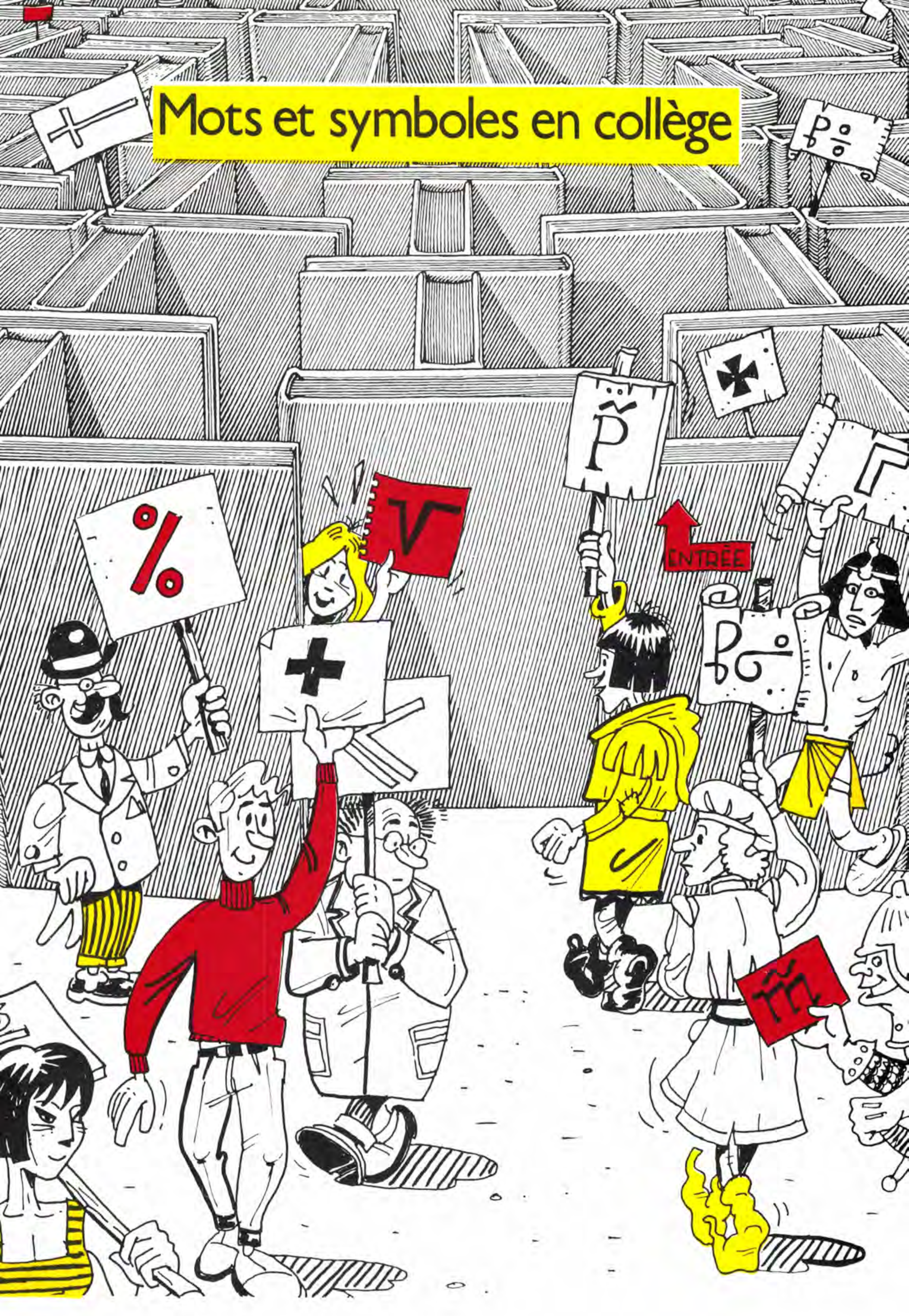
Mots et symboles en collège



Édité et imprimé par l'**Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques** - (Université de NANCY I - Faculté des Sciences) -
B.P. 239 - 54506 VANDOEUVRE-les-NANCY CEDEX

Dépôt légal : 1er trimestre 1988
n° de la publication : 2-85406-108-X

Le Directeur : Philippe LOMBARD

Réf. II.11

/

1

M A T H E M A T I Q U E :

du grec mathêma qui signifie

" l'instruction , la science "

IREM de LORRAINE

MOTS ET SYMBOLES

Marie BETTEGA **Georges ANFRE**

Le vocabulaire et l'écriture des mathématiques utilisent des mots et des symboles qui, pour l'élève, peuvent être source de difficultés :

- *mots nouveaux et spécifiques au langage scientifique (hypoténuse, parallélépipède, polygone ...)*
- *mots utilisés dans un sens différent de leur sens commun (facteur, sinus, supplémentaire, "quatre coins de l'hexagone" ,...) ou dans un sens plus précis (cercle, coordonnées ...)*
- *symboles spécifiques (π , $\in$, $\sqrt{\ }$,...)*
- *symboles utilisés dans un sens différent de leur emploi habituel (: , (,) , $\hat{A}$, etc.)*

Comprendre l'origine et l'évolution des mots et des symboles peut aider l'élève à surmonter ces difficultés.

Cet ouvrage permet de connaître les principaux éléments de la genèse des mots, des notations et des concepts de la langue mathématique utilisée au collège ; langue vivante, évolutive, qui offre encore matière à débat de nos jours (la notation pour désigner la tangente est aujourd'hui "tan" ; les calculatrices scientifiques sont peut-être à l'origine de cette nouveauté) .

Le repérage de l'apparition des notions mathématiques (qui va de pair avec l'apparition de notations nouvelles) permet de montrer que leur origine est souvent pratique et utilitaire ; ceci ouvre une voie de relation vers les autres disciplines d'enseignement.

Aujourd'hui des divergences de notations existent et peuvent nuire à l'enseignement. Le prolongement de cet ouvrage serait la recherche d'une uniformisation d'un nombre donné de symboles (mathématiques) afin de favoriser les échanges scolaires qui tendent à s'internationaliser.

U T I L I S A T I O N   D E   L ' O U V R A G E

Les mots, utilisés dans les programmes de mathématique du premier cycle, ont été regroupés par thèmes, mais un index alphabétique permet de les retrouver individuellement.

Pour chaque mot, nous avons procédé de la façon suivante :

* *recherche d'une origine étymologique.*

* *évolution du mot et de sa signification en respectant dans la limite des sources bibliographiques les grandes étapes : Antiquité (civilisations babyloniennes, égyptiennes, grecques, romaines, indiennes), civilisation arabe, Moyen-Age, Renaissance, 17e siècle jusqu'à nos jours.*

* *évolution analogue du symbole correspondant.*

Remarques :

1) *Certaines civilisations ont été très peu évoquées (maya, chinoise ...) par insuffisance de sources bibliographiques.*

2) *Dans les livres traitant de l'Antiquité les informations ne sont pas toujours univoques ; ceci est dû à la rareté des ouvrages originaux et à la traduction de ces ouvrages. Nous nous sommes efforcés d'utiliser les réflexions les plus pertinentes.*

3) *Des mots récents tels que "orthonormé" ne figurent pas dans l'ouvrage car nous n'en connaissions que l'origine étymologique.*

4) *Il n'a pas été possible de situer et d'expliquer, entre autres, les notations * (dans $\mathbb{N}^*$,...) , $\| \ \|$ (norme d'un vecteur) , [AB] , [AB) , (AB) (notations d'un segment, d'une demi-droite, d'une droite).*

TABLE DES MATIERES

NUMERATION	p. 7
NOMBRES	p. 33
OPERATIONS	p. 81
ALGEBRE , FONCTIONS	p.109
GEOMETRIE	p.133
TRIGONOMETRIE	p.207
MESURES	p.217
ENSEMBLES	p.233
RAISONNEMENT	p.237
BIBLIOGRAPHIE	p.243
INDEX	p.247

7

NUMERATION

LA NUMERATION

Nous sommes si habitués à lire et écrire un nombre que nous sommes tentés de croire que la notion de nombre est une notion innée chez l'homme. Cela est bien sûr faux. Pour avoir une idée plus précise sur la "naissance" des nombres et leur utilisation il faut d'abord savoir pourquoi les hommes ont compté.

1. LA NECESSITE DE COMPTER.

Les hommes préhistoriques ont ressenti la nécessité de compter notamment le nombre d'animaux de leurs troupeaux. Ils voulurent rapidement conserver le nombre.

Pour cela ils utilisèrent d'abord des cailloux puis des encoches (souvent regroupées par 5) dans des bouts de bois ou des os.

Ils figuraient aussi des nombres en utilisant les différentes parties de leurs corps (doigts, coudes, épaules...).

2. LA NECESSITE DES SYMBOLES.

Après avoir utilisé des numérations parlées, avec l'essor du commerce, il fallut laisser des traces écrites d'où la nécessité de symboles. Il faut d'ailleurs remarquer que les nombres sont utilisés dans le commerce avant que les monnaies soient inventées (les premières monnaies connues dateraient du 7e s. av. J-C).

Il y a par la suite une floraison de nombreux systèmes de numération : système égyptien, système babylonien (base 60) , systèmes alphabétiques (grec, hébreu, arabe)...

3. LA DECOUVERTE DU ZERO.

C'est en Inde au 8e siècle que l'on signifie pour la première fois l'absence du chiffre dans un rang donné par un symbole particulier.

Cela complète puissamment les 9 symboles existant déjà (dès le 3e s. av. J-C) et marque vraiment la naissance du système décimal.

4. LES DIFFICULTES DU SYSTEME DECIMAL.

Au 10e siècle les arabes transmettent à l'Europe le système décimal.

Ce système est en concurrence avec le système sexagésimal, les systèmes alphabétiques et surtout le système romain. On trouve souvent alors un mélange de chiffres "arabes" et de chiffres romains dans un même calcul.

Le système décimal ne s'impose que très difficilement et très tardivement (fin 16e s.) car l'habitude du travail sur abaque avec jetons est très enracinée.

Les 10 symboles évoluent au cours des siècles. Ils ne prennent leurs formes définitives qu'avec l'apparition de l'imprimerie.

En France, en 1790, le système décimal est utilisé dans le système officiel de mesure... mais il faut attendre 1889 (conférence générale du mètre) pour que le système métrique s'étende à la plupart des pays.

Reste une question : pourquoi la base 10 ?

Tout simplement parce que l'on a toujours compté naturellement sur les 10 doigts. D'ailleurs les autres systèmes primitifs parlés étaient en base 5 (une main) ou en base 20 (10 doigts + 10 orteils).

La victoire du système décimal fut longue à se dessiner. Pas loin de 800 ans pour que le zéro indien se popularise en Occident ! Cette lenteur dans l'acquisition du système de numération décimale n'est pourtant rien par rapport au domaine des calculs.

SYSTEME DE NUMERATION EGYPTIENNE

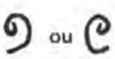
Il date de 3000 ans avant J-C. Il est décimal et additif (c'est-à-dire que l'on écrit le symbole autant de fois que nécessaire).

. L'ECRITURE EST D'ABORD HIEROGLYPHIQUE :

Le sens de la lecture peut être de gauche à droite, de droite à gauche, d'en haut vers le bas ou du bas vers le haut. Il est précisé par le dessin des symboles gravés sur la pierre : de toute façon les symboles les plus élevés sont écrits avant les autres.

 *est le symbole représentant l'unité.*

 *est le symbole représentant 10 ; il figure le dispositif en forme d'arceau dont on se servait pour attacher les bestiaux au paturage.*

 *est le symbole représentant 100 ; il figure la corde d'arpenteur de 100 coudées.*

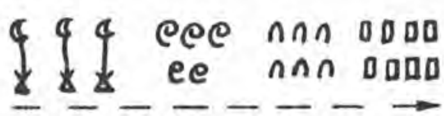
 *est le symbole représentant 1000 ; il figure une fleur de lotus.*

 *représente 10 000 ; il figure un doigt à l'extrémité recourbée.*

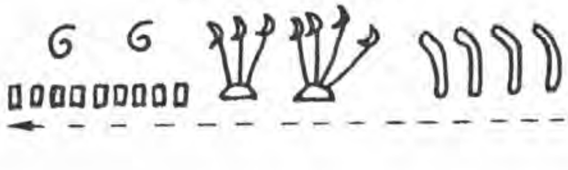
 *représente 100 000 ; c'est le dessin d'un têtard.*

Exemples :

3568 est représenté par :



47 209 s'écrit :



Dans l'écriture le nombre peut être considéré comme un opérateur.

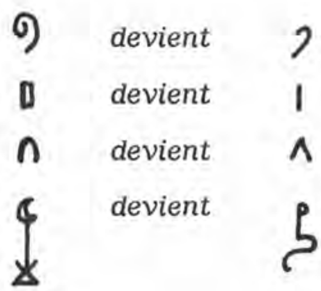
Ainsi  *représente 10 006*  *représente 60 000*

Ces symboles permettent d'écrire facilement des fractions (voir p. 59).

. **L'ECRITURE EST ENSUITE HIERATIQUE** *(11e s. av. J-C) :*

Le dessin est alors réalisé de façon continue sur papyrus, le sens d'écriture étant fixe de droite à gauche.

Par exemple on a les transformations :



Malgré la longueur de l'écriture de certains nombres, ce système permettait aux égyptiens d'additionner et de soustraire, de multiplier (en utilisant les tables donnant les résultats des multiplications par 2 et en ajoutant les produits partiels), de diviser. Bien que souvent longs, les calculs aboutissaient à un résultat.

NUMERATION GRECQUE

Ce système de numération "alphabétique et décimal" a joué un rôle fondamental, et n'a été détrôné que par l'apparition des "chiffres indiens".

* *les grecs ont commencé par symboliser les vingt-quatre premiers nombres entiers en utilisant les 24 lettres de leur alphabet (8e s. av. J-C)*

Α	Ι	Ρ
Β	Κ	Σ
Γ	Λ	Τ
Δ	Μ	Υ
Ε	Ν	Φ
Ζ	Ξ	Χ
Η	Ο	Ψ
Θ	Π	Ω

Ce système était voué à l'échec car c'était une simple énumération, et il était impossible de noter les nombres au-delà de 24

* *imprégnés de la base 10, les savants grecs ont ensuite traduit la numération parlée dans l'écriture, en choisissant les neuf premières lettres de l'alphabet pour noter les neuf premiers entiers, les neuf lettres suivantes pour noter les neuf premières dizaines ... Ils ont introduit dans leur alphabet, uniquement lorsqu'il servait à la numération, trois lettres d'origine sémitique ; en effet, l'alphabet grec ne comportant que 24 lettres, le système se serait essoufflé avant d'atteindre 1000*

unités	Α	Β	Γ	Δ	Ε	Ϝ	Ζ	Η	Θ
dizaines	Ι	Κ	Λ	Μ	Ν	Ξ	Ο	Π	Ϟ
centaines	Ρ	Σ	Τ	Υ	Φ	Χ	Ψ	Ω	Ϡ

14

* au 3e siècle av. J-C, l'écriture cursive a été utilisée dans les inscriptions, et l'alphabet numérique a suivi cette évolution

α β γ δ ε ϛ ζ η θ

ι κ λ μ ν ξ ο π ϟ

ρ σ τ υ φ χ ψ ω ϡ

Les neuf premiers mille étaient notés en utilisant les neuf premières lettres, précédées à gauche d'un iota souscrit ; la myriade était notée M ; une barre au-dessus de l'écriture permettait de différencier un mot d'un nombre.

Dans ce système de numération , chaque "chiffre" portant en lui sa valeur numérique et l'ordre d'unité qu'il représente, le zéro n'a pas de raison d'être.

507	se note	φζ	
30 000	se note	$\overset{\gamma}{\mathrm{M}}$	(3 myriades)
43 720 000	se note	$\overset{\delta\tau o\beta}{\mathrm{M}}$	(4372 myriades)
314 159	se note	$\overset{\lambda\alpha}{\mathrm{M}}$ ͵δρνθ	(31 myriades et 4159)

Le plus grand nombre pouvant être noté est 99 999 999

SYSTEME DE NUMERATION ROMAINE

. ***LES SYMBOLES :***

Ils proviennent directement de la pratique de l'entaille sur un fragment d'os ou de bois.

Tout utilisateur de la taille représente les nombres 1, 5, 10 par l'une des encoches suivantes (documents retrouvés aussi bien en Europe qu'en Asie ou en Amérique du Sud).

Pour 1 : |

Pour 5 : / ou \ ou Λ ou > ou V ou < ou λ ou ʎ

Pour 10 : X ou ✗ ou ✗ ou + ou X

Par adjonction d'une encoche sur 5 on obtient :

Pour 50 : IV ou Ψ ou ᛏ ou VI

Par adjonction d'une encoche sur 10 on obtient :

Pour 100 : IX ou ✳ ou XI

Ces encoches se retrouvent dans les symboles suivants :

	Etrusques	Romains
1	I	I
5	Λ	V
10	X ou ✗ ou +	X
50	ᛏ	Ψ
100	✳	✳
1000	⊗ ou ⊗ ou ⊕	

Chez les Romains :

- *Pour 50 le signe initial évolue ainsi :*

- *Pour 100 le signe initial évolue ainsi :*

ce dernier signe est assimilé à la première lettre de Centum

- *Pour 1000 on note l'évolution suivante :*

ce dernier signe devient M sous l'influence de l'initiale du mot mille.

- *Pour 500 le signe D provient de la "moitié" du signe initial pour mille.*

. ***Le système*** *basé sur ces symboles est au départ additif uniquement. 4 et 9 se notent d'abord* IIII *et* VIIII *avant les notations soustractives* IV *et* IX .

Les symboles permettent une écriture facile des nombres. Mais ils sont d'une très grande complication pour les calculs. Cela ne gêne pas les romains qui effectuent tous les calculs sur abaque (les "chiffres romains" servent alors à noter le résultat du calcul).

ABAQUE

MOT : *vient du latin abacus, qui vient du grec abàkion signifiant "plateau, table, tablette".*

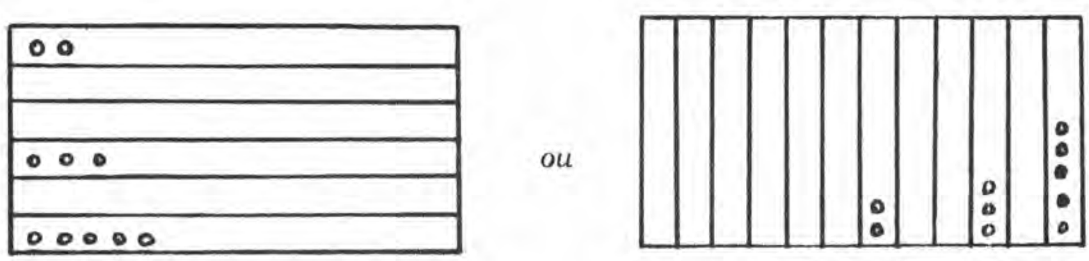
Le mot abacus désigna pour les romains un certain nombre d'objets ayant pour caractère commun de présenter une surface plane, et plus spécialement les dispositifs destinés à la pratique du calcul.

UTILISATION :

L'usage de l'abaque fut connu à différentes époques, dans différentes régions du monde et sous diverses formes. Citons :

- ***les abaques à poussière*** *sur lesquels on trace avec le doigt des signes et des nombres. Ils étaient utilisés par les grecs, les latins, les arabes, les persans, et vraisemblablement par les égyptiens, les babyloniens et les indiens.*
  Le mot arabe abaq signifie "poussière fine".

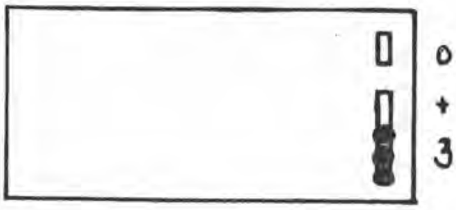
- ***les abaques grecs et romains*** *(2e s. av. J-C) :*
  Ce sont des tables ou planchettes sur lesquelles des divisions en plusieurs lignes ou colonnes parallèles sont tracées pour séparer les différents ordres d'unités. On y place des jetons ou des cailloux.
  Ainsi 200 305 est représenté par :



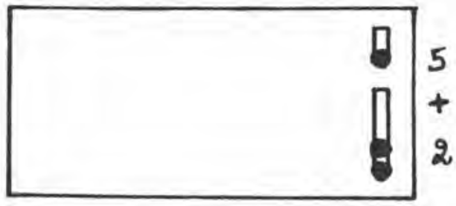
- ***les abaques "de poche" romains :***
  Ce sont de petites plaquettes de métal divisées en un certain nombre de rainures parallèles dans lesquelles glissent des boules mobiles de même taille.

Certains abaques sont constitués de deux parties dans chaque rainure : l'une en position inférieure avec quatre boules, l'autre en position supérieure avec deux boules représentant chacune 5 unités de la partie inférieure de la même rainure.

3 unités d'un même ordre sont ainsi représentées par :



7 unités d'un même ordre sont ainsi représentées par :



. **les abaques à jonchets** *(12e s. ; et peut-être dès le 5e s. en Chine et au Japon) :*

On dispose d'un damier ou d'un échiquier sur lequel on place des bâtonnets d'ivoire ou de bambou :

1 est représenté par :	𝍠	*ou*	𝍩
2 est représenté par :	𝍡	*ou*	𝍪
3 est représenté par :	𝍢	*ou*	𝍫
4 est représenté par :	𝍣	*ou*	𝍬
5 est représenté par :	𝍤	*ou*	𝍭
6 est représenté par :	𝍥	*ou*	𝍮
7 est représenté par :	𝍦	*ou*	𝍯
8 est représenté par :	𝍧	*ou*	𝍰
9 est représenté par :	𝍨	*ou*	𝍱
	cas des unités de rang impair		cas des unités de rang pair

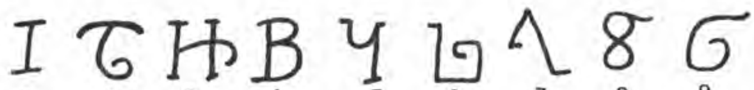
Ainsi 54 878 est représenté par :

𝍧	𝍯	𝍧	𝍬	𝍤
8	7	8	4	5

$\longleftarrow$

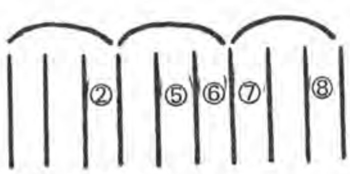
19

. **les abaques avec jetons marqués** *(ces jetons étaient appelés "apices", du mot latin signifiant "forme des lettres") :*
Au 10e siècle, en Europe, on remplace dans chaque colonne de l'abaque le nombre de jetons par un jeton portant un symbole. Tout d'abord les symboles utilisés sont les neuf premières lettres de l'alphabet.
Ensuite on trouve les signes suivants :



pour 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Chacun de ces symboles est désigné par un mot (la plupart de ces mots sont d'origine arabe). Pour marquer zéro on met un jeton blanc que l'on désigne par l'un des mots sepos ("jeton" en grec) ou cifra ("vide").
Les chiffres arabes s'introduisent en Europe en supplantant peu à peu les autres symboles sur les jetons.
On trouve parfois un arc de cercle au-dessus de chaque colonne ou de chaque groupe de trois colonnes de l'abaque :



représente 2 056 708

Pour faire un calcul avec deux nombres sur l'abaque, on les sépare par une ligne horizontale, et on "reporte" sur une même ligne verticale au-dessus.
Les intervalles entre les lignes horizontales sont appelés espaces ; les intervalles entre les lignes verticales sont appelés changes (changement d'unité).
Savoir calculer se dit alors "compter sur les lignes".

. **les bouliers-compteurs :**

Les lignes des abaques sont remplacées par des cordes sur lesquelles sont enfilées des boules que l'on fait avancer ou reculer.

Les bouliers-compteurs furent utilisés jusqu'au 19e siècle dans les écoles françaises. Ils sont encore utilisés de nos jours dans des magasins japonais ou russes par exemple.

. *jusqu'au 18e siècle les calculs avec abaques et les calculs "à la plume" utilisant le système de numération indo-arabe s'opposèrent violemment. On parlait des "abacistes" et des "algoristes" (voir p. 113).*

On disait de quelqu'un qui savait travailler avec les deux techniques qu'il "comptait sur les lignes et avec la plume". On disait aussi qu'il fallait savoir "poser et saisir".

REMARQUES :

. *pendant longtemps l'usage commercial et financier de l'abaque fut très répandu. Le ministre des finances en Grande-Bretagne est appelé le chancelier de l'échiquier car, jusqu'à la fin du 18e siècle, les fonctionnaires de ce ministère utilisaient des tables à jetons (exchequer) pour calculer les impôts.*

. *on retrouve encore le système des abaques romains pour les tableaux servant de compteurs aux joueurs de billard.*

CHIFFRES

LE MOT :

- *vient de l'arabe sifr qui signifie "vide" ; saffara signifie "annuler".*

- *il a été latinisé en ziferam , ziphram , zephirum (13e s. en Occident) puis zefiro et zero en italien.*

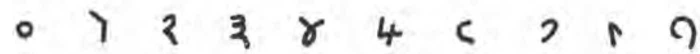
- *par déformation de la racine Zephera ("vide") en Sephera ("compte"), le mot désigne, à partir du 15e siècle, chacun des symboles permettant de représenter un nombre.*

LES SYMBOLES :

Pour 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

notation brahmi [1] **:**
(3e s. av. J-C)

notation hindoue [2] **:**
(5e s.)



notation grecque :

- *archaïque (dès le 6e s. av. J-C) avec des symboles qui sont les initiales des noms des nombres. Par exemple :*

Χ	*pour*	*chilioï*	*1000*
Δ	*pour*	*deka*	*10*
Γ	*pour*	*penta*	*5*

- *classique (3e s.) avec les lettres de l'alphabet : α pour 1 , β pour 2 ... (surmontées éventuellement d'une barre pour différencier un nombre et un mot).*

notation arabe : (avant le 8e s.) — les nombres sont écrits soit en toutes lettres soit avec des caractères empruntés à l'alphabet grec.

notation arabe (3) **:** (8e-9e s.) — les nombres sont écrits avec l'alphabet arabe.

arabe d'Orient (4) **:** (10e s.)

arabe d'Occident (5) **:**

Europe : (12e s.)

Europe : (13e s.)

Europe : (14e s.)

---

(1) : trouvée dans des inscriptions. Le zéro n'existe pas.

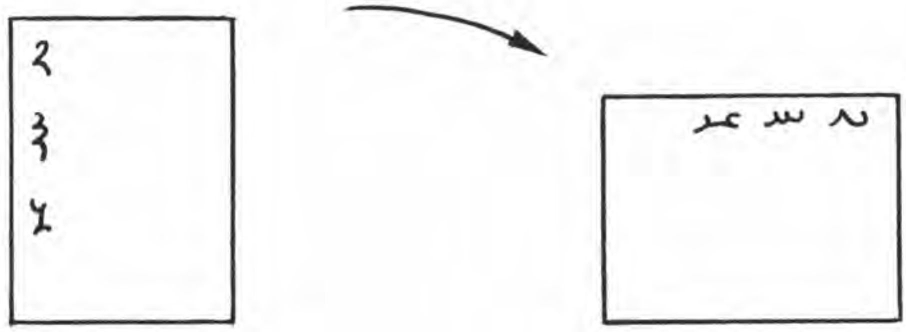
(2) : texte datant de 720 d'un savant indien fixé en Chine.

(3) : les lettres arabes pour désigner des nombres se retrouvent plus tard dans la numération sexagésimale : les nombres de 1 à 59 s'écrivent avec une ou deux lettres dont la somme des valeurs est le nombre. Les chiffres sont appelés ǧumal (pluriel de ǧumla : somme).

(4) : ces chiffres étaient utilisés sur des abaques à poussière. Ils sont appelés gubār qui signifie poussière.

(4) et (5) : on peut être surpris par les transformations d'écriture entre les chiffres d'origine indienne et les chiffres arabes.

Les anciens scribes musulmans avaient l'habitude de tracer les caractères de haut en bas, les lignes se succédant de gauche à droite. Ensuite ils tournaient leurs manuscrits de 90° vers la droite pour lire normalement de droite à gauche. Ils ont donc également fait cette rotation sur les chiffres indiens.



chiffres indiens chiffres "arabes"

Remarques :

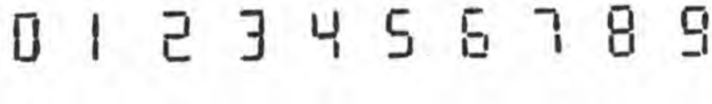
a) *dans l'esprit populaire, au Moyen-Age, était chiffre toute écriture incompréhensible d'où l'expression "texte indéchiffrable".*

Le verbe "chiffrer" en ancien français signifiait marquer une correspondance secrète . En effet, vers le 13e siècle, on usait des neuf chiffres et du zéro en cachette, un peu comme un code secret. Plus tard le verbe chiffrer voulut dire numéroter .

b) *De très nombreuses langues distinguent le sens initial (zéro) du sens actuel.*

- *en anglais : cipher pour zéro ; figure ou numeral pour chiffre.*
- *en allemand : jusqu'au 15e siècle, Ziffer est employé pour zéro puis il est remplacé par die Null qui provient directement de l'italien.*
- *en suédois : l'expression "un homme n'ayant aucune valeur" utilise le mot siffra .*

c) *le graphisme des chiffres continue à évoluer au 20e siècle.*



ZERO

LE MOT :

- de l'italien *zero* provenant du latin *ziferam* ou *ziphram*.
- de l'arabe *sifr* qui signifie "vide" et qui lui-même est la traduction du mot sanskrit *sūnya* qui a le même sens.

LE SYMBOLE :

- on trouve le *zéro* chez les indiens aux 7e-8e siècles. Il est associé aux mots *sūnya* "vide" ou *kha* "espace". Les indiens le notent par un cercle qui, au fil des copies, devient si petit qu'il se transforme en un point (*bindu* en sanskrit).

- les astronomes grecs utilisent le système sexagésimal des babyloniens auxquels ils ajoutent le *zéro* avec la lettre o, première lettre du mot οὐδέν signifiant "rien". Dans la numération alphabétique grecque, o désigne 70, donc cette lettre est disponible dans le système sexagésimal. (voir p. 13)

- le symbole *zéro* est une invention des indiens et n'a aucun rapport avec le *zéro* des astronomes grecs.
  Ches les arabes on trouve les deux symboles : le "zéro grec" noté ; le "zéro indien" noté o.
  Plusieurs traités arabes d'astronomie montrent bien la différence :

22° 0' 44" est noté

 ou 

ce qui correspond à :

22 00 44	22 0 44
où deux zéros indiens indiquent l'absence de minutes	où chaque nombre est représenté par un seul signe alphabétique
	est le signe alphabétique arabe correspondant à o le signe alphabétique grec

le zéro transmis par les arabes à l'Europe est donc bien le symbole provenant des indiens.

Remarques :

- *nombre était traduit en arabe par un mot qui signifiait "encoche, trait servant à compter" ; le zéro ne pouvait être représenté par un trait, et donc n'était pas considéré comme un nombre.*

- *le symbole o était déjà utilisé dans l'écriture du Coran pour indiquer les lettres explétives que l'on ne prononce pas. Il était aussi employé pour indiquer une coupure dans un texte (on voit dans cet emploi l'origine des points de suspension).*

- *en raison de la simplification qu'il apportait dans l'écriture des nombres et dans les calculs, au Moyen-Age, le zéro fut considéré comme un signe secret, mystérieux, voire magique.*

- *le verbe chiffrer fut synonyme en ancien français de supprimer, annuler.*

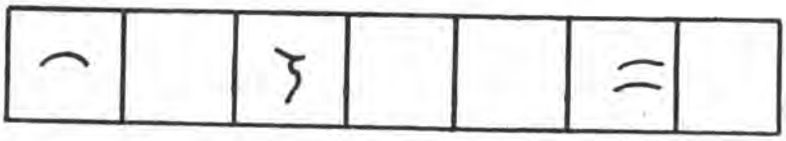
- *le mot nul vient du latin nūllus qui signifie "aucun".*

26

SYSTEME DECIMAL

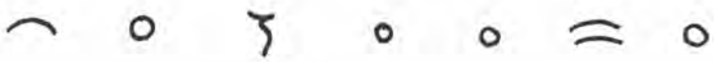
- *le système décimal vient d'Inde. On en trouve des traces dès le 3e siècle avant J-C.*

- *jusqu'à la première moitié du 8e siècle le symbole zéro n'existe pas. On écrit un nombre en représentant ce que l'on voit sur la "planche à poussière", l'abaque :*



pour 1 0 6 0 0 2 0

- *la suppression des colonnes de l'abaque dans la deuxième moitié du 8e siècle entraîne la nécessité d'un nouveau symbole pour montrer la "colonne vide de l'abaque".*
C'est le zéro représenté par un petit rond ou un point, auquel les indiens donnent diverses applications : vide, ciel, espace, atmosphère, point,



qui s'énonce sous forme littéraire :

Kha	*netra*	*ambara*	*śūnya*	*rasa*	*gagana*	*eka*
ciel	*yeux*	*atmosphère*	*vide*	*saveurs*	*espace*	*un*
0	2	0	0	6	0	1

- *ce sont les arabes qui transmettent le système décimal indien à l'Europe au 10e siècle (on parle de chiffres "arabes" mais les arabes nous les transmettent en écrivant par exemple le "Livre donnant* *toutes les connaissances sur l'arithmétique indienne") . Peu à peu en Europe on remplace dans chaque colonne de l'abaque le nombre de jetons par un jeton portant un chiffre.*

. *jusqu'au 14e siècle les différents types de numération subsistent parallèlement.*

- *dans les pays islamiques : écriture des nombres en toutes lettres, écriture alphabétique, écriture décimale.*
- *en Europe : écriture romaine décimale pour la partie entière avec écriture sexagésimale pour la partie décimale.*

. *au 15e siècle on peut dire que le système indo-arabe commence à s'imposer.*

MILLION — MILLIARD

LE MILLION :

MOT : vient de l'italien *milione* qui signifie "grand mille" ; le suffixe *one* marque un augmentatif ; de la même façon *padrone* signifie "grand père".

Il n'apparaît pas avant le 13e siècle. Il met très longtemps à s'imposer en Europe sur le "millier de milliers" encore très fréquent tout au long du 16e siècle par exemple.

LE MILLIARD :

Ce mot n'est utilisé qu'au début du 16e siècle, alors que le mot billion est utilisé dès la fin du 15e siècle. Ce sont plus des curiosités que des mots utilisés dans la pratique.

L'utilité de désigner systématiquement par des mots les nombres supérieurs au million ne se fait vraiment sentir qu'au début du 20e siècle et devient alors une mode.

Le mot billion désigne parfois 10^9 (USA), parfois 10^{12} (GB).

En France, billion et milliard sont en concurrence pour 10^9, le dernier s'imposant finalement.

LA NOTATION DES GRANDS NOMBRES :

Les notations sont toutes issues de la pratique du calcul sur abaque ; citons parmi de très nombreuses (et parfois confuses) notations, les plus fréquentes :

* au 13e siècle : $\widehat{1}\ \widehat{234}\ 567$

* au 15e siècle Chuquet répartit les chiffres par paquets de six à l'aide de points supérieurs et utilise les termes million, billion, trillion, quadrillion ... pour lire les grands nombres.

* au 16e siècle : $\dot{1}.23\dot{4}.56\dot{7}$

$1 \mid 234 \mid 567$

$\overset{\vdots}{1}\ 23\dot{4}\ 567$ ou $\underset{\vdots}{1}\ 23\underset{\cdot}{4}\ 567$

* au 18e siècle : 1, 234, 567

Les groupes de 3 chiffres portent des noms très variés : périodes, régions, ternaires .....

PUISSANCES DE 10

- *en* ***Inde*** *vers le 4e siècle av. J-C on sait manier des puissances de 10 élevées . Des noms sont donnés aux puissances de 10 jusqu'à* 10^{23} *. A la même époque, en Grèce, on ne sait calculer que jusqu'à 10 000 .*

- *au 3e siècle av. J-C* ***Archimède*** *propose son système basé sur la myriade :*

1 myriade : 10 000 : 10^4	*unité du 1er ordre*
1 myriade de myriades : 10^8	*unité du 2e ordre* $(10^4)^2$
10^{12}	*unité du 3e ordre* $(10^4)^3$
$\vdots$	

il prend ensuite $N = (10^8)^{10^8}$ *comme unité d'une nouvelle période*

$\vdots$

jusqu'à N^{10^8}

Archimède utilise son système pour estimer que le nombre de grains de sable dans l'univers (à son époque, ce dernier est supposé limité) est inférieur à 10^{51} *.*

SYSTEME SEXAGESIMAL

Il a été chez les grecs, puis chez les arabes, un système savant de numération utilisé par les astronomes ; nous nous en servons encore pour la mesure des arcs, des angles et pour la mesure du temps.

A partir des grecs ce système n'a été pratiquement employé que pour exprimer les fractions, mais auparavant, en Babylonie, il servait à exprimer également les entiers ; c'était un système complet de numération utilisé par les mathématiciens et les astronomes.

Différentes hypothèses ont été émises au cours des siècles pour expliquer l'origine de ce système ; voici les principales :

- *selon Théon (4e s.) , le commentateur de Ptolémée (2e s.) : "60 est le plus commode à utiliser de tous les nombres, par le fait que, entre tous ceux qui ont le plus de diviseurs, étant le plus bas, il est le plus aisé à manier" .*

- *Cantor (1880) attribuait une origine "naturelle" à ce système : le nombre de jours de l'année arrondi à 360 , aurait donné le cercle de 360 degrés et la division du cercle en six parties, suggérée par le fait que la corde du sextant est égale au rayon, aurait donné le nombre 60 .*

- *selon Hoppe (1910) le triangle équilatéral aurait servi à mesurer les différences de direction, et la division décimale de l'angle donné par cette figure aurait donné naissance à la division sexagésimale du plan, et à partir de là, à la numération sexagésimale.*

En réalité le système sexagésimal a été le mode exclusif de numération des sumériens (4e millénaire av. J-C) , prédécesseurs des babyloniens ; il est né du croisement de deux nombres : 10 (base de la numération la plus généralement usitée), et 6 (qui a l'avantage d'être divisible à la fois par 2 et par 3) . Ce n'est pas à proprement parler un système sexagésimal puisqu'il utilise alternativement les bases 10 et 6 . Il progresse en effet de la façon suivante :

$$1$$
$$10$$
$$10 \times 6$$
$$10 \times 6 \times 10$$
$$10 \times 6 \times 10 \times 6$$

31

VIRGULE

MOT : *vient du latin virgula signifiant "petite verge, instrument pour battre".*
Les arabes utilisaient le mot fāsila dont la racine FSL signifie "trancher, séparer".

LE SYMBOLE :

L'écriture d'un nombre avec virgule ne s'est imposée que très lentement. La notation avec point ou virgule ne se répand qu'au 18e siècle.

Quelques autres notations. Pour 17,89 ou 17.89 :

1202 (Leonard de Pise)*	:	$\frac{9}{10}\ \frac{8}{10}\ 17$
1530 (Rudolff)	:	17|89
1570 (Viete)**	:	$17\,\underline{89}$
1582 (Stevin)***	:	17⓪8①9②
1592 (Magini)****	:	17·89
1592 (Burgi)	:	$1\overset{\circ}{7}\,89$
1616 (Kepler)	:	17(89
1630 (Boulenger)	:	$17\,\overset{I}{8}\overset{II}{9}$
1720 (Reyneau)	:	$17\,8\overset{II}{9}$

---

* *symboles se lisant de droite à gauche par "héritage" des arabes et signifiant : 17 unités 8 dixièmes et 9 dixièmes de dixièmes soit 9 centièmes.*

** $17\,\underline{89}$ *par omission du 100 ; écrit au début* $17\ \frac{89}{100}$.

*** *cette notation rappelle* $17 \times 10^{0} + 8 \times 10^{-1} + 9 \times 10^{-2}$.

**** *en concurrence avec le point désignant la multiplication. Pour les différencier, à l'époque, on note :* $2^{\cdot}5$ *ou* $2\cdot5$ *pour 2,5 et 2.5 pour 10 .*

33

N O M B R E S
(fraction, π , rapport ...)

ARITHMETIQUE

LE MOT : *du grec arithmos qui signifie "nombre" (on retrouve le mot arithmos dans logarithme logo + arithmos , "proportion + nombre").*

LA NOTION :

Ce nom fut donné dans l'école de Pythagore (5e s. av. J-C) à la "science des nombres" considérée comme distincte de la pratique du calcul appelée logistique (désignée au cours des siècles parfois par l'une des expressions : "la pratique", "l'art de tailler", "l'art de compter").

Mais en fait ce que l'on entend par arithmétique a beaucoup varié et évolué au cours des âges (théorie des nombres et/ou calculs pratiques).

- *ainsi chez* ***les égyptiens*** *et les* ***babyloniens*** *on trouve des problèmes de partages de terres, de divisions de pains à un nombre déterminé d'individus ... On donne la solution à ces problèmes sans explications et sans essayer de généraliser la solution trouvée à un même type de problème.*

- ***l'école de Pythagore*** *définit les nombres pair , impair , figuré , premier ... On trouve des démonstrations à base géométrique sur la théorie des nombres dans les Eléments d'Euclide (3e s. av. J-C).*

- *dès* ***Diophante*** *(2e s.) il y a cependant des adjonctions de problèmes numériques de la vie courante.*

- ***en Inde*** *, au 4e siècle, on trouve les Siddhanta qui comprennent deux parties : Lilavata ("joueuse") qui est un traité "d'arithmétique" et Bîjaganita ("calculs pour les corrections") qui est un traité "d'algèbre".*

- ***en Chine*** *aussi on trouve notamment des résolutions de problèmes concrets. Vers 500 on trouve des problèmes de progressions arithmétiques posés par le travail des tisserands.*
  Le premier terme est le nombre de pièces tissées le premier jour. La raison est l'augmentation journalière.

- *la théorie des nombres mise au point par les grecs se transmet* ***au Moyen-Age*** *sans apport nouveau. Avec la musique, la géométrie et l'astronomie, l'arithmétique fait alors partie du quadrivium scientifique .*
  Jusqu'au 16e siècle tout traité d'arithmétique contient les neuf rubriques suivantes : numération , addition , soustraction , "duplation", multiplication , "médiation" , division , progressions , extraction de racines carrées et cubiques . On se cantonne donc aux opérations.

- ***à la Renaissance*** *le nom d'arithmétique commence à s'étendre aussi bien à la pratique qu'à la théorie, cette dernière englobant l'algèbre . Mais il arrive aussi que l'on oppose la logistique ("art mineur") à l'arithmétique et à l'algèbre ("art majeur") .*
  La frontière entre arithmétique et algèbre reste floue au 17e siècle.

- *avec* ***Fermat*** *on s'intéresse à nouveau à des problèmes sur la théorie des nombres (notamment ceux posés par Diophante 15 siècles avant) . Durant les* ***18e et 19e siècles*** *d'autres mathématiciens (Euler, Lagrange, Legendre) apportent des résultats sur la théorie des nombres. Au 19e siècle une théorie axiomatique des bases de l'arithmétique est mise au point par Frege et surtout* ***Peano*** *.*

NOMBRES FIGURES

Dans l'école de Pythagore (5e s. av. J-C) le nombre était considéré comme un élément naturel constitutif de l'univers (comme si on imaginait tous les corps formés par un certain nombre de points dont la distribution et l'ordre numérique caractériseraient chaque être).

"Toute chose est nombre".

Exemple : *le nombre d'un animal s'obtient par une règle arithmétique anatomique : le diagramme de l'animal est dessiné dans le sable, on dispose des cailloux sur certaines parties distinctes (mains,...) ; le nombre total de cailloux est le nombre cherché .*

1 est le point

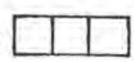
2 est la droite

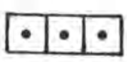
3 est la surface plane

4 est le solide

$1 + 2 + 3 + 4 = 10$

10 est la perfection de tous les nombres ; c'est selon Platon (4e s. av. J-C) le modèle archétype de l'univers.

Le nombre 3 est par exemple figuré par • • • ou bien  *ou bien*



A tout nombre correspond une figure visible ; le nombre porte alors le nom de la figure qu'il représente. On part ainsi du nombre pour arriver à la géométrie.

PREMIERE CLASSIFICATION DES NOMBRES

1) les ***nombres linéaires***

ce sont des nombres premiers

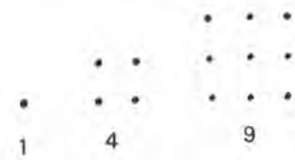
par exemple : 7 a pour seule figuration possible • • • • • • •

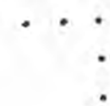
38

2) *les autres nombres sont les* ***nombres composés***

a) *les* ***nombres plans***

\- *les* ***nombres carrés*** *considérés comme nombres-sommes*

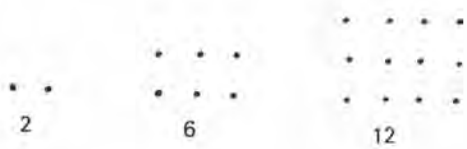


le principe pour obtenir ces figures est la croissance gnomotique : si on met autour du nombre carré 4 le gnomon  *le carré est augmenté dans sa dimension, mais l'espèce de la figure n'a pas changé.*

les nombres carrés sont ainsi : 1 ; 1 + 3 ; 1 + 3 + 5 etc.

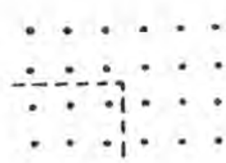
\- *les* ***nombres rectangles*** *considérés comme nombres-sommes ou comme produits de facteurs.*

* *on les obtient par croissance gnomotique en partant d'un nombre autre que 1*



les nombres rectangles obtenus ainsi comme nombres-sommes sont tous dissemblables, et correspondent à des rectangles de proportions différentes.

* *représentation de deux nombres rectangles semblables (2 × 3 et 4 × 6) :*



le produit de deux nombres rectangles semblables est un carré (pour cet exemple : 6 × 24 = 144).

- les **nombres polygones** sont des nombres-sommes

* les nombres triangles

* les nombres carrés

* les nombres pentagones

la forme générale de ces nombres s'obtient comme suit : à tout polygone correspond une série de nombres obtenus par la sommation d'une progression arithmétique ayant pour origine l'unité ; la raison de cette progression est égale au nombre de côtés du polygone, diminué de 2 .

pour 3 côtés on obtient :	1 ; 1 + 2 ; 1 + 2 + 3 ;...
pour 4 côtés on obtient :	1 ; 1 + 3 ; 1 + 3 + 5 ;...
pour 5 côtés on obtient :	1 ; 1 + 4 ; 1 + 4 + 7 ;...

b) les **nombres solides**

par exemple le nombre 8 qui est figuré par un cube

- les **nombres polyèdres** ou **pyramidaux**

* les nombres tétraèdres sont figurés par des pyramides à base triangulaire ; ils s'obtiennent par sommation de nombres triangles

1 ; 4 ; 10 ; 20

10 est représenté par :

autre représentation (moins évocatrice) pour 20 :

* *les nombres pentaèdres sont figurés par des pyramides à base carrée ; ils s'obtiennent par sommation de nombres carrés*

1 ; 5 ; 14 ; 30 ;...

le nombre 30 est ainsi représenté par :

* *les nombres hexaèdres sont obtenus de la même façon à partir des nombres pentagones etc.*

DEUXIEME CLASSIFICATION DES NOMBRES

Elle est à l'origine de recherches qui ont passionné le Moyen-Age.

. *un **nombre** est **abondant** si il est inférieur à la somme de ses diviseurs autres que lui-même*
par exemple : 12 car $12 < 6 + 4 + 3 + 2 + 1$

- *un **nombre** est **déficient** si il est supérieur à la somme de ses diviseurs autres que lui-même*
  par exemple : 14 car $14 > 7 + 2 + 1$

- *un **nombre** est **parfait** si il est égal à la somme de ses diviseurs autres que lui-même*
  Avant Pythagore (5e s. av. J-C) on réservait le terme "parfait" aux trois nombres triangles 3 ; 6 et 10 ;

  Pythagore remarqua que 6 avait une propriété spéciale et définit : le nombre parfait est celui qui est égal à ses parties.

  Euclide (3e s. av. J-C) a démontré, en représentant les nombres à l'aide de droites, comment on obtenait les nombres parfaits :

$1+2 = 3$	*3 est premier ; on obtient le nombre parfait* $3 \times 2 = 6$
$1+2+4 = 7$	*7 est premier ; on obtient le nombre parfait* $7 \times 4 = 28$
$1+2+4+8 = 15$	
$1+2+4+8+16 = 31$	*31 est premier ; on obtient le nombre parfait* $31 \times 16 = 496$

etc.

c'est Euler (1750) qui démontre sans l'apport de la géométrie le théorème d'Euclide : "Tous les nombres parfaits pairs sont de la forme $2^{n-1}(2^n - 1)$ où $2^n - 1$ est un nombre premier".

L'existence des nombres parfaits impairs est un problème non résolu.

- *deux nombres N et N' étant donnés,*

  si S est la somme des diviseurs de N autres que lui-même
  si S' est la somme des diviseurs de N' autres que lui-même
  *si $N' = S$ et $N = S'$ alors N et N' sont deux **nombres amis***

  Le premier couple de nombres amis fut trouvé par Pythagore (5e s. av. J-C)

(220 ; 284)

42

Les arabes attribuèrent jusqu'à la fin du Moyen-Age un pouvoir magique à ce couple de nombres . Ces nombres avaient une influence pour établir une union ou une amitié étroite entre deux individus ; ils servaient de talismans.

Un mathématicien arabe du 9e siècle aurait formulé une règle pour les trouver, règle tombée dans l'oubli et redécouverte par Fermat en 1636, lorsqu'il trouve le deuxième couple de nombres amis :

(17 296 ; 18 416)

Euler (1750) trouve 62 autres couples de nombres amis .

NOMBRE PAIR — NOMBRE IMPAIR

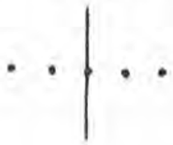
MOTS : *pair correspond étymologiquement à l'idée de juste proportion*
impair correspond à l'idée de disproportion, de démesure

- *les nombres pairs et impairs sont connus depuis l'Antiquité. On trouve un peu partout, notamment en Inde, des traces d'un jeu "pair ou impair" qui consiste à deviner le nombre de pièces de monnaies ou d'objets cachés dans la main.*

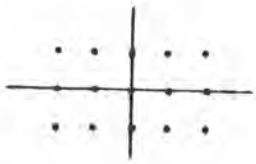
- *le nombre impair est aussi désigné par le terme "gnomon". La représentation du nombre impair par un gnomon permet, notamment aux grecs, de démontrer que la somme des premiers nombres impairs est un carré (voir p. 38).*

- *l'école pythagoricienne (5e s. av. J-C) représente les nombres pairs et impairs comme suit :*

Elle obtient ainsi une classification des nombres :



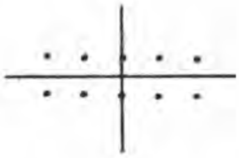
5 est un nombre impair premier



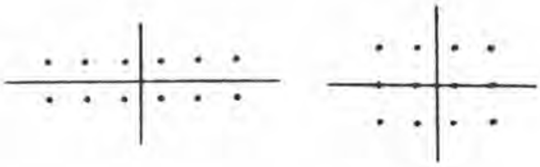
15 est un nombre impair composé

ou

4 est un nombre pairement pair



10 est un nombre pairement impair



12 est un nombre pairement pair ou pairement impair

- *Euclide (3e s. av. J-C) définit : "le nombre pair est celui qui se laisse mipartir" . Il se laisse partager en deux parties égales, partir signifiant "partager" jusqu'au 16e siècle.*

- *tout au long des siècles il y a toute une symbolique attachée aux nombres pairs et impairs :*

  nombre pair : féminin, humain, ombre ...
  nombre impair : masculin, divin, lumière ...

NOMBRE PREMIER

Les nombres premiers permettent de produire tous les autres nombres entiers naturels (sauf 0). La théorie des nombres premiers date des grecs.

- *l'école pythagoricienne (5e s. av. J-C) connaît les nombres premiers qu'elle appelle "non décomposables" ou "linéaires" (voir p. 37). Elle sait décomposer les nombres en produits de facteurs premiers.*

- *c'est cependant Euclide (3e s. av. J-C) qui définit dans ses Eléments le nombre premier : "un nombre qui ne peut être mesuré par aucun nombre, mais par une unité seule". Euclide étudie les nombres premiers entre eux, et les nombres premiers absolus ; il démontre de nombreuses propositions à leur sujet, notamment que la série des nombres premiers est illimitée.*
  Il faut noter que la notion de nombre premier, chez Euclide, est une infime partie par rapport à toutes les notions sur les nombres (voir p. 40).

- *la méthode de recherche des nombres premiers connue sous le nom de crible d'Eratosthène date bien de ce dernier (3e s. av. J-C).*

- *le mot "premier" se retrouve notamment chez les arabes où le terme utilisé, issu d'une racine signifiant "commencement, origine", est l'un des 99 noms désignant Dieu.*

- *au Moyen-Age on parle aussi de "nombre non composé".*

- *personne n'a encore trouvé la formule permettant de recenser les nombres premiers ; à ce jour (1985) le plus grand nombre premier connu par ordinateur est $2^{216091} - 1$, qui s'écrit avec 65050 chiffres.*

P G C D

. *Euclide (3e s. av. J-C) recherche dans ses Eléments la "plus grande commune mesure à deux nombres" afin d'en exprimer le rapport. Il donne une méthode, connue encore de nos jours sous le nom d'algorithme d'Euclide* *(voir p. 66)**.*

. *pendant le Moyen-Age, différents noms sont donnés au p g c d : on parle entre autres de "la plus grande partie aliquote commune". Il arrive aussi que sa recherche soit nécessaire, par exemple pour rendre irréductible une fraction, sans qu'on le mentionne explicitement. On utilise l'algorithme d'Euclide pour sa recherche.*

. *en 1909 on trouve l'abréviation* Δ *(initiale de diviseur) pour noter le p g c d.*

REMARQUES :

- *aliquote est un terme de vieux français signifiant diviseur.*

- *le terme diviseur, utilisé lorsqu'on pose une division, semble avoir été utilisé plus tardivement en arithmétique.*

- *au 19e siècle on trouve la définition : "Est sous-multiple d'un nombre, un second nombre qui est contenu plusieurs fois exactement dans le premier" ; 7 est ainsi un sous-multiple de 42, il est contenu 6 fois dans 42.*

P P C M

. *c'est toujours Euclide, dans le même livre d'arithmétique de ses Eléments qui définit une théorie du p p c m.*

. *le multiple commun est aussi appelé équimultiple, au Moyen-Age, et encore au 19e siècle.*

. *au 19e siècle on trouve la définition : "Est multiple d'un nombre, un second nombre qui contient plusieurs fois exactement le premier".*

. *en 1909 on trouve l'abréviation* μ *(initiale de multiple) pour noter le p p c m.*

NEGATIF

MOT : *vient du latin negativus qui signifie "qui dit non" ; un nombre négatif est ainsi un nombre qui dit non à la réalité. Le temps mis par le concept de nombre négatif pour s'imposer explique cet adjectif.*

- *le nombre négatif est inexistant chez les romains ; la notion n'existe pas chez les grecs, mais Diophante au 3e siècle qualifie l'équation (donnée en notation moderne) $4x + 20 = 4$ d'absurde (puisqu'elle donnerait la solution -4).*

- *on trouve les premiers nombres négatifs chez les indiens, au 7e siècle, qui parlent de biens (nombres positifs), de dettes (nombres négatifs) et de zéro. Des règles comme "positif divisé par positif" ou "négatif divisé par positif" sont connues. Les nombres négatifs sont signalés par un point supérieur.*

- *chez les chinois (13e s.), pour résoudre des problèmes les calculateurs ont un ensemble de bâtonnets rouges (nombres positifs appelés nombres "corrects") et un ensemble de bâtonnets noirs (nombres négatifs appelés nombres "trompeurs").*

- *les arabes ne conçoivent pas les nombres négatifs, ne considèrent que des équations dont tous les termes sont positifs.*

- *les nombres négatifs sont introduits en Occident par Fibonacci au 13e siècle, qui les interprète comme des dettes.*

- *en Europe, au 16e siècle, ils sont qualifiés de "numeri absurdi" (ils ne sont pas des nombres vrais étant donné qu'on les feint plus petits que 0). On sait les utiliser dans les calculs mais on s'en méfie. On ne considère jamais les racines négatives (racines "feintes", ou racines "fausses") d'une équation comme solutions ; c'est toujours l'influence des mathématiques grecques où tout nombre mesure la longueur d'un segment, et où résoudre une équation c'est trouver une solution qui peut être représentée géométriquement.*

- *Neper (début du 17e s.) parle des nombres abondants et des nombres déficients.*

- *au 17e siècle Roberval parle des racines "affirmativa" et des racines "negativa" d'une équation, Descartes parle des racines "vraies" et des racines "fausses" d'une équation.*

- *les nombres négatifs n'acquièrent le statut de nombre qu'à la fin du 17e siècle ; ils ne s'imposeront que très tard au début du 19e siècle.*

NOTATIONS :

- *les symboles indiquant "plus" et "moins" apparaissent pour la première fois comme signes de nombres et non comme signes opératoires dans un écrit de la fin du 15e siècle ; ils sont utilisés librement dans le traitement d'expressions algébriques pour la première fois au début du 16e siècle.*

- *cependant au 16e siècle un nombre négatif ne figure pas tout seul ; ainsi Bombelli note :*

  "0.m.169" le nombre -169 , "m" étant le symbole de la soustraction
  "0.p.5" le nombre +5 , "p" étant le symbole de l'addition

- *pour Descartes (17e s.) une lettre représente toujours un nombre positif ; un nombre négatif se note "-b" .*

- *en 1659, Hudde semble être le premier à généraliser la lettre désignant un nombre positif , ou un nombre négatif .*

REMARQUE :

Encore aujourd'hui les mathématiciens ne sont pas d'accord sur l'utilisation d'expressions telles que "positif" , "positif ou nul" , "positif au sens large" , "positif au sens strict" .

RELATIF

Le MOT : *vient du latin relatio signifiant "action de rapporter" ; un nombre relatif est "compté" à partir de 0 .*
L'adjectif relatif a remplacé l'adjectif algébrique utilisé au début du 20e siècle *(voir p.191).*

OPPOSE

Au 3e siècle av. J-C c'est un adjectif désignant la situation opposée de deux éléments géométriques, dans le sens de deux éléments d'une figure, symétriques par rapport à un point, situés l'un en face de l'autre.

ABSOLU

MOT *: vient du latin absolutus qui signifie "détaché de tout, indépendant, complet par soi-même".*

Un nombre a une valeur absolue , valeur qui n'est pas considérée par rapport à 0 ; et une valeur relative , lorsqu'on la situe par rapport à 0.

- *au 17e siècle, Oughtred parle de la différence absolue ou de la différence arithmétique :*

  a ∽ b signifie a - b ou b - a suivant les valeurs de a et de b ;

  à la même époque Wallis la note avec le symbole ∾ .

- *en analyse le besoin d'un symbole pour désigner la valeur absolue d'un nombre donné, ou le "nombre absolu" est réel.*
  Weierstrass introduit en 1841 le symbole actuel qu'il utilise pour les nombres complexes.

- *jusqu'au début du 20e siècle on parlera de la valeur absolue ou du module d'un nombre ; le mot module vient du latin modulus qui signifie "mesure" , il provient de la représentation des nombres complexes ; il a été utilisé pour la première fois par Argand en 1806.*

PUISSANCES

MOT : *voir racine carrée .*

Avant la notation algébrique de Viete (fin 16e s.) les nombres connus et les coefficients n'étaient pas représentés par des lettres dans les équations. Aucun symbolisme pour les puissances de tels nombres n'était nécessaire.

On trouve la représentation de l'inconnue et de ses puissances plus de 1000 ans avant l'introduction du coefficient littéral et de ses puissances *(voir p. 114).*

◆ DEUX PROCEDES POUR INDIQUER LES PUISSANCES :

* **l'abréviation du mot signifiant "inconnue" et des mots signifiant racine carrée , carré , cube** ; des symboles spéciaux pour les puissances d'ordres premiers (x^2 , x^3 ,...) les autres étant obtenus par combinaisons des premiers symboles. (1)

. notation de Pacioli (fin 15e s.) :

x se note co (cosa)
x^2 se note ce (censo)
x^3 se note cu (cubo)
x^4 se note ce.ce. .....

. notation de Viete (fin 16e s.) :

2q , 3c , 5ℓ désignent $2x^2$, $3x^3$, $5x$

avec

q abréviation de quadratus
c abréviation de cubo
ℓ abréviation de latus

On trouve alors $\ell 5$ pour $\sqrt{5}$; $\ell c8$ pour $\sqrt[3]{8}$; $\ell bq16$ pour $\sqrt[4]{16}$, bq étant l'abréviation de biquadratus .

* **on n'utilise pas un symbole pour l'inconnue elle-même. On indique uniquement par un nombre la puissance de l'inconnue.** *L'exposant suffit en effet s'il n'y a que des puissances d'une seule inconnue.*

. *notation de Chuquet (fin 15e s.) :*

$$12^2 \text{ pour } 12x^2$$
$$12^1 \text{ pour } 12x$$
$$12^0 \text{ pour } 12$$

Chuquet note $x^3 + 4x^2 - 3$ *par* $\overset{\overset{3}{\cup}}{1} . p . \overset{\overset{2}{\cup}}{4} . m . 3$ *Il a aussi des exposants négatifs :* $7^{3\overline{m}}$ *pour* $7x^{-3}$.

. *notation de Bombelli (16e s.) :*

$$\overset{\overset{2}{\cup}}{2}\ m\ \overset{\overset{1}{\cup}}{2}\ p\ 22 \quad \text{pour} \quad 2x^2 - 2x + 22$$

. *notation de Stevin (début 17e s.) (²) :*

2 ① *pour* $2x$

3 ④ *pour* $3x^4$

③ 20 *désigne alors* 20^3

◆ ***APRES L'INTRODUCTION DE LETTRES SPECIALES POUR DESIGNER UNE OU PLUSIEURS INCONNUES :***

. *le Hollandais Romanus (fin 16e s.) note :*

$$A(4) + B(4) + 4A(3) \text{ in } B + 6A(2) \text{ in } B(2) + 4A \text{ in } B(3)$$

pour

$$A^4 + B^4 + 4A^3B + 6A^2B^2 + 4AB^3$$

. *Herigone (début 17e s.) perfectionne cette notation :*

$$a3 \qquad 2b4 \qquad 2ba2$$

pour

$$a^3 \qquad 2b^4 \qquad 2ba^2$$

- chez Viete (1636) apparaît une notation proche de la notation moderne : $A^{'''}$ pour A^3 .

- c'est Descartes (1637) qui a donné la notation moderne, mais celle-ci a été longue à être unanimement adoptée. On trouve encore des notations très diverses aux 17e et 18e siècles. (3)

- Wallis et Newton (17e s.) ont introduit la notation moderne pour les exposants fractionnaires et négatifs.

Newton note :

$$\sqrt{a} \;\ldots\ldots\; a^{\frac{1}{2}} \quad ; \quad \sqrt{a^3} \;\ldots\ldots\; a^{\frac{3}{2}} \quad ; \quad \sqrt{c}\, a^5 \;\ldots\ldots\; a^{\frac{5}{3}}$$

$$\frac{1}{a} \;\ldots\ldots\; a^{-1} \quad ; \quad (P+Q)^{\frac{m}{n}} \;\ldots\ldots\; \overline{P+Q}|^{\frac{m}{n}}$$

On avait déjà trouvé chez Oresme (1370 environ) les premiers exemples d'exposants fractionnaires : $2^{\frac{1}{2}}$ noté " $\frac{1}{2}$ 2p " .

(1) les grecs déduisaient les puissances les unes des autres par multiplication (principe additif des exposants) .

les indiens les déduisaient par élévations à la puissance (principe multiplicatif des exposants) .

Ainsi la sixième puissance est appelée cube-cube chez Diophante et carré-cube par les indiens.

Ces deux principes se maintiendront en Europe jusqu'au 17e siècle.

(2) le peu de succès de la notation de Stevin est dû à la difficulté d'écrire et d'imprimer nombres et fractions à l'intérieur de cercles.

(3) Descartes utilise plutôt aa que a^2 . Cette notation avec répétition des facteurs avait déjà été suggérée dès 1480 .

On trouve au 17e siècle (Fermat) ^{2}Din A pour noter 2DA .

Au 18e siècle Leibniz note $\boxed{m}\ \overline{y+a}$ puis $\boxed{m}\ (y+a)$ pour désigner $(y+a)^m$.

EXPOSANT

MOT : *du latin ex-ponere signifiant "poser hors de" .*

Dans a^n *, n expose la puissance à laquelle a est élevé. Ce mot est dû à Stifel (1500) .*

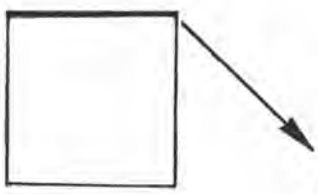
RACINE CARREE

LE MOT : *le mot grec dynamis qui signifie "puissance" a été traduit par "carré" parce que dans la pratique la "dynamis" est une puissance seconde.*

- *la racine carrée est la base du carré. La racine carrée de a peut se représenter par :*

Elle produit le nombre carré a . La racine carrée s'appelait souvent le "côté d'un carré" .

- *chez les grecs la racine carrée irrationnelle d'un nombre est appelée "la ligne qui peut" parce qu'il est possible de la construire géométriquement mais qu'elle n'existe qu'en puissance. Elle est incommensurable en longueur.*



c'est la ligne qui peut 5
c'est donc une puissance de 5

(1)

- **des symboles** *pour désigner la racine carrée sont apparus très tôt.*

  * *on retrouve sur des papyrus* ***égyptiens*** *de l'Antiquité le signe*  *et la racine carrée est appelée "coin" .*

  * *les* ***indiens*** *utilisaient la première lettre du mot signifiant "racine carrée" .*

* les **arabes** précédaient le nom du nombre concerné du mot ǧadr (qui signifie "la racine, la base du tout").
Au 15e siècle on place l'initiale de ce mot au-dessus du nombre dont on extrait la racine :

$\sqrt{12}$ se note ainsi $\overset{\text{ج}}{12}$ puis $\overset{\text{ج}}{12}$

* **en Europe** , à partir du 12e siècle, on retrouve principalement quatre symboles :

. R ou ℞ ou ℞ **indiquant "radix"**

Le mot radix , pour désigner la racine carrée , apparaît dans une traduction d'un ouvrage arabe en latin (13e s.) ; R est alors utilisé pour désigner $\sqrt{x}$ mais aussi parfois x (voir p. 115).

Ce symbolisme se maintiendra jusqu'au 16e siècle et disparaîtra au 17e siècle en tant que signe du radical.

Mise à part certains auteurs utilisant l'abréviation ra (ra.cu. pour $\sqrt[3]{\ }$, et ra.ra. pour $\sqrt[4]{\ }$) ou la lettre r , seule change, suivant les auteurs, la façon de regrouper les termes concernés par la racine carrée et la façon d'indiquer l'ordre de la racine .

Citons par exemple :

Chuquet (15e s.) ℞.16. ou ℞^{2}.16. pour $\sqrt{16}$

℞^{2} $\underline{4^{2}\ \tilde{p}\ 4^{1}}$ pour $\sqrt{4x^2+4x}$

Bombelli (16e s.) R.c. pour $\sqrt[3]{\ }$

R.q. pour $\sqrt{\ }$ (R.q.3 désigne $\sqrt{3}$)

R.q.$\lfloor 24.m.\overset{1}{20}.\rfloor$ pour $\sqrt{24-20x}$

. ℓ **indiquant "latus"**

Ce symbole a été introduit par les romains au 2e siècle (latus signifie "côté du carré")

Gerbert (10e s.) note ℓ 27 pour $\sqrt{27}$

ℓc 4 pour $\sqrt[3]{4}$

$\ell\ell$ 32 pour $\sqrt[4]{32}$

Pour certains auteurs 5ℓ *désigne* $5x$

$\ell 5$ *désigne* $\sqrt{5}$

Cette notation ne s'est jamais largement répandue. La lettre ℓ *a d'ailleurs ensuite été utilisée pour désigner le logarithme .*

. **le symbole** $\sqrt{}$ (2)

Il a été imprimé pour la première fois par l'allemand Rudolff (1525). Il s'est répandu au 16e siècle puis il s'est généralisé. Seule a changé, suivant les auteurs, la façon de regrouper les termes sous le radical et l'indication de l'ordre de la racine.

- *Stifel (16e s.) note la racine carrée , la racine cubique et la racine quatrième ainsi :*

$\sqrt{}z$ *puis* $\sqrt{}$

$\sqrt{}\&$

$\sqrt{}zz$

- *Stevin (début 17e s.) note ces mêmes racines sous la forme :*

$\sqrt{}$

$\sqrt{}③$

$\sqrt{}\!\sqrt{}$

- *Descartes (17e s.) indique la racine cubique par* $\sqrt{c}$
- *Oughtred (17e s.) indique* $\sqrt[12]{1000}$ *par* $\sqrt{}[12]\,1000$
- *Wallis (17e s.) se rapproche le plus de la notation actuelle.*

Il note $\sqrt{}^3 R^2$ *pour* $\sqrt[3]{R^2}$

- *Leibniz (17e s.) utilise l'indice placé à l'intérieur du signe*

$\sqrt[2]{\ }$ *ou* $\sqrt[m]{\ }$

- *Newton (18e s.) note* $\sqrt{}3{:}64$ *pour* $\sqrt[3]{64}$

L'indice placé devant le radical apparaît au 19e siècle.

Le symbole actuel $\sqrt{\ }$ *est apparu au départ comme une notation superflue* (3) *(voir p. 123).*

- ***l'exposant fractionnaire***

  La notation $x^{\frac{1}{2}}$ *a été introduite par Wallis et Newton. Elle amène une grande simplification :* $\sqrt[4]{b^3}$ *se note* $b^{\frac{3}{4}}$.

---

(1) *Il y a eu longtemps confusion entre le carré et le côté du carré, les traductions ont donc été très souvent contradictoires.*

(2) *On ne connaît pas l'origine exacte de ce symbole. Beaucoup ont longtemps cru que c'était une déformation de la lettre* **r** *. Certains pensent à la rotation du symbole arabe* ﺟ *.*
Dans des manuscrits latins on a trouvé d'abord le point **.** *puis le symbole* ʃ *ce qui suggère une évolution vers le symbole de Rudolff.*

(3) *En 1915, la Société Mathématiques de Londres recommande :*

$$\surd 2 \quad \text{ou} \quad 2^{\frac{1}{2}} \quad \text{plutôt que} \quad \sqrt{2}$$

$$\surd(ax^2+bx+c) \quad \text{ou} \quad (ax^2+bx+c)^{\frac{1}{2}} \quad \text{plutôt que} \quad \sqrt{ax^2+bx+c}$$

59

FRACTION

LE MOT :

- *vient du latin fractio signifiant "action de briser"*

  d'où l'expression française : "nombre rompu" , le mot anglais "fraction" , le mot allemand "bruch" , le mot italien "rotto" .

- *en arabe : kasr . La racine KSR signifie "briser, casser" .*
  kassara signifie "calculer l'aire d'un champ en le partageant en un certain nombre de carrés égaux à l'unité de surface" .

LES SYMBOLES :

Les fractions sont un instrument très ancien de calcul notamment en Chine, en Inde, et chez les babyloniens. Mais le symbolisme n'est pas troujours présent.

- **chez les égyptiens :**

  L'hieroglyphe de la bouche  *(signe qui se lisait èR et qui signifiait alors "partie") est utilisé en le plaçant au-dessus du nombre faisant fonction de dénominateur.*

 pour $\frac{1}{3}$

ce symbole devient par la suite . dans l'écriture hiératique

En général les égyptiens ne connaissent que les fractions ayant 1 pour numérateur. Ils expriment les autres comme sommes de fractions de ce type (par exemple : $\frac{3}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{10}$) . Ils ont aussi des tables donnant les fractions de la forme $\frac{2}{n}$ comme sommes de fractions de numérateur 1 .

Seules quelques fractions ont un symbole spécial :

 ou  pour $\frac{1}{2}$

 ou  ou  pour $\frac{2}{3}$

 pour $\frac{3}{4}$

. **chez les grecs** les tentatives de notations ont été nombreuses :

- comme γ désigne 3, alors γ' ou γ'' désigne $\frac{1}{3}$
- comme ι désigne 10 et $o\alpha$ désigne 71 alors $\iota\, o\alpha'$ désigne $\frac{10}{71}$
- comme $\iota\varsigma$ désigne 16 et $\rho\kappa\alpha$ désigne 121 alors $\overset{\iota\varsigma}{\rho\kappa\alpha}$ désigne $\frac{121}{16}$ (le dénominateur est écrit au-dessus du numérateur)
- comme δ désigne 4 et $\iota\varepsilon$ désigne 15 alors $\overline{\iota\varepsilon}^{\delta}$ désigne $\frac{15}{4}$

Les fractions sexagésimales, d'origine babylonienne, sont utilisées en astronomie.

. **chez les romains** du bas-empire $\frac{2}{3}$ est noté $^{3}{}_{2}$. Le calcul des fractions est associé à la division des monnaies (1 as = 12 onces ...) .

. **en Inde** : $\frac{2}{3}$ est noté $\begin{matrix}2\\3\end{matrix}$ par Brahmagupta au 7e siècle.

. **les arabes** ont d'abord la notation $\begin{matrix}2\\3\end{matrix}$ puis ils ajoutent la barre $\frac{2}{3}$ (11e s.) . De plus ils ont une caractéristique propre à la langue arabe : toutes les fractions qui ont pour numérateur 1 et dont le dénominateur est inférieur ou égal à 10 , portent un nom qui (sauf pour $\frac{1}{2}$) est analogue à celui désignant le dénominateur.

Par exemple 3 : talàta et $\frac{1}{3}$: tult

5 : hamsa et $\frac{1}{5}$: hums

Ces fractions sont dites "exprimables" , "prononçables" . Les autres fractions n'ont pas de noms particuliers mais sont exprimées sous la forme "trois parties de dix-sept parties dans l'unité" pour $\frac{3}{17}$. Ces fractions sont dites "inexprimables" , "muettes" . Dans les calculs ces fractions seront remplacées par des sommes de fractions "exprimables".

- **au Moyen-Age** le trait de fraction se répand mais il y a concurrence entre les fractions sexagésimales connues depuis le 2e s. av. J-C chez les babyloniens, transmises par les grecs puis les arabes aux occidentaux, et les fractions décimales.
  Les fractions sont souvent écrites à gauche des nombres entiers : $\frac{2}{3}$ 1 exprime $1 + \frac{2}{3}$ (influence arabe).
  Au 16e siècle les fractions sexagésimales sont appelées "nombres physiques" .

- c'est **Simon Stevin** (de Bruges) qui, le premier en 1585, propose de remplacer les fractions sexagésimales par les fractions décimales avec sa notation très particulière :

  4⓪ 3① 8②

  pour 4,38

  Il propose aussi de "décimaliser" la monnaie et les mesures. Avant lui des notations de fractions décimales associées à des notations de la virgule (voir ce mot p. 31) avaient été proposées mais sans vraiment voir toute l'importance du propos.

- avec l'imprimerie le trait de fraction est remis en question.
  Pour $\frac{2}{3}$ on peut voir :

$$2 \quad 3$$

$$2/3$$

$$2 \div 3$$

$$2 : 3$$

$$2 \,/\, 3$$

$$2 \int 3$$

Au 17e siècle les fractions ont acquis leur forme définitive.

L'utilisation de fractions supérieures à l'unité ne sera pas encore courante au 19e siècle bien qu'on établisse alors une théorie des fractions (opérations ...) .

NUMERATEUR

***MOT** : vient du latin numerus signifiant "nombre".*

Le numérateur d'une fraction désigne le nombre de parties de l'unité : le nombre de demis, tiers, quarts ...

Au Moyen-Age on utilisait d'autres mots comme : le "nombre du sommet", le "supérieur".

DENOMINATEUR

***MOT** : vient du latin denominator signifiant "celui qui désigne".*

Le dénominateur d'une fraction désigne la partie de l'unité considérée : demi, tiers, quart ...

Au Moyen-Age on utilisait d'autres mots comme : "la base", "l'inférieur".

Le lien entre numérateur et dénominateur est souvent associé à l'idée de parenté.

Ainsi les arabes désignent un rapport par un mot tiré d'une racine signifiant "être parent".

De même en Chine, lorsque dans une division il y a un reste, ce reste doit être pris comme "enfant" (numérateur) et le diviseur comme "mère" (dénominateur).

QUOTIENT

MOT : vient du latin quoties signifiant "autant de fois, tant de fois".

9 est le quotient de 45 par 5 veut dire il y a tant (9) de fois 5 dans 45. [1]

quoties intervient aussi dans quotidien signifiant "autant de fois qu'il y a de jours" (quoties-dies).

- *en arabe, le mot quassama désigne le compas à pointe sèche servant à partager un segment en un certain nombre de parties égales.*
- *le quotient d'une division fut appelé par : réponse, résultat, produit, part de la division.*

---

[1] 45 est le dividende, mot venant du latin dividendus qui signifie "celui qui doit être partagé, divisé".
5 est le diviseur ("celui qui partage").

REDUIRE AU MEME DENOMINATEUR

Le mot "réduire" est presque toujours utilisé. Il est employé dans le sens "abaisser, abattre".

Ce n'est qu'au 17e siècle que, dans une addition ou une soustraction de fractions, l'on prit l'habitude de réduire au même dénominateur en cherchant le p p c m. Jusque là on se contentait de prendre comme dénominateur commun le produit des dénominateurs initiaux.

SIMPLIFICATION DE FRACTIONS

La simplification des fractions en fractions irréductibles était plutôt appelée abréviation ou abaissement , rarement réduction , ce dernier mot étant utilisé plus spécialement pour "réduire au même dénominateur".

Pour aider la simplification des fractions on trouve au Moyen-Age, dans la plupart les manuscrits, les caractères de divisibilité par 2 , 3 , 5 notamment.

66

RAPPORT

LE MOT : *vient de reporter . Pour chercher le rapport de a à b on se pose la question "combien de fois reporter b dans a ?"*

LA NOTION *de rapport s'est introduite en aritmétique dès les premiers échanges commerciaux, en géométrie dès les premiers essais graphiques.*

La géométrie grecque était la science des rapports de grandeurs ; elle considérait les rapports des différentes parties de l'étendue. Pour Euclide (3e s. av. J-C) tous les théorèmes d'arithmétique étaient des résultats relatifs aux rapports entre segments.

Un nombre est représenté par un segment.
Voici quelques exemples de la méthode utilisée par Euclide qui affirme qu'à chaque couple de segments on peut associer un rapport .

- *la "droite" B est la mesure de la "droite" A si elle peut être reportée un nombre exact de fois sur la "droite" A .*

(notation moderne $\frac{A}{B} = 5$)

- *la "droite" B n'est pas contenue un nombre exact de fois dans la "droite" A . Il faut considérer en plus l'une de ses parties aliquotes (synonyme de diviseur)*

$$A = 2B + \frac{3}{4}B$$

$$4A = 11B$$

$$A = \frac{11}{4}B$$

les segments A et B ont une partie aliquote commune ($\frac{1}{4}$ de B et $\frac{1}{11}$ de A) . On dit qu'ils sont commensurables ("ont une commune mesure") .

. Euclide a un procédé pour trouver la plus grande partie aliquote commune à deux segments (c'est l'ancêtre de ce que nous appelons l'algorithme d'Euclide) .

* on porte le plus petit dans le plus grand autant de fois que possible :

$B = 3 \times A + r_1$

* il faut voir si r_1 est une partie aliquote de A ; on le porte autant de fois que possible dans A .

$A = 3 \times r_1 + r_2$

* il faut voir si r_2 est partie aliquote de r_1 .

$r_1 = 4 \times r_2$

r_2 est alors la partie aliquote commune ; elle est contenue 13 fois dans A et 43 fois dans B .

. si la façon de procéder ne donne jamais un reste qui soit partie aliquote du précédent, on parle de segments incommensurables (ils n'ont aucune commune mesure) . C'est vrai uniquement en théorie mais impossible à vérifier dans la pratique vu la petitesse du dessin.

Les rapports obtenus ne sont pas considérés comme des nombres mais sont classés et obtiennent ainsi une trentaine de qualificatifs possibles suivant les deux termes de chaque rapport ; par exemple :

$\frac{3}{2}, \frac{6}{4}$ sont des rapports "hémioles" (rapports qui surpassent l'unité de la moitié du plus petit terme)

$\frac{4}{3}$ est un rapport "épitrite" (rapport qui surpasse l'unité du tiers du plus petit terme)

un rapport "épimore" est de la forme $1 + \frac{1}{n}$

un rapport "épimère" est de la forme $1 + \frac{p}{n}$

.....

Le ***MOT*** *: vient du latin proportio .*

5 2 10 4 constitue une proportion car 5 est pour 2 ce que 10 est pour 4 . $\left(\frac{5}{2} = \frac{10}{4}\right)$

. ***l'idée de proportion domine la mathématique égyptienne,*** *elle y est la clé du calcul fractionnel.*

Dans le problème : "Trouver un nombre qui augmenté de sa septième partie donne 19" (x tel que $x + \frac{x}{7} = 19$*) le calculateur prend 7, l'augmente de son septième, ce qui donne 8 .*

Le problème devient : "Trouver un nombre qui soit à 19 ce que 7 est à 8" . La recherche de la solution est menée par une série de tâtonnements. $\left(x \text{ tel que } \frac{8}{7} = \frac{19}{x}\right)$.

. ***pour les grecs,*** *une quantité absolument isolée qui ne se rapporte à rien est un non-sens.*

Toutes les quantités sont liées entre elles par une commune mesure. Ainsi la commune mesure pour tous les nombres entiers est l'unité. Toute quantité implique donc deux termes : l'unité et le nombre d'unités. Ces deux termes comparés forment un rapport.

Pour comparer deux rapports il faut deux autres termes, ce qui fait au total quatre termes et on obtient ainsi une proportion.

Quatre termes peuvent alors former :

- *une proportion additive*
  $(a-b = c-d)$ *appelée aussi proportion arithmétique*
- *une proportion multiplicative*
  $\left(\frac{a}{b} = \frac{c}{d}\right)$ *appelée aussi proportion géométrique*
- *une proportion harmonique*
  $\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{1}{d} - \frac{1}{c}\right)$

ou ne pas former une proportion.

Parmi les quatre termes d'une proportion il y a les deux termes intérieurs et les deux termes extérieurs.

Ainsi dans la proportion a b c d

a et d sont les termes extérieurs ou les extrêmes

b et c sont les termes intérieurs ou les moyens

- chez Pythagore (5e s. av. J-C) , l'étude des proportions ne s'est faite qu'à l'aide de nombres entiers.

  Il a rapporté de Babylone la connaissance de la proportion la plus parfaite :

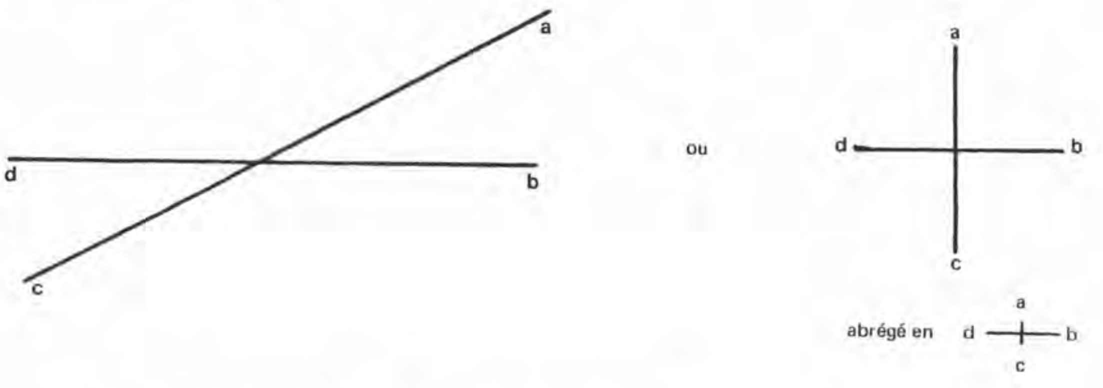
$$a : \frac{a+b}{2} :: \frac{2ab}{a+b} : b$$

- Eudoxe (4e s. av. J-C) a constitué sa théorie des rapports indépendamment de la commensurabilité.

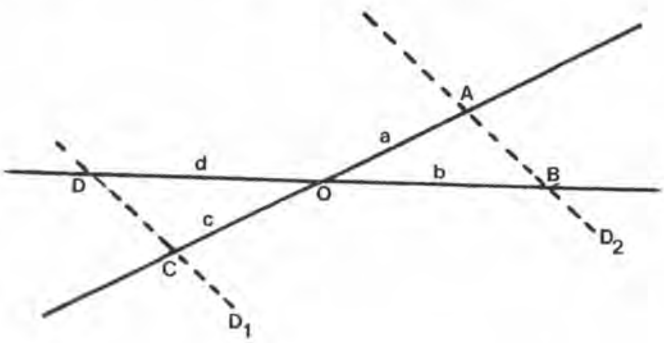
- Euclide (3e s. av. J-C) a élaboré une théorie des proportions en raisonnant sur des droites de longueur quelconque, en utilisant donc des nombres commensurables ou non.

. citons **la croix de proportion** proposée comme outil de calcul à la fin du 19e siècle.

Pour $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$:



et qui est associée à une figure géométrique :



D_1 et D_2 étant parallèles ; $\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD}$.

71

REGLE DE TROIS

Elle a été inventée par les indiens au 7e siècle et utilisée dans le commerce ; Brahmagupta donnait d'ailleurs aux termes qui y étaient utilisés des noms en rapport avec le commerce.

On l'a retrouve ensuite chez les arabes et les écrivains du Moyen-Age. Recorde (16e s.) l'appelle "la règle des proportions qui, pour son excellence, est appelée règle d'or" . Elle sera d'ailleurs appelée ainsi en Angleterre jusqu'à la fin du 18e siècle.

NOMBRE RATIONNEL. NOMBRE IRRATIONNEL

LES MOTS :

Rationnel : *vient du latin ratio qui, au début signifie "rapport". Il garde cette signification en mathématique. Par extension, le mot ratio signifie "calcul, compte", puis "la faculté de compter, l'intelligence" et enfin "ce qui permet de comprendre : la raison".*

Irrationnel : *le mot signifie "qui ne peut se représenter par un quotient, un ratio", et non "déraisonnable".*

. *au 5e siècle avant J-C les disciples de Pythagore font baser la notion de nombre sur la notion de mesure. Les rationnels ne sont pas reconnus pour des nombres mais ils sont utilisés pour mesurer segments, poids, surfaces.*

En effet tout est nombre entier dans l'univers pythagoricien. On croit aussi à l'époque que tout est mesurable par des fractions. Lorsqu'apparaît la réponse géométrique au problème "fabriquer un carré de surface double, triple, quintuple de celle du carré unité", que Pythagore démontre que la diagonale d'un carré et son côté sont des grandeurs incommensurables (et donc que $\sqrt{2}$ n'est pas un rationnel), on découvre des segments qui ont des mesures non rationnelles.

Cette découverte provoque l'une des plus sérieuses crises des mathématiques, toutes les connaissances d'une époque devenant tout à coup incertaines.

. *dans l'Antiquité seuls* **les égyptiens** *associent des nombres à la notion de rationnel* *(voir p. 59)*.

. **les grecs** *n'ont aucune notation correcte permettant de faciliter les calculs. On n'additionne pas deux rapports* *(voir p. 60)*.

Ils distinguent :

- *les quantités rationnelles ou commensurables : on voit dans les nombres entiers ou dans les nombres "rompus" le rapport ou la "raison" de ces quantités à l'unité.*

- *les quantités irrationnelles ou incommensurables : on ne peut les évaluer que par approximations. Ce sont des quantités "sourdes", elles échappent comme un bruit sourd qu'on distingue mal.*

. ***chez les indiens*** *les quantités irrationnelles sont exprimées par un signe spécial.*

. ***au 10e siècle, l'arabe Al-Huwarismi*** *fait allusion aux "racines muettes" ou aux "racines aveugles". Il utilise le mot "asamm" qui est une traduction du mot grec signifiant "inexprimable par la parole".*

Le mot asamm sera traduit en latin par "surdus" qui sera en concurrence avec le mot "irrationalis" jusqu'au 18e siècle.

Le mot "surd" signifie en anglais sourd ou irrationnel.

Notations d'égalités de nombres rationnels (ou irrationnels) *(voir (1) p. 78).*

On étudie les nombres entiers en proportion, les nombres rationnels n'existant pas en tant que tels.

. ***chez les indiens (12e s.)*** *on trouve le tableau :*

10	163	4	163
1	60	1	150

pour dire que $\frac{10}{4} = \frac{\frac{163}{60}}{\frac{163}{150}}$

. ***chez les arabes (15e s.)*** *on trouve :*

144 .˙. 84 .˙. 12 .˙. 7 *pour dire que* $\frac{144}{12} = \frac{84}{7}$

. ***en Europe du 16 e siècle au 18e siècle*** *les notations sont très nombreuses. Elles varient souvent en accord avec les signes utilisés pour l'égalité et la multiplication.*

Pour $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ les notations les plus fréquentes sont :

$a.b :: c.d$ (la plus répandue, due à Oughtred, 17e s)

$a:b::c:d$

$a|b||c|d$

$a„b::c„d$

$a—b = c—d$

. c'est Leibniz qui le premier, en 1684, introduit les deux notations qu'il définit comme équivalentes $a : b = c : d$ ou $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ mais il faudra plus de deux siècles pour que ces notations s'imposent.

Remarque : les nombres positifs irrationnels sont utilisés chez les arabes au 10e siècle. Il faut attendre la fin du 16e siècle pour voir leur utilisation en Europe.

π

LA LETTRE : *première lettre du mot grec signifiant périmètre . Pendant longtemps π désigne la circonférence du cercle (parmi d'autres notations comme c)* [1] *.*

C'est vers 1650 , dans les écrits de Jones et Oughtred notamment, que π désigne pour la première fois le rapport de la circonférence au diamètre d'un cercle.
Plus tard, vers 1750, Euler l'adopte aussi. Depuis cet usage s'est imposé.

LA RECHERCHE DE π :

- **l'Antiquité :** *chez les égyptiens, babyloniens, indiens, chinois on a des approximations plus ou moins précises de π mais la plupart du temps ces approximations ne sont pas justifiées.*
  On admet sans démonstration la proportionnalité de l'aire du disque à celle du carré circonscrit.

- **de la période grecque jusqu'au 17e siècle :** *la recherche de π trouve son origine dans le célèbre problème de la quadrature du cercle : comment construire un carré dont l'aire soit égale à celle d'un disque donné et un carré dont le périmètre soit égal à celui d'un cercle donné ?*
  L'approche est géométrique : on évalue l'aire et le périmètre en utilisant des polygones réguliers inscrits ou circonscrits au cercle. On obtient des résultats d'une précision appréciable.

- **le 18e siècle :** *grâce au calcul infinitésimal, avec les fonctions trigonométriques, on a des approximations comportant une infinité de termes (séries, produits infinis, fractions continues).*
  La connaissance "quantitative" de π s'améliore considérablement.

- **1766-1882 :** *deux dates importantes :*

  1766 : Lambert prouve que π est un irrationnel.

  1882 : Lindemann montre que π n'est pas une solution d'équation algébrique à coefficients entiers. La quadrature du cercle est impossible.

. **l'ère des ordinateurs :** *l'histoire de la recherche de π ne s'arrête pas en 1882 . Avec l'avènement des grands ordinateurs, une nouvelle course aux décimales commence.*

DES APPROXIMATIONS DE π

		valeurs utilisées	valeurs décimales
Babyloniens	(-2000)	$3\frac{1}{8}$	3,125
Egyptiens	(-2000)	$\left(\frac{16}{9}\right)^2$	valeur approchée : 3,1604938
Chine	(-1200)	3	
Bible	(-500)	3	
Archimède	(-300)	$3\frac{10}{71}<\pi<3\frac{1}{7}$	$3,1408451<\pi<3,1428571$
Ptolémée	(+300)	$\frac{377}{120}$	valeur approchée : 3,141666
Chine	(+400)	$\sqrt{10}$	valeur approchée : 3,1622777
Chine	(+600)	$3,1415926<\pi<3,1415927$	
Moyen-Age	(+1400)	$\frac{22}{7}$	valeur approchée : 3,1428571

nombre de décimales

vers	*1600*	*35*
	1700	*72*
	1800	*136*
	1850	*250*
	1873	*707*
	*1947**	*808*
	1958	*10 000*
	1961	*100 265*
	1966	*250 000*
	1967	*500 000*
	1976	*1 000 000*

* *à partir de cette date les travaux se font sur machine de bureau puis sur ordinateur.*

---

(1) au 17e siècle on trouve encore, pour représenter le quotient de la circonférence par son diamètre, une écriture fractionnaire utilisant deux lettres :

$\frac{\pi}{\delta}$ *où* π *désigne la circonférence ,* δ *désigne le diamètre*

NOMBRE REEL

LE MOT : *du latin realis qui vient de "res" signifiant chose .*

- *c'est le grec Eudoxe (4e s. av. J-C) qui a trouvé une solution au problème de la découverte des quantités incommensurables en inventant la théorie des proportions.*

  Etant donné deux grandeurs a et b de même nature (par exemple des longueurs) il introduit ce qu'il appelle le rapport de a à b (notation moderne $\frac{a}{b}$ *) et qui correspond à ce que nous appelons la mesure de a avec l'unité b .*

  Pour comparer deux tels rapports il essaie d'encadrer chacun des rapports par les mêmes rationnels. (1)

- *ces rapports seront la seule base logique de la notion de nombre jusqu'à la fin du 19e siècle.*

  Ainsi Cauchy (19e s.) indique :

  "Nous prendrons toujours la dénomination de nombre dans le sens où on l'emploie en arithmétique, en faisant naître les nombres de la mesure absolue des longueurs" .

- *il y aura malgré tout une certaine évolution et on ne s'embarrassera plus des distinctions entre entiers , rapports rationnels , rapports irrationnels .*

  Les "objets" introduits par Eudoxe deviendront de plus en plus familiers au fur et à mesure de leur utilisation et on oubliera les précautions et les réserves qui étaient d'usage chez Euclide et qui gênaient le calculateur.

  C'est ainsi que Stevin , au 16e siècle, indique :

  "thèse 1 : que l'unité est nombre

  thèse 2 : que nombres quelconques peuvent être nombres carrés , cubiques , de quarte quantité ...

thèse 3 : que racine quelconque est nombre

thèse 4 : qu'il n'y a aucun nombre absurde , irrationnel , irrégulier , inexplicable ou sourd" .

. *la théorie des proportions, basée sur la géométrie, fut remise en question au 19e siècle lorsqu'on démontra qu'il était impossible de prouver le postulat d'Euclide (concernant les parallèles) . Ceci apparut comme une remise en cause des fondements de la géométrie qui était depuis deux millénaires considérée comme la théorie mathématique parfaite.*

On eut tout à coup l'impression qu'on avait fait naître le nombre d'une science qui avait perdu le caractère inattaquable que lui avait donné Euclide 3 siècles avant J-C .

c'est de cette nouvelle crise des mathématiques et du génie de Cantor , Dedekind et Weierstrass que sont nées les constructions abstraites de $\mathbb{R}$ que nous connaissons.

---

(1) cela est possible dans la théorie grecque. Si $\frac{a}{b}$ est un rapport et si $\frac{p}{q}$ est un rationnel, $\frac{a}{b} < \frac{p}{q}$ se traduit par : $qa < pb$ et la construction géométrique de qa et pb est possible car q et p sont entiers. De la même façon les nombres réels que nous connaissons peuvent être définis par leur place parmi les rationnels, autrement dit par des encadrements.

INFINI

L'infini a depuis les grecs passionné et troublé les mathématiciens (il y a de multiples paradoxes dans le domaine du calcul infinitésimal : Achille et la tortue,...).

- *Euclide (3e s. av. J-C) le définit par "une quantité plus grande que toute quantité donnée" ; une figure infinie est une figure qui n'admet pas de limite supérieure, ainsi il définit : "on appelle parallèles des droites qui, prolongées dans les deux sens à l'infini, ne se rencontrent dans aucune des deux directions".*

- *les indiens (7e s.) désignent l'infini par l'unité divisée par 0.*

- *le symbole actuel ∞ est utilisé pour la première fois par Wallis en 1655 ; il n'apparaîtra par la suite qu'en 1713 avec Bernoulli.*

  ∞ aurait été suggéré par le fait que les romains utilisaient ce symbole pour noter le nombre 1000, tout comme nous utilisons le mot myriade pour désigner un grand nombre, bien que chez les grecs ce terme désigne le nombre 10 000.

  Ce symbole est également parfois noté $\alpha\!\!\!\!\delta$ et il correspondrait à la première lettre du mot grec signifiant "infini", qui est alpha.

OPERATIONS

LES OPERATIONS

Nous sommes très habitués à poser par écrit les quatre opérations. En fait cette manière de faire ne s'est imposée que très tard.

1. LES CALCULS ANTIQUES.

Chez les égyptiens comme chez les babyloniens addition et soustraction ne posaient guère de problème grâce aux systèmes de numération en vigueur.

Pour la multiplication et la division on utilisait deux "intermédiaires" : la duplication et des tables d'inverses.

2. LES CALCULS SUR ABAQUE.

Chez les grecs et les romains les systèmes de numération interdisent pour ainsi dire une multiplication ou une division tellement cela est difficile.

Mais cela ne dérange pas les mathématiciens de l'époque puisqu'ils utilisent en fait des abaques pour leurs calculs.

Il faut cependant remarquer que Diophante désigne les quatre opérations par des périphrases.

3. LE MOYEN-AGE.

L'habileté des calculateurs sur abaques ou bouliers explique la difficulté pour que d'une part le système décimal, d'autre part les calculs écrits s'imposent (bouliers encore utilisés couramment au début du 20e siècle dans certains pays).

Pendant longtemps encore les manières écrites de poser les opérations vont varier avec notamment la pratique du biffage.

De toute façon il faut savoir que, par exemple en 1600, compter sur ses doigts était le seul bagage dont disposait l'homme de culture moyenne.

Dès le 6e siècle Boece désignait par digitus , "doigt" , tout nombre inférieur à 10 et par articulus , "articulation" , tout nombre supérieur à 10 .

Tout manuel d'écolier, à partir du 17e siècle, contenait des explications détaillées sur le calcul digital.

Utiliser un boulier ou une planche à calcul était laissé aux calculateurs professionnels.

La division notamment n'était abordée que par un "expert", un "savant spécialiste" qui apportait le résultat quelques jours après et qui passait, auprès des gens, pour être doué de facultés surnaturelles !

CALCUL

MOT : *vient du latin calculus signifiant "caillou".*

Les romains utilisaient des cailloux sur leurs abaques *(voir p. 17)**. Le "calculator" est celui qui tient les comptes, ou apprend comment compter.*

REMARQUES :

. *si un jour heureux est marqué d'une pierre blanche cela tient au fait que les romains le marquaient d'un "calculus candidus" ; les juges romains votaient avec un "calculus candidus" pour absoudre.*

. *ce sont des "calculs" qui obstruent l'uretère d'un malade.*

. *dès le 10e siècle, les arabes différenciaient le calcul mental du calcul sur abaque . Ils les désignaient respectivement par "calcul dans l'air" et "calcul dans la poussière".*

COMPTER

MOT : *vient du latin computare signifiant "énumérer".*

Ce verbe a été créé pour établir une distinction avec le verbe conter qui signifiait au départ "énumérer les chiffres" et qui a vite signifié "énumérer les faits et les évènements, raconter".

ADDITION

MOT : . vient du latin *ad-da-re* signifiant "donner en plus".
autres verbes latins utilisés : *aggregare* , *colligere* .

. en arabe on utilisait

- la racine GML :

Ainsi, *ǧam^{c}* signifie "réunir les nombres les uns aux autres de façon à exprimer le résultat par un terme unique" ; *ǧami^{c}* signifie "lieu de réunion des fidèles, mosquée" ; *ǧamal* signifie "câble".

On retrouve cette racine dans le mot hébraïque *cabale* qui désigne une cordelette à nœuds pour les recensements (encore utilisée dans les provinces de l'Inde jusqu'à des temps relativement récents).

- la racine QFL :

Ainsi, *qàfila* désigne "la caravane, la file de chameaux" (1).

. le verbe *additionner* a remplacé le verbe *ajouter* à la fin du 17e s. ; *ajouter* signifiait à l'époque "réunir" (2).

DIFFERENTES NOTATIONS UTILISEES :

. les égyptiens indiquaient une addition par :

 (17e s. av. J-C)

[deux jambes tournées vers l'avant]

. *û* , signifiant "et" , est souvent utilisé chez les babyloniens (3e s. av. J-C).

. les indiens n'avaient pas de signe pour l'addition, de même que les grecs ; Diophante (3e s.) la traduisaient par une simple justaposition.

. les arabes (10e s.) juxtaposaient, puis indiquaient l'addition par le mot *wa* signifiant "et, plus" .

- *Chuquet (1484) et Pacioli (1494), de même que les mathématiciens italiens du 16e s. utilisèrent $\tilde{p}$ ou p pour "plus".*

- *le symbole actuel + est apparu pour la première fois dans un ouvrage imprimé écrit par Widmann en 1489 (3). Il s'est répandu en algèbre, en Allemagne, mais n'est apparu en arithmétique commerciale qu'à la fin du 16e s., puis ne s'est généralisé en arithmétique qu'au 19e s.*

En Italie les symboles $\tilde{p}$ et $\tilde{m}$ se sont maintenus jusqu'au 16e s.

Les symboles + et — ne se sont imposés qu'au début du 17e s. après une concurrence acharnée entre les deux systèmes de notations.

Le symbole + a d'ailleurs connu différentes formes, dont les principales sont :

- *la croix grecque* + *ou* —+—
- *la croix latine* † *ou* —+— *ou* +—— *, utilisée entre autres par Viete, et qui s'est raréfiée au 18e s.*
- *la croix maltaise* ✠ *utilisée entre autres par Descartes.*

Il n'était d'ailleurs pas rare de trouver au 17e-18e s., dans la même publication, deux ou trois formes différentes du même signe.

---

(1) anecdote : la confusion entre cable et chameau se retrouve dans l'expression : "faire passer un chameau dans le chas d'une aiguille".

(2) ajouter vient du latin a-juxtare signifiant "être attenant, toucher à" ; le mot latin juxtare signifie "se rassembler, combattre de près à cheval avec des lances".
s'ajouter signifiait ainsi "se rassembler, en venir aux mains".

(3) il est très probable que l'origine du signe + provienne de l'une des nombreuses (102 abréviations différentes ont été trouvées) formes du "et" dans les manuscrits latins ; l'une d'elles, datant de 1417, + *(trait vertical pas tout à fait à angle droit avec le trait horizontal) s'en approche beaucoup.*
Widmann avait étudié ces manuscrits, ce qui justifie cette explication ; l'usage du + par Widmann n'était d'ailleurs pas réservé aux calculs mathématiques dans son livre : + signifiait également "et", ou indiquait le surplus.

PLUS

MOT *: vient du préfixe latin pluri qui signifie "plusieurs".*

TERME

MOT *: vient du latin terminus signifiant "borne, limite", puis "somme à payer" et au sens figuré "mot, expression".*

SOMME

MOT *: vient du latin summa signifiant "total".*

Au 12e siècle les arabes utilisaient une racine signifiant "porter, supporter" pour exprimer l'addition.

Pendant longtemps les additions ont été disposées ainsi :

$$\begin{array}{c} 432 \\ \hline 307 \\ 125 \end{array}$$

Le résultat d'une addition était alors placé en haut, au sommet... d'où le nom de somme.

COMMENT EST POSEE UNE ADDITION ?

Pour l'addition

$$\begin{array}{r} 91 \\ +\ 79 \\ \hline 170 \end{array}$$

on trouve :

. **chez les indiens** *(9e s.) :*

$$\begin{array}{l} 19 \\ 97 \\ \hline 0\cancel{6} \\ \ \ 71 \end{array}$$

qu'il faut lire de droite à gauche.

. **chez les arabes** *(10e s.) :*

$$\begin{array}{l|l} 071 & 8 \\ \hline 19 & 1 \\ 97 & 7 \end{array}$$

preuve par 9

Il faut lire aussi de droite à gauche.
On remarque que le résultat est écrit au "sommet".

. **au 16e siècle :**

$$\begin{array}{r} 91 \\ 79 \\ \hline 10 \\ 16 \\ \hline 170 \end{array}$$

SOUSTRACTION

MOT : . *vient du latin subs-trahere signifiant "tirer par dessous".*

. *les babyloniens utilisaient pour soustraire un nombre un verbe signifiant "extraire de la terre".*
On trouve aussi chez eux la notion de tirer. Ils "tiraient les sillons en suivant la longueur du champ" (voir p. 172).

. *les arabes (12e s.) utilisaient la racine TRH signifiant "jeter, rejeter, avorter, séparer" ; ainsi, le mot tarh signifie "retrancher, ôter".*

. *au Moyen-Age, pour soustraire, on dit "je soustrais", "je prends" ou "j'extrais". On parle de diminuer, de réduire. La soustraction est parfois appelée subduction.*

. *au 15e s. la soustraction sans retenue est appelée subtractio , la soustraction avec retenue est appelée cautela (caution).*

DIFFERENTES NOTATIONS UTILISEES :

. *les égyptiens indiquaient une soustraction par :*

 *(17e s. av. J-C)*

(deux jambes tournées vers l'arrière)

. *le grec Diophante (3e s.) utilisait* ⋔

. *Chuquet (1484) et Pacioli (1494) utilisèrent* $\tilde{m}$ *ou* m *pour "moins".*

. *le symbole actuel est apparu dans l'ouvrage de Widmann imprimé en 1489 (1) ; il s'est imposé conjointement au signe + (voir p. 87).*

. *de nombreux écrivains ont proposé le signe ÷ (qui paraît plus compliqué) pour la soustraction. Une explication possible de ce phénomène est qu'il y avait d'autres signes manuscrits avant Widmann pour la soustraction. L'usage de ÷ était justifié par le fait que — avait d'autres significations (entre autres : séparer des termes, relier poids et prix d'un objet), et cela pouvait créer des confusions. Ainsi Riese par exemple, utilisait en 1525 les deux signes.*

Aux 16e et 17e s. on pouvait trouver sur la même page différents signes pour "moins" ; ÷ s'est raréfié au début du 17e s. mais s'est encore maintenu en Allemagne, Suisse, Hollande... On trouvait encore parfois ce symbole en Scandinavie en 1921.

---

(1) l'origine du symbole — semble être la simple barre utilisée par les marchands pour séparer la tare (longtemps appelée "moins") du poids total de marchandise. D'autres hypothèses ont été avancées, mais aucune n'a été formellement prouvée. Dans l'ouvrage de Widmann le — a été également utilisé pour indiquer la séparation de mots, ou le manque.

MOINS

Chez les romains, le nombre à soustraire est le numerus minuendus, c'es-à-dire le nombre le plus petit, d'où le mot français moins , et le mot anglais minus.

DIFFERENCE

Le mot vient du latin differe signifiant "être dissemblable".
Au cours des siècles le résultat d'une soustraction a été désigné par bien d'autres noms : reste, résidu, excès, reliquat.

COMMENT EST POSEE UNE SOUSTRACTION ?

On trouve essentiellement deux méthodes :

1. AVEC LES RETENUES INSCRITES.

. la retenue est marquée par un j :

$$\begin{array}{rccc} & 5 & 0_{\mathbf{j}} & 4 \\ - & \mathbf{j} & \mathbf{j}^{9} & 5 \\ \hline & 4 & 0 & 9 \end{array}$$

. la retenue est marquée par un point :

$$\begin{array}{rccc} & 5 & 0^{\cdot} & 4 \\ - & & 9^{\cdot} & 5 \\ \hline & 4 & 0 & 9 \end{array}$$

2. EN FAISANT DEUX SOUSTRACTIONS.

Pour $504 - 95$ on pose successivement :

$$\begin{array}{r} 14 \\ -\ 5 \\ \hline 9 \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{r} 490 \\ -\ 90 \\ \hline 400 \end{array}$$

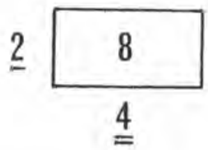
MULTIPLICATION

***MOT** : du latin multiplex et actio qui signifie action de chercher le multiple par analogie avec duplication de duplex et actio qui signifie action de chercher le double.*

- ***chez les babyloniens** le mot "esepu" signifiant multiplier voulait dire à l'origine doubler puis "répéter à deux" et par extension "répéter à 3 , 4 , 5 ,..." .*

- ***chez les indiens** il n'y a pas de symbole indiquant la multiplication (une abréviation du mot produit est utilisée) ; un point est éventuellement placé entre les deux facteurs.*

- ***les grecs** représentaient les nombres par des segments. Ils notaient alors une multiplication et son résultat de la manière suivante :*



Ils parlaient du "nombre rectangle 8" .
Les deux segments "font" ou "produisent" le rectangle d'où les mots facteurs et produit.
Dans le cas de l'addition ou de la soustraction le résultat obtenu peut être représenté par un segment. Il n'y a pas "production" d'un "objet" différent.
Diophante n'utilise aucun symbole pour la multiplication.

- *le mot arabe darb signifiant "multiplication" vient du verbe daraba qui signifie "frapper, enfoncer les pieux qui fixent une tente, donc délimitent une surface".*

SYMBOLES UTILISES :

- *Stifel utilise vers 1550 le symbole* M .

. *Viete utilise vers 1600 le symbole in , traduit par "en" par Pascal et Fermat* (1) .

. *Oughtred utilise en 1631 la croix de Saint-André* $\times$ (2) . *(Le symbole est cependant plus petit que les symboles* $+$ *et* $-$ *).*

. *Leibniz introduit le point* $\cdot$ *en 1698 à cause de la confusion possible de la croix avec la lettre* x *désignant l'inconnue ; auparavant, dans un ouvrage de 1666 il avait utilisé la lettre majuscule* C *placée ainsi* $\frown$ (3) .

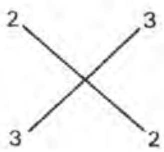
. *l'adoption générale de la notation* $\cdot$ *s'est faite en Europe au 18e s. grâce à Euler et Stirling. Les deux symboles* $\times$ *et* $\cdot$ *deviennent peu à peu les plus utilisés.*

---

(1) *on trouve chez les babyloniens le correspondant du "in" : pour* a^2 *ils écrivaient l'une des phrases : "croiser* a *avec lui-même" ; "croiser* a *en lui-même".*

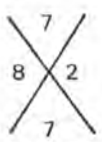
(2) *on ne sait pas exactement d'où provient ce symbole mais on en trouve une source dans la phrase des babyloniens : "j'ai croisé* a *et* b*" pour* $a \times b$.
Le symbole $\times$ *avait déjà été utilisé avant Oughtred dans plusieurs procédés mathématiques ; par exemple :*

. *Léonard de Pise en 1202 :*



indique qu'il faut multiplier 2 par 2 et 3 par 3 . Ce symbole est donc la superposition de deux symboles signifiant chacun une multiplication

. *Rudolph en 1574 :*



indique la preuve par 9

. *De la Chapelle en 1765 utilise :*

$\times$ *pour la multiplication*

pour la division des fractions

Ainsi $\frac{6}{7}$  $\frac{3}{4}$ *est égal à* $\frac{24}{21}$.

(3) *l'Académie de Berlin a publié en 1710 une explication des symboles de Leibniz : pour* $(a+b) \times c$ *on note* $a + b$, c *ou* $a + b \cdot c$, *si on veut un symbole supplémentaire,* $\frown$ *est préférable à* $\times$.

COMMENT EST POSEE UNE MULTIPLICATION

Pour la multiplication :

$$\begin{array}{r} 456 \\ \times\ 23 \\ \hline 1368 \\ 912 \\ \hline 10488 \end{array}$$

On trouve :

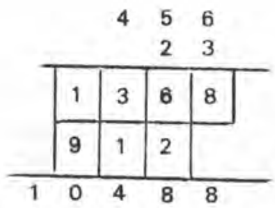
. **chez les indiens :**

$$\begin{array}{r} 654 \\ 32 \\ \hline 8631 \\ 219 \\ \hline 88401 \end{array}$$ *qui se lit de droite à gauche*

. **au Moyen-Age :**

a) **la méthode par "scachieri"** *(échiquier)*
ou par "bericuocolo" ("toque du chef" du nom d'un gâteau vendu aux fêtes de Toscane et qui avait la forme de l'opération posée)

ou



. *tous les traits disparaissent, la méthode est toujours désignée "par échiquier".*

On trouve :

4 5 6	4 5 6	4 5 6
2 3	2 3	2 3
1 3 6 8	1 3 6 8	1 3 6 8
9 1 2	9 1 2	9 1 2
1 0 4 8 8	1 0 4 8 8	1 0 4 8 8
(en 1515)	(en 1541)	(en 1567)

b) **la méthode du "château" ou du "petit château"**

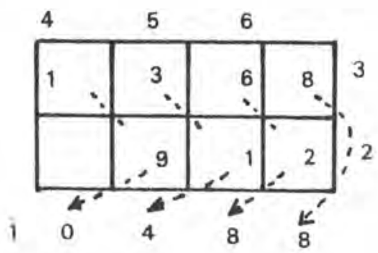
2 3	2	Per. 7 *
	2	
4 5 6	I	Prova
Castelucio	9 1 2 0	
	1 3 6 8	
Suma **	1 0 4 8 8	.II.*

* on trouve dans cet exemple la preuve par 7 .
La colonne du milieu en haut précise les restes des divisions par 7 :
$23 = 3 \times 7 + \underline{\underline{2}}$ $\qquad 456 = 65 \times 7 + \underline{\underline{I}}$ et le produit $2 \times I = 2$.
On retrouve ce reste écrit à côté du résultat en chiffres romains :

$$10488 = 1498 \times 7 + II$$

** le résultat d'une multiplication est très souvent appelé somme ou somme produite.

c) **la méthode du quadrilatère**



RETENUE :

Le mot vient bien sûr du verbe retenir . Il est associé au calcul mental. Au 17e siècle on trouve la phrase "garder en mémoire" pour retenir . On utilise aussi le mot report par référence aux calculs sur abaque.

TABLE DE MULTIPLICATION :

- *vers le 1er siècle, chez les grecs, on écrit sur des tablettes de cire les tables de multiplication.*

- *la "table de Pythagore" reçoit ce nom au Moyen-Age car on pense qu'elle provient de l'école pythagoricienne. En fait, déjà les babyloniens avaient des tables de ce type-là.*

- *des travaux sur les tables de multiplication des grands nombres sont faits en Grèce vers 500 .*

- *tout au long des siècles on établit des tables de multiplication . Ainsi en 1500 , à Lyon, on publie les tables de multiplication jusqu'à 100 × 1000 .*

FOIS : *du latin vicés "succession d'évènements, vicissitudes" par transformation du v en f .*

Le mot était utilisé en langue romaine pour indiquer chacun des cas où un fait avait lieu.

PREUVE PAR NEUF

Il a fallu très tôt trouver un moyen de vérifier les résultats d'opérations car les calculs sur l'abaque ne permettaient pas de montrer et de revoir les calculs intermédiaires ; l'opération inverse était trop longue en général.

- *elle n'est pas connue des anciens grecs (début de notre ère) , mais une superstition consiste à traiter les mots, et particulièrement les noms propres comme si les lettres qui les formaient avaient représenté des nombres (voir p. 13) , à calculer les résidus par rapport à 9 , et à en tirer des conséquences.*

- *elle est connue par les indiens au 10e siècle mais non utilisée.*

- *ce sont des auteurs arabes qui l'utilisent pour la première fois au 10e siècle et l'introduisent en Europe où son usage devient général au 11e siècle. Parmi les preuves utilisées, c'est la plus fréquente, même s'il arrive de trouver aussi des preuves par 7 ; 8 ; 11 .*

- *Fibonacci (13e s.) l'utilise dans les multiplications et les divisions.*

- *on la trouve par la suite systématiquement dans tous les traités d'arithmétique, associée à toutes les opérations. Dans certains livres on trouve même la liste des multiples de 9 ou la liste des restes des divisions par 9 de chacun des nombres inférieurs à 90 .*

  La preuve par 9 est la plupart du temps présentée sous forme de liste associée à l'opération.

  Par exemple :

170	8
91	1
79	7

294849	9
543	3
543	3

(9 est utilisé à la place de 0)

Rudolff la donne au 16e siècle sous une forme très proche de la nôtre :

pour le calcul de 5678 × 65 *il donne* $\begin{array}{ccc} & 7 & \\ 8 & \times & 2 \\ & 7 & \end{array}$

- *ce n'est qu'au milieu du 16e siècle que l'on prendra l'habitude de vérifier une addition par la soustraction associée, et réciproquement ; alors la preuve par 9 ne sera plus utilisée que pour la multiplication et la division.*

100

DIVISION

MOT : vient du latin dis-videre signifiant "voir en séparant".
Les arabes utilisaient la racine QSM signifiant "briser, partager" ; ainsi le mot qisma signifie "diviser par".

LES SYMBOLES :

chez les babyloniens on trouve un idéogramme spécial pour désigner la division.

chez les grecs, seul Diophante sépare dividende et diviseur par un mot.

en Inde on utilise une abréviation du mot signifiant "part" .

au Moyen-Age on note de différentes manières la division de 24 par 8 par exemple : 8)24 ou 8)24(ou 24 : 8
On voit aussi l'utilisation de la lettre gothique $\mathcal{D}$ (1515) .

Le symbole ÷ pour la division (avant il désignait la soustraction) est inventé par un mathématicien suisse en 1659, repris en Angleterre, transcrit en Amérique latine en ./.

On trouve au début du 19e s. aux U.S.A. les abréviations ÷ rs pour divisors (diviseurs),et ÷ nds pour dividends (dividendes) .

Leibniz propose C puis ⌣ puis : en relation avec . pour la multiplication.

Actuellement on retrouve les deux notations, ÷ dans les pays de langue anglaise et : dans les autres pays.

Remarque : Dans une suite de divisions et multiplications, jusqu'au début du 20e s., l'ordre des priorités de calculs est très flou : dans l'ordre d'écriture de gauche à droite, ou bien les multiplications avant les divisions.

COMMENT EST POSEE UNE DIVISION

a) **la méthode de Gerbert** *(10e s.)*

Pour diviser 900 par 8 on divise 900 par 10 - 2.
On note :

$$
\begin{array}{llr}
10 - 2)\ 900\ \left(90 + 18 + 3 + 1 + \frac{1}{2}\right. & & \textit{ou :} \\
\qquad \underline{900 - 180} & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 90 \times (10-2) \\
\qquad\qquad 180 & & \\
\qquad\qquad \underline{180 - 36} & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 18 \times (10-2) \\
\qquad\qquad\qquad 36 & & \\
\qquad\qquad\qquad \underline{30 - 6} & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 3 \times (10-2) \\
\qquad\qquad\qquad 6 + 6 = 12 & & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{10 - 2} & \ldots\ldots\ldots & 1 \times (10-2) \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 2 + 2 = 4 \quad \frac{4}{8} = \frac{1}{2} & &
\end{array}
$$

b) **la méthode par "facteur", par "moyen"**

Pour diviser 900 par 8 on divise 900 par 4 puis par 2.

c) **la méthode du bateau**

Pour diviser 65284 par 594 on fait :

$$
\begin{array}{l|l}
 & \\
65284 & \mathrm{I} \\
594 &
\end{array}
\quad \textit{puis} \quad
\begin{array}{l|l}
\mathrm{I} & \\
\cancel{6}5284 & \mathrm{I} \\
\cancel{5}94 &
\end{array}
\quad \textit{puis} \quad
\begin{array}{l|l}
\cancel{1}6 & \\
\cancel{6}\cancel{5}284 & \mathrm{I} \\
\cancel{5}\cancel{9}4 &
\end{array}
$$

$$
\textit{puis} \quad
\begin{array}{l|l}
5 & \\
\cancel{1}\cancel{0}\cancel{8} & \\
\cancel{6}\cancel{5}\cancel{2}84 & \mathrm{I} \\
\cancel{5}\cancel{9}\cancel{4} &
\end{array}
$$

et après de nombreuses autres étapes on trouve :

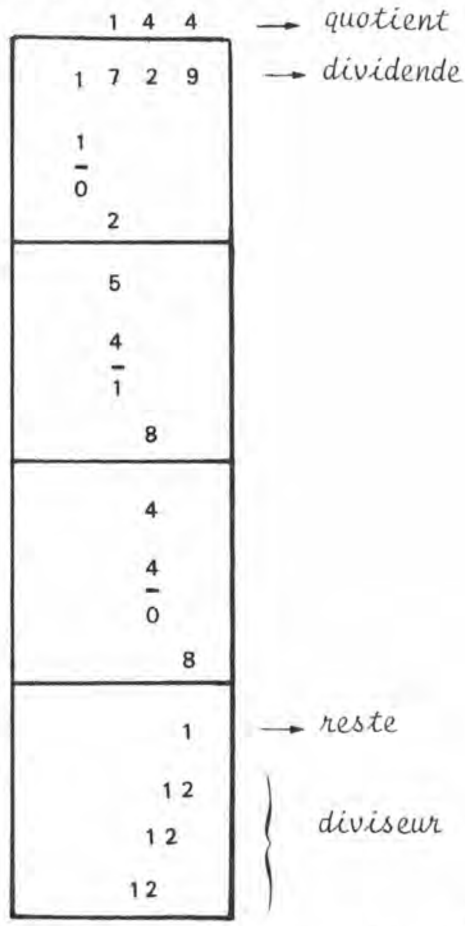
$$
\begin{array}{ccccc|l}
 & \cancel{1} & 5 & & & \\
 & \cancel{5} & \cancel{3} & 3 & & \\
\cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{8} & 7 & 8 & \\
\cancel{6} & \cancel{5} & \cancel{2} & \cancel{8} & \cancel{4} & \mathrm{I}\,0\,9 \\
\cancel{5} & \cancel{9} & \cancel{4} & \cancel{4} & \cancel{4} & \\
 & \cancel{5} & \cancel{9} & \cancel{9} & & \\
 & & \cancel{5} & & &
\end{array}
$$

quotient : 109

reste : 538

Cette méthode, ainsi appelée car l'opération terminée a la forme de la poupe d'un bateau, était déjà utilisée par les arabes dès le 10e siècle et sera encore en vogue jusqu'au 18e siècle.

d) **méthode trouvée chez les arabes au 15e siècle**



e) C'est vers la fin du 15e siècle qu'apparaissent deux méthodes proches de la nôtre. Pour la division de 53497 par 83 :

- la méthode allemande

```
       644
83  )53497
      369
       377
        45
         0   45/83 *
```

- la méthode française

```
53497  |83
534     644
498
 369
 332
  377
  332
   45
    0  45/83 *
```

* ce qui correspond à :

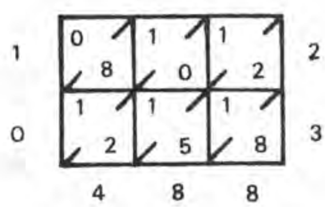
$$\frac{53497}{83} = 644 + \frac{45}{83}$$

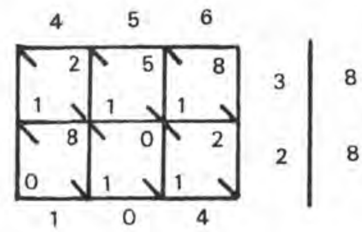
c'est la méthode française qui s'impose au 17e siècle.

103

d) ***la méthode par la "jalousie" (persienne) ou par la "grille"***

pour diviser 10 488 par 23 on trouve :





INVERSE

MOT : *vient du latin inversus qui signifie "retourné, renversé".*

La notion d'inverse d'entier est très ancienne :

- *chez les égyptiens on a trouvé dans le papyrus Rhind des tables donnant par exemple la décomposition de fractions de la forme* $\frac{2}{n}$ *en somme de fractions de la forme* $\frac{1}{m}$ *et ceci pour* $5 \leq n \leq 101$.

- *chez les babyloniens les tables d'inverses d'entiers sont courantes. De plus les babyloniens utilisent dans la vie commerciale deux nombres inverses définis par "l'égalité" : " marché* $= \frac{1}{\text{cours}}$ *" autrement dit, plus le cours est bas, plus le marché est haut.*

- *en Inde, vers 900 , puis chez les arabes aux siècles suivants la division par n ne se fait que par la multiplication par* $\frac{1}{n}$.

- *cette utilisation d'inverses ne deviendra habituelle en Europe qu'au cours du 16e siècle.*

POURCENTAGE

MOT : *déduit de l'expression "pour 100", ou "à la place de 100".*

- *le "pour" a toujours existé dans les textes les plus anciens parlant de prêt d'argent, notamment chez les babyloniens.*

- *"pour cent" s'est d'abord traduit au Moyen-Age par :*

  "per 100" ou "ꝑ100" ou "ꝑ cento"

- *en 1425 un anonyme italien a utilisé dans son manuscrit :*

  "ꝑ σ°" *pour désigner* "ꝑ $\overset{\circ}{c}$" *($\overset{\circ}{c}$ remplaçant cento)*

  au moment où les italiens écrivaient $\overset{\circ}{1}$, $\overset{\circ}{2}$... pour premier, second ...

- *ce symbole a évolué en différentes étapes jusqu'à notre symbole actuel :*

  "ꝑ σ°" *puis* "ꝑ $\frac{o}{o}$" *puis* "$\frac{o}{o}$" *ou* "%"

  la première apparition de $\frac{o}{o}$ *date de 1650.*

Par analogie avec % qui est constitué de deux zéros, on a introduit le signe ‰ (ayant autant de zéros que 1000) pour indiquer "pour mille".

INFERIEUR — SUPERIEUR

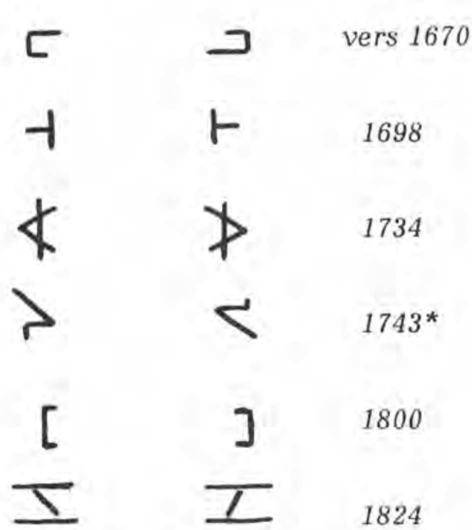
MOT : *inférieur vient du latin inferus signifiant "qui se trouve dessous" ; supérieur vient du latin superus signifiant "qui se trouve au-dessus".*

- *de l'Antiquité jusqu'au Moyen-Age la comparaison de deux nombres ne se fait qu'avec des phrases. "Il est moindre que", "Il est plus élevé que" ...*

- *aux 17e et 18e s. les symboles sont très nombreux. Les symboles utilisés de nos jours sont introduits par Harriot vers 1600.*
  Ils semblent être en relation avec les symboles musicaux associés au crescendo et au decrescendo que l'on trouve dans des partitions musicales de l'époque.
  Les symboles d'Harriot ne s'imposent définitivement qu'au milieu du 19e s.

QUELQUES AUTRES NOTATIONS :

Pour $>$ et $<$



---

* *ces symboles sont obtenus par rotation du symbole √ afin de ne pas créer un nouveau caractère en imprimerie.*

REMARQUES :

- *les signes $\leqq$ et $\geqq$ ont été introduits par Bouguer en Europe en 1734 .*
- *le symbole indiquant l'inégalité $\neq$ est moderne, mais non international. Peano en 1901 utilisait $-=$, le signe $-$ indiquant la négation.*

INTERVALLE

MOT : *vient du latin intervallum qui est un terme de fortification signifiant "espace entre deux pieux".*

Ce mot date du 13e siècle.

Chez les grecs (6e s. av. J-C) il y a :

- *l'intervalle au sens de la progression arithmétique, c'est-à-dire, en géométrie, la distance entre deux points mesurée sur la ligne droite qui les joint.*

- *l'intervalle au sens de la progression géométrique, c'est-à-dire, en géométrie, le rapport de deux grandeurs ; l'intervalle musical s'est d'ailleurs toujours calculé par ce procédé.*

La notion actuelle d'intervalle (ensemble de nombres compris entre deux valeurs données) ainsi que la notation ne semblent dater que du 19e siècle.

ALGEBRE, FONCTIONS

L'ALGEBRE

Même si le mot algèbre ne date que du 10e siècle, bien avant se développe une technique de résolution de problèmes.

1. LES RESOLUTIONS DE PROBLEMES DANS L'ANTIQUITE.

On a retrouvé dans des tablettes babyloniennes, sur le papyrus Rhind des égyptiens (environ 2000 av. J-C) ainsi que dans des ouvrages chinois de la même époque des résolutions très astucieuses de problèmes à plusieurs inconnues. Mais l'inconnue n'est que rarement désignée. Le calcul littéral bien sûr n'existe pas.

2. DIOPHANTE (3e s.).

Au milieu d'un environnement qui ne s'intéresse pour ainsi dire qu'aux raisonnements géométriques, ce mathématicien tient une place très particulière.

Il définit l'inconnue et ses puissances. Pour son époque c'est une grande invention ... qui passe totalement inaperçue.

3. LA NAISSANCE DE L'ALGEBRE (10e s.).

Une fois de plus l'apport des arabes est essentiel. Ils font la synthèse entre les travaux des indiens (chez lesquels on trouve notamment des résolutions d'équations du second degré) et des grecs et ils apportent leur contribution personnelle. C'est la véritable naissance de "l'algèbre", avec des règles de résolution d'équations.

L'Europe n'utilise pas tout de suite les apports des arabes. Il faut attendre le 15e siècle, notamment en Italie, pour que la langue algébrique se précise un peu.

4. L'ALGEBRE MODERNE.

Ce n'est qu'au 17e siècle avec Viete et Descarte que l'algèbre moderne prend corps avec des notations proches des notations actuelles.

Avec le 19e siècle apparaissent calcul matriciel et calcul des déterminants.

Le mot provient du permier mot al-ǧabr d'un ouvrage écrit vers 800-850 par Al-Khowārizmi. Ce mathématicien contribua à faire connaître aux arabes puis à l'Occident la numération indienne et les procédés "algébriques".*

"Al-gǎbr wa-l-muqābala" est le titre exact de l'ouvrage. Pour résoudre toute équation du second degré Al-Khowārizmi veut se ramener à des formes où tous les termes apparaissent comme des grandeurs additives.

Pour cela il définit deux opérations préliminaires :

. AL-GǍBR.

- *gǎbr vient du verbe gabara signifiant "remettre un membre luxé". Au Moyen-Age le mot latin algebra est utilisé par les médecins.*
- *en espagnol "algebrista" signifie "personne qui arrange les membres luxés".*

L'al-gǎbr consiste à faire passer des termes d'un membre à l'autre pour n'avoir dans chaque membre que des termes positifs.

Par exemple

$$2x^2 + 100 - 20x = 58$$

devient

$$2x^2 + 100 = 58 + 20x$$

. AL-MUQĀBALA.

- *muqābala signifie "réduire, diminuer".*

L'al-muqābala consiste à réduire tous les termes semblables de l'équation.

Par exemple

$$2x^2 + 100 = 58 + 20x$$

devient

$$2x^2 + 42 = 20x$$

puis

$$x^2 + 21 = 10x$$

Les arabes d'Orient, grâce auxquels l'ouvrage d'Al-Khowārizmi parvient en Europe, prononcaient la lettre ǧ comme un j. Ils disaient donc al-jabr.

Le mot "algèbre" fait son apparition au 14e siècle. Très vite il désigne toute la théorie des équations.

On parle des "algébristes" ou "algoristes" en opposition aux "abacistes" (utilisateurs d'abaques).*

. *en 1591 le mot analyse est introduit par Viete dans des problèmes autres que des problèmes géométriques. Le mot analyse signifie réduction.*
Jusque-là il était utilisé d'abord pour les changements d'unités (on "analyse" les degrés en minutes et secondes) puis ensuite pour l'une des méthodes de démonstration en géométrie.
Durant tout le 17e siècle il sera en concurrence avec le mot algèbre.

---

* *Al-Khowārizmi ou Al-Huwārizmi latinisé en Algorismi, se transforme successivement en Algorismus, Algorisme et enfin Algorithme (il faut attendre 1849 pour retrouver la véritable étymologie du mot algorithme).*

INCONNUES

. **chez les babyloniens** le nombre cherché est désigné par le mot *reš* qui signifie "origine", "la quantité à l'origine".

. **chez les égyptiens** il apparaît une inconnue qui porte le nom "aha" ou "h" qui signifie tas, monceau. Mais son utilisation n'est pas systématique.

. **chez les romains** il y a une absence totale de notation.

. Seul **Diophante**, au 3e siècle **en Grèce,** introduit un certain nombre d'abréviations.

Pour

1	x	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6
M°	ς	Δ^{Y}	K^{Y}	$\Delta^{Y}\Delta$	ΔK^{Y}	$K^{Y}K$
				carré carré	carré cube	cube cube

Δ est la première lettre du mot signifiant puissance.
K est la première lettre du mot signifiant cube.
Il note encore ς^{χ} pour $\frac{1}{x}$; $\Delta^{Y\chi}$ pour $\frac{1}{x^2}$ ...
Diophante travaille toujours avec une seule inconnue.
Ses recherches restent confidentielles à son époque.

. **chez les indiens** on emploie surtout les initiales des noms de couleurs pour désigner des inconnues. Il arrive que l'on utilise des points au-dessus des nombres ($\dot{2}$ pour $2x$).

. **les arabes,** s'inspirant des travaux des indiens, ont les conventions suivantes (9e, 10e s.) :

► x^2 est considéré comme la principale inconnue. On le désigne par "māl" qui signifie bien, montant d'une somme.
x est désigné par "ǧizr", traduction du mot sanskrit mula qui signifie racine d'un arbre ou d'une plante.

Un nombre est désigné par dirham, de la drachme grecque (unité monétaire).

► *Al-Khowarizmi a le terme général " say' " qui désigne aussi bien x que x^2.*

► *Peu après d'autres mathématiciens arabes améliorent ces notations avec les puissances de l'inconnue :*

ka'b pour x^3, māl-māl pour x^4...

et plusieurs inconnues possibles appelées :

šay' pour la première inconnue
dinār pour la deuxième
fals pour la troisième (petite unité de monnaie)
hātem pour la quatrième (cachet)

Pour les puissances, peu à peu, les premières lettres des mots sont écrites au-dessus des inconnues (s,m,k).
Apparaît aussi la racine carrée avec la première lettre ǧ du mot désignant racine.

. **au Moyen-Age en Europe :**

"gizr" est traduit en latin "radix".
"šay" est traduit en latin "res" qui parfois se transforme en "xei" puis "x".
Les travaux grecs amènent aussi l'utilisation du mot "latus". Il en résulte des confusions considérables sur la signification des termes et symboles :

- *res est parfois utilisé pour x^2.*
- *radix et latus signifient tous les deux x ou $\sqrt{x}$.*

. **du 15e siècle au 17e siècle** *les notations se multiplient en Europe.*

Citons :

Pour	1	x	x^2	x^3
Chuquet* (1484)	1^0	1^1	1^2	1^3
Pacioli** (1494)		co	ce	coce
Tartaglia*** (vers 1500)	N	R	Q	C
Bombelli* (1572)	$\overset{0}{\underset{1}{\cup}}$	$\overset{1}{\underset{1}{\cup}}$	$\overset{2}{\underset{1}{\cup}}$	$\overset{3}{\underset{1}{\cup}}$
Stevin (1590)		①	②	③
Viete (1600)	1	A	Aq	Ac

---

* *avec la convention 6x noté :*

6^1 *chez Chuquet*

$\overset{1}{\underset{6}{\cup}}$ *chez Bombelli*

** *co pour cosa (chose) ; ce pour censo ("produit").*
Aux 15e et 16e siècles l'inconnue est appelée cosa en italien, coss en allemand, chose en français, res en latin. L'algèbre s'appelle "l'arte della cosa" ; "Die coss".

*** *q pour quadratum ; c pour cubus.*

- **les conventions de Viete** sont très élaborées : inconnues avec des voyelles et (grande innovation !) nombres connus avec des consonnes. Il sait considérer plusieurs inconnues et des équations à paramètres. Avant lui les seules équations qui étaient résolues étaient à coefficients numériques ; lorsque l'auteur énonçait une règle générale pour traiter les équations, il le faisait avec des phrases sans symboles.

- **les conventions actuelles datent de la période de Descartes** (vers 1637).
  Au début, Descartes lui-même utilise z pour la première inconnue, y et x respectivement pour la deuxième et troisième inconnue (tandis que les premières lettres de l'alphabet désignent des données).
  Plus tard x devient plus fréquent pour désigner la première inconnue dans les écrits de Descartes.
  Il faut attendre le début du 18e siècle pour que les notations de Descartes se répandent partout en Europe.

- les indices sont utilisés à partir de la fin du 17e siècle par Leibniz et Newton (qui les écrit comme des exposants à droite ou à gauche des lettres).

EGAL

LE MOT : . *du latin aequalis qui vient de aequus "égal, uni".*
. *a donné aussi équation, "égalisation".*

LE SYMBOLE :

. *il apparaît pour la première fois en 1557 dans un livre écrit par l'Anglais Recorde puis à nouveau en 1618 dans un texte d'Oughtred. Les deux traits sont alors plus longs que les traits actuels.*

Recorde précise : "J'userai d'une paire de parallèles ou lignes jumelles parce que rien n'est plus pareil que deux jumeaux".
A l'époque le symbole $=$ désigne bien d'autres choses : une différence arithmétique (Viete 1591) ; $\pm$ (Descartes 1638).

. *cette notation ne s'impose définitivement qu'à la fin du 17e s.*

QUELQUES AUTRES SYMBOLES :

ل *arabes vers 1450 : dernière lettre du mot arabe signifiant "égal, fait équilibre".*

|| *au Moyen-Age en Europe d'après le symbole déjà utilisé par Diophante.*

[*Bourrel vers 1550.*

ꝏ *Descartes (17e s.). C'est le grand concurrent du $=$ aux 16e et 17e s. On a émis l'hypothèse que ꝏ est le symbole du bélier couché ce qui correspond à l'équinoxe période où la durée du jour est égale à la durée de la nuit.*

Remarque : *L'utilisation d'un symbole n'était pas systématique et on trouve en toutes lettres des mots signifiant égal :*

ki-kima "comme" chez les babyloniens

ε σ τ ι *chez les grecs*

egault, equales, ae, faciunt en Europe au Moyen-Age parmi d'autres.

EQUATIONS

MOT *: du latin aequatio venant de aequus : égal, uni ; signifie donc "égalisation".*

EVOLUTION HISTORIQUE :

- *pas d'équations écrites avec des symboles chez les babyloniens, égyptiens, grecs. Tous les raisonnements sont écrits en toutes lettres à l'exclusion de toute notation.*
  Cette habitude se retrouve chez les chinois, les indiens et les arabes.

- *la première tentative de convention date du 3e siècle avec Diophante, mais elle tombe vite dans l'oubli.*

- *tout au long du Moyen-Age, laborieusement, se met en place un langage "syncopé" mélange de mots et de symboles. Mais pour ainsi dire chaque mathématicien a ses propres conventions. Le langage "moderne" uniquement symbolique date de Descartes, il ne s'imposera vraiment qu'aux 17e-18e siècles.*

EXEMPLES DE CONVENTIONS. *Pour* $4x^2 + 3x = 10$:

Diophante (3e s.)	Δ^Y δ ζ γ $\varepsilon\sigma\tau\iota$ ι inconnue au carré — 4 — inconnue — 3 — égal — 10
Université de Paris (15e s.)	si tres res et quatuor censi cœquentur decem numeris
Chuquet (1490)	4^2 $\overline{p}$ 3^1 égault 10^0
Pacioli (1499)	quattro qdrat che gioto agli tre n^o facia dieci
Tartaglia (vers 1550)	4 q p 3 R equale 10 N

Bombelli (1572)	$4^{\overset{2}{\smile}}$ p $3^{\overset{1}{\smile}}$ equale 10
Stevin (1582)	4 ② + 3 ① egales 10
Viete* (1600)	4 in A q + 3 in A aequatur 10
Harriot (1631)	$4\,aa + 3\,a = 10$
Descartes** (1637)	$4\,z^2 + 3\,z \propto 10$

---

* *c'est Viete le premier qui introduit la possibilité de plusieurs inconnues et plusieurs paramètres. Il sait considérer l'équation* $ax^2 + bx = c$ *. Il l'écrit :*

B in A q + C plano in A aequatur D solido

L'inconnue x *est écrite avec la voyelle* A *.*

Les paramètres a , b , c *sont écrits avec les consonnes* B , C , D *.*

q est l'abréviation de quadratum pour obtenir x^2 *.*

Les mots "plano" et "solido" sont écrits pour avoir des grandeurs homogènes. En effet malgré les conventions d'écriture les grandeurs sont encore considérées comme des grandeurs géométriques. C doit être un nombre "plano" pour que C plano in A représente un nombre "solido".

Viete différencie la logistique "nombreuse" ou calcul numérique et la logistique "specieuse" ou calcul sur des signes ou lettres. Avant lui on ne savait résoudre que des équations à coefficients numériques.

** *le signe = n'est pas encore généralisé à toute l'Europe.*

RESOLUTION D'EQUATIONS

RESOUDRE : *Le mot vient du latin resolvere qui signifie "dénouer, dissiper". On dénoue ainsi un problème. On obtient sa solution (du latin solvere signifiant "délier").*

RACINE : *Le mot racine désigne pendant longtemps l'inconnue (voir p.115). Il est employé pour la première fois pour désigner la solution d'une équation au 13e siècle.*

MEMBRE : *Le mot est introduit en même temps que l'algèbre (voir p.112).*

LES METHODES DE RESOLUTIONS :

- ***chez les égyptiens*** *on a des "recettes" sans méthode générale.*

- ***chez les babyloniens*** *on sait par calcul résoudre toute équation du deuxième degré. Mais on cherche la solution sous la forme d'un nombre "exprimable".*

- ***chez les indiens*** *on trouve des résolutions d'équations déterminées des deux premiers degrés et la résolution générale de l'équation du deuxième degré à une inconnue.*

- ***chez les chinois*** *on rencontre une méthode de résolution de système linéaire qui annonce notre méthode par combinaison.*

- ***chez les grecs*** *la résolution des équations se fait uniquement par la géométrie. Chaque nombre est représenté par un segment. Ainsi l'équation $ax = b$ s'énonce "construire un rectangle dont on connaît un côté (a) et l'aire (b)".*

- *ce sont* ***les arabes*** *qui font connaître à l'Occident les méthodes de résolution utilisant l'algèbre (voir p. 112).*

- *du 15e au 17e siècle les méthodes de résolution suivent l'évolution du symbolisme pour l'inconnue notamment (voir p.116).*

- *Fermat et surtout* **Descartes** *exposent une théorie des équations écrite dans un langage très proche du nôtre : règles pour combiner, factoriser, transformer, résoudre, déterminer le nombre de racines ...*

- *les résolutions d'équations différencient encore des racines positives (appelées vraies par Descartes) et des racines négatives (appelées fausses).*
  Ce n'est qu'en 1750 que **Cramer** *fait la première étude exhaustive des systèmes d'équations linéaires.*

- *au 19e siècle apparaît le calcul des déterminants puis le calcul matriciel à l'origine de l'algèbre linéaire.*

PARENTHESES

MOT : vient du grec "para" (à côté) et "anthesis" (mettre).
On met un calcul de côté.

La nécessité d'utiliser des symboles pour indiquer les assemblages de termes n'est apparue qu'au 15e siècle (surtout à propos des radicaux) ; auparavant ils étaient indiqués par des mots.

EVOLUTION DES SYMBOLES :

*** des lettres :**

. utillisation la plus fréquente au 16e siècle. Les termes concernés n'étaient pas toujours clairement indiqués.
Par exemple : pour $\sqrt{17+\sqrt{208}}$

- Rudolff (1520) indique :

$$\surd \text{ des collects } 17 + \surd\, 208$$

- Wallis (1685) indique :

$$\surd\, b : 17 + \surd\, 208$$

où la lettre b est l'abréviation de binomial.

*** une barre horizontale** au-dessus ou en-dessous de l'expression concernée :

. première utilisation par Chuquet (1484).

. la barre était utilisée essentiellement à propos du radical $\surd$ ([1]), mais elle a également concurrencé les parenthèses.
Au 18e siècle le symbole est habituel en France et en Angleterre.
On le retrouve encore dans un manuscrit de Bernoulli en 1922.

* **le point** placé au début de l'expression concernée ou à la fin, ou même avant et après :

- première apparition chez Rudolff (16e s.) :
- pour $\sqrt{12+\sqrt{6}} + \sqrt{12-\sqrt{6}}$ Stifel (1544) note :

$$\sqrt{}\, z.12 + \sqrt{}\, z6 + .\sqrt{}\, z.12 - \sqrt{}\, z6 \qquad (^2)$$

- le point ne s'est pas imposé à cause de la confusion avec d'autres symbolismes (multiplication, division, fraction ,...) .
  Il disparaît presque totalement au début du 18e siècle.
  Quelques réintroductions apparaissent cependant :

  - pour $n(n-1)(n-2)\ \ldots\ 1$ Legendre (1811) note $n.n-1.n-2.\ \ldots\ 1$

  - Peano (1903) indique :

a.bc	est identique à	a(bc)
a : bc.d	est identique à	a[(bc)d]

Il utilise .˙. pour les accolades !

* **la virgule** utilisée de la même façon que le point :

Leibniz (1702) note c-b, l pour (c-b) l mais la virgule a peu de succès.

* **autres notations** ayant eu peu de succès (17e s.) :

$$x + \left.\begin{matrix} b \\ -c \end{matrix}\right\} y \quad \text{ou} \quad x + \left.\begin{matrix} b \\ -c \end{matrix}\right| y \qquad \text{pour } x + (b-c)\, y$$

* **les parenthèses,** crochets ou accolades :

Les parenthèses étaient utilisées jusqu'au 16e siècle comme des symboles de rhétorique. Il faut plus de deux siècles pour qu'elles soient considérées comme des symboles mathématiques.

Leibniz (1702) et Euler (1743), en les utilisant peu à peu plus fréquemment que les barres horizontales, ont contribué à les imposer.
Leur avantage était évident sur les autres symboles du point de vue typographique (coût de la composition).

([1]) c'est Harriot qui a introduit une longue accolade horizontale à propos du signe du radical :

$$\overbrace{\sqrt{}\ ccc + \sqrt{}\ ccccc - bbbbbb} \qquad \text{pour} \qquad \sqrt{c^3 + \sqrt{c^5} - b^6}$$

Cette notation a peut-être suggéré à Descartes son symbole $\sqrt{\ }$ *en 1637.*

([2]) on trouvait parfois une surcharge de symboles. Ainsi Bombelli notait en 1550 :

$$R^3\,[\underline{2.p.R\,[\,\underline{0\tilde{m}121}\,]}\,] \qquad \text{pour} \qquad \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}}$$

COMMUTATIVE

MOT *: vient du latin con-mutare signifiant "changer ensemble" ; les deux termes peuvent s'échanger dans une opération commutative .*

Ce mot est dû au français Servois en 1814.

ASSOCIATIVE

MOT *: vient du latin associare ; la racine socio est utilisée pour indiquer des phénomènes mettant en jeu des groupes d'individus.*

Ce mot semble dû à Hamilton au milieu du 19e siècle.

DISTRIBUTIVE

MOT *: vient du latin dis-tribuere , tribuere signifiant "répartir entre les tribus les avantages et les charges" , et, dis indiquant la "séparation" ; le peuple romain primitif était composé de trois groupes distincts, d'où le mot latin tribus .*

Ce mot est dû au français Servois en 1814.

NEUTRE

MOT *: vient du latin neuter signifiant "ni l'un, ni l'autre" ; il date de la fin du 14e siècle.*

LE MOT : *vient du latin functio qui signifie "accomplir, s'acquitter d'une obligation ; exprimer, réaliser" . Au début du 16e siècle il est utilisé avec le sens de "profession, métier, activité" .*

Il a été utilisé pour la première fois en mathématiques par Leibniz à la fin du 17e siècle.

LA NOTION :

- ***durant l'Antiquité*** *la notion de fonction n'est pas vraiment connue, mais on étudie souvent les liens entre deux quantités. On trouve par exemple des tables d'inverses, de carrés, de cubes (notamment chez les égyptiens et les babyloniens) .*

- ***en Grèce*** *la notion de fonction n'existe absolument pas ; on n'a jamais trace d'une courbe, ni de variations.*

- ***au Moyen-Age*** *la notion est exprimée par des phrases, on décrit les liens entre deux quantités.*

  Ainsi les arabes utilisent un mot signifiant "dépendant de" ou un autre mot signifiant "montrer, indiquer, signaler" .

  On trouve des études de mouvements associées à des relations, ainsi que des études de la fonction puissance .

  Oresme (14e s.) est reconnu pour avoir le premier introduit l'idée de représentation graphique (une "imagination") des variables (des "qualités") .

- ***Descartes*** *(17e s.) , avec ses applications de méthodes algébriques en géométrie, ouvre la voie à l'introduction de la notion de fonction .*

- ***à la fin du 17e siècle, et au début du 18e siècle*** *il y a des essais de définitions du mot fonction . Citons entre autres :*

  Leibniz : "J'appelle fonctions toutes les portions de lignes droites qu'on fait en menant des droites indéfinies qui répondent au point fixe et aux points de la courbe ; comme sont abscisse, ordonnée, corde, tangente, perpendiculaire ... et une infinité d'autres d'une construction plus composée qu'on ne peut figurer" . La fonction est donc n'importe quelle ligne qui remplit sa "fonction" dans une courbe.

Bernoulli : "On appelle fonction d'une grandeur variable une quantité composée de quelque manière que ce soit de cette grandeur variable et de constantes".

Euler : "La fonction est l'expression analytique quelconque des quantités variables et de nombres, ou avec des quantités constantes".

Euler est le premier à introduire une classification des fonctions : algébriques (opérations algébriques permises sur la variable) ou transcendantales (données par des séries infinies) ; uniformes ou multiformes (une ou plusieurs images pour la même valeur de la variable).

- ***au milieu du 18e siècle,*** *pour surmonter les problèmes de continuité, Euler donne d'autres définitions beaucoup plus vastes : "la relation entre y et x exprimée sur le plan par une courbe tracée en main libre", ou encore "si x désigne une quantité variable alors toutes les quantités qui dépendent d'une certaine façon de x ou qui peuvent être déterminées par x sont appelées fonctions de x".*

- ***aux 19e siècle et 20e siècle*** *toute une théorie des fonctions se développe en même temps que les recherches sur l'analyse. La définition "moderne" ne date que de la période la plus récente (1940) en accord avec le développement de la théorie des ensembles.*

LES NOTATIONS :

- *Il y a d'abord totale confusion entre la fonction et l'image de la variable par la fonction. On trouve entre autres :*

Xx ou ξx	*(Bournoulli 1698)*
$F = \sqrt{(aa + ff)}$	*notation pour désigner une fonction de f, a étant une constante (Bernoulli 1701)*
φx	*(Leibniz 1718)*
Πx ou Δx ou Φx	*(Clairaut 1747)*
fx ou Fx ou φx ou ψx	*(Lagrange 1797)*

- *c'est Euler qui le premier, en 1734, utilise la lettre f et des parenthèses entourant x.*

  Cette notation devient universelle avec Peano qui, en 1893, définit la fonction f par : $y = f(x)$.

- *au début du 20e siècle on distingue enfin f et $f(x)$; les notations sont alors diverses, les plus fréquentes étant :*

$$f(x) = y \qquad\qquad y = x|f \qquad\qquad y = xf$$

REMARQUES :

- *Euler fait une distinction entre une courbe qu'il appelle "continue" ou "régulière" , et qui est définie par une seule et même équation, et d'autre part, une courbe qu'il appelle "discontinue" ou "irrégulière" et qui nécessite des équations différentes pour chacune des parties qui la constituent.*

  Il distingue ainsi les fonctions "continues" ou "régulières" , des fonctions "discontinues" ou "irrégulières" . Avant lui une fonction devait être définie par une seule expression analytique.

- *Euler (1748) indique : "si y est une fonction quelconque de z , réciproquement z sera une fonction de y" . Il considère donc que toute fonction admet une réciproque qui peut être multiforme.*

  C'est avec Peano (fin du 19e s.) que la notion de fonction inverse telle qu'on la connaît est définie et notée $\bar{f}$ avec les égalités équivalentes :

$$y = f(x) \quad \text{et} \quad x = \bar{f}(y)$$

- *la notion de fonction composée était déjà connue par Euler en 1748 ; en effet celui-ci traite de la transformation des fonctions par substitutions , que nous appelons aujourd'hui changement de variable et qui n'est autre qu'une composition de fonctions .*

  Aux 19e et 20e siècles les notations abondent ; on trouve, entre autres, pour noter $g \circ f$:

$$g.f \qquad \text{ou } gf \qquad \text{ou } fg$$

  $f.f$ est parfois noté f^2 dès le début du 19e siècle.

  La notation $\circ$ est celle de la loi de composition interne dans la théorie des groupes abéliens.

VARIABLE

LA NOTION :

Elle est associée à celle de fonction, et évolue donc de la même manière.

- durant l'Antiquité il n'y a pas vraiment de variable mais l'étude de liens entre deux quantités.
- la notion de variable est inconnue chez les grecs.
- au Moyen-Age on utilise des phrases ; les arabes utilisent un mot signifiant "autre, différent".
- à partir du 16e siècle la notion se précise avec celle de fonction.
- Newton (17e s.) appelle une quantité variable et indéterminée "genita" ; ce peut être, précise-t-il, un produit, un quotient, une racine, un rectangle, un carré, un cube ... ; il parle également de "quantités fluentes".
- pour Leibniz (17e s.), une variable est une longueur.
- la variable prend une définition "libérée" de celle de fonction avec Weierstrass en 1859 qui indique : "une variable est interprétée comme une lettre qui représente n'importe quelle valeur d'un ensemble donné".

LES NOTATIONS :

Très vite, après Descartes (17e s.), la variable est notée par la lettre x ; lorsqu'il y a plusieurs variables on les numérote :

par exemple $x_{\overline{1|}}$ $x_{\overline{2|}}$

APPLICATION

Les anglais utilisent le mot mapping qui correspond au tracé d'une carte géographique, d'un plan.

Pour chaque valeur de x on peut en effet appliquer (voir p. 194) un segment qui indiquera la valeur de l'image de x, et on obtient un tracé.

ANTECEDENT

Le préfixe ante signifie "avant, devant" ; l'antécédent est celui qui précède.

Ce mot est dû aux traducteurs des Eléments d'Euclide (3e s. av. J-C) ; dans la théorie des proportions l'antécédent et le conséquent sont respectivement le premier et le deuxième termes du rapport.

IMAGE

***MOT** : vient de latin imago signifiant "représentation".*

Il a été utilisé avec la notion d'application.

BIJECTION

***MOT** : c'est une contraction de bi signifiant "deux" et de injection qui vient du latin injectare signifiant "lancer dans".*

Ce mot ne date que du milieu du 20e siècle.

LINEAIRE

Le mot vient du latin linea qui signifie "fait de lin", puis "cordeau, ligne à pêche", puis "ligne géométrique" et en particulier "ligne droite".

Le sens actuel (distinction de l'application linéaire et de l'application affine) est récent.

AFFINE

Le mot vient du latin affinitas qui signifie "voisinage".

Il a été utilisé pour la première fois avec un sens mathématique par Euler en 1748 : il nomme courbes affines deux courbes dont l'une est la transformée de l'autre, de telle façon que les abscisses d'un point et de son image soient dans un certain rapport, tandis que leurs ordonnées sont dans un autre rapport. Ces courbes ne sont pas semblables, mais peuvent cependant être rapprochées l'une de l'autre ; elles présentent une certaine affinité.

GEOMETRIE

LA GEOMETRIE

L'importance de la géométrie a considérablement varié à travers les âges.

- au départ c'est un travail très élémentaire, pratique (arpentage, mesures sur le terrain). Chez tous les peuples ayant atteint un certain degré de civilisation, les mêmes connaissances pratiques se sont développées indépendamment des influences étrangères et ont atteint un maximum plus ou moins élevé.

  en Egypte (2e millénaire av. J-C) : la propriété était très divisée et il y avait de fréquentes contestations territoriales auxquelles la justice ne pouvait guère mettre fin que par des procédés d'arpentage.

  en Inde (4e s. av. J-C) : la géométrie intervenait pour la construction des autels destinés aux sacrifices religieux. Il s'agissait d'augmenter la superficie de l'autel en conservant sa forme, ou de transformer l'autel en une surface d'une autre forme, mais de même aire.

- **Thalès** (6e s. av. J-C) fonde la géométrie de la ligne, plus abstraite que celle des égyptiens qui était la géométrie de l'aire .
  A l'époque grecque la géométrie devient une discipline théorique et l'activité mathématique par excellence. Ainsi Platon (4e s. av. J-C) fait écrire sur la porte de son école : "Nul n'entre ici s'il n'est géomètre" . Il y a une volonté de définir rigoureusement tous les termes employés, un effort de systématisation et d'abstraction dans les démonstrations (on les trouve dans les fameux "Eléments" d'Euclide au 3e siècle av. J-C) . Cet appareil logique de la géométrie grecque restera d'ailleurs un modèle pour beaucoup de mathématiciens dans les siècles suivants.

- l'activité mathématique s'oriente ensuite davantage vers l'algèbre et la trigonométrie.
  Du 5e siècle au 11e siècle, on peut dire qu'en géométrie on est au niveau des arpenteurs égyptiens et romains, car les œuvres grecques ne sont pas connues en Europe.

- **au Moyen-Age,** grâce aux travaux des arabes, les textes grecs sont étudiés, mais sans apport nouveau. Cependant il est à noter que les arabes désignent la géométrie par un nom qui signifie "art indien" ; en effet, à cette époque, de nombreuses questions sont résolues par les indiens : problèmes ayant rapport aux triangles, aux quadrilatères inscrits dans des cercles, et dont les mesures des côtés sont des nombres rationnels ou non.

- la géométrie réapparaît timidement sous une nouvelle facette à la **Renaissance** : les peintres ont dans leurs travaux besoin de techniques et de règles conventionnelles pour représenter dans le plan des figures de l'espace.
  Les textes des géomètres grecs sont (enfin !) édités : les Eléments d'Euclide en 1482, les textes d'Apollonius et d'Archimède au 16e siècle.

- **au 17e siècle** Descartes utilise les coordonnées pour définir les équations de courbes, se sert de l'algèbre pour étudier les théorèmes géométriques et les propriétés géométriques des figures. Une rivalité entre Newton et Leibniz dégénère et engendre une cessation complète des échanges entre les mathématiciens anglais (qui préconisent l'utilisation exclusive des méthodes géométriques) et les mathématiciens du continent (qui font appel à l'algèbre et à l'analyse pour traiter de la géométrie) pendant près d'un siècle.

- cette controverse entre la géométrie "synthétique" et la géométrie "analytique" se prolongera jusqu'au 19e siècle. Ainsi, Carnot parle des "hiéroglyphes de l'analyse" . En fait la géométrie analytique a permis un progrès certain car, plus efficace, elle a donné des réponses à des problèmes posés dès l'Antiquité et que l'on essayait de résoudre uniquement avec la règle et le compas. Elle a démontré entre autre l'impossibilité de la quadrature du cercle (construire un carré de même longueur qu'un cercle) , et l'impossibilité de la duplication d'un cube (construire un cube de volume double d'un cube donné) .
  Les transformations géométriques, apparues dans la première moitié du 19e siècle, aident à revaloriser la géométrie synthétique .

- avec le 19e siècle et le 20e siècle apparaissent notamment les géométries non euclidiennes.

PROBLEMES GEOMETRIQUES

Au cours des siècles les problèmes géométriques étudiés correspondent à deux démarches :

1. DES PROBLEMES PRATIQUES A L'USAGE DES ARPENTEURS, CONSTRUCTEURS, MARCHANDS.

On en trouve des exemples chez les égyptiens et les babyloniens (vivier, tas de sable). Chez ces derniers les textes sont parfois accompagnés de figures (souvent fausses) avec une légende numérique. Ces exemples sont repris dans les traités d'algèbre du Moyen-Age en Europe (dès la fin du 14e s.) où l'on trouve quelques feuilles de géométrie traitant de problèmes concrets pour les marchands.

Trois remarques à faire :

. *les figures géométriques les plus habituelles sont toujours associées à des notions concrètes ; elles accompagnent toujours les problèmes posés :*

- *le triangle équilatéral associé à l'écu*
- *le carré ou le rectangle associé au champ*
- *le triangle rectangle associé à une échelle adossée à un mur ou à une tour que l'on mesure*
- *le cercle associé à une roue*
- *le cube associé à un dé ou à une pierre*
- *le cylindre associé à un puits*
- *la sphère associée à une balle*
- *la pyramide associée à un tas de grains*
- *le parallélépipède associé à une salle ou à un vivier*

. *les problèmes posés (les "ragioni" ou raisons) sont par exemple :*

- *une roue de meule à partager en surfaces égales entre deux, trois, quatre artisans avec règle et compas*

- *un puits carré à creuser au centre d'une cour carrée*
- *une place à paver*
- *deux colombes situées sur deux tours d'inégales hauteurs et qui doivent se rencontrer à une fontaine qu'il faut placer à égale distance de leurs points de départ (problème connu chez les indiens avec des tiges de bambou)*
- *la surface de laine nécessaire pour recouvrir une balle*

. *les marchands sont les vecteurs de cette culture scientifique "popupaire", laïque. On trouve dans la manière de traiter ces problèmes très vite l'utilisation de l'algèbre.*

2. DES PROBLEMES DE CONSTRUCTIONS GEOMETRIQUES.

Ce sont bien sûr les grecs qui posent les premiers ces problèmes et en font la résolution par construction géométrique "pure". Tout est basé sur les "Eléments" d'Euclide (3e s. av. J-C). Par l'intermédiaire des arabes, qui traduisent les œuvres grecques et les transmettent à l'Occident, on retrouve cette tradition au Moyen-Age en Europe.

Trois remarques à faire :

. *les figures géométriques n'accompagnent plus systématiquement les problèmes posés. Peu à peu on passe de la simple explication de la construction à faire à la démonstration de cette construction.*

. *les problèmes posés (les "questioni" ou questions) sont par exemple :*

- *trouver la hauteur du triangle équilatéral en fonction de la mesure du côté*
- *inscrire un carré, un triangle isocèle ... dans un cercle*
- *inscrire un cercle dans un carré*
- *juxtaposer des triangles*
- *diviser des figures*

. les clercs sont les vecteurs de cette culture scientifique "officielle". Jusqu'au milieu du 15e s. la manière de traiter ces problèmes ignore totalement l'algèbre.
Les auteurs officiels de traités géométriques méprisent l'autre démarche qu'ils appellent "géométrie artificialiste".

Il faut également ajouter que dans chacune des deux démarches les problèmes posés sont remarquables par la stabilité des exemples numériques (de l'Antiquité au 16e s.) utilisant en priorité des valeurs entières.

C'est dans la géométrie de Nicolas Chuquet (1484) qu'apparaissent pour la première fois un mélange d'exercices tirés des deux démarches citées, et des exemples numériques parfois inédits.

POINT

MOT : *vient du latin punctum "piqûre".*
Les arabes utilisaient un mot signifiant "goutte".

- *l'école de Pythagore (5e s. av. J-C) indique : tout ce qui est indivisible quant à la grandeur s'appelle unité ; le point est l'unité ayant position ; les corps géométriques sont des sommes de points.*

- *autre définition : les points sont les limites des lignes.*

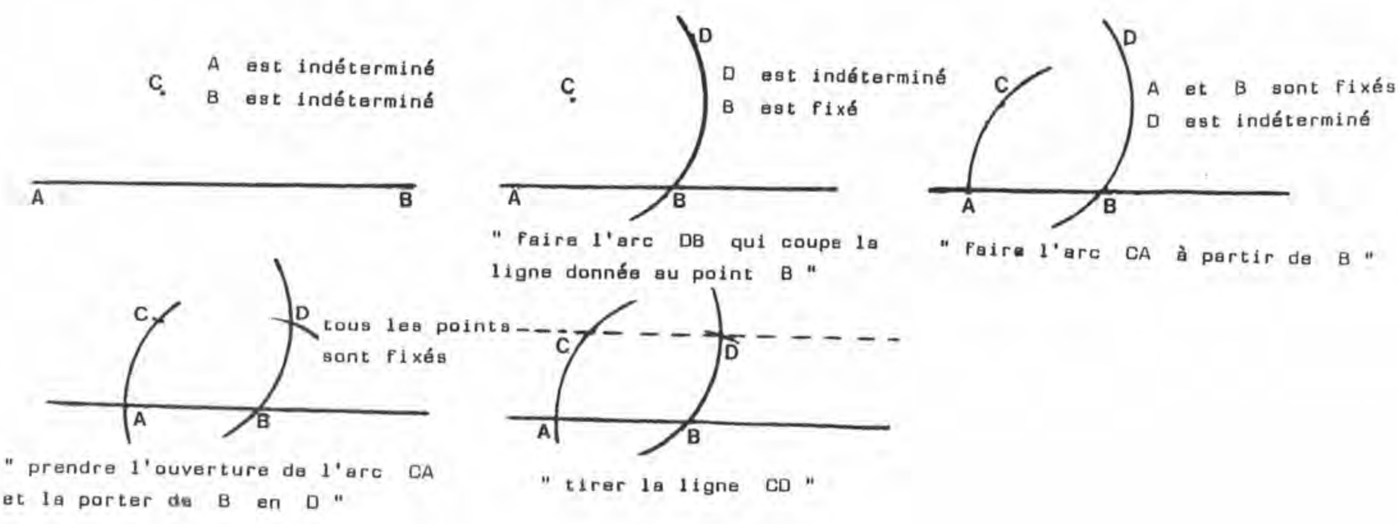
- *Euclide (3e s. av. J-C) définit : "Le point est ce qui n'a pas de partie". Cette définition sera toujours reprise au cours des siècles ; au 18e siècle, on retrouve ainsi : "Le point est ce qui n'a aucune partie et qui, par conséquent est indivisible".*

  Ce sont les grecs qui les premiers prennent l'habitude de noter un point par une lettre. On trouve au cours des siècles : A ou a ou a. ou .a.

REMARQUES :

- *dans tous les textes d'Euclide les points (de même que les lignes ou les angles) sont dits "donnés par la position" si ils occupent toujours le même lieu.*
  Cette notion de position d'un point est très imprécise, un point dans un texte pouvant aussi bien être fixé ou indéterminé.

  Exemple de texte du 18e siècle montrant comment " tracer la parallèle à la ligne AB passant par C " :



- *les points obtenus par construction le sont toujours par intersection de deux lignes, d'où la notation actuelle d'un point* $\overset{\times}{C}$

LIGNE

MOT *: vient du latin linea signifiant "lin, fil de lin".*
Les arabes utilisaient un mot signifiant "trace allongée".

- *l'école de Pythagore (5e s. av. J-C) indique : le point est l'origine de la ligne, laquelle est engendrée quand il effectue un mouvement.*

- *autre définition : les lignes sont les limites des surfaces.*

- *Euclide (3e s. av. J-C) définit : "Une ligne est une longueur sans largeur", et il précise : "les extrémités d'une ligne sont des points". Il ne considère que la droite et la circonférence dans ses Eléments.*

On retrouve la définition d'Euclide et la notion de trace dans la définition suivante au 17e s. : "La ligne est le tracé que laisse après lui un corps en mouvement et dont on ne considère pas la largeur".

Au 18e s. on distingue trois sortes de lignes :

- *la ligne droite (voir p. 142).*

- *la ligne courbe : celle qui ne va pas directement d'une de ses extrémités à l'autre mais qui s'en écarte par un détour.*

- *la ligne mixte : celle dont une partie est droite, et l'autre courbe.*

LIGNE DROITE

Les termes "ligne droite" sont les plus employés ; on trouve parfois seulement "ligne" ou "droite".

- *Platon (4e s. av. J-C) indique : "La ligne dont les points intermédiaires portent ombre sur les points extrêmes".*

- *Euclide (3e s. av. J-C) définit : "La ligne droite est celle qui est également placée entre ses points".*

- *Archimède (3e s. av. J-C) précise : "La plus courte de toutes les lignes qui ont mêmes extrémités", précision bien résumée dès le 5e siècle par "la plus courte distance entre deux points".*

- *on trouve aussi (17e s.) : "Soient deux points, si le premier se meut vers le second et vers celui-là seulement, il décrit une ligne droite".*

Après l'introduction des lettres dans les figures, introduction faite par les grecs, les notations les plus courantes sont :

au 16e siècle :

ab
a.b.
.a.b.

avec

au 17e siècle :

$\overline{AB}$ *avec*

au 19e siècle :

on parle de la ligne ABC pour indiquer :

DEMI-DROITE

C'est Laguerre au 19e siècle qui est l'un des fondateurs de la "géométrie de direction" . Considérant une droite ou un cercle comme une trajectoire qu'un mobile peut parcourir dans deux sens opposés, il est amené à regarder une droite comme formée de deux demi-droites , un cercle de deux cycles...

SEGMENT

***MOT** : vient du latin secare signifiant "couper".*
Le segmentum est chez les romains une "pièce de tissu découpé".
Ce mot est récent (16e s.).

. *chez les grecs le terme signifiant segment désigne un fragment fini découpé d'une figure plane ou solide ; ainsi Euclide parle également de segment de cercle ou de segment de cylindre. Mais le terme utilisé peut aussi bien désigner une droite illimitée ou un segment de droite.*

. *on retrouve cette imprécision au niveau des notations encore au 18e s. ; il n'y a aucune distinction entre un segment, une droite et une longueur et dans un texte on parlera de la ligne droite AB , et ensuite d'une ouverture égale à AB .*

Il existe pourtant deux qualificatifs, mais qui sont seulement sous-entendus dans les textes :

- *la ligne finie est celle dont la longueur est déterminée* 

- *la ligne indéfinie est celle dont la longueur est indéterminée* 

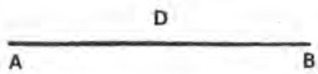
. *Remarquons que jusqu'en 1925 environ on utilise le mot "droite" pour désigner un "segment de droite" dans de nombreuses définitions.*

MILIEU

MOT : *est la réunion en un seul mot de mi venant du latin medius signifiant "milieu, moyen" et de lieu venant du latin locus signifiant "lieu".*
Milieu signifiait donc à l'origine le "milieu du lieu".

Le mot medius se retrouve dans médiane qui vient du latin medianus signifiant "placé au milieu".

Au 18e siècle on parle de la ligne divisée en deux également au point D pour le dessin :



MEDIATRICE

MOT : *vient du latin mediatrix qui signifie "celle qui fait action de médiation".*

Le mediator est chez les romains le médiateur ou personne qui tient le milieu.
La division par deux est appelée au Moyen-Age la "mediatio".

Ce mot a failli être remplacé en 1923 par le mot médiaire , mot plus court qui rappelle milieu et perpendiculaire , et qui signifie "placé au milieu" .

SECANTE

MOT : vient du latin secare signifiant "couper".

- au 3e siècle av. J-C, Euclide parle de "deux lignes qui se touchent dans un plan et qui ne sont point placées dans la même direction", de "droite tombant sur une droite".
- dans un ouvrage du début du 18e siècle récapitulant les différentes constructions géométriques on parle de lignes obliques.
- l'utilisation du mot pour parler de droites sécantes et de plans sécants semble récente.

INTERSECTION

MOT : vient du latin intersectio signifiant "action de couper par le milieu".

Les arabes utilisent un mot qui signifie aussi "surface de séparation", et dont la racine signifie "trancher, séparer".

Son utilisation pour parler du point d'intersection semble liée à la théorie des ensembles.

En 1818, Lamé parle du point de concours de deux lignes. Le mot concours vient du latin con-currere signifiant "courir ensemble", tout comme l'adjectif concourant.

PERPENDICULAIRE

MOT : vient du latin perpendiculum signifiant "fil à plomb".
per-pendere signifie "peser, pendre tout au long".
Le perpendiculator était le géomètre-arpenteur.

. étymologiquement la perpendiculaire désigne la verticale ; ainsi chez les babyloniens on parle de "descendante".

. les grecs, au contraire, utilisent un terme signifiant "ériger, élever" pour "construire la perpendiculaire à une droite" (voir p. 159).

. au 18e s. des lignes perpendiculaires sont des lignes qui, en se rencontrant, ne s'inclinent pas plus d'un côté que de l'autre.

. au 19e s. on trouve l'expression "tombant d'équerre sur" pour signifier "perpendiculaire à".
On trouve l'expression "ligne tirée d'équerre sur AB jusqu'à la rencontre de C" pour signifier "ligne perpendiculaire à (AB) passant par C".

SYMBOLE : le symbole actuel est apparu en 1634 et s'est imposé par la suite.

ORTHOGONAL

MOT : vient du grec ortho-gônia signifiant "angle droit".

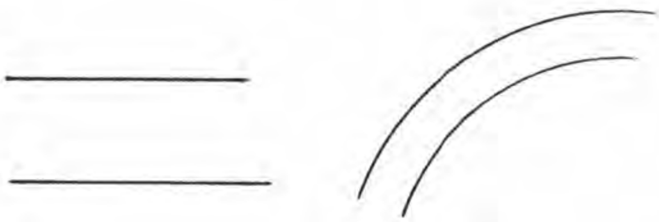
On retrouve le préfixe ortho dans le mot orthocentre ainsi que dans les mots orthographe : écriture "droite", correcte
et orthodoxe : opinion "droite", conforme.

PARALLELE

MOT : vient du grec *para* (à côté) *allêlous* (l'un l'autre).
deux droites parallèles sont en effet à côté l'une de l'autre.

- au 1er s. av. J-C on parle de droites "ni convergentes, ni divergentes".

- au 18e s. on définit : "des lignes parallèles sont celles qui conservent toujours entre elles une même distance* et qui étant prolongées de part et d'autre ne se rencontreront jamais, soit qu'elles soient droites, soit qu'elles soient courbes".



- au 19e s. on appelle parallèles deux lignes droites qui sont partout également distantes.

SYMBOLE :

Le symbole actuel est introduit par Oughtred en 1677. Il s'écrit d'ailleurs à l'époque plutôt ainsi $||$.

Il a été longtemps en concurrence avec $=$ (connu chez les grecs dès le 4e s. sous la forme $\overset{ov}{=}$) ce qui explique d'ailleurs la définition du signe "égal" donnée par Recorde au 16e siècle.

D'autres symboles ont été utilisés :

— ǂ ||| ⋕ ≈

---

* le mot DISTANCE vient du latin *distare* signifiant "se tenir écarté"

TANGENTE

***MOT** : vient du latin tangere signifiant "toucher".*
l'adjectif tangent est un peu plus tardif ; à la place de ce mot on trouve encore dans des textes du 18e s. "la ligne touchant l'arc" et on parle du point touchant ou du point d'attouchement.

- *les anciens géomètres appelaient tangente à une courbe "une droite qui, ayant un point commun avec la courbe, est telle qu'on ne peut mener par ce point aucune autre droite entre elle et la courbe".*

- *au 17e siècle :*

  Descartes et Fermat regardaient les tangentes comme des sécantes dont les deux points d'intersection sont infiniment rapprochés et pour ainsi dire réunis.

  Roberval concevait la tangente comme la "direction du mouvement composé par lequel la courbe peut être décrite".

  Barrow introduit une nouvelle notion, considérant la tangente à une courbe comme le prolongement des côtés infiniment petits de la courbe présentée comme un polygone d'une infinité de côtés.

HORIZONTALE

MOT *: vient du grec horizein signifiant "délimiter".*

Au 18e s. on définit : "La ligne horizontale ou de niveau apparent est une ligne droite qui toucherait la surface de la terre en un point ou qui serait parallèle à cette tangente".

VERTICALE

MOT *: vient du latin verticalis signifiant "qui descend du sommet" ; verticis signifie "pivot, pôle, sommet" .*

Au 18e s. on définit : "La ligne à plomb ou verticale est celle qui passerait par le centre de la terre si elle était continuée comme ferait un fil auquel on aurait attaché un plomb".

CERCLE

MOT : *vient du latin circus signifiant "cercle" ; une origine plus discutée est le mot grec kerkos signifiant "anneau".*
Le mot cercle sera en concurrence avec le mot cerne jusqu'au 17e s.

- *chez les babyloniens on utilise le même mot pour parler aussi bien d'arc de cercle, de cercle ou de circonférence.*

- *les grecs utilisaient un terme désignant à l'origine la roue. Ils désignaient aussi le cercle par le mot periphereia qui signifie "porter autour" et qui a été traduit en latin par circumferentia qui signifie "faire autour" (1) .*
  Il y eut ainsi pendant longtemps confusion entre le cercle, ensemble de points, et la circonférence, longueur du cercle (2) .

Le cercle est un sujet d'étude constant à travers les siècles dans tous les traités géométriques :

Savoir calculer le périmètre du cercle est un problème dont l'évolution est associée à la recherche de π .

Il y a aussi de nombreux problèmes avec cordes et arcs ainsi que toutes les inscriptions de polygones dans le cercle *(voir p.156).*

Il faut remarquer qu'une fois de plus au niveau numérique il y a très grande stabilité dans les exemples : le diamètre est presque toujours de 7 (parfois de 14) . Cela est dû à l'approximation la plus fréquente pour π qui est 22/7 .

Au cours des siècles le cercle fut parfois représenté par un graphisme :

$\odot$ *ou* $\bigcirc$ *ou* $\odot$ *chez les grecs*

$\bigcirc$ *au 19e s. ,* $\odot$ *désignant alors le disque*

---

(1) le mot circum de circum-facere se retrouve dans circum-scribere qui a donné le mot circonscrit.

(2) on trouve ainsi dans un texte du 19e s. : "On appelle circonférence une ligne courbe dont tous les points sont également distants d'un point intérieur appelé centre, c'est le contour du cercle". Il y a donc également confusion entre le cercle et le disque.

Deux exemples de définitions des caractéristiques d'un cercle :

Euclide *(3e s. av. J-C) :*

- *un cercle est une figure plane comprise sous une seule ligne qu'on nomme circonférence, telle que toutes les droites tombant sur elle à partir d'un point parmi ceux intérieurs à la figure sont égales entre elles.*
- *ce point est appelé centre du cercle.*
- *le diamètre du cercle est une droite menée par le centre et terminée de part et d'autre par la circonférence du cercle. Une telle droite partage le cercle en deux parties égales.*

Chuquet *(15e s.) :*

- *le centre est le point moyen également distant de toutes parts de la circonférence.*
- *la circonférence est la ligne circulaire qui enclot en soi les extrémités de la figure circulaire.*
- *le diamètre est la ligne droite passant par le centre divisant le cercle en deux parties égales.*

CENTRE

MOT : vient du latin centrum tiré du grec keutron signifiant "aiguillon" puis "pointe du compas" et donc centre du cercle.

Les arabes utilisent un mot dont la racine signifie "fixer au sol" ; on retrouve ainsi toujours cette notion de pointe.

DIAMETRE

MOT : vient du grec dia-metron signifiant "mesurer à travers".

Le diamètre n'est pas une notion associée uniquement au cercle.
En effet les grecs déjà parlent du diamètre d'un carré. On trouve, par exemple, au 15e s. des problèmes parlant du "dyamètre d'un quadrangle orthogone" c'est-à-dire de la diagonale d'un rectangle.
Le diamètre, de tous temps, a été une notion plus habituelle que le rayon.

RAYON

MOT : vient du latin radius signifiant "baguette".

Il n'est pas défini dans l'Antiquité ; on utilise parfois les mots distance ou semi-diamètre (5e s.).
Les arabes utilisent un mot dont la racine signifie "répandre çà et là".
Le mot apparaît pour la première fois au 16e s. puis devient habituel au début du 17e s.

Page 153 : n'existe pas – erreur de pagination

Page 154 : n'existe pas – erreur de pagination

SURFACE

MOT : *vient du latin superficies.*
Il a remplacé le mot superface issu de super-facies et signifiant "au-dessus de la face". (1)

- *au 4e siècle av. J-C on définit : les surfaces sont les limites des solides.*

- *Euclide (3e s. av. J-C) définit : la surface est une figure qui n'a que les dimensions de la longueur et de la largeur ; elle est dépourvue de profondeur.*

- *au 17e siècle on trouve : la surface est engendrée par la ligne en mouvement.*

---

(1) le préfixe super se retrouve dans le mot superposable qui signifie "que l'on peut poser au-dessus de".

PLAN

MOT : *vient du latin planus.*

Euclide définit au 3e siècle av. J-C le plan comme "la surface ayant la même situation par rapport à toutes les droites placées sur elle".

POLYGONE

MOT : *vient du grec polus-gônia qui signifie "plusieurs angles".*
Ce mot a désigné par la suite une figure terminée par plusieurs côtés.

L'étude et la construction des polygones est un sujet classique à travers les siècles.

- *les grecs ont la démarche suivante : ils partent de la figure ayant le moins de côtés (triangle) pour arriver à la figure qui en a le plus, et terminer par le cercle. A l'intérieur de chaque type de figure ils vont de la plus régulière à la plus quelconque.*

- *une autre démarche, que l'on trouve au Moyen-Age, consiste à partir du cercle et à considérer dans l'ordre croissant du nombre de côtés les figures inscriptibles dans le cercle.*

Le pentagone, l'hexagone, l'heptagone et l'octogone réguliers sont les polygones les plus construits et étudiés. Parmi eux l'hexagone joue un rôle toujours privilégié (en relation avec le triangle équilatéral). Les babyloniens connaissaient déjà l'hexagone régulier et le notaient ✱

Les problèmes que l'on retrouve depuis les grecs jusqu'au 17e siècle sont toujours de deux types :

- *méthodes de construction*
- *calculs d'aires*

REMARQUES :

- *les mots pentagone , hexagone , heptagone , octogone qui utilisent les préfixes grecs signifiant 5 , 6 , 7 , 8 ne sont pas systématiquement utilisés ; on trouve notamment les abréviations :*

5 <

6 < .....

157

où, bien sûr, < est l'abréviation d'angle.
On trouve également les notations ⁙ ou *

au 18e siècle on trouve la définition du kiliogone (figure à 1000 côtés) et la définition du myriogone (figure à 10000 côtés).

COTE

MOT : vient du latin costatum signifiant "partie du corps où sont les côtes" ; il a éliminé les mots lez , latere (venant du latin "latus", que l'on retrouve dans le mot équilatéral).

Les arabes utilisent, pour désigner le côté d'un angle ou d'un triangle, un mot dont la racine signifie "force, rassemblement", puis par extension "jambe, pied". Chez les arabes, et également au Moyen-Age, le côté désigne souvent l'inconnue dans les problèmes algébriques (sous l'influence de la géométrie grecque qui associait une figure géométrique à un problème calculatoire).

BASE

MOT : vient du grec basis signifiant "action de marcher" d'où "ce sur quoi on marche".

- *les figures planes sont considérées chez les grecs comme verticales ; ils parlent ainsi du carré construit sur tel côté. Ce terme est également utilisé pour les figures dans l'espace qui sont "construites sur une surface comme base" ; ainsi Archimède (3e s. av. J-C) parle du prisme construit sur telle figure rectiligne. La base est ainsi l'élément géométrique de départ d'une figure.*

- *le double-sens base d'une figure géométrique et base d'un raisonnement a toujours existé ; par exemple la racine du mot utilisé par les arabes signifie "s'asseoir", d'où, par extension, "assise, base, fondations" d'une part, et "règle fondamentale" d'autre part.*

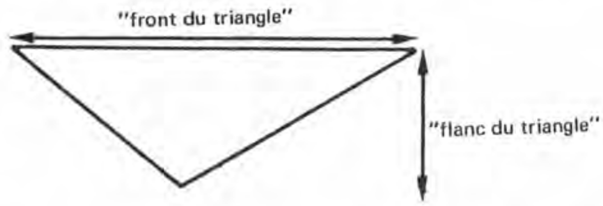
DIAGONALE

MOT : vient du grec dia-gônia signifiant "qui traverse d'un angle à l'autre". *(voir p. 152).*

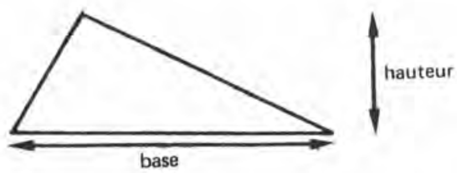
TRIANGLE

MOT : *signifie de façon évidente "figure à trois angles".*

. *chez les babyloniens le triangle est désigné par les mots "clou" ou "tête de clou" ; ceci est dû à la représentation des triangles :*



. *chez les grecs la représentation des triangles est tout à fait opposée ; ils construisent une figure plane sur une ligne comme base :*

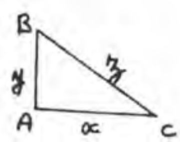


. *à travers les époques on trouve des classements de triangles ; citons :*

- *celui du mathématicien arabe Al-Huwarismi (10e s.) :*

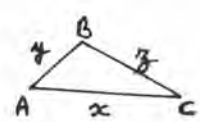
Il classe les triangles en trois catégories ; en notation moderne, x, y et z désignant les longueurs des trois côtés :

. *triangle tel que* $x^2 + y^2 = z^2$



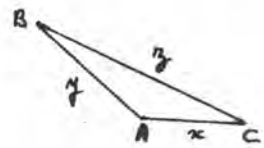
$\hat{A}$ est donc un angle droit

. *triangle tel que* $x^2 + y^2 > z^2$



$\hat{A}$ est un angle aigu

. *triangle tel que* $x^2 + y^2 < z^2$



$\hat{A}$ est un angle obtus

- *celui du mathématicien français Chuquet (15e s.) :*

Il considère :

. *les triangles équilatéraux*

. *les triangles inéquilatéraux ; parmi ces derniers il y a les triangles ayant "deux lignes égales" et les triangles ayant "trois lignes inégales" ; parmi ces tous derniers il y a aussi les triangles orthogones ("à angle droit").*

- *au 18e siècle il y a deux classifications des triangles :*

. *par les côtés :* *triangle équilatéral (trois côtés égaux)*
triangle isocèle (deux côtés égaux)
triangle scalène (trois côtés inégaux) [1]

. *par les angles :* *triangle ayant un angle droit (triangle orthogone)*

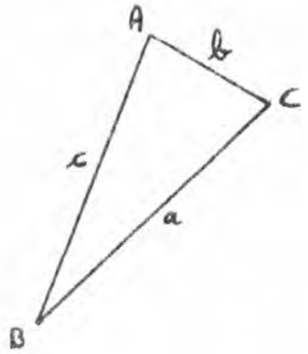
triangle ayant un angle obtus (triangle ambligone ou triangle obtusangle)

triangle ayant tous les angles aigus (triangle oxygone ou triangle acutangle)

REMARQUES :

. *dès l'Antiquité (chez les babyloniens et les grecs notamment) et même encore jusqu'au 17e siècle le triangle n'a pas toujours été désigné par des mots, mais par des graphismes ; les plus fréquents ont été*
$\triangle$ *ou* $\triangledown$

on trouve chez Euler (18e s.) les notations mathématiques modernes :

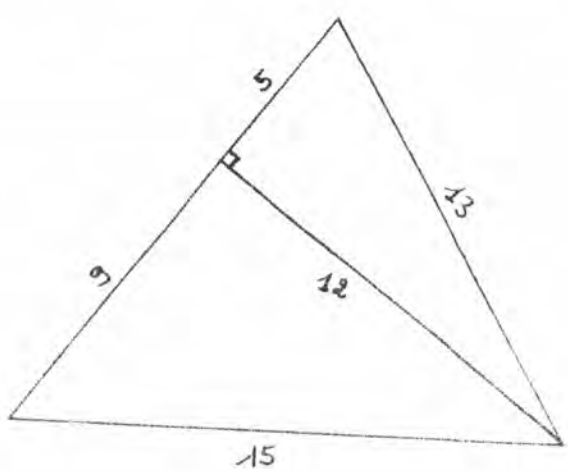


les côtés du triangle sont désignés par les lettres minuscules a , b , c ;

les angles opposés à ces côtés sont désignés par les lettres majuscules A , B , C .

---

(1) le mot scalène signifie "oblique" ; il a disparu du langage géométrique moderne. L'exemple le plus souvent utilisé était le triangle 13 , 14 , 15 qui a la particularité de définir deux triangles rectangles dont les côtés ont des mesures entières :



TRIANGLE ISOCELE

MOT *: vient du grec isos-skelos signifiant "jambes égales".*
Ce mot n'est introduit qu'à la fin du 16e s.

On parlait, avant le 16e s., d'un triangle ayant "deux lignes égales" ou "deux ypothénuses égales".

L'exemple numérique le plus fréquent dans tous les traités de géométrie est le triangle 10, 10, 12 (ou des multiples de ces valeurs). [1]

TRIANGLE EQUILATERAL

MOT *: vient du latin aequus-lateris signifiant "côtés égaux".*
Ce mot n'est introduit qu'à la fin du 16e s.

On parlait, chez les grecs notamment, de triangle équiangle.

Par la suite on parlait également de triangle ayant "trois lignes égales".

L'exemple numérique le plus fréquent dans tous les traités géométriques est le triangle dont la mesure du côté est 10 (ou un multiple de 10). [1]

TRIANGLE RECTANGLE

MOT *: vient du latin rectus-angulus signifiant "angle droit".*

On parlait, avant d'utiliser ce qualificatif, de triangle orthogone (voir p. 160).

Dans les exemples numériques, les valeurs 3 , 4 , 5 (ou des multiples de ces valeurs) reviennent systématiquement ; à tel point qu'au Moyen-Age, pour montrer qu'un triangle est rectangle, on montre que les mesures des trois côtés sont proportionnelles à 3 , 4 , 5 . (1)

---

(1) on retrouve, de l'Antiquité jusqu'à la fin du 16e s., les mêmes exemples numériques utilisant des valeurs entières. Cela est dû au fait qu'on ne sait pas commodément utiliser des nombres fractionnaires et encore moins des nombres irrationnels.

HAUTEUR

MOT : *vient du latin altare signifiant "rendre haut, élever, hausser" .*

On retrouve toujours cette notion d'élever, se dresser, étayer, être debout, tomber sur, dans les différents mots utilisés à travers les siècles. Citons notamment le grand concurrent du mot hauteur au Moyen-Age :

cathetusse qui signifie mot à mot "menée de haut en bas" ou "verticale"

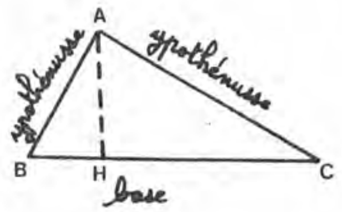
(Voir également p. 165) .

HYPOTENUSE

MOT : vient du grec hupoteinein qui signifie "sous-tendre".
L'hypoténuse a également été appelée la "sous-tendante".

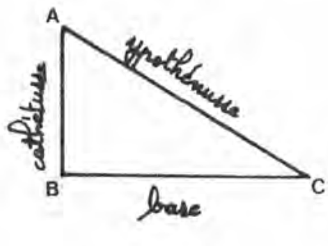
Le mot n'a pas toujours été employé dans le sens restrictif que nous lui connaissons maintenant dans un triangle rectangle :

Au 15e siècle, dans un triangle quelconque, on désigne les trois côtés par : base, hypoténuse et ... hypoténuse (d'ailleurs écrit ypothénusse).



[AH] est appelé la cathétusse (voir p. 164)

Le triangle rectangle est alors défini par : base, cathétusse et ypothénusse .

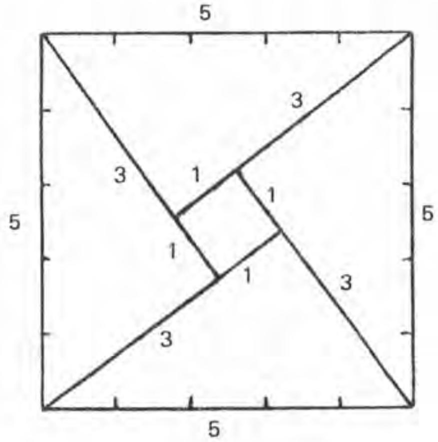


Le triangle isocèle est alors défini comme un triangle dont les deux ypothénusses sont égales.

THEOREME DE PYTHAGORE

Avant l'époque de Pythagore il existait des exemples de triangles rectangles à côtés entiers considérés comme des figures merveilleuses.

- **chez les chinois :** *dans le Chou-peï Suan King , ouvrage datant des 8e-9e siècles av. J-C , on trouve une présentation sans preuve du "théorème de Pythagore" avec l'illustration suivante :*



interprétation actuelle : l'aire du carré est 5^2 *ou*

$$(4-3)^2 + 4 \times \frac{4 \times 3}{2} = 4^2 + 3^2$$

- **chez les babyloniens :** *les géomètres sont familiers avec ce théorème et en comprennent le principe général. Ils ne savent pas en donner une démonstration mais ils peuvent former de nombreux triangles "pythagoriques" dont on a retrouvé des exemples (3, 4, 5 ; 5, 12, 13 ; 8, 15, 17 ; 20, 21, 29 ,...) sur des tablettes (1900-1600 av. J-C) .*

- **chez les indiens:** *les deux problèmes de base dans la religion hindoue concernent la construction des autels de sacrifice :*

  - *augmenter la superficie d'un autel en conservant sa forme,*
  - *transformer une surface en une autre de forme différente mais de même aire.*

La géométrie sacrée se trouve dans les Sûlva Sûtra (8e s. av. J-C) (Sûlva signifie "corde" ; on a donc la "règle des cordes". La corde était utilisée pour effectuer des mesures).

On y trouve les exemples numériques suivants :

3 ; 4 ; 5	*(triangle sacré avec 12 ; 16 ; 20*	*15 ; 20 ; 25)*
5 ; 12 ; 13	*(avec 15 ; 36 ; 39)*	
7 ; 24 ; 25		
8 ; 15 ; 17		
12 ; 35 ; 37		

Un énoncé du théorème général est indiqué : "La diagonale d'un rectangle engendre à elle seule ce que le grand et le petit côté engendrent séparément" mais sans aucune démonstration.

- ***chez les égyptiens :*** *les arpenteurs chargés de fixer les limites des propriétés après chaque crue du Nil utilisaient un cordeau avec des nœuds équidistants. Ils formaient un triangle 3 ; 4 ; 5 pour tracer des perpendiculaires.*

- *on n'est pas sûr de l'existence même de Pythagore.* ***L'école pythagoricienne*** *(≈550 av. J-C) a établi deux formules renfermant chacune une infinité de cas possibles :*

(transcrites en notations modernes)

$$n \qquad \frac{n^2-1}{2} \qquad \frac{n^2+1}{2} \qquad \text{pour } n \text{ impair et } n>1$$

$$2n \qquad n^2-1 \qquad n^2+1 \qquad \text{pour } n>1$$

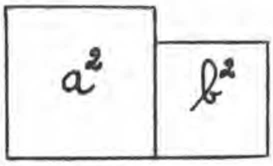
On trouve le théorème énoncé ainsi : "La corde transversale d'un quadrangle long produit, par construction sur elle d'un carré, à la fois ce que produisent séparément la longueur et la largeur".

168

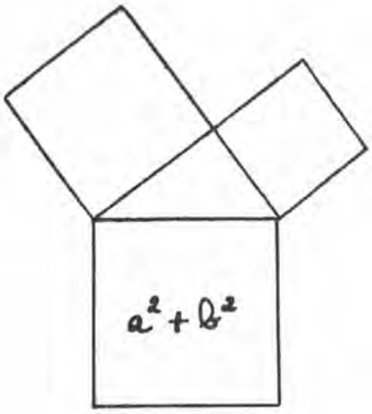
. **Euclide** *(≈300 av. J-C) a établi une démonstration générale du théorème.*

Ce théorème correspond à un problème important des géomètres grecs :

ramener la figure :



à un carré de même aire :



. *les triangles rectangles seront appelés "triangles de Pythagore" , notamment par Gerbert au 10e siècle.*

CENTRE DE GRAVITE

MOT : centre (voir le mot cercle).
gravité vient du latin gravitas signifiant "pesanteur".

. Archimède (3e s. av. J-C) a trouvé les centres de gravité des solides par des démonstrations faites au moyen de notions mécaniques. Ainsi il indiquait que : des poids inégaux suspendus à des longueurs inégales se feront équilibre, le poids le plus grand étant suspendu à la longueur la plus petite.

. on retrouve chez Pappus (4e s.) la première et seule définition laissée par l'Antiquité :

"Le centre de gravité de chaque corps est un certain point situé à l'intérieur de celui-ci, tel que, si l'on imagine le grave suspendu à ce point, il reste en repos tout en étant sollicité et conserve sa position initiale".

Remarquons que cette définition a été traduite et que le nom commun grave signifie au 16e siècle "corps pesant", et est également l'ancien nom du kilogramme.

QUADRILATERE

MOT : *vient du latin quadri-lateris signifiant "à quatre côtés".*

- *chez les égyptiens les arpenteurs utilisent notamment le trapèze isocèle en plus du carré et du rectangle.*

- *chez les babyloniens les quadrilatères les plus connus sont le rectangle, le carré et le trapèze.*

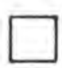
- *chez les grecs les quadrilatères, appelés quadrangles , sont tous construits et étudiés. Le rectangle joue, de même que le carré, un rôle primordial car associé à des opérations.*

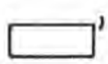
- *au 10e siècle, chez les arabes, on trouve la classification suivante :*

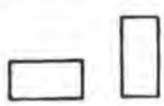
  - *carré*
  - *rectangle*
  - *losange*
  - *parallélogramme*
  - *quadrilatère ayant des côtés et des angles tout à fait inégaux*

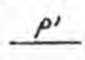
- *au Moyen-Age, en Europe, on considère les "quarrés" et les "tétragones" (figures à quatre angles).*

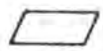
Dès l'Antiquité (babyloniens et grecs notamment) et jusqu'au début du 20e siècle on trouve parfois des graphismes pour définir des quadrilatères particuliers.

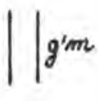
► *pour le carré :*  *(babyloniens, Pappus 4e s., Moyen-Age)*

► *pour le rectangle :*  *(grecs)*

 *(Moyen-Age)*

► *pour le parallélogramme :*  *(grecs)*  *(17e s.)*

 *(fin du 19e s.)*

 *(début du 20e s.)*

PARALLELOGRAMME

MOT : vient du grec para-allêlous-gramma signifiant "à coté" ; "l'un, l'autre" ; "ligne".
Un parallélogramme est donc limité par des lignes parallèles.

- *les arabes parlent de la figure qui est presque un losange.*

- *le mot rhomboïde sera utilisé jusqu'au 18e siècle.*

LOSANGE

MOT : il y a deux origines possibles ; un mot arabe signifiant "amande", un mot gaulois signifiant "pierre plate" (il y a des toits de lauzes).
Le mot n'est employé que tardivement (18e s.).

- *dans l'Antiquité il est défini comme une "figure en forme d'œil" ou une "figure en forme d'amande".*

- *pour les grecs c'est une figure équilatérale et non équiangle ; ils l'appellent rhombe (qui signifie "toupie").*

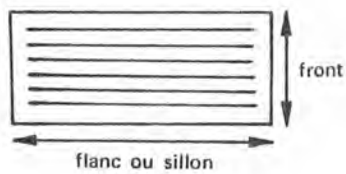
- *au Moyen-Age il est défini comme "un quadrangle équilatère" ou comme un "quadrangle non orthogone duquel chacune de ses quatre faces est égale".*
  Le mot rhombe sera utilisé jusqu'au 18e s.

Les mesures habituelles dans tous les traités géométriques sont 10 pour les côtés, 12 et 16 pour les diagonales afin d'obtenir quatre triangles rectangles juxtaposés, aux dimensions entières.

RECTANGLE

MOT : vient du latin rectus angulus signifiant "angle droit".

. *chez les babyloniens il est désigné par "front-flanc", en référence au champ rectangulaire où l'on tire des sillons dans le sens de la longueur :*



. *les grecs parlent du quadrangle long.*

. *le mot est d'abord employé dans son sens étymologique ; on définit alors le rectangle par : le quadrangle à quatre rectangles ou plus simplement le quadrangle allongé.*
On utilise aussi le mot orthogone, le rectangle est alors appelé le quadrangle orthogone.
On parle également du tétragone, du tétragone long ou du tétragone oblong.

. *le mot n'est employé dans son sens actuel qu'au milieu du 16e s.*

Au 19e siècle on appelle rectangle "une figure à quatre côtés dans laquelle chaque côté est égal au côté qui lui est opposé et tombe d'équerre sur les deux côtés voisins" (voir p. 146).

CARRE

MOT : vient du latin *quadrare* signifiant "rendre carré".
On trouve la même racine dans *quatre* et dans *équerre* ; au Moyen-Age on écrit d'ailleurs "quarré" ou "figure quarrée".

- chez les babyloniens c'est une figure dont les côtés sont égaux et s'opposent deux à deux ; c'est donc une "figure à quatre fronts".

- Diophante (3e s.) parle de *dunamos* (voir p. 55).

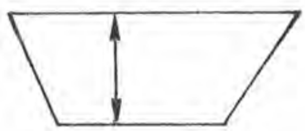
- au 10e s. les arabes désignent cette figure par un terme signifiant "jardin, enclos", dont la racine exprime l'idée de "fortune, avoir", ce qui explique que l'inconnue est désignée parfois par le même terme, en référence à des problèmes de succession.

- au 19e s. on appelle *carré* "une figure à quatre côtés égaux et dans laquelle chaque côté tombe d'équerre sur les côtés voisins".

TRAPEZE

***MOT** : vient du grec trapezion qui signifie "petite table à quatre pieds".*

- *chez les babyloniens il est désigné par "front de bœuf" car dessiné ainsi :*



les deux bases sont : le "front supérieur", le "front inférieur"

la hauteur est le "flanc"

- *dès l'Antiquité on s'intéresse plus particulièrement au trapèze isocèle (égyptiens) et au trapèze rectangle (en Orient surtout, en Inde notamment).*

- *les grecs utilisent un terme qui désigne un quadrilatère qui est en dehors des autres quadrilatères, c'est-à-dire qui a ses quatre côtés inégaux.*

- *le mot trapèze est trouvé pour la première fois chez Boèce (6e s.) mais il ne désigne alors, comme chez les grecs, qu'un quadrilatère quelconque. Ce n'est que beaucoup plus tard qu'il sera appliqué au quadrilatère qui n'a que deux côtés parallèles.*
  Le mot trapèze ne s'impose pas tout de suite ; jusqu'à la fin du 16e s. on parle notamment de "triangle au chef coupé", de "mensa" ou de "mensula".

- *au Moyen-Age le trapèze isocèle est défini par "quadrangle non orthogone lequel a deux lignes équidistans" ; le trapèze rectangle est défini par "quadrangle inéquilatère ayant seulement deux rectangles".*

DISQUE

MOT : *vient du grec diskos qui désignait un palet rond qu'on lançait par jeu.*

- *les babyloniens parlaient "d'enflure" mais le mot qu'ils utilisaient désignait aussi bien un disque qu'une couronne circulaire .*

- *pendant longtemps il y a eu confusion entre le cercle et le disque et on parle presque toujours de l'aire d'un cercle dans les traités mathématiques (jusqu'au Moyen-Age) .*

SECTION — SECTEUR

MOT : *les deux mots ont la même origine latine secare signifiant "scier".*

On retrouve cette notion de section dans les textes d'Euclide (3e s. av. J-C) qui indique : "que la droite soit donc brisée d'une nouvelle manière et qu'il naisse ainsi un autre angle" ou bien "on fait d'une droite un angle en la brisant en un de ses points".

- *le mot section est employé en géométrie pour la première fois au milieu du 14e siècle.*

- *le mot secteur est employé en géométrie pour la première fois au 16e siècle.*
  On parlait avant de quartier ; de partie de rond pour désigner un secteur circulaire par exemple.

ADJACENT

MOT : *vient du latin adjacere signifiant "être situé auprès de".*

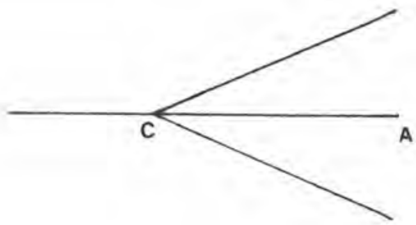
BISSECTRICE

MOT : vient du latin bi-secare , la bissectrice permet en effet d'obtenir deux secteurs superposables.

L'utilisation de ce mot est très récente (19e s.) , en effet :

. *au début du 18e siècle tracer la bissectrice d'un angle se dit : "sur un angle donné élever une ligne droite qui n'incline pas plus d'un côté que de l'autre" .*

. *au début du 19e siècle on parle de la "ligne CA qui opère la bissection de l'angle C" .*

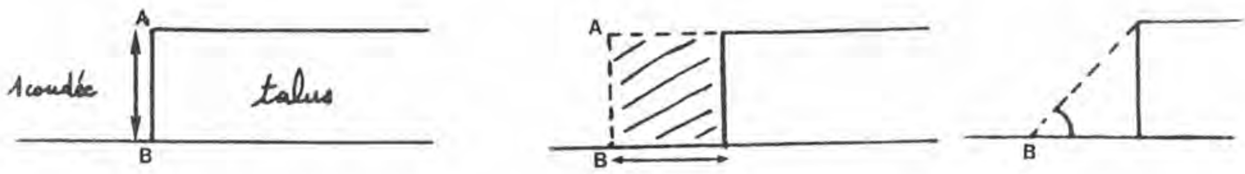


ANGLE

MOT : *vient du latin angulus .*

Les arabes utilisaient un terme dont la racine signifie "mettre de côté" .

- *la notion d'angle existe partout sauf chez les babyloniens. Pour la mesure des angles ils indiquent l'importance de l'inclinaison de son fruit par rapport à l'horizontale (voir p.213).*



"Sur un talus de 1 coudée on enlève 1 coudée" : ce qui définit un angle de 45° .

- *avant Euclide un angle est l'ensemble de deux lignes (en particulier deux droites) qui se coupent.*

- *Euclide (3e s. av. J-C) définit : "Un angle plan est l'inclinaison mutuelle de deux lignes qui se touchent dans un plan et qui ne sont point placées dans la même direction" , et il précise : "lorsque les lignes qui comprennent ledit angle sont des droites, l'angle se nomme rectiligne" .*

- *cette définition restera valable durant des siècles.*

  au 18e siècle on trouve : l'ouverture de deux lignes différentes qui se coupent ou se rencontrent en un point se nomme angle .

  au 19e siècle on trouve : on appelle angle l'espace compris entre deux lignes droites qui partent d'un même point, et également : la grandeur de l'angle s'évalue par l'écartement de ses côtés.

- *la notion d'angle de demi-droites n'apparaît qu'au 18e siècle.*

Un angle est toujours désigné par le sommet ou par les deux lignes qui le comprennent ; c'est à partir du 17e siècle que les notations abondent, il y a entre autres :

179

$<$ en concurrence avec le symbole utilisé pour indiquer "inférieur à"

$\angle$ modification qui s'impose pour enlever toute ambiguïté (à partir du 19e s.).

L'angle ABC est ensuite noté $\widehat{ABC}$ ou ABC .

On trouve aussi $\widehat{ab}$ pour l'angle formé par les deux lignes droites a et b ; il y a aussi les notations $\measuredangle$ et $\sphericalangle$

L'égalité d'angles se note parfois $\stackrel{\vee}{=}$ (en opposition à $\stackrel{\mid}{=}$ pour l'égalité de segments) ou bien $\stackrel{\circ}{=}$

AIGU — OBTUS

MOT : . *aigu vient du latin acuere signifiant "aiguiser".*
. *obtus vient du latin obtundere signifiant "frapper contre, émousser en frappant".*

Ces mots ont été utilisés très tôt :

. *Euclide (3e s. av. J-C) parle de cône acutangle et de cône obtus-angle.*

. *Archimède (3e s. av. J-C) parle, pour définir les coniques, de section de cône droit, de cône aigu, de cône obtus.*

. *au 6e siècle on trouve le mot obtusiangle pour "angle obtus".*

SAILLANT — RENTRANT

MOT : . *saillant vient du latin salire qui signifie "sauter" ; une partie saillante avance, dépasse.*

Ces deux termes pour qualifier un secteur angulaire semblent très récents ; ils ne figurent pas dans un ouvrage complet de géométrie datant de 1725.

Ils semblent être apparus au 19e siècle lorsqu'on a considéré les "angles de segments orientés" ; Peano, dans un ouvrage de 1888, précise que "si a et b sont deux segments, $\widehat{ab}$ désigne l'angle que font leurs directions et leurs sens" ; il s'agit donc d'un angle compris entre $0°$ et $360°$.

181

ANGLE DROIT

MOT : vient du latin *directus* , participe passé de *dirigere* qui signifie "mener droit" .

- Euclide (3e s. av. J-C) le définit ainsi : "Lorsqu'une droite élevée sur une droite fait deux angles adjacents égaux entre eux, chacun des angles égaux est droit" , et il ajoute "la droite placée au-dessus est dite perpendiculaire à celle sur laquelle elle est placée" .

- l'angle droit a souvent été utilisé comme unité d'angle ; ainsi au 4e siècle av. J-C on parle de la trentième partie de l'angle droit ; au 19e siècle on parle d'angle égal à $\frac{4}{3}$ d'angle droit.

- au cours des siècles, l'angle droit s'est noté de multiples manières :

∟ connu dès le 4e siècle

ANGLE PLAT

MOT : vient du latin *platus* signifiant "large" .
On trouve également à la place de "angle plat" : angle bidroit .

- la notion d'angle plat n'a pas toujours été acceptée : en effet on trouve dans un livre du 18e siècle le texte suivant :

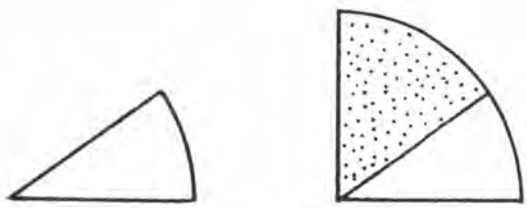
  "Aucun angle ne peut avoir pour sa mesure 180 degrés qui sont la demi-circonférence du cercle : car deux lignes ainsi écartées l'une de l'autre ne pourraient pas se couper mais se rencontreraient directement et ne seraient qu'une même ligne qui serait le diamètre du cercle".

- au 17e siècle on trouve la notation " < gac est — " pour indiquer que $\widehat{gac}$ est un angle plat.

COMPLEMENTAIRE

MOT : *vient du latin complere signifiant "remplir".*

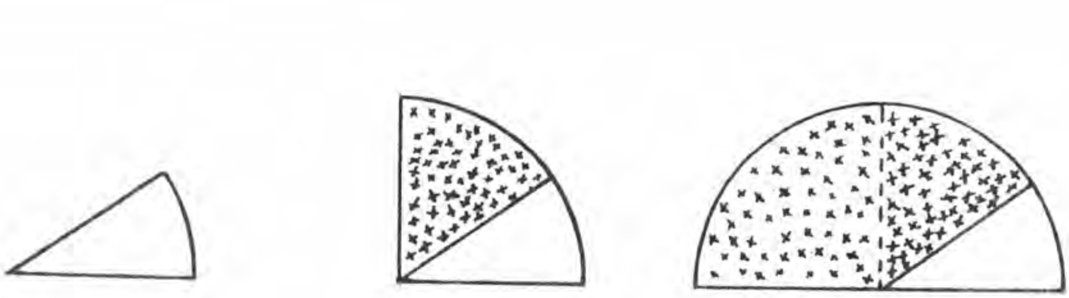
L'angle complémentaire est ainsi ce qui complète entièrement l'angle donné pour obtenir un angle droit.



SUPPLEMENTAIRE

MOT : *vient du latin supplere signifiant "remplir de nouveau".*

On complète ainsi l'angle donné en deux étapes pour obtenir un angle plat, ou deux angles droits.



SOLIDE

MOT : vient du latin solidus signifiant "massif".
L'empereur Constantin définit une nouvelle monnaie d'or et appela sa pièce solidus aureus ("pièce d'or massive"), d'où le nom : sou.

- *les grecs utilisaient le mot stereos pour désigner un solide, on le retrouve dans stère. Euclide (3e s. av. J-C) définit le solide ainsi : "ce qui a longueur, largeur et profondeur" ; il précise : "la limite d'un corps solide est une surface".*

- *pour désigner un solide les arabes utilisent un terme dont la racine signifie "corps" ; ils parlent aussi de "produit de trois facteurs".*

- *au 19e siècle on parle encore de corps rectangulaire pour désigner le parallélépipède rectangle, on évalue le volume d'un corps.*

POLYEDRE

MOT : vient du grec polus-hedra signifiant "plusieurs bases".

- *égyptiens et babyloniens connaissaient et étudiaient les tétraèdres (tétra signifie "quatre"), les hexaèdres (hexa signifie "six") et les octaèdres (octa signifie "huit").*

- *les grecs, en plus des trois polyèdres précédents, étudiaient les dodécaèdres (dodéca signifie "douze") et les icosaèdres (icosa signifie "vingt").*
  Ils leur associaient les symboles de feu, air, eau, terre, univers. Ils ne connaissaient pas le mot polyèdre.

- *ces cinq solides sont ensuite connus à travers les siècles sous le nom de : cinq solides de Platon ou cinq figures cosmiques.*

ARETE

MOT : *vient du latin arista signifiant "barbe d'épi" , puis "épi" (épi vient du latin spica qui signifie "pointe").*

Le mot prend le sens actuel au 4e siècle ; mais on parle du côté d'un cube encore au 19e siècle.

FACE

MOT : *vient du latin facies signifiant "façon, aspect d'une chose faite", puis "visage".*
Les arabes utilisaient un mot signifiant "visage".

CUBE

MOT *: vient du grec kubos signifiant d'abord "osselet" puis "dé à jouer", le jeu d'osselets se transformant en jeu de dés (les dés ayant une forme cubique).*

. *le cube était aussi appelé, par les grecs, hexaèdre.*

. *le sens primitif d'os se retrouve chez les arabes qui désignent le cube par un terme dont la racine signifie "os proéminent et à base carrée".*

PARALLELEPIPEDE

MOT *: vient du grec para-allêlous-epipedon signifiant "à côté", "l'un l'autre", "surface plane".*

Un parallélépipède est ainsi limité par des surfaces planes parallèles.

Les babyloniens le désignaient par un mot signifiant "brique". Le parallélépipède et le parallélépipède rectangle furent représentés dans certains traités de géométrie du Moyen-Age par les symboles ▰ *et* ■ *.*

PRISME

MOT : vient du grec prisma signifiant "volume scié".
C'est d'ailleurs toujours ainsi qu'on le désigne, en relation avec l'acte de scier du bois.

PYRAMIDE

MOT : vient du grec puramidos signifiant "tas de grains".

. *les grecs la définissaient comme un solide en forme de flamme (la racine pûr signifiant "feu" se retrouve d'ailleurs dans les mots pyrotechnique , pyromane).*

. *cette définition survivra pendant des siècles :*

- *chez les arabes on désigne le tétraèdre par, mot à mot, "en forme de flamme".*
- *durant le Moyen-Age les nombres pyramidaux (voir p. 39) sont appelés "nombres de feu".*

La pyramide fut représentée dans certains traités de géométrie du Moyen-Age par le symbole ▲ .

TRONC DE PYRAMIDE

Il était connu des égyptiens et des babyloniens ; mais, jusqu'au Moyen-Age on parle de pyramide coupée .

SPHERE

MOT : *vient du grec sphaira signifiant "balle".*
Les arabes utilisaient un terme dont la racine signifie "faire tourner, entourer".

CYLINDRE

MOT : *vient du grec kulindros signifiant "rouleau".*
Chez les babyloniens les mots signifiant puits ou profondeur désignent également un cylindre. Le mot cylindre date du 14e siècle ; auparavant on employait la plupart du temps le mot colonne.

CONE

MOT : *vient du grec kônos qui avait au départ un sens botanique. On le retrouve d'ailleurs dans conifère (qui porte des cônes).*

TRONC DE CONE

Il était connu des égyptiens et des babyloniens. Ces derniers le désignaient par "botte de roseaux". Jusqu'au Moyen-Age on parle de cône coupé.

VECTEUR

LE MOT : *vient du verbe latin vehere qui signifie "transporter". Ce mot désigne au 18e siècle un instrument de transport ; le verbe vehere se retrouve d'ailleurs dans le mot véhicule.*

Il a été introduit par Hamilton en 1843.

LA NOTION :

- *chez les grecs, notamment Archimède (3e s. av. J-C) on trouve l'utilisation du parallélogramme des vitesses.*

- *le parallélogramme des forces apparaît souvent aux 16e et 17e siècles ; ces parallélogrammes ne sont que des diagrammes permettant de calculer les composantes d'une résultante, mais bien sûr les notions de vecteur et de somme de vecteurs ne sont pas connues.*

- *c'est Leibniz (1679) qui le premier essaie de "calculer" sur des objets géométriques, mais son travail n'est publié qu'en 1833.*

- *au début du 19e siècle de nombreux mathématiciens en Angleterre, Allemagne et Italie découvrent la représentation géométrique des nombres complexes (il y avait déjà eu une tentative faite par Wallis au 17e s.). C'est la naissance des vecteurs.*

  Tout au long du siècle, des mathématiciens avec à leur tête Grassmann et Hamilton, fondent le calcul vectoriel dans le plan et dans l'espace avec une polémique entre :

  * *une utilisation pratique (phénomènes physiques, notamment l'électromagnétisme) ; le vecteur est une "grandeur dirigée" ; il est défini comme une droite dont on connaît la direction, le sens et la grandeur.*

  * *une théorie plus abstraite (quaternions, n-uple) ; le vecteur est un opérateur qui agit sur les coordonnées.*

- *en 1854, Bellavitis définit l'équipollence (mot venant du latin aequipollentia signifiant "équivalence") de deux droites.*

- *ce n'est qu'au début du 20e siècle que, sous la pression des recherches en physique, notamment en électricité, les deux théories se rapprochent et que le calcul vectoriel devient cohérent et habituel.*

REMARQUES :

- *le mot vecteur ne figure dans les programmes officiels du secondaire qu'à partir de 1925 ; on parlait auparavant de segment de droite orienté.*

- *la définition du vecteur liée à la structure d'espace vectoriel ne date que de 1930 environ.*

- *le calcul vectoriel ne semble s'être développé en France qu'après la seconde guerre mondiale.*

LES NOTATIONS :

Ce sont pour la plupart du temps celles utilisées pour un segment ; citons entre autres :

- *dans le plan :*

$\overline{AB}$, $\alpha\beta$

AB	*notation la plus fréquente au 19e siècle où l'on précise que A est l'origine, B est l'extrémité*
$\overrightarrow{AB}$	*pour indiquer le segment de droite AB parcouru en allant de A vers B*
$\vec{R}$	*où R est la "longueur" du vecteur*

L'emploi de la flèche est récent ; il appararaît dans l'Encyclopédie des Sciences Mathématiques vers 1925 .

- *dans l'espace :*

$\bar{r} = \bar{x} + \bar{y} + \bar{z}$	*où $\bar{x}$, $\bar{y}$ et $\bar{z}$ désignent les composantes sur les trois axes*
$\rho = ix + jy + kz$	*où i , j et k désignent les vecteurs unitaires des trois axes*

Les notations pour indiquer l'égalité de vecteurs ont été entre autres :

$\#$ et $\triangleq$, et le plus fréquemment $=$

NORME

MOT : *vient du latin norma signifiant "équerre".*

normalis signifie "fait à l'équerre" puis "conforme à la règle".
norma signifie donc au sens figuratif "modèle".

En anglais on ne parle pas de la norme d'un vecteur, mais de sa longueur, ou de son module.

On trouve entre autres les notations :

AB $\sqrt{R^2}$ $|R|$ TR *(tenseur du vecteur)*

MESURE ALGEBRIQUE

. *en 1804 , il y a une tentative imparfaite de Carnot d'attribuer des signes aux grandeurs euclidiennes, c'est-à-dire de définir des grandeurs orientées.*

. *en 1827 , Moëbius, indépendamment de Chasles, définit sur une droite* D *où l'on a choisi un sens de parcours le segment orienté* $\overline{AB}$ *comme étant égal à* $\pm AB$ *suivant que l'on passe de* A *à* B *dans le sens de parcours choisi ou dans le sens opposé ; la relation entre trois points de la droite* D *s'écrit alors dans tous les cas :*

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 0$$

On pourrait parler de "mesure relative" du segment orienté (mesure faite relativement au sens de parcours choisi sur la droite).

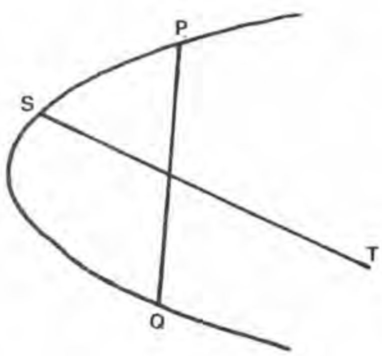
. *dans un ouvrage de 1846 , Klein parle de la mesure d'un segment qu'il note* $\overline{AB}$ *et il indique la relation* $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$ *; il écrit* $\frac{\overline{AD}}{\overline{BE}} = -4$ *pour traduire que les segments* AD *et* BE *sont de sens opposés et de rapport 4 ; un segment a donc pour lui un sens et une mesure ; le rapport ne concernerait que les grandeurs des segments (ou "mesures absolues").*

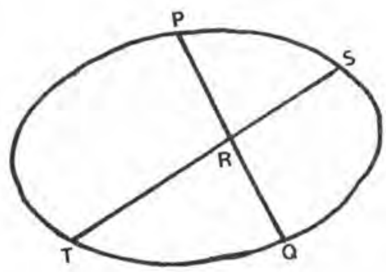
. *on parle en 1945 de mesure algébrique d'un vecteur (un vecteur étant défini comme un segment orienté) sur un axe.*

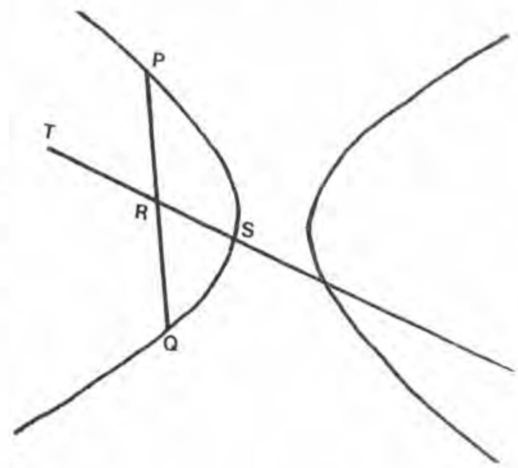
- dès la plus haute Antiquité l'observation astronomique avait conduit à repérer les directions dans l'espace par deux coordonnées rectangulaires : hauteur au-dessus de l'horizon, écart par rapport au méridien ; on étudiait leurs relations.

- chez les grecs, Archimède et surtout Apollonius de Perga (3e s. av. J-C) étudient les coniques par leurs équations avec un système de coordonnées.

  * ce sont des coordonnées obliques ayant pour origine un point S de la conique et pour directions deux droites (ST) et (PQ) telles que (ST) coupe $[PQ]$ en son milieu R ; (ST) est appelée diamètre

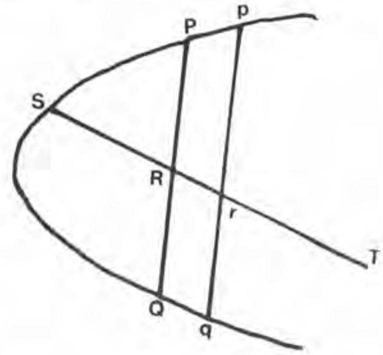






SR est l'abscisse du point S
PQ est l'ordonnée ou l'appliquée du point S.

Il est à remarquer que, pour un même point S, il peut y avoir plusieurs abscisses et plusieurs ordonnées.

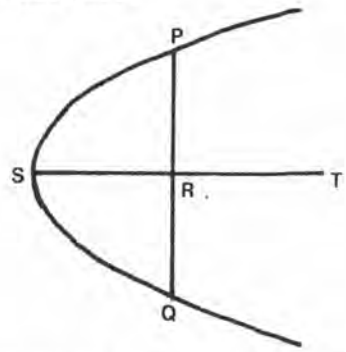


Sr est aussi l'abscisse du point S, pq est aussi l'ordonnée du point S, les droites (pq) et (PQ) étant bien entendu parallèles.

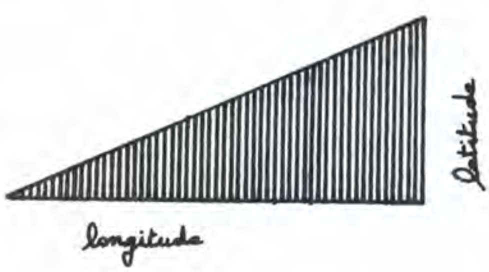
L'équation reliant une abscisse quelconque et l'ordonnée associée est toujours la même

$$\left(\left(\frac{y}{2}\right)^2 = ax \text{ pour la parabole par exemple}\right)$$

* *si les deux directions sont perpendiculaires, alors Apollonius parle de l'axe des abscisses*

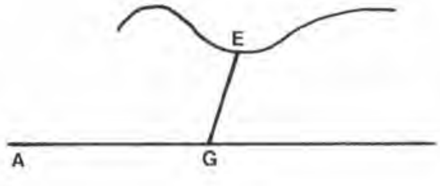


. *au 14e siècle, Oresme représente graphiquement la variation de la vitesse en fonction du temps, pour un mobile animé d'une accélération continue. Il parle de longitude à l'horizontale, et de latitude à la verticale.*



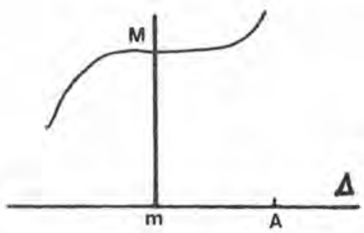
la "somme" totale des segments verticaux (autrement dit l'aire du triangle) représente selon Oresme la distance totale parcourue (c'est la notion d'intégrale) .
Il considère la figure géométrique prise dans son ensemble, et non la courbe qui en résulte, et ses rapports à un système de coordonnées .

. *Descartes (1637) choisit sur une droite adjointe à une courbe un point origine ; il choisit ensuite une direction selon laquelle la deuxième variable sera mesurée. Il parle de racines ou d'inconnues.*



A est l'origine
AG est la première racine
GE est la deuxième racine

. *Fermat (1637) utilise une droite Δ qu'il appelle diamètre ; de chaque point M de la courbe, il mène une perpendiculaire ou "appliquée" à la droite Δ .*



le point m est "ordonné" sur Δ par sa distance à un point arbitraire A de Δ .

Fermat introduit l'utilisation de coordonnées négatives.

. *Leibniz (fin du 17e s.) utilise les termes abscisse , ordonnée , coordonnées .*

. *l'expression "système de coordonnées cartésiennes" est un anachronisme puisque Descartes n'a jamais utilisé les termes "système de coordonnées" , ni l'idée de deux axes.*

La nouveauté provient de l'affirmation que ce procédé permet la création et la classification d'une infinité de courbes autres que des coniques, appelées "géométriques" (actuellement algébriques) associées à une équation entre abscisse et ordonnée .

Descartes ne s'intéresse pas à d'autres courbes (logarithme, sinus, cosinus...) qu'il appelle "mécaniques" (actuellement transcendantes) .

C'est, parce qu'à partir des travaux de Descartes et de Fermat, la géométrie analytique se développe que l'expression "coordonnées cartésiennes" se répand.

. *le concept de système de coordonnées sera défini beaucoup plus tard par Plücker en 1829 : "Tout procédé particulier pour fixer la position d'un point par rapport à des points ou des lignes considérés comme étant connus de position, correspond à un système de coordonnées" .*

ABSCISSE : *vient du latin ab-scindere signifiant "fendre - loin de" ; l'abscissa linea est la "ligne coupée" .*

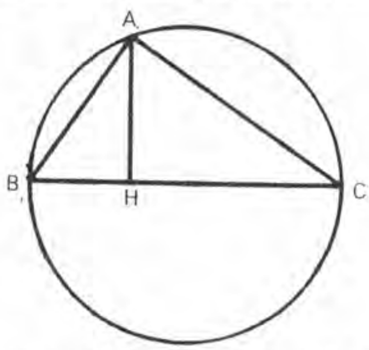
ORDONNEE : *on trouve la notion d'ordre en arabe, par exemple, où l'on utilise une racine signifiant "avoir une place invariable, être dans un ordre déterminé".*

Certains mathématiciens (Euler, Newton notamment) utilisent le mot appliquée ; on "applique" en effet un segment pour trouver ce qui correspond à l'abscisse.

COORDONNEES : *le mot est utilisé pour la première fois par Leibniz (fin du 17e s.). Moëbius parle en 1827 des "poids" ou "coordonnées" d'un point du plan ; les coordonnées ne sont pas uniques, seuls leurs rapports sont déterminés ; cette notion est alors associée à celle de barycentre.*

AXE : *vient du latin axis signifiant "essieu (d'un char)".*
On a vu que l'axe des abscisses est utilisé très tôt, et que l'axe des ordonnées est tracé beaucoup plus tard.
Au début du 20e siècle on conseille dans certains traités de mathématiques de mettre la lettre z sur l'axe des ordonnées, z étant l'initiale de zénith.
Dans ces mêmes traités un point quelconque d'une courbe géométrique est noté M car M est l'initiale de mobile.

Remarque : *les mots axe, abscisse, ordonnée sont utilisés chez les grecs dans un problème très ancien (dont on trouve déjà l'énoncé chez les babyloniens) : construire la moyenne proportionnelle entre deux nombres.*



HA est la moyenne proportionnelle entre HB et HC ; HA, HB et HC sont dans un rapport constant, c'est-à-dire coordonnées dans le sens initial du mot.
HA est appelé l'ordonnée ; BC est appelé l'axe ; HB et HC sont les abscisses.
La propriété est énoncée ainsi :
"Si d'un point pris sur la circonférence on mène une perpendiculaire à un diamètre, le rectangle des abscisses est égal au carré de cette perpendiculaire" (voir p. 93). C'est même ainsi qu'est défini un cercle.

SYMETRIE

MOT : vient du grec summetria qui signifie "juste proportion" ; sum metron se traduit mot à mot par "avec mesure", "avec régularité".

Ce mot est utilisé à partir du 16e siècle ; on le notait d'ailleurs symmétrie jusqu'à la fin du 18e siècle.

TRANSLATION

MOT : il signifie "traduction" jusqu'au 16e siècle. En ancien français, traduire se dit translater (sens que l'on retrouve en anglais avec : to translate).

C'est au 17e siècle que le mot prend le sens de "transport, transfert d'un corps".

PROJECTION

MOT : vient du latin projectio qui signifie "action de jeter en avant". Les arabes utilisent un mot dont la racine signifie "tomber, chute".

La projection est définie dès le 2e siècle par Ptolémée qui l'emploie pour la construction des cartes géographiques.

A l'origine, la projection d'un point sur une droite est le pied de la perpendiculaire menée de ce point à cette droite, comme le point de chute d'une pierre (sans vitesse initiale) est sur la verticale du point où elle est lâchée ; il y a donc confusion entre projection et perpendiculaire.

TRACER

MOT : *vient du latin trahere qui signifie "tirer, faire un trait, une trace".*

On retrouve ce mot dans abstraire qui signifie littéralement "tirer au loin", "entraîner au loin".

DESSINER

MOT : *vient du latin signum signifiant "signe".*

Pour ce mot les arabes utilisaient au Moyen-Age un mot provenant d'une racine persane signifiant "percevoir des taxes". En effet la personne qui percevait des taxes se tenait en des points déterminés, dessinés, tracés au sol (points frontières par exemple).

FIGURE

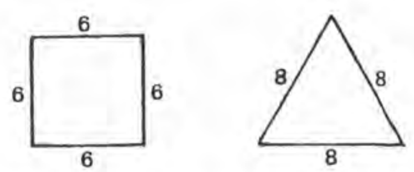
MOT : *vient du latin figura.*

Au 18e siècle la figure est "ce qui est terminé de tous côtés".
Au 19e siècle on parle de "portion de surface terminée par des lignes".

Il y a différents termes pour comparer les figures entre elles au 18e siècle :

- *des figures concentriques ont le même centre*
- *des figures excentriques n'ont pas le même centre*
- *des figures égales contiennent un nombre égal de quantités égales (elles peuvent être égales et semblables, égales et non semblables, semblables et non égales)*
- *des figures isopérimètres sont celles dont le circuit (mot utilisé pour périmètre) est égal*

par exemple :



le circuit du carré est 24 parties égales à celles qui font le circuit du triangle

SCHEMA

MOT : *vient du grec skhêma signifiant "attitude , position" .*
Le schéma est ce qui est compris par une ou plusieurs limites.

Sur un schéma, au 18e siècle, on distingue :

- *les lignes occultes ou blanches qui se font avec la pointe du compas, ou plus proprement avec le crayon, et qui ne doivent pas paraître, l'ouvrage étant achevé.*

- *les lignes qui doivent rester ou lignes apparentes et qui se tracent à l'encre, avec le tire-ligne, si grosses et si fines qu'on veut.*

GRAPHIQUE

MOT : *vient du grec graphikos et signifie "relatif à l'écriture" .*

DIAGRAMME

MOT : *vient du grec diagramma et signifie littéralement "chose tracée ou dessinée à travers" .*
On retrouve gramma dans programme , "chose tracée avant" .

L'unité de masse, le gramme , vient aussi du grec gramma et signifie donc "chose tracée, écrite" . Ceci est dû à une erreur de traduction des grecs. Les romains utilisaient le scripulum ("petite pierre") comme mesure de masse. Les grecs ont cru à tort que le mot scripulum venait du verbe scribere ("écrire") . Ils ont donc traduit par gramma ("signe écrit") .

PERSPECTIVE CAVALIERE

Perspective vient du latin perspicere qui signifie "voir à travers".

Le cavalier est un ouvrage de fortification (16e s.) dominant les retranchements, à l'arrière.

La perspective cavalière est telle que la perspective est observée du haut du cavalier ; c'est une vue d'arrière et de haut.

La représentation en perspective cavalière était à l'origine surtout utilisée à des fins militaires.

200

REGLE

MOT : *vient du latin regula ; regere signifie "mener droit".*
La règle est donc un instrument servant à mener droit.

EQUERRE

MOT : *vient du latin exquadrare signifiant "tailler en carré" (l'équerre est un instrument permettant cette taille).*
L'ancien français esquerre signifiait "carré" et désignait la plaque carrée dont on se servait pour tracer des angles droits.

- *cet instrument était déjà manié en Egypte.*
- *au Moyen-Age on parle d'"angle tiré en esquerre" pour l'angle droit.*

L' équerre sert à connaître si une ligne tombe perpendiculairement sur une autre ; on y met parfois (au 18e s.) un fil avec un petit plomb pour servir de niveau (afin de mettre un plan horizontalement)

Les deux parties de l' équerre sont utilisées également (au 18e s.) à d'autres fins pratiques : on y met des unités de mesures sur l'une, une échelle sur l'autre.

On trouve la racine du mot équerre dans cadran (la surface des horloges solaires était généralement carrée) et dans le mot italien squadra qui a donné en français les mots escadres et escouade.

COMPAS

MOT : vient du latin compassare qui signifie "mesurer avec le pas".

Cet instrument était déjà connu en Chine au 4e siècle av. J-C.

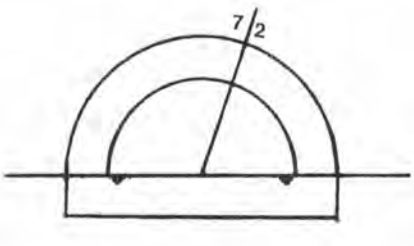
Le compas sert à partager un segment en un certain nombre de parties égales, et à mesurer avant de servir à tracer des cercles. Le mot compas a en effet été d'abord utilisé dans les expressions à compas, par compas pour signifier "d'une manière régulière". Il a désigné l'instrument lui-même au 12e siècle.

Au 18e siècle le compas possédait différentes pointes possibles ; pour tracer à l'encre, au crayon, ainsi qu'une pointe avec roulette qui servait à tracer les lignes occultes quand on voulait les laisser ; on obtenait ainsi des lignes ponctuées.

RAPPORTEUR

MOT : vient du latin apportarer signifiant "porter vers".

Le rapporteur sert à mesurer ou à rapporter des angles sur un dessin ; la mesure est alors indiquée au 18e siècle ainsi :



Au 19e siècle on parle du rapport des angles aux arcs en indiquant : les quatre angles droits renferment 360° aussi bien que la circonférence ; l'angle droit répond au quart de la circonférence ; chaque angle d'un degré répond à un arc d'un degré.

D'autres instruments de mesure sont tombés en désuétude de nos jours, mais furent utilisés tout au long des siècles.

Citons entre autres : l'astrolabe, le quadrant, le compas de proportion (instrument servant à connaître les proportions entre les quantités de même espèce).

SYMBOLES ET LETTRES DANS LES FIGURES GEOMETRIQUES

- *dans les figures géométriques trouvées chez les égyptiens, pas de signes mais des nombres indiquant les dimensions.*

- *en Inde on trouve aussi la même technique.*

- *les lettres pour désigner les points , les droites , les plans sont des habitudes définies chez les grecs, adoptées par les arabes qui les transmettent ensuite en Europe.*

  Au Moyen-Age les lettres utilisées sont écrites dans l'ordre de l'alphabet grec :

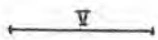
  $$a , b , g , d , e , z ,...$$

  On trouve ensuite l'ordre de l'alphabet latin :

  $$a , b , c , d , e , f ,...$$

  Il arrive qu'il y ait un mélange d'écritures dans le même traité de géométrie :

  et
  

- *au 17e siècle on introduit par étapes les indices pour les points de "même signification".*

  On trouve ainsi :

  $$A \quad \dot{A} \quad \ddot{A} \qquad \text{ou bien} \qquad A \quad \underset{\cdot}{A} \quad \underset{\cdot\cdot}{A}$$

  puis

  $$A \quad 2A \quad 3A$$

  puis

  $${}_1A \quad {}_2A \quad {}_3A$$

  (les nombres sont écrits sur la même ligne, mais plus petits)

- *les notations proposées abondent aux 18e et 19e siècles. Citons entre autres :*

* A , B , C ,...	*pour désigner des points*	
a , b , c ,...	*pour désigner des droites*	*(au 18e s.)*
α , β , γ ,...	*pour désigner des plans*	

* $\mathfrak{A}$,...	*pour désigner des points*	
$\widetilde{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}$,...	*pour désigner des droites*	*(au 19e s. en Allemagne)*
$\tilde{\mathfrak{P}}$,...	*pour désigner des plans*	

on utilise donc une écriture gothique ; les lettres latines et grecques désignent des nombres.

* A , B , C ,...	*pour désigner des points*
$\overline{AB}$,...	*pour désigner des droites*

- *au tout début du 20e siècle on trouve encore des notations très peu homogènes.*

Duporcq note :

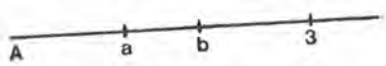
un plan : abc *ou* P ,...

un point : m *ou* 1 *ou* 2 ,...

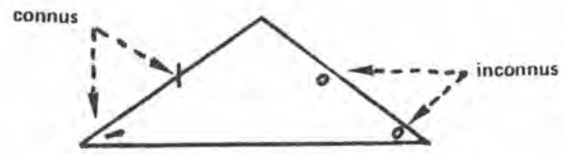
une droite : 34 *ou* ab *ou* Δ *ou* D *ou* A *ou* B ,...

un cercle : abc

Il précise chaque fois ses notations, parlant du point m *, du triangle* abc *, du plan* P *, de la droite* A *, du côté* 15 *, du segment* ad *...*
Il obtient ainsi des dessins tels que :



. *c'est au 17e siècle que l'on trouve les premiers symboles pour définir des données ou des inconnues sur des figures géométriques.*
On trouve ainsi :



ou bien :

EXEMPLE COMPLET DE SYMBOLISME EN GEOMETRIE

(Carnot 1801)

notations :	pour désigner :
$A, B, C, \ldots$	des points
$\overline{AB}$	une droite ou un segment
$\widehat{AB}$	un arc
$\overline{BCD}$	B, C et D sont alignés et $C \in (BD)$
$\overline{AB} \cdot \overline{CD}$	point d'intersection de (AB) et de (CD)
$\widehat{ABCD}$	l'arc $\widehat{AD}$ tel que $B \in \widehat{AD}$ et $C \in \widehat{AD}$
$\widehat{AB} \cdot \widehat{CD}$	point d'intersection de $\widehat{AB}$ et de $\widehat{CD}$
$F\ \overline{AB} \cdot \overline{CD}$	droite joignant F et le point d'intersection de (AB) et (CD)
$A\hat{B}C$	$\widehat{ABC}$
$\overline{AB}\hat{\ }\overline{CD}$	$\widehat{(AB,CD)}$
$\Delta\ ABC$	triangle ABC
$⊿\ ABC$	triangle rectangle ABC
$\overline{\overline{ABC}}$	aire du triangle ABC

207

TRIGONOMETRIE

TRIGONOMETRIE

Pendant longtemps l'étude de la trigonométrie fut liée à celle de l'astronomie.

. **chez les babyloniens :** *on a retrouvé des tables de cosécantes, en rapport avec des triangles "pythagoriciens" , ainsi que de nombreuses tables avec des données astronomiques et astrologiques.*

. **chez les égyptiens :** *des problèmes concernant les pyramides, retrouvés sur des papyrus, montrent que les égyptiens calculaient l'"inclinaison" des pyramides (la "seqt" est le rapport de la base horizontale d'une pyramide à sa hauteur). Ils connaissaient donc une notion équivalente à notre cotangente.*

. **chez les grecs :** *ils étudient systématiquement les angles et les longueurs des cordes interceptées dans un cercle de référence.*
C'est Hipparque de Nicée (2e s. av. J-C) qui le premier partage le cercle en 360 degrés (voir p. 30). La table des cordes qu'il associe à ce partage annonce la table des sinus.
Le livre "l'Almageste" de Ptolémée (2e s.) servira de référence en astronomie et en trigonométrie jusqu'au Moyen-Age. Le cercle y est partagé en 360 degrés et le rayon en 60 parties ; chaque partie du rayon est ensuite partagée en minutes, secondes et troisièmes dans le système sexagésimal. On y trouve des tables des cordes correspondant aux tables de sinus et de cosinus.

. **chez les indiens :** *ils sont les premiers à établir de vraies tables de sinus en étudiant la relation entre une demi-corde et le demi-angle au centre qui sous-tend cette corde (les Siddhàntas ou Systèmes astronomiques datent du 4e s.) . Ils y ajoutent le cosinus et le sinusverse (sinusverse (x) = 1 - cos x) .*
Ils sont aussi les premiers à avoir une trigonométrie indépendante d'un cercle de référence car née de l'étude des ombres projetées par un gnomon.

- **chez les arabes :** *par la nécessité qu'ils ont de s'orienter vers La Mecque pour leurs prières, les arabes développent les cadrans solaires et les astrolabes. Ils sont amenés à approfondir les travaux des indiens. Vers 1000 les arabes connaissent les six lignes trigonométriques (les tables des sinus, tangentes et cotangentes sont les plus répandues). Les tables trigonométriques sont inclues dans les "zig" (mot signifiant "cordeau") contenant une collection de tables destinées aux astronomes et géographes, notamment des descriptions détaillées de calendriers ; plus d'une centaine de zig datant du 8e au 15e siècles nous sont parvenus.*

- **en Occident :** *c'est Johan Müller de Kœnigsberg (nom signifiant "montagne du roi" , d'où son surnom Regiomontanus) qui érige la trigonométrie en une discipline indépendante de l'astronomie dans des textes parus en 1490 , 1533 et 1561 , textes qui reprennent et améliorent les travaux des grecs et des arabes.
Il faut attendre la fin du Moyen-Age pour que Rhaeticus et Viete , vers 1600 , présentent la trigonométrie comme maintenant. Les fonctions trigonométriques sont notamment définies comme rapports de côtés de triangles.*

REMARQUES :

- *pendant longtemps la trigonométrie est partagée en trigonométrie plane et trigonométrie sphérique, cette dernière étant plus utile en astronomie.*

- *au cours des siècles la précision des tables trigonométriques augmente. Vers 1600 , Viete publie des tables pour les six fonctions trigonométriques en fournissant des valeurs pour chaque intervalle d'une seconde avec une précision de sept décimales.*

TRIGONOMETRIE

MOT : *vient des mots grecs trigônon et metron signifiant "triangle" et "mesure".*

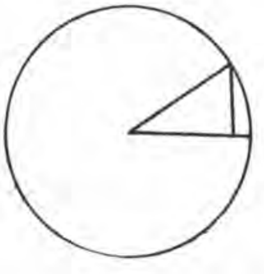
Ce mot apparaît pour la première fois vers 1600 dans un ouvrage dû à un astronome allemand.

Au 18e siècle on parlait aussi de la goniométrie ainsi que de la polygonométrie .

SINUS

MOT : *vient du latin sinus qui signifie "pli d'un habit".*
Le sinus est la demi-corde de l'arc double, c'est la corde pliée en deux.

- *les arabes utilisaient le mot ǧayb signifiant "ouverture sur le devant d'un vêtement", mot dont la racine ǧωb signifie "déchirer, traverser, passer à travers".*



le sinus "passe au travers" de l'angle au centre

- *une autre origine possible serait l'abréviation latine s.ins. pour semis inscripta, inscripta étant le nom de la corde entière.*
- *Viete, au 17e siècle, l'appelle la perpendiculaire, par opposition à la base, qui désigne le cosinus.*
- *au 18e siècle le sinus de 90°, qui est le rayon du cercle, est appelé sinus total.*

COSINUS

MOT : *signifie "le **sinus** de l'angle **co**mplémentaire".*

- *la notion était connue dès le 10e siècle chez les arabes.*
- *le mot est introduit par Gunter en 1620.*
- *avant le 19e siècle on trouve simultanément des tables avec sinus et cosinus, et des tables avec sinus et sinusverse*

$$(\text{sinusverse}(x) = 1 - \cos(x))$$

213

TANGENTE

MOT : voir p. 148 .

- cette notion est introduite au début du 9e siècle pour la première fois en Inde.

- les arabes utilisent le mot zill signifiant "ombre" , traduction d'un mot sanscrit de même signification.

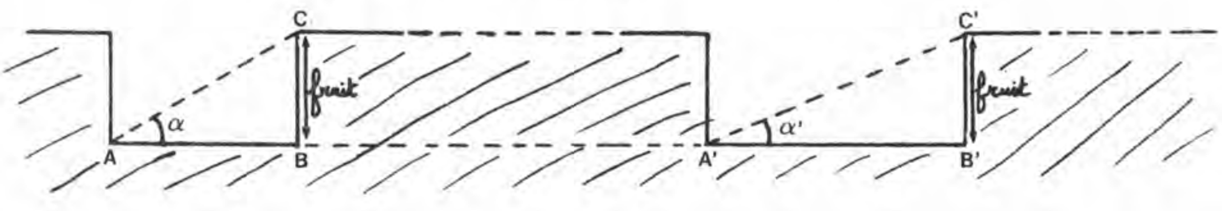
- ce mot sera traduit en latin par umbra recta signifiant "ombre directe" . La tangente est peu utilisée en Occident ; c'est Regiomontanus (15e s.) qui en réintroduit l'usage, il appelle la tangente "le fécond" et la table des tangentes , la "table féconde" (voir p. 214) .

- c'est Thomas Finck qui le premier introduit le mot tangente qui signifie "touchante" en 1583 .

COTANGENTE

MOT : la cotangente est la **tangente** de l'angle **complémentaire.**

- les babyloniens connaissaient cette notion, ils l'associaient à la notion de "fruit d'un talus" (voir p. 178) .



Pour le même fruit (B'C' = BC) les babyloniens établissaient des tables de cotangentes en mesurant les largeurs AB et A'B'.

$$AB = BC \times \operatorname{cotg} \alpha$$
$$A'B' = B'C' \times \operatorname{cotg} \alpha' = BC \times \operatorname{cotg} \alpha'$$

- les arabes parlaient de "complément de l'ombre" , ou , "ombre inversée" .

- ces termes se sont traduits en latin par umbra versa signifiant "ombre inverse" .

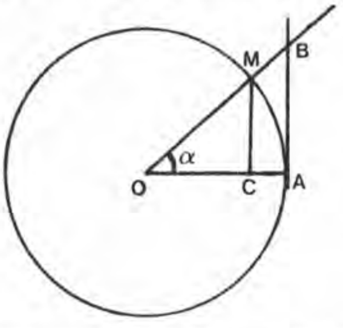
- le mot a été introduit par Gunter en 1620 .

214

SECANTE

MOT : voir p. 145 .

- *la notion était déjà connue chez les indiens.*
- *au Moyen-Age on parle de "l'hypoténuse du fécond".*



$CM = \sin\alpha$

$AB = tg\,\alpha$

$OB = \sec\alpha \quad \left(\sec\alpha = 1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}\right)$

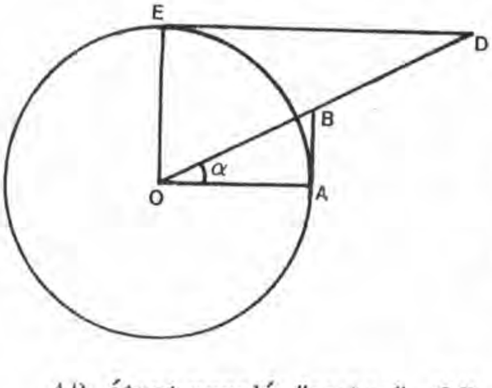
AB étant appelé le "fécond", OB est appelé "l'hypoténuse du fécond"

- *le mot est introduit par Finck en 1583 .*

COSECANTE

MOT : *la cosécante est la* **sécante** *de l'angle* **complémentaire** .

- *chez les babyloniens on a retrouvé des tables qui utilisent cette notion.*
- *les arabes parlent de "diamètre de l'ombre".*



$AB = tg\,\alpha$

$ED = cotg\,\alpha$

$OD = cosec\,\alpha \quad \left(cosec\,\alpha = 1 + cotg^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}\right)$

AB étant appelé "ombre", OD est appelé "diamètre de l'ombre"

- *jusqu'aux 16e et 17e siècles, la cosécante est très utilisée, avec la sécante , dans tous les ouvrages scientifiques européens.*

215

QUELQUES NOTATIONS DES SIX LIGNES TRIGONOMETRIQUES *(au 18e siècle) :*

sinus	cosinus	sécante	cosécante	tangente	cotangente
S	C	Sec	S.2.	T.	T.2.
Sine	Co-sine	Secant	Co-seca	Tangent	Co-Tangent
S.	co-S.	Séc	co-Séc	T	co-T
sin	cosin	séc	co-séc	tang	co-tang
sen.	cosen.	secante	cosec.	tang.	cotang.
sin.	sin.com. ou sin.comp.	sec.	sec.com. ou sec.comp.	tan.	tan.com. ou tan.comp.

REMARQUE :

Les abréviations actuelles sin , tan et sec apparaissent pour la première fois dans un ouvrage de 1626 ; les abréviations cos et cotg apparaissent dans un ouvrage de 1657 . Ces abréviations ne se généraliseront qu'avec le mathématicien Euler (18e s.) .

MESURES

SYSTEME DE POIDS ET MESURES

METRE : vient du grec metron qui signifie "mesure".
LITRE : vient du grec litra qui signifie "poids".
GRAMME : vient du grec gramma qui signifie "signe écrit". C'est une mauvaise traduction du latin scripulum qui désignait une mesure de poids. Les grecs ont cru que scripulum venait du verbe scribere qui signifie "écrire".

Le plus ancien système de mesures est celui des égyptiens : l'unité de longueur est le pied d'un homme ordinaire ; l'unité de capacité est un vase cubique ayant pour côté ce pied, l'unité de poids est le poids de l'eau renfermée dans ce vase cubique.

Avant 1789 il existait en France de nombreux systèmes de mesures régionaux très différents les uns des autres. Une même unité changeait de valeur d'une région à l'autre et d'une époque à l'autre ; au Moyen-Age des étalons pour la longueur étaient gravés sur les murs à l'entrée des cathédrales.

En 1790, sur proposition de Talleyrand, l'Assemblée Nationale charge une commission de l'Académie des Sciences de définir les bases d'un nouveau système de poids et mesures (ce qui est terminé en **1795**).

. **DEFINITION DU METRE :** la 1/10 000 000 partie du quart du méridien terrestre.

. **DEFINITION DU LITRE :** mesure de capacité dont la contenance est celle du cube de la dixième partie du mètre.

. **DEFINITION DU GRAMME :** poids absolu d'un volume d'eau égal au cube de la centième partie du mètre à la température de la glace fondante.

On choisit également les noms des premiers préfixes destinés à la formation des multiples et sous-multiples.

. Un étalon est nécessaire pour pouvoir utiliser la définition. Les opérations de mesurage pour l'obtenir ont duré plusieurs années (une partie seulement du méridien a été mesurée directement, d'où une importante erreur sur le résultat donné par 443,296 lignes de la toise du Pérou qui était divisée en 864 lignes).

1799 , DEUXIEME DEFINITION DU METRE : longueur de l'étalon obtenu (même s'il est trop court d'environ 200 μ).

Depuis 1799 l'unité n'a pas changé de valeur, les définitions ont été de plus en plus précises mais on ignore encore la longueur exacte du quart du méridien.

1889 , TROISIEME DEFINITION DU METRE (donnée lors de la Conférence Internationale des Poids et Mesures) : l'étalon déposé aux Archives Nationales étant une règle (de 4 mm d'épaisseur en métal peu homogène) trop flexible, on en construit un autre selon une meilleure technique.

Le mètre est la longueur du nouvel étalon déposé au Pavillon de Breteuil : règle à traits , en platine irridié , en profil en X , à la température de 0°C .

1960 , QUATRIEME DEFINITION DU METRE : le mètre est la longueur égale à 1 650 763,73 longueurs d'onde dans le vide de radiations correspondant à la transition entre les niveaux $2p_{10}$ et $5d_5$ de l'atome du krypton 86 .

Cette dernière définition qui permet une précision de 0,01 μ n'est pas plus définitive que les autres.

COMMENT CE SYSTEME S'EST-IL PROPAGE ?

- il a été rendu obligatoire en France en 1840 ; une médaille commémorative indique la devise "A tous les temps, à tous les peuples" .
- création en 1870 d'un bureau international des poids et mesures réunissant 24 états.
- en 1965 le Royaume-Uni prend la décision d'adopter le système métrique ; la transformation est prévue échelonnée sur 20 ans (l'intérêt commercial passe avant le libre choix) .

A PROPOS DU LITRE :

- *en 1901 le litre est défini comme le volume occupé par la masse de 1 kg d'eau pure à son maximum de densité sous la pression atmosphérique normale.*
  Cela crée une différence de 28/1 000 000 entre le dm^3 et le litre ; de plus la définition est incohérente car l'unité de volume doit être le cube d'une unité de longueur.

- *en 1964 on abrège cette définition et décide que le mot "litre" est un nom spécial donné au dm^3.*

l' ANGSTRÖM :

- *du nom d'un physicien suédois, c'est une unité de longueur définie par la spectrométrie, et qui est dans son essence complètement étrangère au mètre. Même aujourd'hui, nul ne peut affirmer qu'il y ait une différence entre l'angström et la dix-millième partie du micron.*

- *les préfixes "femto" et "atto" utilisés dans le femtomètre (10^{-15} m) et l'attomètre (10^{-18} m) sont des radicaux empruntés à la langue danoise.*

METRE

MOT : *vient du grec metron qui signifie "mesure".*

On retrouve ce mot dans :

- *diamètre ; dia-metron signifie "mesurer à travers".*
- *périmètre ; peri-metron signifie "mesurer autour".*
- *paramètre ; para-metron signifie "mesurer à côté".*
  Le paramètre est une quantité qui intervient "à côté".
- *géométrie ; geo-metron signifie "mesurer la terre".*
  Au début la géométrie était l'arpentage car elle est née de la nécessité de déterminer la surface et les limites des propriétés.
- *trigonométrie ; trigônon-metron signifie "mesurer le triangle".*

REMARQUE :

Les notations m , m^2 , m^3 ne se sont pas rapidement imposées.

Au 19e siècle on trouve :

*	pour [1]	km	hm	dam	m	dm	cm	mm
	MM	KM	HM	DM	M	dm	cm	mm

* pour les unités d'aire on trouve :

MMQ KMQ HMQ DMQ MQ dmq cmq mmq (q pour quadratum)

* pour les unités de volume les plus utilisées on trouve :

MC dmc cmc mmc (c pour cubus)

On note :

$4^{MC}{,}537$ qui se lit 4 mètres cubes, 537 décimètres cubes

---

(1) *MM est l'abréviation de myriamètre (10 000 m).*

DEGRE — MINUTE — SECONDE

LES MOTS :

- *degré* vient de l'arabe *daraǧa* signifiant "degré, gradin, marche d'un escalier", du latin *gradus* qui a la même signification.

- *minute* vient du latin *minutus* signifiant "menu".

- *seconde* vient du latin *minuta seconda* par opposition à *minuta prima* qui était la *minute*.

LES NOTATIONS :

- on trouve une première apparition des symboles ° ' " dans l'Almageste de Ptolémée (2e s.) ; ο est la lettre omicron de l'alphabet grec.

- au Moyen-Age on utilise des abréviations de mots.

Par exemple pour	signa	gradus	minutae	secundae ,
on trouve	Sig.	Gr.	Min.	Sec.
	$\ddot{S}$	$\ddot{g}$	$\tilde{m}$	
	S.	G.	$\tilde{m}$	
		$\tilde{g}$.	$\tilde{m}$.	
		G.	M.	S.

avec $1T = 12S$; $1S = 30\tilde{g}$; $1\tilde{g} = 60\tilde{m}$ ...

T pour "Tota revolutio", tour complet (360°) .

- la notation ° ' " réapparaît au 16e siècle à l'occasion de produits. En fait ce sont des exposants qui sont utilisés et cela n'a plus rien à voir avec la notation grecque. o n'est pas la lettre grecque mais zéro .

En effet on trouve $\overset{0}{63}\ \overset{1}{1}\ \overset{2}{53}$ *(voir p. 52)

aussi bien que $^{\circ}63\ '13\ ''53$ *ou* $63^{\circ}\ 13'\ 53''$.

. *jusqu'au 18e siècle les unités de temps (heures, minutes, secondes) étaient notées* $^{\circ}\ '\ ''$.

---

* $63^{\circ}\ 13'\ 53''$ *représente en degrés :*

$$63 \times \left(\frac{1}{60}\right)^{0} + 13 \times \left(\frac{1}{60}\right)^{1} + 53 \times \left(\frac{1}{60}\right)^{2}$$

GRADE

MOT *: vient du latin gradus signifiant "pas, marche, ou échelon, degré". Ce mot a remplacé l'ancien mot français gré , qui a été renforcé pour donner degré .*

Cette unité a été utilisée pour la première fois en 1803 , permettant un système de graduation centésimale de la circonférence.

RADIAN

MOT *: vient du latin radius signifiant "baguette" et qui est à l'origine du mot rayon .*

- *dans un cercle donné un arc ayant pour longueur le rayon de ce cercle mesure 1 radian .*
  cette unité a été utilisée pour la première fois en 1873 .
- ***abréviations*** *qui ont précédé rd*

pour $3\pi rd$ *on trouve :*

$3\pi\rho$	*(lettre grecque correspondant à r)*
$3\pi^{R}$	
$3\pi^{(r)}$	
$3\pi^{r}$	
$3\pi^{c}$	*(c pour mesure **c**irculaire)*

FORMULES D'AIRES

MOT : *le mot aire vient, tout comme le mot are , du latin area signifiant "surface" ; il y a presque toujours confusion entre aire et surface .*

. *les grecs utilisent des mots que l'on peut traduire par :*

- *croûte*
- *apparence (la racine grecque utilisée se retrouve dans le mot épiphanie)*
- *plan (la racine grecque utilisée se retrouve dans le mot parallélépipède)*

. *les arabes utilisent trois mots associés aux significations suivantes :*

- *emplacement préparé pour battre le grain, et par extension toute surface plane*
- *étendre à plat sur le sol, terrasse d'une pièce*
- *parcourir, arpenter la terre*

. *au Moyen-Age on trouve aussi bien ayre que possessione ou superficie (superficie vient d'ailleurs, tout comme surface , du latin superficies) .*

Pour l'aire d'un triangle on trouve parfois des abréviations ; par exemple :

$$\Delta ABC \quad \text{ou} \quad \overline{\overline{ABC}}$$

* LES MATHEMATICIENS BABYLONIENS ET EGYPTIENS :

Ils n'ont pas de notations algébriques, on ne trouve donc pas de formules d'aires . Mais on a trouvé sur différentes tablettes des problèmes concrets d'arpentages, de surfaces de champs, et les calculs donnant les solutions de ces problèmes ; chez les babyloniens le même mot désigne d'ailleurs un champ et une surface.

Les "formules" utilisées sont parfois exactes, parfois approchées .

. ***chez les babyloniens*** : *les calculs d'aires pour un carré, un rectangle, un triangle rectangle et un trapèze sont justes. L'aire du disque utilise* 3 *ou* $3+\frac{1}{8}$ *comme valeur approchée de* π .

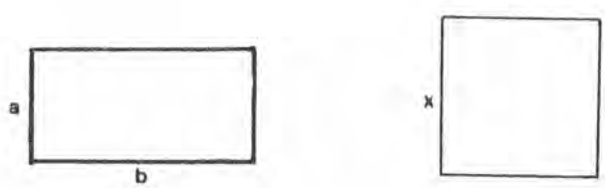
- *chez les égyptiens : on trouve des calculs exacts pour l'aire d'un carré et celle d'un rectangle* [1]. *L'aire du disque utilise* $3+\frac{1}{6}$ *comme valeur approchée de* π .
Pour l'aire d'un quadrilatère quelconque , ou d'un triangle quelconque , les "formules" énoncées sont fausses.

* LES MATHEMATICIENS GRECS :

Les énoncés des théorèmes relatifs aux évaluations des surfaces (et des volumes) consistent en formules notées en langage ordinaire. Les géomètres ne spéculent que sur les grandeurs elles-mêmes, et non sur leurs mesures. Archimède (3e s. av. J-C) énonce ainsi : "un cercle est égal au triangle qui aurait pour base sa circonférence, et pour hauteur son rayon" .

Les aires sont associées à la résolution d'équations du second degré, et à l'illustration des identités remarquables. Ainsi, sont traités systématiquement les problèmes de carrés et de rectangles de même aire :

- *construire un carré de même aire que celle d'un rectangle donné les amène à chercher la moyenne proportionnelle de deux nombres donnés.*



$$ab = x^2 \quad , \quad \text{soit} \quad \frac{a}{x} = \frac{x}{b}$$

- *construire un carré d'aire double de celle d'un carré donné les amène à chercher la solution d'une équation*

$$x^2 = 2a^2$$

Ce dernier problème, connu sous le nom de duplication du carré entraînera Pythagore (5e s. av. J-C) à découvrir que la diagonale du carré, et le côté du carré n'ont pas de "commune mesure" , autrement dit sont des grandeurs "incommensurables" .

Les résultats les plus connus des grecs sont :

- la formule de Héron (1er s.) , en fait connue par Archimède , donnant l'aire d'un triangle quelconque en fonction des mesures des trois côtés a , b , c

$$A = \sqrt{\frac{S}{2}\left(\frac{S}{2} - a\right)\left(\frac{S}{2} - b\right)\left(\frac{S}{2} - c\right)} \qquad \text{avec} \quad S = a + b + c$$

- la méthode dite "d'exhaustion" (Eudoxe, 4e s. av. J-C ; Archimède), équivalente à notre méthode d'intégration moderne, et qui leur permet de trouver toutes les formules d'aires de manière exacte. ([2])

- l'encadrement de π proposé par Archimède pour le calcul de l'aire du disque.

*** LES INDIENS :**

On retrouve dès le 1er siècle les problèmes d'équivalence entre carrés et rectangles, associés à la construction d'autels sacrés.

Au 7e siècle on trouve des formules d'aires exactes pour le triangle et le trapèze, ainsi qu'une généralisation de la formule de Héron à l'aire d'un quadrilatère (sans préciser toutefois que le quadrilatère doit être inscriptible dans un cercle) . L'aire du disque est proposée avec 3,1416 comme valeur approchée de π .

*** EN CHINE :**

A l'époque des Han (3e s.) on sait calculer les aires du carré, du rectangle, du triangle et du trapèze.

** LES ARABES :*

Ils traitent la plupart des problèmes algébriquement, ajoutant parfois des explications géométriques. Ils démontrent (au 10e s.) que la formule indienne relative à l'aire d'un quadrilatère n'est applicable qu'à un quadrilatère inscriptible dans un cercle.

Ils transmettent fidèlement tous les travaux des grecs à l'Occident.

** AU MOYEN-AGE :*

Les formules d'aires sont connues et indiquées dans tous les traités élémentaires de géométrie.

Ainsi, par exemple, dans le traité de Chuquet (1484) on trouve la progression suivante :

- *pour le triangle :* $\frac{b \times h}{2}$ *et la formule de Héron sont toutes les deux indiquées. Le triangle rectangle est présenté à part.*

- *pour les quadrilatères : les formules sont données de la figure la plus simple à la figure la plus complexe : carré, rectangle, trapèze rectangle ...*

- *on trouve ensuite les formules pour les polygones décomposables en triangles, les amphithéâtres, les stades, les secteurs circulaires, les figures en forme d'œuf, le disque.*

Pour toutes ces figures les formules d'aires étaient déjà étudiées systématiquement par les grecs. Comme toujours les exemples numériques se sont transmis à travers les siècles.

---

(1) à propos des calculs donnés pour l'aire du triangle isocèle, et du trapèze isocèle, les historiens sont en désaccord. La notion de hauteur ne semblerait pas être connue ; les triangles isocèles tracés étant très allongés ("figures en pointe"), la "formule" utilisée est une bonne approximation.

(2) la méthode d'exhaustion consiste à regarder l'aire d'une surface délimitée par une courbe comme la limite dont s'approchent de plus en plus les aires de polygones inscrits ou circonscrits (on augmente le nombre de côtés des polygones en les divisant systématiquement par 2, de telle manière que la différence devienne plus petite qu'aucune quantité donnée). On "épuise" en quelque sorte cette différence, de là est venu le nom de cette méthode.

FORMULES DE VOLUMES

MOT : *le mot volume vient du latin volumen signifiant "enroulement, rouleau" . Il désigne d'abord le rouleau de papyrus que l'on déroule pour écrire ou lire, et qu'on enroule pour ranger dans la bibliothèque (d'où l'autre sens du mot : livre) . Il désigne ensuite plus généralement toute chose enroulée. Ce n'est qu'à la fin du 13e siècle qu'il prend sa signification mathématique. Il ne s'impose vraiment qu'au 17e siècle.*

Les babyloniens le désignaient par "masse de terre" car dans les premiers problèmes concrets posés on cherchait toujours un volume de terre à enlever, pour la construction d'un mur par exemple.

Pendant des siècles on mesure "la contenance" , le "contenu des corps" , on cherche combien de "portions cubiques" contiennent les "corps" .

* ***chez les babyloniens :***

Les problèmes concrets reliés à des solides (volumes de viviers, de salles par exemple) montrent que les formules donnant les volumes d'un cube, d'un parallélépipède, d'un prisme et d'un cylindre droits sont justes. Bien sûr, on ne trouve pas l'écriture des formules, mais des phrases expliquant comment calculer.

Les énoncés pour les volumes d'un tronc de cône et d'un tronc de pyramide sont faux.

* ***chez les égyptiens :***

Les volumes du parallélépipède, du cylindre, de la pyramide et du prisme sont connus ; le volume du tronc de pyramide à base carrée est indiqué exactement.

Bien sûr, aussi bien chez les égyptiens que chez les babyloniens, aucune démonstration n'est proposée.

* ***chez les grecs :***

On trouve une étude systématique des solides, et notamment des solides réguliers (polyèdres) : tétraèdre, hexaèdre ou cube, octaèdre, dodécaèdre, icosaèdre .

Les formules de volumes sont alors démontrées. Elles sont mises au point, comme pour les formules d'aires, grâce à la "méthode d'exhaustion" équivalente à notre méthode d'intégration moderne (notamment les formules donnant le volume de la sphère, du cylindre, du cône, par Archimède au 3e s. av. J-C) .

* **en Chine :**

A l'époque des Hans (3e s.) , on sait calculer les volumes du cube, du parallélépipède, du prisme droit, de la pyramide et du cylindre .

* **au Moyen-Age :**

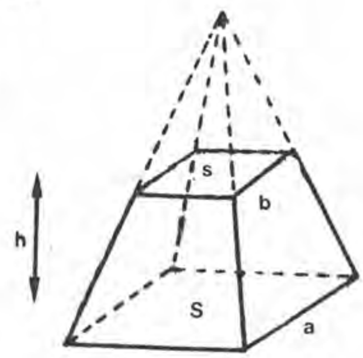
Les formules de volumes indiquées ne sont pas toujours exactes. Ainsi, dans le traité de géométrie de Chuquet (1484) , pour un tronc de pyramide à base carrée, on trouve :

la formule exacte : $V = \frac{h}{3}\ (a^2+b^2+ab)$,

et à côté, les formules approchées

$$V = \frac{h}{2}\ (a+b)^2$$

$$V = \frac{h}{2}\ (S+s)$$



Cette dernière formule restera très utilisée par les marchands, pour mesurer la capacité des tonneaux.

Autrement, on trouve systématiquement les formules exactes pour les volumes de la sphère (en général π *a pour valeur approchée* $\frac{22}{7}$ *) , de la "colonne", de la pyramide, du cube, du parallélépipède et, moins fréquemment, du prisme.*

Comme d'habitude les exemples numériques se transmettent à travers les siècles.

233

E N S E M B L E S

LA THEORIE DES ENSEMBLES

C'est Cantor qui le premier, dans des travaux de 1872 à 1897, parle d'ensemble . Bien sûr, il n'étudie pas des ensembles abstraits au départ, mais des ensembles de nombres ou de points ; son étude lui permettra de construire l'ensemble des réels . Il définit un ensemble comme suit : "C'est une collection d'objets définis et séparés qui peuvent être conçus par l'esprit et pour laquelle on peut décider si un objet donné appartient à la collection" .

A l'époque de Cantor, ses thèses étaient révolutionnaires. Ce n'est qu'au 20e siècle que la théorie des ensembles gagnera la confiance des mathématiciens.

LES SYMBOLES ENSEMBLISTES

Ils ont presque tous été proposés par Peano (travaux de 1889) .

$\in$ *se notait au départ* ε *, probablement à cause de la première lettre du verbe grec signifiant "être" ; "appartenir à" signifie "être la propriété de"*

$\notin$ *en concurrence avec* $-\in$ *(- indiquant la négation) et avec* $\ni$

$\subset$ *inventé par Schroëder, il s'est imposé grâce à Russel en 1910 sur les symboles* $\prec$ $<$ $\leqq$ $\subseteqq$ $\supset$.
Il correspond probablement à la première lettre du mot latin consequor

$\cup$ *vient probablement de la lettre grecque upsilon signifiant "ou" ; il ne s'impose que vers 1935 sur les symboles* $\vee$ *et* $+$

$\cap$ *ne s'impose que vers 1935 sur les symboles* $\wedge$ *et* .

$\complement^A$ *est imposé par Bourbaki après les notations* $1 - A$; $\overline{A}$; $-A$; ...

$\emptyset$ *s'impose au début du 20e siècle sur les symboles* o 0 $\wedge$,
la partie pleine se notant 1 . ξ

236

NOTATIONS POUR LES ENSEMBLES

La notation actuelle avec :

$\mathbb{N}$	*pour l'ensemble des naturels*
$\mathbb{Z}$	*pour l'ensemble des relatifs, la lettre z étant l'initiale du mot allemand Zahl signifiant "nombre"*
$\mathbb{Q}$	*pour l'ensemble des rationnels, la lettre q étant l'initiale du mot quotient*
$\mathbb{R}$	*pour l'ensemble des réels*

ne date que du début du 20e siècle.

On trouvait, notamment chez Peano (1895) les notations suivantes :

N	*pour l'ensemble des nombres entiers positifs*
n	*pour l'ensemble des nombre entiers*
N_0	*pour l'ensemble des nombres entiers positifs ou nuls*
R	*pour l'ensemble des rationnels positifs*
r	*pour l'ensemble des rationnels*
Q	*pour l'ensemble des réels positifs (q est l'initiale de quantité)*
q	*pour l'ensemble des réels*
Q_0	*pour l'ensemble des réels positifs ou nuls*

RAISONNEMENT

RAISONNEMENT

MOT : *vient du latin ratio signifiant "calcul, compte" et par extension "faculté de compter, raisonnement".*

Jusqu'au 16e siècle on parlait de livre de raison pour désigner le livre de compte. Le mot raisonnement dans son sens actuel n'est apparu qu'à la fin du 14e siècle mais est très rare jusqu'au 17e siècle.

LOGIQUE

MOT : *vient du grec logikos signifiant "relatif à la raison".*

Le mot grec logos a subi les mêmes transformations que le mot latin ratio qui a signifié "compte, calcul", puis "discours".

La logique, en tant que technique de la parole et de la pensée, existe chez les grecs dès Aristote (4e s. av. J-C) même si elle n'est pas encore connue sous ce nom.

La logique sera définie comme "une partie des mathématiques" au début du 17e siècle.

PROBLEME

MOT *: le préfixe pro signifie "devant" ; la racine grecque blê signifie "lancer" ; problème signifie donc "objet jeté devant, obstacle".*

On trouve souvent le mot équivalent proposition issu du latin.

REMARQUE :

La racine grecque équivalente bol se retrouve dans le mot symbole, mot qui est issu du grec sumbolon signifiant "objet qu'on jette avec un autre".

Lorsqu'un grec voyageait dans une cité étrangère, il pouvait se faire admettre dans une famille amie de la sienne en présentant la moitié d'un objet dont le maître de maison possédait l'autre moitié. Le sumbolon était donc un signe de reconnaissance, un symbole.

AXIOME

MOT *: vient du grec axiomâ qui signifie "celui que l'on juge convenable", "axioun" signifiant "juger bon, accorder de la valeur à".*

Le mot date d'Aristote (4e s. av. J-C). A cette époque les axiomes sont des "hypothèses qui doivent être confirmées si les résultats déduits sont adaptés à la réalité". En fait les axiomes, venant après les définitions s'appellent aussi, suivant les mathématiciens : "Notions communes", "Sentences", "Maximes" ; "Postulats" (plutôt en géométrie).

THEOREME

MOT *: vient du grec theorêma signifiant "sujet de contemplation, de méditation".*

HYPOTHESE

MOT : *vient du grec hupothesis signifiant "action de poser sous". hupothesis a été traduit en latin par sub-positio qui a donné le mot supposition.*

On retrouve le mot thèse dans synthèse du grec sun-thesis signifiant "action de poser ensemble".

DEMONSTRATION

MOT : *vient du latin monstrare signifiant "montrer".*

Les premières "démonstrations" en géométrie datent d'Euclide (3e s. av. J-C). Ce dernier différenciait les problèmes et les théorèmes :

- *d'une part, par la méthode de travail : pour un problème, on part de la conclusion et on "réduit" à un autre problème (c'est l'analyse) ; pour un théorème, on part de l'hypothèse et on arrive à la conclusion par une chaîne de raisons (c'est la synthèse).*

- *d'autre part, par la conclusion : pour un problème on termine par "ce qu'il fallait faire" ; pour un théorème on termine par "ce qu'il fallait démontrer".*

CONCLUSION

MOT : *vient du latin cum-claudere et signifie "fermer, clore avec".*

242

REMARQUE : *A la fin de certains exposés de problèmes d'arithmétique dans le papyrus de Rhind (17e s. av. J-C) , qui ne peuvent être comparés que très grossièrement à des démonstrations, on trouve :*

"c'est pareil"
"c'est bien cela"

Cette formulation est l'ancêtre du "quod erat demonstratum" latin , du c q f d .

BIBLIOGRAPHIE

OUVRAGES GENERAUX

- **BECKER et HOFFMANN :** *Histoire des mathématiques (1951), Vrin*
- **BELL E.T. :** *Les grands mathématiciens (1939), Payot*
- **BOURBAKI :** *Eléments d'histoire des mathématiques (1960), Hermann*
- **CAJORI :** *A history of mathematical notations (1974), Open Court*
- **CHASLES :** *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie (1875), Gauthier Villars*
- **COLLETTE :** *Histoire des mathématiques (1973), Vuibert*
- **DAHAN-DALMEDICO et PEIFFER :** *Une histoire des mathématiques : routes et dédales (1986), Le Seuil*
- **DAUMAS :** *Histoire de la science (1957), NRF*
- **DEDRON et ITARD :** *Mathématiques et mathématiciens (1960), Magnard*
- **DIEUDONNE :** *Abrégé d'histoire des mathématiques (1978), Hermann*
- **DUGAC :** *R. Dedekind et les fondements des mathématiques (1976), Vrin*
- **FREGE :** *Les fondements de l'arithmétique (1969), Seuil*
- **GUITEL :** *Histoire comparée des numérations écrites (1975), Flammarion*
- **HOEFER :** *Histoire des mathématiques depuis leurs origines jusqu'au commencement du 19e siècle (1874)*
- **IFRAH :** *Histoire universelle des chiffres (1981), Seghers*
- **LAME :** *Examen des différentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de géométrie (1818)*
- **LE LIONNAIS :** *Les grands courants de la pensée mathématique (1962), Blanchard*
- **LIBRI :** *Histoire des sciences mathématiques en Italie (1838-1841)*
- **MARIE :** *Histoire des mathématiques (1883), Gauthier Villars*
- **MONTUCLA :** *Histoire des mathématiques (1799-1802), Blanchard*
- **ROUSE BALL W.W. :** *A short account of the history of mathematics (1960), Dover*
- **SMITH D.E. :** *History of mathematics (1925), Dover*
- **TANNERY P. :** *Mémoires scientifiques publiées par Heiberg et Zeuthen (1912-1951), Gauthier Villars*
- **TATON :** *Histoire générale des sciences (1956-64), PUF*

ANTIQUITE

- **BACCOU :** *Histoire de la science grecque de Thalès à Socrate (1951), Aubier*
- **BRUINS :** *Nouvelles découvertes sur les mathématiques babyloniennes (1952), PUF*
- **CONTENAU :** *La civilisation d'Assur et de Babylone (1951), Payot*
- **ERMAN :** *La civilisation égyptienne (1952), Payot*
- **FISCHER :** *L'aube de la civilisation en Egypte et en Mésopotamie (1964), Payot*
- **GOBLET D'ALVIELLA :** *Ce que l'Inde doit à la Grèce (1926), Geuthner*
- **MAZARS :** *La notion de sinus dans les mathématiques indiennes (1971), Université L. Pasteur, Strasbourg*
- **MICHEL :** *De Pythagore à Euclide (1950), Belles-Lettres*

MILHAUD : *Leçons sur les origines de la sciences grecque (1893), Alcan*

- **MUGLER :** *Dictionnaire historique de la terminologie géométrique des grecs (1958-59), Gauthier Villars et Klincksieck*
- **POSENER :** *Dictionnaire de la civilisation égyptienne (1959), Hazan*
- **RENOU :** *La civilisation dans l'Inde ancienne d'après les textes sanskrits (1950), Flammarion*
- **REY :** *La science orientale avant les grecs (1942), A. Michel.*
  La science dans l'Antiquité (1930-1948), A. Michel
- **SEDILLOT :** *Matériaux pour servir à l'histoire comparée des sciences mathématiques chez les grecs et les orientaux (1845-48), Didot*
- **SZABO :** *Les débuts des mathématiques grecques (1970), Vrin*
- **TANNERY P. :** *La géométrie grecque, comment son histoire nous est parvenue et ce que nous en savons (1887), Gauthier Villars*
- **THUREAU DANGIN :** *Textes mathématiques babyloniens (1938), Paris.*
  Esquisse d'une histoire de l'origine du système sexagésimal (1932), Paris
- **ZEUTHEN :** *Histoire des mathématiques dans l'Antiquité et le Moyen-Age (1902), Gauthier Villars*

MOYEN-AGE

- **BADAWI :** *La transmission de la philosophie grecque au monde arabe (1968), Vrin*
- **BUSARD :** *Quelques sujets de l'histoire des mathématiques au Moyen-Age (1969), Palais de la Découverte*
- **GUILHIERMOZ :** *Remarques diverses sur les poids et mesures du Moyen-Age (1919)*
- **SOUISSI :** *La langue des mathématiques en arabe (1968), Université de Tunis*
- **YOUSCHKEVITCH :** *Les mathématiques arabes (1976), Vrin*

16e AU 20e SIECLE

- ***BION :*** *Traité de la construction et des principaux usages des instruments mathématiques (1725)*
- ***BOREL E. :*** *Leçons sur la théorie des fonctions (1898), Gauthier Villars. Introduction à la théorie des fonctions de variables réelles (première partie : aperçu historique) (1937), Hermann*
- ***DANLOUX DEMESNILS :*** *Le mètre et les mesures de longueur (1967), Palais de la Découverte*
- ***PICARD :*** *Les sciences mathématiques en France depuis un demi-siècle (1917), Gauthier Villars*
- ***THIRION :*** *Leçons sur le système métrique et les applications usuelles de l'arithmétique (1867)*
- ***WESSEL :*** *Essai sur la représentation analytique de la direction (1897), Copenhague, Valentiner et Thiele*
- ***LE PETIT ARCHIMEDE :*** *Spécial π , ADCS*

INDEX

Abaque p. 17
abscisse p. 194
absolu p. 50
addition p. 86
adjacent p. 176
affine p. 132
aigu p. 180
aire p. 226
algèbre p. 111 et 112
angle p. 178
angle droit p. 181
angle plat p. 181
angström p. 221
antécédent p. 131
application p. 131
arc p. 153
arête p. 184
arithmétique p. 35
associative p. 126
axe p. 195
axiome p. 240

Base p. 158
bijection p. 131
bissectrice p. 177

Calcul p. 85
carré p. 173
centre p. 152
centre de gravité p. 169
cercle p. 150
chiffre p. 21
commutative p. 126
compas p. 201
complémentaire p. 182
compter p. 85
conclusion p. 241
cône p. 187
coordonnées p. 192 et 196
cosécante p. 214
cosinus p. 212
cotangente p. 213
côté p. 158
cube p. 185
cylindre p. 187

Degré p. 223
demi-droite p. 143
démonstration p. 241
dénominateur p. 63
dessiner p. 197
diagonale p. 158
diagramme p. 198
diamètre p. 152
différence p. 91
disque p. 175
distance p. 147
distributive p. 126
division p. 100

Egal p. 118
ensemble p. 235
équation p. 119
équerre p. 200
équilatéral p. 162

248

exposant p. 54

Face p. 184
facteur p. 93
figure p. 197
fois p. 97
fonction p. 127
formules d'aire p. 226
formules de volume p. 230
fraction p. 59

Géométrie p. 135 et 222
grade p. 225
graphique p. 198
gramme p. 219

Hauteur p. 164
horizontale p. 149
hypoténuse p. 165
hypothèse p. 241

Image p. 131
impair p. 43
inconnue p. 114
inférieur p. 106
infini p. 79
intersection p. 145
intervalle p. 108
inverse p. 104
irrationnel p. 72
isocèle p. 162

Ligne p. 141
ligne droite p. 142
linéaire p. 132
litre p. 219 et 221
logique p. 239
losange p. 171

Médiane p. 144
médiatrice p. 144
mesure algébrique p. 191
mètre p. 222
milieu p. 144
milliard p. 28
million p. 28
minute p. 223
moins p. 91
multiplication p. 93

Négatif p. 47
neutre p. 126
nombre figuré p. 37
norme p. 190
numérateur p. 63
numération p. 9

Obtus p. 180
opération p. 83
opposé p. 49
ordonnée p. 195
orthocentre p. 146
orthogonal p. 146

Pair p. 43
parallèle p. 147
parallélogramme p. 171
parallélépipède p. 185
paramètre p. 222
parenthèse p. 123
périmètre p. 222

perpendiculaire p. 146
perspective
cavalière p. 199
pgcd p. 46
pi p. 75
plan p. 155
plus p. 88
point p. 140
polyèdre p. 183
polygone p. 156
pourcentage p. 105
ppcm p. 46
premier p. 45
preuve par 9 p. 98
prisme p. 186
problème p. 240
problème
géométrique p. 137
produit p. 93
projection p. 196
proportion p. 69
puissance p. 51
puissance de 10 p. 29
pyramide p. 186

Quadrilatère p. 170
quotient p. 64

Racine carrée p. 55
radian p. 225
raisonnement p. 239
rapport p. 66
rapporteur p. 201
rationnel p. 72
rayon p. 152
rectangle p. 172
réduire au même
dénominateur p. 64

règle p. 200
règle de 3 p. 71
réel p. 77
relatif p. 49
rentrant p. 180
résolution
d'équation p. 121
retenue p. 97

Saillant p. 180
schéma p. 198
sécante p. 145 et 214
seconde p. 223
secteur p. 176
section p. 176
segment p. 143
simplification
de fraction p. 65
sinus p. 212
solide p. 183
somme p. 88
soustraction p. 90
sphère p. 187
supérieur p. 106
supplémentaire p. 182
surface p. 155
symboles et lettres
dans les figures
géométriques p. 202
symétrie p. 196
système décimal p. 26
système de numération
égyptienne p. 11
système de numération
grecque p. 13
système de numération
romaine p. 15
système de poids
et mesures p. 219

système sexagésimal p. 30

Table de
multiplication p. 97
tangente p. 148 et 213
terme p. 88
théorème p. 240
théorème de
Pythagore p. 166
tracer p. 197
translation p. 196
trapèze p. 174
triangle p. 159
triangle rectangle p. 163

trigonométrie p. 209 et 211
tronc de cône p. 187
tronc de pyramide p. 186

Variable p. 130
vecteur p. 188
verticale p. 149
virgule p. 31
volume p. 230

Zéro p. 24