors que la solution passe par **l'oubli** d'une partie des propriétés et force à ne regarder la figure que du seul point de vue **affine** , en ne retenant que le rôle du parallélisme et des milieux. On retrouve donc ici toute la dialectique " affine/métrique ", dont la difficulté n'a plus guère de chances d'être démentie par quiconque ...*

*De ce fait les deux contradictions doivent être surmontées simultanément et on peut dire que l'élève **a trouvé** lorsque d'une part il parvient à voir la figure sous le bon angle, à la fois plane et spatiale, et que d'autre part il a compris qu'il faut se servir de son double décimètre comme d'un simple appareil à trouver des milieux, voire comme d'une règle à tracer des parallèles.*

Nous sommes tentés de schématiser la démarche de la façon suivante :

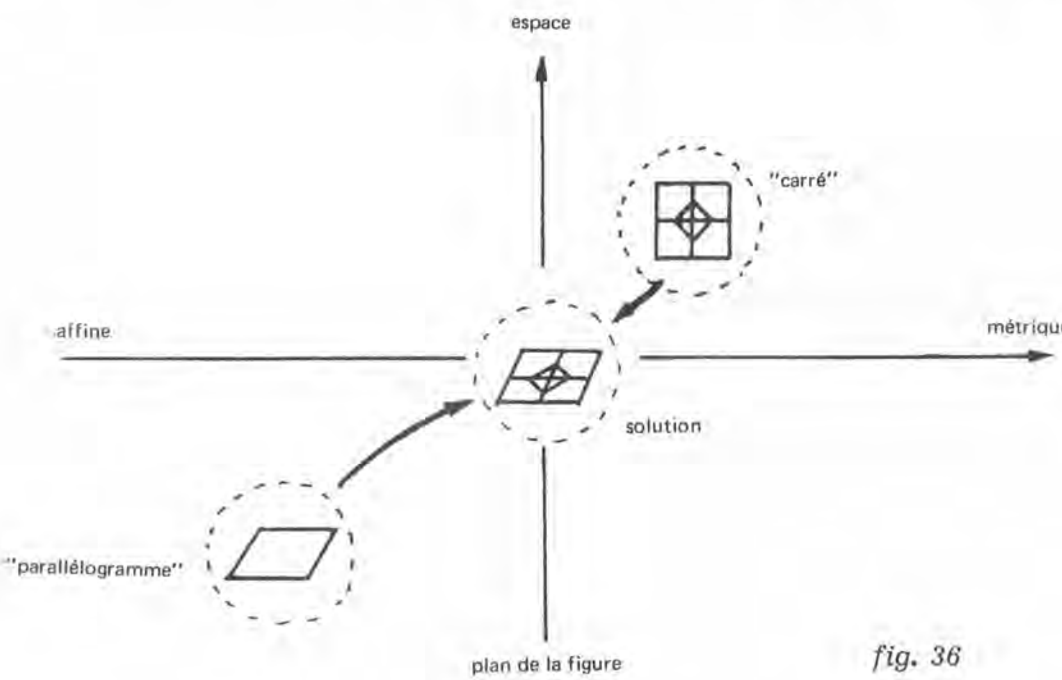


fig. 36

Que l'on parte du carré ABCD (figure " métrique " située dans l'espace) ou du parallélogramme A'B'C'D' (figure " affine " dessinée sur la fiche), *le cheminement vers la solution oblige à se rapprocher d'un point d'équilibre pour les deux* **conflits** *précédents.*

Ces trajets, il faut le rappeler, ne passent pas par ce que l'on a l'habitude de considérer comme une " démonstration mathématique " , tout au moins dans les premières phases de l'exercice. Il suffit en fait à l'élève de " mettre le doigt " sur les **bonnes propriétés** *: milieux ou/et parallélisme au sein de la figure initiale.*

Bien entendu la démarche suppose des tâtonnements, des erreurs, des retours en arrière et il nous semble à cet égard que l'exercice " fonctionne " de la façon suivante (1) :

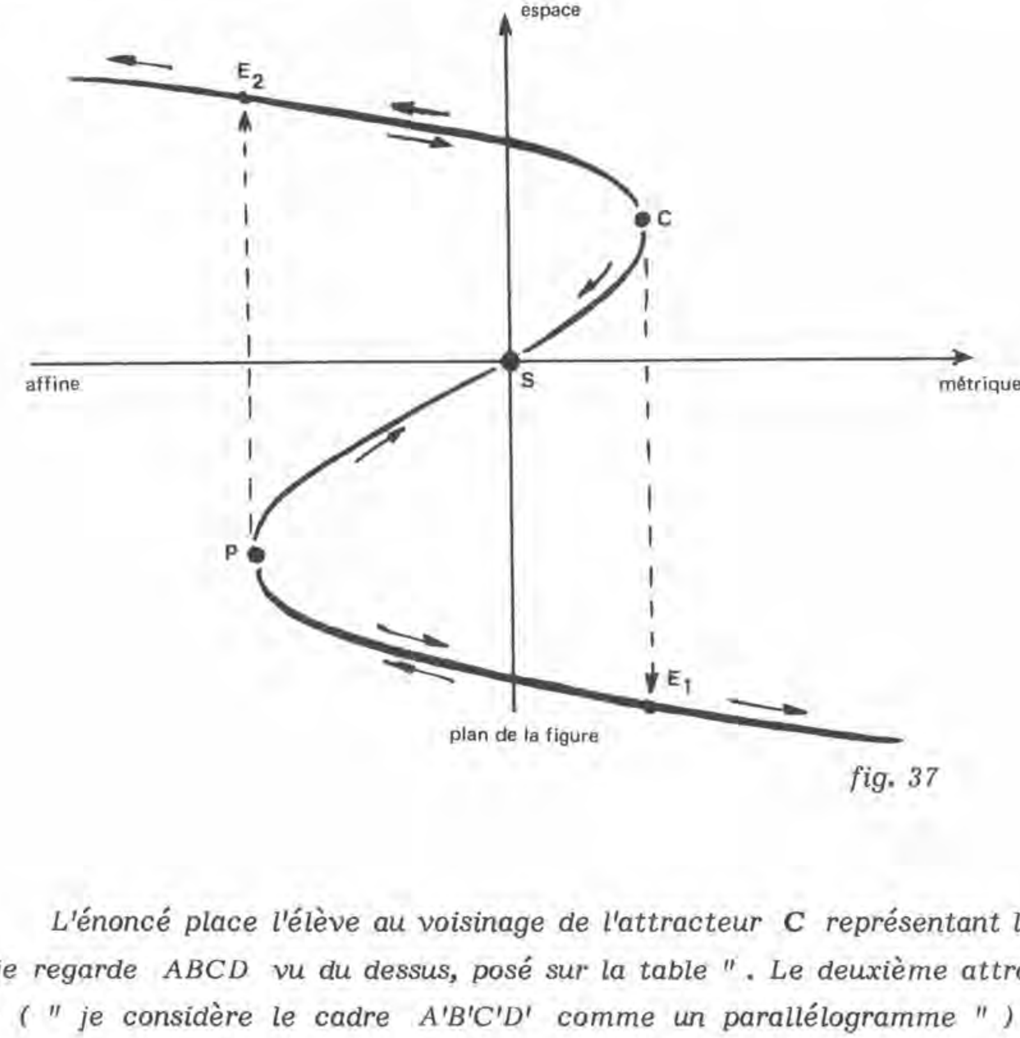


fig. 37

L'énoncé place l'élève au voisinage de l'attracteur **C** *représentant l'état : " je regarde ABCD vu du dessus, posé sur la table " . Le deuxième attracteur* ***P*** *(" je considère le cadre A'B'C'D' comme un parallélogramme ") n'est*

---

(1) On reconnaîtra ici une tentative de schématisation suggérée par la théorie de Thom. Notre but est de structurer la notion de " point d'équilibre " étudiée par Audibert : les attracteurs **C** et **P** nous semblent être des points d'équilibre-obstacle au sens de (**A** 86).

pas un point de passage obligé, puisque la solution **C →S** *peut être trouvée sans passer par des considérations de ce type si, par exemple, l'élève ne voit dans le problème que des milieux successifs à placer. Le passage par* **P** *est cependant " surdéterminé " , car il constitue un point de stabilisation de la recherche, une étape sur laquelle on tombe presque naturellement quand on remarque que " A'B'C'D' n'est pas un carré " . C'est un point d'équilibre permettant de se rattacher à une* ***figure connue*** *et à partir duquel la solution peut de nouveau être atteinte.*

En fait, le trajet qui mène de **C** *à* **P** *repose sur une erreur classique : l'élève qui regarde ABCD en haut à droite de la fiche d'exercice passe directement au dessin A'B'C'D' proposé, en voulant à toute force y chercher des angles droits, des égalités de segments. Il se retrouve en fait brutalement au point* E_1 *de la figure 37 , car il vient de passer sans transition de l'objet* ***tel qu'il est dans l'espace*** *à l'objet* ***tel qu'il doit être dessiné,*** *mais en voulant conserver toutes ses propriétés métriques. C'est l'attitude qui consiste à placer l'équerre sur le parallélogramme A'B'C'D' ou à comparer les longueurs de A'B' et B'C'. Une fois là (c'est-à-dire en* E_1 *), ou bien l'élève s'enferre dans des considérations métriques ou angulaires de plus en plus inadaptées au parallélogramme A'B'C'D' , ou bien il va découvrir peu à peu les propriétés qui font de A'B'C'D' un parallélogramme : " l'égalité des quatre angles de ABCD disparaît mais il faut garder* $\widehat{B'} = \widehat{D'}$ *et* $\widehat{A'} = \widehat{C'}$ *" , " l'égalité des quatre côtés est supprimée, mais on a encore* $A'B' = D'C'$ *et* $A'D' = B'C'$ *" , etc.*

Dans le premier cas, l'élève part du point E_1 *et va vers la droite sur le schéma 37 , tout espoir de solution disparaît si on ne le fait pas revenir en arrière.*

Dans le deuxième cas il aboutira au point **P** *et il lui reste à découvrir le chemin vers* **S** *, c'est-à-dire à recomposer la figure complète à partir de l'idée " parallélogramme ", tout en réalisant la fusion sur le même dessin de l'objet tel qu'il est et tel qu'on le voit.*

On observera cependant une ***deuxième*** *erreur grossière (saut de* **P** *à* E_2 *sur la fig. 37), qui consiste à repasser trop vite du parallélogramme A'B'C'D' à l'espace, pour* ***ne plus voir*** *dans le dessin situé en haut à droite de la fiche* ***que des parallélogrammes.***

Si l'élève se retrouve ainsi en $\mathbf{E_2}$*, il lui faudra revenir à la figure donnée et repasser par l'attracteur* **C** *, de façon à en analyser plus finement la structure métrique. Sinon il s'enfermera dans une désarticulation (de type projectif) de la figure, ce qui l'entraînera sans espoir vers la gauche du schéma ...*

En résumé : il n'est pas difficile de constater que l'élève confronté à ce type d'exercice à au moins deux façons de s'y ***perdre*** *, mais surtout qu'il peut " tourner en rond " sans trouver le moyen de parvenir à la solution, car celle-ci demande de " négocier " correctement les passages en* **P** *ou* **C** *.*

Contrairement à toute attente, l'expérience prouve que le miracle se produit très souvent et que les élèves finissent par aboutir avec très peu d'aides extérieures. C'est au fond au professeur de les remettre sur la bonne voie selon qu'ils sont en $\mathbf{E_1}$ *ou* $\mathbf{E_2}$ *et aussi à apporter le détail efficace s'ils sont " stabilisés " par l'un des " attracteurs "* **P** *ou* **C** *.*

Nous voudrions néanmoins insister ici encore sur un point capital : ce genre d'activité n'est pas destiné à expliquer POURQUOI , mais simplement à aider l'élève à surmonter la contradiction "figure plane" / "espace" , en l'obligeant à parcourir le chemin qui mène à la solution ***avec les moyens dont il dispose*** *. Certes la résolution des conflits en cause passe, du point de vue mathématique, par la notion de projection parallèle (cf. fig. 2) et par l'invariance des propriétés affines, mais tout ceci est hors de portée de l'élève et changerait tout à fait le sens de l'exercice.*

Celui " qui sait " ne franchit plus un obstacle de la même nature que celui qui est ici proposé à l'élève, il réagit en réalité en " contournant l'énoncé " , car il peut faire appel, consciemment ou non, à la figure 2 du chapitre 1 , ou même ramener tout le problème à la considération d'une " application " allant d'une figure sur l'autre (1) *.*

Schématiquement son " trajet " a toute latitude pour prendre appui sur une surface du type de celle de la figure 38 , alors que l'élève est prisonnier du plan contenant la courbe de la figure 37 .

---

(1) il s'agit là à notre sens de la <u>résolution épistémologique de l'obstacle</u>. Elle supprime l'intérêt de l'exercice en tant que " problème ouvert " .

Malgré la tentation, le professeur ne doit pas chercher à supprimer cette contrainte.

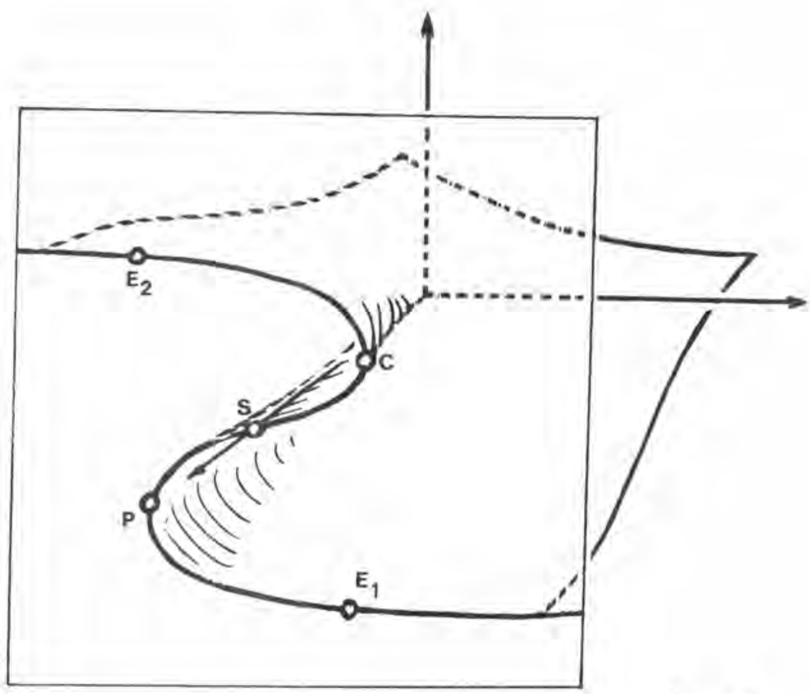


fig. 38

B. L'IMPREGNATION EN GEOMETRIE PLANE .

Parallèlement à des variations autour du thème précédent, qui doivent permettre à une très grande majorité d'élèves de trouver leur voie dans ce type d'exercice et d'acquérir des ***automatismes*** *vis-à-vis des éléments significatifs invariants par le transfert, les quatorze premières activités conduisent à un entraînement spécifique à la* ***géométrie plane .***

Les opérations de dessin qui sont demandées obligent constamment en effet à analyser les configurations planes, dans le but d'en dégager les ***propriétés géométriques .*** *C'est naturellement là une motivation très efficace pour habituer l'élève à prendre en compte des aspects qui passeraient inaperçus autrement et pour la gestion desquels il retrouve une part d'initiative que le formalisme de tout cours magistral n'a que trop tendance à paralyser. Nous avons donc cherché à varier suffisamment les sujets pour que le professeur ait à sa disposition un nombre important d'activités interchangeables, où il puisse choisir un thème en accord avec ce qu'il traite par ailleurs dans la classe.*

*On trouvera ci-après un commentaire succinct de chaque fiche qui précise ces **objectifs secondaires** et souligne les points qui nous paraissent importants. Le lecteur observera, ici encore, que le " traitement " de telle ou telle propriété dépend essentiellement du niveau de la classe et de l'état d'esprit du professeur lui-même vis-à-vis du formalisme mathématique. Nous considérons pour notre part que les activités de toute cette série peuvent (ou doivent) être proposées très tôt au collège, c'est donc dire que les notions de milieu, de parallèles, de proportionnalité, etc., qui sont évoquées dans le présent commentaire ne nécessitent **aucun** complément théorique. On se gardera d'ailleurs de mises au point déplacées, qui risqueraient de rendre inutilement compliqué ce qui est simple dans l'esprit de l'élève.*

*Considérons par exemple le " concept " de **parallèles** qui — au travers de la " conservation du parallèlisme " d'une figure à l'autre — devient progressivement un outil important dans les constructions. Il n'y a absolument pas lieu de s'attarder sur quelque **définition** que ce soit. C'est en fait la " propriété de Thalès " qui est conservée et le principal est que les élèves ressentent son utilité, même s'ils sont incapables de l'expliciter correctement. Inutile de dire qu'il nous semble en aller de même pour un résultat comme : " par deux points passe une droite et une seule "...*

*Une dernière tentation enfin réside dans la possibilité de mettre en évidence une **interprétation** du " transfert " comme une transformation appliquant la figure initiale sur la figure image, déformée. On a par exemple envie de mettre le doigt sur une règle du type " le passage du carré ABCD est une **application** sur A'B'C'D' qui conserve les milieux " . Cela résume, au fond, toute la série de ces exercices et fournit de plus à bon compte un exemple de transformation, **à condition de faire la différence entre la notion " d'application " et celle de " bijection-identification "...***

*Nous voudrions conseiller une grande prudence en la matière. Comme nous l'avons dit, le but est d'aider l'élève à opérer la " **fusion** " des deux dessins pour lui faire acquérir, comme automatisme, la capacité de lire des figures de géométrie dans l'espace, en n'attribuant à ce qu'il voit que le sens qu'il est légitime de prendre en compte. L'interprétation comme application d'une configuration sur l'autre, bien que séduisante à un certain niveau de réflexion, va donc à l'encontre du but principal de l'entraînement. Elle oblige en effet à re-séparer ce qui n'est en fait qu'un seul et même objet, dans le but de considérer une transformation reliant entre elles **deux images possibles** de celui-ci.*

On notera d'ailleurs que l'ambiguïté n'est pas mince dans nos énoncés : les lettres désignant des points homologues sont volontairement les mêmes. Ce n'est que pour les besoins du présent commentaire que nous avons préféré parler ici du carré ABCD et du parallélogramme A'B'C'D' ... Il est clair cependant, lorsque l'on a affaire à un cube tel que celui de la figure 39 , que

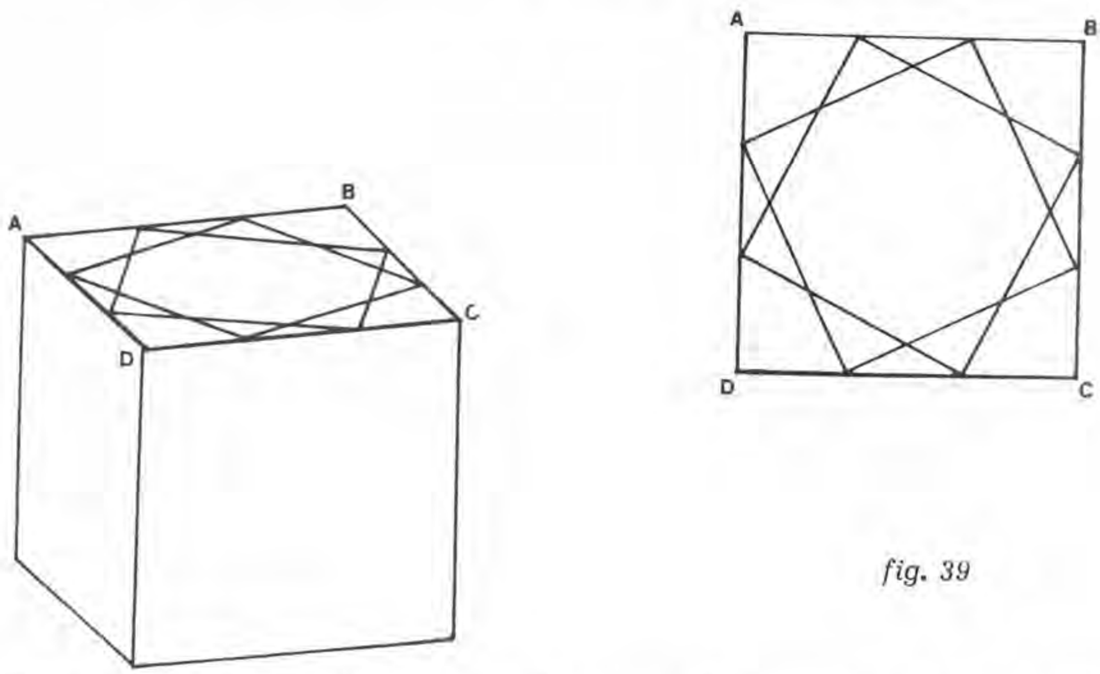
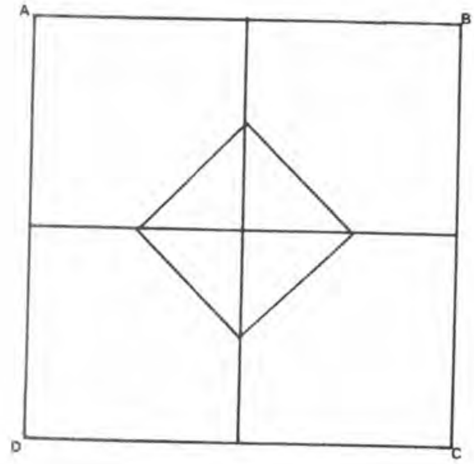


fig. 39

l'opération qui consiste à représenter à part — et à plat — une des faces n'amène pas à changer les notations. Il devient de même artificiel de considérer que c'est là une ***transformation*** *entre* ***deux objets*** *mathématiques, puisque l'important est précisément que l'observateur arrive à considérer que c'est " la même chose ", faute de ne plus rien comprendre au dessin du cube !*

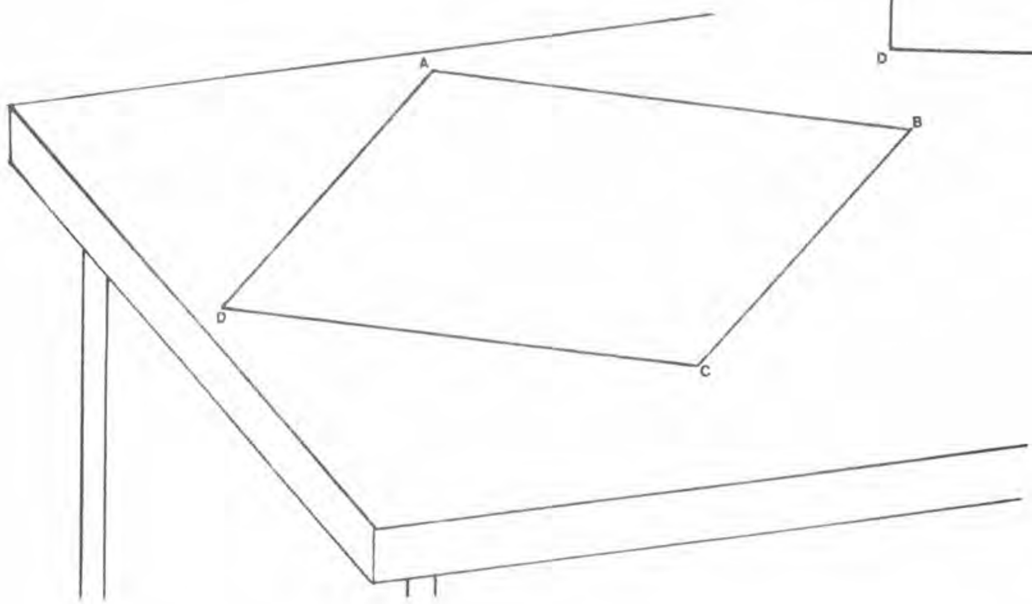
Cela n'interdira pas nécessairement à certains de se faire peu à peu leur " religion " en la matière et de trouver, au fil des exercices, que le point de vue : " tout revient à faire une transformation telle que ... " , fournit une excellente base de travail. Il nous semble artificiel et dangereux de vouloir ***imposer*** *cet éclairage et, surtout, de chercher à ramener* ***dès le début*** *, le phénomène à une interprétation de cette nature, alors que, plus tard, cela peut constituer une façon d'introduire à la notion de transformation géométrique.*

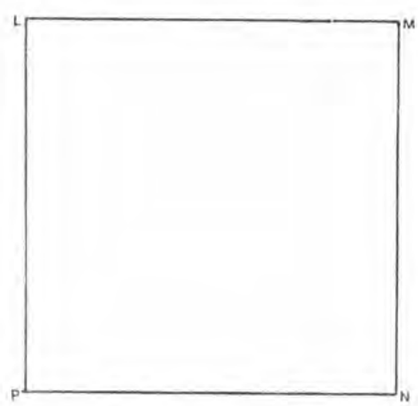
Commentaire des fiches 1 à 13



1. J'ai fait un dessin sur une feuille de papier ABCD.
Ci-dessous j'ai dessiné cette feuille posée sur une table.

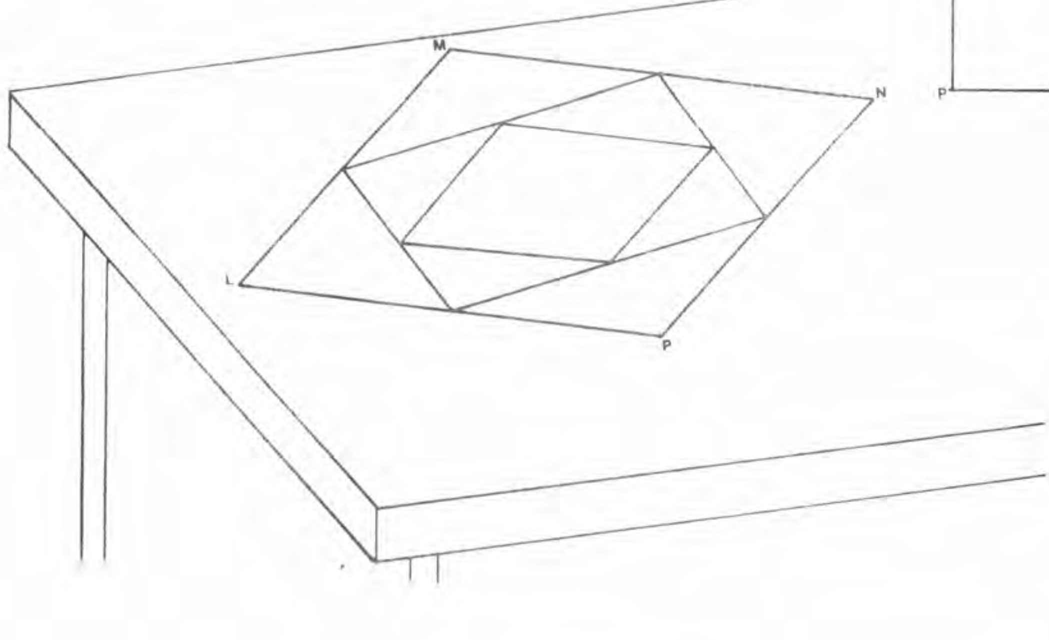
- Termine le dessin.





2. J'ai posé une feuille de papier sur une table. Sur cette feuille il y a un dessin.

- Reproduis le dessin ci-contre.



FICHE 1

Comme nous l'avons dit dans le commentaire général il n'y a pas lieu de s'attarder sur les propriétés intrinsèques de la figure, si ce n'est pour attirer l'attention sur les milieux et le parallélisme.

L'activité peut constituer le prétexte à une révision des propriétés du parallélogramme. Inversement, elle peut être une introduction à cette figure en amenant à la découverte des propriétés classiques à partir de celles du carré ABCD . Noter en particulier que si l'on ajoute les diagonales aux deux dessins, le théorème sur l'intersection des diagonales en leurs milieux devient intuitif.

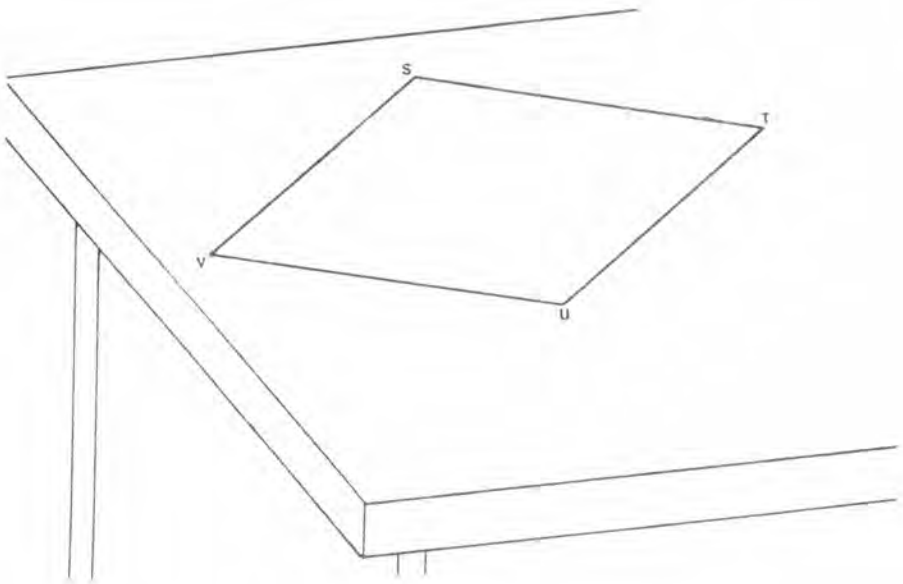
FICHE 2

Mis à part l'objectif de renforcement de la capacité de " transfert " de la figure. On peut mettre en évidence sur cette figure le fait que les propriétés ne manquent pas pour conclure : il est en effet facile de constater que l'on peut raisonner uniquement en termes de milieux ou en termes de parallélisme, si l'on pense à faire intervenir les diagonales.

Bien entendu le but n'est pas " d'épurer le raisonnement " — sauf peut-être avec les élèves les plus rapides — mais simplement de faire sentir que lorsque l'on s'interroge sur une figure, il arrive que l'on découvre des propriétés non signalées par l'énoncé ...

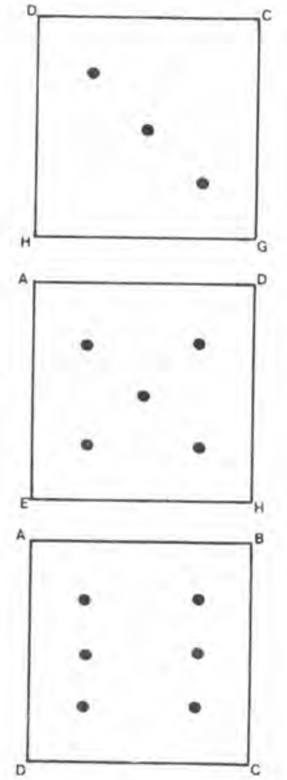
(3) Un échiquier est posé sur une table. J'ai commencé à le dessiner.

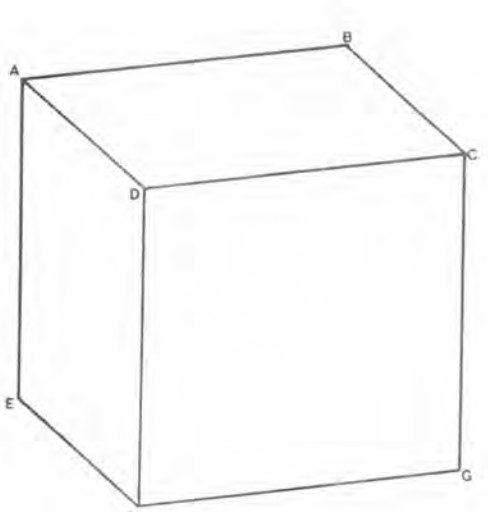
- Termine le dessin.



(4) Ci-dessous j'ai commencé à dessiner un dé.

- Place les points sur les faces.





FICHE 3

L'exercice peut être résolu à partir de la propriété des milieux : il suffit de partager les côtés en 2 , puis 4 , puis 8 parties égales.

Une autre méthode, utilisée spontanément par les élèves, consiste à mesurer les longueurs des côtés du parallélogramme, à diviser par 8 et à mettre en place le quadrillage (cf. aussi fiche 5).

Il est bien entendu assez rare que le résultat soit irréprochable de régularité ... Une bonne façon de le mettre en évidence est de faire tracer les diagonales et leurs parallèles (ce qui, à l'inverse, permettrait d'économiser la moitié des segmentations sur les côtés).

De façon générale, l'exercice fournit un excellent prétexte pour engager une discussion profitable sur les erreurs de mesure et sur l'effet multiplicateur des reports réitérés.

FICHE 4

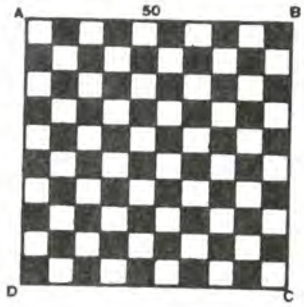
En plus du réinvestissement des techniques déjà introduites, l'exercice introduit deux aspects nouveaux :

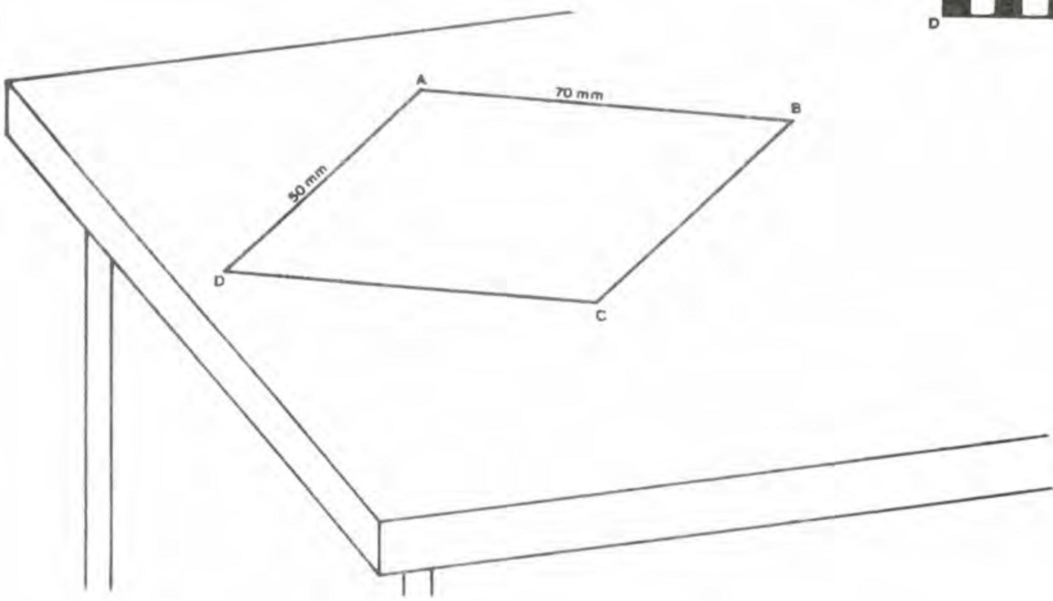
- *les points sont placés sur les milieux de segments privilégiés, mais la découverte même de ces segments amène à ressentir la nécessité du* **repérage** *par rapport aux éléments connus que constituent les côtés de chaque face. Selon l'époque on pourra donc noter l'analogie avec les coordonnées.*

- *l'activité est une approche de la représentation du cube qui sera utilisée tout au long du fichier. On pourra mettre l'accent sur cet aspect en complétant les faces cachées, sachant que la somme des points de deux faces opposées doit être égale à 7 .*

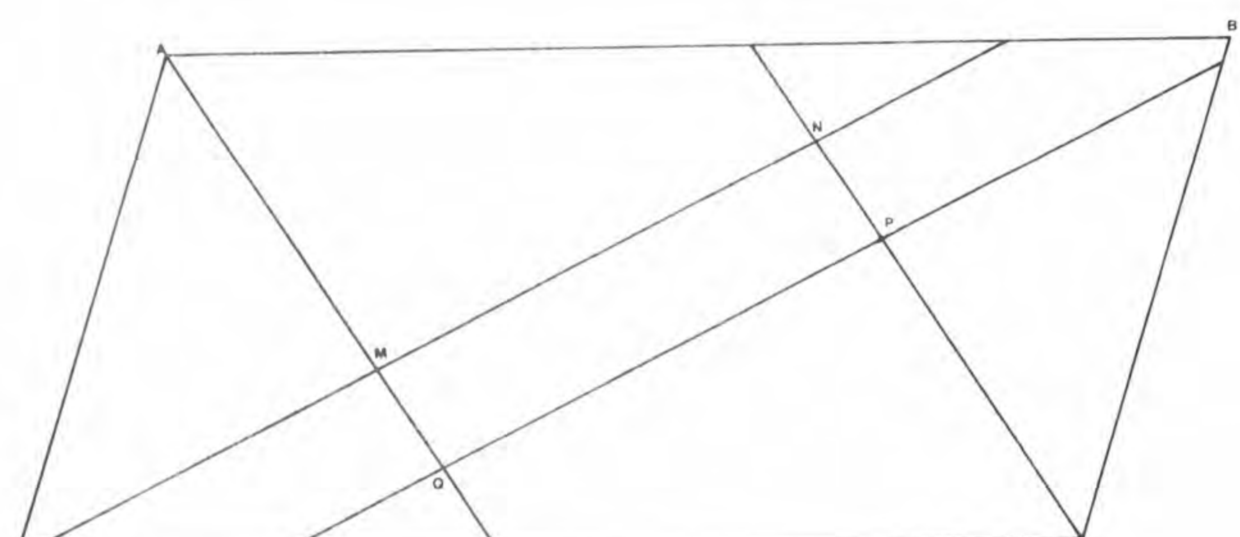
(5) Un damier est posé sur la table.

- Termine le dessin.





(6) Sachant que ABCD est un rectangle de 12 cm sur 20 cm, MNPQ est-il un rectangle ? Si oui calcule ses dimensions.



FICHE 5

Contrairement au cas de l'échiquier (cf. fiche 3) , le transfert du damier à 10×10 cases ne peut plus se résoudre à partir des milieux.

Il convient donc ici de tenir compte plus complètement de la conservation des égalités de segments lorsque ceux-ci ont même direction.

Nous renvoyons à la fiche 3 pour d'autres remarques, signalons simplement que l'exercice peut être un bon prétexte pour faire présenter les résultats numériques sous forme de tableaux de proportionnalité.

FICHE 6

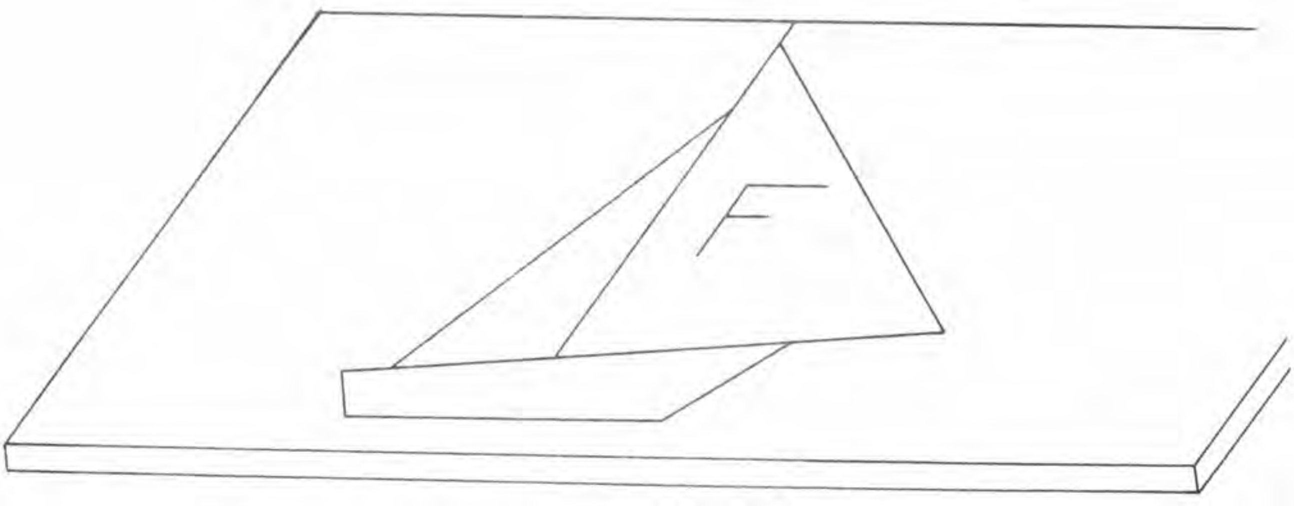
L'énoncé prend ici une forme plus difficile, il ne peut être compris que par des élèves ayant suffisamment assimilé la règle du jeu d'une part, et l'utilisation de la proportionnalité d'autre part.

Il conviendra de coder avec les élèves les points importants de la figure et de faire écrire les mesures et les calculs dans un tableau récapitulatif.

Nota : si le choix (spontané) de AB comme **longueur** et de AD comme **largeur** donne bien le résultat attendu, on observera que rien n'interdit de considérer AD comme longueur et AB comme largeur ...

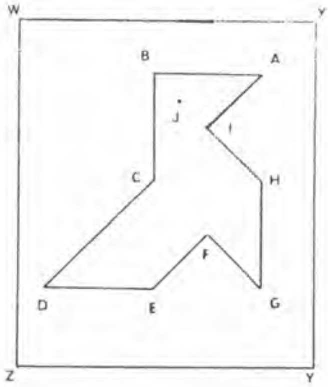
(7) Sur une planche rectangulaire de 22,3 cm de long et 15 cm de large, j'ai fait un dessin.

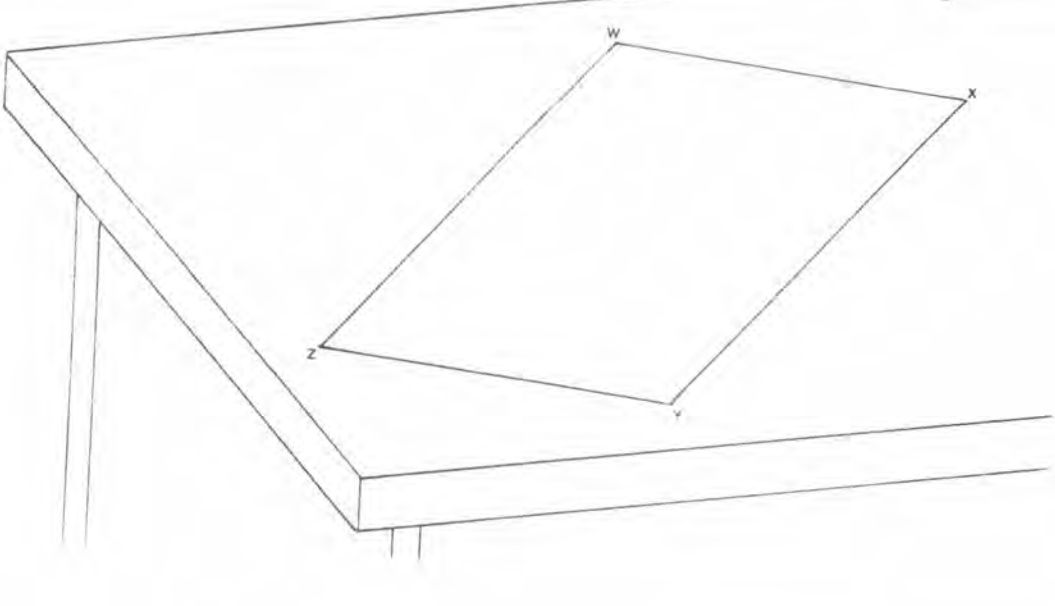
- Reproduis ce dessin en vraie grandeur.



(8) Sur une feuille j'ai dessiné une cocotte en papier. Cette feuille est posée sur une table.

- Termine le dessin.





FICHE 7

C'est une application directe de l'exercice précédent. On peut néanmoins envisager deux méthodes :

- prolonger les **segments** du dessin pour reporter ensuite leurs points d'intersection avec les axes, comme y encourage la fiche 6 .

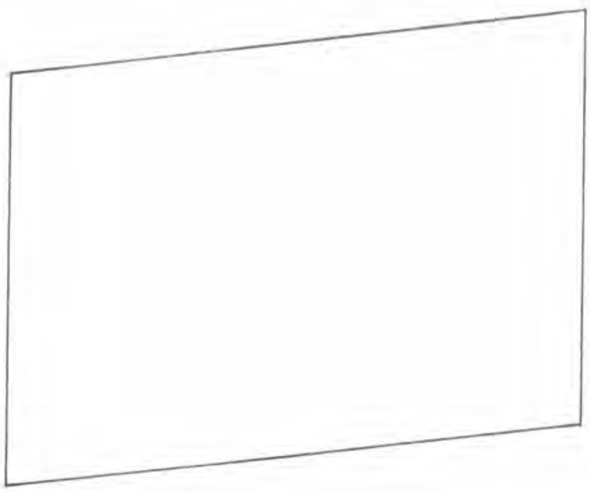
- dresser un " quadrillage " de la planche susceptible d'aider à repérer les **points** importants de la figure, dans la lignée des fiches 3 et 5 .

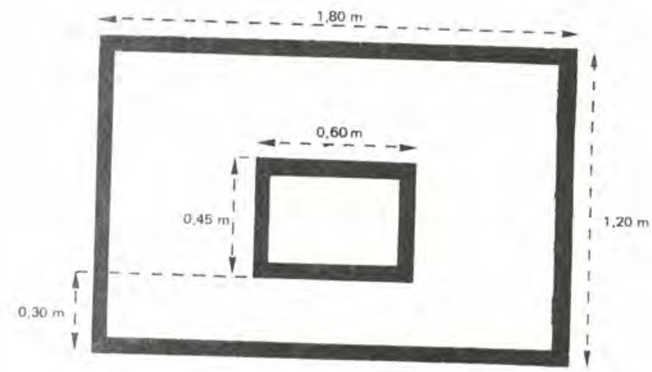
Quelle que soit la méthode, beaucoup d'élèves terminent mal cet exercice, malgré un départ excellent. Il y a ici nécessité absolue d'ordre et de rigueur pour mener à bien le travail. (Cela prouve au moins que les figures " mathématiques " , elles , sont plus simples !) .

FICHE 8

Le travail est analogue à celui de la figure précédente mais plus simple, car la cocotte en papier est dotée de nombreuses propriétés géométriques ...

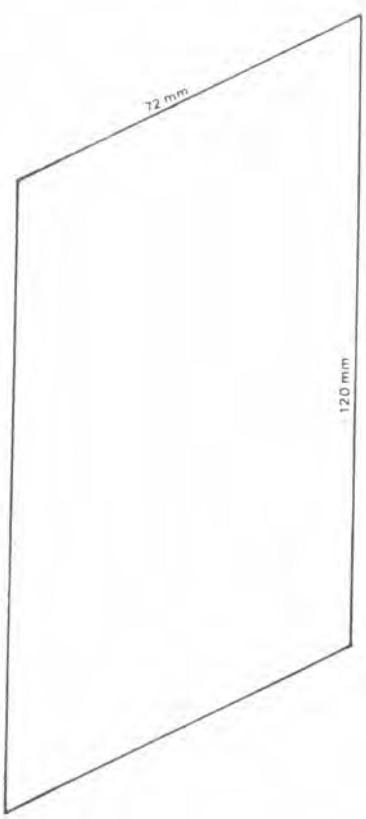
Noter qu'il y a ici matière à une compétition profitable entre le point de vue des droites et le point de vue des coordonnées évoqués à la fiche précédente.

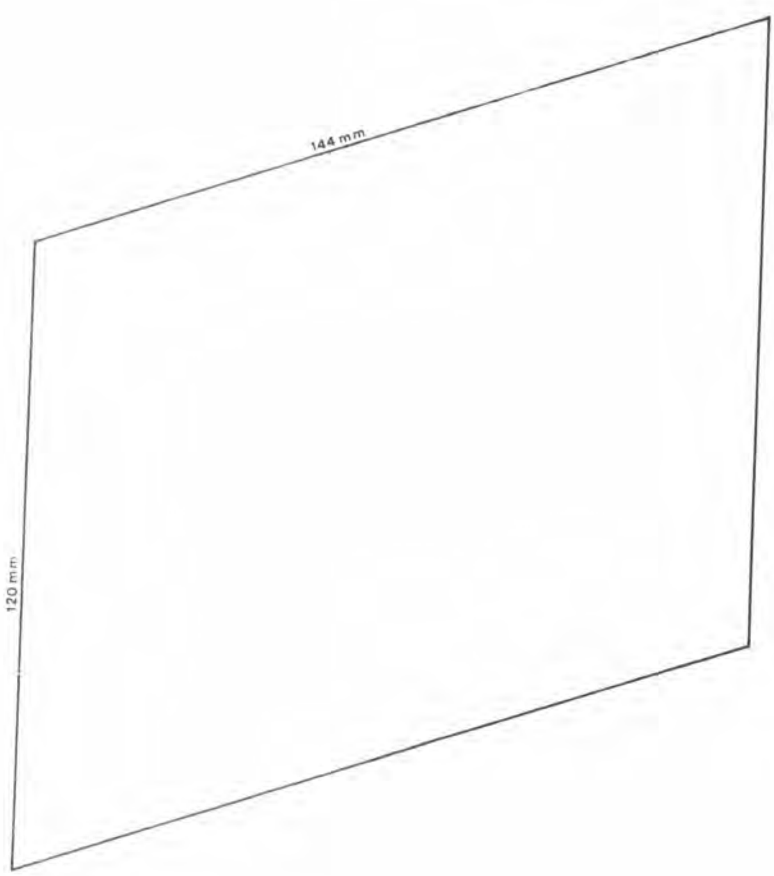




9 J'ai commencé à dessiner un panneau de basket, vu depuis la fenêtre de la classe.

- Termine le dessin. Les dimensions précises sont données ci-dessus. Les traits noirs ont 6 cm de largeur.



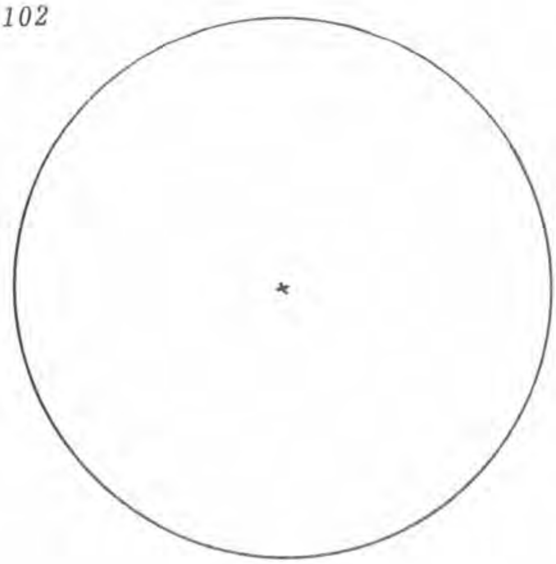


FICHES 9 et 9 bis

Réinvestissement des techniques précédentes, sans grandes difficultés nouvelles, si ce n'est un problème d'échelle, puisque les mesures servant à déterminer la largeur des bandes noires ou l'emplacement exact du petit rectangle nécessitent un changement d'unité.

Nous avons fait exécuter trois fois le même exercice afin de mettre en évidence les déformations plus ou moins sensibles en fonction des directions retenues pour l'observation. Les résultats parviennent d'ailleurs à choquer les élèves, notamment en ce qui concerne la largeur des bordures horizontales et verticales.

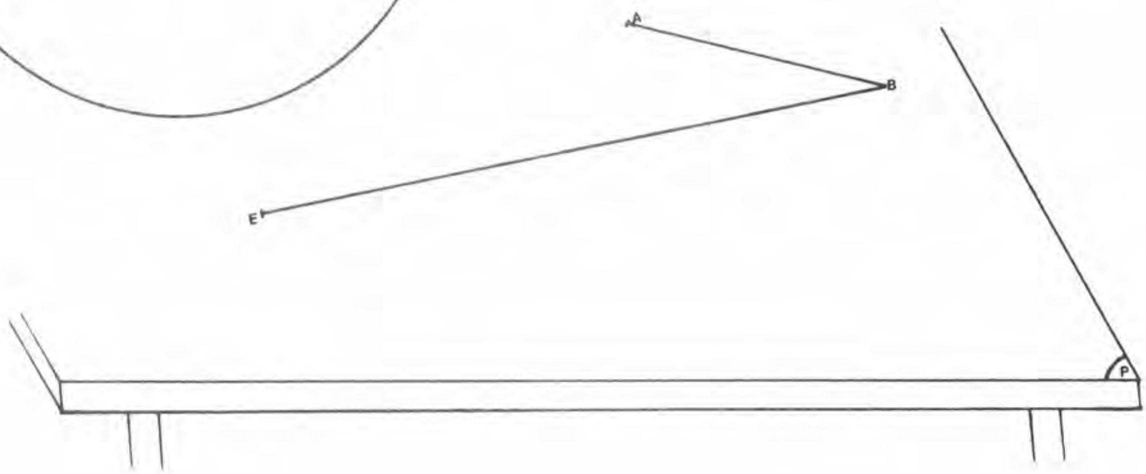
A cet égard l'exercice met en relief la prééminence de la règle sur la vision anticipée du résultat. Résultat que d'ailleurs certains élèves refusent car non conforme à leur imagination. Ces deux fiches servent ainsi de transition avant d'aborder les quatre dernières activités qui poussent au contraire l'élève à attendre de l'utilisation mécanique de la règle l'obtention d'une figure plus difficile à anticiper.



10 Dans le cercle ci-contre, trace un hexagone régulier ABCDEF.

Ci-contre j'ai commencé à dessiner cet hexagone sur une table.

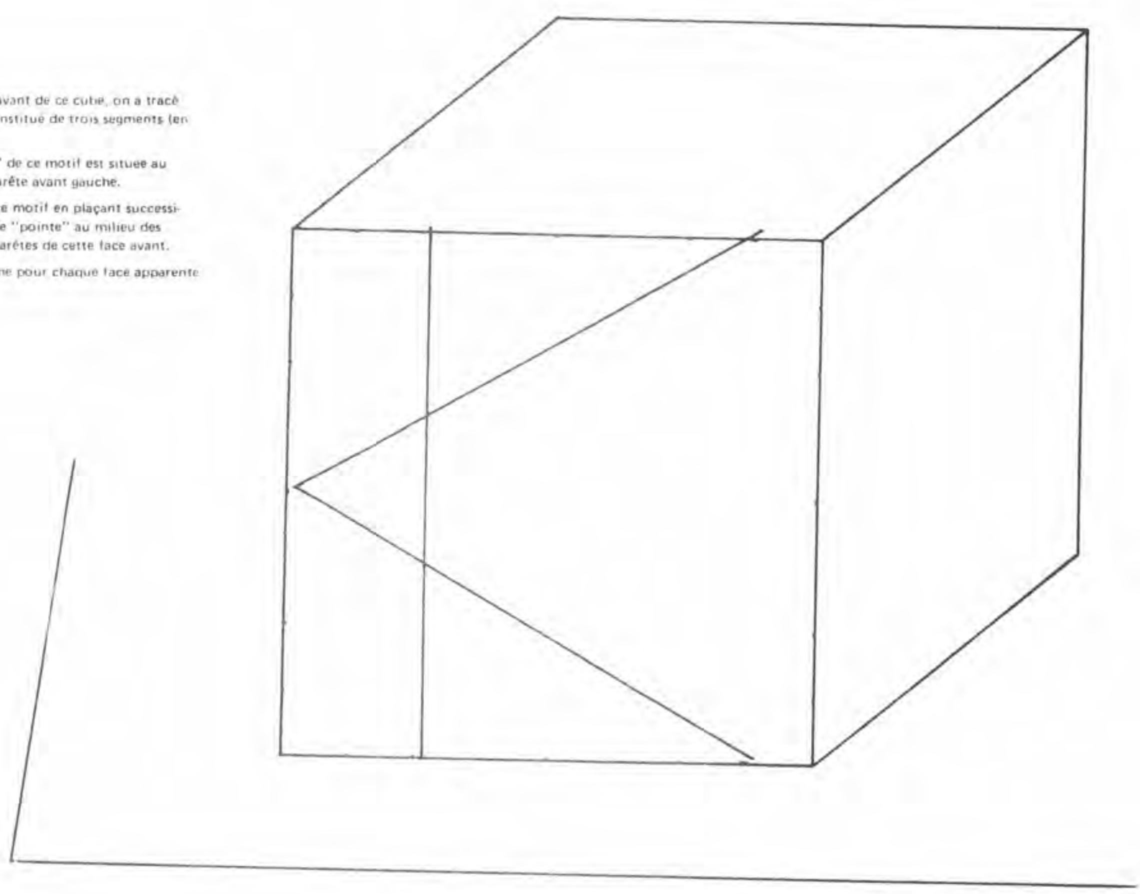
- Termine ce dessin.



11 Sur la face avant de ce cube, on a tracé un motif constitué de trois segments (en rouge).

La "pointe" de ce motif est située au milieu de l'arête avant gauche.

- Reproduis ce motif en plaçant successivement cette "pointe" au milieu des trois autres arêtes de cette face avant.
- Fais de même pour chaque face apparente du cube.



FICHE 10

Exercice plus difficile, mais qui fournit l'occasion de revenir sur les propriétés de l'hexagone régulier.

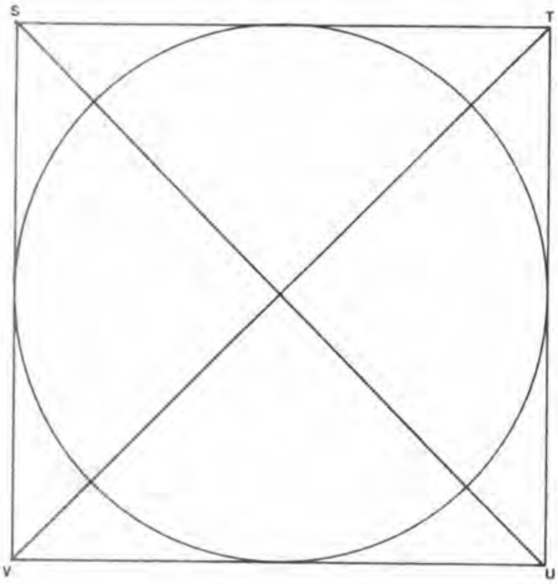
On aura intérêt à faire compléter d'abord l'hexagone initial en suggérant aux élèves de tracer les principaux diamètres, voire la corde FB.

Le dessin préfigure la déformation subie par le cercle lorsqu'il est vu en perspective (cf. fiches 12 et 13). Dans cette optique, on peut prolonger l'activité en rajoutant à la figure l'hexagone circonscrit qui touche le cercle aux sommets ABCDEF (utiliser les parallèles aux cordes telles que BF), le trajet suivi par le cercle vu sur la table se précise alors entre les deux contours polygonaux.

FICHE 11

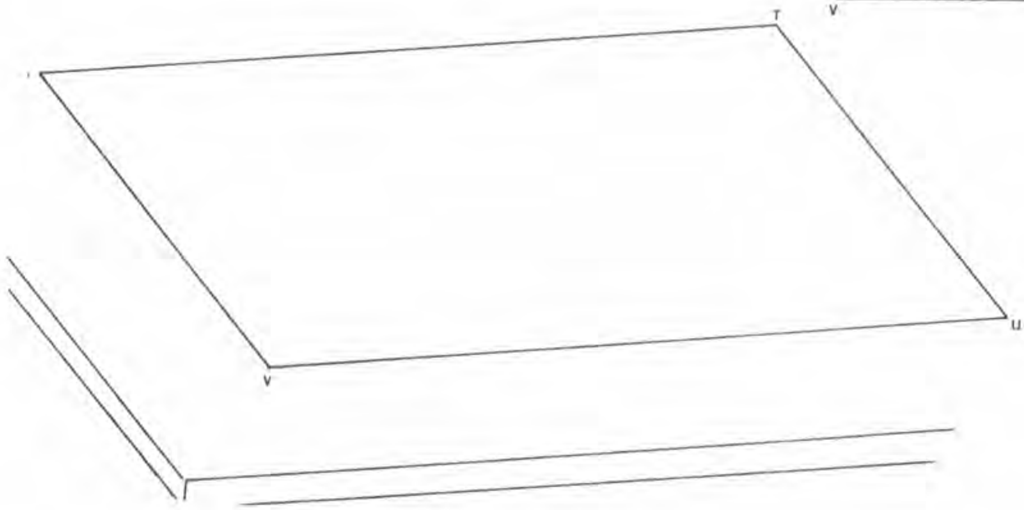
Retour au cube, avec réalisation d'images analogues sur chacune des trois faces visibles et nouvelle illustration de la forme prise par le cercle en perspective.

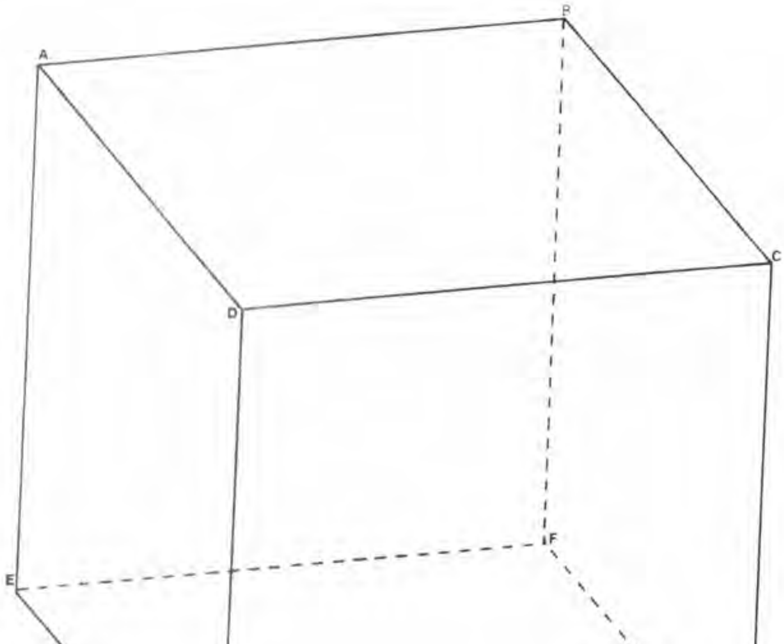
Le polygone " original " apparaît en vraie grandeur sur la face frontale et on obtient de façon purement mécanique des images déformées sur les faces supérieure et latérale. Noter qu'une fois le découpage de chaque arête correctement effectué, la finition du dessin n'est plus qu'un jeu qui consiste à relier sans se tromper les points entre eux.



(12) Sur une feuille de papier carrée, j'ai dessiné un cercle. Cette feuille est posée sur une table.

- Termine le dessin.





(13) • J'ai dessiné un cube. Dessine un cercle sur la face ABCD. Dessine un cercle sur la face EFGH.

FICHE 12

Apprentissage d'une méthode simple de représentation du cercle : les milieux des côtés et les intersections avec les diagonales fournissent huit points connus. Il suffit donc de réinvestir la conservation de la proportionnalité.

On pourra faire observer que les tangentes aux points d'intersection avec les diagonales ont tout intérêt à être reportées à l'avance. Il est possible pour cela d'utiliser le parallélisme avec les diagonales ou leurs points d'intersection avec les côtés du carré, qui fournissent l'occasion de reparler de l'octogone régulier.

FICHE 13

Application de la technique précédente et poursuite de l'introduction au dessin du cube.

Le résultat amène naturellement à prolonger l'activité vers le dessin d'un cylindre : il suffit de considérer les tangentes communes verticales, puis de peaufiner le résultat en plaçant les pointillés au bon endroit ...

N.B. *On peut certes insister sur l'aspect " esthétique " d'un dessin réalisé avec soin. La figure met cependant en lumière l'aspect peu " réaliste " de la perspective choisie. On s'en convaincrait de façon encore plus frappante en essayant d'inscrire une sphère dans le cube à partir des cercles dessinés sur les plans médians : le contour apparent est nettement ovale. L'explication est à chercher sur la figure 6 du chapitre 1 . Le résultat serait meilleur avec la figure 4 .*

Chapitre 6 : SECTIONS I

Les activités des fiches 14 à 35 s'articulent essentiellement autour du cube et proposent de multiples variantes d'un problème très simple, du moins en apparence : déterminer l'intersection d'un plan avec les faces d'un cube donné.

Contrairement aux exercices précédents, l'élève sera désormais confronté à la " géométrie de l'espace " proprement dite, avec ce qu'elle nécessite d'imagination — de " vision " et " d'anticipation ", si l'on préfère —, aussi bien que de rigueur dans les justifications des propriétés les plus élémentaires des plans qui se coupent dans l'espace. On ne s'étonnera donc pas que nous ayons cherché à ménager du mieux possible la progression dans les difficultés, de façon à ce que les contraintes du raisonnement n'obèrent pas systématiquement l'aspect ludique du dessin et de la découverte. C'est une des conditions sine qua non pour permettre à une large majorité des élèves de participer, donc de tirer profit au maximum du temps passé à dessiner.

Si le thème retenu ici nous a semblé particulièrement approprié pour inviter les enfants à se poser des questions à propos d'une figure, c'est d'abord parce que ce type d'exercice amène très naturellement à **deviner** la solution avant de nécessiter une **méthode** de résolution convaincante.

D'entrée de jeu, en effet, l'élève doit faire un effort pour concevoir les deux données, très simples, que sont le plan et le volume, et on peut sans grand risque affirmer qu'il n'y a pas de géométrie sans cette **appropriation** préalable. Il est d'ailleurs assez courant de constater chez les élèves que cette capacité de compréhension " instructive " ne voisine pas toujours avec la faculté de " faire le tri " entre les propriétés mises en jeu et, surtout, que le partage de ces compétences au niveau de la classe réserve des surprises par rapport à la " hiérarchie " habituelle en mathématiques ...

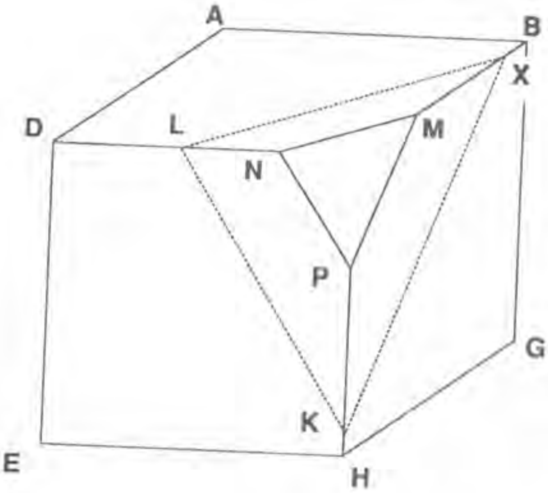


fig. 40

En ce qui concerne la présente série d'activités, les " concepts " de base sont volontairement peu nombreux, si bien que l'appel à l'imagination est assez minime. Il peut cependant se révéler substantiel pour la moyenne des élèves, il touche notamment aux points suivants :

1) la notion de cube ou " pavé droit " : La représentation utilisée pour le cube ayant été préparée au cours de la première série d'activités, l'élève n'a généralement aucun mal à **reconnaître** un cube dans le dessin présenté ; cela étant, il convient évidemment de ne pas négliger tout le côté des exercices portant sur l'apprentissage ou l'approfondissement des propriétés du parallélépipède rectangle lui-même. Sans qu'il soit nécessairement besoin d'apport magistral, l'élève devrait ainsi parvenir à maîtriser correctement :

- les notions de faces, d'arêtes de sommets, visibles ou cachés,
- l'idée de plans horizontaux et verticaux,
- le sens d'une " troisième dimension " , qu'il s'agisse de se situer " en hauteur " vis-à-vis des faces horizontales ou " en profondeur " dans le dessin, par rapport à la face avant.

On observera cependant les limites naturelles qu'il faut fixer à cette compréhension intuitive, d'autant plus que de nombreuses propriétés n'interviennent pas encore au niveau des exercices :

- *il n'est pas indispensable de mettre l'accent sur les propriétés d'orthogonalité,*
- *nous avons maintenu de même une certaine ambiguïté, en choisissant le terme de pavé droit , sur les propriétés touchant aux longueurs des arêtes : l'élève a la possibilité de voir un cube ou un parallélépipède quelconque selon les résonances propres que la figure suscite dans son imagination.*

2) les notions de plan et de droite dans l'espace : *Sans qu'il soit besoin d'indiquer explicitement les propriétés suivantes sous forme de " définition " ou de " proposition " , les fiches permettent de dégager :*

. *l'idée que deux plans qui se coupent ont une droite pour intersection et que, si on connaît deux points communs, le reste de la figure est connu,*

. *l'idée qu'un plan ou qu'une droite — et en premier lieu les faces et les arêtes du cube — , sont des objets qui " débordent le cadre du dessin " et peuvent (ou doivent ...) être* **prolongés** *en fonction des besoins.*

Un des objectifs de tout le fichier est d'assurer des **étapes** *dans la découverte de telles " évidences " . Chacun sait en effet qu'il n'est pas toujours facile de voir la position exacte d'un plan ou ses rapports avec les autres objets de la figure. Nous nous sommes donc bornés ici au cas le plus simple : celui d'un plan oblique qui se rapporte aisément aux directions horizontales ou verticales, mieux ancrées dans l'esprit de l'observateur. Ce n'est que plus tard que l'élève devra imaginer les positions relatives de deux plans obliques.*

3) la notion de parallélisme : *C'est la question clef. L'idée de plans parallèles nous semble à la fois simple et complexe : certains " cas de figures " paraissent évidents alors que d'autres n'amènent pas vraiment à mettre la* propriété en avant. Il n'est pas rare, par exemple, que les couples de faces opposées du cube soient ressentis différemment, que tel élève qui " voit " comme parallèles les deux plans obliques de la figure ... ait du mal à ressentir avec autant de force le fait que les faces avant et arrière ont aussi cette propriété.

Comme pour les propriétés précédentes, les exercices proposés sont l'occasion d'aider chaque élève à clarifier ses idées dans ce domaine. Il ne convient pas d'imposer une hiérarchie artificielle : le dessin du **résultat** apporte autant, sinon plus, **l'idée** de plans parallèles que les propriétés mises en jeu dans l'énoncé ou dans la construction.

Par delà le domaine de la compréhension intuitive, l'aspect que l'on peut qualifier de " mathématique " de toutes ces situations repose sur la mise en jeu de notions liées au parallélisme. Si on peut dire en effet que, **hors de toute formalisation** , le parallélisme de deux plans rassemble des idées aussi différentes que :

- un plan parallèle à un plan s'obtient en " translatant " le plan donné,
- deux plans sont parallèles s'ils sont perpendiculaires à une même droite,
- deux plans sont parallèles s'ils ne se coupent pas,
- des plans parallèles découpent des segments proportionnels sur des droites,
- deux plans sont parallèles s'ils coupent tout plan sécant selon deux droites parallèles, etc., etc.

Il est clair que la justification des solutions demande un certain tri et un minimum de raisonnement. Nous touchons donc là à un point délicat, car on ne peut guère prétendre que le sujet soit simple, tant les propriétés précédentes sont imbriquées et proches des fondements même sur lesquels repose la démarche axiomatique. Sans entrer ici dans les détails (nous renvoyons pour cela au commentaire de chaque fiche) , soulignons deux points qui nous paraissent importants à maîtriser pour le professeur :

1) La première nécessité est de se convaincre du fait que deux plans parallèles ont des intersections avec un plan sécant quelconque qui sont deux droites parallèles. Bien entendu, le raisonnement est simple : " si ces deux droites se coupaient, alors les plans auraient un point en commun ... " On notera toutefois qu'on fait ainsi appel à la notion de droites parallèles considérées comme " droites qui ne se coupent jamais " , or la véritable propriété à mettre en œuvre (qui a d'ailleurs déjà été mise en avant au cours de la première série d'activités) est en réalité la propriété de Thalès : des parallèles découpent des segments proportionnels sur deux sécantes.

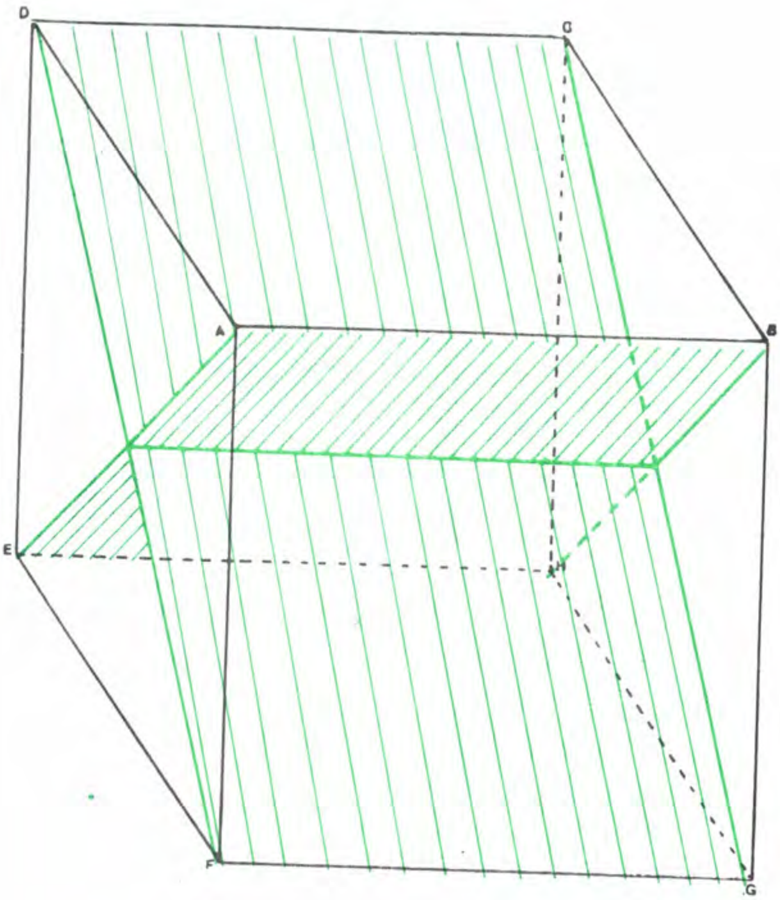
On peut donc voir là, sinon un péché mortel vis-à-vis de la " logique " présidant à toute chose mathématique, du moins un anachronisme, dans des exercices qui sont proposés à des élèves bien avant que soit évoqué le théorème de Thalès ... Il ne nous paraît pas indispensable néanmoins de s'attarder sur cette question (qui n'est généralement pas soulevée dans les classes) , pour laquelle on peut sans scrupule " renvoyer à plus tard " les rares élèves qui pourraient faire la remarque.

2) Une question intéressante est parfois soulevée à propos des constructions demandées aux élèves ; on aura noté en effet que plusieurs méthodes sont possibles pour obtenir les points L et K , de la figure 40 notamment :

- *on peut tracer XL parallèle à MN , puis LK parallèle à NP ,*
- *on peut tracer XL parallèle à MN , puis XK parallèle à MP .*

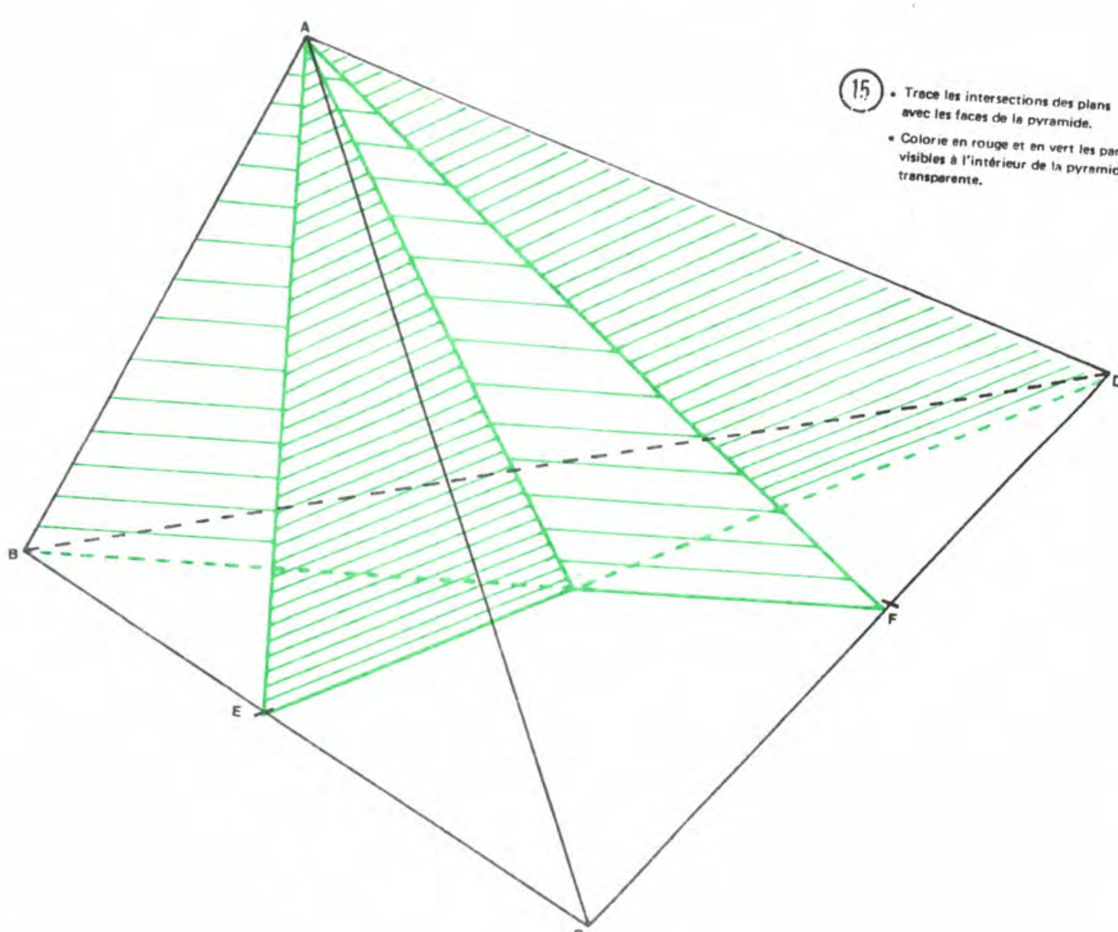
Le problème peut donc être posé de savoir si la troisième droite, obtenue de façon indirecte, est bien celle que l'on aurait trouvée dans la méthode de construction directe. Des questions analogues se posent d'ailleurs au sujet de pratiquement toutes les autres fiches. Avec une classe motivée, il y a souvent là matière à introduire d'intéressantes initiations à la démonstration, voire les prémices du raisonnement par l'absurde.

On prendra garde cependant de ne pas susciter prématurément les remarques et, surtout, de ne pas provoquer artificiellement de " conflit " dans la lecture des figures, en succombant à la tentation de **regarder le dessin achevé comme une configuration plane** *. On peut noter en effet que les triangles MNP et XLK sont à côtés parallèles, mais que l'on peut les regarder ainsi soit comme* *deux triangles non coplanaires, soit comme deux triangles appartenant tout simplement au même plan, c'est-à-dire celui de la figure ... Bien qu'il s'agisse d'un des points cruciaux de la géométrie, il nous semble important de préserver la capacité de lecture spatiale de l'image, et donc de ne pas déstabiliser les élèves inutilement.*



14

- Trace les intersections des plans ABHE et CDFG avec les faces du pavé
- Colorie en rouge et en vert les parties visibles de ces deux plans à l'intérieur du pavé si celui-ci est transparent



15

- Trace les intersections des plans AED et BFA avec les faces de la pyramide.
- Colorie en rouge et en vert les parties de ces plans visibles à l'intérieur de la pyramide si celle-ci est transparente.

FICHE 14

Cette activité met en évidence sur une représentation, la " profondeur de l'espace ".

Deux plans se coupent suivant une droite (c'est une connaissance intuitive, aisément vérifiable avec les faces du cube).

Le dessin est fait dans le plan de la feuille de papier, tous les points sont donc dessinés dans un même plan. Dans la réalité, certains points sont en avant d'autres points, en effet ils appartiennent à deux portions d'un même plan dont l'une à l'évidence " part vers l'avant " et l'autre " vers l'arrière ".

Les conventions de représentation mettent en évidence la face avant et la face supérieure du cube. En particulier la présence d'arêtes dessinées en trait interrompu-court précise la position du cube par rapport à l'observateur.

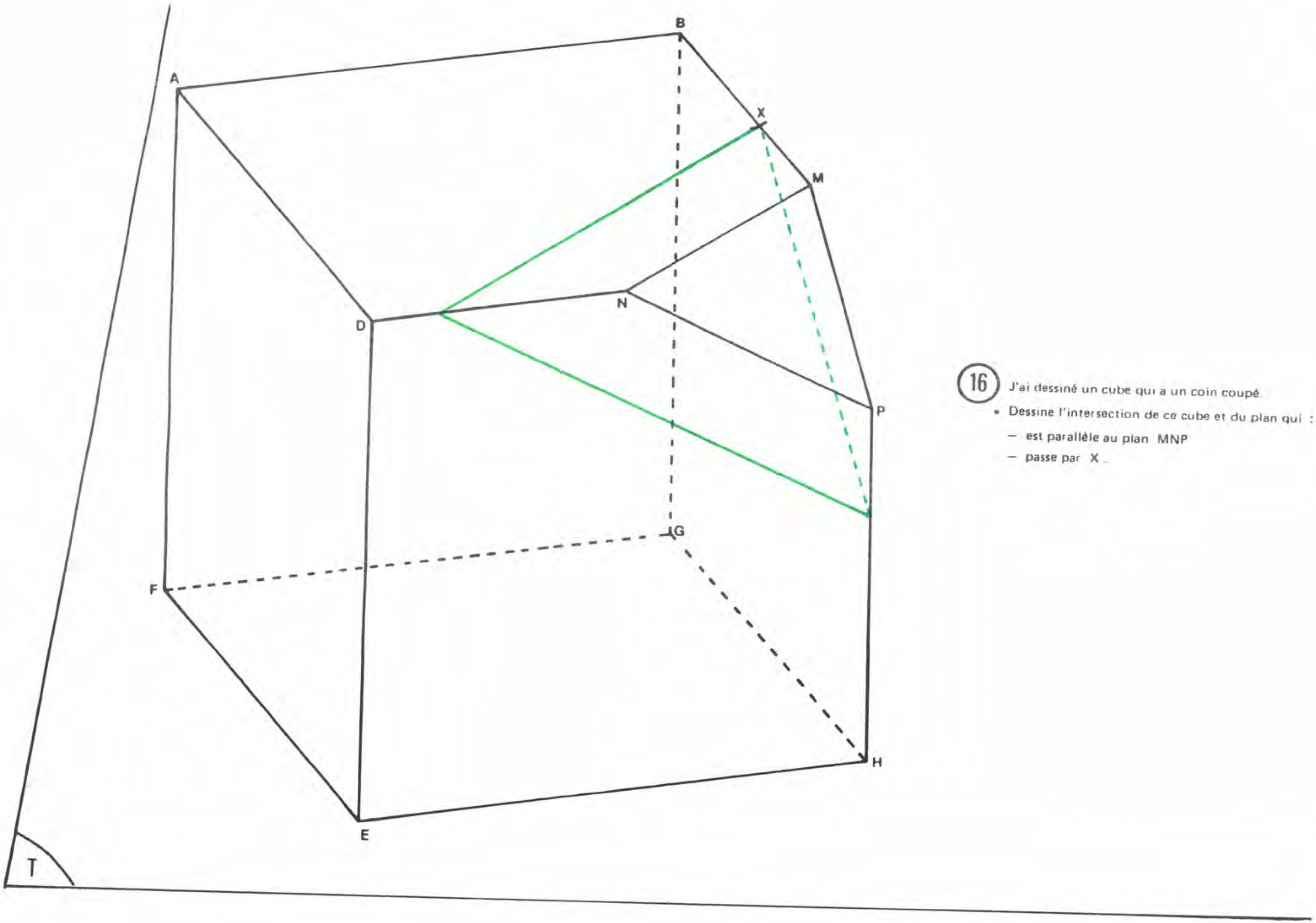
On peut faire tracer l'intersection des deux plans considérés et colorier les parties visibles si le cube est transparent, mais il paraît intéressant de justifier le dessin.

C'est un exercice important de situation relative dans l'espace.

FICHE 15

- Réinvestissement des conclusions de la fiche n° 14 .

- On fera tracer l'intersection des deux plans dessinés et on pourra faire justifier le tracé de cette intersection.



16 J'ai dessiné un cube qui a un coin coupé.

- Dessine l'intersection de ce cube et du plan qui :
  - est parallèle au plan MNP
  - passe par X .

FICHE 16

L'intérêt de cette fiche est triple :

- dessin sur les faces d'un pavé droit, donné pour être un cube,
- deux plans parallèles coupent un troisième plan suivant deux droites parallèles. Cette règle peut être facilement justifiée par un raisonnement par l'absurde, aussi bien en classe de cinquième qu'en classe de troisième,
- nécessité de préciser que deux droites parallèles sont coplanaires. C'est la première fois que cette nécessité apparaît dans un exercice, d'une manière naturelle, à nos élèves.

Deux constructions sont possibles :

1) Dans la face (A,B,M,N,D) nous traçons la droite parallèle à la droite (MN), qui passe par le point X . Elle coupe la droite (ND) en un point L . Par ce point L , nous traçons la parallèle à la droite (NP) dans la face (D,N,P,H,E) . Elle coupe la droite (PH) en un point K . Nous traçons la droite parallèle à la droite (MP) , qui passe par le point X , dans la face (B,M,P,H,G) . Elle coupe la droite (PH) en un point K' .

Il faut démontrer que les deux points obtenus (peut-être) K et K', sur la droite (PH) , sont confondus. C'est un magnifique mais difficile raisonnement par l'absurde.

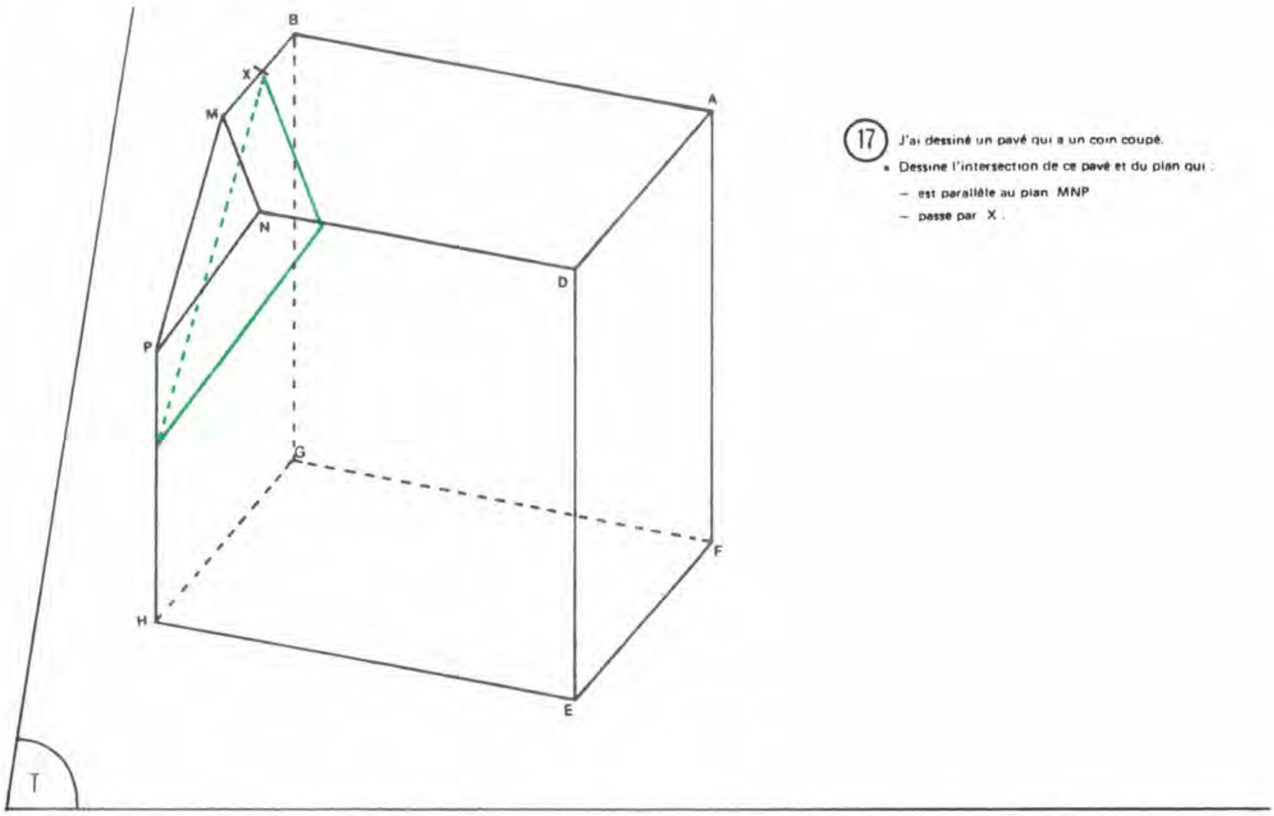
Supposons les points K et K' distincts :

Soit alors $\mathscr{U}$ le plan parallèle au plan MNP , qui passe par le point X .

Par construction, les points K et K' appartiennent tous les deux au plan $\mathscr{U}$, donc ce plan contient la droite (KK') .

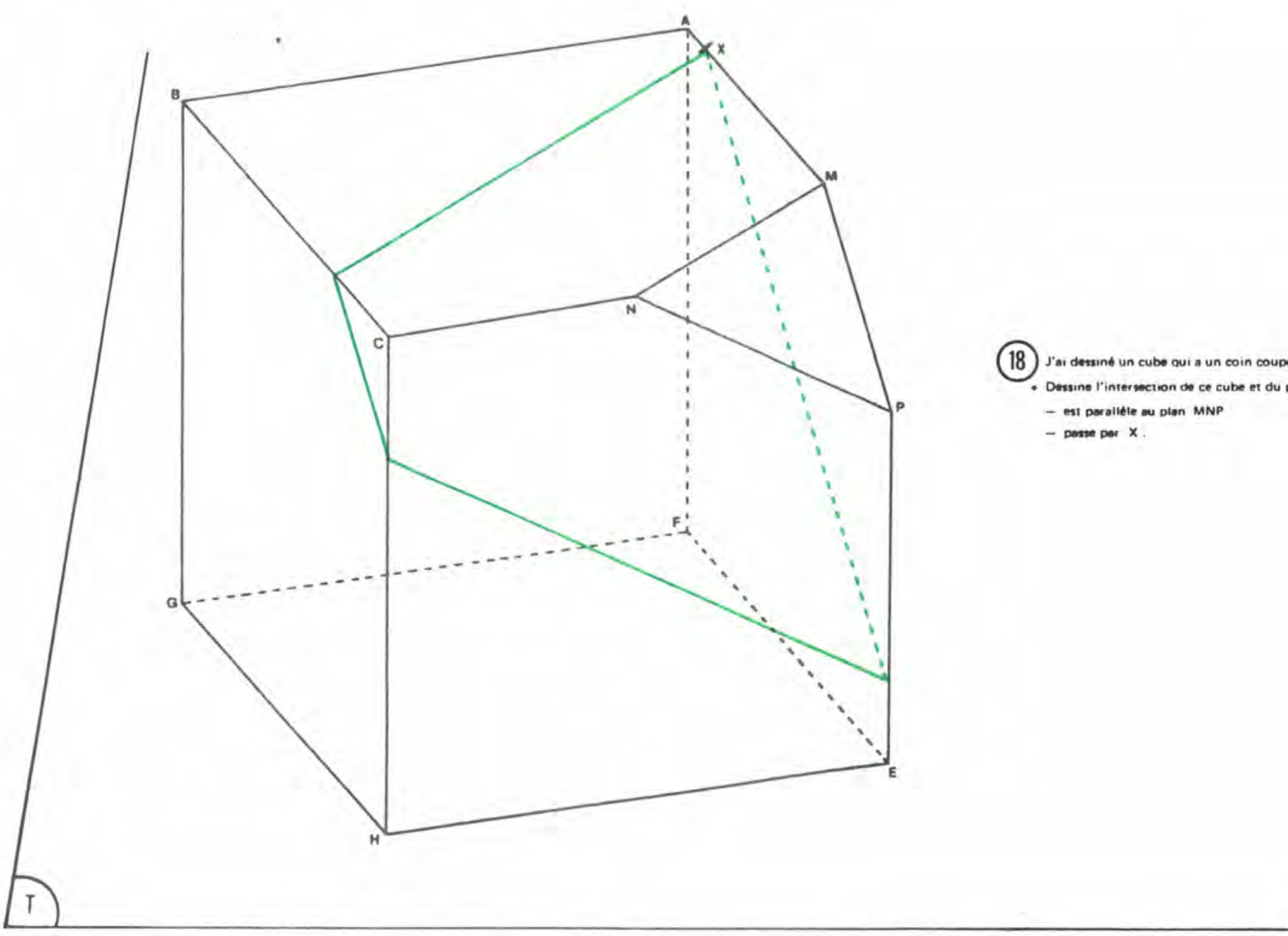
Le point P est un point de la droite (KK') donc le point P est un point du plan $\mathscr{U}$.

Ce point P est alors un point commun aux deux plans parallèles $\mathscr{U}$ et (MNP) , qui sont donc confondus, ce qui contredit l'énoncé, donc K et K' sont confondus.



17 J'ai dessiné un pavé qui a un coin coupé.

- Dessine l'intersection de ce pavé et du plan qui :
  - est parallèle au plan MNP
  - passe par X .



18 J'ai dessiné un cube qui a un coin coupé.

- Dessine l'intersection de ce cube et du plan qui :
  - est parallèle au plan MNP
  - passe par X .

2) Traçons dans la face (A,B,M,N,D) la droite parallèle à la droite (MN), qui passe par le point X , elle coupe la droite (DN) en un point L . Traçons dans la face (G,B,M,P,H) la droite parallèle à la droite (MP), qui passe par le point X , elle coupe la droite (PH) en un point K . Il faut démontrer que la droite (KL) est parallèle à la droite (NP).

Cette droite (KL) est dans le plan (D,N,P,H,E) et dans le plan parallèle au plan (MNP), qui passe par le point X .

La droite (KL) est donc parallèle à la droite (NP).

Cette activité met en œuvre les règles mises en évidence dans l'analyse de la situation.

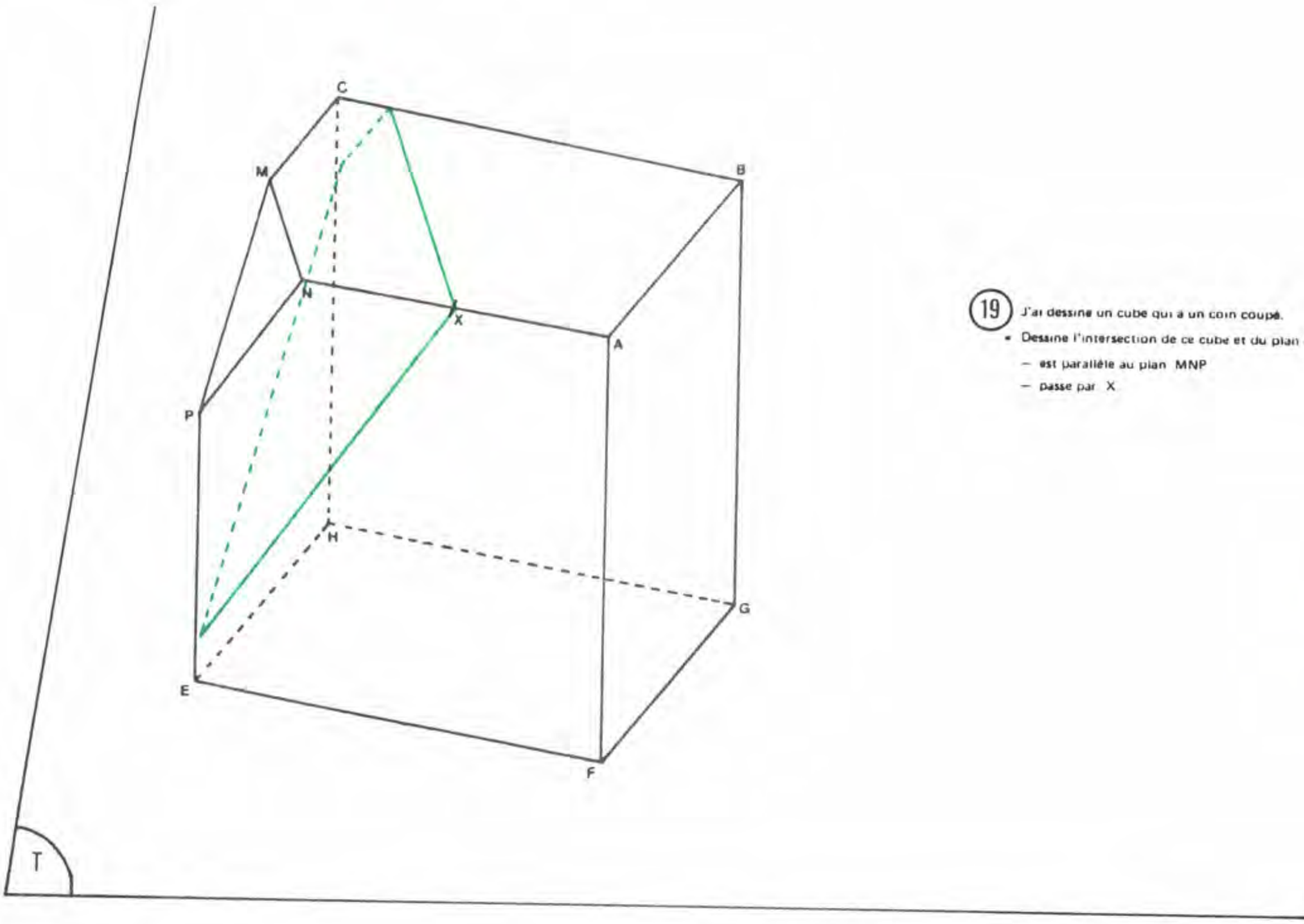
FICHE 17

Même activité que la fiche 16 . Le pavé droit est vu sous un autre angle. Elle permet de s'assurer du degré de compréhension des élèves. On pourra leur demander de refaire la démonstration précédente (fiche 16-2).

FICHE 18

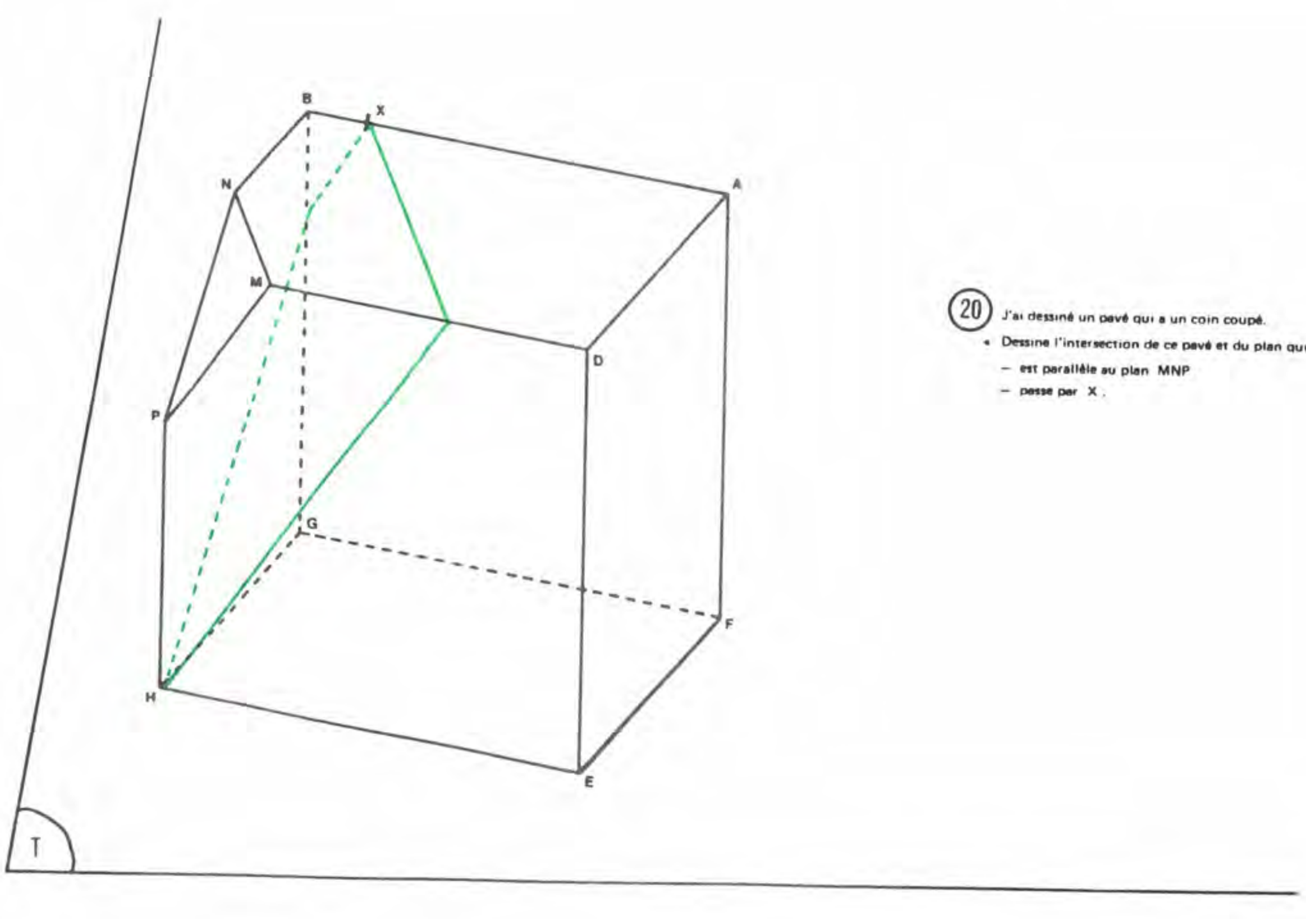
Même activité que les fiches 16 et 17 , l'intersection cherchée est un quadrilatère. Il faut faire un choix judicieux de l'ordre des tracés des droites parallèles aux droites (MN), (MP), (PN) puis joindre les deux points obtenus sur les droites (BC) et (CH).

Il pourrait être intéressant de démontrer que la droite ainsi obtenue est parallèle à la droite (MP) et préciser les propriétés du parallélisme dans l'espace.



19 J'ai dessiné un cube qui a un coin coupé.

- Dessine l'intersection de ce cube et du plan qui :
  - est parallèle au plan MNP
  - passe par X



20 J'ai dessiné un pavé qui a un coin coupé.

- Dessine l'intersection de ce pavé et du plan qui :
  - est parallèle au plan MNP
  - passe par X .

FICHES 19, 20, 21

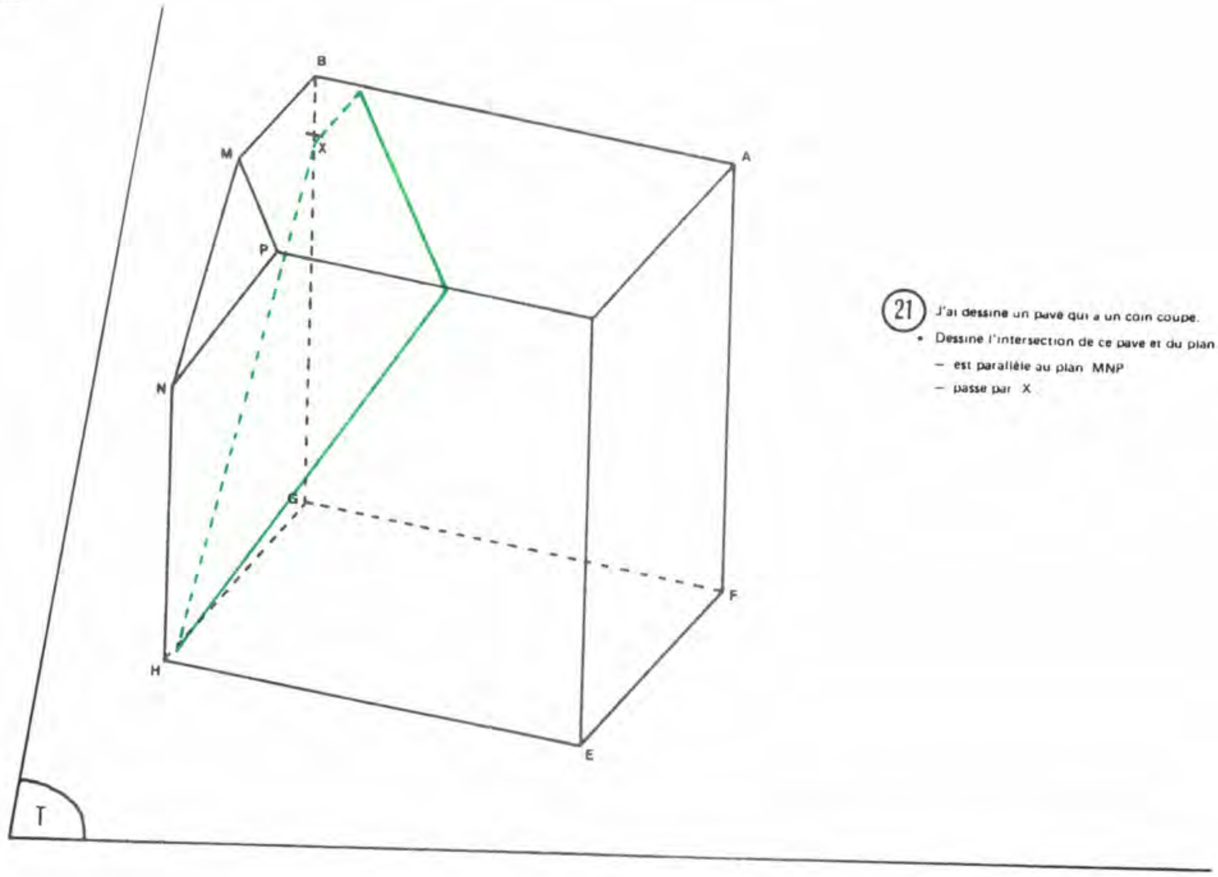
Même activité que la fiche 18 , sous un angle différent.

Il semble indispensable de bien préciser dans quelle face nous dessinons, car ici le dessin devient moins évident et la moindre erreur entraîne des tracés fantaisistes.

FICHE 22

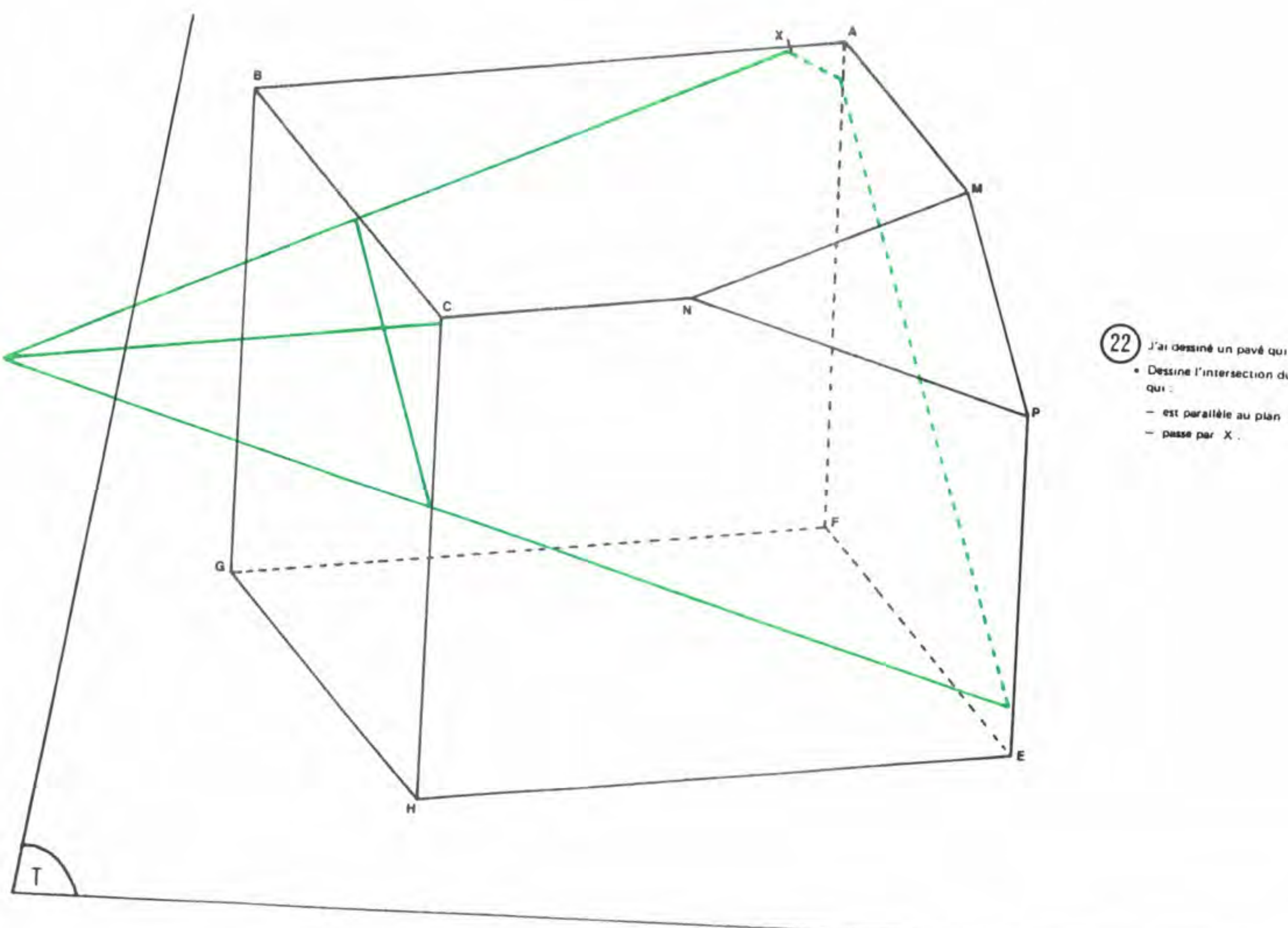
Nous pouvons tracer la droite parallèle à la droite (MN) , qui passe par le point X , dans la face (A,M,N,C,B) ; mais il nous est impossible de continuer le dessin : nous n'avons aucun point dans des plans qui contiennent les droites (NP) ou (MP) .

Si aucune solution intuitive n'apparaît, il est conseillé de passer à l'activité 23 puis de revenir à celle-ci.



(21) J'ai dessiné un pavé qui a un coin coupé.

- Dessine l'intersection de ce pavé et du plan qui :
  - est parallèle au plan MNP
  - passe par X.

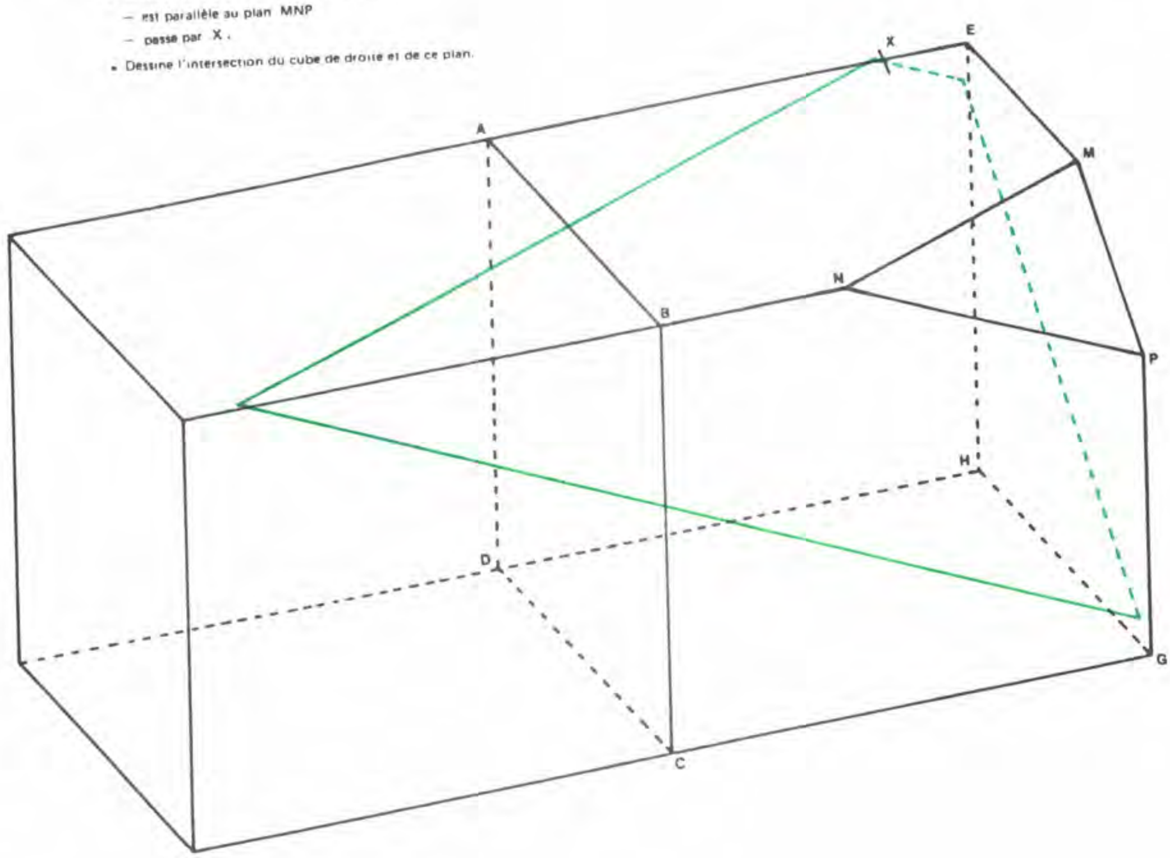


(22) J'ai dessiné un pavé qui a un coin coupé.

- Dessine l'intersection du pavé et du plan qui :
  - est parallèle au plan MNP
  - passe par X.

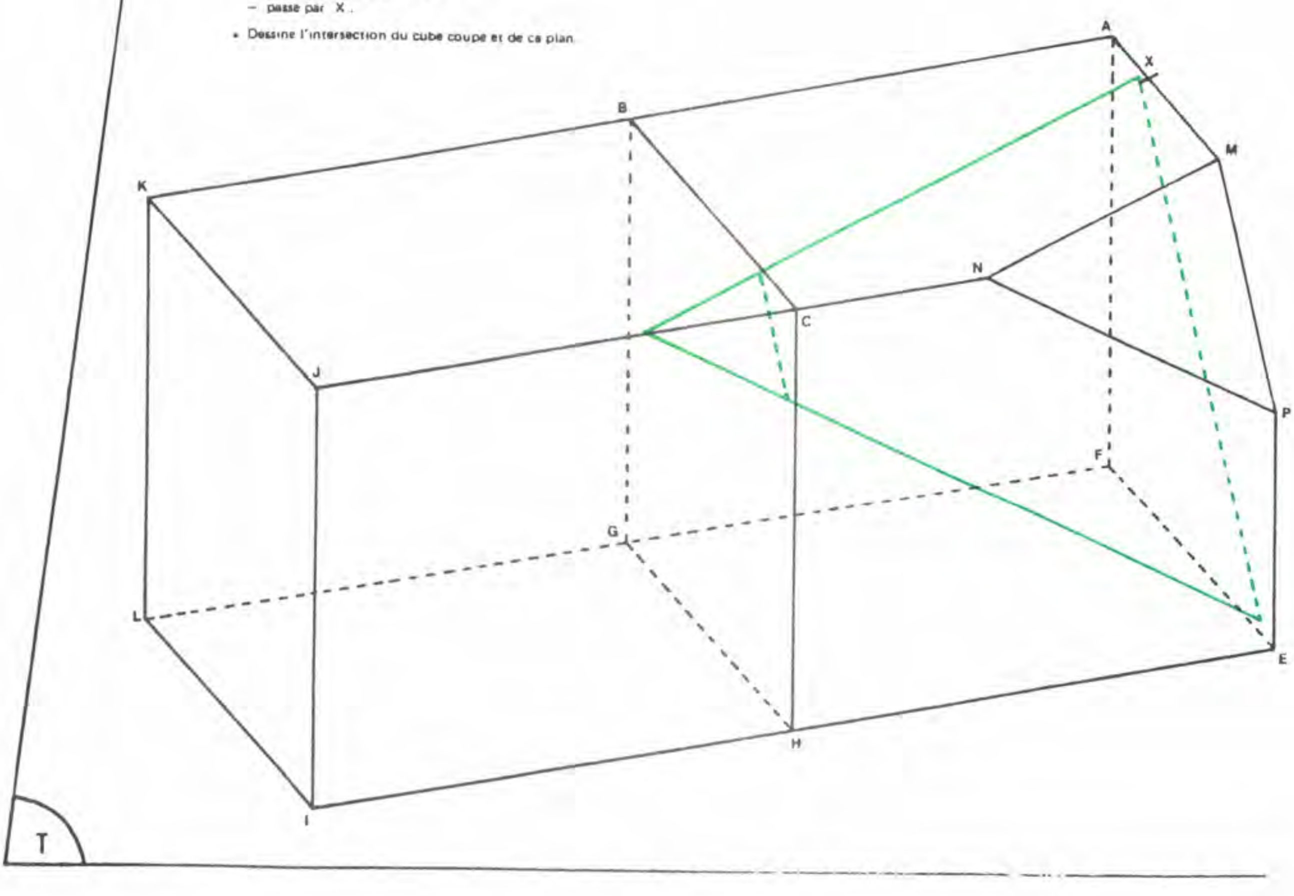
(23) En mettant deux cubes côte à côte j'ai obtenu un pavé
Ce pavé a un coin coupé.

- Dessine l'intersection du pavé et du plan qui :
  - est parallèle au plan MNP
  - passe par X.
- Dessine l'intersection du cube de droite et de ce plan.



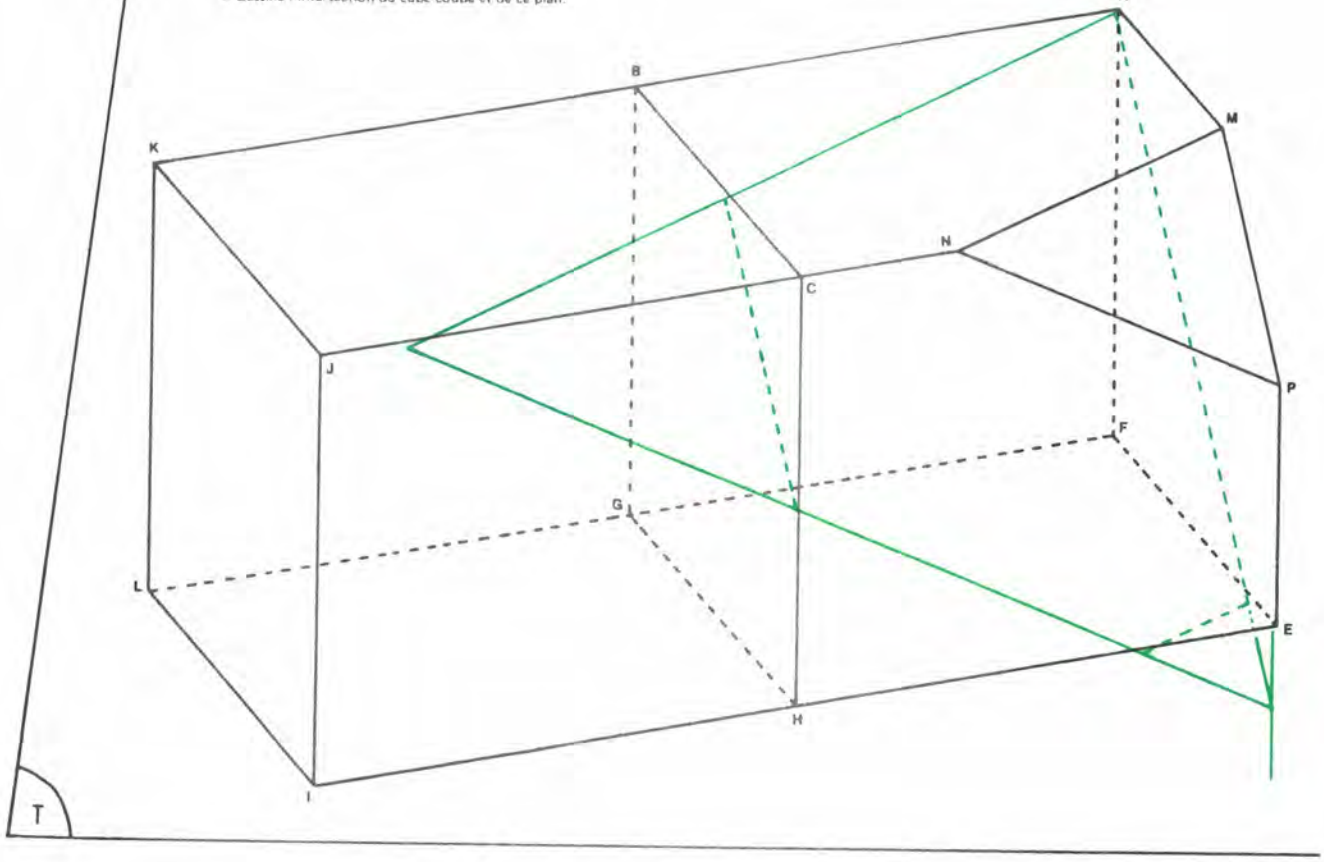
(24) En mettant deux cubes côte à côte, j'ai obtenu un pavé.
Ce pavé a un coin coupé.

- Dessine l'intersection du pavé et du plan qui :
  - est parallèle au plan MNP
  - passe par X.
- Dessine l'intersection du cube coupé et de ce plan.



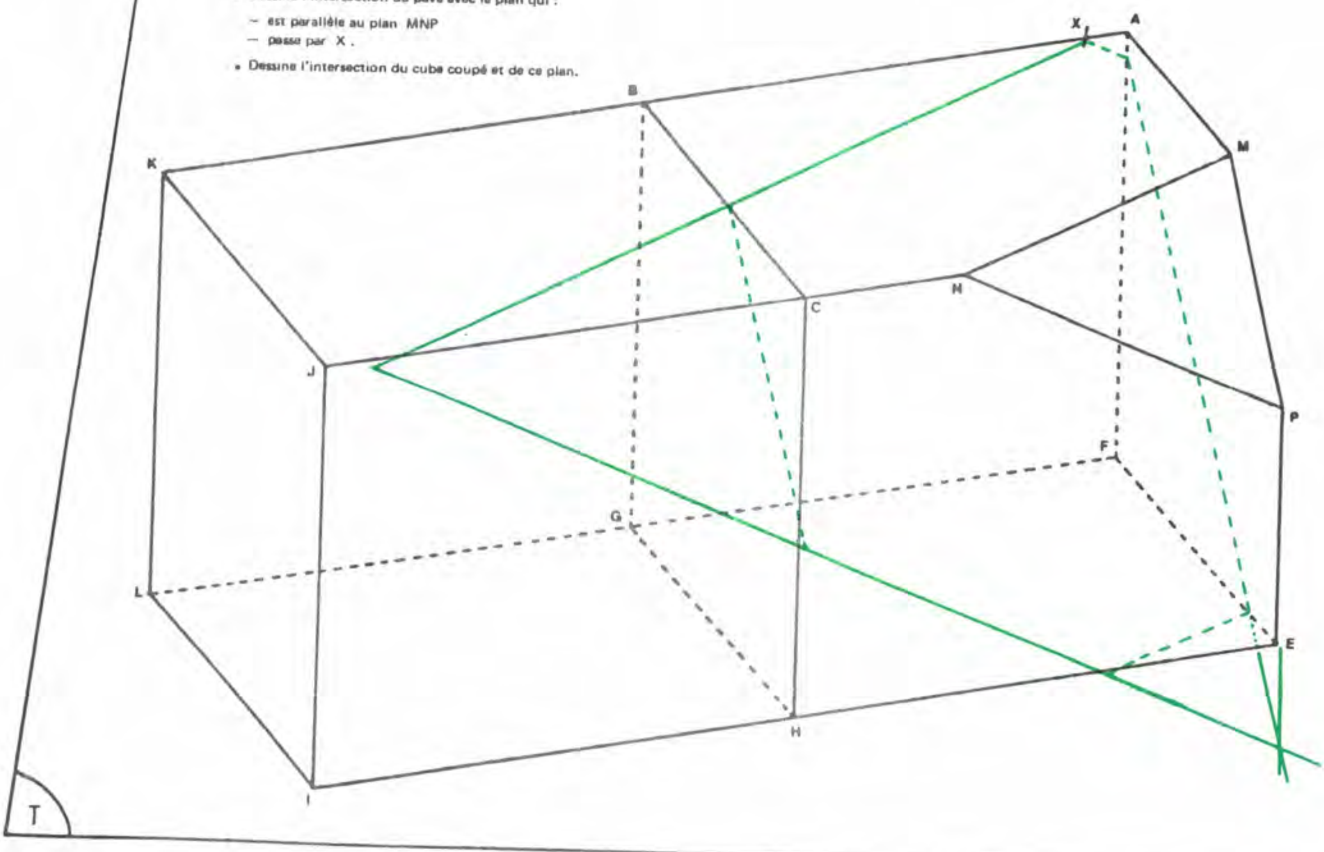
(25) En mettant deux cubes côte à côte j'ai obtenu un pavé.
Ce pavé a un coin coupé.

- Dessine l'intersection du pavé et du plan qui :
  - est parallèle au plan MNP
  - passe par A.
- Dessine l'intersection du cube coupé et de ce plan.



(?6) En mettant deux cubes côte à côte j'ai obtenu un pavé.
Ce pavé a un coin coupé.

- Dessine l'intersection du pavé avec le plan qui :
  - est parallèle au plan MNP
  - passe par X.
- Dessine l'intersection du cube coupé et de ce plan.



FICHES 23, 24, 25, 26, 27

Placer deux cubes côte à côte permet de prolonger dans l'une ou l'autre direction toute face du cube. Le tracé de la droite parallèle à la droite (MN) qui passe par le point X dans le plan de la face (A,B,C,N,M) , détermine le point de la droite (NC) qui permet de poursuivre le dessin et de le terminer.

Il est possible de simplement prolonger l'arête indispensable sans dessiner en entier le cube additionnel. Il faut alors bien préciser dans quel plan on dessine.

De fiche en fiche, l'intersection se complique pour devenir un hexagone. Il faut faire vérifier scrupuleusement que les côtés du polygone intersection sont bien dans les faces du cube initial. Les erreurs sont nombreuses et il faut faire preuve de beaucoup de rigueur pour obtenir à coup sûr un dessin exact.

FICHE 28

Une autre manière de prolonger les plans de trois faces consécutives d'un cube, est de le placer dans l'angle de la pièce, préfigurant ainsi un repère de l'espace (fiches 32 et suivantes) .

Le raisonnement, construit dans les fiches précédentes, est ici indispensable :

Pour tracer une droite dans un plan, il me faut deux de ses points dans ce plan, ou un point et sa direction.

Ai-je deux points situés dans le plan considéré et dans le plan de la face du cube ? Si oui, tracer la droite qui passe par ces deux points, sinon changer de face du cube.

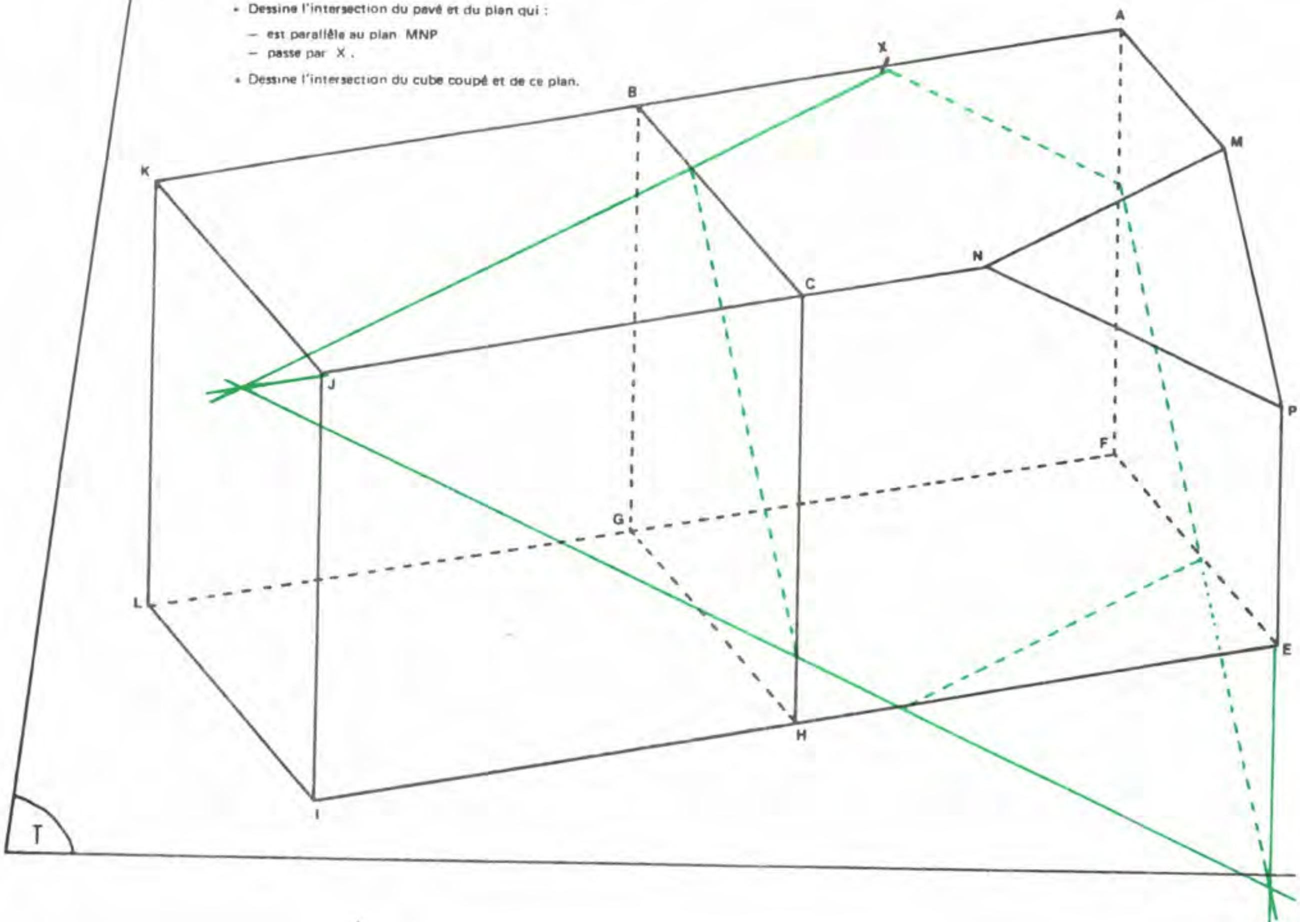
Après le tracé précédent, puis-je trouver deux points situés dans le plan considéré et une des faces du cube consécutive à la précédente ?

etc.

Nous obtenons un hexagone.

27 En mettant deux cubes côte à côte, j'ai obtenu un pavé.
Ce pavé a un coin coupé.

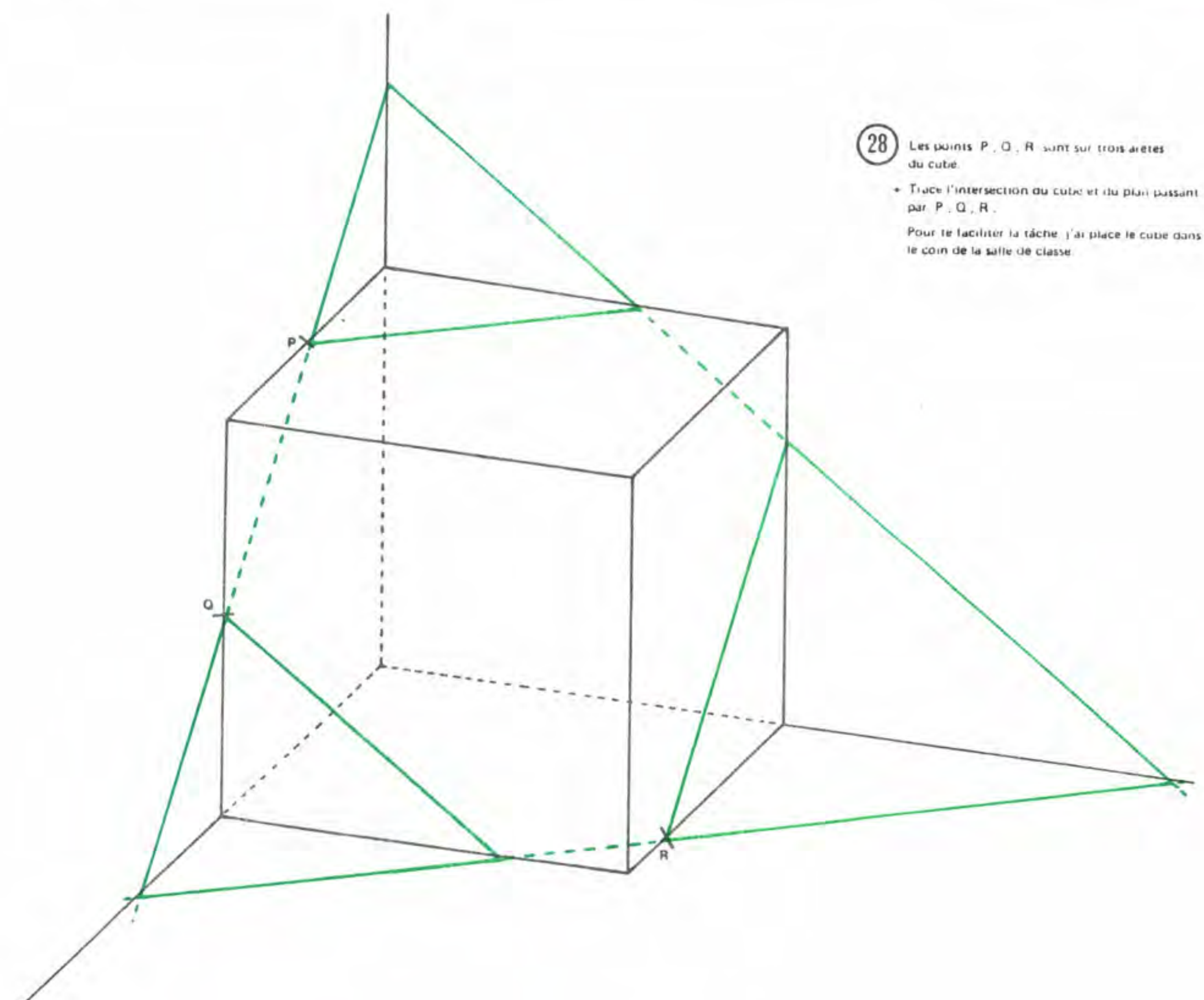
- Dessine l'intersection du pavé et du plan qui :
  - est parallèle au plan MNP
  - passe par X.
- Dessine l'intersection du cube coupé et de ce plan.

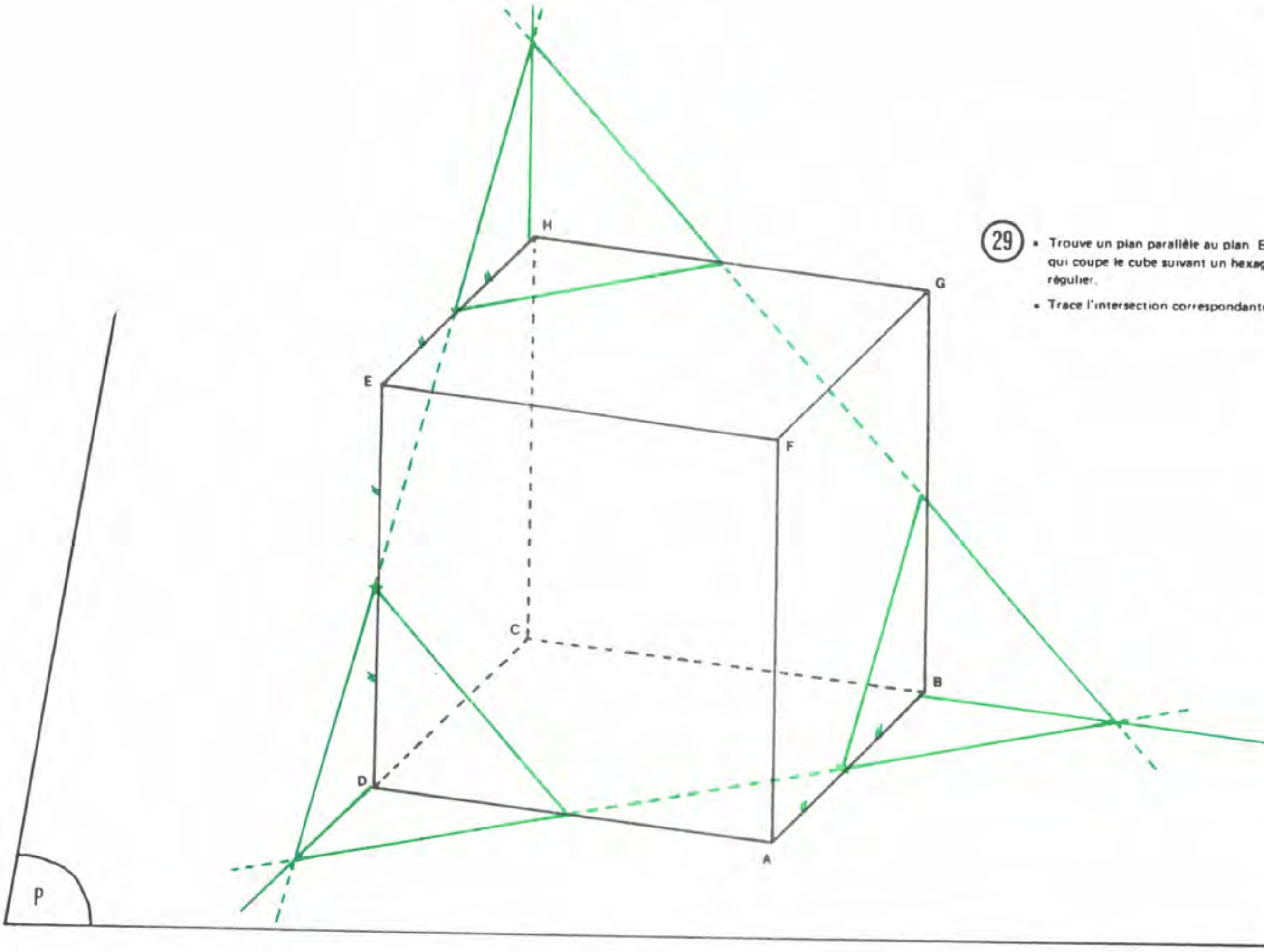


28 Les points P, Q, R sont sur trois arêtes du cube.

- Trace l'intersection du cube et du plan passant par P, Q, R.

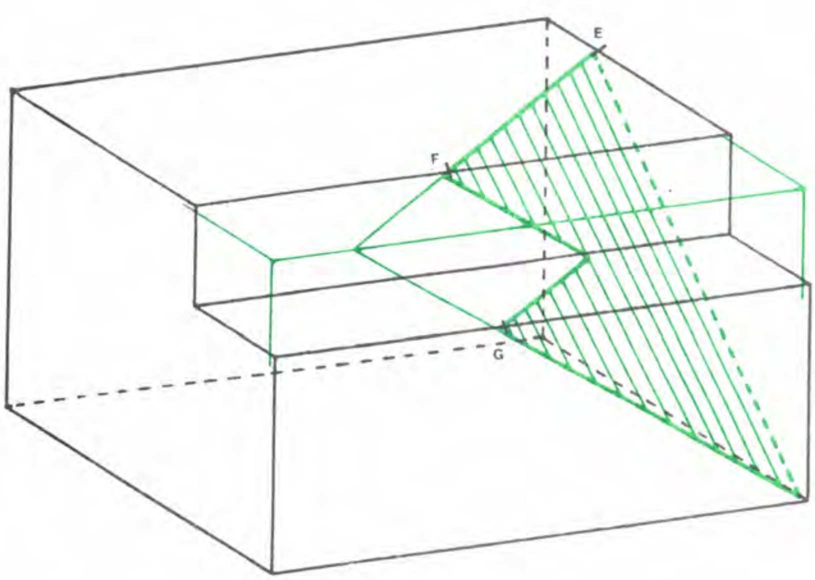
Pour te faciliter la tâche, j'ai placé le cube dans le coin de la salle de classe.





(29) • Trouve un plan parallèle au plan EGA qui coupe le cube suivant un hexagone régulier.

• Trace l'intersection correspondante.

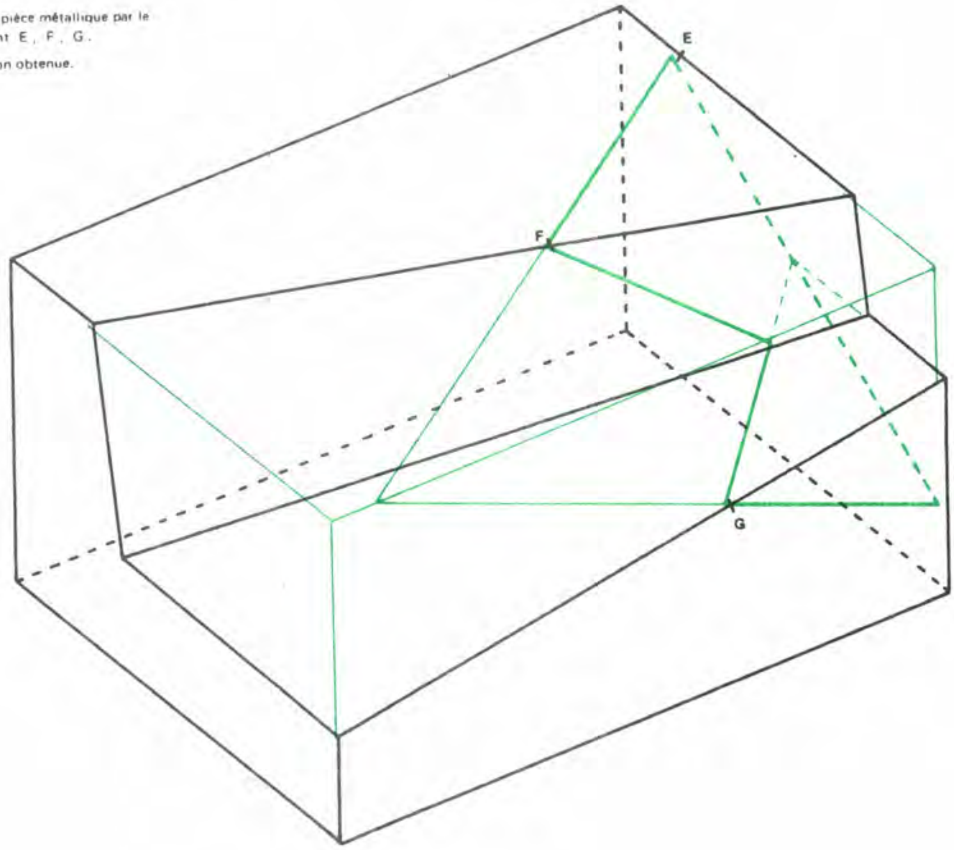


(30) On coupe cette pièce métallique par le plan qui contient E, F et G.

• Colorie la section obtenue.

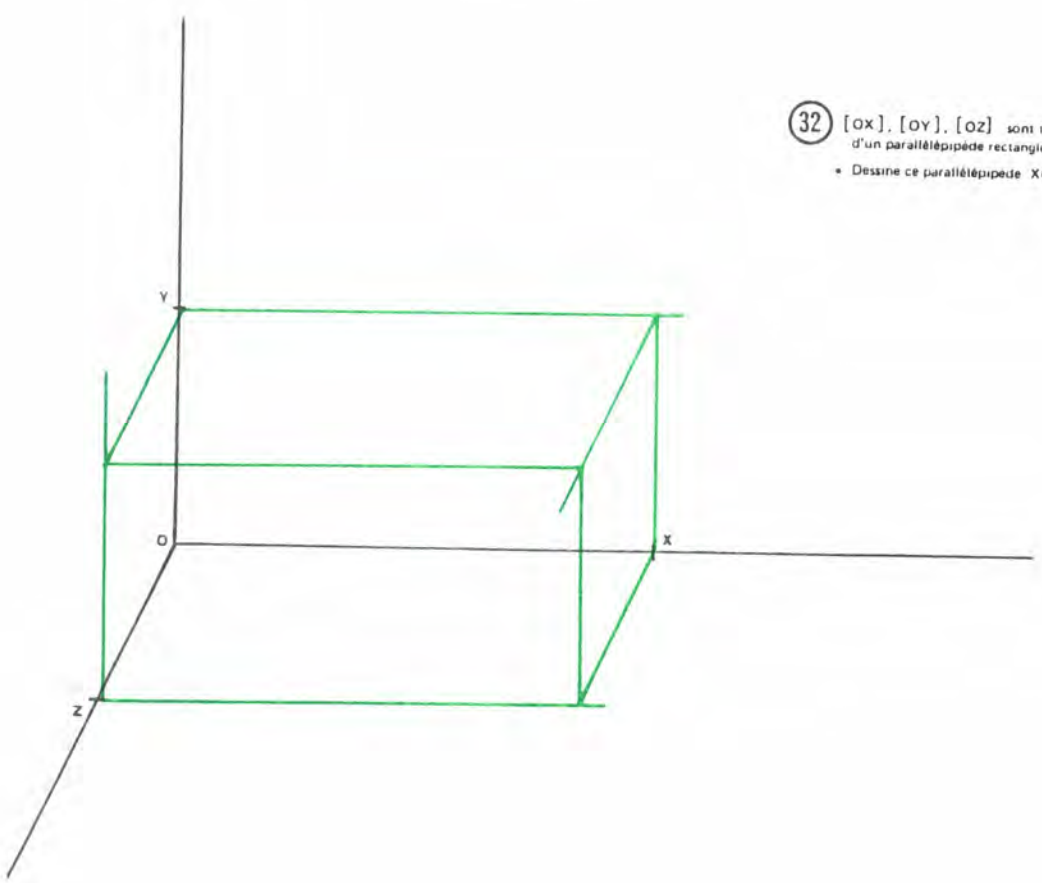
31 On coupe cette pièce métallique par le plan qui contient E, F, G.

- Colorie la section obtenue.



32 [OX], [OY], [OZ] sont trois arêtes d'un parallélépipède rectangle.

- Dessine ce parallélépipède XOYBACZD.



FICHE 29

Pour cette fiche, il est possible de réinvestir le raisonnement de la fiche 28 , mais c'est l'occasion pour un élève astucieux d'utiliser la droite des milieux dans le triangle.

La démonstration de l'égalité des côtés du polygone obtenu devient alors très simple. Nous admettrons alors que cet hegagone est régulier sans poser la question des angles.

C'est une activité dans laquelle le coup d'œil et l'intuition des élèves conduisent ceux-ci à une solution acceptable pour peu qu'ils sachent justifier l'égalité des côtés de l'hexagone.

FICHES 30 et 31

Ces activités sont difficiles pour les élèves, et seules les précisions supplémentaires données par le professeur permettront d'en atténuer la difficulté.

Il faut :

1) compléter le dessin du pavé droit,

2) dessiner l'intersection du plan cherché avec les faces du pavé,

3) se placer dans la face latérale qui contient le point E . Le plan EFG coupe cette face suivant une droite d passant par le point E ,

prolonger l'une des arêtes de l'entaille contenues dans cette face, et chercher son intersection avec la droite d ,

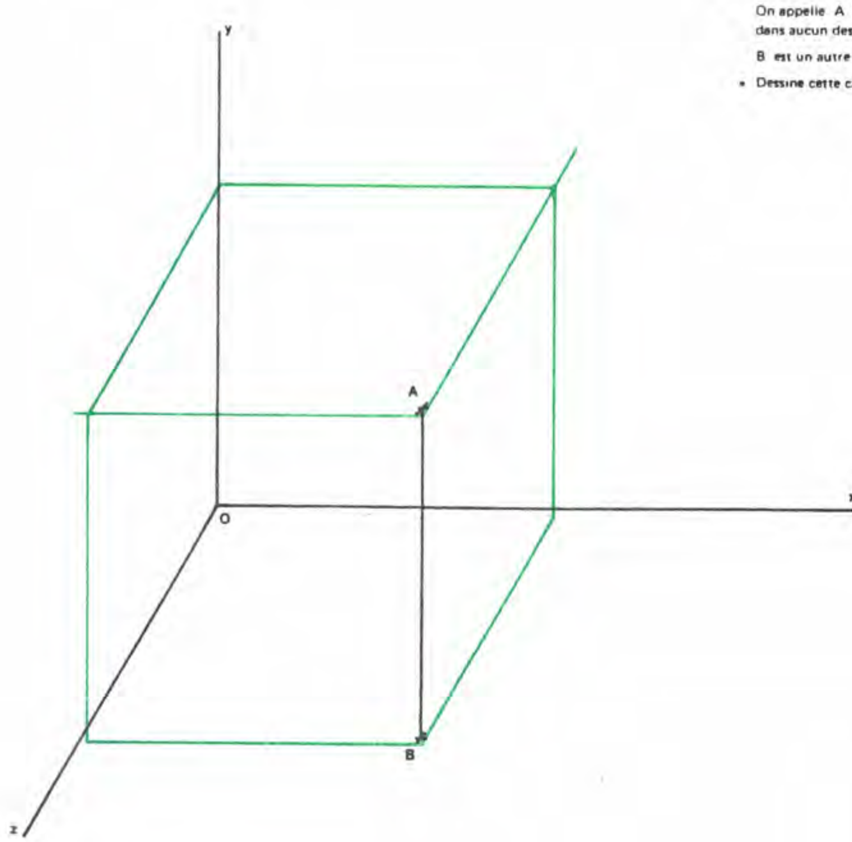
4) le point obtenu est à la fois dans le plan EFG et dans l'un des deux plans de l'entaille. Il permet de terminer facilement le dessin.

(33) Dans le coin de la salle de classe est placée une caisse ayant la forme d'un parallélépipède rectangle.

On appelle A le sommet de cette caisse qui n'est situé dans aucun des trois plans : (x0y), (x0z), (y0z).

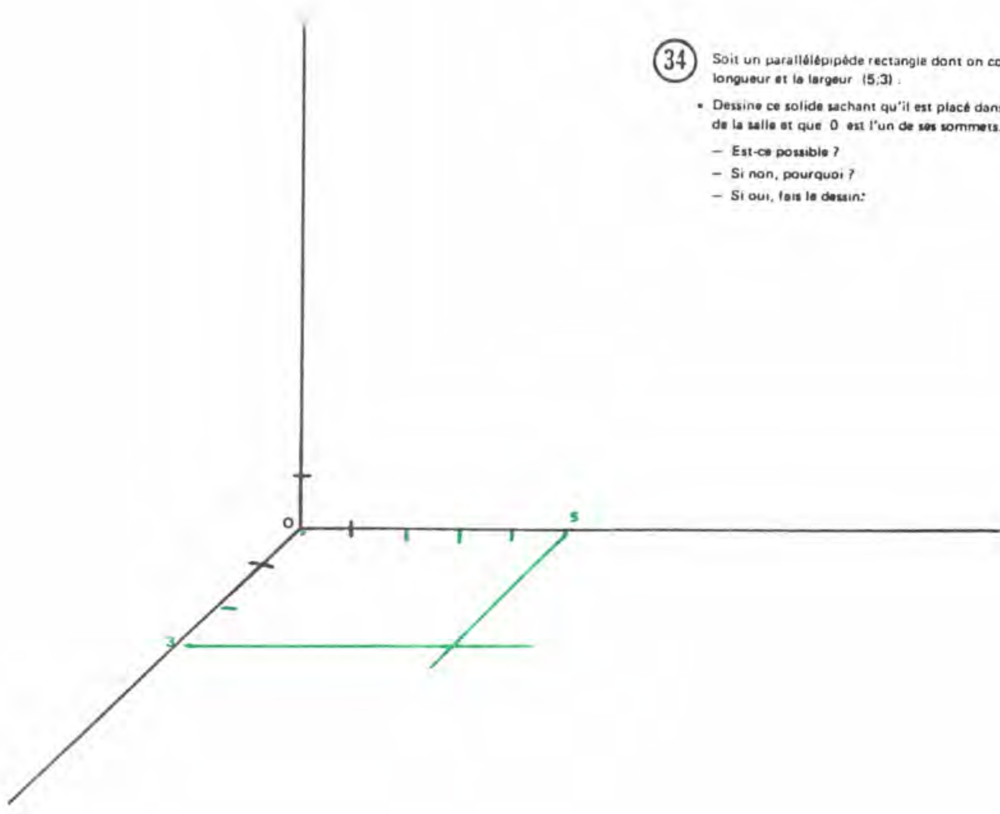
B est un autre sommet de la caisse, situé dans le plan (x0z).

- Dessine cette caisse.



(34) Soit un parallélépipède rectangle dont on connait la longueur et la largeur (5;3).

- Dessine ce solide sachant qu'il est placé dans l'angle de la salle et que 0 est l'un de ses sommets.
  - Est-ce possible ?
  - Si non, pourquoi ?
  - Si oui, fais le dessin.



FICHES 32 à 35

Pavé droit dans un trièdre

Objectif :

- *faire dessiner, par les élèves, une représentation d'un pavé droit, en perspective cavalière,*

- *le tracé d'un pavé droit nécessite un minimum de données.*

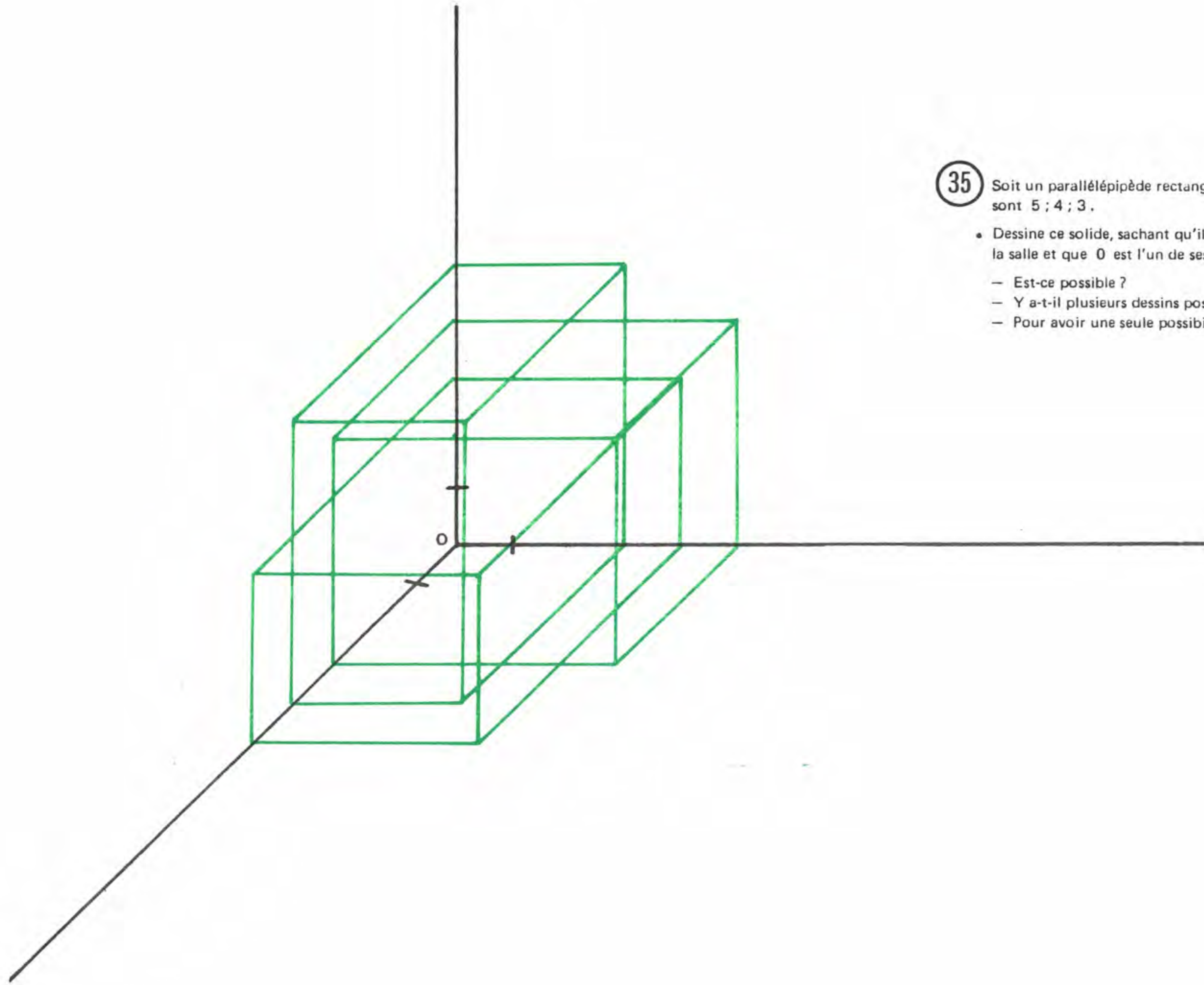
En particulier :

- *le trièdre précisant la direction des arêtes du pavé,*

- *les trois dimensions du pavé, ordonnées suivant les trois arêtes du trièdre.*

C'est une approche des coordonnées du sommet du pavé qui ne se trouve pas dans l'un des plans du trièdre.

Tout développement de cette notion serait abusif, cependant il semble qu'à cet endroit on puisse insister sur le caractère nécessaire et suffisant de certaines données.



35 Soit un parallélépipède rectangle dont les dimensions sont 5 ; 4 ; 3.

- Dessine ce solide, sachant qu'il est placé dans le coin de la salle et que O est l'un de ses sommets.
  - Est-ce possible ?
  - Y a-t-il plusieurs dessins possibles ?
  - Pour avoir une seule possibilité, que faudrait-il faire ?

FICHES 32 à 35

FICHE 32

Il s'agit de tracer la représentation d'un pavé droit. Pour aider les élèves, un trièdre précise les directions et les longueurs des arêtes du pavé. Pour tracer celui-ci, il suffit d'utiliser la propriété de parallélisme des arêtes.

C'est la première fois que les élèves tracent un pavé droit en perspective cavalière.

FICHE 33

Dessin d'un pavé droit

Il s'agit de reconstituer le dessin du pavé droit connaissant les deux sommets " les plus en avant " du dessin et la direction des trois arêtes non parallèles.

FICHES 34 et 35

Approche des coordonnées d'un point dans l'espace. Un trièdre est donné, qui précise les trois directions des arêtes non parallèles du pavé droit à dessiner ; chaque demi-droite est munie d'une unité.

FICHE 34 : La donnée de deux nombres est insuffisante pour tracer le pavé.

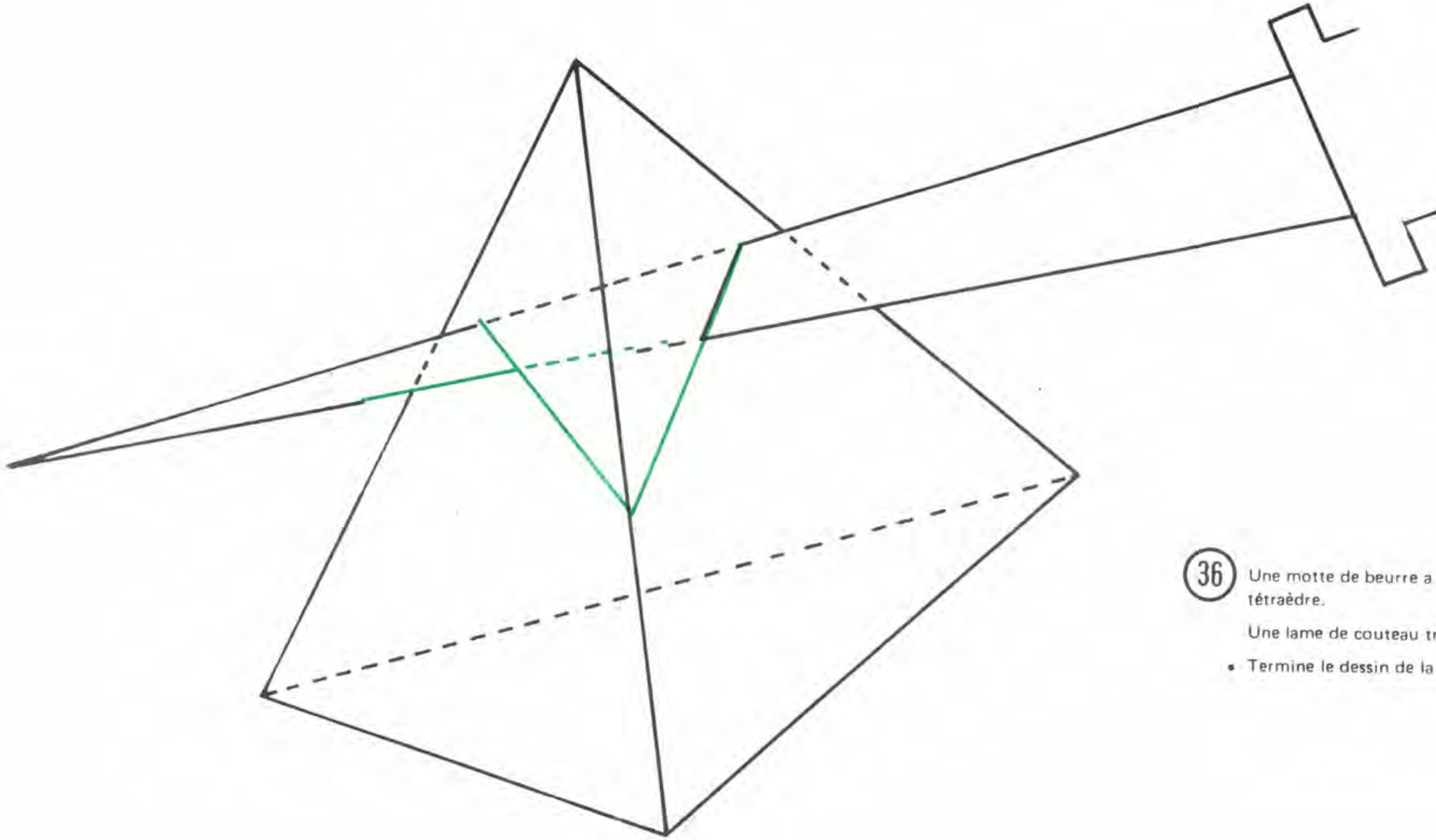
FICHE 35 : La donnée de trois nombres, non nuls, est nécessaire mais non suffisante.
Il est indispensable que chaque nombre soit affecté à une demi-droite précise pour avoir un pavé unique.

Nous sommes alors très près des coordonnées du sommet du pavé qui se trouve hors des plans du trièdre.

Chapitre 7 : SECTIONS II

Cette série (fiches 36 à 45) s'inscrit dans la progression précédente. On notera simplement quelques complications systématiques en ce qui concerne les intersections à construire, car elles nécessitent plus fréquemment la recherche d'éléments intermédiaires.

Noter qu'en plus de l'obligation de s'approprier la notion de pyramide, l'élève est confronté désormais à la manipulation de plans obliques ancrés à la figure uniquement par leurs rapports à d'autres plans obliques. Le plan horizontal est le seul qui permette encore une relative stabilité à la lecture.



36 Une motte de beurre a la forme d'un tétraèdre.

Une lame de couteau traverse cette motte.

- Termine le dessin de la lame de couteau.

FICHE 36

La lame de couteau est une portion de plan ; terminer le dessin, c'est tracer les intersections de cette portion de plan avec les deux faces du tétraèdre. L'une de ces deux intersections est tracée sur la lame de couteau.

La sortie du bord arrière de la lame de couteau dans la face gauche du tétraèdre nous donne un point de l'autre intersection.

Si nous prolongeons l'intersection de la lame avec la face droite de ce tétraèdre, elle coupe l'arête avant du solide en un point qui est à la fois :

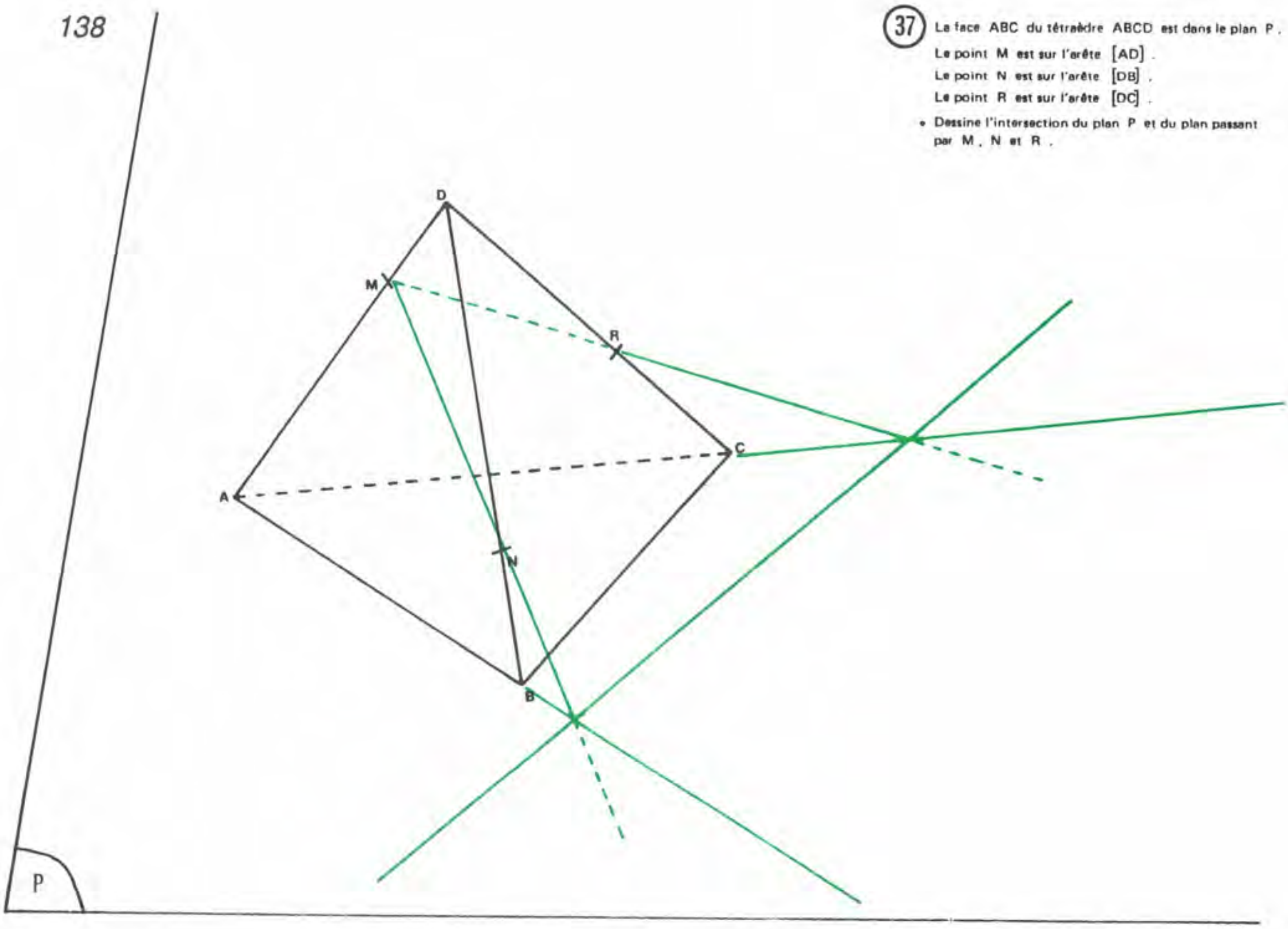
- *dans le plan de la face avant gauche du tétraèdre,*
- *dans le plan de la lame de couteau.*

Nous avons donc deux points du plan de la lame de couteau et de la face avant gauche du tétraèdre.

Traçons la droite ainsi définie, il suffit de terminer le dessin de la lame de couteau (en respectant les conventions de trait) .

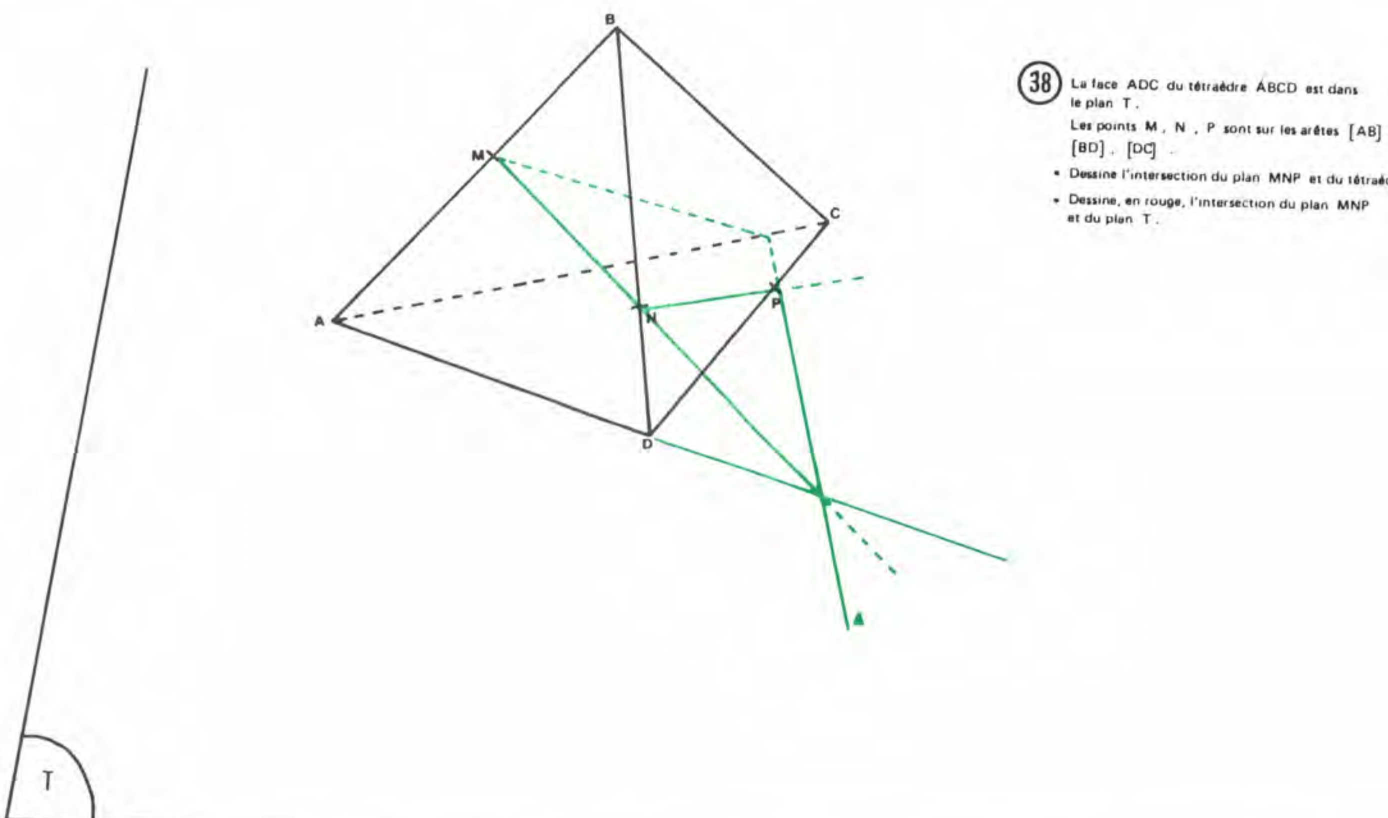
(37) La face ABC du tétraèdre ABCD est dans le plan P.
Le point M est sur l'arête [AD].
Le point N est sur l'arête [DB].
Le point R est sur l'arête [DC].

- Dessine l'intersection du plan P et du plan passant par M, N et R.



(38) La face ADC du tétraèdre ABCD est dans le plan T.
Les points M, N, P sont sur les arêtes [AB], [BD], [DC].

- Dessine l'intersection du plan MNP et du tétraèdre.
- Dessine, en rouge, l'intersection du plan MNP et du plan T.



FICHE 37

L'intersection du plan P et du plan (MNR) est une droite, il suffit donc d'avoir deux points de cette droite.

La droite (MR) est dans le plan (ADC), elle coupe la droite (AC) au point K.

Le point K est sur la droite (AC) donc dans le plan P.

Le point K est sur la droite (MR) donc dans le plan (MNR), donc le point K est un point de l'intersection du plan P et du plan (MNR).

De même la droite (MN) coupe la droite (AB) en un point L. Ce point L est à la fois dans le plan P et dans le plan (MNR) donc c'est un point de l'intersection du plan P et du plan (MNR).

La droite (KL) est l'intersection du plan P et du plan (MNR).

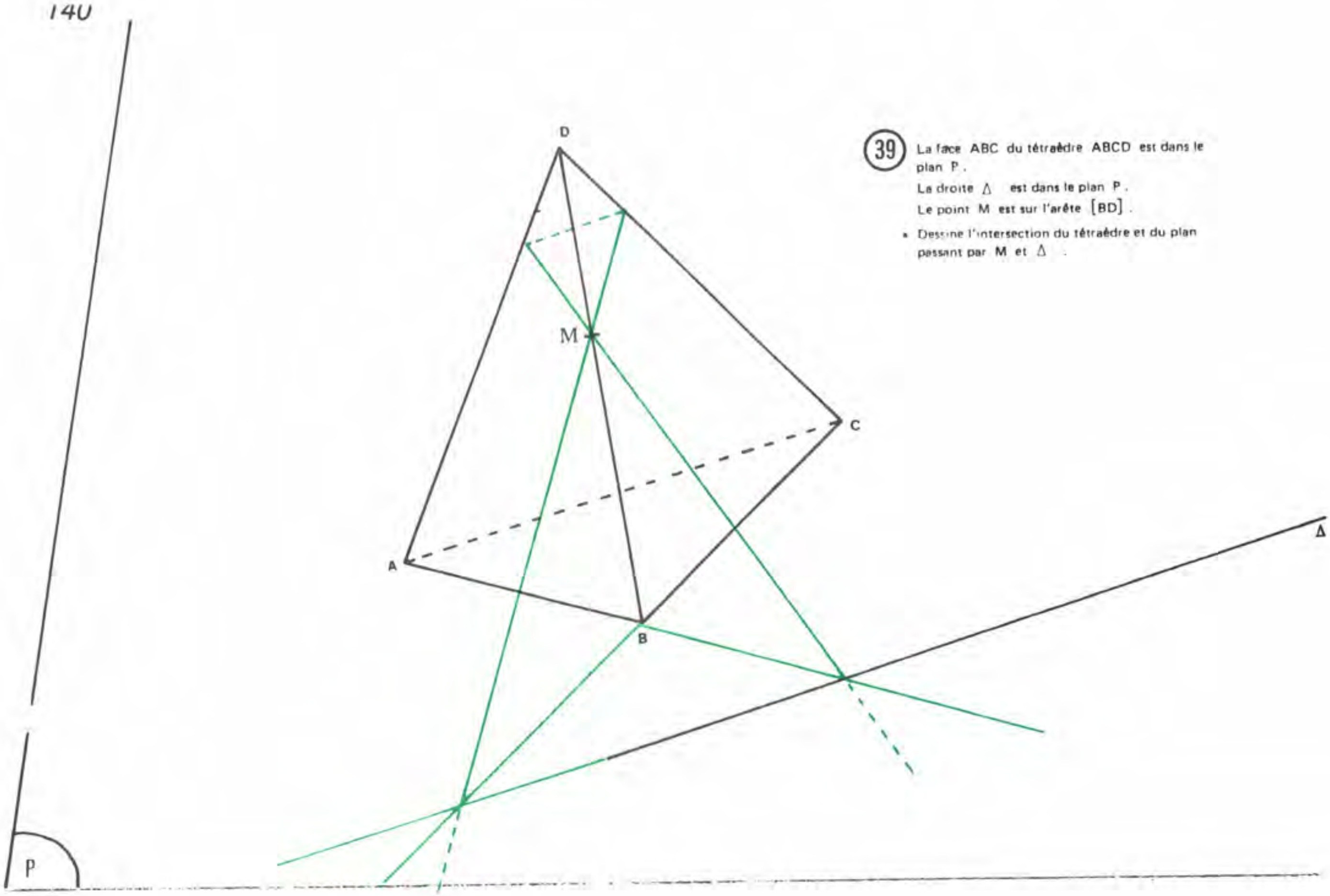
FICHE 38

Même exercice que la fiche 37.

La droite (MN) coupe la droite (AD) au point K.

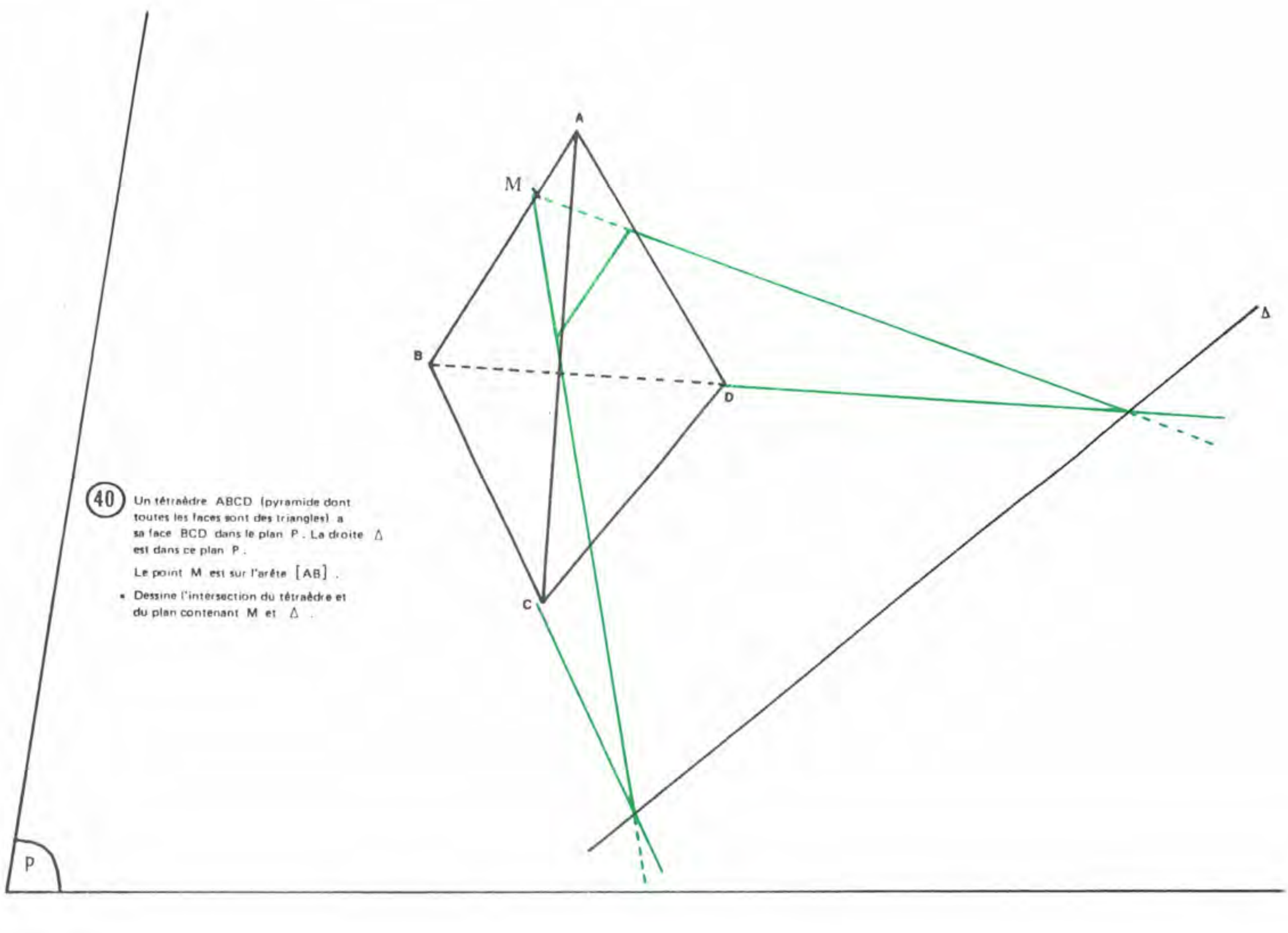
La droite (KP) est dans le plan T, elle coupe la droite (AC) au point L.

(M,N,P,L) est l'intersection du plan (MNP) avec la pyramide.
La droite (PL) est l'intersection du plan T et du plan (MNP).



39 La face ABC du tétraèdre ABCD est dans le plan P.
La droite Δ est dans le plan P.
Le point M est sur l'arête [BD].

- Dessine l'intersection du tétraèdre et du plan passant par M et Δ.



40 Un tétraèdre ABCD (pyramide dont toutes les faces sont des triangles) a sa face BCD dans le plan P. La droite Δ est dans ce plan P.
Le point M est sur l'arête [AB].

- Dessine l'intersection du tétraèdre et du plan contenant M et Δ.

FICHE 39

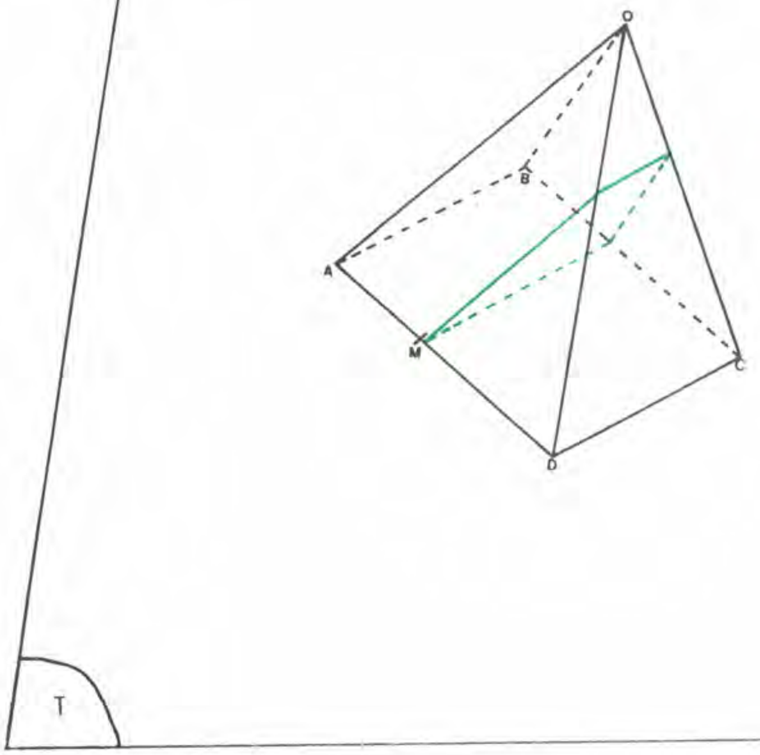
Soit $\mathscr{U}$ le plan contenant le point M et la droite Δ . Les droites (BC) et Δ , qui sont dans le plan P , se coupent au point K . La droite (MK) est dans le plan $\mathscr{U}$ et dans le plan (DBD) , cette droite coupe la droite (DC) au point N . Le point N est alors le point d'intersection du plan $\mathscr{U}$ et de l'arête CD .

De même la droite (AB) coupe la droite Δ au point L et la droite (ML) coupe la droite (AD) au point R .

Le triangle MNR est l'intersection du plan $\mathscr{U}$ et de la pyramide.

FICHE 40

Réinvestissement de la méthode utilisée dans la fiche 39 . C'est l'occasion de faire écrire aux élèves la suite des tracés et de les justifier.



(41) La face ABCD de la pyramide OABCD est dans le plan T

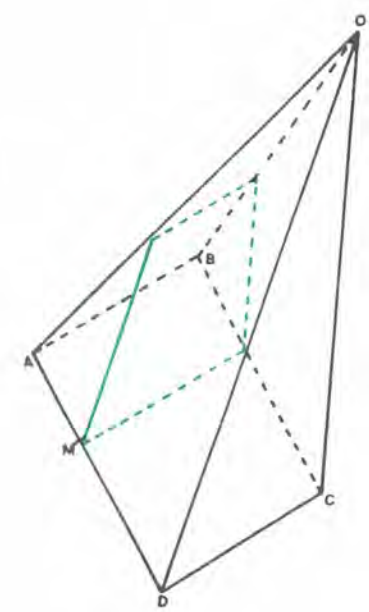
Le point M est sur l'arête [AD]

- Dessine l'intersection de la pyramide et du plan qui :
  - passe par M
  - est parallèle à la face OAB.

(42) La face ABCD de la pyramide OABCD est dans le plan T.

Le point M est sur l'arête [AD].

- Dessine l'intersection de la pyramide et du plan passant par M et parallèle à la face ODC.



FICHE 41

Appelons $\mathscr{U}$ le plan qui passe par le point M , qui est parallèle au plan de la face OAB .

L'intersection de ce plan $\mathscr{U}$ et du plan (ABCD) est la droite parallèle à la droite (AB) qui passe par le point M . Elle coupe la droite (BC), au point L .

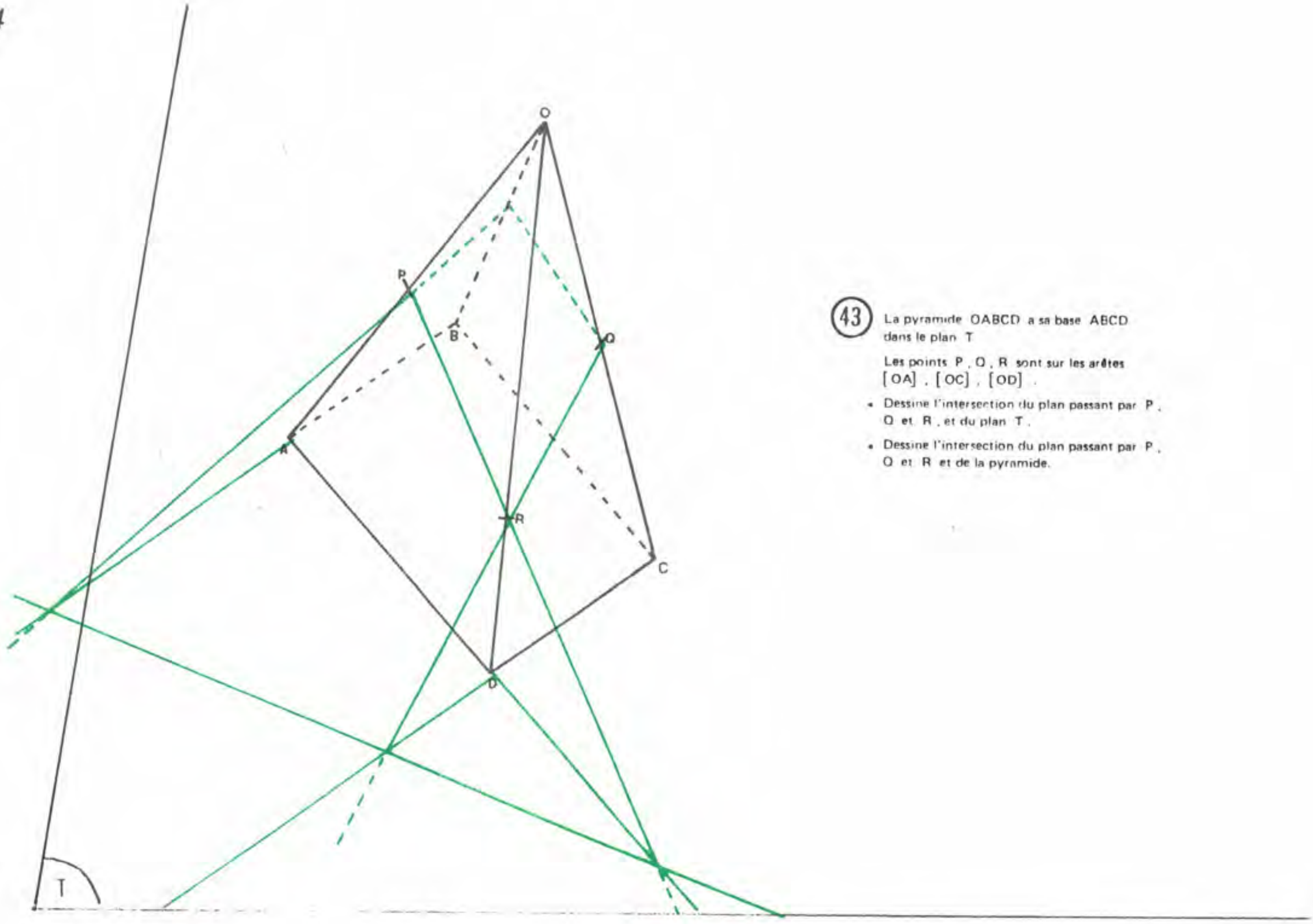
L'intersection du plan $\mathscr{U}$ et du plan de la face (OBC) est la droite parallèle à la droite (OB) , qui passe par le point L . Elle coupe la droite (OC) au point N .

L'intersection du plan $\mathscr{U}$ et du plan de la face (OAD) est la droite parallèle à la droite (OA) , qui passe par le point M . Elle coupe la droite (OD) en K .

Le quadrilatère (K,M,L,N) est l'intersection du plan $\mathscr{U}$ et de la pyramide.

FICHE 42

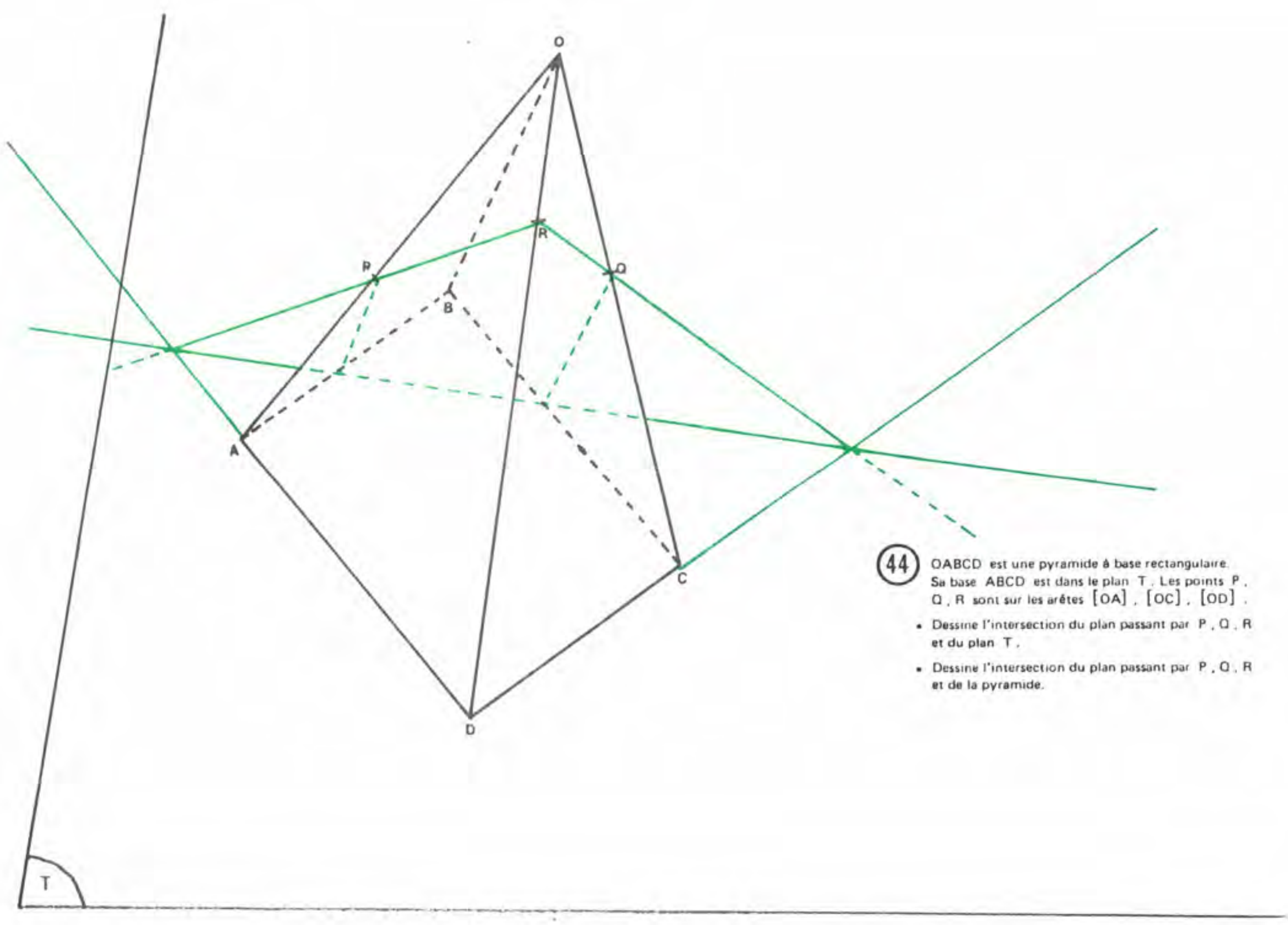
Réinvestissement de la méthode utilisée dans la fiche 41 .



(43) La pyramide OABCD a sa base ABCD dans le plan T.

Les points P, Q, R sont sur les arêtes [OA], [OC], [OD].

- Dessine l'intersection du plan passant par P, Q et R, et du plan T.
- Dessine l'intersection du plan passant par P, Q et R et de la pyramide.



(44) OABCD est une pyramide à base rectangulaire. Sa base ABCD est dans le plan T. Les points P, Q, R sont sur les arêtes [OA], [OC], [OD].

- Dessine l'intersection du plan passant par P, Q, R et du plan T.
- Dessine l'intersection du plan passant par P, Q, R et de la pyramide.

FICHE 43

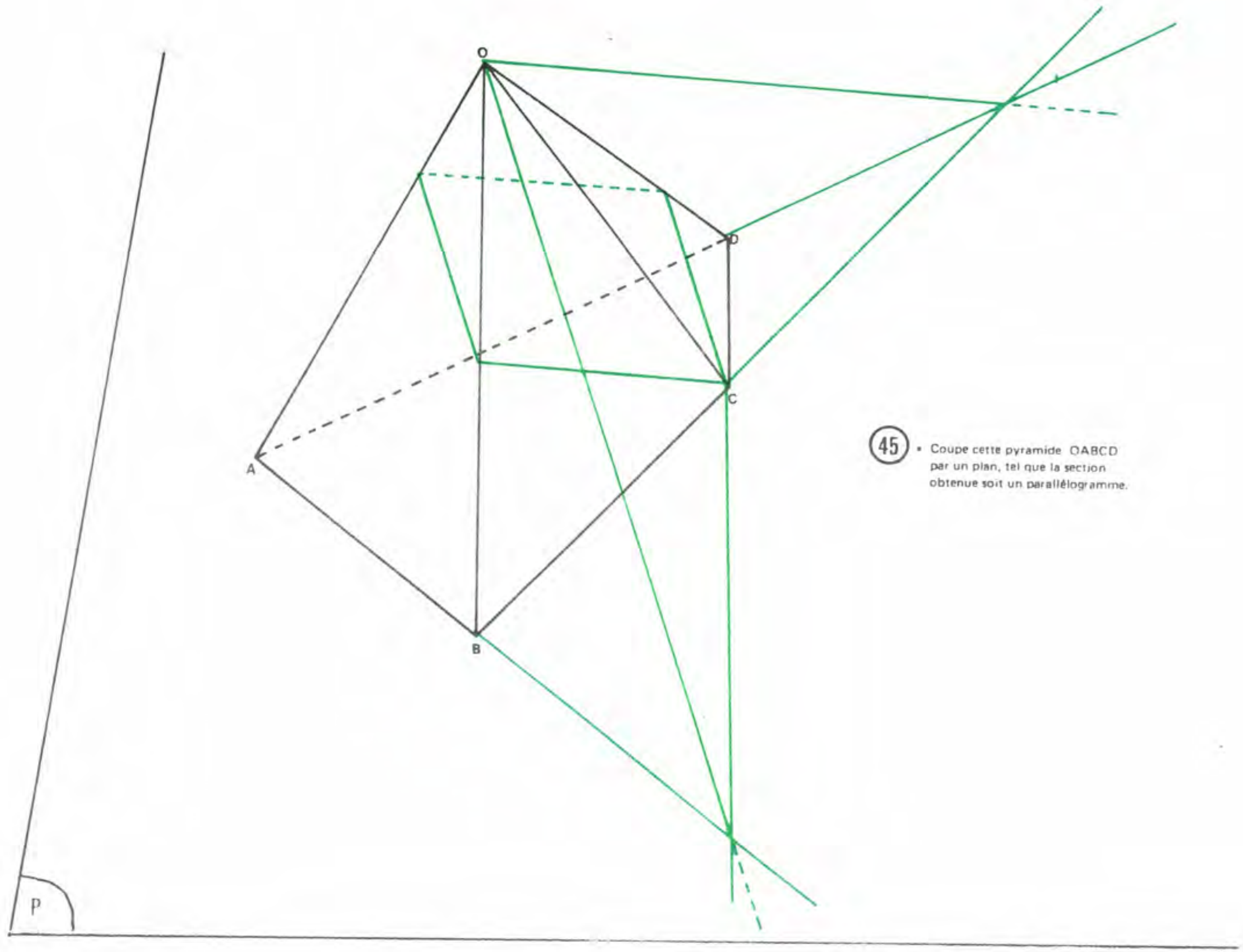
Les intersections des droites (QR) et (DC) puis des droites (PR) et (AD), sont deux points de la droite d, intersection du plan (PQR) et du plan T.

Cette droite d coupe la droite (BC) au point L, la droite (LQ) coupe l'arête (OB) de la pyramide au point K.

Le quadrilatère (K,Q,R,P) est l'intersection de la pyramide et du plan (PQR).

FICHE 44

Même exercice que la fiche 43.



(45) • Coupe cette pyramide OABCD par un plan, tel que la section obtenue soit un parallélogramme.

FICHE 45

Exercice très difficile à n'aborder avec les élèves qu'avec une grande prudence et un travail préalable important.

1) Préliminaire

Règle à mettre en évidence :

Un plan coupe deux plans sécants suivant deux droites parallèles si et seulement si ce plan est parallèle à l'intersection des deux plans.

Ce théorème est aisément démontrable par un raisonnement par l'absurde.

Avec les élèves, il semble préférable de n'envisager que le cas où les deux intersections sont deux droites distinctes. La démonstration devient alors très simple, deux droites ou deux plans strictement parallèles n'ayant aucun point commun.

2) Réflexion avant tracé

Appelons $\mathcal{U}$ *un plan répondant à l'énoncé ; il coupe la pyramide suivant un parallélogramme, c'est-à-dire un quadrilatère ayant ses côtés opposés parallèles.*

Supposons que ce plan $\mathcal{U}$ *coupe les quatre faces (OAD) , (OAB) , (OBC) , (OCD) de la pyramide. Les intersections du plan* $\mathcal{U}$ *et des deux faces (OAD) et (OBC) sont parallèles, donc le plan* $\mathcal{U}$ *est parallèle à la droite d'intersection des deux plans (OAD) et (OBC) . Cette droite est parallèle aux deux côtés du parallélogramme qui seront tracés sur les faces (OAD) et (OBC) . De même, l'intersection des deux plans (OAB) et (OCD) est une droite parallèle aux deux côtés du parallélogramme, qui seront tracés dans ces deux faces (OAB) et (OCD) .*

3) Tracé

- *Il faut tracer la droite d'intersection des plans (OAB) et (OCD) :*
  - *elle passe par le point O ,*
  - *les droites (AB) et (CD) du plan P se coupent au point K . La droite (OK) est l'intersection des deux plans (OAB) et (OCD) .*

- *Pour tracer l'intersection des plans (OAD) et (OCB) nous utiliserons la même méthode. Le point O appartient à cette intersection. Les droites (AD) et (BC) du plan P se coupent au point L . La droite (OL) est l'intersection des plans (OAD) et (OCB) . Le plan $\mathscr{U}$ cherché est alors parallèle au plan (OKL) .*

- *Pour tracer l'intersection du plan $\mathscr{U}$ et de la pyramide, nous devons choisir sur l'une des arêtes OA , OB , OC , OD , un point M pour commencer le tracé. Il faut s'assurer que le point choisi permettra un tracé correct et que les droites parallèles aux droites OK et OL coupent les arêtes de la pyramide. L'observation des droites (OK) et (OL) et une anticipation du dessin devraient permettre de choisir pour point M un point de l'arête OC .*

- *Par le point M , tracer sur la face (OCD) la droite parallèle à la droite (OK) ; elle coupe l'arête OD au point N .*

- *Par le point M , tracer sur la face (OCB) la droite parallèle à la droite (OL) ; elle coupe l'arête OB au point S .*

- *Par le point S , tracer sur la face (OAB) la droite parallèle à la droite (OK) ; elle coupe l'arête OA au point Q .*

- *Tracer la droite (NQ) ; cette droite est dans le plan $\mathscr{U}$ et dans le plan de la face (OAD) . Ce plan $\mathscr{U}$ est parallèle au plan (KOL) , donc la droite (NQ) est parallèle à la droite (OL) .*

En résumé :

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l}(NQ)\,//\,(OL)\\ (MS)\,//\,(OL)\end{array}\right\} \text{ donc } (NQ)\,//\,(MS) \\ \\ \left.\begin{array}{l}(MN)\,//\,(OK)\\ (QS)\,//\,(OK)\end{array}\right\} \text{ donc } (MN)\,//\,(QS)\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{donc } (M,N,Q,S)\\ \text{est un parallélogramme}\end{array}$$

Remarque :

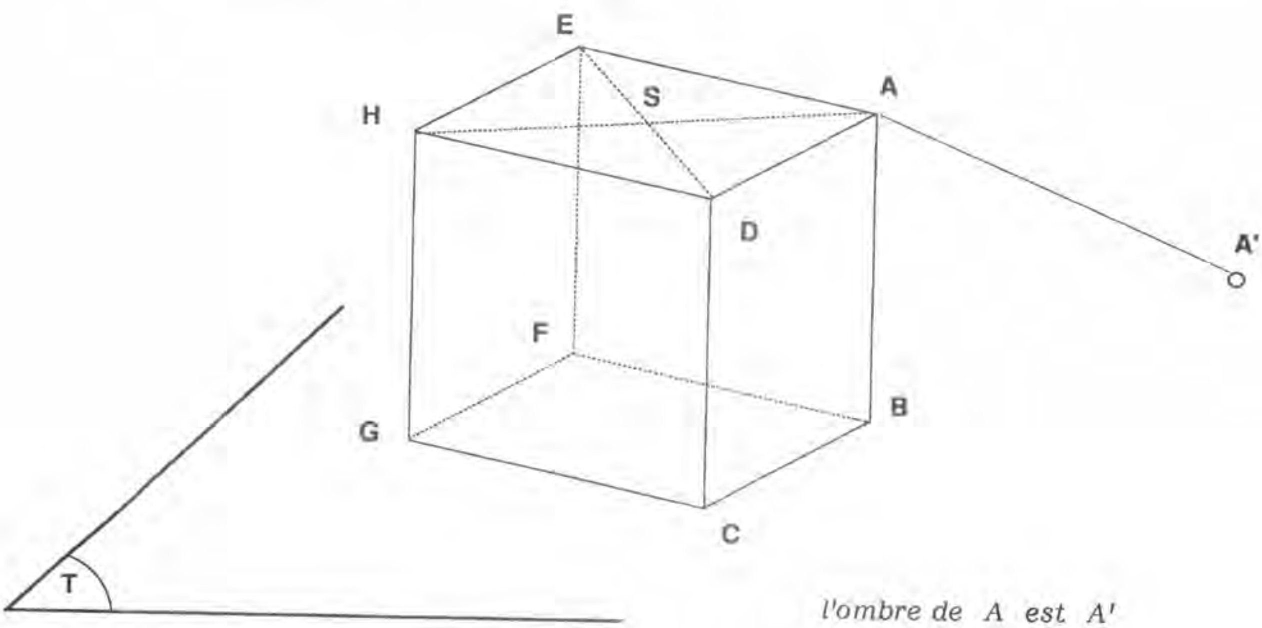
. *Il existe une famille de parallélogrammes répondant à la question. Une étude plus précise et plus complète peut être menée par le professeur ; elle ferait intervenir l'intersection (KL) du plan (OKL) avec le plan P et l'intersection du plan $\mathcal{U}$ avec le plan P , celle-ci étant une droite parallèle à la droite (KL) . Le choix de cette droite entre le point C et la droite (KL) donne tous les plans $\mathcal{U}$ possibles et tous les points M de l'arête OC qui conviennent.*

. *Il est possible de déterminer d'autres familles de parallélogrammes en appariant d'une autre manière les faces de la pyramide.*

Chapitre 8 : LA PROJECTION

Les activités des fiches 46 à 75 sont des problèmes simples de déterminations précises d'ombres solaires portées par des solides sur le plan horizontal. Il convient cependant de noter que la " simplicité " est en fait une notion toute relative ici ... et que de nombreux phénomènes interviennent pour rendre l'exercice difficile, donc enrichissant.

Considérons par exemple l'exercice type :



l'ombre de A est A'

- *déterminer l'ombre du cube sur le plan horizontal*
- *placer l'ombre de S*

fig. 41

Pour la plupart des élèves, le résultat est très difficile à imaginer à l'avance et ce n'est d'ailleurs qu'avec un certain entraînement que l'on peut vraiment se faire une idée assez précise de l'ombre que l'on doit obtenir. On peut dire en effet que l'énoncé oblige à une remise en cause presque totale de la lecture instinctive des figures de géométrie dans l'espace : d'abord la direction QQ' des rayons lumineux n'est pas suggérée de façon évidente par la figure, mais il s'agit surtout d'une direction " arbitraire ", dans la mesure où l'on a l'habitude de privilégier les horizontales et verticales. Ici, au contraire l'axe de projection n'est en rien rapporté aux droites déjà présentes dans le dessin. Dès lors la " vision " que demanderait le problème suppose une sorte de dédoublement de l'observateur, et c'est un exercice hors de portée de la plupart des élèves. Nous retrouvons ici, lorsqu'il s'agit de se convaincre de la vérité du résultat, un " conflit " ***analogue à celui qui régit les activités de transfert*** *(cf. chapitre 5).* [1]

Il nous semble cependant beaucoup plus difficile à surmonter, car il est compliqué de surcroît par les considérations de " transparence " et " d'opacité " dont il faut bien tenir compte, si l'on veut tout à la fois délimiter le contour apparent et préciser l'ombre de points intérieurs, nécessaires aux constructions intermédiaires.

Cela étant, on est généralement conduit à travailler " en aveugle " , ***en s'appuyant sur des règles fiables.***

---

[1] Deux "attracteurs" sont en présence : le regard sur l'image et le regard [intérieur à la figure] dans la direction des rayons lumineux. Le conflit fonctionne ici selon le schéma de la figure 37 .

On notera le lien avec la figure 6 . Mais dans celle-ci un **troisième** attracteur doit être maîtrisé : le regard de l'œil dessiné, c'est-à-dire celui de l'observateur "en train de regarder" un dessin en perspective.

Comprendre "ce qui se passe quand on dessine en perspective" nous semble donc relever d'un conflit à **trois** attracteurs. Comme on sait, [cf. T] le fonctionnement ne relève plus du schéma précédent et c'est pour cela que l'apprentissage des règles de la perspective cavalière [du moins de la **raison** de ces règles nous paraît hors de portée des élèves.

En réalité, les éléments ne manquent pas pour résoudre le problème :

- *les segments verticaux se projettent tous suivant une même direction (donc ici celle de BA') , et la longueur de l'ombre est dans un rapport constant avec la hauteur,*

- *les segments horizontaux restent égaux et parallèles à eux-mêmes,*

- *les rayons solaires sont tous parallèles,*

- *l'image d'un objet horizontal (par exemple la face supérieure) s'obtient par une simple translation.*

Et on observera par ailleurs que la construction précise ***de très peu de points*** *suffit pour conclure. Mais c'est cette richesse même, aboutissant au fait que la découverte du résultat ne passe jamais par une cheminement unique, c'est cette richesse qui constitue le plus souvent une nouvelle source de conflits, en obligeant l'élève à choisir une démarche et à s'y tenir.*

Le professeur devra donc considérer que la plupart de ces exercices sont en fait difficiles et demandent beaucoup de soin, que ce soit dans le dessin ou dans l'argumentation.

Nous conseillons pour notre part d'établir au préalable avec les élèves un petit nombre de règles simples sur les ombres, à mettre en œuvre systématiquement ***dès les premières fiches*** *de façon à ce que les constructions puissent être simplifiées peu à peu, à partir d'une base sûre.*

Il suffit en effet de savoir que, dans une ombre solaire :

- *un segment horizontal a pour ombre sur un plan horizontal un segment parallèle, de même longueur,*

- *deux segments verticaux ont des ombres parallèles.*

Ces deux constatations pourront être faites en observant des ombres réelles (fenêtres, échelles, barrières, séchoirs, etc.) . Une expérience simple *et convaincante pour établir ces règles dans l'esprit de nos élèves pourra même être conduite en collaboration étroite avec le professeur de physique.*

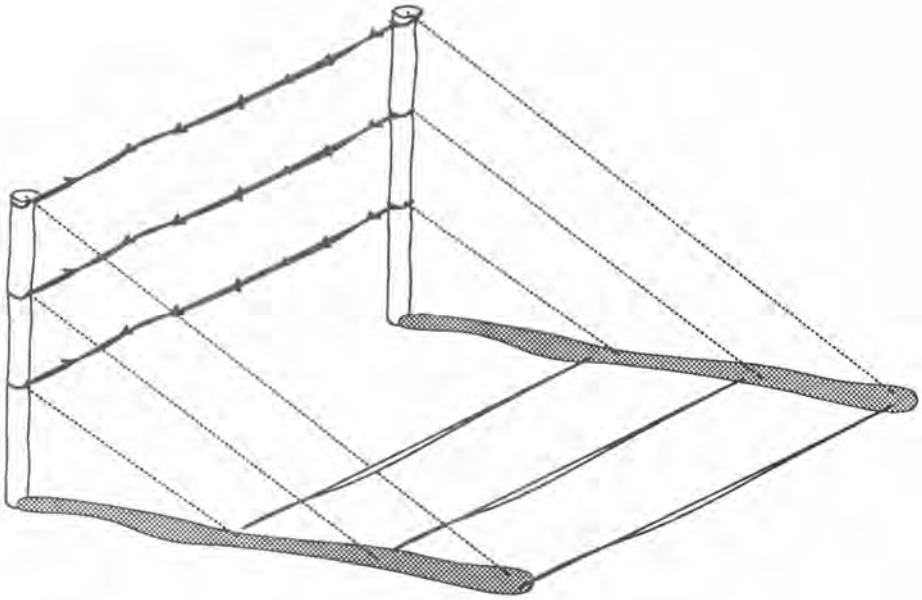


fig. 42

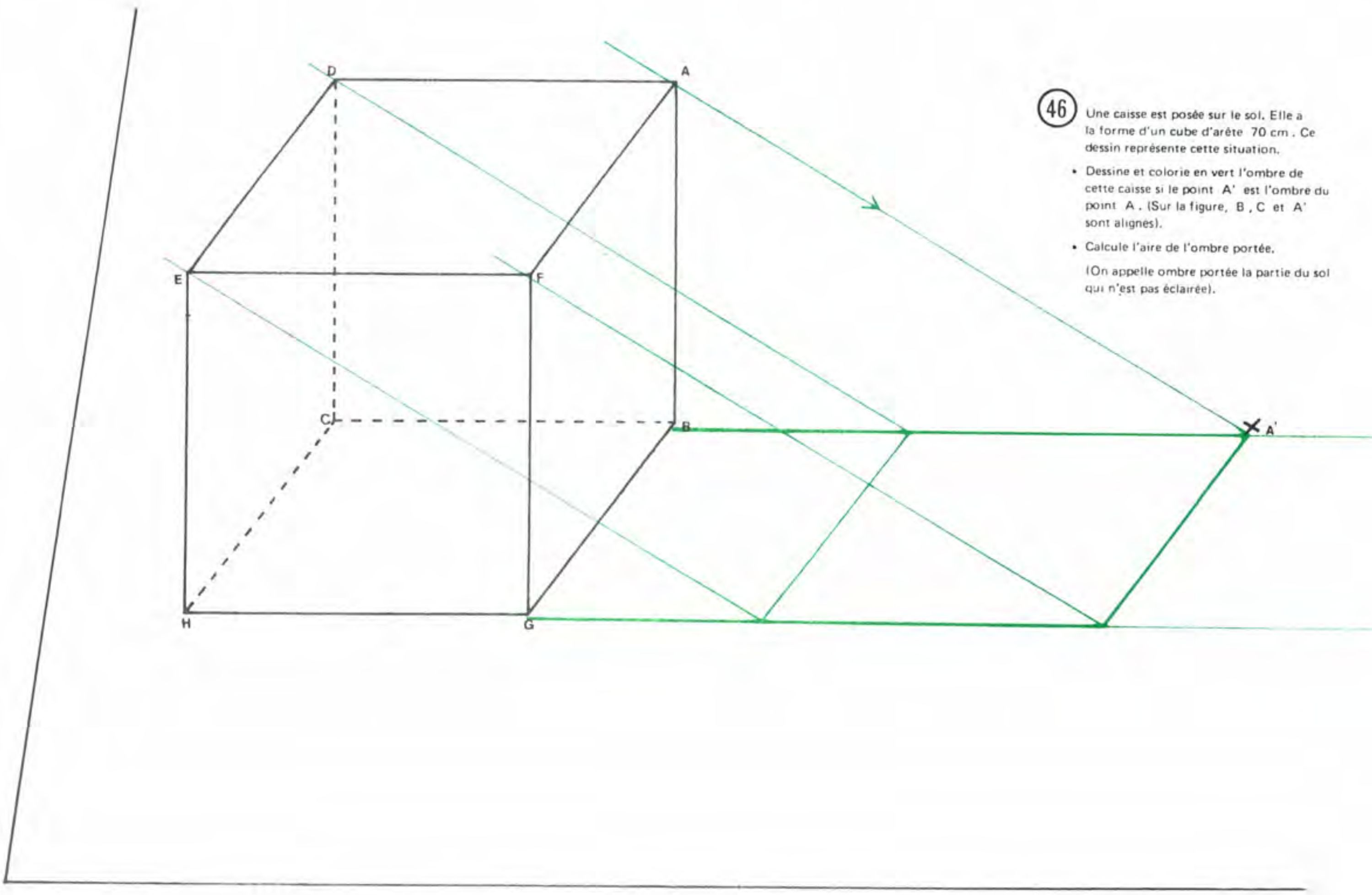
Il est facile, par exemple, d'utiliser deux bâtons bien droits de 1,20 m de longueur, de gros clous de charpentier, une ficelle suffisamment épaisse ... et le soleil.

Sur un espace plat horizontal, on plantera verticalement les deux bâtons (l'usage du fil à plomb est indispensable) , puis on fichera, à un mètre du sol, un gros clou dans chacun des bâtons, de façon à tendre entre ceux-ci une grosse ficelle. En recommençant de même à 80 cm du sol, puis à 50 cm , on obtient une situation comme celle qui est représentée par la figure.

Il est alors possible de constater les parallélismes évoqués plus haut, mais aussi de tendre des ficelles entre chaque clou et son ombre pour mettre en évidence le parallélisme des rayons solaires.

Comme on le verra dans les commentaires accompagnant chacune des fiches, ces observations suffisent pour tous les exercices.

Signalons pour terminer que certaines activités sont prolongées par des calculs d'aires à propos des ombres portées. Notre premier but est bien entendu de faire mettre en évidence la nature géométrique de celles-ci, en forçant à une lecture synthétique de la figure achevée. Ces questions permettent de plus de susciter d'intéressantes réflexions sur la notion de précision des mesures.



46 Une caisse est posée sur le sol. Elle a la forme d'un cube d'arête 70 cm. Ce dessin représente cette situation.

- Dessine et colorie en vert l'ombre de cette caisse si le point A' est l'ombre du point A. (Sur la figure, B, C et A' sont alignés).
- Calcule l'aire de l'ombre portée.

(On appelle ombre portée la partie du sol qui n'est pas éclairée).

FICHE 46

1) La première partie de cette fiche consiste à tracer l'ombre du cube (A,B,C,D,E,F,G,H) sur le plan de la face de la base (B,G,H,C).

- le point A' est l'ombre du point A ,

- le point F', ombre du point F , est tel que la droite (GF') est parallèle à la droite (BA'), et la droite (A'F') est parallèle à la droite (AF) donc à la droite (BG). (Nous utilisons les deux règles constatées dans l'expérience précitée).

Nous construirons de même l'ombre de l'arête verticale DC , puis celle de l'arête verticale HE , nous obtiendrons le quadrilatère (A',F',E',D'). Il est alors très simple de démontrer que (A',F',E',D') est superposable à (A,F,E,D). Il s'agit en effet d'une translation de vecteur AA'.

L'ombre du cube apparaît alors si nous ne considérons que les " traits extérieurs du dessin " , à l'exclusion des rayons solaires. L'ombre du cube est le polygone (C,B,A',F',G,H). La base du cube fait toujours partie de l'ombre.

Ici, il s'agit d'un cas particulier, l'ombre se compose du carré (C,B,G,H) et du rectangle (B,A',F',G) . (Les points C , B , A' sont alignés ; comme CBG est un angle droit, alors GBA' est un angle droit donc le parallélogramme (B,A',F',G) est un rectangle).

2) Dans une seconde partie, il est possible de calculer l'aire de l'ombre solaire de ce cube.

Elle se compose d'un carré de 70 cm de côté.

Sur le dessin, l'arête BG est représentée par un segment de longueur 7 cm : le coefficient de représentation est donc de 0,1 .

L'arête BG est représentée par un segment de longueur 4,9 cm : le coefficient de représentation est donc de $4,9/70 = 0,07$.

Le rectangle (B,A',F',G) a, sur le dessin, une longueur BA' (portée par la droite (BC)) de 11,8 cm et une largeur BG de 4,9 cm .

- *la longueur réelle BA' mesure donc 11,8/0,1 = 118 cm ,*
- *la largeur réelle BG mesure 70 cm , donc l'aire réelle de l'ombre portée du cube sur le plan horizontal est :*

$$(70 \times 70) + (117 \times 70) = 13\,160 \text{ cm}^2$$

Remarque :

De la qualité de la mesure de la longueur BA' dépend la précision du résultat. C'est une bonne occasion de revenir sur les approximations et de faire la différence entre :

- *résultats exacts,*
- *résultats approchés et approximations,*
- *résultats imprécis*

FICHE 47

Le tracé de l'ombre du cube utilise la méthode précédente. Il suffit de construire l'ombre des quatre sommets de la face supérieure du cube. Si nous codons le cube de la même manière que dans la fiche 46 , l'ombre se compose de la base du cube et de deux parallélogrammes (B,G,F',A') et (H,E',F',G). A l'intérieur de cette ombre le quadrilatère (A',F',E',D') est encore superposable au quadrilatère (A,F,E,D).

Calcul de l'aire réelle de l'ombre :

- *aire réelle de (C,B,G,H) en* cm^2 *:* $70 \times 70 = 4\,900\ cm^2$ *,*
- *aire réelle du parallélogramme (B,A',F',G) en* cm^2 *.*

  . *base BG = 70 cm ,*

  . *hauteur du parallélogramme : GK .*

    La hauteur GK est portée par la droite (HG) , perpendiculaire à la droite (BG) , donc à la droite (A'F').

    Sur cette droite (BG) le coefficient de représentation est 0,1 .

    Donc la mesure réelle de la hauteur de ce parallélogramme est : mesure de GK × 0,1 .

L'aire réelle du parallélogramme (B,A',F',G) en cm^2 *est alors :*

$$70 \times (\text{ mesure de } GK \times 0{,}1)$$

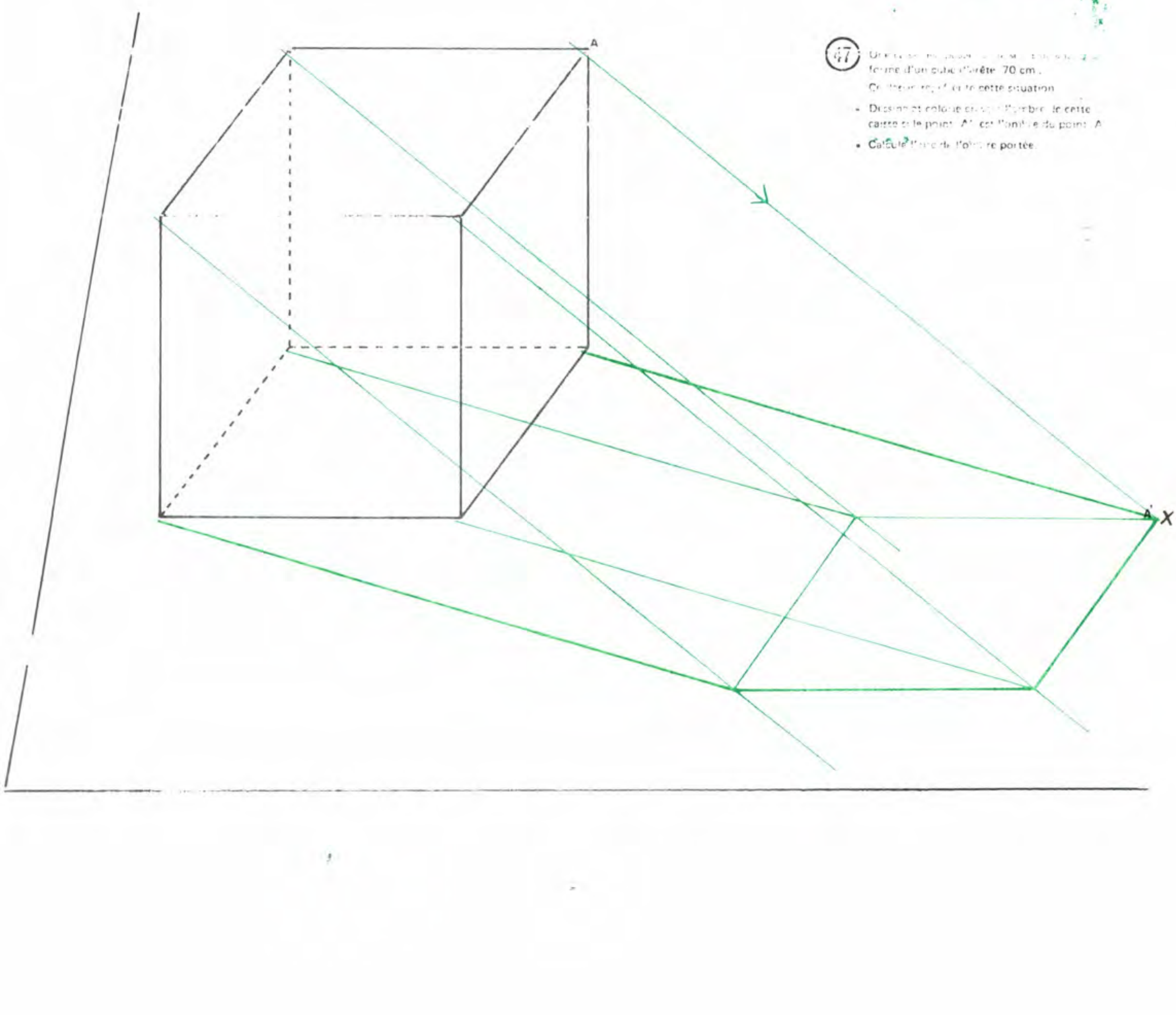
Pour le calcul de l'aire réelle du parallélogramme (H,E',F',G), la méthode est la même, mais la hauteur est portée par la droite (BG) , si nous utilisons le côté HG comme base du parallélogramme. Soit GI cette hauteur. Le coefficient de représentation sur cette droite est 0,07 , donc l'aire de ce parallélogramme en cm^2 *est :*

$$70 \times (\text{ mesure de } GI \times 0{,}07)$$

(47) [illegible] forme d'un cube d'arête 70 cm.

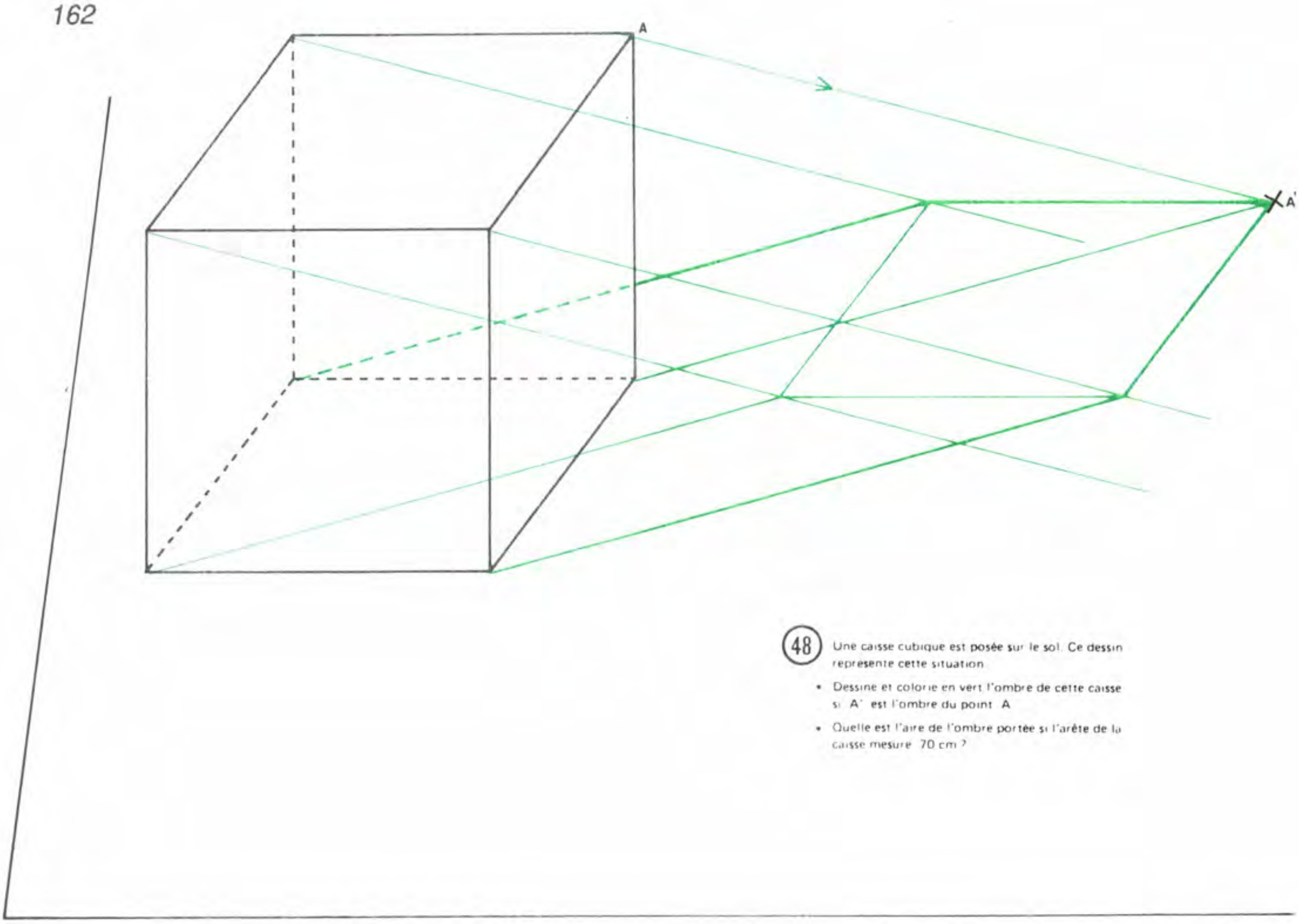
[illegible] cette situation

- Dessine et colorie [illegible] l'ombre de cette caisse [illegible] le point A' est l'ombre du point A
- Calcule l'[illegible] de l'ombre portée.



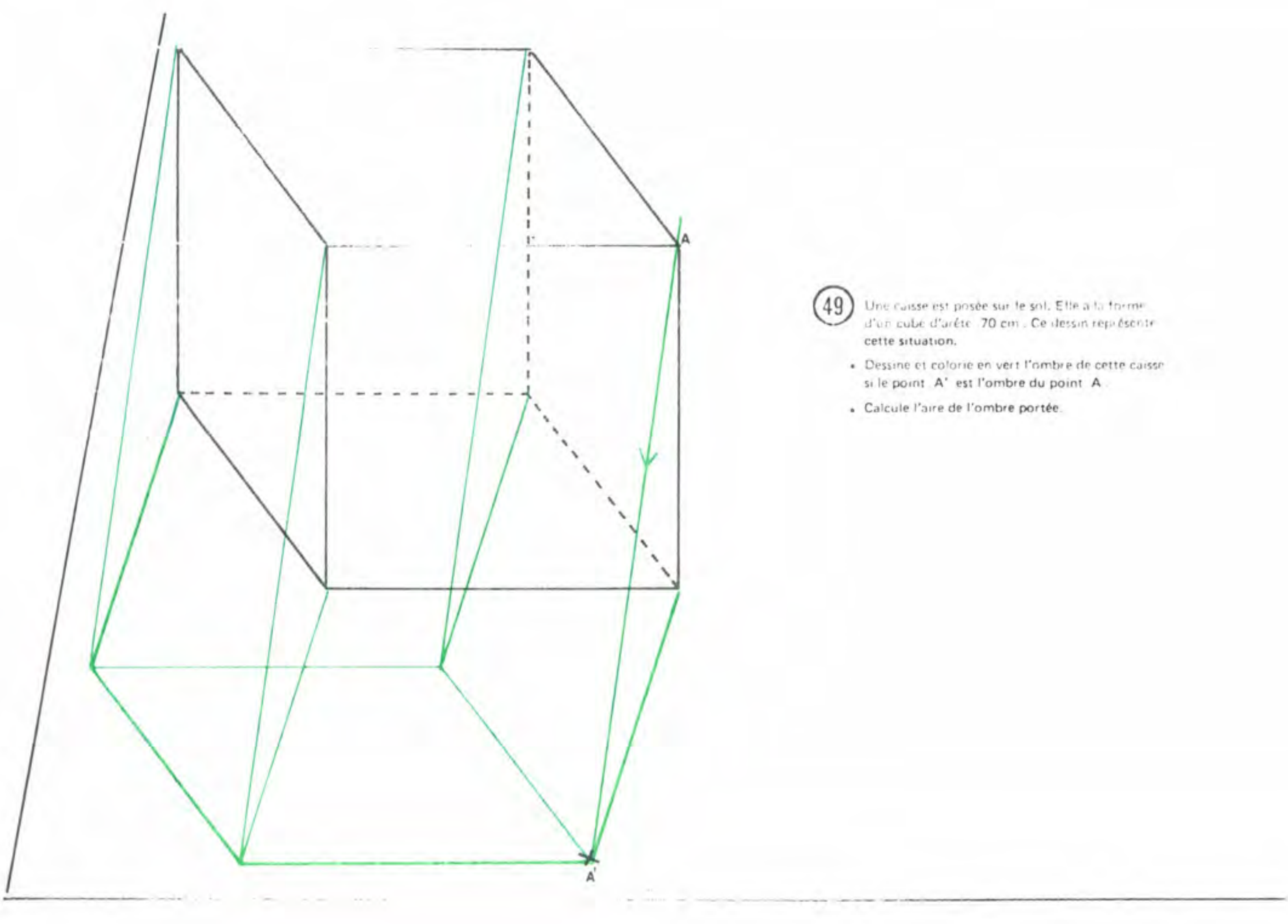
L'aire réelle de l'ombre est la somme de ces trois aires.

Les différents résultats obtenus par les élèves permettront, là encore, une discussion enrichissante sur l'incertitude des mesures et ses conséquences sur un résultat utilisant celles-ci.



(48) Une caisse cubique est posée sur le sol. Ce dessin représente cette situation.

- Dessine et colorie en vert l'ombre de cette caisse si A' est l'ombre du point A.
- Quelle est l'aire de l'ombre portée si l'arête de la caisse mesure 70 cm ?



(49) Une caisse est posée sur le sol. Elle a la forme d'un cube d'arête 70 cm. Ce dessin représente cette situation.

- Dessine et colorie en vert l'ombre de cette caisse si le point A' est l'ombre du point A.
- Calcule l'aire de l'ombre portée.

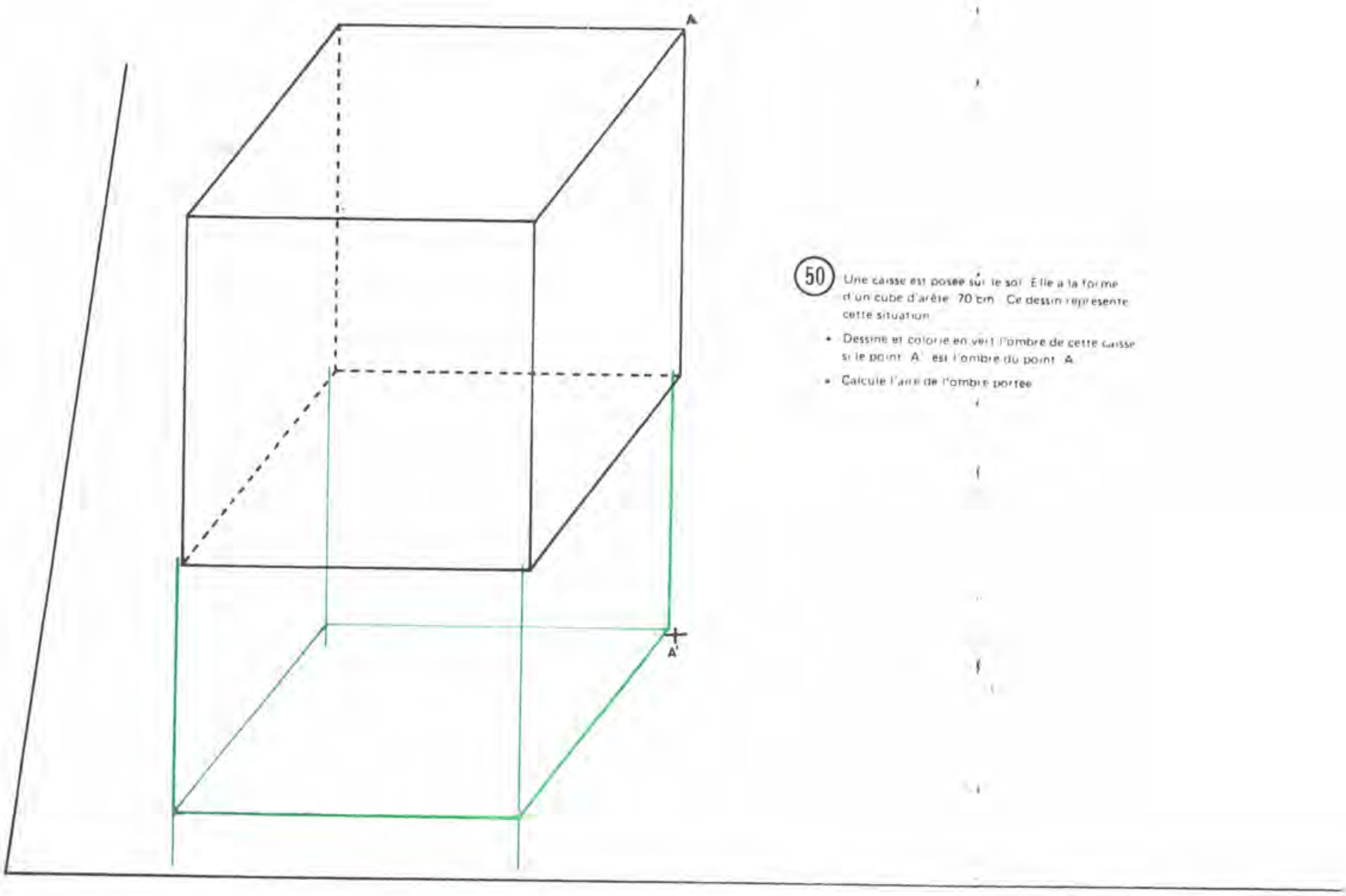
FICHES 48, 49, 50

Réinvestissement des deux fiches précédentes.

La position du point A' dans le plan horizontal varie à chaque dessin, la forme de l'ombre aussi, mais l'ombre de la face supérieure du cube reste superposable à celle-ci.

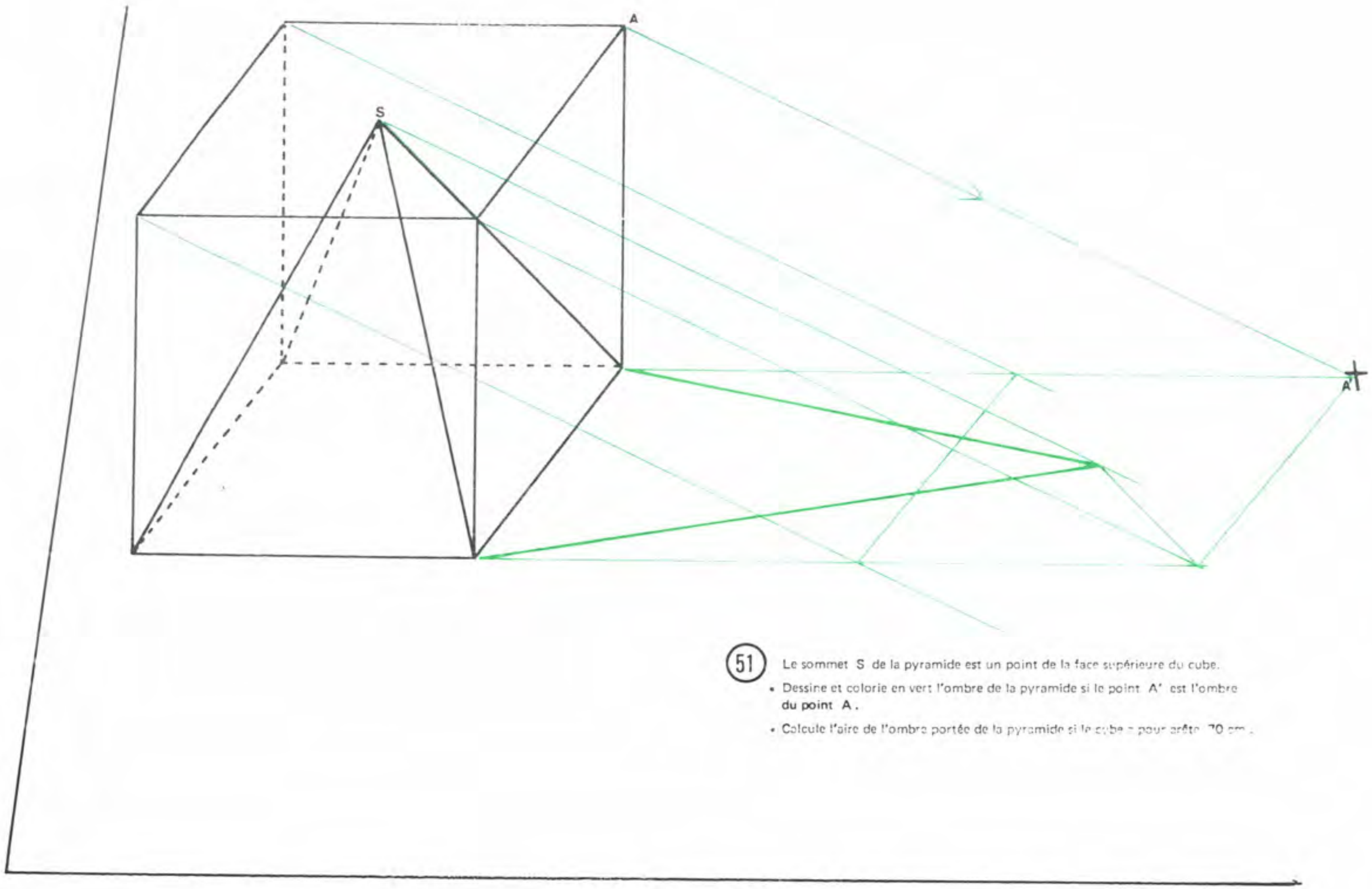
Le calcul de l'aire réelle nécessite l'utilisation de deux propriétés de l'énoncé qui ne sont pas visibles sur la figure :

- *l'orthogonalité des arêtes de la face inférieure du cube,*
- *les coefficients de représentation des arêtes, la figure étant une partie de l'énoncé.*



50 Une caisse est posée sur le sol. Elle a la forme d'un cube d'arête 70 cm. Ce dessin représente cette situation.

- Dessine et colorie en vert l'ombre de cette caisse si le point A' est l'ombre du point A.
- Calcule l'aire de l'ombre portée.



(51) Le sommet S de la pyramide est un point de la face supérieure du cube.

- Dessine et colorie en vert l'ombre de la pyramide si le point A' est l'ombre **du point A**.
- Calcule l'aire de l'ombre portée de la pyramide si le cube a pour arête 70 cm.

FICHE 51

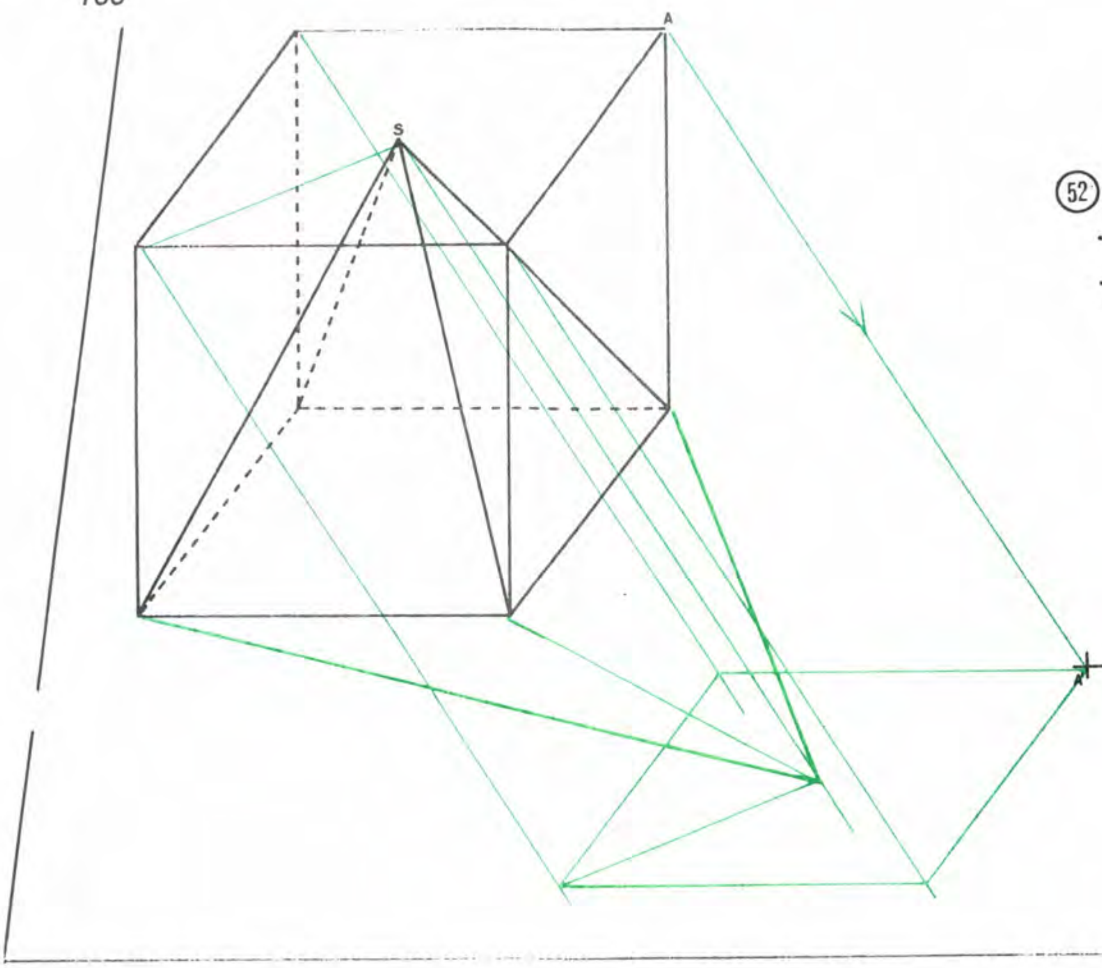
On peut facilement vérifier que le point S est le point d'intersection des diagonales de la face supérieure du cube.

Pour obtenir le point S' ombre du point S sur le plan horizontal, une méthode simple consiste à tracer l'ombre de cette face supérieure du cube, puis de tracer ses diagonales. Le point S' se trouve à leur intersection.

Une méthode plus originale consisterait à remarquer que la droite (AS) est une horizontale puisqu'elle est tracée dans le plan horizontal de la face supérieure du cube. Il est alors très simple de construire le point S' en traçant l'ombre du segment AS , c'est-à-dire son image dans la translation du vecteur AA'. (A,A',S',S) est un parallélogramme.

L'ombre de la pyramide se compose de la base de la pyramide et du triangle, de sommet S' et de base le côté du cube. Nous pouvons tracer la hauteur de ce triangle, elle est perpendiculaire à la base du triangle, donc parallèle à l'arête voisine de cette base.

Une mesure et un calcul analogue à celui des fiches précédentes donneront l'aire réelle de ce triangle, puis l'aire réelle de l'ombre de cette pyramide.

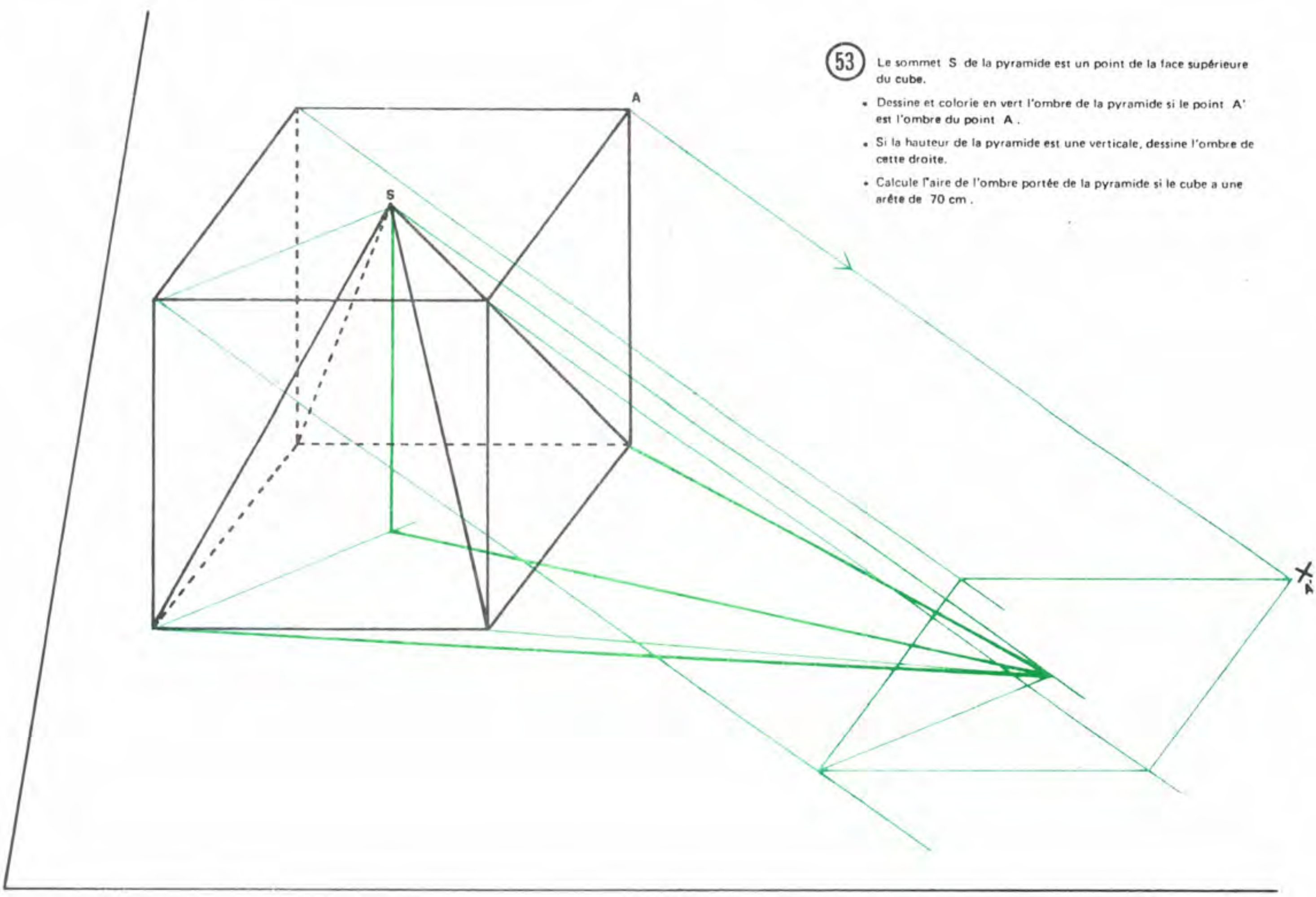


52 Le sommet S de la pyramide est un point de la face supérieure du cube.

- Dessine et colorie en vert l'ombre de la pyramide si le point A' est l'ombre du point A.
- Calcule l'aire de l'ombre portée de la pyramide si le cube a pour arête 70 cm.

53 Le sommet S de la pyramide est un point de la face supérieure du cube.

- Dessine et colorie en vert l'ombre de la pyramide si le point A' est l'ombre du point A.
- Si la hauteur de la pyramide est une verticale, dessine l'ombre de cette droite.
- Calcule l'aire de l'ombre portée de la pyramide si le cube a une arête de 70 cm.



FICHE 52

Même travail que pour la fiche 51 , mais l'ombre de la pyramide se compose de la base de la pyramide, et de deux triangles ayant pour base deux côtés de la base de la pyramide.

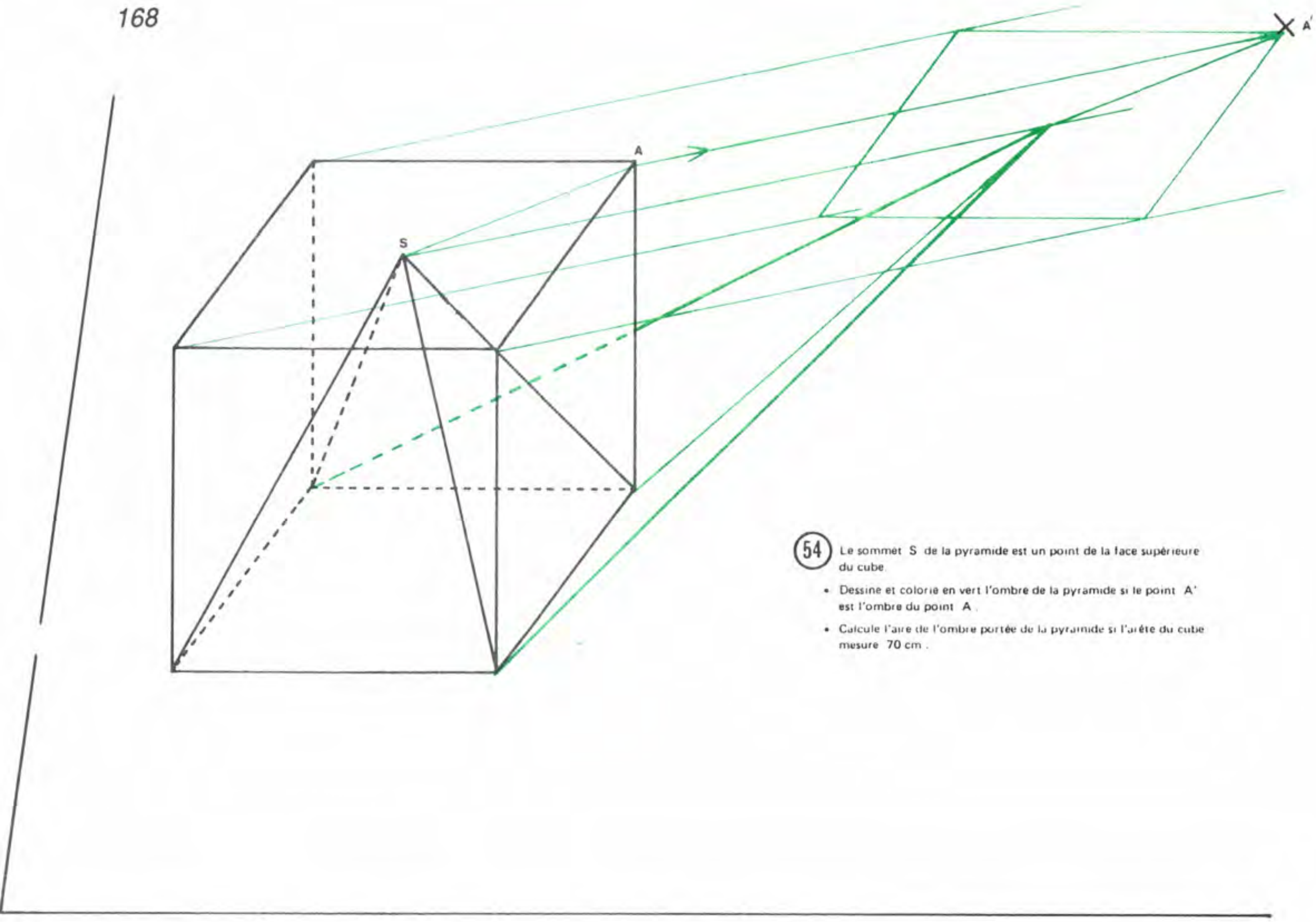
On tracera les hauteurs de ces deux triangles. Le calcul est alors analogue à celui des fiches précédentes pour les parallélogrammes.

FICHE 53

- Le dessin de l'ombre de la pyramide et le calcul de son aire réelle sont analogues à ceux de la fiche précédente.

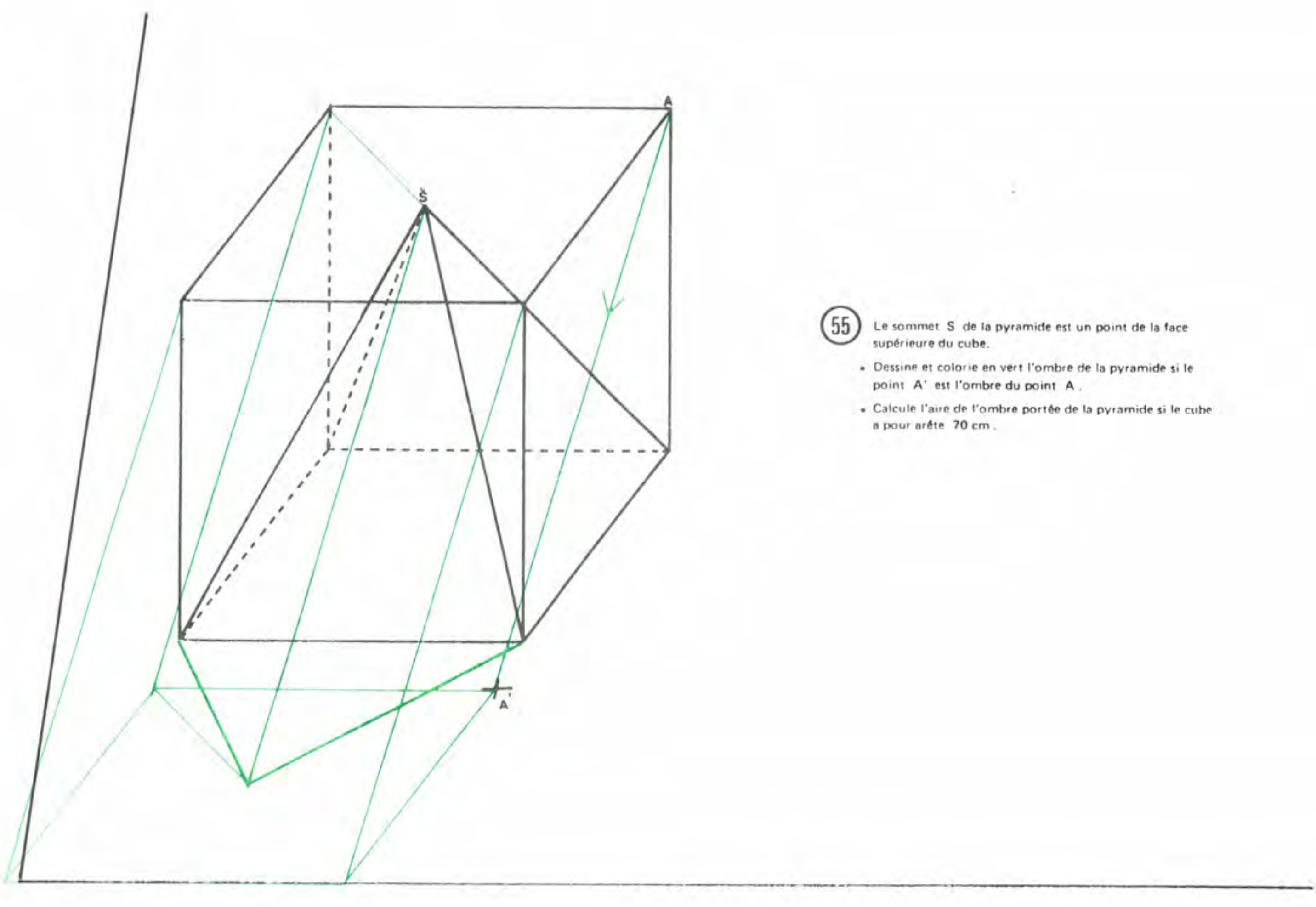
- La hauteur de cette pyramide est la verticale qui passe par le point S ; elle est parallèle aux arêtes verticales du cube, donc son ombre est parallèle à l'ombre de ces arêtes. Le point A' permet de tracer facilement l'ombre de l'arête verticale qui passe par le point A . Par le point S' nous traçons la droite parallèle à cette droite. Elle coupe la verticale passant par S en un point K . Ce point K est à la fois sur la hauteur de la pyramide et dans le plan horizontal de projection : c'est donc le pied de la hauteur SK de la pyramide.

On pourra vérifier que ce point K est le point d'intersection des diagonales de la base de la pyramide et expliquer l'expression " pyramide régulière ".



(54) Le sommet S de la pyramide est un point de la face supérieure du cube.

- Dessine et colorie en vert l'ombre de la pyramide si le point A' est l'ombre du point A.
- Calcule l'aire de l'ombre portée de la pyramide si l'arête du cube mesure 70 cm.



(55) Le sommet S de la pyramide est un point de la face supérieure du cube.

- Dessine et colorie en vert l'ombre de la pyramide si le point A' est l'ombre du point A.
- Calcule l'aire de l'ombre portée de la pyramide si le cube a pour arête 70 cm.

FICHES 54, 55, 56

Ces fiches permettent un réinvestissement des méthodes introduites dans les fiches précédentes. Le cube disparaît progressivement et les propriétés de la hauteur peuvent être utilisées.

De nombreuses constructions différentes sont possibles ; certaines sont plus économiques que d'autres. Il semble important de montrer aux élèves qu'il faut justifier systématiquement ses tracés et ne jamais utiliser des conclusions hâtives.

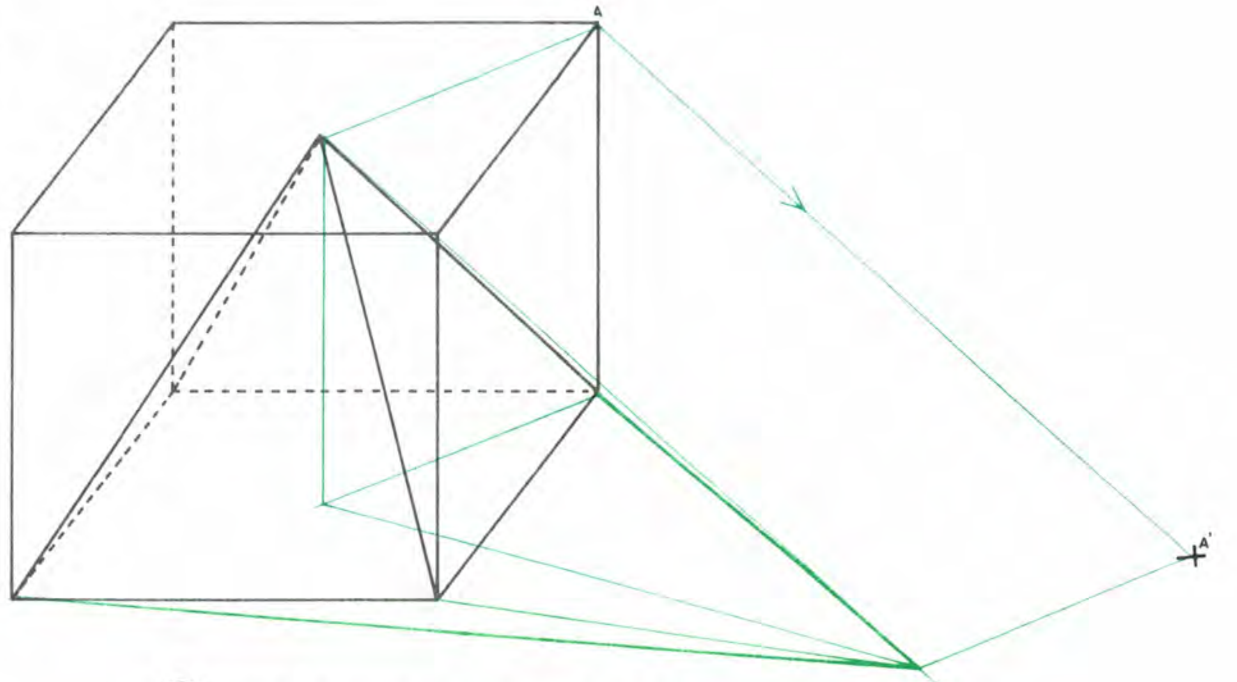
FICHE 57

La hauteur SH est une droite verticale. AS est un segment horizontal de même que MH , donc (A,S,H,M) est un rectangle. SH est parallèle à AM , de même MH est parallèle à AS .

Il suffit donc de tracer la droite parallèle à la droite (AM) qui passe par le point S , puis de tracer la droite parallèle à la droite (AS) qui passe par le point M .

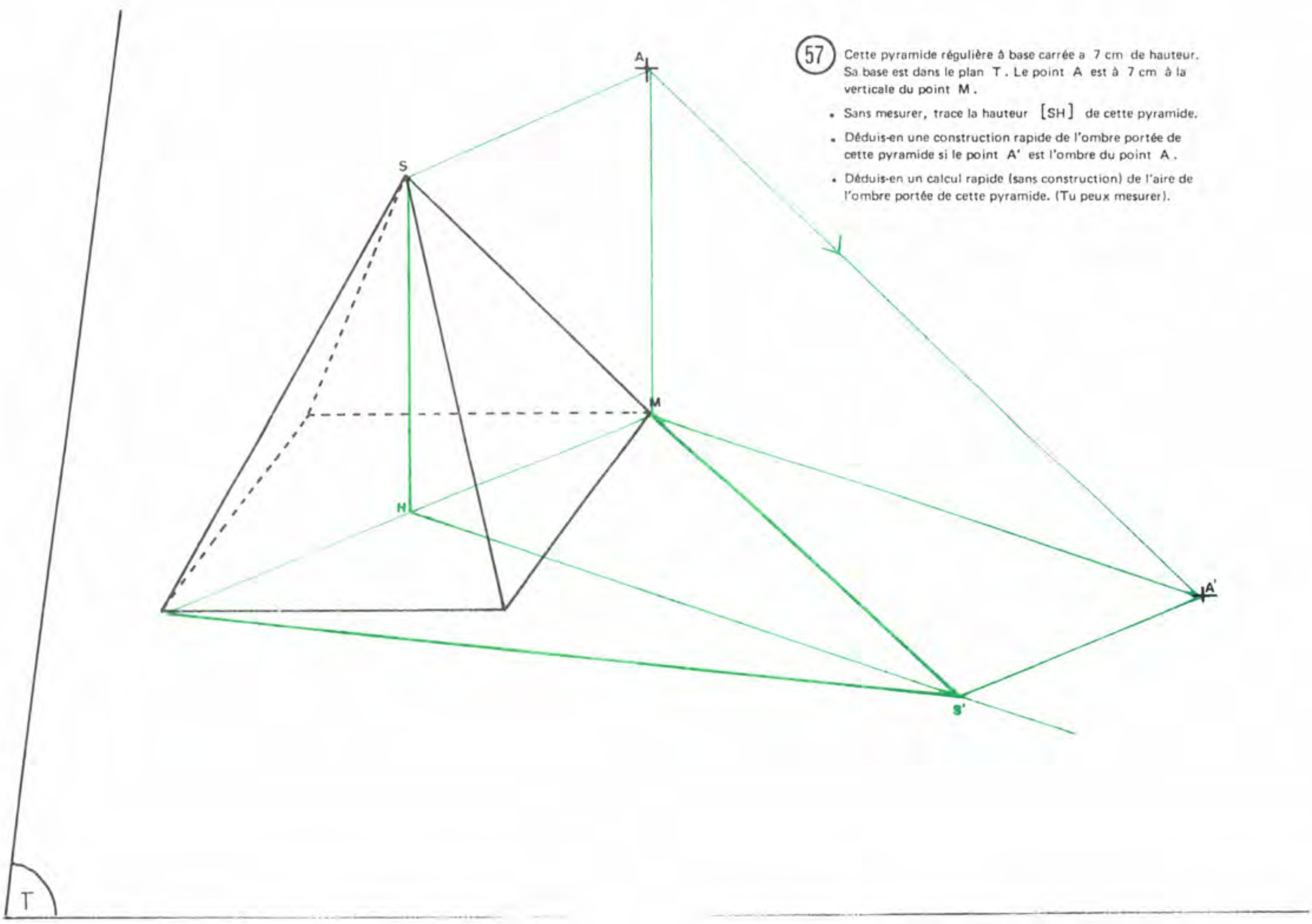
Les deux droites tracées se coupent au point H . Ce point est dans le plan T et sur la verticale qui passe par le sommet S de la pyramide : c'est donc le pied de la hauteur de la pyramide.

Pour tracer l'ombre de la pyramide il suffit de tracer l'ombre S' du sommet S (construire le parallélogramme (H,M,A',S')) , puis de joindre le point S' aux " sommets extérieurs " de la pyramide, qui sont dans le plan T .



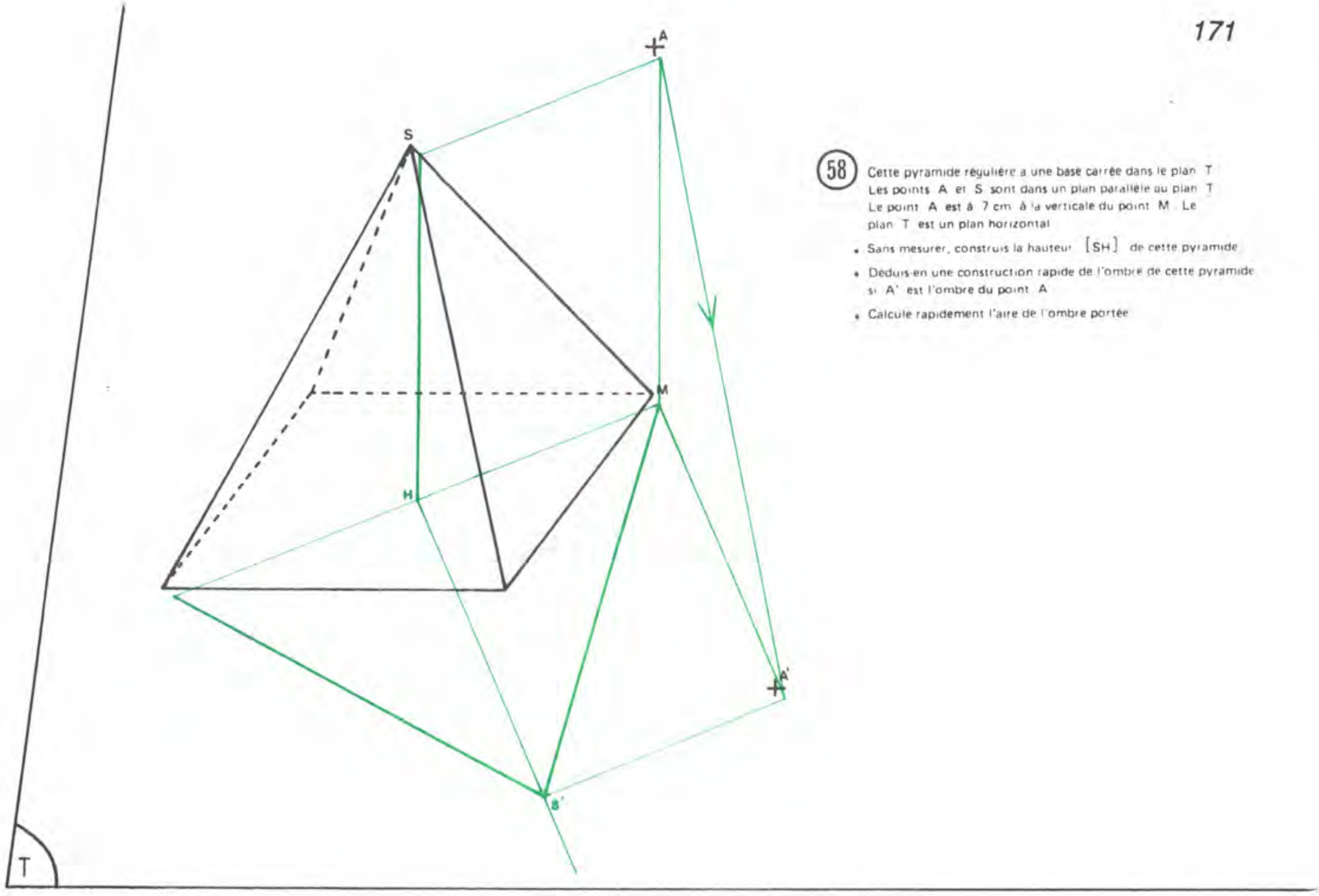
(56) Le sommet S de la pyramide est un point de la face supérieure du pavé. Attention, ce pavé droit n'est pas un cube. Sa hauteur est 7 cm.

- Dessine le plus rapidement possible l'ombre de la pyramide si le point A' est l'ombre du point A.
- Calcule l'aire de l'ombre portée de cette pyramide, si la hauteur réelle de celle-ci est 7 m.



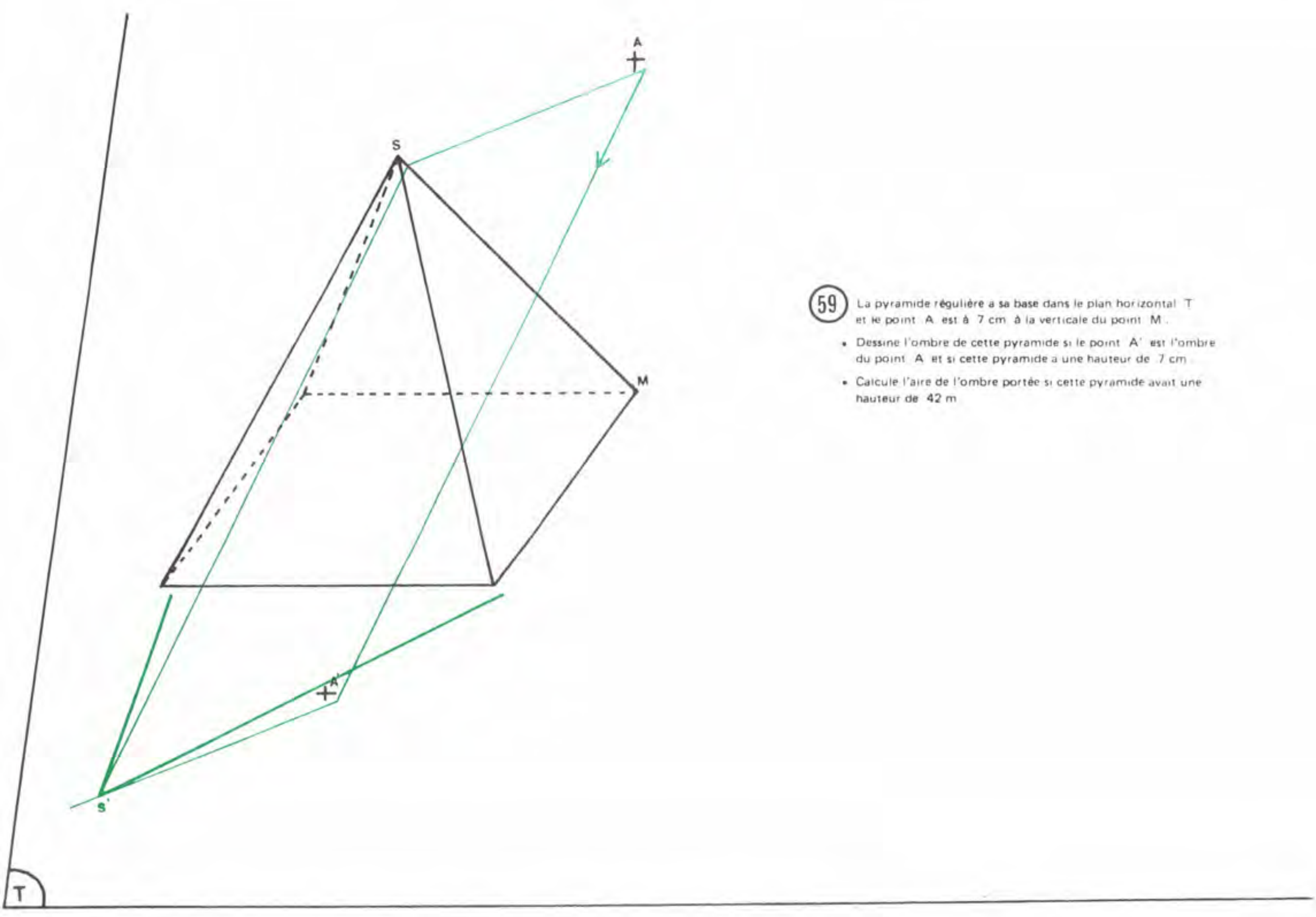
(57) Cette pyramide régulière à base carrée a 7 cm de hauteur. Sa base est dans le plan T. Le point A est à 7 cm à la verticale du point M.

- Sans mesurer, trace la hauteur [SH] de cette pyramide.
- Déduis-en une construction rapide de l'ombre portée de cette pyramide si le point A' est l'ombre du point A.
- Déduis-en un calcul rapide (sans construction) de l'aire de l'ombre portée de cette pyramide. (Tu peux mesurer).



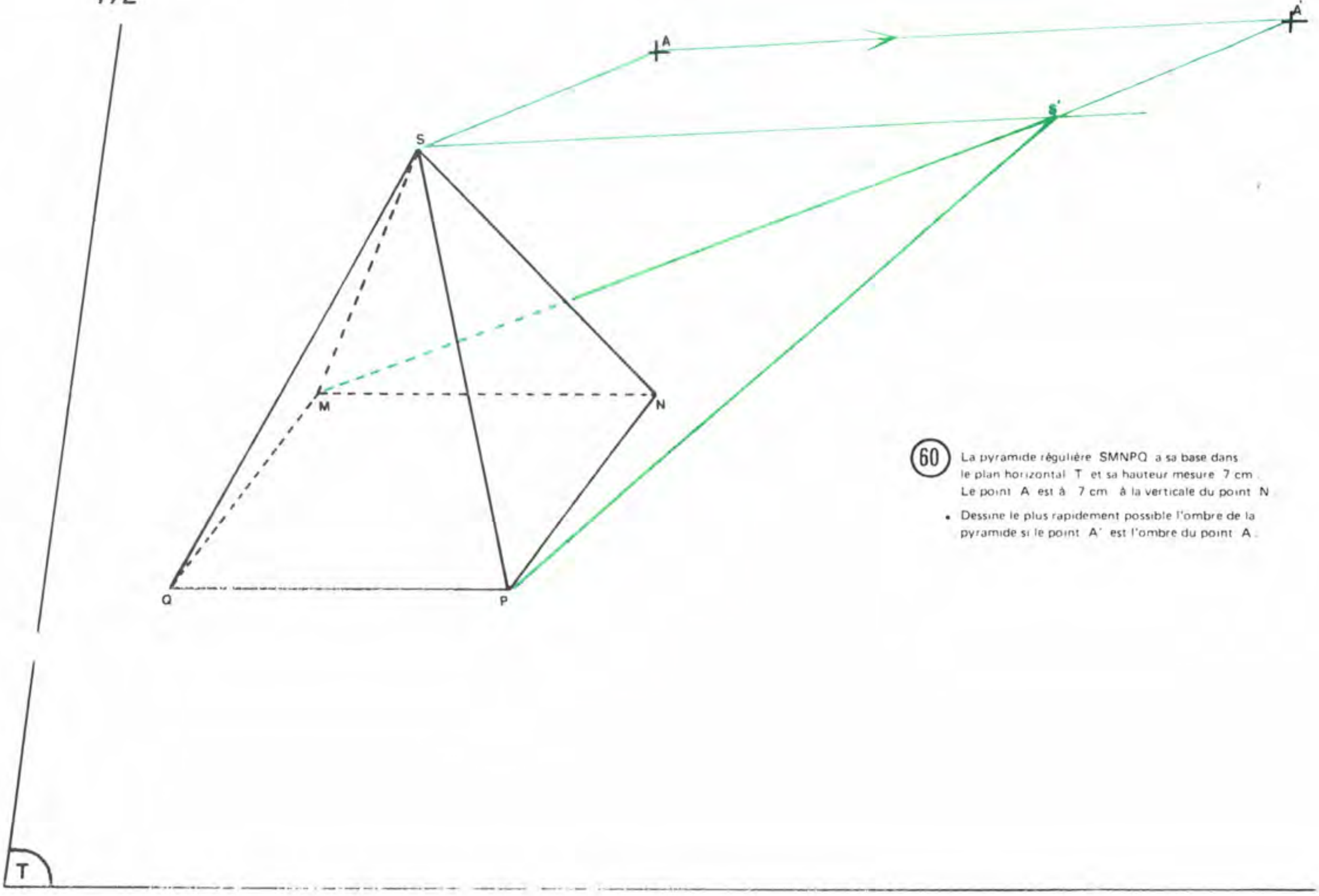
58 Cette pyramide régulière a une base carrée dans le plan T. Les points A et S sont dans un plan parallèle au plan T. Le point A est à 7 cm à la verticale du point M. Le plan T est un plan horizontal.

- Sans mesurer, construis la hauteur [SH] de cette pyramide.
- Déduis-en une construction rapide de l'ombre de cette pyramide si A' est l'ombre du point A.
- Calcule rapidement l'aire de l'ombre portée.



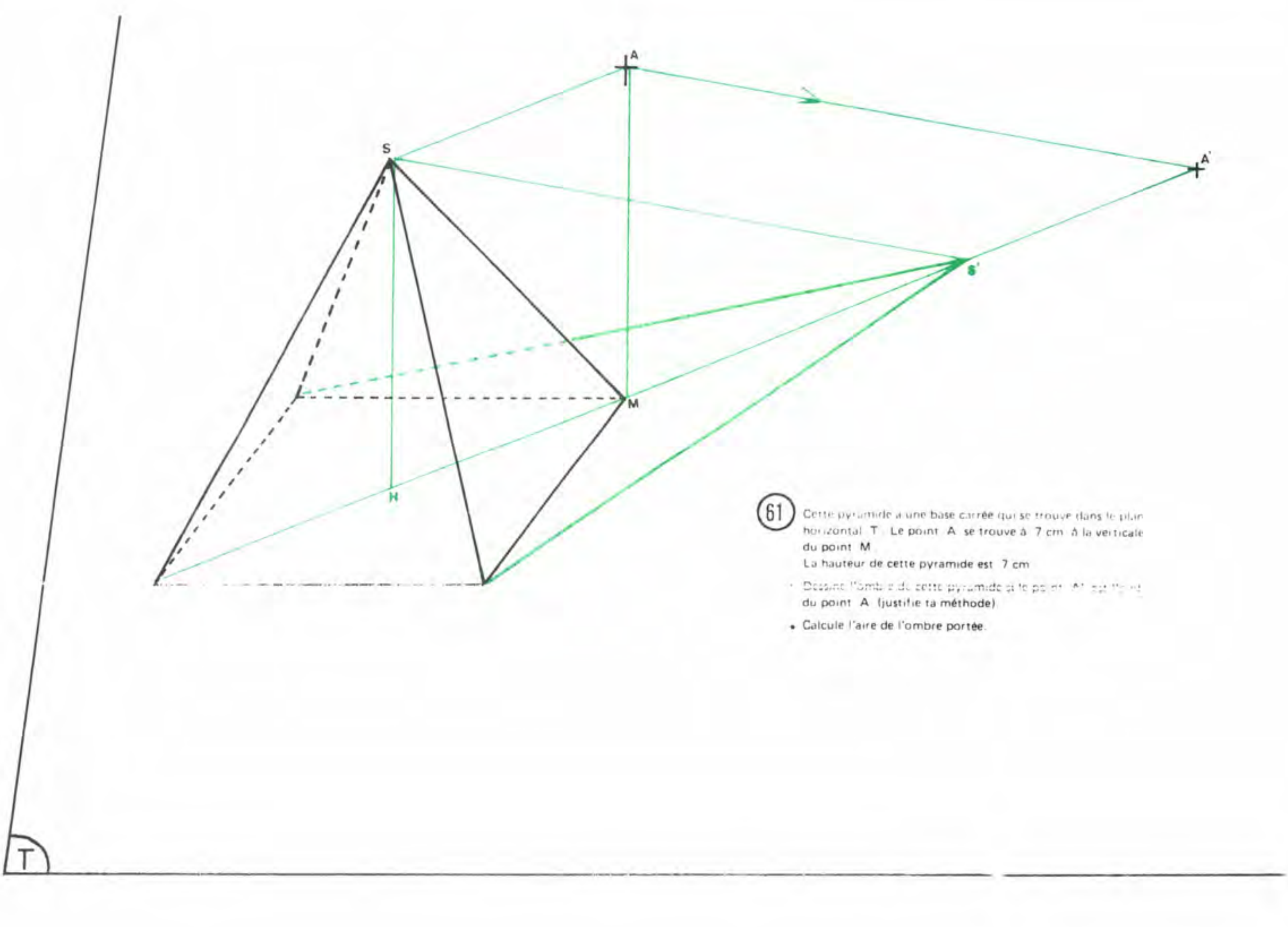
59 La pyramide régulière a sa base dans le plan horizontal T et le point A est à 7 cm à la verticale du point M.

- Dessine l'ombre de cette pyramide si le point A' est l'ombre du point A et si cette pyramide a une hauteur de 7 cm.
- Calcule l'aire de l'ombre portée si cette pyramide avait une hauteur de 42 m.



(60) La pyramide régulière SMNPQ a sa base dans le plan horizontal T et sa hauteur mesure 7 cm.
Le point A est à 7 cm à la verticale du point N.

- Dessine le plus rapidement possible l'ombre de la pyramide si le point A' est l'ombre du point A.



(61) Cette pyramide a une base carrée qui se trouve dans le plan horizontal T. Le point A se trouve à 7 cm à la verticale du point M.
La hauteur de cette pyramide est 7 cm.

- Dessine l'ombre de cette pyramide si le point A' est l'ombre du point A (justifie ta méthode).
- Calcule l'aire de l'ombre portée.

FICHES 58, 59, 60, 61

Même activité que la fiche 55 . C'est peut-être aussi l'occasion de montrer qu'il existe une autre méthode simple pour obtenir le point S' , ombre du sommet S de la pyramide dans le plan horizontal contenant sa base :

Construire le parallélogramme (S,A,A',S') puis, pour obtenir le pied de la hauteur, tracer la droite parallèle à la droite (AM) qui passe par S , et la droite parallèle à la droite (AA') qui passe par S' . Ces deux droites se coupent au point H .

FICHE 62

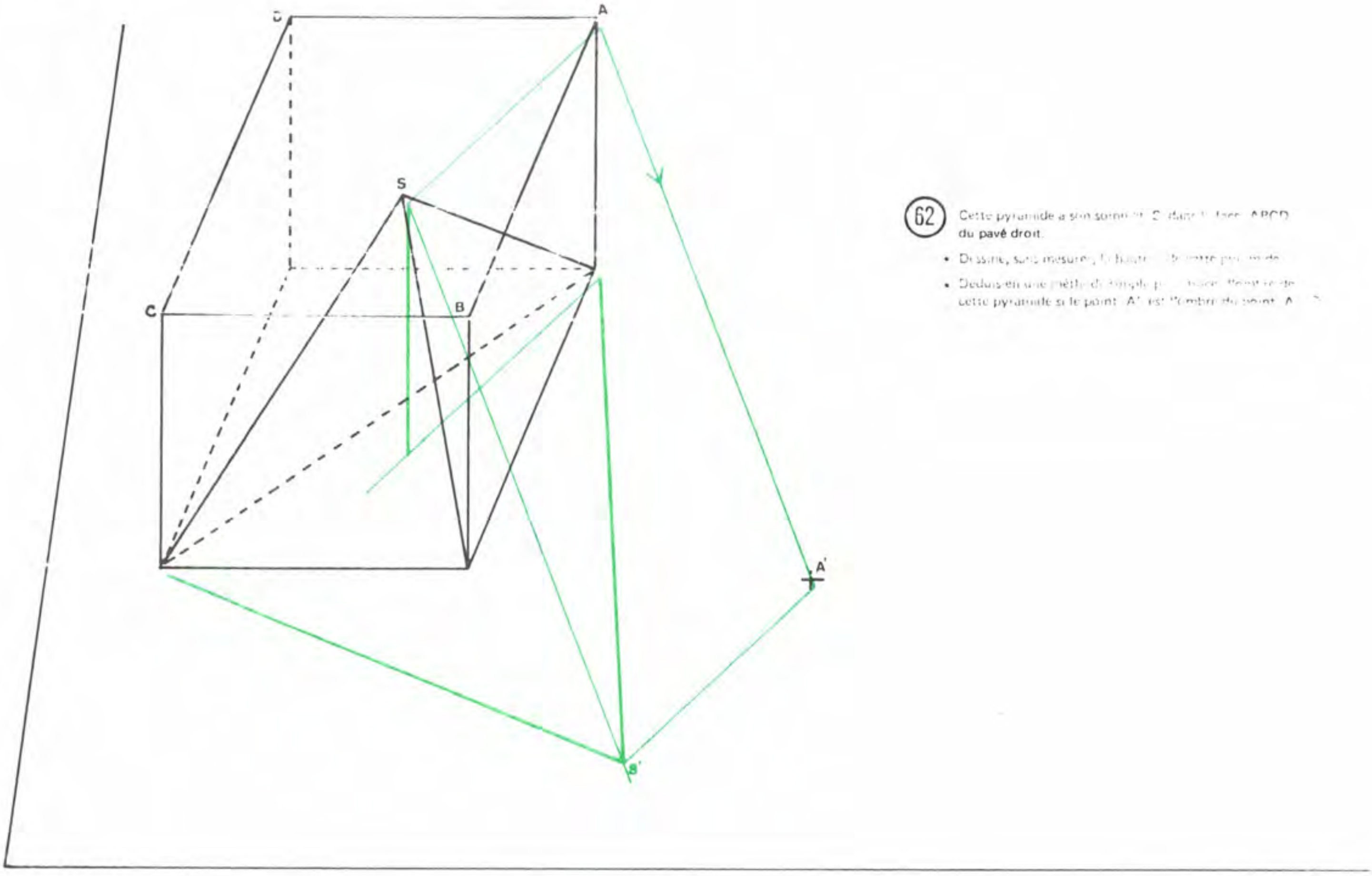
Cette pyramide n'est pas régulière. Nous pouvons construire le pied H de la hauteur de la même manière que pour la fiche 57 . Il en est de même pour le tracé de l'ombre de la pyramide.

Le point H n'est plus un point particulier du rectangle de base du pavé droit.

FICHE 63

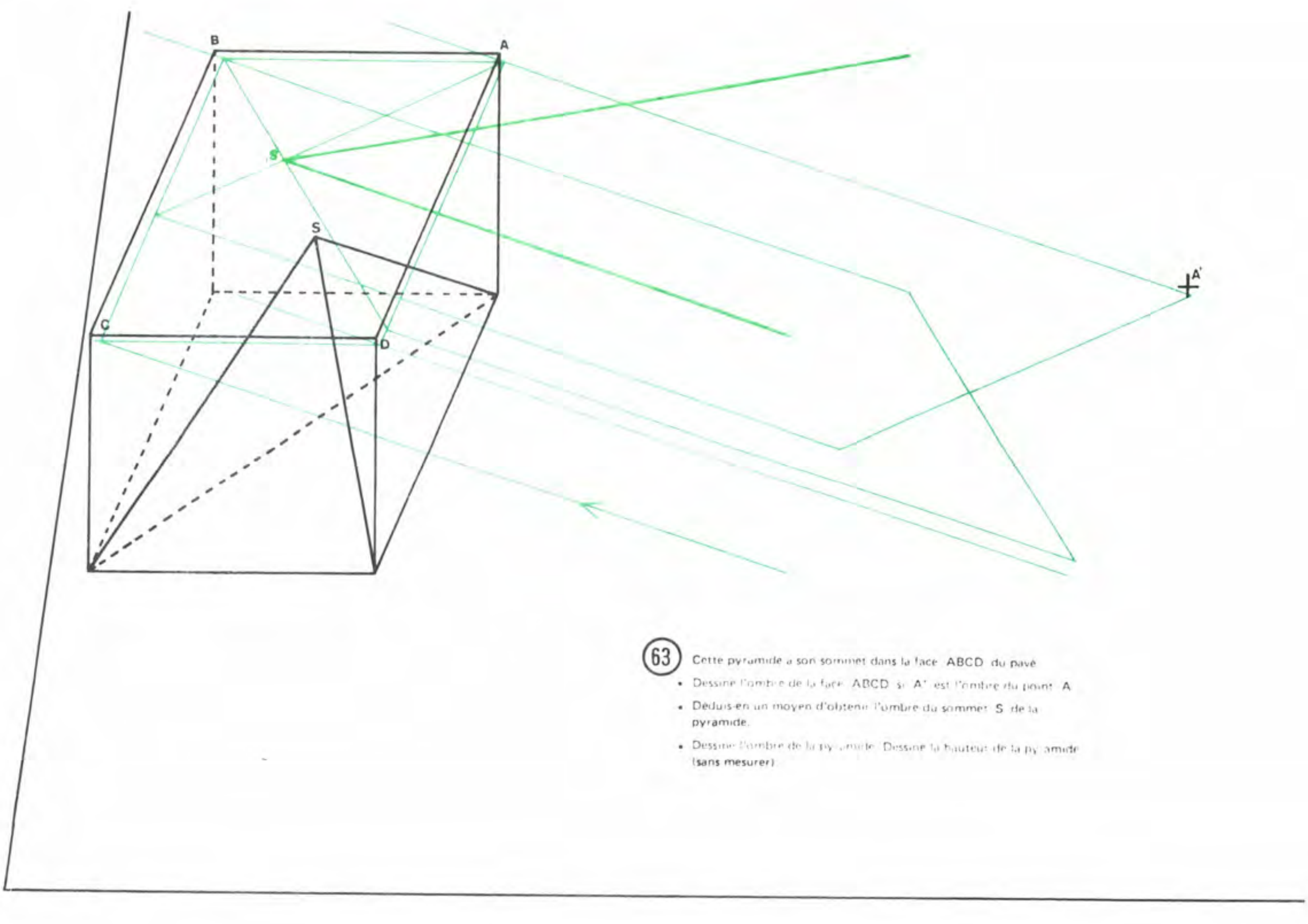
Le tracé de l'ombre de la pyramide nécessite le positionnement de l'ombre du sommet S de cette pyramide. Nous pouvons tracer l'ombre de la face supérieure du pavé droit et placer le point S' dans ce parallélogramme.

Une simple observation de la figure permet d'utiliser des méthodes beaucoup plus rapides, pour obtenir l'ombre du point S .



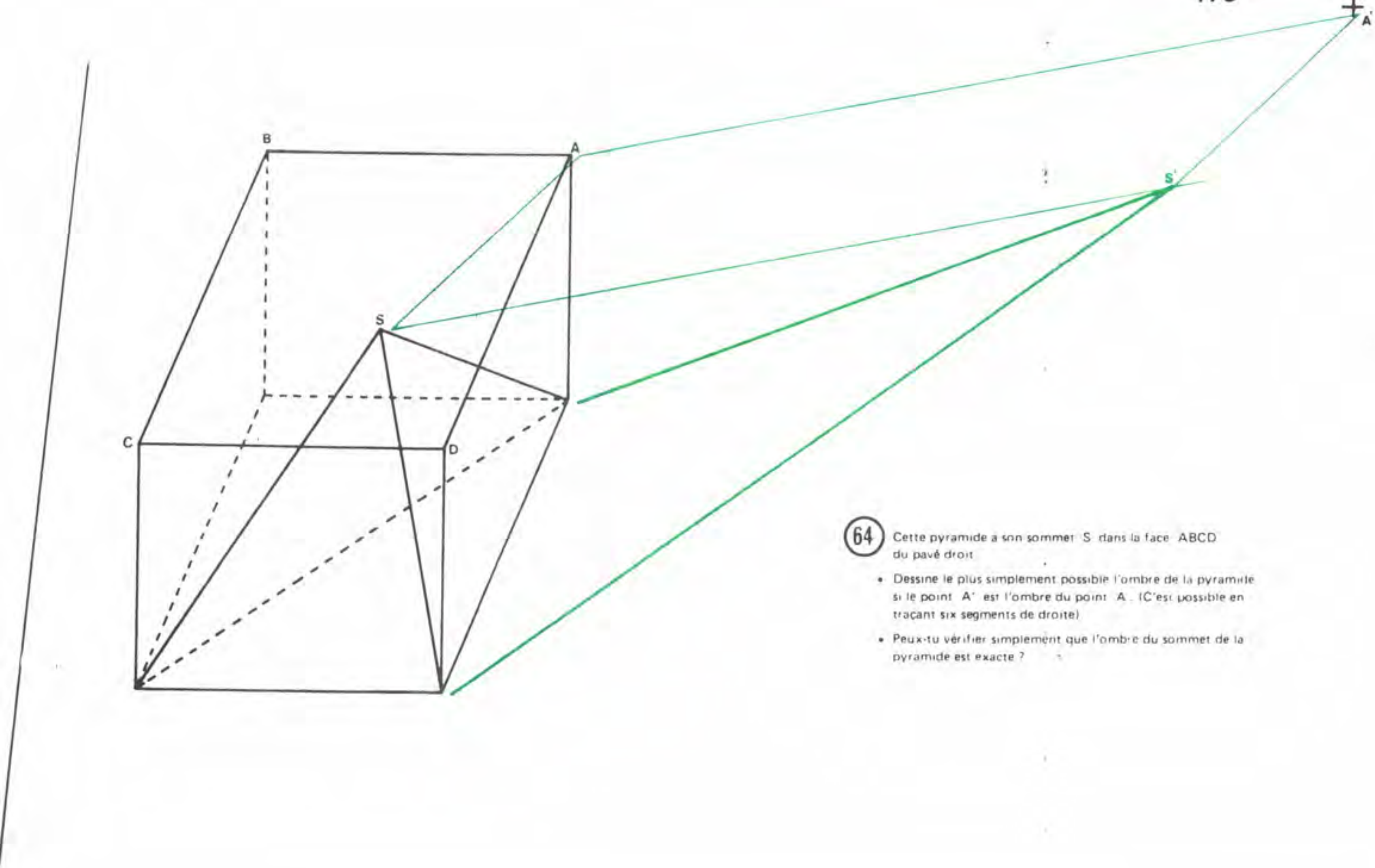
(62) Cette pyramide a son sommet S dans la face ABCD du pavé droit.

- Dessine, sans mesurer, la hauteur de cette pyramide.
- Déduis-en une méthode simple pour tracer l'ombre de cette pyramide si le point A' est l'ombre du point A.



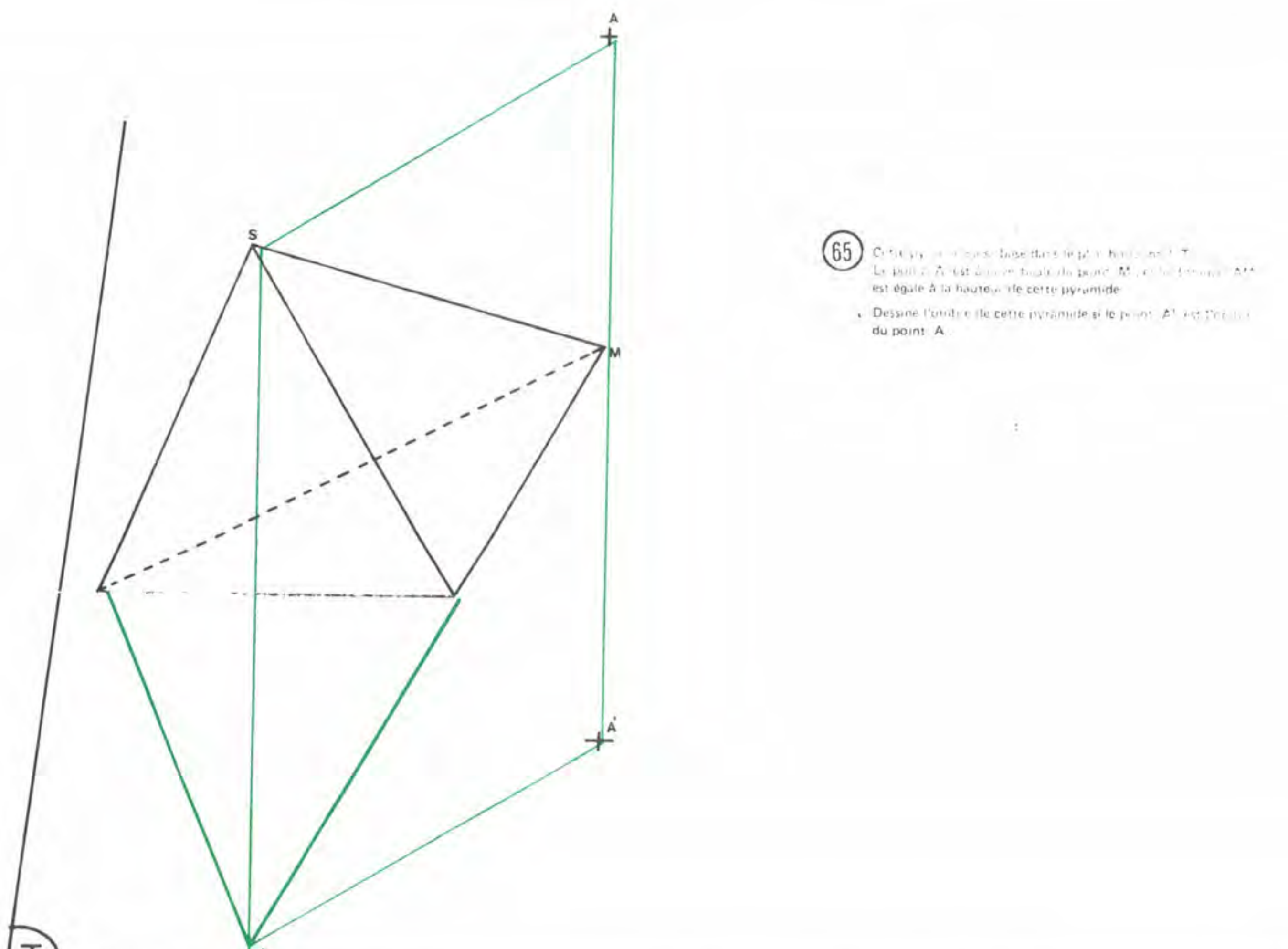
(63) Cette pyramide a son sommet dans la face ABCD du pavé.

- Dessine l'ombre de la face ABCD si A' est l'ombre du point A.
- Déduis-en un moyen d'obtenir l'ombre du sommet S de la pyramide.
- Dessine l'ombre de la pyramide. Dessine la hauteur de la pyramide (sans mesurer).



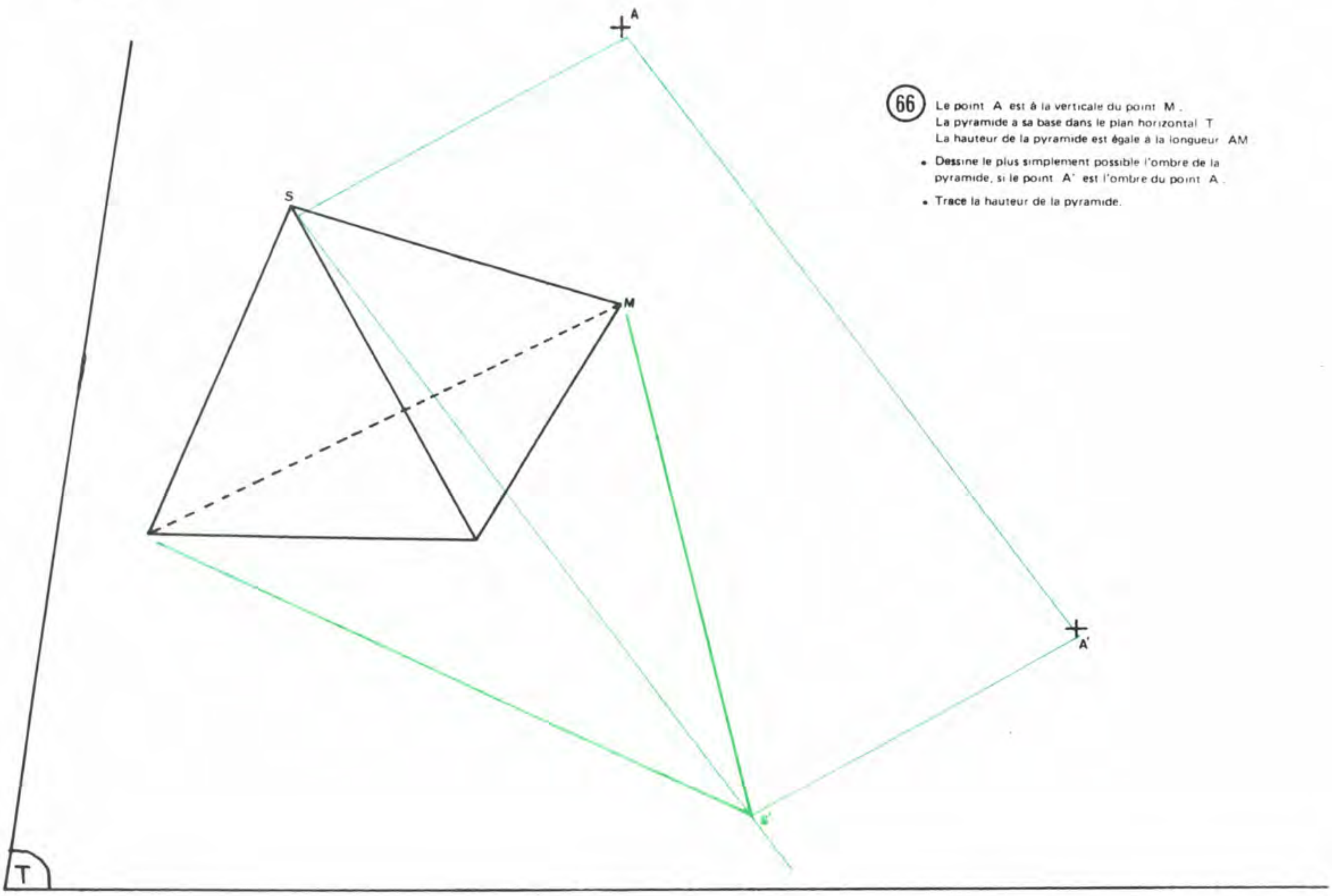
(64) Cette pyramide a son sommet S dans la face ABCD du pavé droit.

- Dessine le plus simplement possible l'ombre de la pyramide si le point A' est l'ombre du point A. (C'est possible en traçant six segments de droite)
- Peux-tu vérifier simplement que l'ombre du sommet de la pyramide est exacte ?



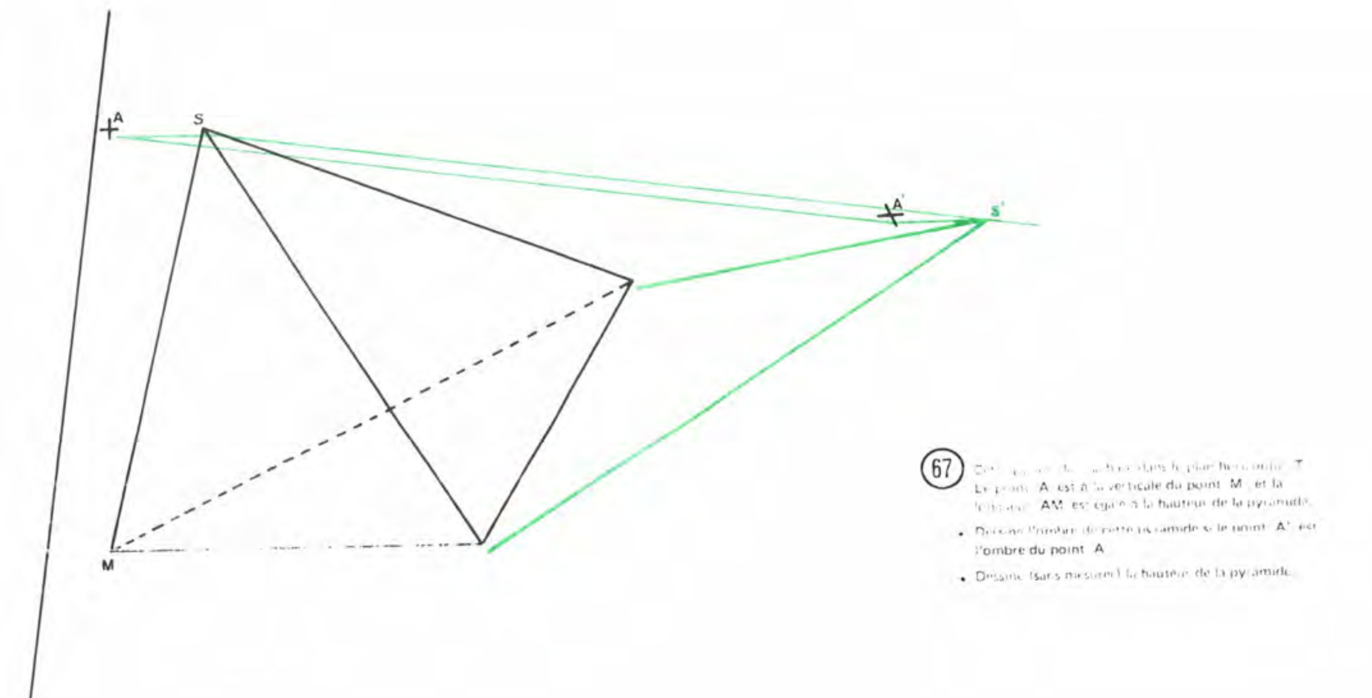
(65) C[illegible] base dans le p[illegible] T. Le p[illegible] A est [illegible] du point M [illegible] AM est égale à la hauteur de cette pyramide.

- Dessine l'ombre de cette pyramide si le point A' est l'[illegible] du point A.



(66) Le point A est à la verticale du point M.
La pyramide a sa base dans le plan horizontal T
La hauteur de la pyramide est égale à la longueur AM

- Dessine le plus simplement possible l'ombre de la pyramide, si le point A' est l'ombre du point A.
- Trace la hauteur de la pyramide.

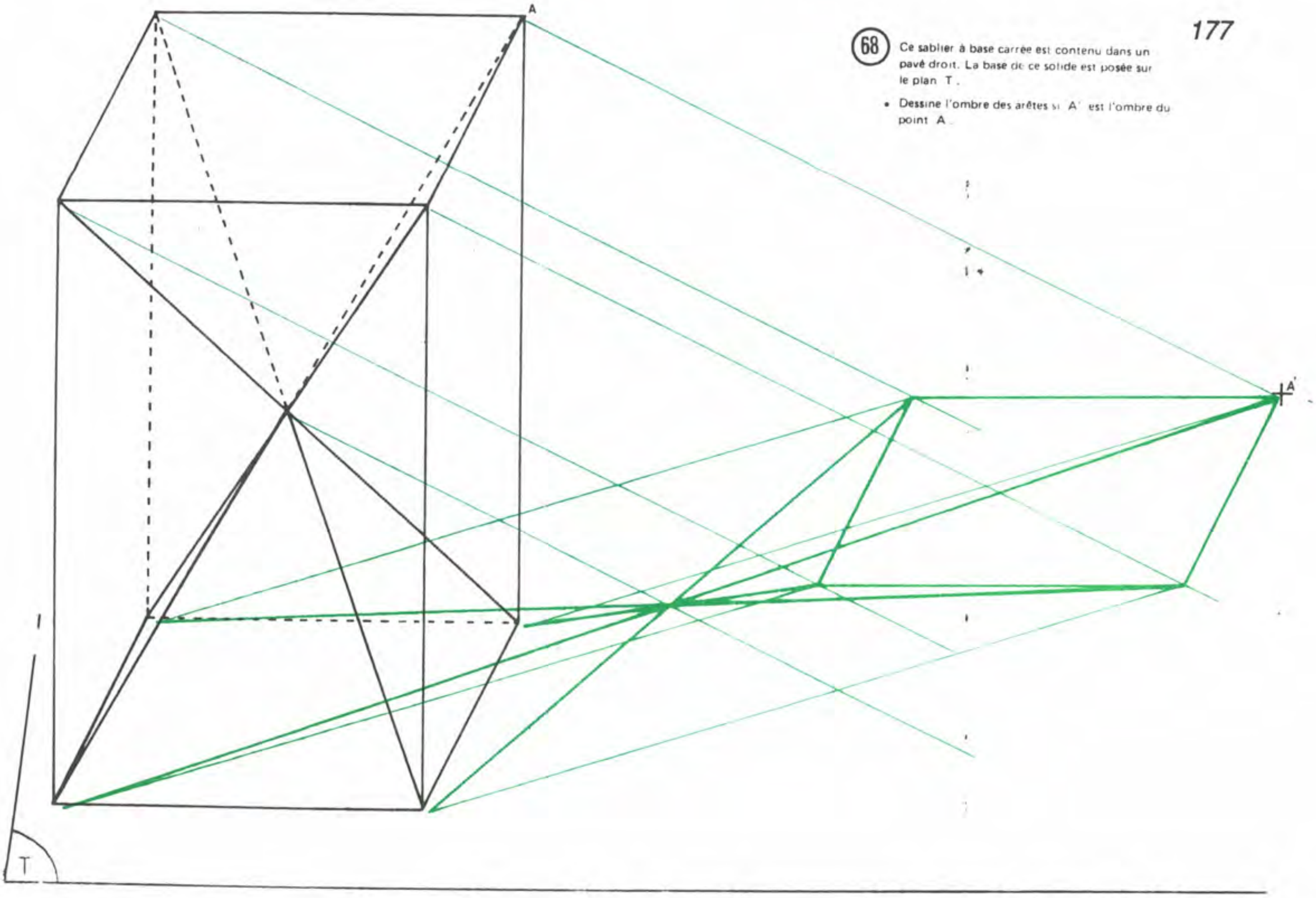


(67) [illegible] dans le plan horizontal T
Le point A est à la verticale du point M et la longueur AM est égale à la hauteur de la pyramide.

- Dessine l'ombre de cette pyramide si le point A' est l'ombre du point A
- Dessine (sans mesurer) la hauteur de la pyramide.

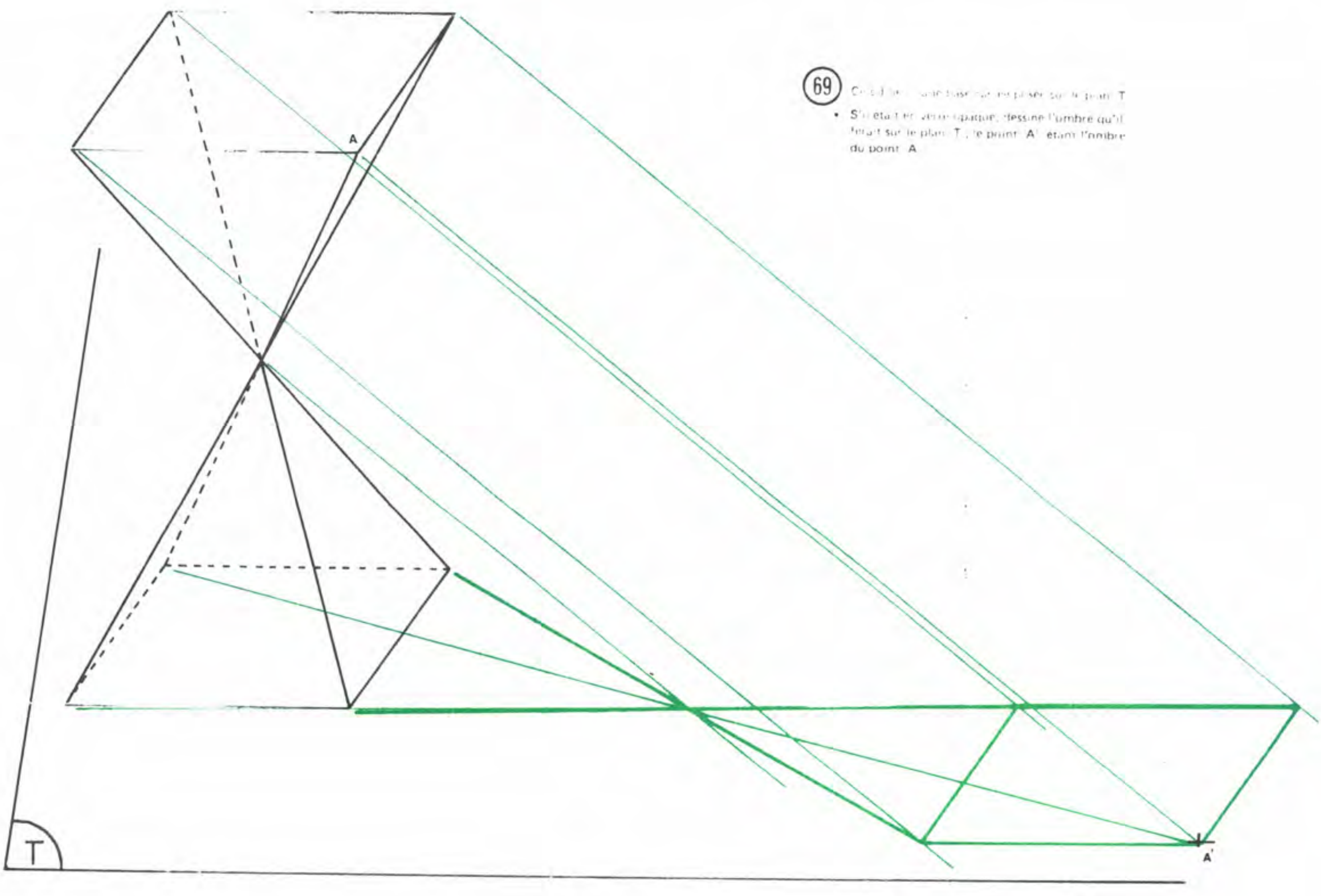
68 Ce sablier à base carrée est contenu dans un pavé droit. La base de ce solide est posée sur le plan T.

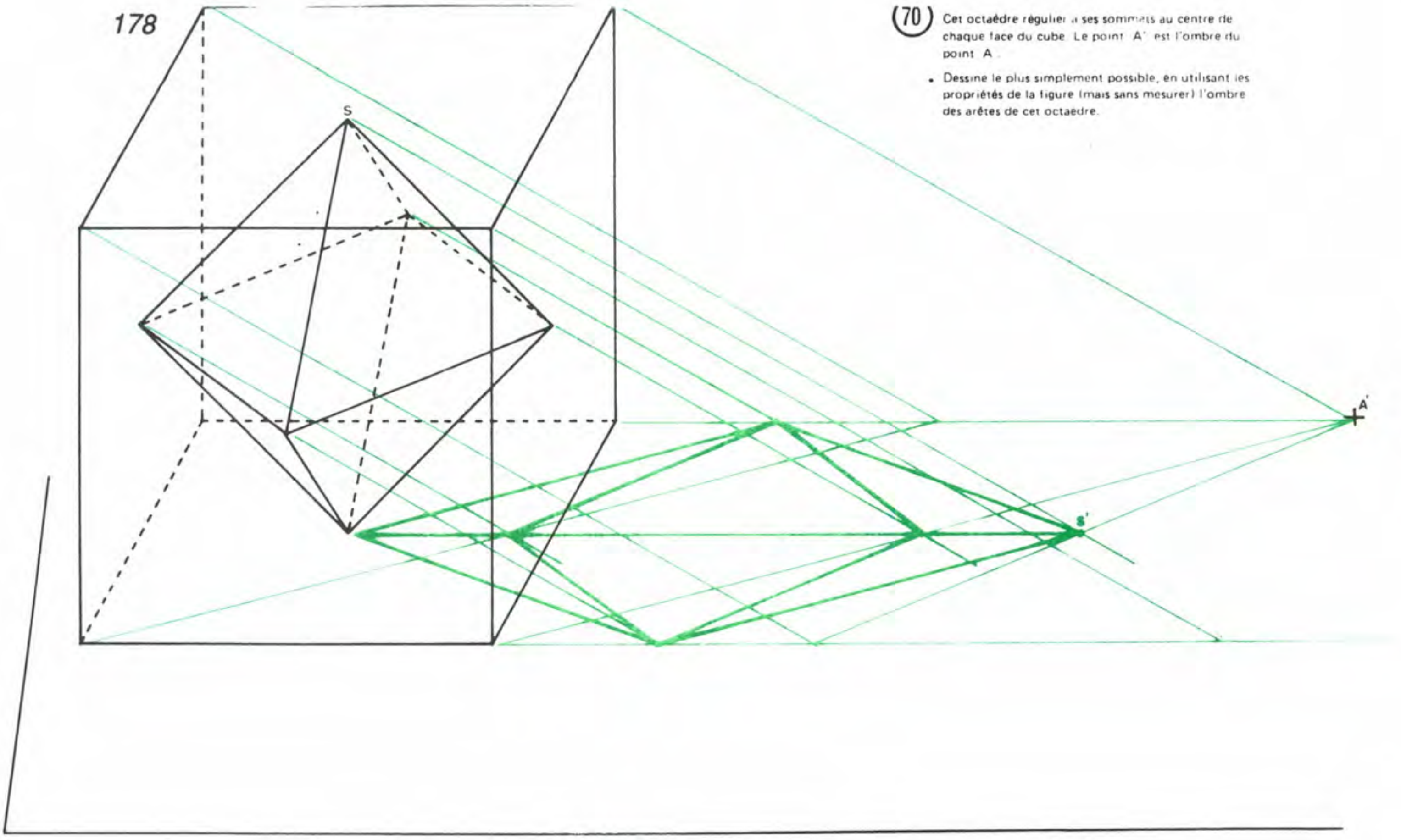
- Dessine l'ombre des arêtes si A' est l'ombre du point A.



69 Ce sablier à base carrée est posé sur le plan T.

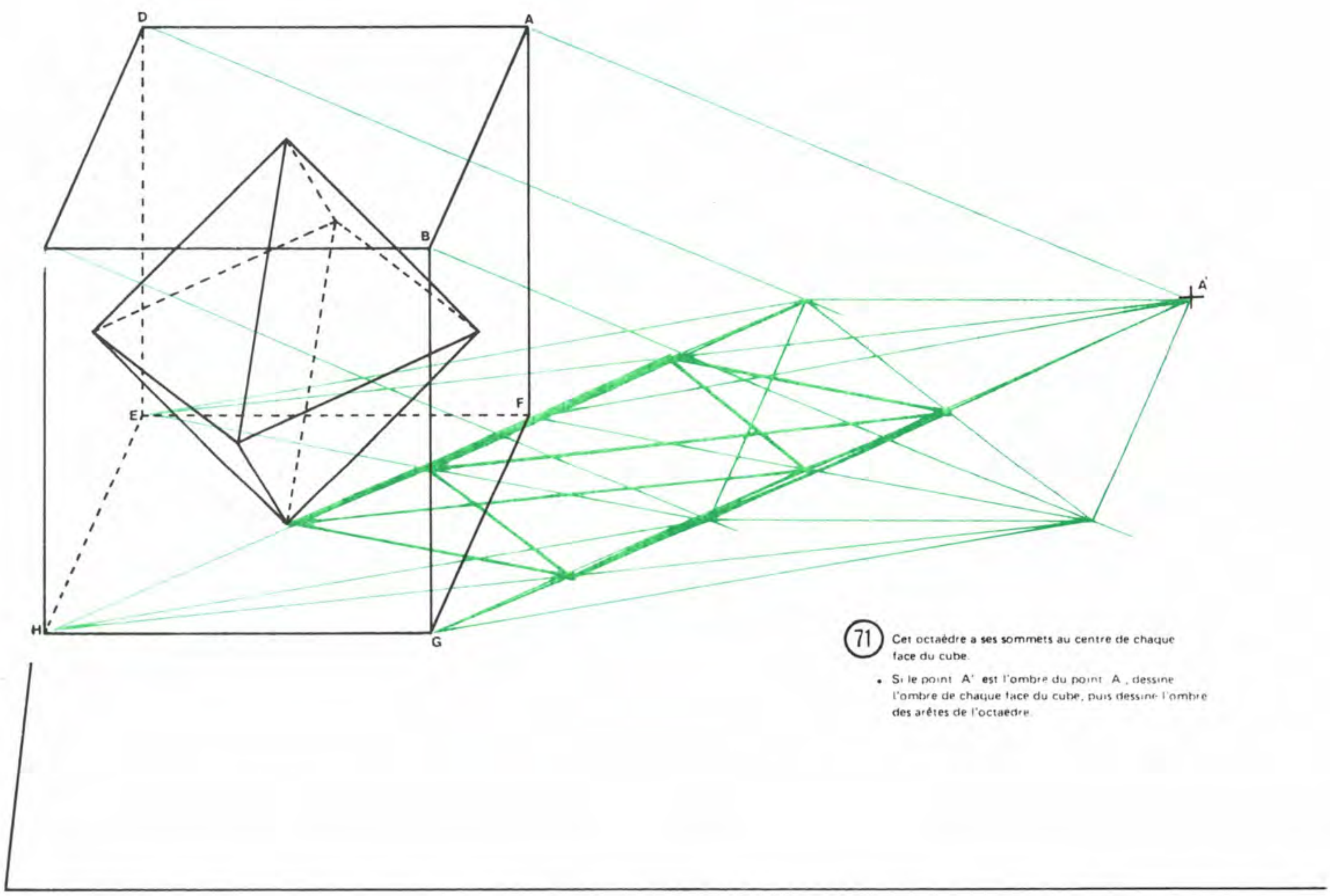
- S'il était en verre opaque, dessine l'ombre qu'il ferait sur le plan T, le point A' étant l'ombre du point A.





(70) Cet octaèdre régulier a ses sommets au centre de chaque face du cube. Le point A' est l'ombre du point A.

- Dessine le plus simplement possible, en utilisant les propriétés de la figure (mais sans mesurer) l'ombre des arêtes de cet octaèdre.



(71) Cet octaèdre a ses sommets au centre de chaque face du cube.

- Si le point A' est l'ombre du point A, dessine l'ombre de chaque face du cube, puis dessine l'ombre des arêtes de l'octaèdre.

FICHES 64, 65, 66, 67

Il suffit de tracer le parallélogramme (S,A,A',S') pour obtenir l'ombre S' du sommet S de la pyramide.

Pour vérifier l'exactitude du tracé, il suffit de construire la hauteur SH (par exemple : rectangle (S,A,M,H)) puis l'ombre de cette hauteur HS'_1 (par exemple : parallélogramme (H,M,A',S'_1)).

Les deux points S et S'_1 doivent être confondus.

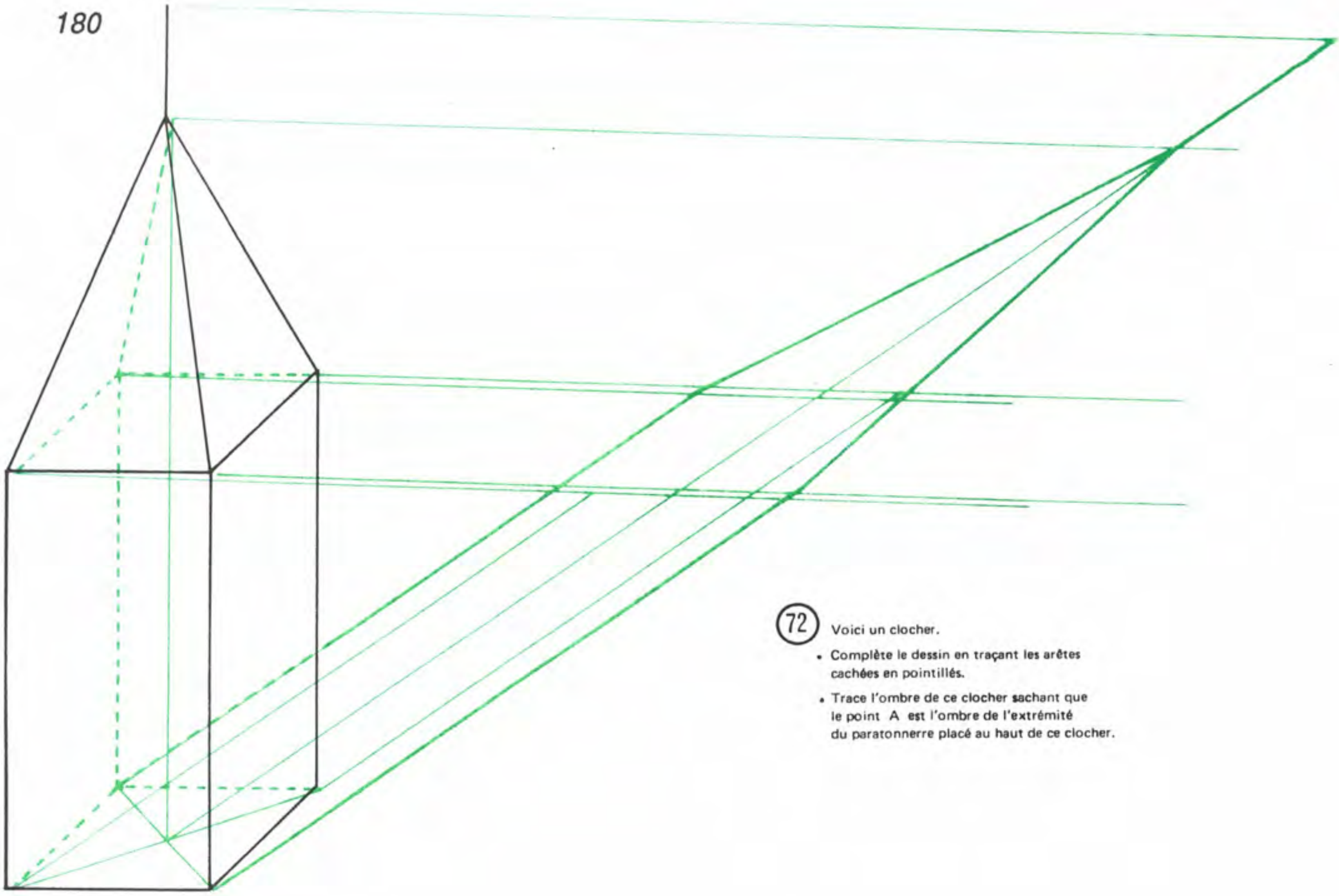
FICHES 68, 69, 70, 71

Il s'agit de dessiner différentes ombres en réinvestissant les règles mises en évidence précédemment. Il est possible ainsi de simplifier le tracé, en particulier en utilisant " l'invariance " des polygones horizontaux qui sont déplacés par translation du vecteur $\overrightarrow{AA'}$.

FICHES 72, 73, 74, 75

- *Pour compléter le dessin il est nécessaire d'utiliser correctement les conventions de représentation du pavé droit.*

- *Pour construire l'ombre portée il suffit de tracer l'ombre de chaque verticale et de chaque horizontale, ce qui permet de déterminer l'ombre des points importants de la figure (on peut aussi utiliser les rayons lumineux).*

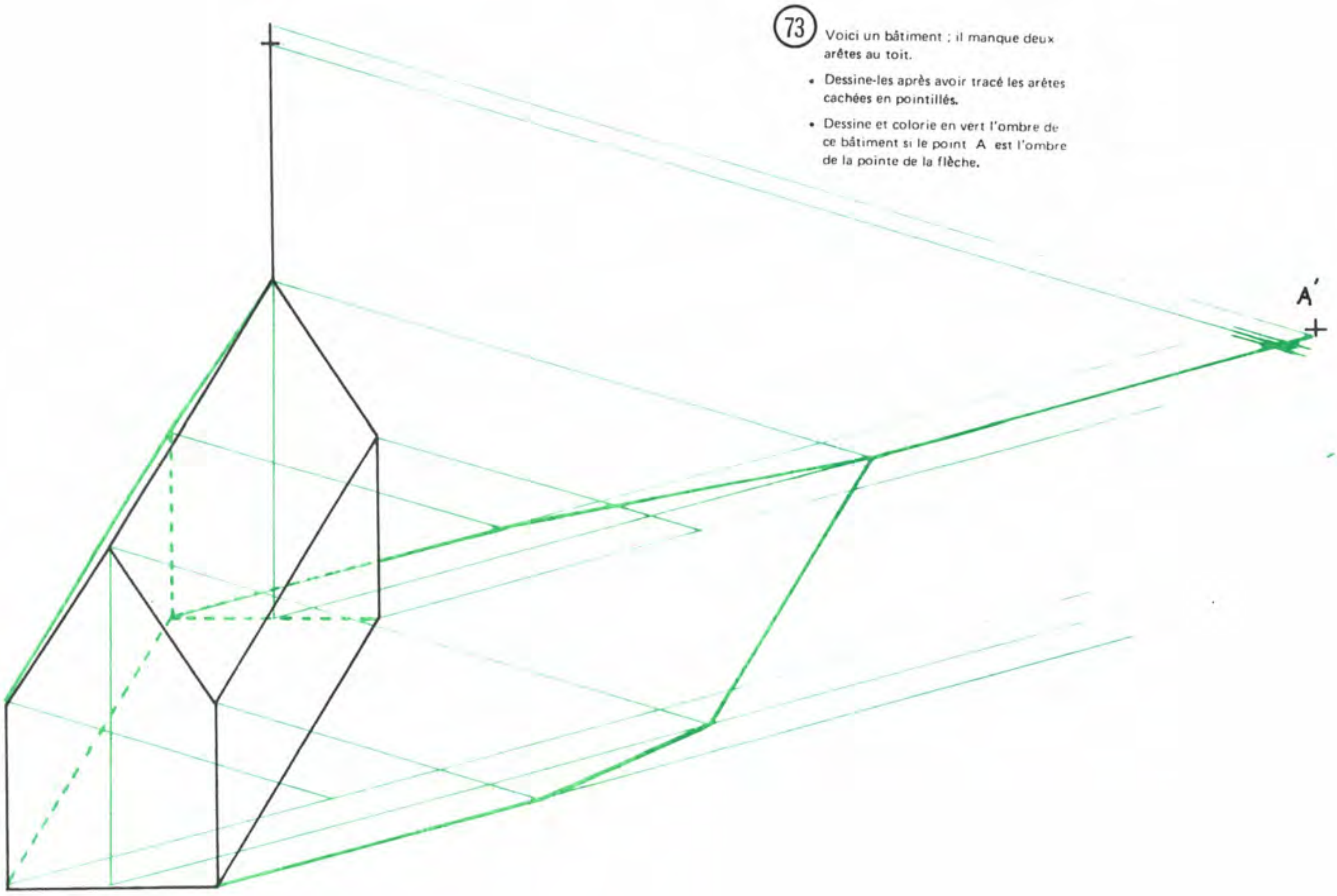


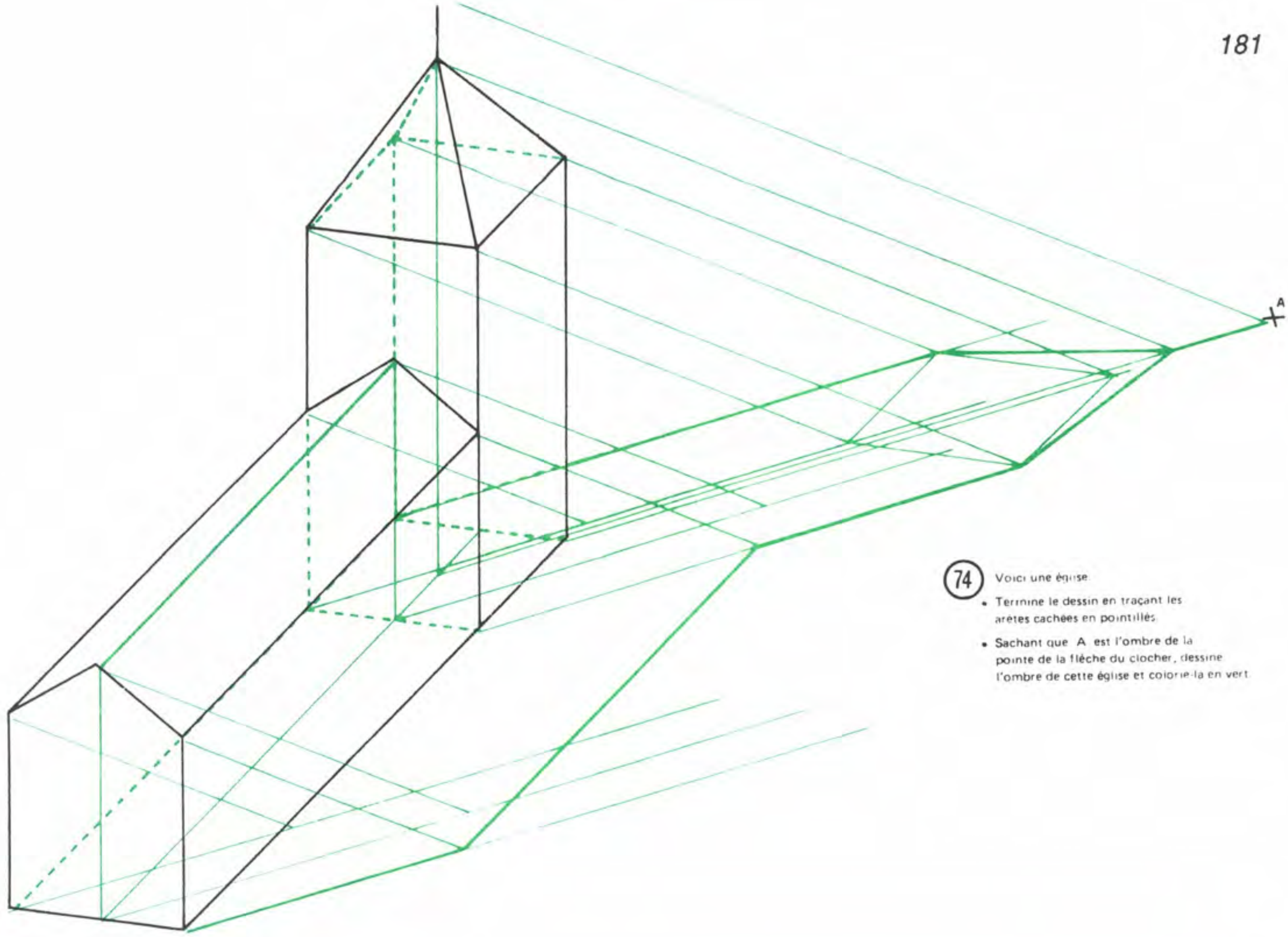
(72) Voici un clocher.

- Complète le dessin en traçant les arêtes cachées en pointillés.
- Trace l'ombre de ce clocher sachant que le point A est l'ombre de l'extrémité du paratonnerre placé au haut de ce clocher.

(73) Voici un bâtiment ; il manque deux arêtes au toit.

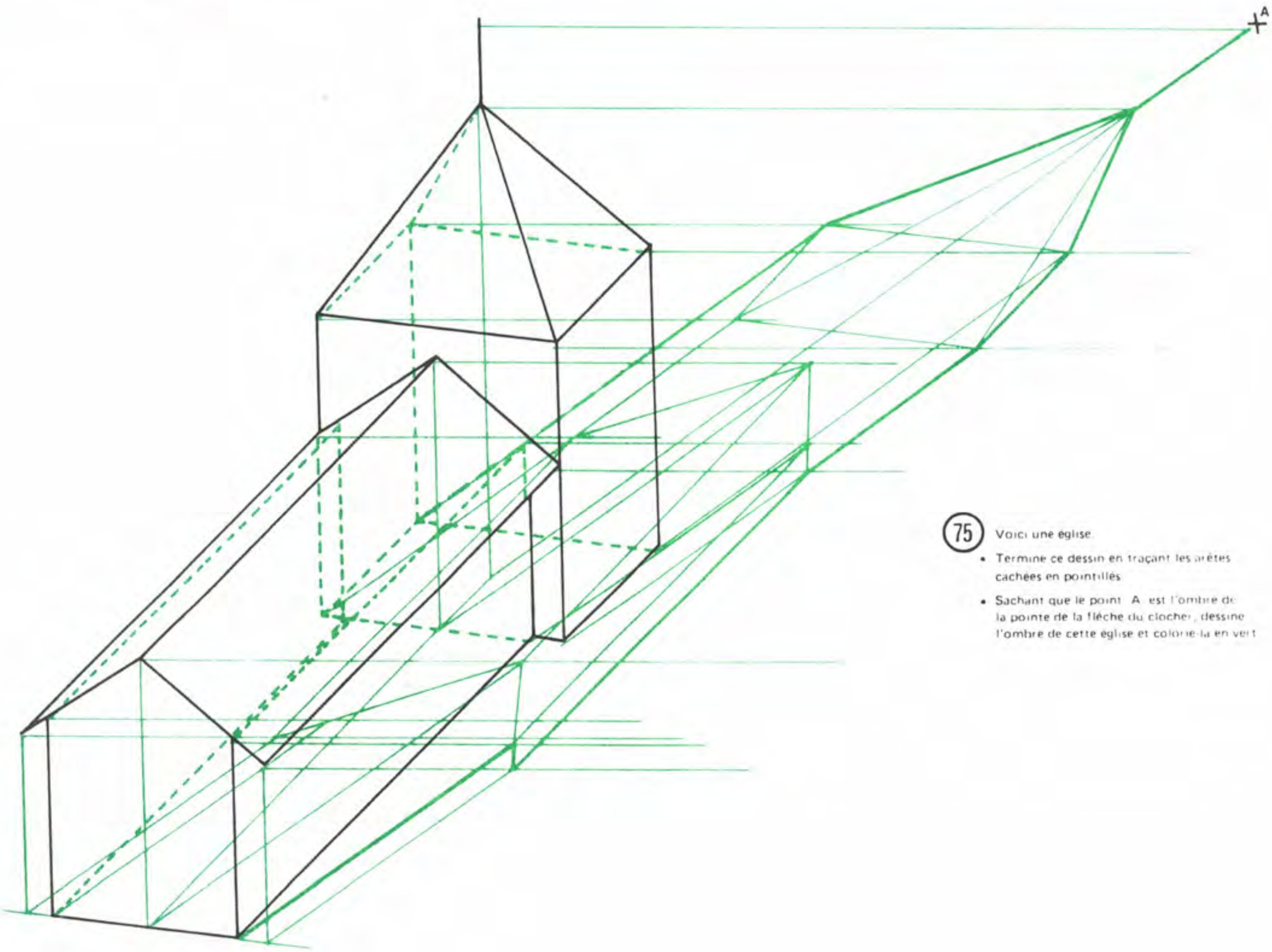
- Dessine-les après avoir tracé les arêtes cachées en pointillés.
- Dessine et colorie en vert l'ombre de ce bâtiment si le point A est l'ombre de la pointe de la flèche.





74 Voici une église.

- Termine le dessin en traçant les arêtes cachées en pointillés.
- Sachant que A est l'ombre de la pointe de la flèche du clocher, dessine l'ombre de cette église et colorie-la en vert.



75 Voici une église.

- Termine ce dessin en traçant les arêtes cachées en pointillés.
- Sachant que le point A est l'ombre de la pointe de la flèche du clocher, dessine l'ombre de cette église et colorie-la en vert.

Chapitre 9 : LE CONTRE-TRANSFERT

PROBLEMES n° 76 à 89

Les problèmes sont classés par difficultés :

*	*très facile,*
**	*facile, abordable par tous,*
***	*facile, demande un raisonnement ou un calcul littéral,*
****	*difficile, à n'aborder qu'avec l'aide du professeur ou en travaux dirigés.*

* **PROBLEME n° 76**

connaissances prérequises :

- *propriété de Pythagore*
- *calcul sur les racines carrées*

objectif :

- *exercice facile permettant un usage dans l'espace de la propriété de Pythagore.*

résultats :

$BD = 9$	$DF = 7$	$BF = 8$
$FH = 9$	$BH = 7$	$DH = 8$

*** **PROBLEME n° 77**

connaissances prérequises :

- *propriété de Pythagore*
- *usage d'une table de trigonométrie*

objectif :

- *même objectif que le problème 76 .*

résultats :

On pourra dessiner le rectangle (D,B,G,E) pour faire apparaître les propriétés de la figure.

$35° < \alpha < 36°$ $\qquad$ $54° < \beta < 55°$

** *PROBLEME n° 78*

connaissances prérequises :

aire du carré, propriété de Pythagore, calcul sur les racines carrées, aire du triangle équilatéral, hauteur du triangle équilatéral.

objectifs :

- *exercice permettant une utilisation dans l'espace de la propriété de Pythagore.*
- *calcul d'une aire nécessitant un ou deux calculs intermédiaires.*

résultats :

Aire ABMND = 15,5 $\quad$ $MN = \sqrt{2}$

Aire totale du solide = 95,366

*** *PROBLEME n° 79*

connaissances prérequises :

propriété de Pythagore, calcul sur les racines carrées, propriété de Thalès et sa réciproque, proportionnalité sur une droite.

objectifs :

- *tracer correctement une figure dans l'espace*
- *calculer avec des expressions littérales*

résultats :

$CP = CR = CQ = 4$ $\quad$ $PQ = PR = QR = 4\sqrt{2}$

(exercice difficile)

*** ***PROBLEME n° 80***

connaissances prérequises :

- *cube, plans parallèles, intersection de deux plans*
- *propriété de Thalès et sa réciproque*
- *propriété de Pythagore, calcul sur les racines carrées*

objectifs :

- *dessin sur les faces d'un cube*
- *calcul de longueurs de segments (intersection d'un carré et d'un triangle non coplanaires) non mesurables sur la figure*

résultats :

$PQ = 2\sqrt{13}$ $PR = 3\sqrt{5}$ $QR = 5$

$XZ = 10$

$UV = 5/3$

****** PROBLEME n° 81**

connaissances prérequises :

- on admettra que (F,H,C,A) est un rectangle (à constater sur un cube transparent, ou en coupant un cube en polystyrène)
- propriété de Pythagore, triangle équilatéral, calcul sur les racines carrées, trigonométrie, calcul littéral

objectifs :

- faire dessiner dans le plan une partie de la figure dans l'espace sur laquelle les propriétés n'apparaissent pas
- raisonner à partir de cette nouvelle figure et faire les calculs
- approche de la notion de distance d'un point à un plan

résultats :

a) $AC = a\sqrt{2}$ $\qquad IH = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$

b) $IHC = HFF'$

c) $\cos IHC = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$ $\qquad FF' = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$

d) $HF' = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$ $\qquad HF' = \dfrac{2}{3}\, IH$

F' est le centre de gravité du triangle DBH

e) $BF' = HF' = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$

$FF'B$ est un triangle rectangle en F'

(Cet exercice est long et nécessite une aide constante du professeur).

*** *PROBLEME n° 82*

connaissances prérequises :

- *propriété de Pythagore*
- *relations métriques dans le triangle rectangle*
- *aire du triangle*
- *triangle rectangle isocèle*

objectifs :

- *approche de la notion de distance d'un point à un plan*
- *plans perpendiculaires*
- *calcul littéral*

résultats :

a) $AB = BC = AC = a\sqrt{2}$

b) $CH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ aire $ABC = \dfrac{a^2\sqrt{6}}{4}$

c) $OBC = OCB = OAC = OCA = OAB = OBA = 45°$

d) $OK = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$

**** *PROBLEME n° 83*

connaissances prérequises :

- *même exercice que le n° 82 mais le triangle ABC n'est pas équilatéral*
- *propriété de Pythagore*
- *calcul de la hauteur du triangle rectangle*
- *aire du triangle*
- *trigonométrie*

objectif :

- *approche de la notion de distance d'un point à un plan.*

résultats :

1) $AB = \sqrt{10}$ $\quad BC = \sqrt{13}$ $\quad AC = \sqrt{5}$

2) $33° \leq OBC < 34°$ $\quad 18° \leq OAB < 19°$

$63° \leq OAC < 64°$ $\quad 26° \leq OCA < 27°$

$72° \leq OAB < 73°$ $\quad 56° \leq OCB < 57°$

3) $OH = \dfrac{3\sqrt{10}}{10}$ $\quad HC = \dfrac{7\sqrt{10}}{10}$ $\quad IO = 6/7$

** *PROBLEME n° 84*

connaissances prérequises :

- *pyramide régulière*
- *propriété de Pythagore*
- *trigonométrie et table trigonométrique*

objectif :

- *calcul des éléments d'un triangle dans un solide.*

résultats :

- $SO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$
- $BAC = ACB = DBC = DBA = CDB = BDA = CAD = ACD = 45°$
- $SCA = SAC = SBD = SDB = 45°$

****** PROBLEME n° 85**

connaissances prérequises :

- *pyramide régulière*
- *propriété de Pythagore*
- *trigonométrie et table trigonométrique*
- *tableau de nombres et gestion de données*
- *usage de la calculatrice scientifique*

objectifs :

- *calcul littéral dans une pyramide*
- *application numérique, interprétation d'un tableau numérique*

résultats :

- *le calcul littéral étant assez difficile, dans un premier temps, il pourrait être utile de donner, pour les élèves en difficulté, des valeurs à* h *et* ℓ *. Le cas général sera traité avec le professeur.*

  $SK = \frac{1}{2}\sqrt{4h^2 + \ell^2}$

  $AS = BS = CS = DS = \frac{1}{2}\sqrt{4h^2 + 2\ell^2} = \sqrt{h^2 + \frac{\ell^2}{2}}$

- *les quatre faces triangulaires de la pyramide ont des angles respectivement isométriques, il suffit de calculer les angles de l'un de ces triangles, par exemple le triangle* SBC : $\widehat{SBC} = \widehat{SCB}$; $\widehat{BSC} = 2(90 - \widehat{SBC})$; $tg\,\widehat{SBC} = \frac{\sqrt{4h^2 + \ell^2}}{\ell} = \sqrt{\frac{4h^2}{\ell^2} + 1}$.

- *les quatre angles formés par chaque arête avec la diagonale de la base sont isométriques.*

$$\widehat{OAS} = \widehat{OBS} = \widehat{OCS} = \widehat{ODS}$$

$$tg\,\widehat{OAS} = \frac{h\sqrt{2}}{\ell}$$

Il semble intéressant de poursuivre cette recherche par une activité en classe : une application numérique dans laquelle ℓ est fixée et, où la hauteur varie.

Par exemple : $\ell = \sqrt{2}$ et $0 \leq h \leq 200$.

L'usage de la calculatrice ou mieux, de l'ordinateur, nécessitera la création d'une routine de calcul sur les nombres sexagésimaux, pour donner un résultat à la minute ou à la seconde près.

- *On établiera un tableau analogue à celui ci-joint.*
- *A partir de ce tableau on pourra établir un graphique sur papier millimétré (210 × 320) :*
  - *l'axe des abscisses portera la hauteur en millimètre*
  - *l'axe des ordonnées portera la valeur des angles en degré*

Mise en place des axes :

- *La feuille sera "debout", l'axe des ordonnées sera placé selon la grande dimension de la feuille, l'axe des abscisses selon l'autre dimension.*
  - *axe des ordonnées : origine* $\longrightarrow 45°$, $1°$ pour 5 mm
  - *axe des abscisses : origine* $\longrightarrow 0$, 1 mm pour 1 mm

Sur ce graphique apparaîtra la variation de l'angle SBC en fonction de h .

On pourra aussi exploiter ce tableau par simple observation et regarder ce qui se passe pour les valeurs limites des angles : $45°$ et $90°$ pour $\widehat{SBC}$.

$0°$ et $90°$ pour $\widehat{OAS}$ et $\widehat{BSC}$

On pourra compléter le tableau pour des valeurs de h supérieures à 200 : 1000, 2000, 5000, 10000 etc., et observer ces résultats.

Exemple : $\ell = \sqrt{2}$

$$\text{tg } \widehat{SBC} = \sqrt{\frac{4h^2}{\sqrt{2}^2} + 1} = \sqrt{2h^2+1}$$

$$\text{th } \widehat{OAS} = \frac{h\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = h$$

h	$2h^2+1$	tg $\widehat{SBC}$	$\widehat{SBC}$ à 1' près	$\widehat{BSC}$ $2(90-\widehat{SBC})$	h	tg $\widehat{OAS}$	$\widehat{OAS}$ à 1' près
0	1	1	45°	90°	0	0	0°
1	3	$\sqrt{3}$	60°	60°	1	1	45°
2	9	3	71°34'	36°52'	2	2	63°26'
3	19	$\sqrt{19}$	77° 5'	25°50'	3	3	71°34'
10	201	$\sqrt{201}$	85°58'	8° 4'	10	10	84°17'
50	5001	$\sqrt{5001}$	89°11'	1°38'	50	50	88°51'
100	20001	$\sqrt{20001}$	89°36'	0°48'	100	100	89°26'
150	45001	$\sqrt{45001}$	89°44'	0°32'	150	150	89°37'
200	80001	$\sqrt{80001}$	89°48'	0°24'	200	200	89°43'
1000	2000001	$\sqrt{2000001}$	89°58'	0°4'	1000	1000	89°57'
2000	8000001	$\sqrt{8000001}$	89°58'47"	0°2'26"	2000	2000	89°58'17"
5000	50000001	$\sqrt{50000001}$	89°59'31"	0°0'58"	5000	5000	89°59'19"
10000	200000001	$\sqrt{200000001}$	89°59'45"	0°0'30"	10000	10000	89°59'39"

L'exercice peut être refait avec une autre valeur de ℓ par exemple $\ell = 2\sqrt{2}$:

$$tg\ \widehat{SBC} = \sqrt{\frac{4h^2}{8} + 1} = \sqrt{\frac{h^2}{2} + 1}$$

$$tg\ \widehat{OAS} = \frac{h\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{h}{2}$$

Le triangle $\widehat{SBC}$ est équilatéral si $h = 2$

..... *etc.*

Ce triangle $\widehat{SBC}$ sera équilatéral chaque fois que $h = \frac{\ell\sqrt{2}}{2}$.

..... *etc.*

*** PROBLEME n° 86

connaissances prérequises :

- *pyramide régulière*
- *propriété de Pythagore*
- *triangle rectangle*
- *trigonométrie et table de trigonométrie*
- *centre du cercle circonscrit à un triangle*

objectifs :

- *approche de la notion de perpendiculaire à un plan*
- *plans perpendiculaires*
- *distance d'un point à un plan*

résultats :

1. *OSA et OSB sont des triangles rectangles en S . 0 est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC .*

2. $SC' = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

3. $54° < \widehat{SCC'} < 55°$ $\qquad 71° < \widehat{SC'C} < 72°$

   $54° < \widehat{CSC'} < 55°$

4. $0S = a\sqrt{\frac{2}{3}}$

****** PROBLEME n° 87**

connaissances prérequises :

- *pyramide régulière*
- *propriété de Pythagore*
- *trigonométrie et table trigonométrique*
- *aire du triangle isocèle*

objectifs :

- *calculs dans le triangle rectangle*
- *extraire une figure plane d'une figure représentée en perspective cavalière*

résultats :

1. $SH = 3\sqrt{7}$

2. $28° < \widehat{HSA} < 29°$ $\qquad$ $69° < \widehat{SMH} < 70°$

3. *Le calcul des angles de deux faces triangulaires consécutives est très difficile en classe de troisième, il peut être effectué par les meilleurs élèves avec l'aide du professeur.*

****** PROBLEME n° 88**

connaissances prérequises :

- *hexagone régulier*
- *triangle équilatéral et sa hauteur*
- *triangle isocèle*
- *propriété de Pythagore*
- *trigonométrie et table trigonométrique*
- *aire du triangle*

objectifs :

- *calcul des éléments d'une pyramide*
- *calcul littéral et application numérique*

exercice à conduire en travaux dirigés

résultats : *si* $R = 4\sqrt{3}$ *et* $h = 8$

$SB = 4\sqrt{7}$

$OH = 6$

$SH = 10$

$49° < \widehat{SCO} < 50°$ $\quad$ $68° < \widehat{CSE} < 69°$

$38° < \widehat{CSO} < 39°$ $\quad$ $81° < \widehat{CSF} < 82°$

$\widehat{CSD} = \widehat{CSB}$ $\quad$ $\widehat{CSE} = \widehat{CSA}$

- *aire du développement :* $192\sqrt{3}$
- *les faces triangulaires sont des triangles équilatéraux si* $h = 0$ *, le point* S *est le centre de l'hexagone.*

*** *PROBLEME n° 89*

connaissances prérequises :

- *propriétés du carré*
- *section médiane du cube*
- *section diagonale du cube*
- *droite des milieux dans le triangle*
- *propriété de Pythagore*
- *propriétés du triangle équilatéral*

objectifs :

- *tracé dans un cube*
- *calcul littéral dans un carré*
- *propriétés de l'octaèdre régulier*

résultats :

1. $MP = \frac{a}{2}$ $MQ' = \frac{a}{2}$ $PQ = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

2. $PP' = a$

3. (P,Q,P',Q') est un carré

4. (P,Q,P',Q') ; (P,R,P',R') ; (Q,R,Q',R')

5. $S = a^2\sqrt{3}$

Les fascicules de la série

FICHES IREM

sont conçus pour apporter aux professeurs de mathématiques des idées et des aides pédagogiques sur certains thèmes précis du programme des collèges et LEP.

Sur chacun des thèmes traités, le lecteur pourra donc trouver des réponses aux questions qui se posent face aux ambiguïtés des programmes ou devant la nécessité de mettre en œuvre une pédagogie qui soit adaptée au niveau hétérogène des classes actuelles.

Contrairement aux classiques manuels, les fascicules de la série ***FICHES IREM*** *sont essentiellement axés sur des activités destinées aux enfants et expérimentées dans les classes :*

Parallèlement à une vue d'ensemble de chaque thème qui permettra au professeur de dégager les éléments et la progression qui conviennent à ses élèves, on trouvera de très nombreuses fiches de travail (tests, fiches d'apprentissage, exercices d'entraînement ou d'évaluation, etc.) susceptibles d'être enrichies ou adaptées — ou tout simplement reproduites ... — de façon à offrir un large éventail d'utilisations possibles.