MATHEMATIQUES

POUR L'ELEVE DE

SECONDE

FASCICULE 4

Compléments de géométrie

et

statistiques

IREM DE LORRAINE

Edité et imprimé par l'**Institut de Recherche sur l'enseignement des Mathématiques** - (Université de Nancy I - Faculté des Sciences) - B.P. 239 - 54506 VANDOEUVRE-les-NANCY CEDEX
Dépôt légal : 1e trimestre 1989
n° de la publication : 2-85406-116-0

Le Responsable de la publication : Claude MORLET

FASCICULE 4

Chapitre VI : COMPLEMENTS DE GEOMETRIE ET STATISTIQUES

série 1 : Le produit scalaire

série 2 : Transformations géométriques

série 3 : Statistiques

série 4 : Moyennes pondérées et barycentres

collection complète :

FASCICULE 1 : Chapitre 1 : Révisions de géométrie - Chapitre 2 : Le calcul linéaire

FASCICULE 2 : Chapitre 3 : Vecteurs et angles - Chapitre 4 : Analyse

FASCICULE 3 : Chapitre 5 : Géométrie dans l'espace ("**Dessiner l'espace**")

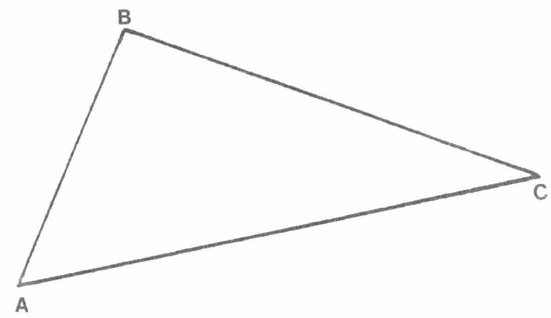
FASCICULE 4 : Chapitre 6 : Compléments de géométrie et Statistiques

FASCICULE 5 : Le répertoire

Série 1 : LE PRODUIT SCALAIRE

UN OUTIL POUR DETERMINER SI DEUX VECTEURS SONT PERPENDICULAIRES :

Soient $\vec{V}$ et $\vec{W}$ deux vecteurs, notons $\|\vec{V}\|$, $\|\vec{W}\|$ et $\|\vec{V}+\vec{W}\|$ les longueurs (on dit aussi les normes) des vecteurs $\vec{V}$, $\vec{W}$ et $\vec{V}+\vec{W}$.



Nous appellerons produit scalaire de $\vec{V}$ et de $\vec{W}$, le nombre $\vec{V}.\vec{W}$ défini par :

$$\vec{V}.\vec{W} = \frac{1}{2}\left[\|\vec{V}+\vec{W}\|^2 - \|\vec{V}\|^2 - \|\vec{W}\|^2\right]$$

Si $\vec{V} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{W} = \overrightarrow{BC}$, nous aurons donc :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(AC^2 - AB^2 - BC^2) \ .$$

La quantité $\|\vec{V}+\vec{W}\|^2 - \|\vec{V}\|^2 - \|\vec{W}\|^2$ est liée à l'orthogonalité de AB et BC ;en effet :

QUAND LE PRODUIT SCALAIRE EST-IL NUL ?

- *Si $\vec{V} = 0$, alors $\vec{V}.\vec{W} = 0$*
  (car $\|\vec{V}+\vec{W}\|^2 - \|\vec{V}\|^2 - \|\vec{W}\|^2$ est alors égal à $\|\vec{W}\|^2 - 0 - \|\vec{W}\|^2$.
- *De même : si $\vec{W} = \vec{0}$, alors $\vec{V}.\vec{W} = 0$.*
- *Si $\vec{V}$ et $\vec{W}$ sont non nuls et perpendiculaires, alors $\vec{V}.\vec{W} = 0$. En effet : soit A , B , C tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{V}$ et $\overrightarrow{BC} = \vec{W}$, alors le triangle ABC est rectangle en B ; d'après le théorème de Pythagore : $AC^2 = AB^2 + BC^2$; donc :*

$$\vec{V}.\vec{W} = \frac{1}{2}(AC^2 - AB^2 - BC^2) = 0 \ .$$

- *Inversement, si $\vec{V}.\vec{W} = 0$, et si $\vec{V}$ et $\vec{W}$ sont non nuls, alors ils sont perpendiculaires. En effet si $\vec{V} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{W} = \overrightarrow{BC}$, la condition $\vec{V}.\vec{W} = 0$, s'écrit :*

$$\frac{1}{2}(AC^2 - AB^2 - BC^2) = 0$$

donc $$AC^2 = AB^2 + BC^2 \ .$$

Ce qui prouve (réciproque de Pythagore) que AB et BC sont perpendiculaires.

On retiendra :

$\vec{V}.\vec{W} = 0$ *équivaut à :* $\left\{ \begin{array}{l} \textbf{- ou bien l'un des deux vecteurs est nul,} \\ \textbf{- ou bien les deux vecteurs sont orthogonaux.} \end{array} \right.$

CALCUL DU PRODUIT SCALAIRE EN REPERE ORTHONORME :

Soit $(0x, 0y)$ un repère orthonormé ; notons (x,y) les coordonnées de $\vec{V}$, et (x',y') celles de $\vec{W}$; alors celles de $\vec{V}+\vec{W}$ sont $(x+x', y+y')$.

Les longueurs de ces trois vecteurs sont données par les formules :

$$||\vec{V}||^2 = x^2 + y^2 \qquad\qquad ||\vec{W}||^2 = x'^2 + y'^2$$

$$||\vec{V} + \vec{W}||^2 = (x + x')^2 + (y + y')^2$$

Donc :

$$\vec{V}.\vec{W} = \frac{1}{2}((x + x')^2 + (y + y')^2) - (x^2 + y^2) - (x'^2 + y'^2)$$
$$\vec{V}.\vec{W} = \frac{1}{2}(x^2 + x'^2 + 2xx' + y^2 + y'^2 + 2yy' - x^2 - y^2 - x'^2 - y'^2)$$
$$\vec{V}.\vec{W} = \frac{1}{2}(2xx' + 2yy') = xx' + yy'$$

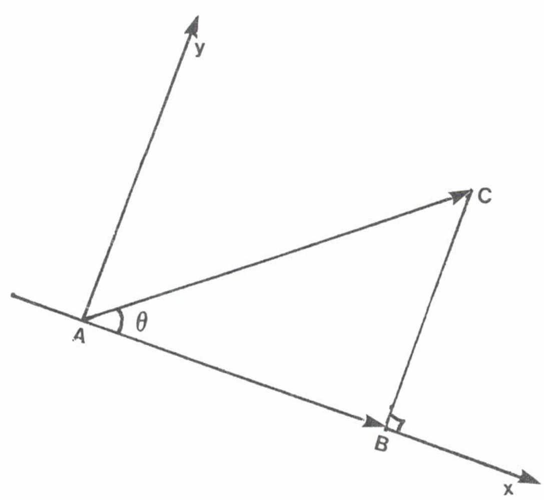
On retiendra :

Le produit scalaire des vecteurs $\vec{V}$ de coordonnées (x,y) et $\vec{W}$ de coordonnées (x',y') (dans un repère orthonormé), est donné par la formule :

$$\vec{V}.\vec{W} = xx' + yy'$$

CALCUL TRIGONOMETRIQUE DU PRODUIT SCALAIRE :

Soient $\vec{AB} = \vec{V}$ et $\vec{AC} = \vec{W}$ deux vecteurs. Notons Ax la demi-droite d'origine A, et qui contient B. Notons Ay la demi-droite telle que $(Ax,Ay) = \frac{\pi}{2}$. Nous obtenons ainsi un repère orthonormé direct.



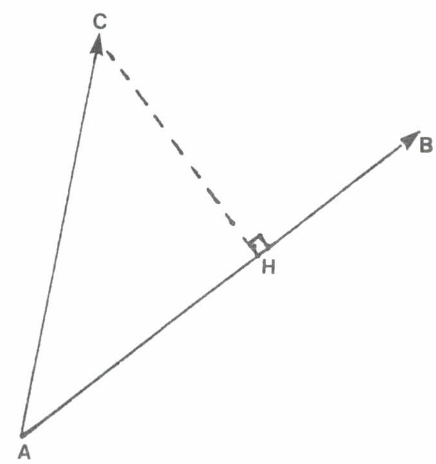
Dans ce repère le vecteur $\vec{AC}$ a pour coordonnées $AC \cos\theta$ et $AC \sin\theta$ (où $\theta = (\widehat{\vec{AB},\vec{AC}})$). Le vecteur $\vec{AB}$ a pour coordonnées AB et 0.

Donc :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \cos\theta + 0 \times AC \sin\theta$$
$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \cos\theta$$

Il existe une autre façon d'écrire ce résultat. Soit H la projection orthogonale de C sur la droite AB (c'est-à-dire le point H de AB tel que HC soit perpendiculaire à AB). Alors :

$$AC \cos\theta = \overline{AH}$$



(La droite AB est orientée de A vers B, donc $\overline{AH} = AH$ si H est sur Ax, et $\overline{AH} = -AH$ si A est sur la demi-droite Ax' opposée à Ax).

Par conséquent,

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overline{AB} \times \overline{AH}$$

On retiendra :

$$\boldsymbol{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB.AC \cos(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})}$$
$$\boldsymbol{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overline{AB} \times \overline{AH}}$$

(où H est la projection orthogonale de C sur la droite AB).

PROPRIETES DU PRODUIT SCALAIRE :

Propriété 1 : $\boldsymbol{\vec{V}.\vec{W} = \vec{W}.\vec{V}}$

Pour nous en convaincre, choisissons un repère orthonormé ; les vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{W}$ auront des coordonnées (x,y) et (x',y'). Et nous aurons $\vec{V}.\vec{W} = xx' + yy'$ et $\vec{W}.\vec{V} = x'x + y'y$.

<u>*Propriété*</u> *2 :* $$\vec{V}.(\vec{W}_1 + \vec{W}_2) = \vec{V}.\vec{W}_1 + \vec{V}.\vec{W}_2$$

Pour nous en convaincre appelons, dans un certain repère orthonormé, (x,y), (x'_1, y'_1) *et* (x'_2, y'_2) *les coordonnées de* $\vec{V}$, $\vec{W}_1$ *et* $\vec{W}_2$. *Celles de* $\vec{W}_1 + \vec{W}_2$ *sont* $(x'_1 + x'_2, y'_1 + y'_2)$. *Et nous avons :*

$$\vec{V}.(\vec{W}_1 + \vec{W}_2) = x(x'_1 + x'_2) + y'(y'_1 + y'_2)$$

Qui est égal à :

$$\vec{V}.\vec{W}_1 + \vec{V}.\vec{W}_2 = (xx'_1 + yy'_1) + (xx'_2 + yy'_2)$$

De même :

$$(\overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_2}).\vec{W} = \overrightarrow{V_1}.\vec{W} + \overrightarrow{V_2}.\vec{W}$$

$$(\overrightarrow{V_1} - \overrightarrow{V_2}).\vec{W} = \overrightarrow{V_1}.\vec{W} - \overrightarrow{V_2}.\vec{W}$$

$$\vec{V}.(\overrightarrow{W_1} - \overrightarrow{W_2}) = \vec{V}.\overrightarrow{W_1} - \vec{V}.\overrightarrow{W_2}$$

<u>*Propriété*</u> *3 :* $$(a\vec{V}).\vec{W} = \vec{V}.(a\vec{W}) = a(\vec{V}.\vec{W})$$

La vérification est facile : Si (x,y) *et* (x',y') *sont les coordonnées de* $\vec{V}$ *et* $\vec{W}$ *dans un repère orthonormé, on a :*

$$(a\vec{V}).\vec{W} = (ax)x' + (ay)y'$$

$$\vec{V}.(a\vec{W}) = x(ax') + y(ay')$$

$$a(\vec{V}.\vec{W}) = a(xx' + yy')$$

Ces trois expressions sont clairement égales.

<u>*Propriété*</u> *4 :*

Le nombre $\vec{V}.\vec{V}$ *est appelé le carré scalaire du vecteur* $\vec{V}$, *il est souvent noté* $\vec{V}^2$. *D'après ce qui précède :*

$$\vec{V}^2 = \|\vec{V}\|^2$$

$$\overrightarrow{AB}^2 = AB^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 = \overline{AB}^2 .$$

Première série d'exercices : PRODUIT SCALAIRE

Exercice VI_1 : *Dans un repère orthonormé (on fera la figure en prenant comme unité 1 cm), on considère les points $A(3;0)$, $B(7;-1)$ et $C(2;-3)$.*

1) Calcule $a = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, $b = \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA}$ et $c = \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$.

2) Calcule $u = \overrightarrow{AB}^2$. Peux-tu expliquer pourquoi $u = a + b$?

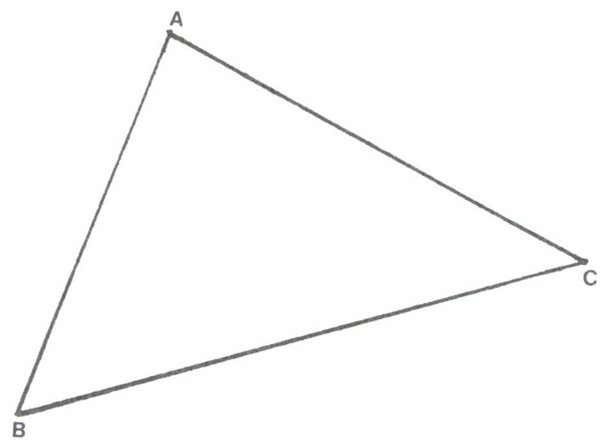
Exercice VI_2 : *Dans un repère orthonormé (on fera la figure en prenant 1 cm comme unité), on considère les points $A(3;7)$, $B(-5;2)$ et $C(3;-4)$. Soit I le milieu de BC. Quelles sont les coordonnées de I ?*

1) Calcule $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AI}^2 - \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}^2$ et $(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB})(\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{IB})$.

2) Pourquoi pouvait-on prévoir que ces trois nombres sont égaux ?

Exercice VI_3 :

Voici un triangle. On a choisi comme unité le cm. En faisant sur cette figure toutes les mesures que tu voudras, calcule (une valeur approchée de) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA}$.



Exercice VI_4 : *Dans un repère, on considère les points $A(1;3)$, $B(2;5)$, $C(3;6)$ et $M(x;1)$. Comment faut-il choisir x pour que les droites MC et AB soient perpendiculaires ?*

Exercice VI_5 : *Dans un repère orthonormé, on donne les points $A(1;0)$ et $B(-1;4)$ et le point $M(x\ ;\ 2x+1)$. Comment faut-il choisir x pour que les droites AM et AB soient perpendiculaires ?*

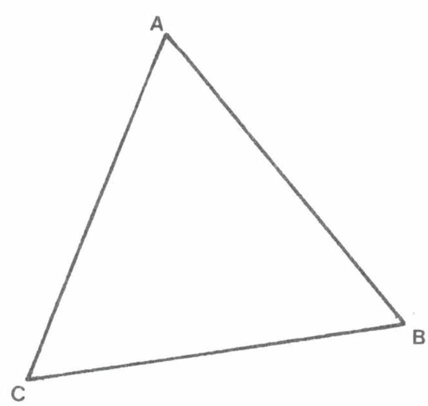
Exercice VI_6 :

Le triangle ABC est équilatéral de côté 5. On note G son centre de gravité.

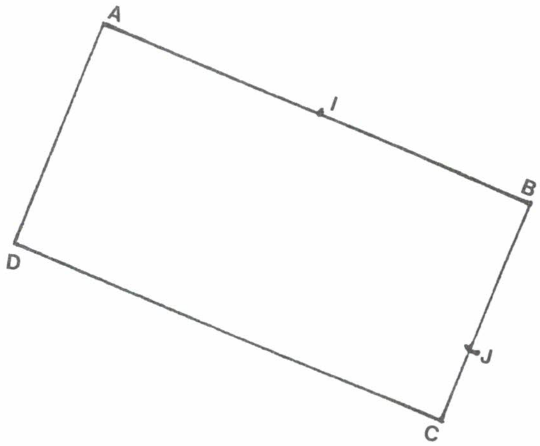
a) Calcule $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

b) Calcule $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AG}$.

c) Calcule $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BG}$.



Exercice VI$_7$:



La longueur du rectangle $ABCD$ est égale à 6 ; sa largeur est égale à 3. Le point I est le milieu de AB. Le point J est sur le segment BC, et $BJ = 2$.

a) Calcule $\overrightarrow{DI}.\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DI}.\overrightarrow{BC}$.

b) Calcule $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{BC}$.

c) Calcule $\overrightarrow{DI}^2$ et $\overrightarrow{IJ}^2$.

d) Calcule $\overrightarrow{DI}.\overrightarrow{IJ}$.

e) Que vaut l'angle $(\widehat{\overrightarrow{DI},\overrightarrow{IJ}})$?

Exercice VI$_8$: Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(3;0)$, $B(5;1)$, $C(2;7)$ et $D(0;1)$.

a) Quelles sont les coordonnées des points I milieu du segment AB, J milieu du segment CD et K milieu du segment IJ ?

b) Soit M un point de coordonnées (x,y). Calcule $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$.
Calcule $\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}$.

c) Calcule $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD} - 2\overrightarrow{MK}^2$.

d) Quel est l'ensemble des points tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}$?

Exercice VI$_9$: Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(1;3)$, $B(2;4)$ et $C(-1;2)$.

a) Calcule $\overrightarrow{AB}^2$, $\overrightarrow{AC}^2$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

b) Calcule $\cos(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})$. Que vaut l'angle $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})$?

c) Calcule $\cos(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}})$. Que vaut l'angle $(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}})$?

d) Calcule $\cos(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}})$. Que vaut l'angle $(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}})$?

Exercice VI$_{10}$: Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(4;1)$, $B(-1;3)$ et $C(1;2)$.

a) Soit $M(x,y)$, calcule $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AB}$.

b) Montre que M est sur la perpendiculaire à AB passant par C, si et seulement si $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BA}$.

c) Donne une équation de cette perpendiculaire.

Exercice VI_{11} : *Dans un repère orthonormé, on considère les points* $0(0;0)$, $A(3;0)$ et $B\left(\frac{3}{2};\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$. *Soit* $M(x,y)$.

a) *Quelle relation doivent vérifier* x *et* y *pour que* $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{B0} = 0$?

b) *Quelle relation doivent vérifier* x *et* y *pour que* $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{A0} = 0$?

c) *Il existe un seul point* M *tel que* $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{A0} = 0$ *et* $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{B0} = 0$. *Détermine ses coordonnées.*

d) *Détermine* $0M$ *et l'angle* $(\widehat{\vec{i},\overrightarrow{0M}})$.

Exercice VI_{12} :

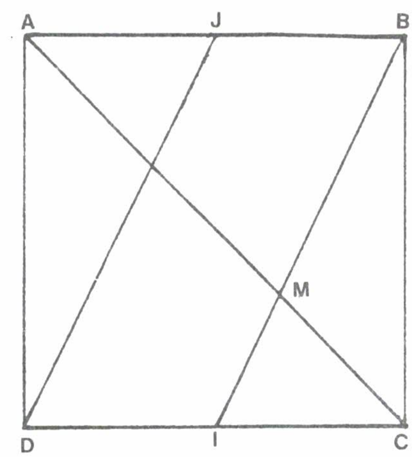
Le carré $ABCD$ *a pour côté* a . *Le point* I *est le milieu de* CD . *Le point* J *est le milieu de* AB .

a) *Démontre que* $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

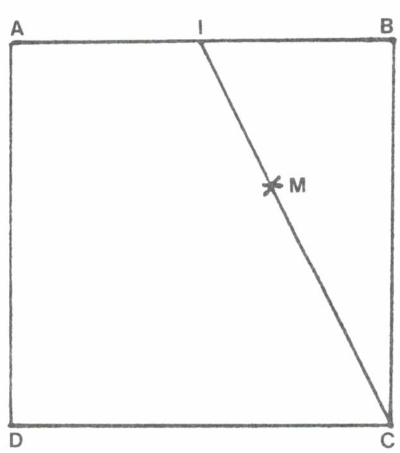
b) *Calcule* $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{IC}$ *et* $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC}$.
Calcule $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BI}$.

c) *Calcule* $\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MB}$.

d) *Que vaut l'angle* $(\widehat{\overrightarrow{MC},\overrightarrow{MB}})$?



Exercice VI_{13} :



Le carré $ABCD$ *a pour côté* 6 . *Le point* I *est le milieu de* AB . *Le point* M *est sur le segment* IC , *et on pose* $\overrightarrow{CM} = t\overrightarrow{CI}$.

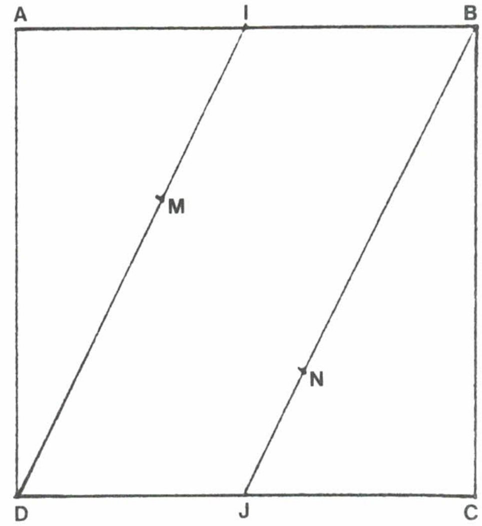
a) *Calcule* x *et* y *tels que :*
$$\overrightarrow{CM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{BC}$$

b) *Calcule* u *et* v *tels que :*
$$\overrightarrow{BM} = u\overrightarrow{AB} + v\overrightarrow{BC}$$

c) *Comment faut-il choisir* t , *pour que* $\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{BM} = 0$?

Exercice VI_{14} :

Le carré ABCD a pour côté a. Les points I et J sont les milieux des segments AB et CD. Les points M et N sont sur les segments ID et BJ, et tels que $\overrightarrow{IM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BN} = x\overrightarrow{ID}$.



a) *Calcule (en fonction de x) u et v tels que* $\overrightarrow{MN} = u\overrightarrow{AB} + v\overrightarrow{BC}$.

b) *Comment faut-il choisir x pour que MN et BD soient perpendiculaires ? Démontre que M et N sont alors alignés avec A et C.*

Exercice VI_{15} : *Dans un repère orthonormé* $(O, \vec{i}, \vec{j})$:

a) *Place le point A tel que* $\widehat{(\vec{i},\overrightarrow{0A})} = 60°$ et $\|0A\| = 4$.

b) *Place le point B tel que* $\widehat{(\vec{i},\overrightarrow{0B})} = 130°$ et $\|0B\| = 6$.

c) *Que vaut* $\widehat{(\overrightarrow{0B},\overrightarrow{0A})}$?

d) *Calcule* $\overrightarrow{0A}.\overrightarrow{0B}$.

Exercice VI_{16} : *Dans un repère orthonormé* $(O, \vec{i}, \vec{j})$:

a) *Place le point A tel que* $\overrightarrow{0A} = \vec{i} - 3\vec{j}$.

b) *Place le point B tel que* $\|\overrightarrow{0B}\| = 4$ et $\widehat{(\vec{i},\overrightarrow{0B})} = -\frac{\pi}{4}$ (rad).

c) *Calcule les coordonnées de B.*

d) *Calcule* $\|\overrightarrow{0A}\|$ et $\widehat{(\vec{i},\overrightarrow{0A})}$.

e) *Calcule de deux façons* $\overrightarrow{0A}.\overrightarrow{0B}$.

Exercice VI_{17} : *Dans un repère orthonormé* $(O, \vec{i}, \vec{j})$:

a) *Place le point A tel que* $\overrightarrow{0A} = 4\vec{i} + \vec{j}$.

b) *Place le point B de coordonnées (6;-1).*

c) *Calcule* $\overrightarrow{0A}.\overrightarrow{0B}$.

d) *Calcule les longueurs 0A, 0B et* $\cos\widehat{(\overrightarrow{0A},\overrightarrow{0B})}$.

e) *Que vaut* $\widehat{(\overrightarrow{0A},\overrightarrow{0B})}$?

Exercice VI$_{18}$: *Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$:*

a) Place le point A tel que $\overrightarrow{OA} = -3\vec{i} - 4\vec{j}$.

b) Place le point B tel que $\|\overrightarrow{OB}\| = 6$ et $(\widehat{\vec{i},\overrightarrow{OB}}) = -30°$.

c) Calcule $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$.

d) Que vaut $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})$?

Exercice VI$_{19}$: *Dans un repère orthonormé :*

a) Place les points $A(1;-1)$, $B(-1;3)$ et $C(-3;-2)$.

b) Calcule $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{BC}$.

c) Calcule les longueurs OA, BC et l'angle $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{BC}})$.

d) Calcule $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{AC}$ et $(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{AC}})$.

Exercice VI$_{20}$: *Dans un repère orthonormé :*

a) Place les points $A(2;-1)$, $B(0;4)$ et $C(-3;-3)$.

b) Calcule $\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OB}$ et $(\widehat{\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OB}})$.

c) Calcule $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC}$ et $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}})$.

d) Que vaut $(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}})$?

Exercice VI$_{21}$: *Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(0;4)$, $B(2;-3)$ et $C(1;2)$.*

a) Détermine $\cos(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}})$, puis l'angle $(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}})$.

b) Détermine $\cos(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}})$, puis l'angle $(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}})$.

c) Détermine $\cos(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})$, puis l'angle $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})$.

Exercice VI$_{22}$: *Dans un repère orthonormé, on considère les points A défini par $OA = 2$ et $(\widehat{\vec{i},\overrightarrow{OA}}) = \frac{\pi}{6}$(rad) et B défini par $OB = 4$ et $(\widehat{\vec{i},\overrightarrow{OB}}) = \frac{\pi}{3}$(rad).*

a) Calcule $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$.

b) Calcule les coordonnées de A et B.

c) Calcule les coordonnées du point C tel que $(\widehat{\vec{i},\overrightarrow{OC}}) = \frac{\pi}{4}$ (rad) et que A, B et C soient alignés.

d) Détermine OC, l'angle $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}})$ et $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC}$.

Exercice VI$_{23}$: Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(1;0)$, $B(0;4)$, $C(1;3)$ et $D(1;4)$.

a) Soit M le point de coordonnées (x,y) . Calcule $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}$.

b) Quelle est l'équation de l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}$?

c) Cet ensemble est une droite. Démontre que cette droite est perpendiculaire à la droite IJ (où I est le milieu du segment AB et J le milieu du segment CD) .

Exercice VI$_{24}$: On considère un triangle ABC .

a) Démontre que $\overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{AC}^2 = \overrightarrow{CB}.(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

b) On suppose que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA}$; démontre que le triangle est isocèle en A .

c) On suppose que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB}$; démontre que le triangle est équilatéral.

Exercice VI$_{25}$: Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$:

a) Place les points $A(1;-3)$ et $B(1;3)$.

b) Calcule $\overrightarrow{AB}.\vec{i}$ et $\overrightarrow{AB}.\vec{j}$.

c) Que vaut $(\widehat{\vec{j},\overrightarrow{AB}})$?

Exercice VI$_{26}$: On considère quatre points A, B, C, D non alignés.

a) Démontre que si $ABCD$ est un parallélogramme, alors on a $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CD}.\overrightarrow{DA}$.

b) On suppose maintenant $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CD}.\overrightarrow{DA}$; le quadrilatère $ABCD$ est-il forcément un parallélogramme ? (Tu peux répondre à cette question en faisant un dessin) .

Exercice VI$_{27}$: On considère trois points A, B, C non alignés.

a) On suppose que le triangle ABC est rectangle en A ; démontre que, pour tout point M , on a :

$$\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MA}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) .$$

b) On suppose maintenant qu'il existe un point P tel que

$$\overrightarrow{PB}.\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PA}^2 + \overrightarrow{PA}.(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) ;$$

démontre que le triangle ABC est rectangle en A .

Exercice VI$_{28}$: On considère trois points A, B, C.

a) Démontre que, pour tout point M, on a :

$$\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MA}^2 = \overrightarrow{MA}.(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} .$$

b) On suppose que les points A, B, C forment un triangle rectangle en A. Quel est l'ensemble des points P tels que $\overrightarrow{PB}.\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PA}^2$?

Exercice VI$_{29}$: On considère trois points A, B, C non alignés.

a) Démontre que, pour tout point M du plan, on a :

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} .$$

(On l'établira d'abord pour $M = A$, ou $M = B$, ou $M = C$).

b) Démontre que, pour tout point M du plan, on a :

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AB} = 0 .$$

c) Quel est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC} = 0$? Que prouve l'égalité démontrée en b) ?

Exercice VI$_{30}$: On considère un triangle ABC. On pose $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = a$, $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA} = b$ et $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB} = c$.

a) Démontre que $\overrightarrow{AB}^2 = -(a + c)$, $\overrightarrow{BC}^2 = -(a + b)$ et $\overrightarrow{CA}^2 = -(b + c)$.

b) Démontre que $\cos(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}}) = \dfrac{-a}{\sqrt{(a+c)(a+b)}}$.

c) Calcule les longueurs des côtés du triangle ABC, et les angles de ce triangle, en supposant $a = 1$, $b = -4$ et $c = -10$.

d) Le triangle ABC est isocèle en A si et seulement si $a = b$. Pourquoi ?

Exercice VI$_{31}$: Dans un repère orthonormé, on considère les points $M(1;4)$ et $N(3;2)$.

a) Quelles sont les coordonnées du milieu I du segment MN ?

b) Quel est l'ensemble des points P tels que $\overrightarrow{IP}.\overrightarrow{MN} = 0$?

c) Donne une équation de la médiatrice du segment MN.

Exercice VI$_{32}$: *Dessine un triangle ABC tel que $AB = 5$ cm , $BC = 6$ cm et $AC = 7$ cm .*

1) Démontre que $\overrightarrow{BC}^2 = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

2) Calcule $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ puis $\cos(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})$.

3) Calcule de même $\cos(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}})$ et $\cos(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}})$.

Nota : *Si tu as étudié le thème "cas d'égalité des triangles", tu as déjà traité de tels exercices (exercices 10 à 19) . Tu disposes maintenant d'une méthode beaucoup plus rapide pour les traiter.*

Exercice VI$_{33}$: *Dessine un triangle MNP tel que $MN = 6$ cm , $MP = 8$ cm et $\widehat{NMP} = 71°$.*

1) Calcule $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{MP}$, puis $\overrightarrow{NP}^2$.

2) Calcule $\overrightarrow{NP}.\overrightarrow{NM}$ (tu peux t'inspirer de l'exercice précédent) puis $\widehat{PNM}$.

3) Calcule de même $\widehat{NPM}$.

Nota : *C'est un type d'exercice que tu as peut être rencontré dans le thème "cas d'égalité des triangles" (exercices 1 à 8) . Tu disposes maintenant d'une méthode beaucoup plus rapide pour les traiter.*

Série 2 : TRANSFORMATIONS GEOMETRIQUES

EXEMPLES DE TRANSFORMATIONS GEOMETRIQUES

On appelle transformation géométrique (du plan P) toute application du plan P dans lui-même. C'est-à-dire toute correspondance permettant d'associer à tout point M du plan P, un autre point M' de P.

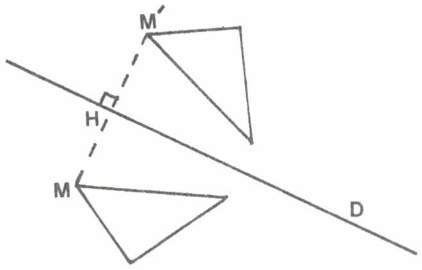
Tu connais de telles transformations :

LES SYMETRIES AXIALES

Si M est sur la droite D, il est son propre symétrique par rapport à D.

Si M n'est pas sur D, son symétrique M' par rapport à D est :

- *situé sur la perpendiculaire à D passant par M*
- *tel que le milieu H de MM' soit sur D.*



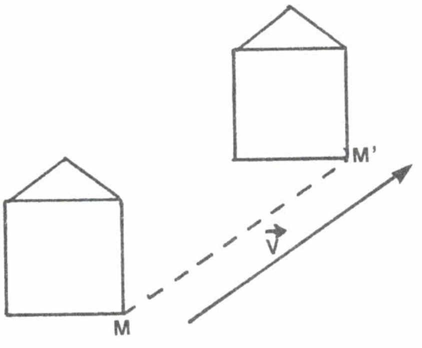
LES SYMETRIES CENTRALES

Le symétrique de O par rapport à O, est O lui-même.

Le symétrique d'un point M (distinct de O) par rapport à O, est le point M' tel que O soit le milieu de MM'.

LES TRANSLATIONS

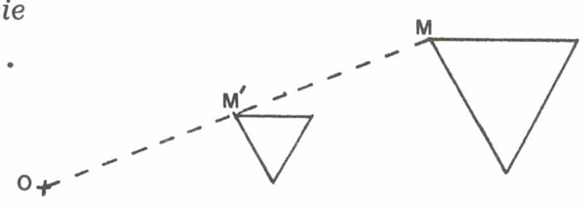
La translation de vecteur $\vec{V}$ associe à tout point M, le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{V}$.



Mais il en existe d'autres, par exemple :

LES HOMOTHETIES

L'homothétie de centre O et de rapport r (r est un nombre différent de 0), associe au point M, le point M' tel que $\overrightarrow{OM'} = r\overrightarrow{OM}$.

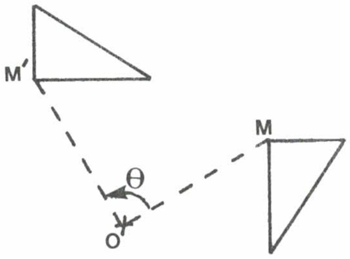


Ainsi, lorsque M est distinct de O :

- O, M et M' sont alignés
- $\overrightarrow{OM'} = |r|\ \overrightarrow{OM}$
- si $r > 0$, les points M et M' sont du même côté de O, tandis que si $r < 0$, O est entre M et M'.

LES ROTATIONS

La rotation de centre O et d'angle θ, associe à tout M (distinct de O) le point M' tel que :

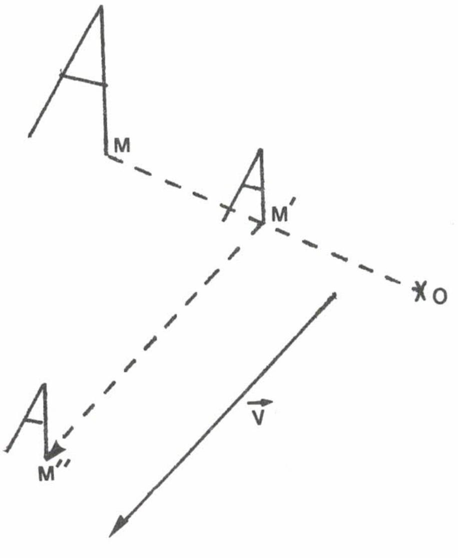


- $OM = OM'$
- $(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'}) = \theta$.

COMPOSEES DE TRANSFORMATIONS GEOMETRIQUES

Lorsqu'on connaît plusieurs transformations géométriques, on peut en fabriquer d'autres en les composant.

Exemple : *Notons h l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$, et notons t la translation de vecteur $\vec{V}$.*



Construisons d'abord $M' = h(M)$.

Puis construisons $M'' = t(M')$.

Notation : Nous dirons alors que M'' est l'image de M par la transformation composée $t.h$. Nous écrirons $M'' = t(h(M))$, ou encore $M'' = (t.h)(M)$.

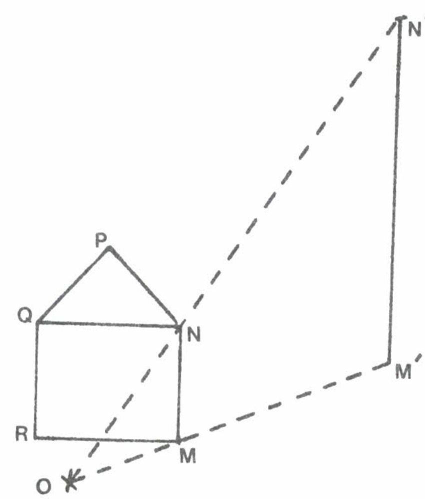
PROPRIETES DES TRANSFORMATIONS GEOMETRIQUES

IMAGE D'UNE DROITE

Toutes les transformations géométriques ci-dessus, transforment une droite D en une droite D'. On dit aussi que l'image d'une droite D est une droite D'. De plus, dans le cas d'une homothétie, d'une translation, ou d'une symétrie centrale D et D' sont parallèles.

Si les points A et B ont pour images A' et B', le segment AB, a pour image le segment $A'B'$.

Ainsi, pour construire l'image de la figure ci-contre par l'homothétie de centre O et de rapport 3, on construit d'abord les images des points $MNPQR$; puis on les joint.



ACTION SUR LES LONGUEURS

Les symétries axiales, les symétries centrales, les translations et les rotations conservent les longueurs ; c'est-à-dire que si A et B sont deux points, et A' et B' leurs images, les distances AB et $A'B'$ sont égales. On dit aussi que ce sont des isométries.

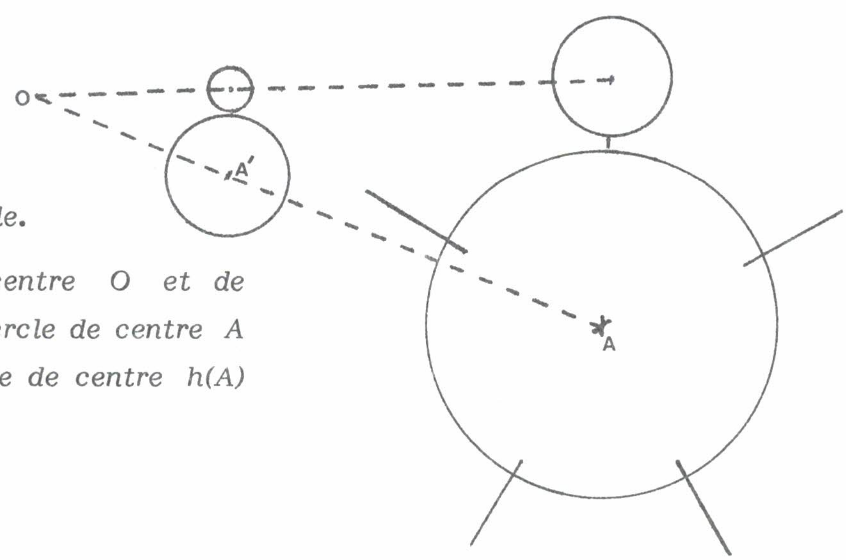
Si A' et B' sont les images de A et B par l'homothétie de centre O et de rapport r, on a :

$$\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{OA'} = r\overrightarrow{OB} - r\overrightarrow{OA} = r(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = r\overrightarrow{AB}$$

Donc $A'B' = |r|\,AB$.

En particulier l'image d'un cercle par une de ces transformations, est un cercle.

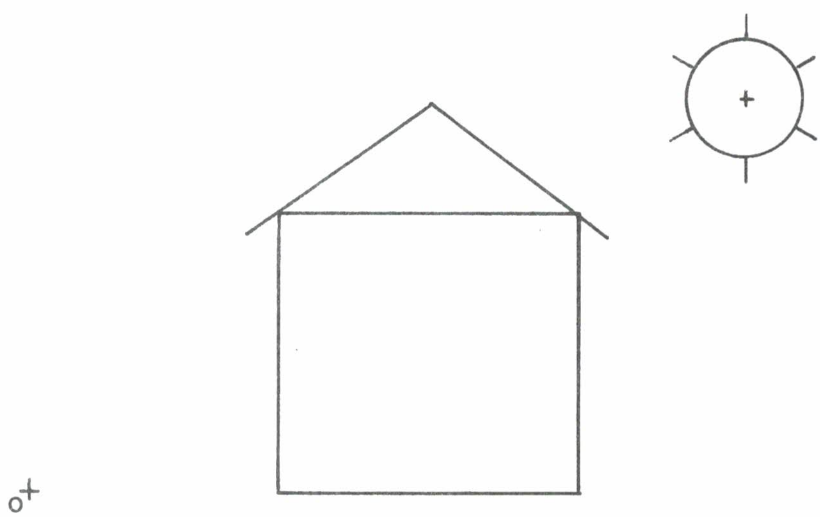
L'homothétie h de centre O et de rapport r, transforme le cercle de centre A et de rayon R, en le cercle de centre $h(A)$ et de rayon rR.



Deuxième série d'exercices :

TRANSFORMATIONS GEOMETRIQUES

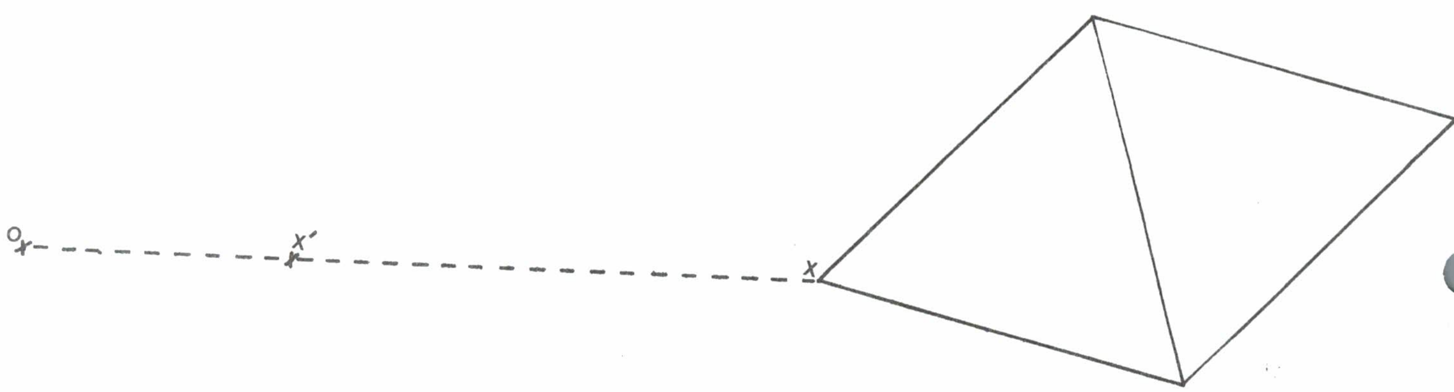
☆ **Exercice VI_{34}** : *Dessine la transformée de la figure ci-dessous par l'homothétie de centre O et de rapport 1,8 .*



☆☆ **Exercice VI_{35}** : *Il existe une homothétie de centre O qui transforme X en X'. Quel est son rapport ? Trace l'image de la figure ci-dessous par cette homothétie. Tu peux faire ce dessin.*

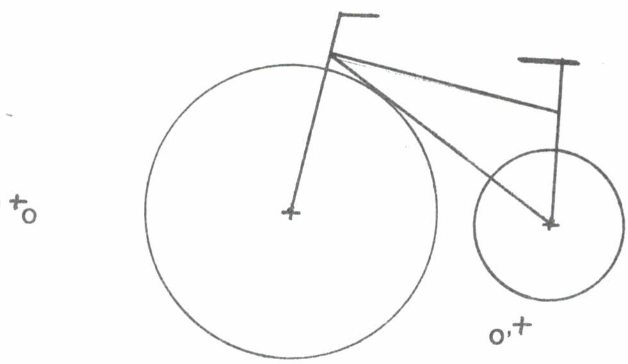
1) *En utilisant uniquement une règle graduée. Comment ?*

2) *En utilisant uniquement une équerre et une règle non graduée. Comment ?*



☆☆☆ ***Exercice VI$_{36}$:*** *Dessine l'image de la figure F ci-dessous par l'homothétie h de centre O et de rapport -2.*

Puis dessine l'image de F par l'homothétie h' de centre O' et re rapport 2.

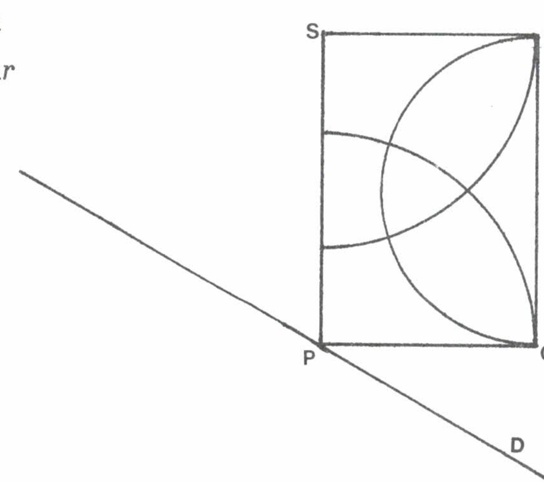


Pour tout point m, on pose $M = h(m)$ et $M' = h'(m)$.

Démontre les relations $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{O'M'} = 2\,\overrightarrow{O'O}$ et $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'} = -\,\overrightarrow{OO'}$. Quel est le milieu du segment MM' ? Qu'en résulte-t-il pour les deux figures transformées ?

☆ ***Exercice VI$_{37}$:***

Dessine l'image de cette figure par la symétrie d'axe D.

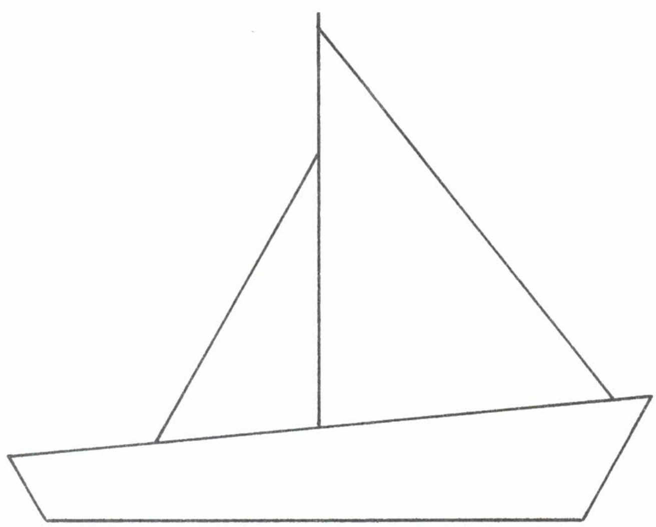


☆☆ **Exercice VI$_{38}$:** *Dessine l'image de la figure ci-dessous par l'homothétie h de centre I et de rapport $\frac{2}{3}$. Puis dessine l'image de la figure ci-dessous par l'homothétie h' de centre I' et de rapport $\frac{2}{3}$.*

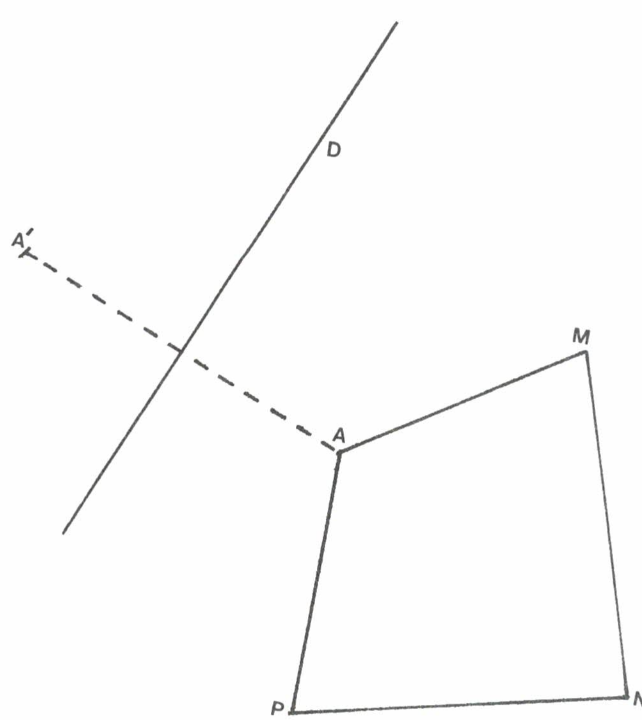
Que constate-tu ?

Soit $M = h(m)$ et $M' = h'(m)$;
démontre les relations :

$$\overrightarrow{I'M'} - \overrightarrow{IM} = \frac{2}{3}\,\overrightarrow{I'I} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{MM'} = \frac{1}{3}\,\overrightarrow{II'} .$$



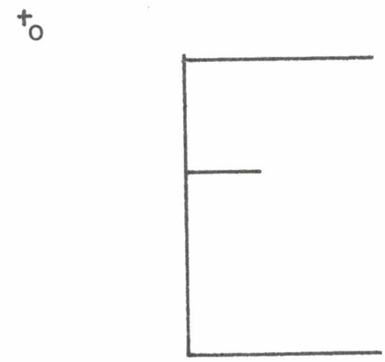
Ceci te permet-il d'expliquer ce que tu avais remarqué sur la figure ?



☆☆☆ **Exercice VI$_{39}$:** *Les points A et A' sont symétriques par rapport à D .*

Au moyen d'une règle non graduée, tu dois pouvoir tracer les symétriques par rapport à D , des points M , N , P .

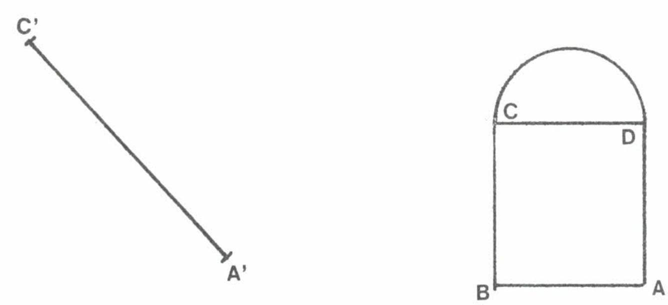
☆ ***Exercice*** ***VI$_{40}$*** : *Dessine l'image de cette lettre par la rotation de centre O et d'angle* $-\frac{\pi}{3}$.



☆☆ ***Exercice*** ***VI$_{41}$*** : *Une homothétie h (dont le centre n'est pas sur la feuille) transforme A en A' et C en C'.*

a) *Trace l'image de B et D par cette homothétie.*

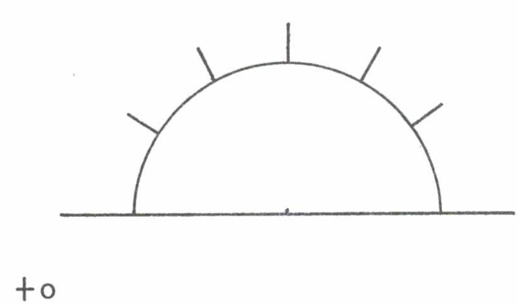
b) *Quel est le rapport de h ?*



☆ ***Exercice*** ***VI$_{42}$*** :

a) *Trace l'image de cette figure par l'homothétie de centre O et de rapport -1 .*

b) *Trace l'image de cette figure par la rotation de centre O et d'angle* π .



☆☆**Exercice** ***VI$_{43}$*** : *Dans chacune de ces 5 figures il existe une transformation géométrique simple qui envoie A en A', B en B' et C en C'. Quelle est cette transformation ?*

Fig. 1

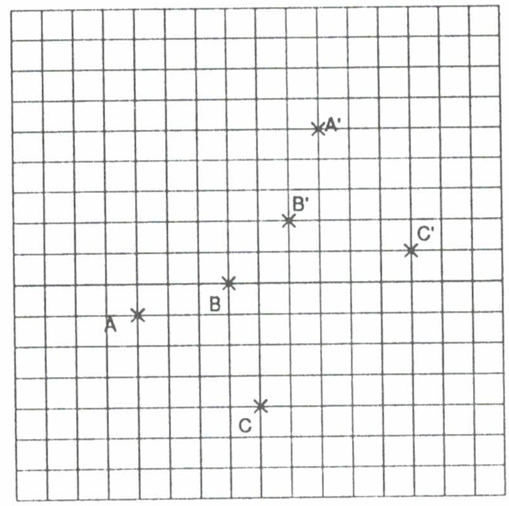


Fig. 2

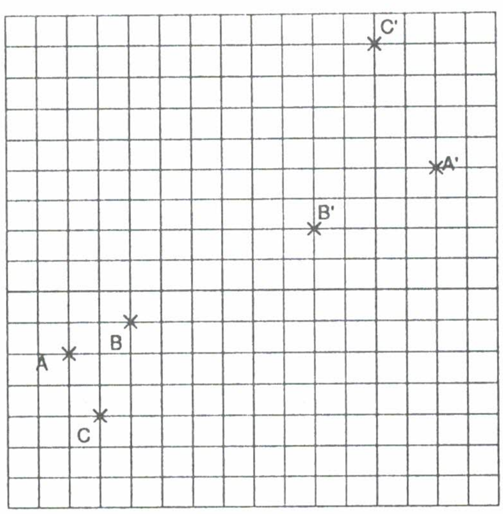


Fig. 3

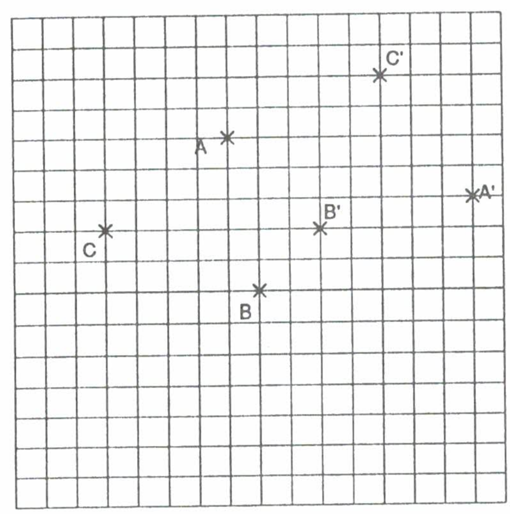


Fig. 4

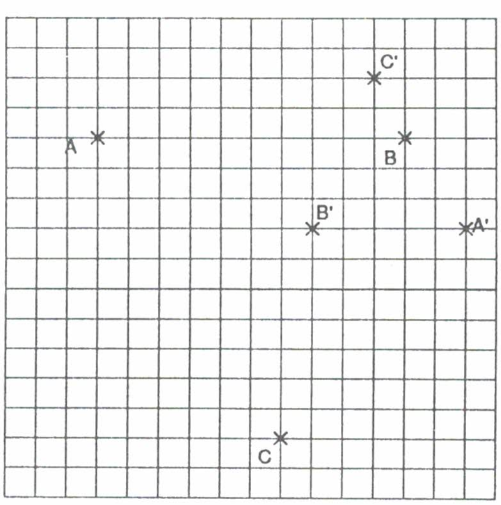
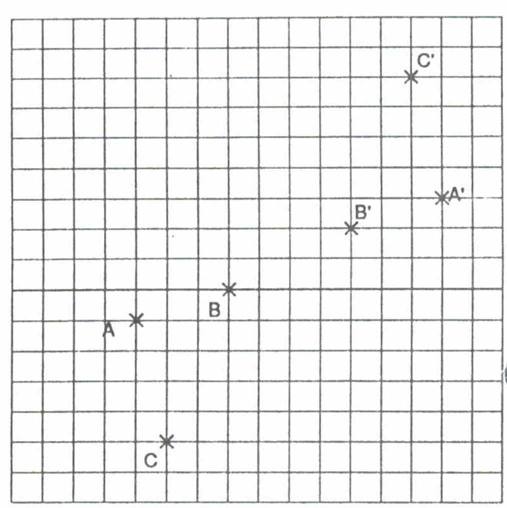
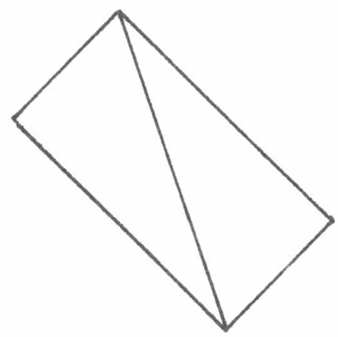
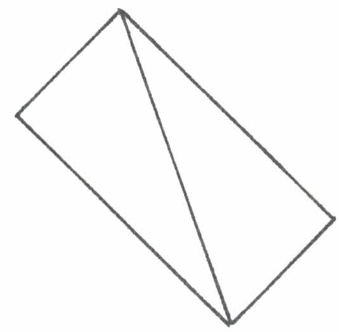


Fig. 5

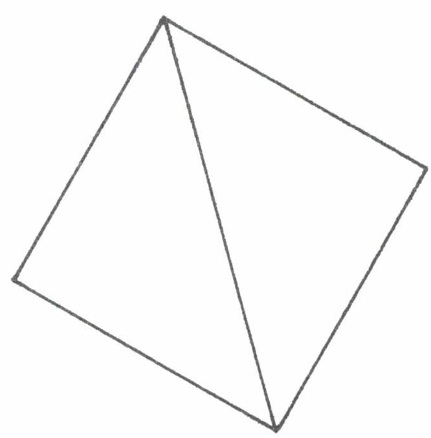


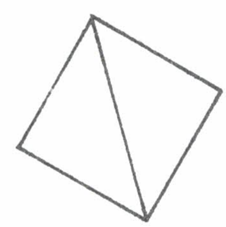
☆☆ ***Exercice VI$_{44}$:*** *Voici deux figures. Il existe deux transformations géométriques simples qui envoient celle de gauche sur celle de droite. Quelles sont ces transformations ?*



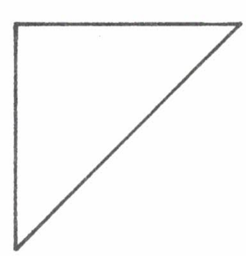


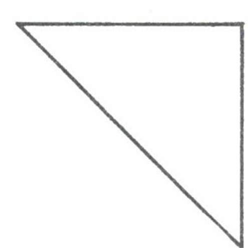
☆☆ ***Exercice VI$_{45}$:*** *Voici deux figures. Il existe deux transformations géométriques simples qui envoient celle de gauche sur celle de droite. Quelles sont ces transformations ?*



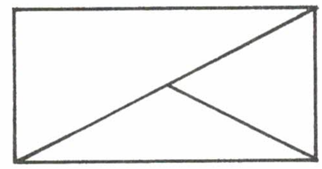


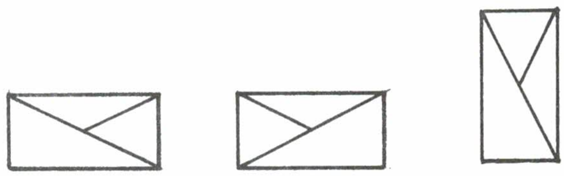
☆☆ ***Exercice VI$_{46}$:*** *Voici deux figures. Il existe deux transformations géométriques simples qui envoient celle de gauche sur celle de droite. Quelles sont ces transformations ?*



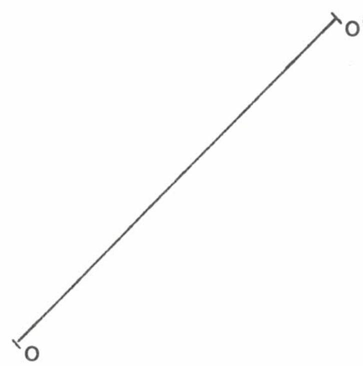


☆☆**Exercice** VI_{47} : *On a transformé la figure ci-contre par une homothétie de rapport* $-\frac{1}{2}$ *, puis par une translation* t . *Quelle est, des trois figures ci-dessous, celle que l'on a obtenue ?*



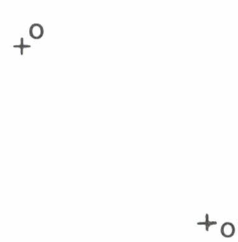


☆☆ **Exercice** VI_{48} : *Soit* h *l'homothétie de centre* O *et de rapport* $\frac{1}{2}$. *Soit* h' *l'homothétie de centre* O' *et de rapport* 2 .



a) *Soit* I *le milieu de* OO'. *Trace* $I_1 = h(I)$. *Puis trace* $I_2 = h'.h(I)$.

b) *Soit* A *un point quelconque. Trace* $A_2 = h'.h(A)$. *Compare les vecteurs* $\overrightarrow{IA}$ *et* $\overrightarrow{I_2A_2}$. *Que penses-tu de l'application* $h'.h$?



☆☆ **Exercice** VI_{49} : *On note* s *et* s' *les symétries centrales de centres* O *et* O' .

a) *Choisis un point* A *et dessine* $A_1 = s(A)$ *puis* $A_2 = s'.s(A)$.

b) *Choisis un autre point* B . *Dessine* $B_1 = s(B)$ *et* $B_2 = s'.s(B)$. *Compare les vecteurs* $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A_1B_1}$ *et* $\overrightarrow{A_2B_2}$. *Que penses-tu de la transformation* $s'.s$?

c) *Essaye de caractériser de même la transformation* $s.s'$.

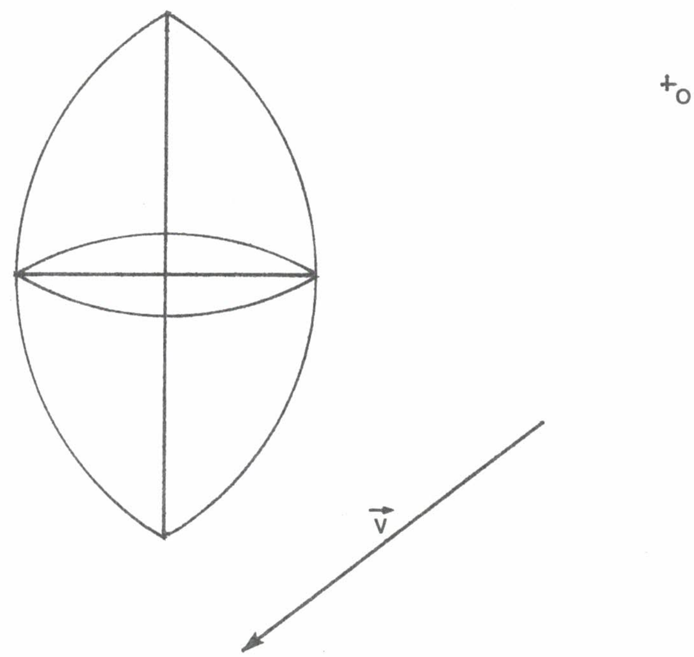
☆ **Exercice VI_{50} :** *Soit h l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{2}$. Soit t la translation de vecteur $\vec{V}$.*

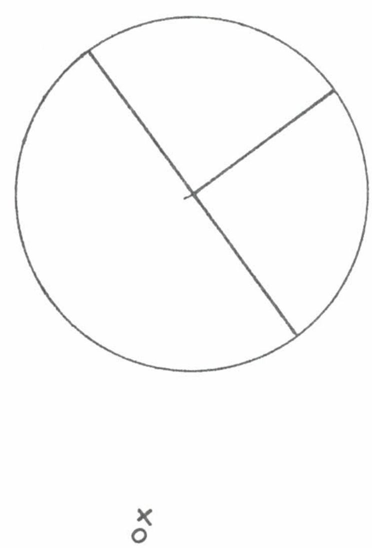
On a dessiné une figure F.

a) *Dessine $h(F)$.*

b) *Dessine $t.h(F)$.*

c) *Dessine $h.t(F)$.*

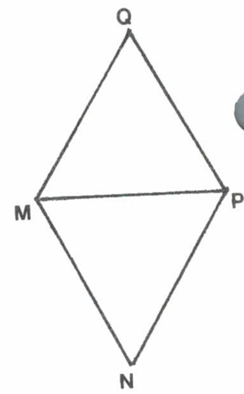




☆☆ **Exercice VI_{51} :**

Dessine l'image F_1 de la figure F par la rotation r de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
Puis dessine l'image de la figure F_1 par la rotation r. Que penses-tu de la transformation $r.r$?

☆ ***Exercice*** VI_{52} : *On a dessiné un losange* $MNPQ$. *La diagonale* MP *a même longueur que les côtés.*



Dessine son image par la rotation r *de centre* M *et d'angle* $\frac{2\pi}{3}$.

Dessine son image par $r.r$.

☆☆ ***Exercice*** VI_{53} : *On considère un plan rapporté à un repère orthonormé (unité le cm)* . *A tout point* $M(x,y)$ *on associe le point* $M'(x',y')$ *défini par :*

$$x' = 3x + 6$$
$$y' = 3y - 3$$

a) *Montre qu'il existe un point et un seul qui coïncide avec son transformé. Détermine ses coordonnées. On notera* M_0 *ce point.*

b) *Soit* M *quelconque. Compare* $\overrightarrow{M_0M}$ *et* $\overrightarrow{M_0M'}$. *Quelle est la nature de cette transformation ?*

☆☆ ***Exercice*** VI_{54} : *On considère un plan rapporté à un repère orthonormé (unité le cm)* . *A tout point* $M(x,y)$ *on associe le point* $M'(x',y')$ *défini par :*

$$x' = 5x + 1$$
$$y' = 5y - 3$$

Quelle est la nature de cette transformation ?

*(On pourra s'inspirer de l'****exercice*** VI_{53} *)* .

☆☆ **Exercice VI$_{55}$:** *On considère un plan rapporté à un repère orthonormé (unité le cm). A tout point $M(x,y)$ on associe les points $M'(x',y')$ et $M''(x'',y'')$ définis par :*

$$x' = 3x - 6 \qquad\qquad x'' = 2x - 4$$
$$y' = 3y + 9 \qquad\qquad y'' = 2y + 8$$

a) *Quelle est la nature de la transformation $M \longrightarrow M'$?*

b) *Quelle est la nature de la transformation $M \longrightarrow M''$?*

*(On pourra s'inspirer de l'**exercice VI$_{53}$**).*

☆☆ **Exercice VI$_{56}$:** *Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère la transformation géométrique qui à tout point $M(x;y)$ associe le point $M'(X;Y)$ défini par :*

$$X = y + 1$$
$$Y = x - 1$$

a) *Quels sont les points fixes de cette transformation ?*

b) *Démontre que, quel que soit M, le milieu de MM' est un point fixe de cette transformation.*

c) *Quelle est la nature de cette transformation géométrique ?*

☆☆☆☆ **Exercice VI$_{57}$:** *Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère la transformation géométrique qui à tout point $M(x;y)$ associe le point $M'(X;Y)$ défini par :*

$$X = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y - 1$$
$$Y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y$$

a) *Il existe un unique point I, qui est fixe par cette transformation. Quel est ce point I ?*

b) *Démontre que, pour tout $M(x,y)$, on a $IM = IM'$.*

c) *Démontre que, pour tout $M(x,y)$, on a $\cos(\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IM'}) = \frac{1}{2}$.*

d) *Quelle est la nature de cette transformation ?*

☆☆☆ **Exercice VI_{58} :** *Le plan est muni d'un repère orthonormé* $(O, \vec{i}, \vec{j})$. *On considère la transformation géométrique qui à tout point* $M(x;y)$ *associe le point* $M'(X;Y)$ *défini par :*

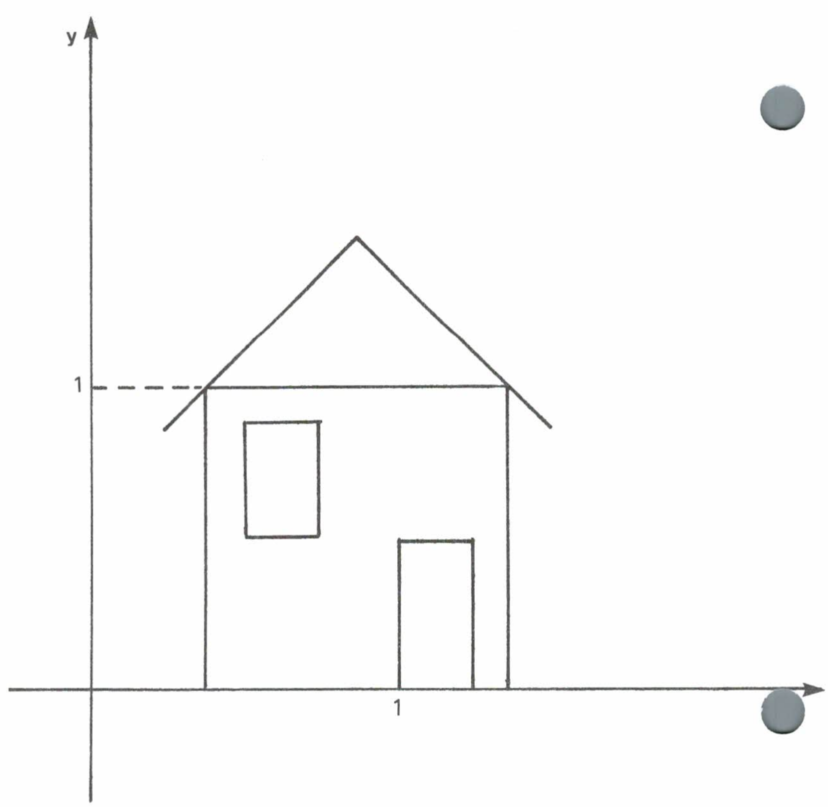
$$X = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y$$
$$Y = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y$$

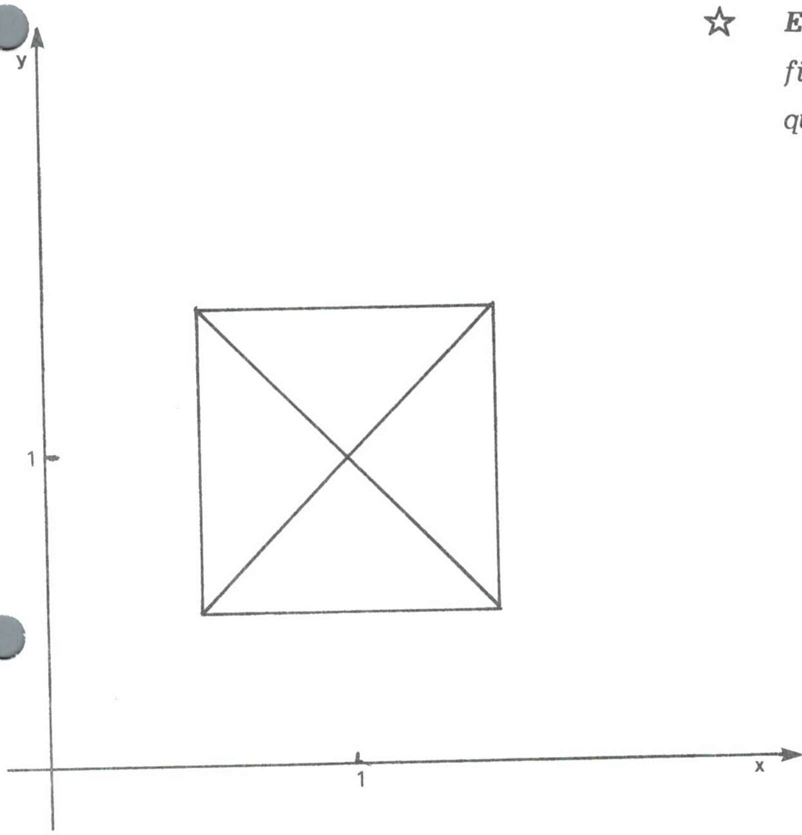
a) *Quels sont les points fixes de cette transformation ?*

b) *Démontre que, quel que soit* M, *le milieu de* MM' *est un point fixe de cette transformation.*

c) *Quelle est la nature de cette transformation géométrique ?*

☆ **Exercice VI_{59} :** *Dessine l'image de cette figure par la transformation géométrique qui à* $M(x;y)$ *associe* $M'(x;y^3)$.





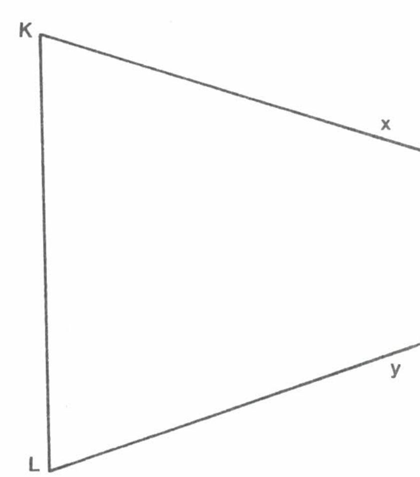
☆ **Exercice VI$_{60}$:** *Dessine l'image de cette figure par la transformation géométrique qui à $M(x;y)$ associe $M'(x^2;y^2)$.*

☆ **Exercice VI$_{61}$:** *Dessine un triangle ABC. On note M le milieu de BC. On note I le milieu de MC.*

a) *Il existe une homothétie h de centre C qui envoie M sur I. Quel est son rapport ? Quelle est l'image de A par cette homothétie ?*

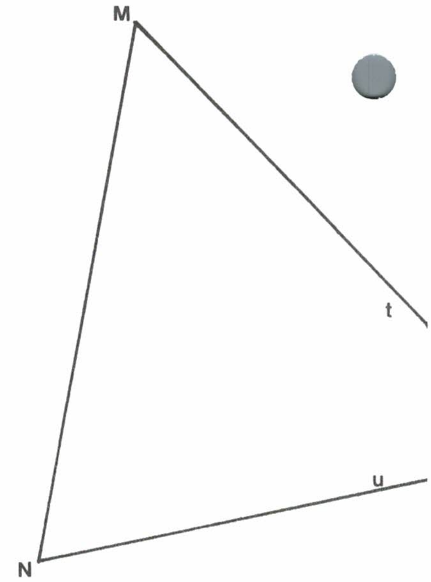
b) *Il existe une homothétie de centre B qui envoie M sur I. Quel est son rapport ? Quelle est l'image de A par cette homothétie ?*

☆☆ **Exercice VI$_{62}$:** *Les demi-droites Kx et Ly se coupent en un point M. Sans faire aucun tracé hors de la feuille, on peut dessiner le centre de gravité du triangle KLM. Comment ?*



☆☆ **Exercice VI$_{63}$:** *Les demi-droites Mt et Nu se coupent en un point P . Sans faire aucun tracé hors de la feuille, on peut dessiner le centre du cercle qui passe par M , N et P .*

Comment ?

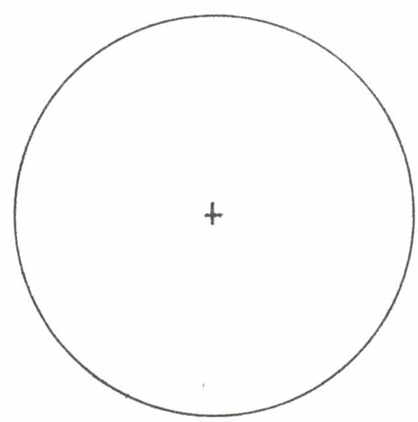


☆☆☆ **Exercice VI$_{64}$:** *Dessine un trapèze ABCD (AB parallèle à CD) tel que AB = 5 cm , CD = 9 cm , AD = 4 cm et BC = 6 cm .*

Nota : On peut le faire en utilisant les propriétés de l'homothétie. On peut aussi le faire en utilisant les propriétés de la translation.

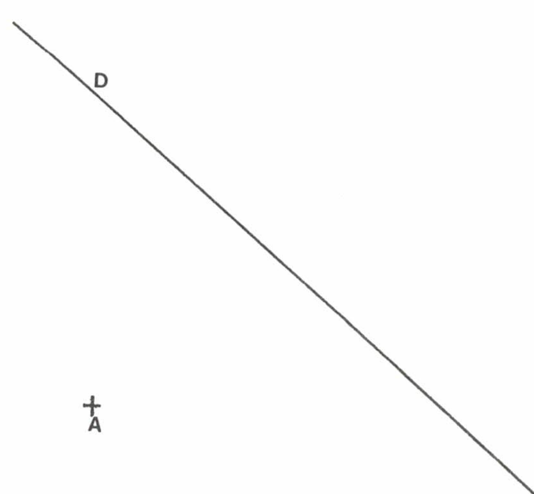
☆☆☆ **Exercice VI$_{65}$:** *Construis un triangle dont les angles mesurent 60° , 80° et 40° .*

Peux-tu construire un tel triangle dont les sommets sont sur le cercle ci-contre ?

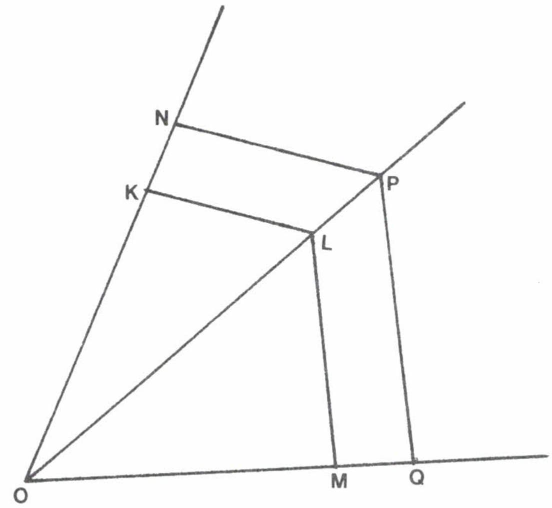


☆☆☆ **Exercice VI$_{66}$:**

En utilisant seulement une règle graduée, et les propriétés de l'homothétie, trace la parallèle à D passant par A .



☆☆ Exercice VI_{67} :



Les droites KL et NP sont parallèles.
Les droites LM et PQ sont parallèles.

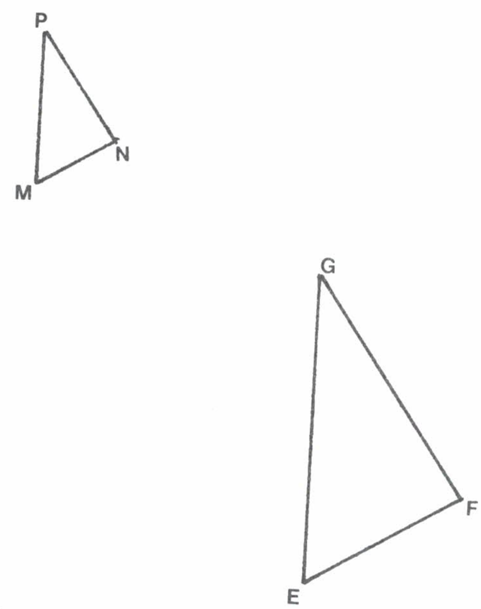
Explique pourquoi KM et NQ sont parallèles.

Solution : Soit h l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{OK}{ON}$ ...

☆☆ Exercice VI_{68} :

Les deux triangles ci-contre ont leurs côtés parallèles. Il existe une homothétie de rapport positif, qui envoie F sur N et G sur P. Trace son centre.

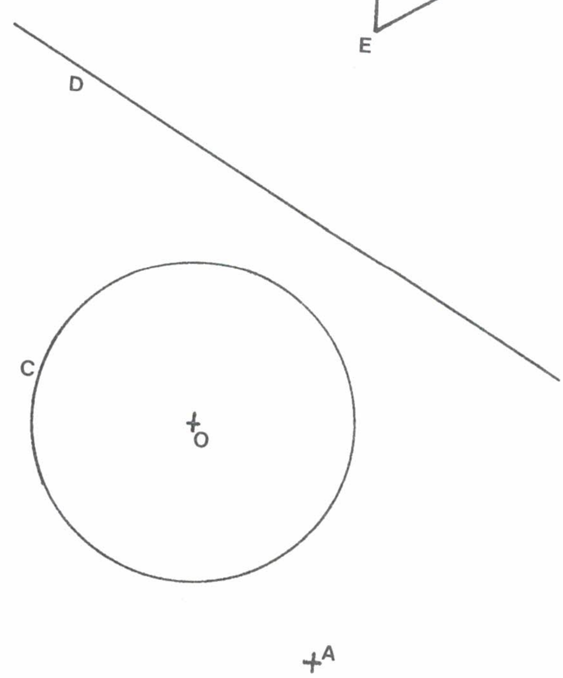
Démontre qu'elle envoie E sur M.



☆☆ Exercice VI_{69} : *On considère deux triangles à côtés parallèles. Existe-t-il toujours une homothétie qui envoie l'un sur l'autre ?*

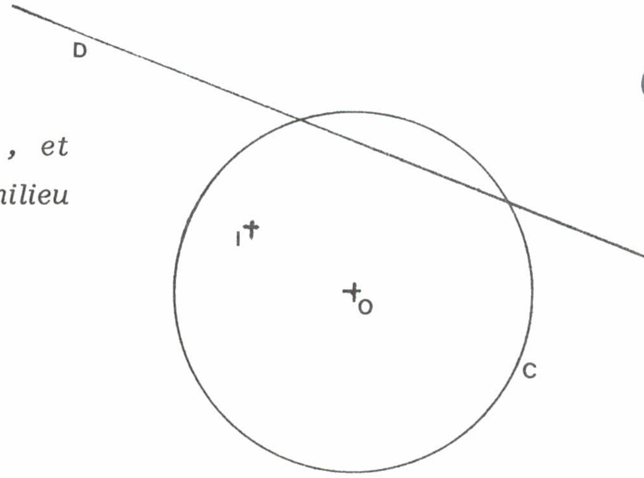
☆☆☆☆ Exercice VI_{70} :

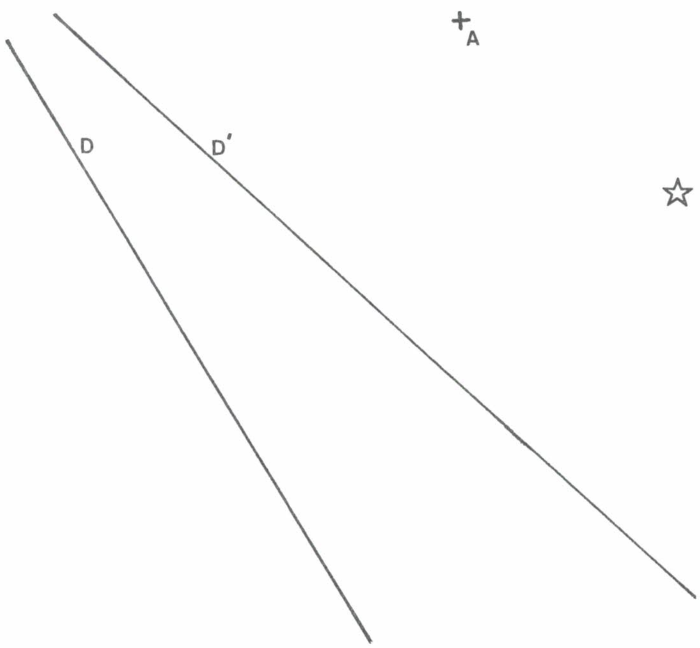
Trace un point B de la droite D, tel que le milieu de AB soit sur le cercle C.



☆☆☆☆ *Exercice VI_{71} :*

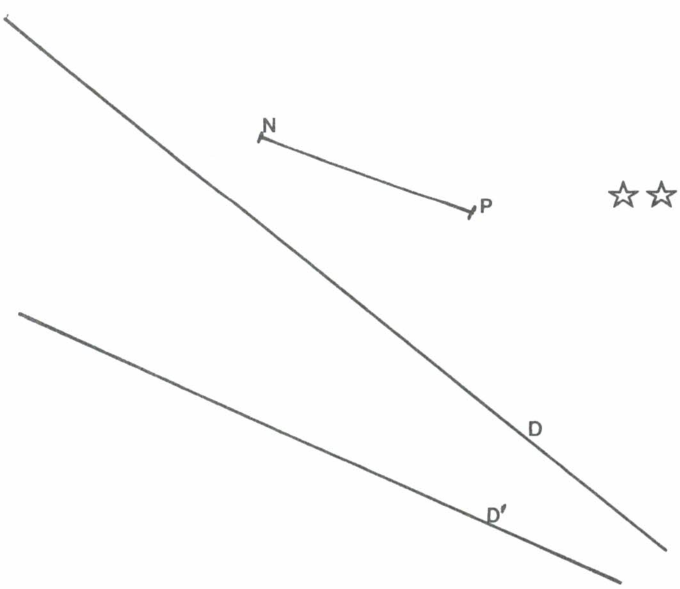
Dessine un point A de la droite D, et un point B de C tels que I soit le milieu de AB .





☆☆☆☆ *Exercice VI_{72} :*

On cherche des points B et C de la droite D , tels que le centre de gravité du triangle ABC soit sur D'.
Trace de tels points.
Combien le problème a-t-il de solutions ?

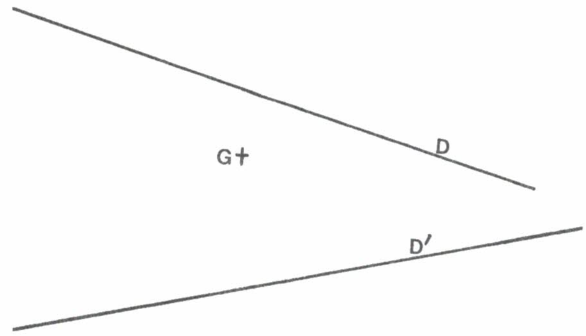


☆☆☆☆ *Exercice VI_{73} :*

On cherche un point M de D' tel que le centre de gravité du triangle MNP soit sur D .
Trace un tel point.
Combien le problème a-t-il de solutions ?

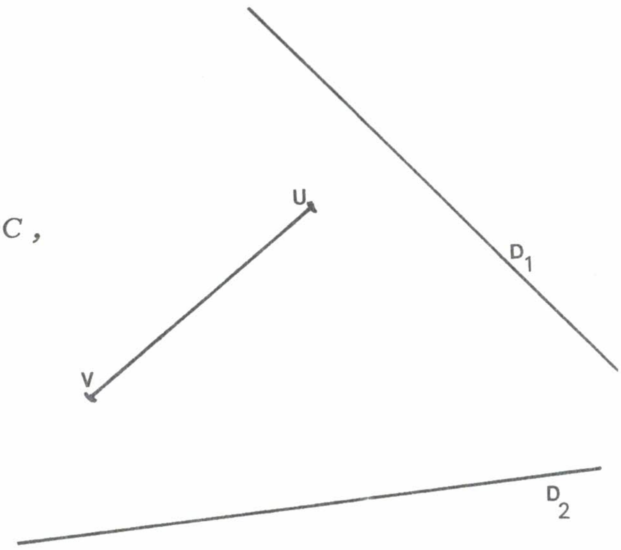
☆☆☆☆ Exercice VI$_{74}$:

On cherche un triangle ABC, tel que A et C soient sur D, et B sur D', et tel que G soit le centre de gravité de ABC.
Combien existe-t-il de tels triangles ?



☆☆☆☆ Exercice VI$_{75}$:

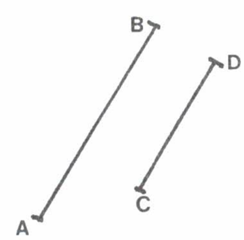
On cherche un parallélogramme $UVDC$, tel que C soit sur D_1 et D sur D_2.
Combien en existe-t-il ?



☆☆☆☆ Exercice VI$_{76}$: *Les segments AB et CD sont parallèles.*

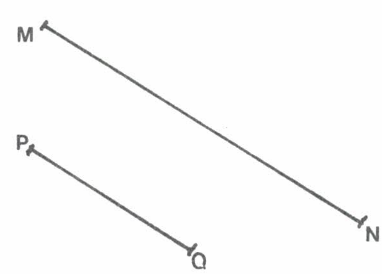
a) *Il existe une homothétie h qui envoie A sur D et B sur C. Dessine son centre I.*

Il existe une homothétie h' qui envoie A sur C et B sur D. Dessine son centre J.

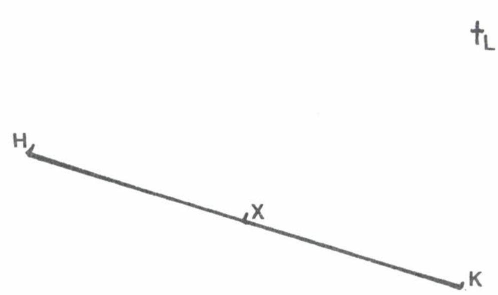


b) *Dessine les milieux M et N de AB et CD. Que constate-t-on ? Pouvait-on le prévoir ?*

c) *Et maintenant, tu disposes uniquement d'une règle non graduée, et tu sais que les segments MN et PQ sont parallèles. Peux-tu tracer les milieux de ces segments ?*



d) *Enfin, si tu disposes uniquement d'une règle non graduée, et si tu sais que X est le milieu de HK, peux-tu tracer la parallèle à HK passant par L ?*



Série 3 : STATISTIQUES

Au mois d'avril 1988 , nous avons demandé à des élèves du Lycée Technique de SARREGUEMINES , de remplir le questionnaire suivant :

Prénom et initiale du nom :
Fille ou garçon ?
Interne ?
Distance domicile-lycée :
Moyen de transport :
Date de naissance :
Taille : **Poids :**

Les réponses sont consignées en un tableau dans les deux pages suivantes .

Un tel tableau contient beaucoup de renseignements, mais ceux-ci sont donnés en vrac (dans l'ordre où nous avons ramassé les questionnaires) . Nous allons fixer quelques règles permettant de mettre en évidence les enseignements que l'on peut tirer d'un tel tableau de données.

Une suggestion :

Tu estimeras peut être que cette étude qui porte sur cette population que tu ne connais pas, est de peu d'intérêt. Nous te conseillons alors de faire la même enquête auprès des élèves de ton lycée. (Choisis une population de 100 à 140 élèves, soit 3 à 4 classes) . Mais tu peux aussi porter ton intérêt sur d'autres questionnaires ; par exemple le suivant :

Prénom et initiale du nom :
Age (années + mois) (ou : Date de naissance)
Garçon ou fille ?
Fumeur : oui - non - irrégulièrement (au plus deux cigarettes par semaine)
Combien de paquets de cigarettes par semaine ?
A quel âge as tu fumé pour la première fois ?
A quel âge as tu commencé à fumer régulièrement ?

UN PEU DE VOCABULAIRE

POPULATION :

Les données dont nous disposons concernent une certaine **population.** Ici le mot population est employé dans sa signification la plus usuelle ; il s'agit d'une population d'êtres humains répondant à certains critères . Mais **en statistiques le mot population est employé de façon très générale pour désigner l'ensemble des êtres vivants, ou des objets ,... auxquels on s'intéresse.** Ainsi à l'exercice VI_{88} on s'intéresse à la "population" des mots d'un texte ; à l'exercice VI_{90} on s'intéresse à la "population" des lettres d'un texte ; on pourrait s'intéresser à la "population" des téléviseurs en service dans la ville où tu habites ,...

EFFECTIF TOTAL :

C'est le nombre total des individus de la population considérée. Dans notre tableau, l'**effectif total** est de 125 élèves .

CARACTERES :

Pour chacun des individus de cette population nous disposons d'un certain nombre de renseignements (directement donnés par le tableau, ou qu'on peut en déduire aisément) . Par exemple :

- la taille
- le poids
- l'âge
- le mois de naissance
- la distance domicile-lycée
- le sexe

Nous dirons que nous connaissons un certain nombre de **caractères statistiques** de la population étudiée. L'âge est un caractère ; le poids en est un autre, le mois de naissance un troisième ... Il y en a bien d'autres que les six de la liste ci-dessus ; cherches-en quelques-uns.

Nous pouvons tout de suite remarquer qu'il existe deux sortes de caractères :

* Les caractères numériques qui s'expriment naturellement par un nombre : l'âge, le poids, la taille ,...

* Les caractères non numériques comme le sexe, le mois de naissance, le fait d'être interne ou non, la classe suivie (2T5 , 2T6 ,...) .

Prénom	G F	(I)	Date de naissance	Classe	Distance	Moyen de transport	taille	poids
Christophe L.	G	(I)	22.03.72	2T6	54 km	Bus	1,72 m	60 kg
Stéphane S.	G	(I)	16.12.72	2T5	30 km	Train	1,80 m	75 kg
Eric J.	G		26.10.72	2T5	17 km	Bus	1,70 m	65 kg
Stéphane B.	G		18.01.72	2T5	35 km	Train	1,67 m	48 kg
Fabrice G.	G	(I)	07.07.71	2T5	35 km	Train	1,75 m	61 kg
François H.	G	(I)	25.04.71	2T5	32 km	Bus	1,78 m	72 kg
Yves G.	G		20.09.72	2T5	23 km	Bus	1,55 m	55 kg
Olivier W.	G		11.01.72	2T5	31 km	Train	1,77 m	70 kg
Taesch E.	G		05.12.71	2T5	25 km	Train	1,70 m	72 kg
Jean-François B.	G		06.08.72	2T5	36 km	Voiture	1,78 m	74 kg
Raphaël M.	G	(I)	07.06.72	2T5	20 km	Bus	1,76 m	65 kg
Jean-Yves A.	G		14.09.71	2T5	22 km	Train+Bus	1,85 m	66 kg
Sonya H.	F		01.01.72	2T5	36 km	Train	1,58 m	50 kg
Alexandra B.	F	(I)	09.11.72	2T5	28 km	Bus	1,70 m	55 kg
Stock R.	G	(I)	16.06.72	2T5	45 km	Bus	1,87 m	80 kg
Christian B.	G	(I)	16.12.70	2T5	25 km	Voiture	1,76 m	65 kg
Sandrine C.	F		27.05.72	2T5	20 km	Bus	1,66 m	56 kg
Greg L.	G		25.09.72	2T5	3 km	Moto	1,80 m	80 kg
Frédérique D.	F		03.07.72	2T5	10 km	Bus	1,71 m	65 kg
Sandrine W.	F		27.05.72	2T5	8 km	Bus	1,71 m	61 kg
Anne G.	F		08.11.72	2T5	10 km	Bus	1,60 m	54 kg
Jean-François G.	G	(I)	12.07.72	2T5	22 km	Bus	1,81 m	75 kg
Jérôme H.	G		19.02.72	2T5	100 m	Marche	1,88 m	85 kg
Laurence R.	F	(I)	21.09.71	2T5	46 km	Train	1,64 m	50 kg
Alexandre N.	G		01.08.72	2T5	8 km	Bus	1,72 m	60 kg
Laurent M.	G		30.01.72	2T5	8 km	Train	1,65 m	58 kg
Michel K.	G		08.03.71	2T5	15 km	Bus	1,85 m	80 kg
Gilles H.	G		12.12.72	2T5	15 km	Bus	1,60 m	45 kg
Michel E.	G		07.05.72	2T5	20 km	Train	1,85 m	75 kg
Fabrice O.	G		18.03.71	2T5	7 km	Bus	1,85 m	67 kg
Olivier J.	G		07.05.72	2T5	2 km	Motocycl.	1,82 m	75 kg
Eric L.	G		02.02.72	2T5	3 km	Bus	1,75 m	60 kg
Alain W.	G		04.12.72	2T5	15 km	Bus	1,70 m	55 kg
Patrick S.	G		05.05.71	2T7	8 km	Bus	1,83 m	65 kg
Christophe S.	G		08.05.71	2T7	8 km	Bus	1,76 m	60 kg
Olivier D.	G		20.05.70	2T7	8 km	Bus	1,70 m	67 kg
Manuel S.	G		08.03.72	2T7	8 km	Bus	1,70 m	58 kg
Paolo S.	G		04.09.70	2T7	8 km	Bus	1,77 m	65 kg
Laurent H.	G		26.03.71	2T7	8 km	Bus	1,80 m	72 kg
Eric B.	G		08.09.71	2T7	2 km	Marche	1,75 m	55 kg
Stephane S.	G		19.01.71	2T7	15 km	Bus	1,82 m	75 kg
Christophe B.	G		25.07.70	2T7	15 km	Bus	1,75 m	65 kg
Eric S.	G		23.10.70	2T7	15 km	Bus	1,76 m	67 kg
Joël S.	G		28.04.72	2T7	7 km	Bus	1,80 m	68 kg
Claude T.	G		02.02.72	2T7	10 km	Voiture	1,70 m	61 kg
Gilles L.	G	(I)	13.04.71	2T7	36 km	Train	1,84 m	70 kg
Raphaël L.	G	(I)	10.06.71	2T7	35 km	Train	1,75 m	70 kg
Christophe L.	G		03.08.71	2T7	55 km	Voiture	1,71 m	65 kg
Jean-Marie K.	G		21.04.72	2T7	20 km	Bus	1,70 m	63 kg
Christophe K.	G		08.07.72	2T7	20 km	Bus	1,65 m	50 kg
Raphaël O.	G		30.09.72	2T7	11 km	Bus	1,80 m	50 kg
Olivier M.	G	(I)	17.10.71	2T7	37 km	Train	1,85 m	72 kg
Yannick R.	G		08.06.72	2T7	7 km	Bus	1,80 m	70 kg
Raphaël G.	G		08.06.71	2T7	5 km	Bus	1,75 m	64 kg
Romuald O.	G	(I)	03.01.72	2T7	30 km	Train	1,70 m	65 kg
Laurent S.	G	(I)	05.06.71	2T7	35 km	Bus	1,95 m	85 kg
Denis S.	G		12.04.71	2T7	1 km	Marche	1,75 m	65 kg
Jean-Luc G.	G	(I)	05.06.71	2T7	32,5 km	Voiture	1,74 m	82 kg
Geoffrey F.	G		23.12.72	2T7	18,5 km	Bus	1,80 m	66 kg
Jean-Nicolas D.	G		26.08.72	2T7	4 km	Bus	1,75 m	61 kg

Prénom	G F	(I)	Date de naissance	Classe	Distance	Moyen de transport	taille	poids
Régis S.	G		23.12.71	2T3	1 km	Marche	1,70 m	72 kg
Patrice B.	G		31.01.72	2T3	30 km	Bus	1,69 m	68 kg
Fabien M.	G	(I)	28.12.71	2T3	45 km	Voiture	1,68 m	57 kg
Yannick P.	G		17.07.71	2T3	22 km	Train	1,80 m	65 kg
Pascal S.	G		21.04.72	2T3	20 km	Bus	1,85 m	60 kg
Patrice V.	G		24.09.71	2T3	800 m	Marche	1,80 m	55 kg
Richard B.	G		04.09.71	2T3	17 km	Train	1,71 m	70 kg
Laurent S.	G		14.03.?	2T3	15 km	Bus	1,70 m	60 kg
Jean-Marc L.	G		02.02.70	2T3	32 km	Voiture	1,70 m	59 kg
Nicolas L.	G		27.09.70	2T3	3 km	Marche	1,77 m	61 kg
Alexandre M.	G		14.08.72	2T3	4 km	Cyclomot.	1,55 m	54 kg
Jérôme G.	G		07.05.72	2T3	25 km	Bus	1,84 m	65 kg
Roger C.	G		30.01.72	2T3	15 km	Bus	1,82 m	60 kg
Dominique F.	G		07.07.72	2T3	20 km	Bus	1,70 m	60 kg
Pascal M.	G	(I)	06.11.71	2T3	60 km	Bus	1,83 m	65 kg
Christophe S.	G	(I)	09.03.72	2T3	50 km	Bus	1,75 m	65 kg
Franck S.	G		21.01.72	2T3	25 km	Bus	1,71 m	61 kg
Benoît W.	G		27.06.72	2T3	25 km	Bus	1,85 m	72 kg
Stephane Z.	G		17.09.72	2T3	20 km	Bus	1,80 m	60 kg
Frédéric G.	G		12.09.72	2T3	6 km	Bus	1,73 m	52 kg
Jean-Jacques S.	G	(I)	04.03.71	2T3	70 km	Bus	1,83 m	75 kg
Stéphane F.	G		25.11.72	2T3	17 km	Bus	1,63 m	50 kg
Patrick I.	G		18.07.71	2T	20 km	Bus	1,75 m	65 kg
Stéphane M.	G		01.06.72	2T3	10 km	Bus	1,80 m	64 kg
Frédéric H.	G		01.04.72	2T3	7 km	Bus	1,76 m	65 kg
Christophe K.	G		19.04.70	2T3	20 km	Voiture	1,80 m	60 kg
Yves R.	G		27.01.72	2T3	40 km	Bus	1,90 m	83 kg
Thierry M.	G		04.05.72	2T3	8 km	Voiture	1,79 m	78 kg
Boris H.	G	(I)	19.01.72	2T3	35 km	Bus	1,89 m	66 kg
Marc D.	G		09.12.71	2T3	20 km	Bus	1,85 m	64 kg
Patrice P.	G		14.10.71	2T3	15 km	Bus	1,78 m	60 kg
Stephane B.	G	(I)	12.08.72	2T3	37 km	Train+Bus	1,81 m	74 kg
Sébastien E.	G		01.06.72	2T3	9 km	Train	1,75 m	90 kg
Hervé S.	G		21.01.72	2T6	26 km	Train	1,80 m	80 kg
Sébastien O.	G	(I)	15.06.72	2T6	35 km	Voiture	1,74 m	62 kg
Sébastien E.	G		13.10.72	2T6	16 km	Train	1,65 m	55 kg
Michel M.	G		08.04.72	2T6	10 km	Bus	1,85 m	73 kg
Alain M.	G	(I)	20.02.72	2T6	40 km	Train	1,74 m	78 kg
Didier K.	G		11.04.72	2T6	8 km	Bus	1,80 m	65 kg
Jérôme D.	G		11.12.71	2T6	18 km	Bus	1,78 m	65 kg
Pierre G.	G		16.11.72	2T6	7 km	Bus	1,81 m	68 kg
Jean-Marc L.	G		08.07.71	2T6	27 km	Train	1,77 m	79 kg
Damien B.	G		06.04.71	2T6	8 km	Bus	1,82 m	68 kg
Hervé H.	G		28.07.71	2T6	8 km	Train	1,80 m	68 kg
Michaël B.	G		24.07.72	2T6	28 km	Train	1,72 m	52 kg
Dominique F.	G		17.02.71	2T6	20 km	Bus	1,70 m	62 kg
Gilbert H.	G	(I)	01.04.72	2T6	20 km	Voiture	1,75 m	61 kg
Corinne L.	F	(I)	18.12.70	2T6	45 km	Train	1,60 m	52 kg
Caroline S.	F	(I)	04.08.72	2T6	30 km	Voiture	1,70 m	59 kg
Sandra G.	F		02.06.72	2T6	7 km	Bus	1,57 m	47 kg
Virginie B.	F		23.06.72	2T6	20 km	Bus+Train	1,74 m	80 kg
Laurent O.	G	(I)	27.02.72	2T6	75 km	Bus	1,75 m	63 kg
Christophe D.	G	(I)	31.05.72	2T6	79 km	Bus	1,75 m	65 kg
Laurent G.	G	(I)	01.11.70	2T6	75 km	Bus	1,76 m	67 kg
Eric M.	G	(I)	25.06.71	2T6	60 km	Bus	1,88 m	60 kg
Valérie M.	F	(I)	26.07.72	2T6	40 km	Train	1,72 m	55 kg
Fabrice G.	G		29.01.72	2T6	14 km	Train	1,86 m	85 kg
François P.	G		16.06.72	2T6	15 km	Train	1,76 m	57 kg
Bruno R.	G		06.09.71	2T6	30 km	Bus	1,81 m	66 kg
Eric D.	G		22.09.72	2T6	20 km	Bus	1,65 m	60 kg
Michel J.	G		18.09.71	2T6	22 km	Bus	1,71 m	69 kg
Frédéric M.	G	(I)	16.09.72	2T6	25 km	Train	1,62 m	53 kg
Laurence K.	F		25.01.71	2T6	13 km	Bus	1,68 m	65 kg
Cathy T.	F		12.11.71	2T6	10 km	Bus	1,68 m	83 kg
Philippe F.	G	(I)	23.01.72	2T6	35 km	Train	1,75 m	63 kg

ETUDE DES CARACTERES NON NUMERIQUES :

Un caractère non numérique nous permet de partager la population en un certain nombre de catégories d'individus. Par exemple :

a) Le caractère "sexe" permet de partager la population en les filles d'une part, les garçons d'autre part.

b) La cinquième colonne du tableau nous permet de classer les élèves en quatre catégories : les élèves de seconde T3, ceux de seconde T5, ceux de seconde T6, ceux de seconde T7 .

*Nous pouvons alors compter l'**effectif** de chacune de ces catégories d'individus :*

a) Il y a 14 filles . Il y a 111 garçons .

b) Il y a 33 élèves de seconde T3, 32 élèves de seconde T5, 33 élèves de seconde T6 et 27 élèves de seconde T7 .

FREQUENCE :

Il y a 14 filles . Y a-t-il beaucoup de filles dans cette population ? On ne peut donner de réponse que si on connaît l'effectif total. Il y a 14 filles sur 124 élèves ; la proportion de filles est donc assez faible.

On voit que l'effectif des filles ne prend sa véritable signification que si on le compare à l'effectif total. C'est pourquoi au lieu de dire qu'il y a 14 filles , nous dirons qu'il y a 11,2 % de filles (car $\frac{14}{125} = \frac{11,2}{100} = 11,2\ \%$*) .*
*Nous dirons aussi que la **fréquence** des filles est de 11,2 % . De même la fréquence des garçons est de 88,8 % (car* $\frac{88,8}{100} = \frac{111}{125}$ *) .*

Tu calculeras de la même façon les fréquences suivantes :

- *Fréquence des élèves de seconde T3 :* $\frac{33}{125} = \ldots\ \%$
- *Fréquence des élèves de seconde T5 :* $\frac{32}{125} = \ldots\ \%$
- *Fréquence des élèves de seconde T6 :* $\frac{33}{125} = \ldots\ \%$
- *Fréquence des élèves de seconde T7 :* $\frac{27}{125} = \ldots\ \%$

PRESENTATION GRAPHIQUE DES RESULTATS :

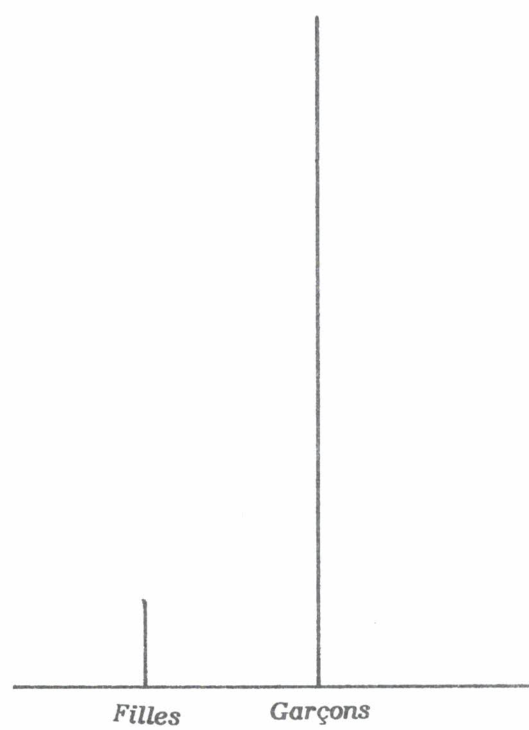
Très souvent, au lieu de donner les résultats sous forme numérique, on les présente au moyen d'un dessin. Il y a essentiellement deux sortes de dessins :

On peut dessiner un trait, un objet ,... dont la longueur est proportionnelle à l'effectif à représenter.

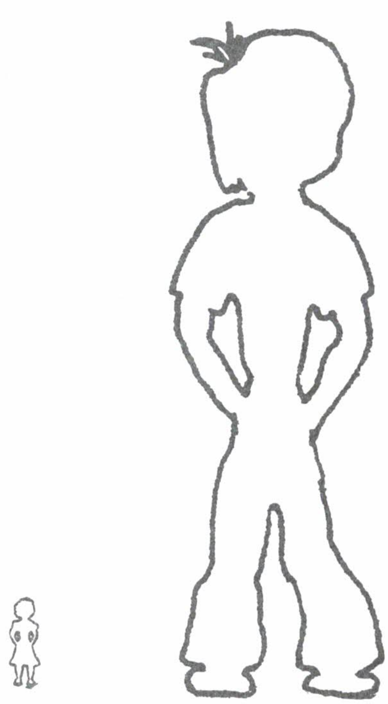
Exemples :

Nous avons dessiné un rectangle de longueur
100 mm = 10 cm .
Ces 100 mm ont été partagés en 11,2 mm + 88,8 mm parce qu'il y a 11,2 % de filles et 88,8 % de garçons.

Ici nous avons tracé côte à côte des segments dont les longueurs sont 11,2 mm et 88,8 mm . Un tel diagramme en bâtons sera plutôt utilisé lorsque les classes sont nombreuses (Exercice VI_{79} par exemple).

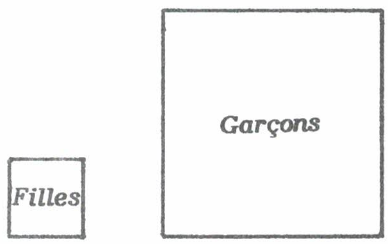


Mais on peut remplacer les traits par des silhouettes.



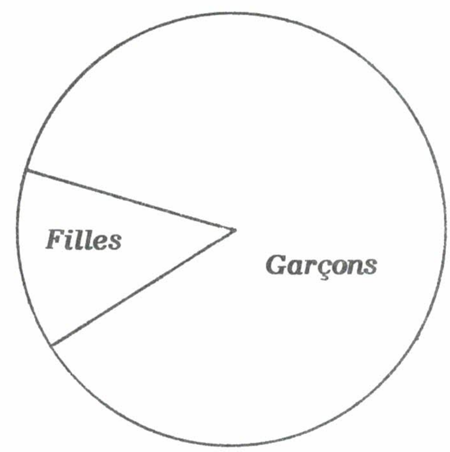
On peut dessiner une figure dont l'aire est proportionnelle à l'effectif à représenter.

<u>Par exemple</u> :



Le petit carré a une aire de $1{,}12\ cm^2$, le grand à une aire de $8{,}88\ cm^2$.

Ici les deux secteurs ont des aires proportionnelles à 11,2 et 88,8 . Le petit mesure 40,32° car 40,32 = 11,2 % de 360 . Le grand mesure 319,68° car 319,68 = 88,8 % de 360 .



☆ **Exercice VI$_{77}$:** *Etudie la population donnée suivant le caractère "être interne" ((I) dans la troisième colonne du tableau) ou "être externe" (rien dans la troisième colonne du tableau) .*

Donne les résultats sous forme d'un diagramme en secteurs.

☆ **Exercice VI$_{78}$:** *Etudie la population donnée suivant le caractère "mois de naissance" .*

Donne les résultats sous forme d'un diagramme en bâtons.

☆ **Exercice VI$_{79}$:** *Etudie la population suivant le caractère "moyen de transport utilisé" .*

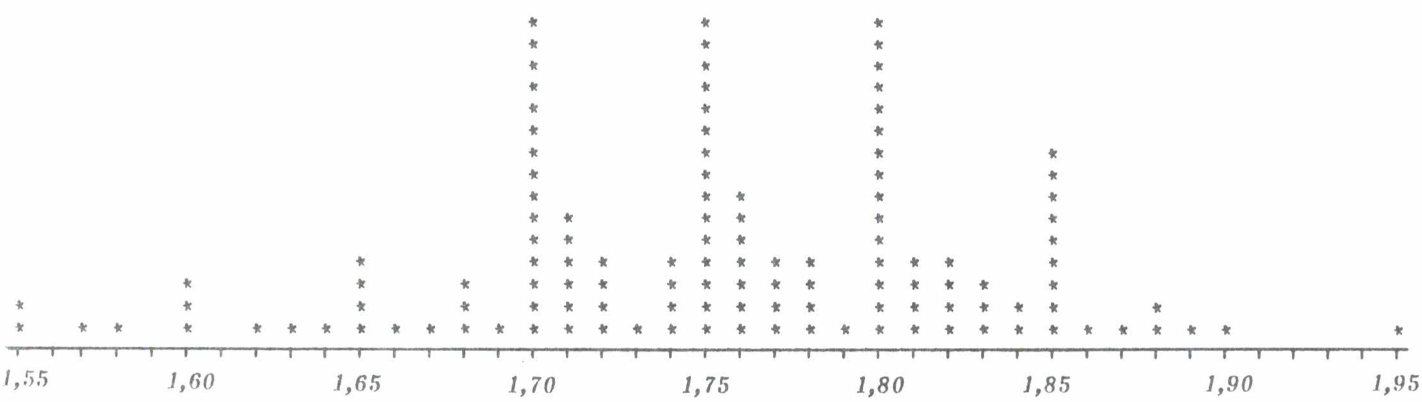
Donne le résultat sous forme d'un diagramme en secteurs.

ETUDE DES CARACTERES NUMERIQUES :

Etudions le caractère taille . Ceci signifie que nous nous intéressons uniquement à l'avant dernière colonne du tableau. En particulier nous oublions les noms et prénoms des individus. Nous avons ainsi une liste de 125 mesures en mètres , comprises entre 1,55 m et 1,95 m .

CLASSIFICATION DES DONNEES :

Nous allons d'abord compter le nombre d'individus correspondant à chaque taille entre 1,55 m et 1,95 m . Pour cela nous dessinons une règle (figure ci-dessous), et chaque fois que nous rencontrons une mesure, nous mettons une croix dans la colonne correspondante. Il ne reste plus qu'à compter le nombre de croix dans chaque colonne.



Remarquons que ce dessin contient exactement les mêmes renseignements sur la taille des élèves que l'avant dernière colonne du tableau initial : nous n'avons perdu aucune information ; nous avons seulement changé la présentation des données, pour les rendre plus lisibles. Dans la suite de l'étude du caractère taille, nous ne regarderons plus que ce tableau.

FREQUENCE ET FREQUENCE CUMULEE :

Nous pouvons alors entreprendre la même étude que pour un caractère non numérique.

Ainsi, il y a 15 élèves sur 125 qui mesurent 1,70 m . Nous dirons que l'effectif des élèves qui mesurent 1,70 m est de 15 ; nous dirons que la fréquence des élèves qui mesurent 1,70 m est de 12 % (car $\frac{15}{125} = \frac{12}{100}$*) .*

Nous pouvons faire des regroupements ; par exemple l'effectif des élèves dont la taille est au moins égale à 1,70 m et au plus égale à 1,75 m , est 45 . Donc la fréquence des élèves dont la taille est supérieure ou égale à 1,70 m et inférieure ou égale à 1,75 m , est 36 % (car $\frac{45}{125} = \frac{36}{100}$).

*En particulier pour une taille T donnée, nous pouvons regarder tous les individus dont la taille est au plus égale à T ; ceci nous donnera l'**effectif cumulé** (et la **fréquence cumulée**) des élèves dont la taille est au plus T . Par exemple l'effectif cumulé des élèves de taille au plus égale à 1,69 m est de 20 (ce qui signifie que 20 élèves ont une taille au plus égale à 1,69 m); la fréquence cumulée des élèves dont la taille est au plus 1,69 m est de 16 % (car $\frac{20}{125} = \frac{16}{100}$).*

Calcule de même la fréquence cumulée des élèves dont la taille est au plus 1,75 m (tu dois trouver 52 %) ; de ceux dont la taille est au plus 1,80 m ;...

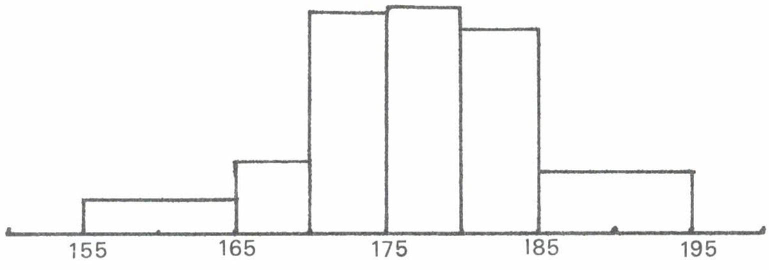
PRESENTATION GRAPHIQUE DES RESULTATS :

Le dessin avec des croix que nous avons obtenu en classifiant les données, peut être considéré comme une représentation graphique des données. Pour rendre ce graphique plus lisible (mais moins précis) nous pouvons faire des regroupements.

Par exemple :

1,55 m≤ ...< 1,65 m	:	10 élèves
1,65 m≤ ...< 1,70 m	:	10 élèves
1,70 m≤ ...< 1,75 m	:	30 élèves
1,75 m≤ ...< 1,80 m	:	31 élèves
1,80 m≤ ...< 1,85 m	:	28 élèves
1,85 m≤ ...< 1,95 m	:	16 élèves

Sur le dessin ci-contre chaque groupe a été représenté par un rectangle. L'aire de ce rectangle est proportionnelle à l'effectif du groupe :

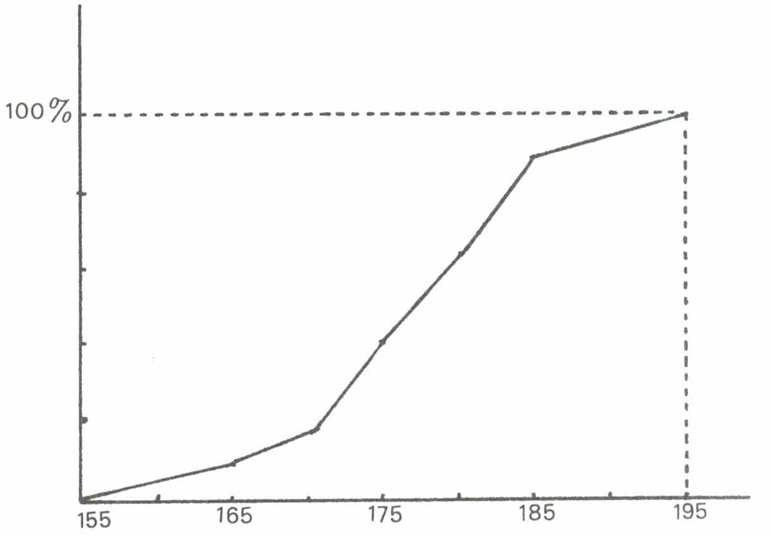


Le rectangle correspondant à 155 - 165 est d'aire 10 × 0,1 cm² = 1 cm² . Celui qui correspond à 170 - 175 est d'aire 30 × 0,1 cm² = 3 cm² . Etc.

Un tel diagramme s'appelle un histogramme.

Mais nous pouvons aussi représenter graphiquement les fréquences cumulées.

10 d'au plus 1,65 m ; soit	*8 %*
20 d'au plus 1,70 m ; soit	*16 %*
50 d'au plus 1,75 m ; soit	*40 %*
81 d'au plus 1,80 m ; soit	*64,8 %*
109 d'au plus 1,85 m ; soit	*87,2 %*
125 d'au plus 1,95 m ; soit	*100 %*



MOYENNE :

Pour faire la ***moyenne*** *des tailles, tu fais la somme des 125 tailles qui te sont données, puis tu divises par 125 . Tu trouveras 1,753 ... m . Certaines calculettes scientifiques permettent de calculer automatiquement cette moyenne. Est-ce le cas de la tienne ? Si oui, il te suffit de la mettre en "position statistique" , puis de taper les 125 nombres considérés, elle calculera la moyenne toute seule.*

La moyenne est la notion statistique la plus utilisée ; tu l'as déjà rencontrée en géographie. Elle ne donne qu'une vue très partielle du caractère étudié. Supposons par exemple :

- *Une première population de 10 personnes , mesurant toutes 1,70 m . La moyenne des tailles est évidemment 1,70 m .*
- *Une seconde population de 10 personnes , dont 4 géants de 2,10 m , 2 nains de 1,00 m et 4 (de taille moyenne) de 1,65 m . La taille moyenne est encore 1,70 m .*

Il est clair que les deux populations ne se ressemblent pas ; en donnant uniquement la moyenne on oublie une grande partie des informations que l'on connaissait.

PARTAGE D'UNE POPULATION SUIVANT UN CARACTERE NUMERIQUE :

Un caractère numérique permet de ranger la population considérée dans un certain ordre. Ainsi nous pouvons classer les 125 élèves par ordre de taille croissante ; ou encore par ordre d'âge croissant.

Il est souvent utile de partager la population en un certain nombre de groupes. Ainsi pour faire un histogramme nous avons fait 6 groupes correspondant à :

(1,55 - 1,64) (1,65 - 1,69) (1,70 - 1,74) (1,75 - 1,79) (1,80 - 1,84) (1,85 - 1,95)

Ce partage est assez arbitraire. Comment a-t-il été fait ? On a commencé par faire des tranches de 5 cm :

(1,55 - 1,59) (1,60 - 1,64) (1,65 - 1,69) ... (1,90 - 1,94) (1,95 - 1,99).

Mais ceci nous donne des groupes dont les effectifs sont beaucoup trop inégaux (31 pour 1,75 - 1,80 et 1 pour 1,90 - 1,94). C'est pourquoi nous avons regroupé les deux groupes correspondant aux plus petits, et aussi les trois groupes correspondant aux plus grands.

On aurait pu faire le partage de façon à obtenir des groupes de même effectif. Par exemple :

On peut faire deux groupes, l'un de 62 élèves mesurant au plus 1,75 m, l'autre de 63 élèves mesurant au moins 1,75 m.

Vocabulaire : On dira que 1,75 m est la taille ***médiane****. De façon générale la valeur médiane d'un caractère numérique, est la valeur telle que la moitié de l'effectif total soit en dessous de cette valeur, l'autre moitié au dessus. Dans l'exemple que nous venons d'étudier, la médiane et la moyenne sont assez voisines ; il n'en est pas toujours ainsi.*

On peut faire quatre groupes de même effectif : le premier comptera 31 élèves mesurant au plus 1,70 m ; le second comptera 31 élèves dont la taille est au moins 1,70 m et au plus 1,75 m ; le troisième sera formé de 31 élèves mesurant au moins 1,75 m et au plus 1,80 m ; le quatrième groupe sera formé de 32 élèves mesurant au moins 1,80 m.

Vocabulaire : Les quatre groupes que nous avons ainsi formés sont appelés les quatre ***quartiles*** *(de la population donnée) selon le caractère taille.*

☆ **Exercice VI$_{80}$** : *Détermine la moyenne des tailles des élèves de chacun de ces quatre quartiles.*

☆ **Exercice VI$_{81}$** : *Fais de même un partage en dix groupes (de 12 ou de 13 élèves). Les dix groupes ainsi obtenus sont appelés des déciles.*

☆ **Exercice VI$_{82}$** : *Etudie le caractère "poids".*

a) *Compte le nombre d'individus correspondant à chaque poids.*

b) *Quel est le poids moyen ?*

c) *Fais un histogramme des poids (en partageant la population en six classes d'importance comparable).*

d) *En prenant le même partage qu'en c), dessine le graphique des fréquences cumulées.*

☆ **Exercice VI$_{83}$** : *Détermine l'âge de chacun des élèves au 1er mai 1988. Pour simplifier, ne tiens compte que de l'année et du mois de naissance (ainsi le premier de la liste, Christople L, aura 16 ans et 1 mois ; le second, Stéphane S, aura 15 ans et 4 mois ...).*

a) *Détermine le nombre d'individus correspondant à chaque âge (en années et mois).*

b) *Quel est l'âge moyen ?*

c) *Fais un histogramme des âges (en découpant la population en dix groupes d'importance comparable).*

d) *En prenant le même découpage qu'en c), dessine le graphique des fréquences cumulées.*

☆ **Exercice VI$_{84}$** : *Etudie le caractère "distance domicile-lycée".*

Quelle est la distance moyenne ?

Fais un histogramme et un graphique des fréquences cumulées.

ETUDE SIMULTANEE DE DEUX CARACTERES :

Est-ce que les plus grands sont plus lourds ? Est-ce que les plus petits sont les plus légers ? Autrement dit, est-ce que le poids est une fonction croissante de la taille ? La réponse est évidemment non ; il est facile de trouver deux individus A et B tels que A soit plus grand, mais moins lourd, que B .

Pourtant :

- *Il y a 14 individus mesurant au plus 1,65 m ; et leur poids moyen est 52,35 kg .*
- *Il y a 21 individus dont la taille est supérieure à 1,65 m et au plus égale à 1,70 m ; leur poids moyen est 61,66 kg .*
- *Il y a 30 individus dont la taille est supérieure à 1,70 m et au plus égale à 1,75 m ; leur poids moyen est 64,83 kg .*
- *Il y a 31 individus dont la taille est supérieure à 1,75 m et au plus égale à 1,80 m ; leur poids moyen est 67,13 kg .*
- *Il y a 29 individus mesurant plus de 1,80 m ; leur poids moyen est 71,03 kg .*

*Ainsi nous avons partagé l'effectif en cinq classes suivant la taille ; les poids moyens de ces cinq classes vont en croissant ; nous affirmerons donc "**en moyenne** les plus grands sont les plus lourds" .*

☆ **Exercice VI_{85} :** *Essaye de répondre à la question suivante : les filles sont-elles plus petites que les garçons ?*

☆☆ **Exercice VI_{86} :** *Essaye de répondre à la question suivante : "les plus vieux sont-ils les plus grands" ?*

☆☆ **Exercice VI_{87} :** *Essaye de répondre à la question suivante : "les internes sont-ils ceux qui habitent le plus loin du lycée" ?*

Troisième série d'exercices :

STATISTIQUES

☆ ***Exercice VI$_{88}$:*** *Etude statistique des lettres d'un texte.*

Voici un texte de Jean de la Fontaine :

Le Loup
et le Chien

Un Loup n'avait que les os et la peau ;
Tant les Chiens faisaient bonne garde.
Ce Loup rencontre un Dogue aussi puissant que beau,
Gras, poli, qui s'était fourvoyé par mégarde.
L'attaquer, le mettre en quartiers,
Sire Loup l'eût fait volontiers.
Mais il fallait livrer bataille,
Et le Mâtin était de taille
A se défendre hardiment.
Le Loup donc l'aborde humblement,
Entre en propos, et lui fait compliment
Sur son embonpoint, qu'il admire.
Il ne tiendra qu'à vous, beau Sire,
D'être aussi gras que moi, lui repartit le Chien.
Quittez les bois, vous ferez bien :
Vos pareils y sont misérables,
Cancres, haires, et pauvres diables,
Dont la condition est de mourir de faim.
Car quoi ? Rien d'assuré : point de franche lippée :
Tout à la pointe de l'épée.
Suivez-moi : vous aurez un bien meilleur destin.
Le Loup reprit : Que me faudra-t-il faire ?
Presque rien, dit le Chien, donner la chasse aux gens
Portants bâtons, et mendiants ;
Flatter ceux du logis, à son Maître complaire ;
Moyennant quoi votre salaire
Sera force reliefs de toutes les façons :
Os de poulets, os de pigeons :
Sans parler de mainte caresse.
Le Loup déjà se forge une félicité
Qui le fait pleurer de tendresse.
Chemin faisant, il vit le col du Chien pelé.
Qu'est-ce là ? lui dit-il. — Rien. — Quoi ? rien ? — Peu de chose.
— Mais encor ? — Le collier dont je suis attaché
De ce que vous voyez est peut-être la cause.
— Attaché ? dit le Loup : vous ne courez donc pas
Où vous voulez ? — Pas toujours, mais qu'importe ?
— Il importe si bien, que de tous vos repas
Je ne veux en aucune sorte,
Et ne voudrais pas même à ce prix un trésor.
Cela dit, maître Loup s'enfuit, et court encor.

Nous nous intéressons à la population des mots de ce texte. Quel est l'effectif ?

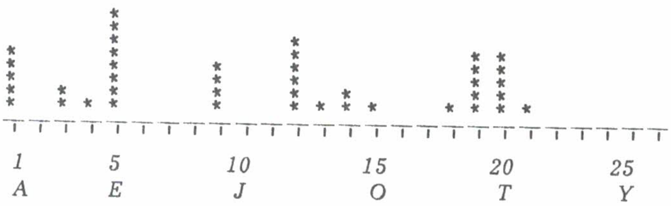
a) *On s'intéresse au caractère "longueur des mots" . Quelle est la fréquence des mots de une lettre ? des mots de deux lettres ? des mots de trois lettres ? etc. Quelle est la fréquence cumulée des mots d'au plus quatre lettres ?*

b) *Dessine le graphique des fréquences cumulées (du caractère "longueur des mots") .*

c) *Quelle est la longueur moyenne des mots de ce texte ?*

d) *Choisis un texte en anglais (ou dans une autre langue) . Recommence l'étude précédente sur ce nouveau texte. Vois-tu apparaître des différences entre les deux résultats ?*

☆ **Exercice VI$_{89}$:** *Anatole a fait une étude statistique sur la population des lettres de la phrase suivante : "Anatole est le meilleur statisticien de la classe" . A chaque lettre de l'alphabet il a donné un numéro : 1 pour A , 2 pour B , 3 pour C ,... Puis il a compté :*



Il a fait la moyenne des numéros et a trouvé 10,78 . Et il se demande si la "lettre moyenne" de cette phrase est un J ou un K ? Qu'en penses-tu ?

☆ **Exercice VI$_{90}$:** *Etude statistique des mots d'un texte.*

Voici un texte de Jean de la Fontaine :

Le Coq
et la Perle

Un jour un Coq détourna
Une Perle qu'il donna
Au beau premier Lapidaire.
Je la crois fine, dit-il.
Mais le moindre grain de mil
Serait bien mieux mon affaire.

Un ignorant hérita
D'un manuscrit qu'il porta
Chez son voisin le Libraire.
Je crois, dit-il, qu'il est bon ;
Mais le moindre ducaton
Serait bien mieux mon affaire.

Nous nous intéressons à la population des lettres de ce texte. Quel est l'effectif ?

a) *Quelle est la fréquence des voyelles ? celle des consonnes ?*

b) *Quelle est la fréquence des "a" ? celle des "m" ?*

c) *On s'intéresse maintenant à la population des consonnes. Quelle est la fréquence des consonnes suivies d'une voyelle ? de celles qui sont suivies d'au moins une consonne ? d'au moins deux consonnes ? d'au moins trois consonnes ?*

☆ **Exercice VI$_{91}$:** Dans une entreprise où travaillent 87 salariés :

27	salariés gagnent	3742 F	par mois
42	salariés gagnent	5761 F	par mois
16	salariés gagnent	8371 F	par mois
2	salariés gagnent	27123 F	par mois

Quel est le salaire moyen ? Quel est le salaire médian ?

☆ **Exercice VI$_{92}$:** Pour chacun des jours du mois de décembre, recherche l'heure du lever du soleil, l'heure du coucher du soleil, et la durée totale du jour (Utilise, par exemple, le calendrier du facteur) . Calcule alors la durée moyenne du jour, puis la durée médiane.

☆☆ **Exercice VI$_{93}$:** Considérons une classe de 30 élèves. Au dernier devoir de physique, 7 élèves ont eu la note 0 ; 3 la note 2 ; 5 la note 6 ; 8 la note 9 ; 5 la note 12 et 2 la note 18 . Quelle est la note moyenne ? Quelle est la note médiane ? Quelle est la fréquence des notes comprises entre 5 et 10 ?

☆ **Exercice VI$_{94}$* :**

Voici un tableau donnant les productions d'aluminium de cinq grands producteurs mondiaux.

1) Traduis ces données en pourcentage de la production totale de ces 5 producteurs .

2) Puis représente graphiquement sur un diagramme en secteurs.

ALUMINIUM
(en milliers de tonnes métriques)

Principaux pays	Production métal
Etats-Unis	3 037
URSS	2 350
Canada	1 355
Australie	875
RFA	764
Monde	15 058

* Les tableaux et graphiques utilisés dans cet exercice et dans les suivants sont extraits du "Bilan Economique et Social 1987" du journal "Le Monde" .

☆ ***Exercice VI$_{95}$:***

Voici un tableau donnant (en millions de francs) les recettes et les dépenses de la Sécurité Sociale en 1987.

LE RÉGIME GÉNÉRAL EN 1987
(en millions de francs)

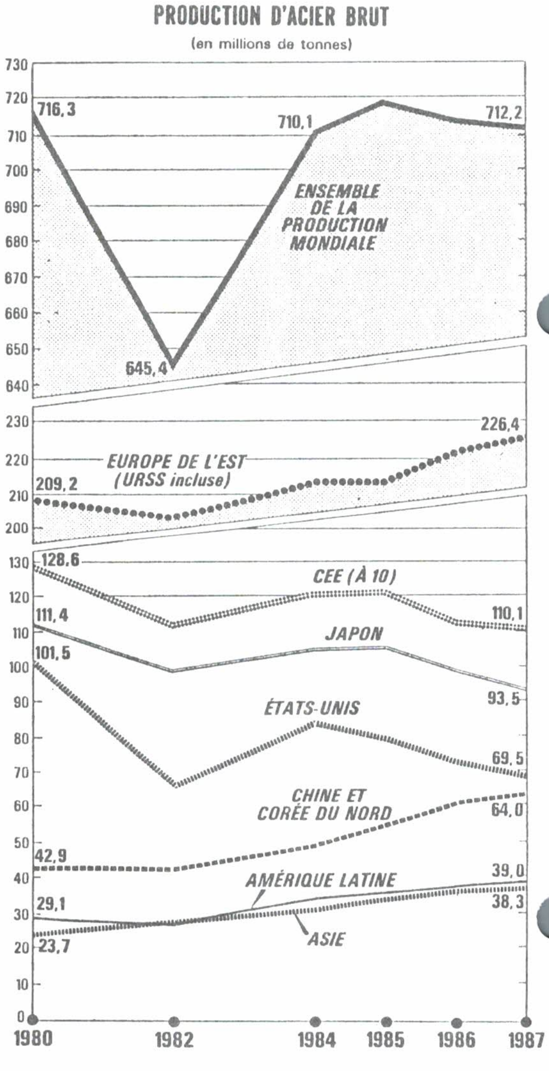
	Maladie	Accidents du travail	Famille	Vieillesse	Total
Recettes	335 177	40 662	164 255	196 202	736 296
Dépenses	332 292	38 116	164 080	205 947	740 435
Soldes	2 885	2 546	175	− 9 745	− 4 139

1) *Exprime les dépenses de chacune des quatre catégories en pourcentage des dépenses globales.*
2) *Représente ces dépenses sous forme d'un diagramme en secteurs.*
3) *En t'inspirant du diagramme de l'exercice VI$_{99}$, dessine un graphique qui donne, pour chacune des quatre catégories, les dépenses et les recettes.*

☆ ***Exercice VI$_{96}$:*** *Lu dans un journal : Le salaire médian était en 1986 de 8164 F par mois. Que signifie cette phrase ?*

☆☆ ***Exercice VI$_{97}$:*** *Voici un diagramme donnant la production d'acier dans sept pays (ou groupes de pays) pour les années 1980 à 1987.*

1) *Quels sont, en pourcentage de la production totale, les parts de ces sept pays en 1980 ? en 1987 ?*
2) *Représente sur un diagramme en secteurs, les données relatives à 1987.*
3) *Pourquoi y a-t-il deux cassures dans le diagramme ? Essaye de reconstituer le diagramme tel qu'il serait sans les cassures.*
4) *Quel est le pays où l'augmentation de la production a été la plus forte entre 1980 et 1987 ?*
5) *Quel est le pays où le pourcentage d'augmentation de la production a été le plus fort entre 1980 et 1987 ?*

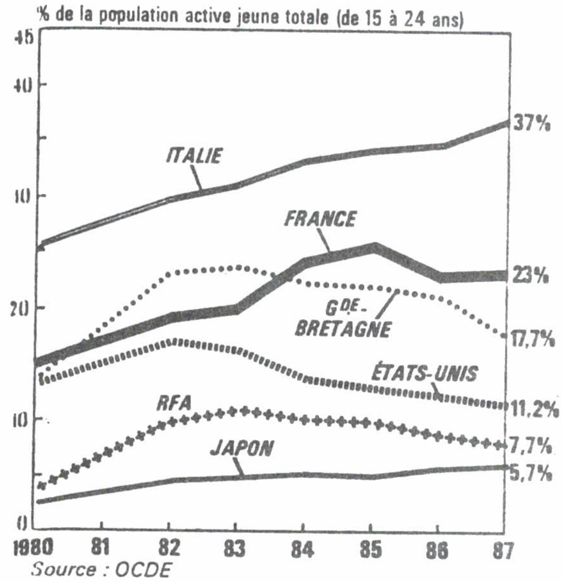


☆ **Exercice VI_{98} :**

Voici un graphique donnant pour six pays, le taux de chômage des jeunes (15 à 24 ans).

1) *Quels sont les pays où ce taux a constamment augmenté entre 1980 et 1987 ?*

2) *Quel est le pays où l'augmentation a été la plus forte entre 1980 et 1987 ?*



Source : OCDE

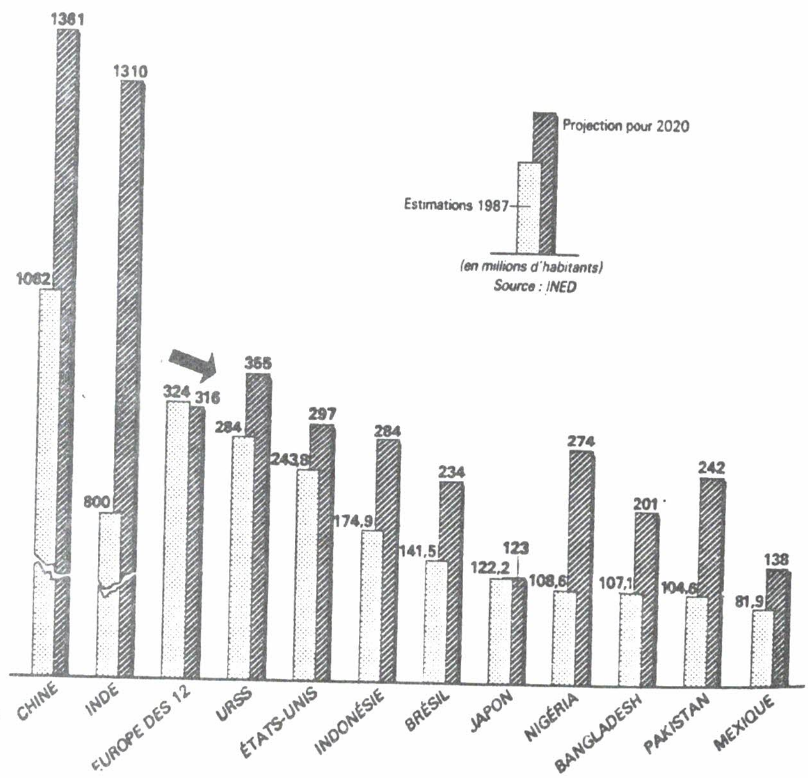
☆ **Exercice VI_{99} :**

Voici un graphique donnant la population en 1987, et les prévisions de population en 2020.

1) *Pourquoi y a-t-il des cassures dans les dessins relatifs à l'Inde et à la Chine ?*

2) *Quel est le pays où l'augmentation (prévue) d'ici à 2020 est la plus forte ?*

3) *Quel est le pays où le pourcentage d'augmentation (prévu) d'ici à 2020 est le plus fort ?*



☆ Exercice VI_{100} :

Voici un tableau donnant le pourcentage de la population active employée dans l'agriculture (en France).

Représente graphiquement ces données.

POPULATION ACTIVE AGRICOLE

Année	% de la population active
1801	75 %
1866	48 %
1911	45 %
1913	37 %
1928	32 %
1946	28 %
1980	8,8 %
1985	7,6 %

Source : INSEE.

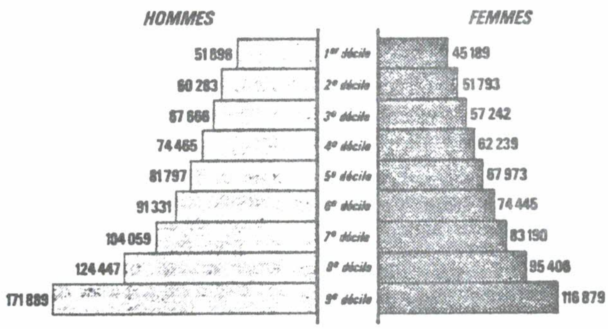
☆☆ Exercice VI_{101} :

Voici un article de journal.

1) *Quel est le pourcentage des femmes gagnant moins de 62 239 F par an ? (Pour répondre, essaye de comprendre le deuxième paragraphe du texte).*

2) *Quelle comparaison peut-on faire entre les salaires des hommes et des femmes ?*

LA PYRAMIDE DES SALAIRES



La pyramide présente la distribution des salaires annuels nets en 1986 actualisée en fonction des prévisions pour 1987 (coefficient d'actualisation : 2,4 %) par déciles. Il s'agit de salaires annuels offerts aux salariés à temps complet des secteurs privé et semi-public, à l'exclusion de l'agriculture et des personnels domestiques.

Par définition, selon l'INSEE, entre deux déciles successifs, on dénombre 10 % de la population observée et mesurée en années-travail. Ainsi décile 3 désigne le salaire tel que 30 % des emplois sont rétribués au-dessous de ce niveau. On peut dire aussi que 90 % des salariés gagnent moins que décile 9 ; 50 % moins que décile 5 ; 10 % moins que décile 1 ; ou, en sens inverse, 10 % gagnent plus que décile 9 ; 50 % plus que décile 5 et 90 % plus que décile 1.

Cette pyramide fournit donc une répartition des emplois selon le niveau de la rémunération. Ainsi, le salaire annuel médian offert est, en 1987, dans le secteur privé et semi-public d'environ 81 797 F pour les hommes et de 67 973 F pour les femmes.

Un salarié sur deux a donc reçu plus de 6 816 F par mois, une salariée sur deux a reçu plus de 5 664 F. Dans les deux cas, 50 % ont reçu moins. Mensuellement, les salaires distribués à 90 % des salariés oscillent pour les hommes entre 4 325 F et 14 324 F, pour les femmes entre 3 766 F et 9 740 F.

Série 4 : MOYENNES PONDEREES ET BARYCENTRES

I. LES MOYENNES PONDEREES

Supposons un lycée où il y a trois classes de seconde, notées A , B , C . On veut calculer la moyenne des notes de Français des élèves de ces trois classes. On dispose de la moyenne de la classe A ; c'est 11,2 . La moyenne de la classe B est 10,8 ; celle de la classe C est 12,2 .

Peut-on calculer la moyenne générale par la formule ci-dessous ?

$$\frac{1}{3}\,(11{,}2 + 10{,}8 + 12{,}2) = 11{,}4$$

Ce calcul simple a le défaut de ne pas tenir compte des effectifs des trois classes.

Supposons que chaque classe compte 32 élèves. Alors le total des notes de la classe A , est 11,2 × 32 ; de même celles de B et C seront 10,8 × 32 et 12,2 × 32 . La somme totale des 96 (= 3 × 32) notes est donc :

$$11{,}2 \times 32 + 10{,}8 \times 32 + 12{,}2 \times 32 \quad .$$

Et la moyenne générale :

$$\frac{1}{3 \times 32}\,(11{,}2 \times 32 + 10{,}8 \times 32 + 12{,}2 \times 32)$$
$$= \frac{1}{3}\,(11{,}2 + 10{,}8 + 12{,}2)$$

Notre calcul simplifié était donc correct.

Mais supposons que les effectifs soient respectivement de 28 élèves, 28 élèves et 40 élèves. Alors la somme des notes de A est 11,2 × 28 ; celles de B et de C sont 10,8 × 28 et 12,2 × 40 . Donc la somme des notes des 96 (= 28 + 28 +40) élèves, est :

$$11{,}2 \times 28 + 10{,}8 \times 28 + 12{,}2 \times 40 = 1104 \quad .$$

Et la moyenne est :

$$\frac{1104}{96} = 11{,}5 \quad .$$

Ainsi, dès que les effectifs des trois classes sont inégaux, notre calcul rapide se révèle inexact. Il le sera d'autant plus que les effectifs sont plus inégaux (recommence le calcul en supposant qu'ils sont de 35 , 21 et 40 élèves) .

Pour calculer la moyenne nous sommes donc obligés de **pondérer** *les trois moyennes partielles* **par les effectifs** *de chacune des classes.*

De façon générale : Etant donné k nombres $n_1, \ldots, n_k$ affectés de coefficients (positifs) $a_1, \ldots, a_k$, nous appellerons moyenne de ces k nombres pondérée par les coefficients (on dit aussi les poids) $a_1, \ldots, a_k$, le nombre :

$$n = \frac{a_1 n_1 + \ldots + a_k n_k}{a_1 + \ldots + a_k} \; .$$

Un exemple : la pondération des notes d'examens

Dans les examens la note finale est une moyenne pondérée des notes des différentes matières. Tu trouveras page ci-contre les coefficients appliqués dans quelques séries du baccalauréat.

Supposons un candidat qui a obtenu les notes suivantes :

Français : Ecrit : 8/20	;	*Oral 10/20*
Philosophie : 8/20	;	*Mathématiques : 12/20*
Physique : 12/20	;	*Histoire-Géographie : 9/20*
Sciences Naturelles : 8/20	;	*Anglais : 8/20*

Si c'est un candidat de la série C , sa moyenne générale sera :

$$m = \frac{8 \times 2 + 10 \times 1 + 8 \times 2 + 12 \times 5 + 12 \times 5 + 9 \times 2 + 8 \times 2 + 8 \times 3}{2 + 1 + 2 + 5 + 5 + 2 + 2 + 3}$$

soit $m = 10$.

Si c'est un élève de la série D , sa moyenne générale sera :

$$m' = \frac{8 \times 2 + 10 \times 1 + 8 \times 2 + 12 \times 4 + 12 \times 4 + 9 \times 2 + 8 \times 4 + 8 \times 3}{2 + 1 + 2 + 4 + 4 + 2 + 4 + 3}$$

soit $m' = 9{,}63 \ldots$

Ainsi la moyenne générale, qui détermine le sort du candidat, ne dépend pas que des notes obtenues ; il dépend aussi du "poids" que l'on accorde à chacune de ces notes. Les notes affectées d'un gros poids, jouent un rôle prépondérant.

LA PONDERATION DES NOTES DANS QUELQUES SERIES DU BACCALAUREAT

A2

Durée	ANTICIPÉES	Coeff.
4 h	Français écrit	3
	Français oral (a)	1
	ÉCRITES	
4 h	Philosophie	5
3 h 30	Histoire - Géographie	3
3 h	Langue vivante étrangère 1	4
3 h	Langue vivante 2 ou (b) langue vivante 3 ou (b) langue ancienne	3
	ORALES	
	Langue vivante étrangère 1 ou (b) langue vivante 2 ou (b) langue vivante 3 ou (b) langue ancienne	3
	Mathématiques	2

Épreuve obligatoire d'éducation physique et sportive

B

Durée	ANTICIPÉES	Coeff.
4 h	Français écrit (a)	2
	Français oral	1
	ÉCRITES	
4 h	Philosophie	3
3 h 30	Histoire - Géographie	3
4 h	Sciences économiques et sociales	4
3 h	Mathématiques	3
3 h	Langue vivante étrangère 1	3
	ORALE	
	Langue vivante 2 ou (b) langue ancienne	3

Épreuve obligatoire d'éducation physique et sportive

C

Durée	ANTICIPÉES	Coeff.
4 h	Français écrit	2
	Français oral	1
	ÉCRITES	
4 h	Philosophie	2
4 h	Mathématiques	5
3 h	Sciences physiques	5
3 h 30	Histoire - Géographie	2
3 h	Sciences naturelles	2
	ORALE	
	Langue vivante étrangère 1	3

Épreuve obligatoire d'éducation physique et sportive

D

Durée	ANTICIPÉES	Coeff.
4 h	Français écrit	2
	Français oral	1
	ÉCRITES	
4 h	Philosophie	2
3 h 30	Histoire - Géographie	2
4 h	Mathématiques	4
3 h	Sciences physiques	4
3 h	Sciences naturelles	4
	ORALE	
	Langue vivante étrangère 1	3

Épreuve obligatoire d'éducation physique et sportive

E

Durée	ANTICIPÉES	Coeff.
4 h	Français écrit	2
	Français oral	1
	ÉCRITES	
4 h	Philosophie	2
4 h	Mathématiques	5
3 h	Sciences physiques	4
4 h	Construction mécanique	4
	ORALES	
4 h	Technique pratique	3
	Langue vivante étrangère 1	3

Épreuve obligatoire d'éducation physique et sportive

F3

ÉPREUVES D'ENSEIGNEMENT GÉNÉRAL

Durée	ANTICIPÉES	Coeff.
4 h	Français écrit	2
20 mn	Français oral	1
	ÉCRITES	
4 h	Mathématiques	5
3 h	Philosophie	1
	ORALE	
20 mn	Langue vivante étrangère	2

Éducation physique et sportive

ÉPREUVES A CARACTÈRE PROFESSIONNEL

Durée		Coeff.
3 h	Sciences physiques	3
4 h	Étude des constructions	3
3 h	Étude d'équipement	3
	MISE EN ŒUVRE	
2 h 30	Réalisation et contrôle	5

F2

ÉPREUVES D'ENSEIGNEMENT GÉNÉRAL

Durée	ANTICIPÉES	Coeff.
4 h	Français écrit	2
20 mn	Français oral	1
	ÉCRITES	
4 h	Mathématiques	5
3 h	Philosophie	1
	ORALE	
20 mn	Langue vivante étrangère	2

Éducation physique et sportive

ÉPREUVES A CARACTÈRE PROFESSIONNEL

Durée	ÉCRITES	Coeff.
4 h	Sciences physiques	5
6 h	Étude d'un système technique	6
	ORALE SUR DOSSIER	
30 mn	Construction électronique	5

Une remarque pour des calculs plus rapides

Soit à faire la moyenne pondérée de 101 (coef. 2) , 104 (coef. 2) , 107 (coef.5) et 106 (coef. 1) . On va calculer :

$$m = \frac{101 \times 2 + 104 \times 2 + 107 \times 5 + 106 \times 1}{2 + 2 + 5 + 1}$$

Ce n'est pas très facile, mais le numérateur de cette fraction s'écrit :

$$(100+1) \times 2 + (100+4) \times 2 + (100+7) \times 5 + (100+6) \times 1 .$$

C'est-à-dire :

$$100 \times (2+2+5+1) + 1 \times 2 + 4 \times 2 + 7 \times 5 + 6 \times 1 .$$

On a donc :

$$m = \frac{100 \times (2+2+5+1) + 1 \times 2 + 4 \times 2 + 7 \times 5 + 6 \times 1}{2 + 2 + 5 + 1}$$

$$m = 100 + \frac{1 \times 2 + 4 \times 2 + 7 \times 5 + 6 \times 1}{2 + 2 + 5 + 1}$$

Donc m est la somme de 100 , et de la moyenne pondérée de 1 (coef. 2) , 4(coef.2) , 7 (coef. 5) et 6 (coef. 1) . Au lieu de faire la moyenne de ces quatre nombres, assez grands, mais tous voisins de 100 ; nous ferons donc la moyenne des différences entre ces nombres et 100 (ce qui est plus facile, car ces différences sont des nombres simples et petits) .

De même, pour faire la moyenne de 1010 (coef. 2) , 1017 (coef. 2) et 1043 (coef. 1) , tu feras la moyenne de 10 (coef. 2) , 17 (coef. 2) et 43 (coef. 1) ; puis tu ajouteras 1000.

II. MOYENNE PONDEREE D'UNE FAMILLE DE POINTS DU PLAN

Supposons donné un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$ du plan. Supposons donnés des points $A(x_A , y_A)$, $B(x_B , y_B)$ et $C(x_C , y_C)$, et des coefficients a , b , c .

Les moyennes pondérées :

$$x_M = \frac{1}{a+b+c}\,(ax_A + bx_B + cx_C)$$

$$y_M = \frac{1}{a+b+c}\,(ay_A + by_B + cy_C)$$

sont les coordonnées d'un point M. Ce point M est appelé le **point moyen**, *ou le* **barycentre**, *de A affecté du poids a, B affecté du poids b et C affecté du poids c.*

Remarquons que les formules qui donnent x_M et y_M ont un sens lorsque les coefficients a, b, c sont de signes quelconques (c'est-à-dire ne sont pas tous positifs). Mais il faut toutefois que $a + b + c$ soit non nul (pour qu'on puisse diviser par $a + b + c$). Donc le barycentre existe même si les poids ne sont pas positifs, pourvu que la somme de ces poids soit non nulle. Dans les problèmes pratiques, il est rare que l'on rencontre des coefficients non positifs ; mais en géométrie on utilise très souvent les barycentres à coefficients négatifs.

PROPRIETES GEOMETRIQUES DU BARYCENTRE

Les relations :

$$\begin{cases} (a+b+c)\,x_M = ax_A + bx_B + cy_C \\ (a+b+c)\,y_M = ay_A + by_B = cy_C \end{cases}$$

s'écrivent aussi :

$$(a+b+c)\,\overrightarrow{OM} = a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC} \quad .$$

Quel que soit le point P du plan, nous pouvons écrire cette relation :

$$(a+b+c)(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM}) = a(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PA}) + b(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PB}) + c(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PC})$$

$$(a+b+c)\,\overrightarrow{OP} + (a+b+c)\,\overrightarrow{PM} = (a+b+c)\,\overrightarrow{OP} + a\overrightarrow{PA} + b\overrightarrow{PB} + c\overrightarrow{PC} \quad .$$

Ainsi pour tout point P, nous avons :

$$(a+b+c)\,\overrightarrow{PM} = a\overrightarrow{PA} + b\overrightarrow{PB} + c\overrightarrow{PC} \quad .$$

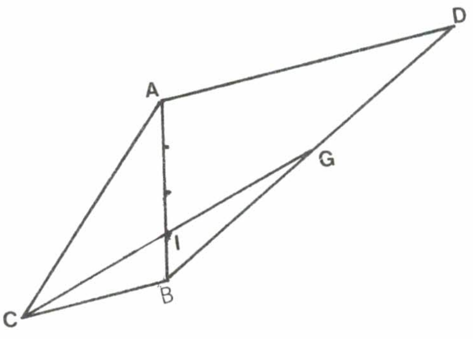
Et en particulier (en choisissant pour P le point M lui-même) :

$$0 = a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} \quad .$$

DETERMINATION GEOMETRIQUE DU BARYCENTRE

Soit trois points A , B , C . Nous voulons dessiner le barycentre de $(A;1)$, $(B;3)$ et $(C;-2)$.

Nous pouvons d'abord choisir une origine O , et tracer le vecteur $\overrightarrow{OA} + 3\,\overrightarrow{OB} - 2\,\overrightarrow{OC}$. Il est souvent astucieux de choisir pour origine l'un des points donnés. Ici nous choisirons O en B . Sur la figure :



$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + 3\,\overrightarrow{BB} - 2\,\overrightarrow{BC}$$

Et le barycentre est défini par :

$$\overrightarrow{BG} = \frac{1}{1+3-2}\,\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{BD} .$$

Mais nous pouvons aussi chercher d'abord le barycentre I de $(A;1)$ et $(B;3)$. Il est tel que :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{1+3}\,(\overrightarrow{AA} + 3\,\overrightarrow{AB}) = \frac{3}{4}\,\overrightarrow{AB}$$

Et ensuite nous aurons :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{1+3-2}\,(\overrightarrow{AA} + 3\,\overrightarrow{AB} - 2\,\overrightarrow{AC}) = \frac{1}{4-2}\,(4\,\overrightarrow{AI} - 2\,\overrightarrow{AC})$$

Donc G est le barycentre de $(I;4)$ et $(C;2)$; et ainsi :

$$\overrightarrow{CG} = \frac{1}{4-2}\,(4\,\overrightarrow{CI} - 2\,\overrightarrow{CC})$$

$$\overrightarrow{CG} = 2\,\overrightarrow{CI}$$

CONVEXITE

Supposons que toutes tes notes soient supérieures à 8, alors ta moyenne est supérieure à 8 ; et ceci quels que soient les coefficients (positifs) dont on les munit. De même si toutes tes notes sont inférieures à 13, ta moyenne est inférieure à 13.

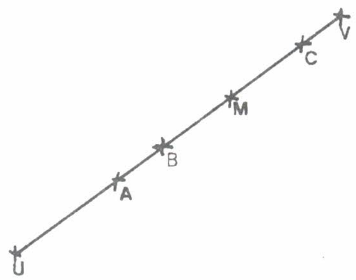
De façon générale, la moyenne pondérée (à coefficients positifs) d'une famille de nombres compris entre a et b, est un nombre compris entre a et b.

Considérons maintenant, dans le plan, des points A, B, C du segment UV, et des coefficients positifs a, b, c. Alors le barycentre M de (A,a), (B,b) et (C,c) est sur le segment UV.

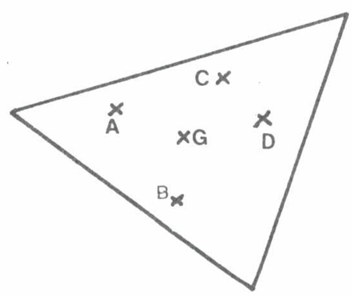
Nous pouvons le démontrer. Nous savons que ;

$$\overrightarrow{UM} = \frac{1}{a+b+c}\,(a\overrightarrow{UA} + b\overrightarrow{UB} + c\overrightarrow{UC})$$

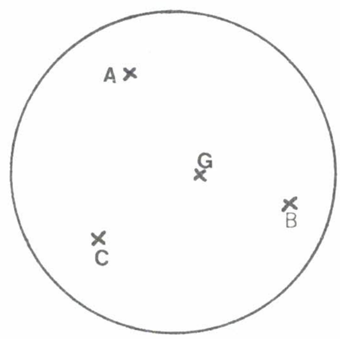
Les vecteurs $\overrightarrow{UA}$, $\overrightarrow{UB}$ et $\overrightarrow{UC}$ ont même direction et même sens que $\overrightarrow{UV}$; puisque a, b et c sont positifs, le vecteur $a\overrightarrow{UA} + b\overrightarrow{UB} + c\overrightarrow{UC}$ a aussi même direction et même sens que $\overrightarrow{UV}$; et puisque $\frac{1}{a+b+c}$ est positif, $\overrightarrow{UM}$ a même direction et même sens que $\overrightarrow{UV}$. Nous avons ainsi prouvé que M est sur la droite UV, du même côté de U que V.



On montrerait de la même façon que $\overrightarrow{VM}$ et $\overrightarrow{VU}$ ont même direction et même sens ; et ainsi M est entre U et V.



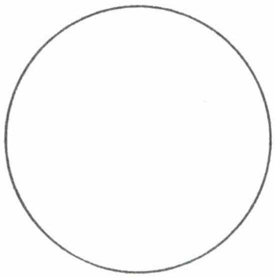
Plus généralement : On démontre que si des points A, B, C, D,... sont dans un triangle, leurs barycentres à coefficients positifs sont aussi dans ce triangle.



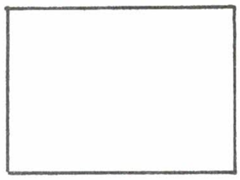
Si des points sont dans un disque, leurs barycentres à coefficients positifs sont dans ce disque.

Vocabulaire : *On dit qu'une partie X du plan est* ***convexe*** *si tout segment dont les extrémités sont dans X , est tout entier dans X . Les triangles, les disques, les rectangles ,... sont convexes.*

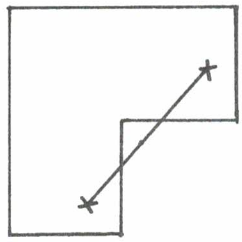
On démontre que si X est convexe, tout barycentre à coefficients positifs de points de X , est un point de X .



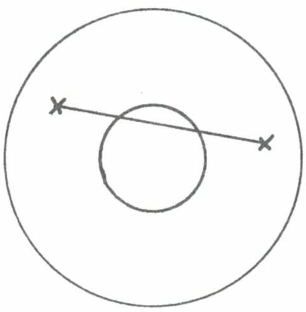
le disque est convexe



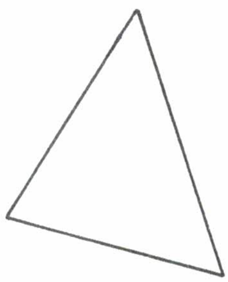
le rectangle est convexe



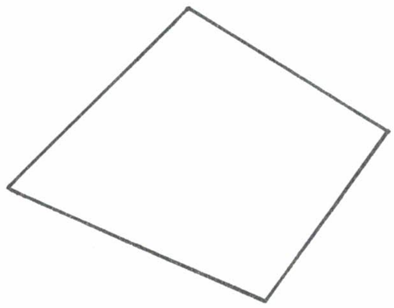
ce domaine n'est pas convexe



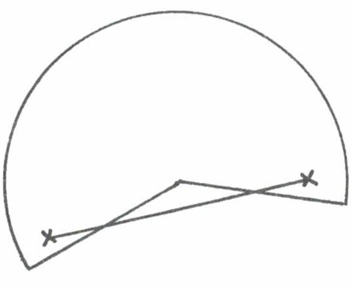
la couronne n'est pas convexe



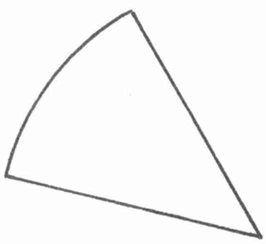
le triangle est convexe



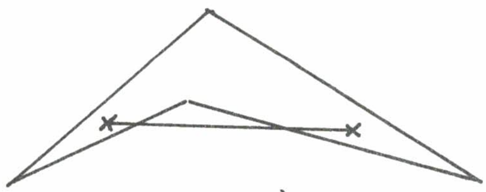
quadrilatère convexe



un secteur rentrant n'est pas convexe



un secteur saillant est convexe



quadrilatère non convexe

Quatrième série d'exercices :

MOYENNES PONDEREES ET BARYCENTRE

LE BARYCENTRE :

☆ **Exercice VI_{102} :** On donne un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. Place les points définis par $OA = 2\vec{i} - \vec{j}$, $OB = 3\vec{i} - 4\vec{j}$, $OC = -\vec{i} + 3\vec{j}$ et $OD = -\vec{i} - \vec{j}$.

Fais une figure. Calcule les coordonnées du point moyen de $(A;3)$, $(B;1)$, $(C;2)$ et $(D;5)$.

☆☆ **Exercice VI_{103} :** On donne un repère orthonormé et les points :

$$A(1;3) \text{ et } B(4;0) .$$

Fais une figure.

a) Détermine et place sur la figure le barycentre de $(A;3)$ et $(B;5)$.

b) Comment faut-il choisir a pour que le barycentre de $(A;a)$ et $(B;1)$ soit sur l'axe Oy ?

☆ **Exercice VI_{104} :** On donne un repère orthonormé et les points $P(-1;7)$, $Q(2;0)$, $R(-1;-3)$ et $S(3;6)$. Fais une figure.

a) Détermine et place sur la figure le point moyen de $(P;1)$, $(Q;4)$, $(R;3)$ et $(S;2)$.

b) Détermine et place sur la figure le barycentre de $(P;7)$, $(Q;-4)$, $(R;7)$ et $(S;2)$.

☆ **Exercice VI_{105} :** On donne un repère orthonormé du plan et les points $A(0;0)$, $B(3;0)$ et $C(1;4)$. Soit $M(x;y)$.

a) Détermine en fonction de x et y, des nombres u et v tels que :

$$\overrightarrow{AM} = u\overrightarrow{AB} + v\overrightarrow{AC} .$$

b) Quel est le barycentre de $(A;1-u-v)$, $(B;u)$ et $(C;v)$?

☆☆ **Exercice VI_{106} :** Dans un repère orthonormé du plan, dessine les points :

$$A(-4;1),\ B(-6;-1),\ C(5;6) \text{ et } D(-3;4) .$$

Calcule les coordonnées du barycentre de $(A;1)$, $(B;x)$ et $(C;y)$.
Comment faut-il choisir x et y pour que ce barycentre soit D ?

☆☆ **Exercice VI_{107} :** *Dans un repère orthonormé du plan, on donne les points $A(1;0)$, $B(3;-2)$, $C(4;-3)$ et $D(3;-2)$. Fais une figure.*

a) *Soit G le barycentre de $(A;-2)$, $(B;3)$, $(C;5)$ et $(D;1)$. Détermine G et place-le sur la figure.*

b) *Soit I le barycentre de $(A;-2)$ et $(B;3)$. Place I sur la figure.*

c) *Soit J le barycentre de $(C;5)$ et $(D;1)$. Place J sur la figure.*

d) *Détermine des coefficients u et v tels que G soit le barycentre de $(I;u)$ et $(J;v)$; et explique ainsi pourquoi I, J et G sont alignés.*

☆☆ **Exercice VI_{108} :** *Dans un repère orthonormé du plan, dessine les points :*

$$A(1;-1)\ ,\ B(9;3)\ ,\ C(5;6)\ \text{ et }\ D(-1;-3)\ .$$

a) *Soit G le barycentre de $(A;2)$, $(B;-4)$, $(C;3)$ et $(D;5)$. Calcule les coordonnées de G et place le point G sur la figure.*

b) *Détermine deux coefficients x et y tels que $\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$. Quel est le barycentre de $(A;1+x+y)$, $(B;-4-x)$, $(C;3-y)$ et $(D;6)$?*

☆ **Exercice VI_{109} :** *Calcule mentalement les moyennes pondérées suivantes :*

a) 1027 coef. 1 ; 991 coef. 2 ; 1003 coef. 3

b) 871 coef. 3 ; 853 coef. 2 ; 900 coef. 4 ; 850 coef. 1

c) 703 coef. 7 ; 689 coef. 4 ; 721 coef. 3 ; 701 coef. 6

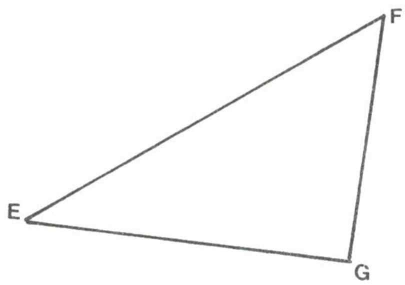
d) 801,17 coef. 3 ; 800,91 coef. 2; 800,71 coef. 5

e) -101,11 coef. 2 ; -99,9 coef. 4 ; -100,18 coef. 4

☆ **Exercice VI_{110} :** *Dans un repère orthonormé, on considère les points $P(101,7 ; 0,991)$, $Q(102,1 ; 1,007)$ et $R(101,4 ; 0,998)$.*
Calcule les coordonnées du point moyen de $(P;1)$, $(Q;3)$ et $(R;7)$.

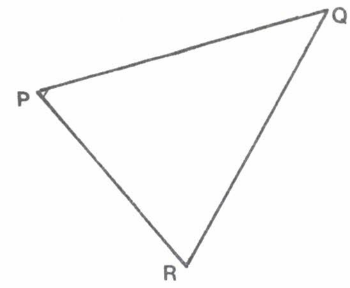
☆ **Exercice VI_{111} :**

Dessine le point moyen de $(E;1)$, $(F;2)$ et $(G;3)$.



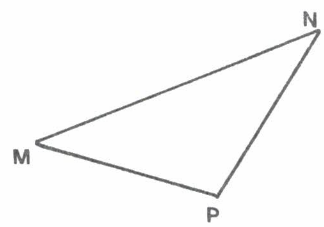
☆☆ ***Exercice VI$_{112}$:***

Dessine le barycentre de (P;2) , (Q;-2) et (R;1) .



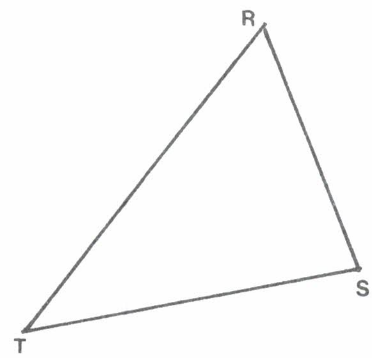
☆☆ ***Exercice VI$_{113}$:***

Dessine le barycentre de (M;4) , (N;-2) et (P;1) .



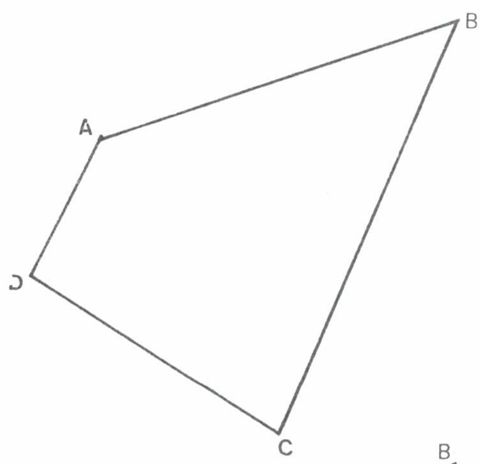
☆☆ ***Exercice VI$_{114}$:***

Dessine le barycentre de (R;2) , (S;-2) et (T;5) .



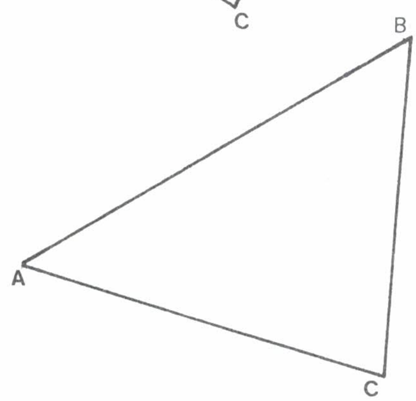
☆☆ ***Exercice VI$_{115}$:***

Dessine le barycentre de (A;1) , (B;2) , (C;3) et (D;4) .



☆☆ ***Exercice VI$_{116}$:***

Dessine le barycentre G de (A;1) , (B;1) et (C;1) .
Quel est le point d'intersection de AG (resp. BG , CG) avec le côté BC (resp. CA , AB) du triangle ?

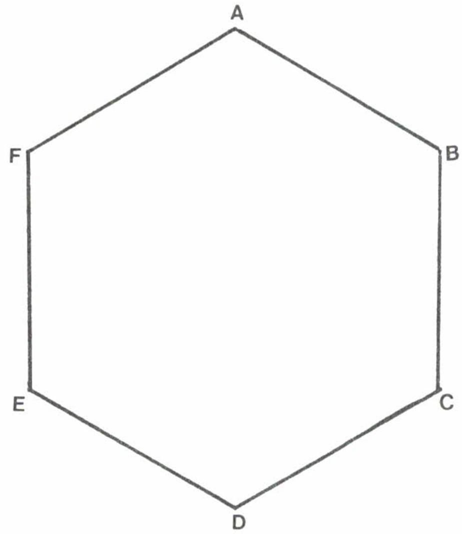


☆☆ Exercice VI_{117} :

Ceci est un hexagone régulier. Détermine des nombres u et v tels que :

$$\overrightarrow{AE} = u\overrightarrow{AB} + v\overrightarrow{AC}$$

Puis détermine des coefficients a , b , c tels que A soit le barycentre de (E,e) , (B,b) et (C,c) .

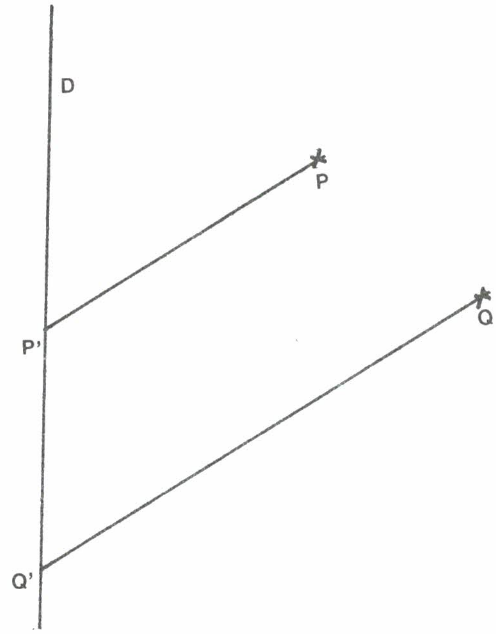


☆☆ Exercice VI_{118} :

Dans cette figure, les droites PP' et QQ' sont parallèles.

a) *Dessine le barycentre G de $(P;2)$ et $(Q;3)$.*
Dessine le barycentre G' de $(P';2)$ et $(Q';3)$.

b) *Peux-tu expliquer pourquoi GG' est parallèle à PP' et QQ' ?*



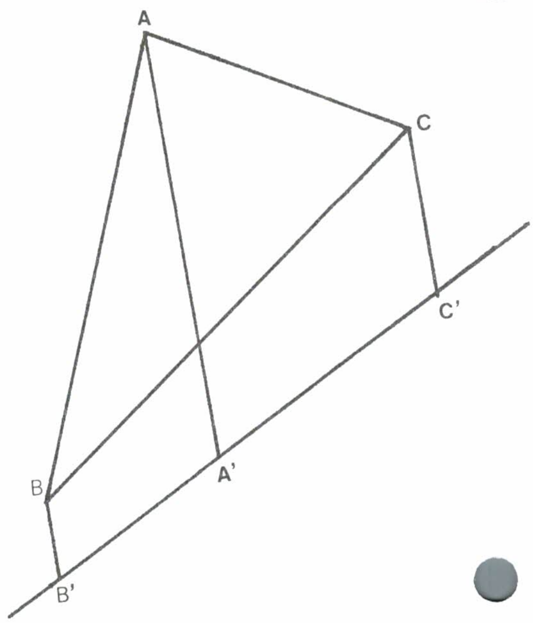
☆☆☆ Exercice VI_{119} :

Dans cette figure, les droites AA' , BB' et CC' sont parallèles.

a) *Trace le barycentre G de $(A;2)$, $(B;3)$ et $(C;5)$.*

b) *Trace le barycentre G' de $(A';2)$, $(B';3)$ et $(C';5)$.*

c) *Sais-tu expliquer pourquoi GG' est parallèle à AA' ?*



MOYENNES PONDEREES :

☆ **Exercice VI_{120} :**

a) Un candidat au bac section E , a obtenu les notes suivantes :

Français : (écrit : 8/20 , oral : 10/20)
Mathématiques : 7/20
Philosophie : 11/20
Physique : 10/20
Construction mécanique : 12/20
Technique pratique : 14/20

Il obtient la note x en Anglais. Quelle est sa moyenne ? Quelle doit être la valeur de x pour qu'il soit reçu ?

b) Un autre candidat a obtenu les notes :

Français : (écrit : 14/20 , oral : 14/20)
Mathématiques : 18/20
Anglais : 16/20
Physique : 15/20

Il est reçu quelles que soient les notes qu'il obtient dans les autres matières. Pourquoi ?

☆ **Exercice VI_{121} :** Anatole est en classe de seconde au Lycée Farfelu.

Dans ce lycée, pour calculer la moyenne annuelle on fait la moyenne de la note du premier trimestre affectée du poids 2 , de celle du deuxième trimestre affectée du poids 3 et de celle du troisième trimestre affectée du poids -4 .

Anatole a eu 8/20 au premier trimestre et 7/20 au deuxième trimestre. Que doit-il faire pour que sa moyenne annuelle soit supérieure à 10 ?

☆☆ **Exercice VI_{122} :** Une voiture a roulé entre 13h10 et 13h20 à une vitesse de 60 km/h. Puis entre 13h20 et 13h45 à une vitesse de 100 km/h . Entre 13h45 et 14h sa vitesse était de 80 km/h .

Quelle est la vitesse moyenne de cette voiture entre 13h10 et 14h ?

☆☆ **Exercice VI_{123} :**

a) Une voiture parcourt 97 km à 81 km/h , puis 63 km à 72 km/h . Sa vitesse moyenne est-elle la moyenne pondérée de 81 km/h (muni du poids 97) et de 72 km/h (muni du poids 63) ?

b) Une voiture roule pendant 17 minutes à 96 km/h , puis pendant 11 minutes à 87 km/h . Sa vitesse moyenne est-elle la moyenne pondérée de 96 km/h (muni du poids 17) et de 87 km/h (muni du poids 11) ?

☆☆ **Exercice VI_{124} :**

a) On mélange x cm^3 d'un liquide A de masse volumique 1,2 g/cm^3 , et y cm^3 d'un liquide B de masse volumique 0,9 g/cm^3 . La masse volumique du mélange est-elle la moyenne pondérée de 1,2 g/cm^3 (muni du coefficient x) et de 0,9 g/cm^3 (muni du coefficient y) ?

b) On mélange X g du liquide A et Y g du liquide B , la masse volumique du mélange est-elle la moyenne pondérée de 1,2 g/cm^3 (coefficient X) et de 0,9 g/cm^3 (coefficient Y) ?

☆☆ **Exercice VI_{125} :** Voici, pour les 12 pays de la CEE , un tableau donnant le nombre d'habitants (en millions) ; le revenu moyen par habitant (en dollars), et la superficie (en km^2) :

	Population	Revenu	Superficie
Allemagne	61,07	10940	248500
Belgique	9,85	8450	30500
Danemark	5,10	11240	43000
Espagne	38,73	4360	504000
France	55,13	9550	547000
Grande-Bretagne	56,54	8390	244000
Grèce	9,94	3550	132000
Irlande	3,56	4840	70000
Italie	56,95	6520	301000
Luxembourg	0,37	13380	2600
Pays-Bas	14,49	9180	40800
Portugal	10,20	1970	92000

1) Quel est le revenu moyen par habitant dans l'ensemble de la CEE ?

2) Quel est le nombre moyen d'habitants au km^2 dans chaque pays ? dans la CEE ?

☆☆☆ **Exercice VI_{126}** : *Un marchand de vin dispose de trois sortes de vins dont il veut faire un coupage :*

un vin A de 9° à 2,5 F le litre
un vin B de 13° à 4,0 F le litre
un vin C de 12° dit "de qualité contrôlée"
qui coûte 5 F le litre

Il veut fabriquer un mélange titrant 11° . Nous supposerons que lorsque l'on mélange a % de A , b % de B et (100 - a - b) % de C , on obtient un coupage dont le titre est la moyenne pondérée de 9 (coef. a) , 13 (coef. b) et 12 (coef. c) .

Nous allons faire une étude graphique, en portant en abscisse le titre (2 cm pour 1°) et en ordonnée le prix (4 cm pour 1 F) . Marque d'abord les points correspondant à A , B et C .

1) *On mélange a % de A et (100 - a) % de B . Quel est (en fonction de a) le titre ? quel est le prix ? Comment faut-il choisir a pour que le titre soit 11° ? Quel est alors le prix ? Marque le point sur le graphique.*

2) *On mélange n % de A et (100 - n) % de C . Comment faut-il choisir n pour que le titre soit 11° ? Quel est le prix ? Marque le point sur le graphique.*

3) *Est-il possible d'obtenir un coupage titrant 11° en mélangeant B et C ?*

4) *On mélange x % du coupage fait en 1) et (100 - x) % du coupage fait en 2) . Quel est le titre du mélange obtenu ?*

5) *Pour pouvoir faire figurer sur l'étiquette la mention "vin de qualité contrôlée" , on doit fabriquer un mélange contenant au moins 50 % de vin de la qualité C . Comment va-t-on faire pour fabriquer un vin répondant à cette condition, titrant 11° , et coûtant le moins cher possible ?*

☆☆ **Exercice VI$_{127}$:** *Au cours de la journée du 17 janvier on a relevé les températures :*

0h	3h	6h	8h	9h	10h	11h	12h	
-2°	-4°	-10°	-11°	-10°	-8°	-4°	0°	
13h	14h	15h	16h	17h	18h	20h	22h	24h
1°	3°	1°	0°	0°	-2°	-3°	-4°	– 5°

a) *Fais une représentation graphique de la température au cours de cette journée (1 cm pour 1° en ordonnée, et 1 cm pour 1h en abscisse).*

b) *On veut calculer la température moyenne au cours de cette journée. Quel calcul proposes-tu ?*

☆ **Exercice VI$_{128}$:**

Voici pour chacun des modèles de la série R21, le prix de vente et le nombre de voitures vendues pendant les neuf premiers mois de 1987.

Modèle	Prix (en F)	Diffusion
TL	69980	11450
GTS	79200	65150
TXE	101750	4920
Turbo	147850	525
GTD	87850	21170
TDX	108770	7510

Quel fut le prix de vente moyen d'une Renault 21 pendant les neuf premiers mois de 1987 ?

☆ **Exercice VI$_{129}$:** *Le marchand de fruits vend trois sortes de pommes. Une variété A à 11 F/kg, une variété B à 9 F/kg et une variété C à 8,5 F/kg.*

Ceci te permet-il de déterminer le prix moyen du kilo de pommes vendu par ce marchand ?

☆ **Exercice VI$_{130}$:** *Dans une entreprise travaillent :*

70 ouvriers dont le salaire est 4100 F/mois
6 contremaîtres dont le salaire est 9500 F/mois

Le salaire du patron est 50 000 F/mois.

a) *Calcule le salaire moyen en comptant le patron.*

b) *Calcule le salaire moyen sans tenir compte du patron.*

c) *Etait-il prévisible que l'écart entre ces deux résultats soit si faible ?*

☆☆☆ **Exercice VI_{131} :** *Dans une entreprise il y a deux types de salariés :*

les salariés de type A, qui gagnent 30 F de l'heure
les salariés de type B, qui gagnent 50 F de l'heure

a) *Le salaire moyen est de 42 F de l'heure. Il y a 80 salariés. Quel est le nombre x des salariés de type A ?*

b) *On embauche n salariés tous de type A, et simumltanément on fait passer les salaires de 30 à 32 F et de 50 à 53 F de l'heure. Est-il possible que le nouveau salaire moyen soit inférieur à 40 F de l'heure ?*

☆☆☆ **Exercice VI_{132} :** *(Lu dans une revue de Statistiques) :*

"Voici quelque chose d'apparemment paradoxal : dans chaque région de France, les agriculteurs consommaient plus de pommes de terre que les non-agriculteurs et, pour l'ensemble de la France, c'était le contraire. Comment cela était-il possible ? Après un moment de réflexion, j'ai compris ce qui se passait. Pour m'expliquer, je prendrai de nouveau un exemple schématique. Imaginons qu'un pays compte deux régions et que, dans chacune des deux régions, les agriculteurs consomment, par personne, plus de pommes de terre que les non-agriculteurs. Mais imaginons, en plus, que la plupart des agriculteurs soient concentrés dans la région où l'on consomme peu de pommes de terre..."

Pour mieux comprendre ce paradoxe, voici un exemple numérique. Supposons :

- *dans une région 1 : $10\ 000$ agriculteurs consomment chacun 80 kg de pommes de terre par an ; et $50\ 000$ non-agriculteurs en consomment 70 kg.*

- *dans une région 2 : N agriculteurs consomment 50 kg de pommes de terre chacun ; et N non agriculteurs en consomment 40 kg.*

Quelle est, en fonction de N, la consommation moyenne A des agriculteurs de l'ensemble des deux régions ?

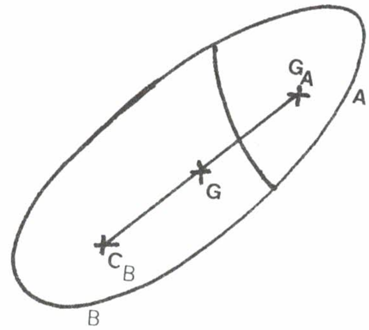
Quelle est, en fonction de N, la consommation moyenne B des non-agriculteurs de l'ensemble des deux régions ?

Comment faut-il choisir N pour que A soit plus petite que B. Tu peux représenter graphiquement (pour N compris entre 0 et $100\ 000$) les fonctions calculées ci-dessus.

BARYCENTRES ET CENTRES D'INERTIE :

Les deux exercices qui suivent portent sur les centres d'inertie, que tu as étudiés en cours de physique.

On admettra que lorsqu'un solide est formé de deux parties A (de masse m_A et de centre d'inertie G_A) et B (de masse m_B et de centre d'inertie G_B), alors le centre d'inertie de ce solide est le barycentre de (A, m_A) et (B, m_B).

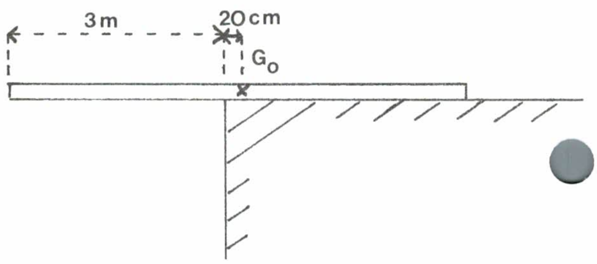


☆ ***Exercice VI$_{133}$:*** *Un pétrolier de 200 000 tonnes a un centre d'inertie G_P.*

a) *Une mouette se pose sur le bâteau à 50 m de G_P. Où se trouve le centre d'inertie G de l'ensemble "pétrolier plus mouette" ? (On supposera que la mouette pèse 500 g).*

b) *Quelle devrait être la masse de la mouette pour que la distance GG_P soit supérieure à 1 mm ? Qu'en penses-tu ?*

☆☆ ***Exercice VI$_{134}$:*** *Une poutre est posée sur le bord d'un quai ; sa masse est de 100 kg. Son centre d'inertie G_o est à 20 cm du bord. Sa longueur totale est de 6 m (voir figure).*



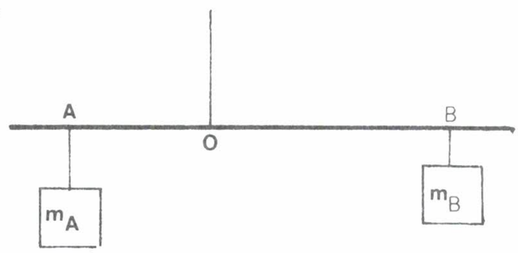
Un chien de 8 kg s'avance sur cette poutre.

a) *On suppose que le chien est à une distance d de G_o. Soit G le centre d'inertie de l'ensemble "poutre plus chien". Calcule, en fonction de d, la distance GG_o.*

b) *Les lois de la statistique nous disent que la poutre basculera lorsque G ne sera plus au-dessus du quai (mais au-dessus du vide). Pour quelle valeur de d cela va-t-il se produire ?*

c) *Recommence le calcul en remplaçant le chien par un homme de 60 kg. Ou par un oiseau de 300 g.*

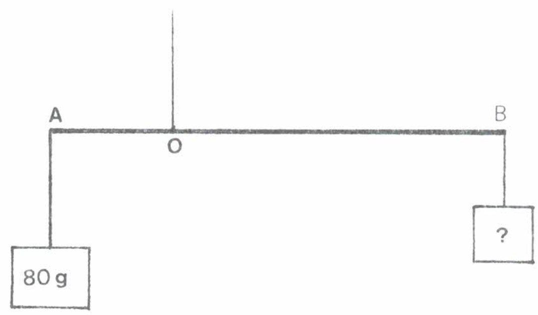
EQUILIBRE D'UNE BARRE ET BARYCENTRE :



Supposons une barre de masse négligeable (c'est-à-dire très petite) à laquelle sont suspendues deux masses (m_A attachée en un point A, et m_B attachée en un point B).

Supposons que la barre soit elle-même suspendue en un point O. Alors cette barre sera en équilibre (c'est-à-dire restera horizontale) pourvu que O soit le barycentre de $(A;m_A)$ et $(B;m_B)$.

☆ **Exercice VI$_{135}$** : *Une barre de masse négligeable, de longueur $AB = 30$ cm, est suspendue au point O tel que $OA = 8$ cm. En A est attachée une masse de 80 g. Quelle masse faut-il attacher en B pour que la barre soit en équilibre ?*



☆ **Exercice VI$_{136}$** : *Une barre de masse négligeable, de longueur $MN = 40$ cm, est suspendue au point O tel que $ON = 12$ cm.*

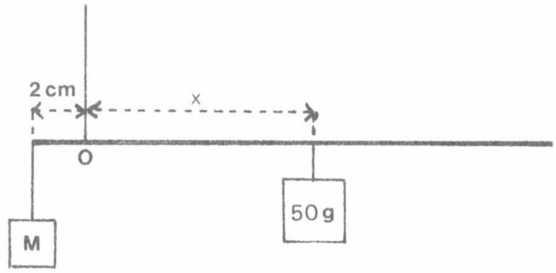
En M est attachée une masse de 100 g.

a) *On dispose d'une masse de 400 g. En quel point faut-il la suspendre pour que la barre soit en équilibre ?*

b) *On dispose d'une masse de 200 g. Est-il possible de l'attacher de telle sorte que la barre soit en équilibre ?*

☆☆**Exercice VI_{137} :** "La Balance romaine"

Pour fabriquer une balance prenons une barre, que nous supposerons de masse négligeable.



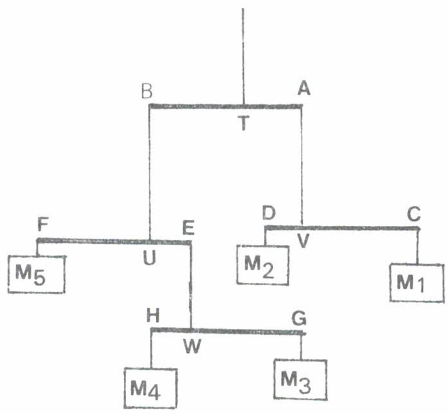
Suspendons-la en un point O . D'un côté de O , à 2 cm de O , suspendons la masse M à peser. De l'autre côté de O faisons glisser un curseur de masse 50 g .

a) Quelle doit être la valeur de M , pour que la barre soit en équilibre lorsque le curseur est à 30 cm de O ?

b) Quelle doit être la valeur de M , pour que la barre soit en équilibre lorsque le curseur est à x cm de O ?

c) Dessine le schéma de la balance (à l'échelle 1/2) ; et dessine (de 100 g en 100 g) la graduation qui permettra de lire directement la valeur de la masse M.

☆☆☆ **Exercice VI_{138} :** On a réalisé avec des barres de masses négligeables, le montage suivant. Toutes les barres ont une longueur de 20 cm .



a) On suppose que M_1 , M_2 , M_3 , M_4 , M_5 sont des masses de 100 g .

Comment doit-on choisir les points T , U , V , W sur les quatre barres pour que le système soit en équilibre ?

b) On choisit T , U , V , W tels que $AT = 8$ cm , $CV = 5$ cm , $EU = 10$ cm et $GW = 8$ cm . On a pour M_1 une masse de 120 g . Quelles masses M_2 , M_3 , M_4 , M_5 faut-il choisir pour que le système soit en équilibre ?

c) Choisissant les mêmes points T , U , V , W qu'en b) , on prend pour M_5 une masse de 100 g . Comment faut-il choisir M_1 , M_2 , M_3 , M_4 pour que système soit en équilibre ?