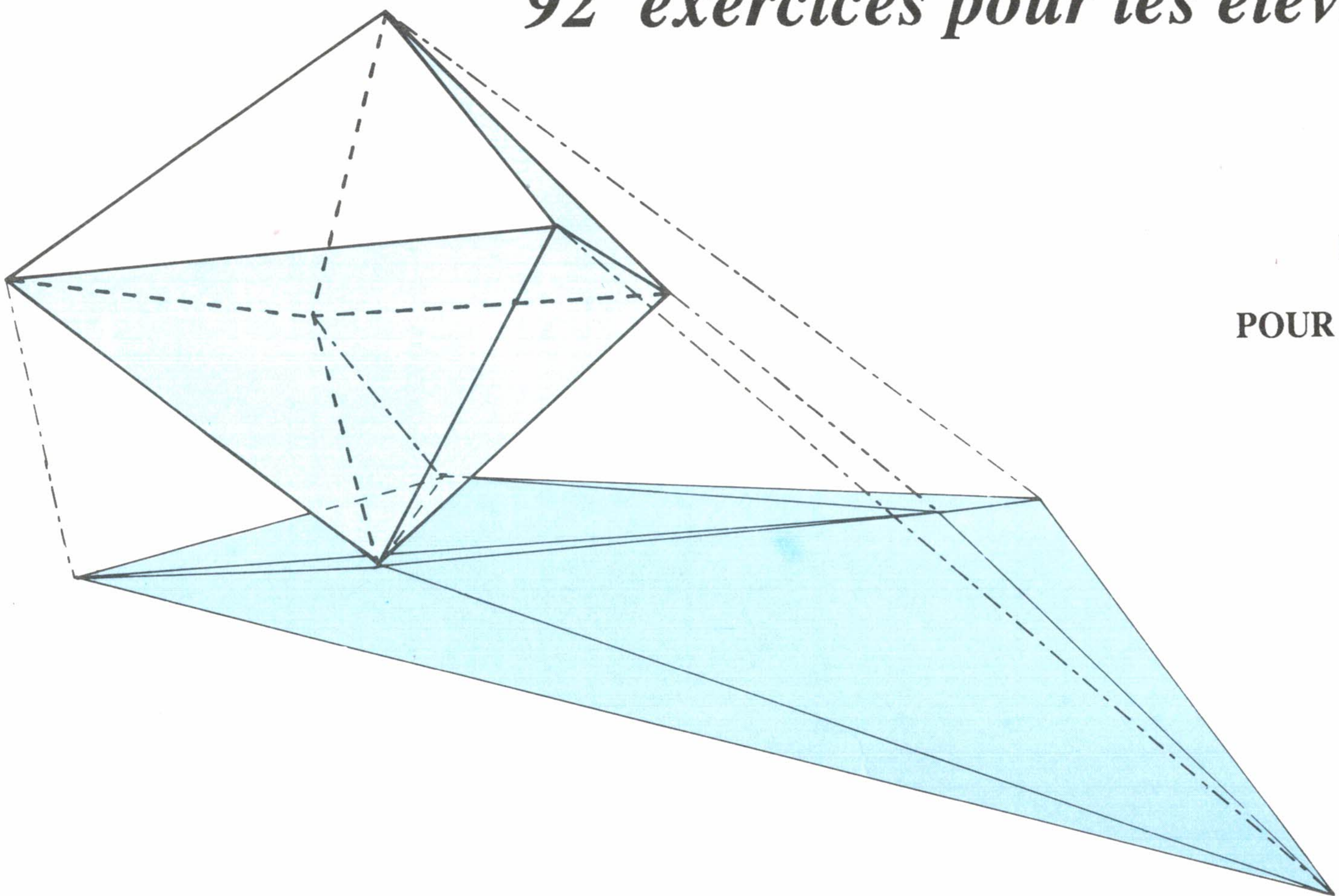
le 24.03.89 1526 ex
MORLET

DESSINER L'ESPACE

92 exercices pour les élèves de seconde



MATHEMATIQUES

POUR L'ELEVE DE SECONDE

fascicule 3

IREM de LORRAINE

Edité et imprimé par l'**Institut de Recherche sur l'enseignement des Mathématiques** - (Université de Nancy I - Faculté des Sciences) - B.P. 239 - 54506 VANDOEUVRE-les-NANCY CEDEX
Dépôt légal : 4e trimestre 1988
n° de la publication : 2-85406-115-2

Le Responsable de la publication : Claude MORLET

réf. II.12_2

DESSINER L ' ESPACE

Ce fascicule est la nouvelle version de **" Dessiner l'Espace "** et peut tout à fait être utilisée comme l'ancienne, indépendamment de votre manuel.

Vous trouverez à la fin du fascicule des exercices de calcul algébrique. En effet, ce document est aussi **le fascicule 3 de la série des 5 fascicules " Mathématiques pour l'élève de seconde "** . Chacun des fascicules contient des fiches de calcul pour assurer l'entraînement régulier des élèves.

collection complète :

FASCICULE 1 : Chapitre 1 : Révisions de géométrie - Chapitre 2 : Le calcul linéaire

FASCICULE 2 : Chapitre 3 : Vecteurs et angles - Chapitre 4 : Analyse

FASCICULE 3 : Chapitre 5 : Géométrie dans l'espace ("**Dessiner l'espace**")

FASCICULE 4 : Chapitre 6 : Compléments de géométrie et Statistiques

FASCICULE 5 : Le répertoire

DESSINER L ' ESPACE

Dans les exercices qui suivent, tu vas dessiner des figures de l'espace, ou, plus exactement, compléter des figures qui te seront données.

En géométrie plane nous avons l'habitude de tracer des figures précises (les plus précises possible, compte tenu de nos instruments de dessin) sur lesquelles nous pouvons mesurer des valeurs approchées des longueurs et des angles que l'énoncé propose de calculer. A l'inverse, lorsque nous dessinons un cube ou une pyramide, nous ne pouvons prétendre en faire une représentation exacte. Nous obtiendrons - au mieux - quelque chose qui ressemble à ce que nous voyons lorsque nous regardons un cube ou une pyramide. Et il est exclu que les longueurs et les angles y soient dessinés en vraie grandeur.

C'est à la Renaissance que furent établies les règles qui permettent de dessiner l'espace avec un maximum de vraisemblance. Elles furent inventées par les peintres ; elles constituent ce qu'on appelle la perspective fuyante. Les longueurs et les angles y sont représentés selon des lois assez compliquées.

C'est pourquoi nous emploierons des règles plus simples, celles de la "perspective parallèle" (ou "perspective cavalière") . Elles nous permettront de dessiner de façon tout à fait ressemblante, les objets assez petits et placés assez loin de l'observateur ; elles seraient par contre tout à fait inadaptées à la représentation d'un paysage.

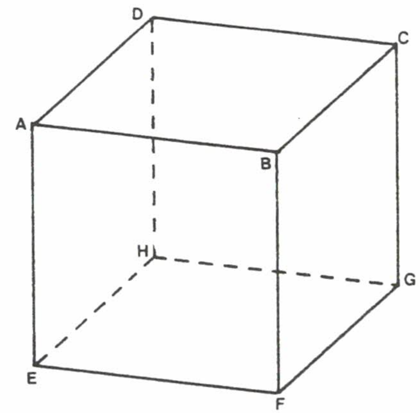
Voici ces règles :

a) **Le dessin d'une droite est une droite** (à quelques exceptions près - voir exemple ci-dessous) .

b) **Deux droites parallèles ont pour dessins des droites parallèles.**

Voici le dessin d'un cube. Les 12 arêtes ont pour dessins des segments. Les arêtes AB et CD sont parallèles, leurs dessins sont des segments parallèles.

Sur le dessin les segments BF et HG se coupent. Ceci ne signifie pas que, dans l'espace, les arêtes HG et BF ont un point commun ; en fait BF est devant HG . Ainsi un point I de BF est un point J de HG ont même image. La droite IJ tout entière a pour image ce même point.

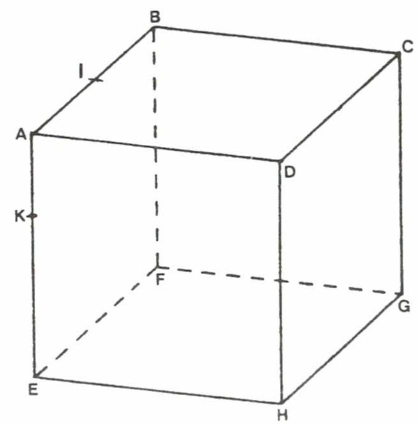


c) **Dans l'espace, si le point I est le milieu du segment AB , alors le dessin de I est le milieu du dessin du segment AB .**

Plus généralement, si deux segments parallèles de longueurs L et L' ont pour images deux segments de longueurs L_1 et L'_1, alors $L_1 / L'_1 = L / L'$.

Dans l'espace, I est le milieu de l'arête DC , car le dessin de I est le milieu du dessin de DC .

Dans l'espace AK / AE = 1 / 3 , car sur le dessin AK / AE = 1 / 3 .

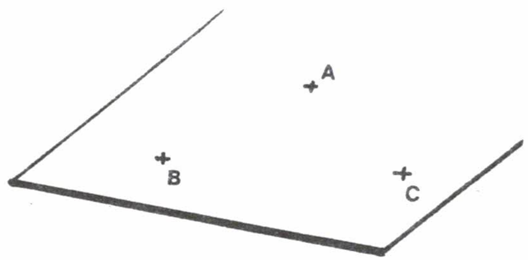


Nous ne dirons rien de la façon dont sont représentés les angles. Constatons seulement que dans le cube ci-dessus, la face ABCD est un carré, et que son dessin est un parallélogramme dont aucun angle n'est droit.

COMMENT DEFINIR UN PLAN ?

Ia

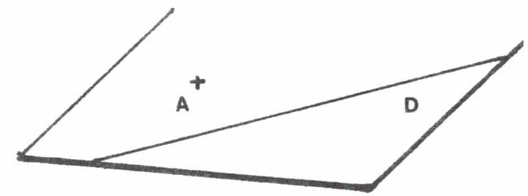
Etant donné trois points non alignés A , B et C , il existe un plan, et un seul, qui les contient tous les trois. On le note (ABC) .



Attention ! Avant de parler du plan (ABC) , il faut s'assurer que A , B et C ne sont pas alignés.

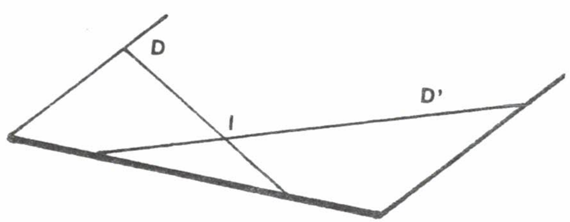
Ib

Etant donné une droite D , et un point A non situé sur D , il existe un plan, et un seul qui les contient tous les deux.



Ic

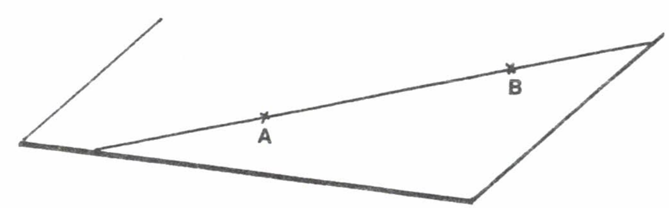
Si deux droites D et D' ont un point, et un seul, en commun, il existe un plan, et un seul, qui les contient toutes les deux.



Attention ! Si deux droites n'ont aucun point commun, il n'existe, en général, aucun plan qui les contient toutes les deux.

Id

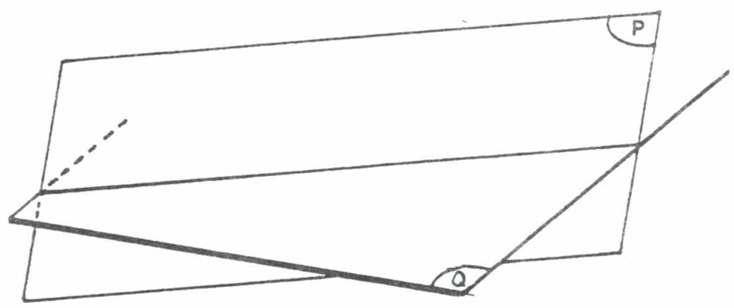
Si deux points A et B (distincts !!) sont dans un plan P , la droite (AB) est contenue dans P .



Autrement dit : Un plan et une droite peuvent avoir zéro ou un point commun ; s'il y en a plus d'un, la droite est contenue dans le plan.

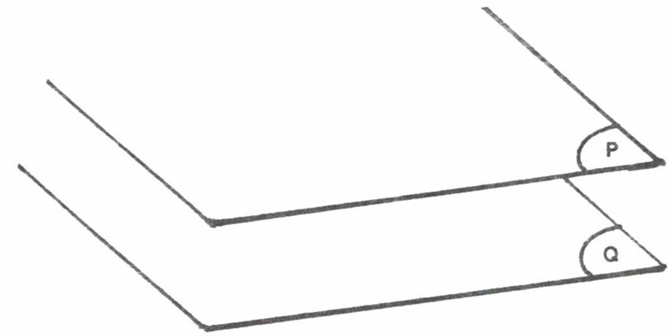
IIa

Deux plans (distincts) P et Q qui ont un point commun, en ont une infinité. Leur intersection est une droite.



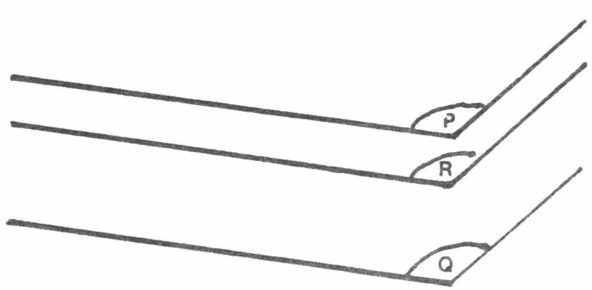
IIb

Deux plans qui n'ont aucun point commun sont dits parallèles.



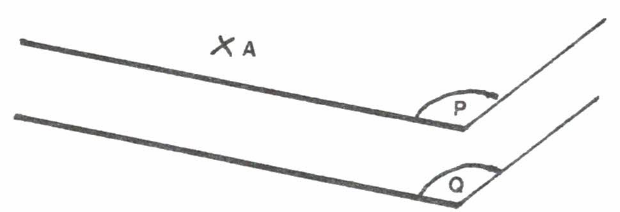
IIc

Deux plans P et Q qui sont parallèles à un même plan R, sont eux-mêmes parallèles (à moins que P et Q soient un seul et même plan, qui a reçu deux noms différents).



IId

Par un point A extérieur au plan P, il passe un plan Q parallèle à P ; il n'en passe qu'un seul.



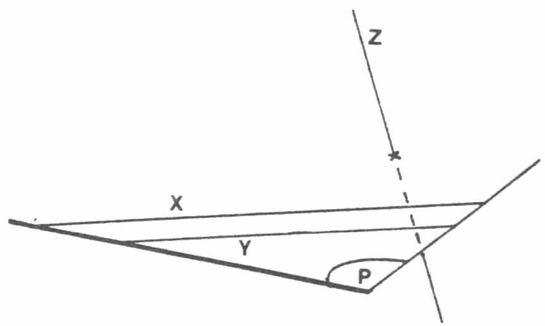
Autrement dit : Si l'on a construit de deux façons un plan qui passe par A, et est parallèle à P, on peut affirmer qu'on a construit deux fois le même plan.

DROITES PARALLELES

IIIa

Si deux droites X et Y sont dans un même plan, et ne se coupent pas, on dit qu'elles sont parallèles.

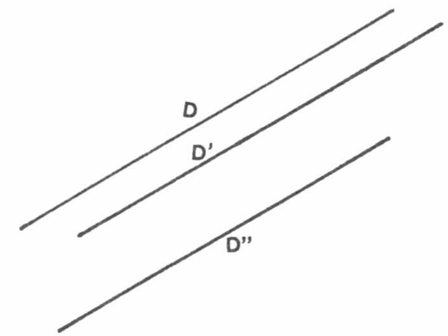
Attention ! Pour vérifier que deux droites de l'espace sont parallèles, il ne suffit pas de vérifier qu'elles n'ont aucun point commun. Il faut aussi vérifier qu'elles sont dans un même plan.



Z n'est pas parallèle à X et à Y.

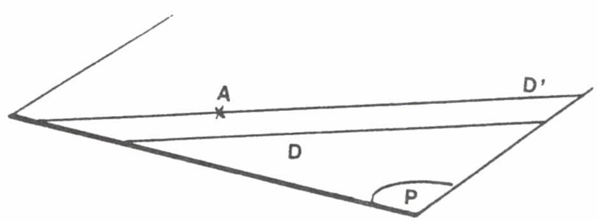
IIIb

Si les droites D et D' sont parallèles à une même droite D", elles sont elles-mêmes parallèles (ou confondues).



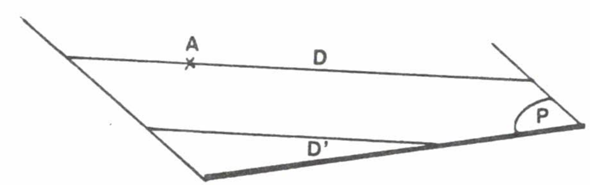
IIIc

Si un point A est extérieur à la droite D, il passe par A, une droite D' parallèle à D, et une seule.



IIId

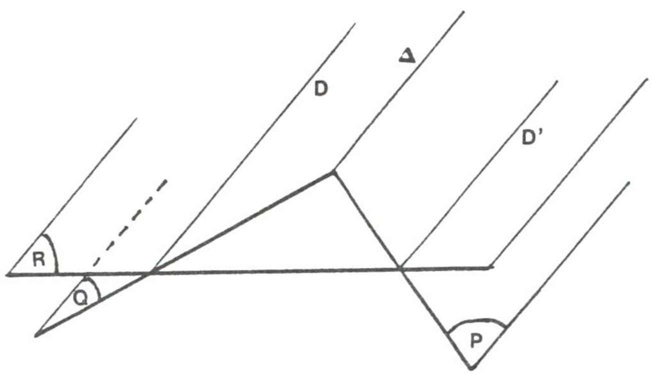
Si une droite D est parallèle à une droite D' du plan P, et si elle a un point A dans le plan P, alors elle est tout entière dans P.

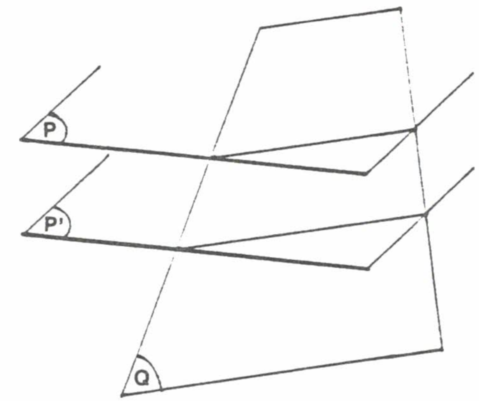


DROITES ET PLANS PARALLELES

IVa

Si deux plans P et P' sont parallèles, les intersections de P et P' et d'un plan Q , sont deux droites parallèles.





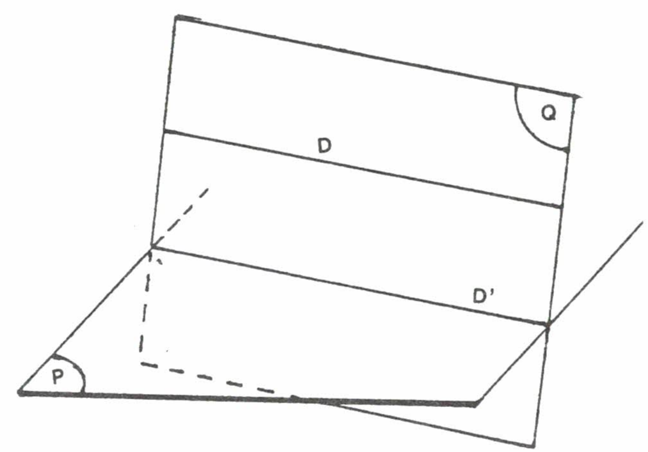
IVb

Soient P , Q et R trois plans, si P et Q coupent R suivant deux droites parallèles D et D' , alors la droite Δ intersection de P et Q (si elle existe !) est parallèle à D et à D' .

IVc

Lorsqu'une droite D n'a aucun point en commun avec le plan P , on dit qu'elle est parallèle à P .

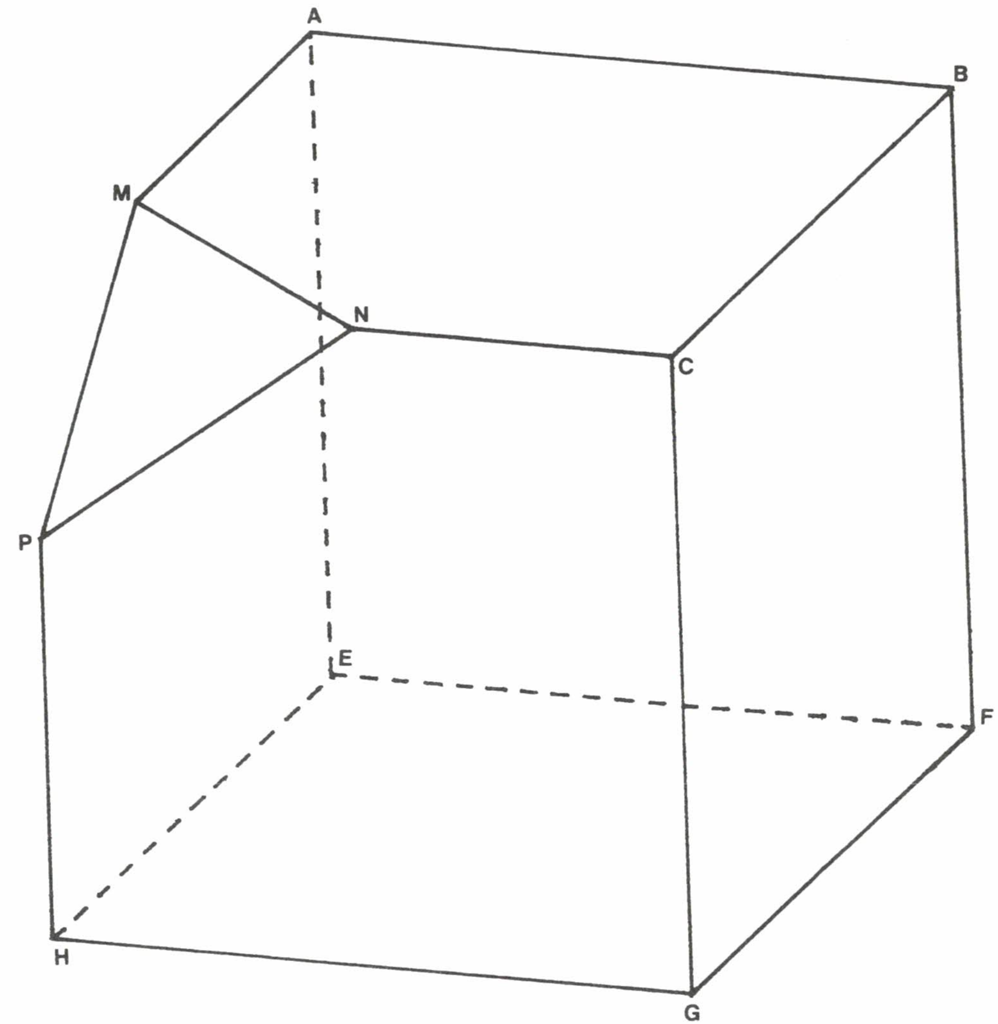
Dans ce cas, tout plan Q qui contient D (et qui coupe P) coupe P suivant une parallèle à D .



Exercice V_1 :

On a dessiné un cube, avec un coin coupé.

Trace la section de ce cube par le plan parallèle au plan MNP , et passant par C .



Exercice $V_{1\ bis}$:

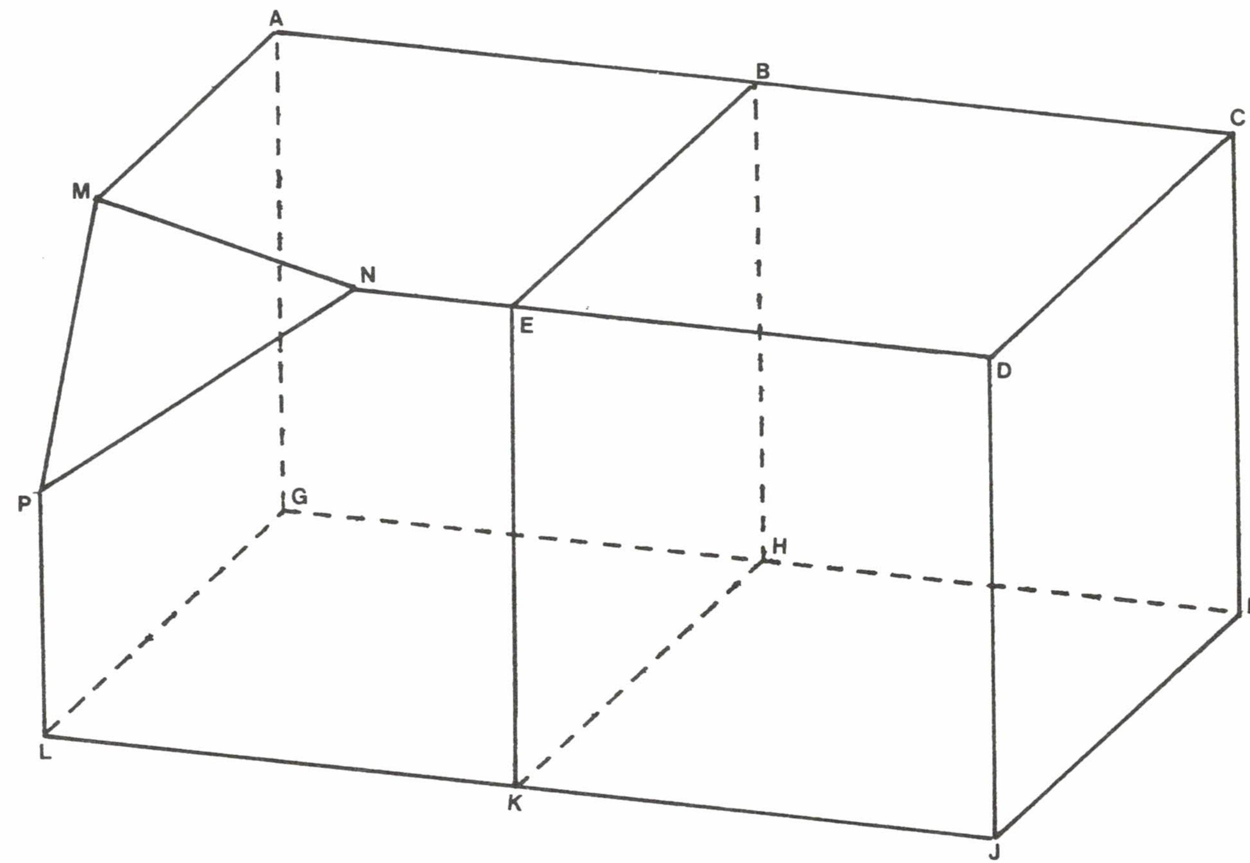
a) Les arêtes du cube ont pour longueur 8 cm ; AM = 5 cm , CN = 4 cm et HP = 5 cm . Dessine le triangle MNP en vraie grandeur.

b) Quel est le volume du solide dessiné ci-dessus ?

Exercice V_2 :

On a dessiné deux cubes accolés, dont l'un a un coin coupé.

Trace l'intersection des deux cubes avec le plan π parallèle au plan MNP et qui passe par L .



Exercice $V_{2\ bis}$:

a) Les arêtes des cubes ont pour longueur 6 cm ; EN = 2 cm , AM = 4,5 cm et LP = 3 cm . Dessine en vraie grandeur l'intersection du plan π et du cube de gauche.

b) Quel est le volume du solide dessiné ci-dessus ? Quel est le volume de la partie gauche ?

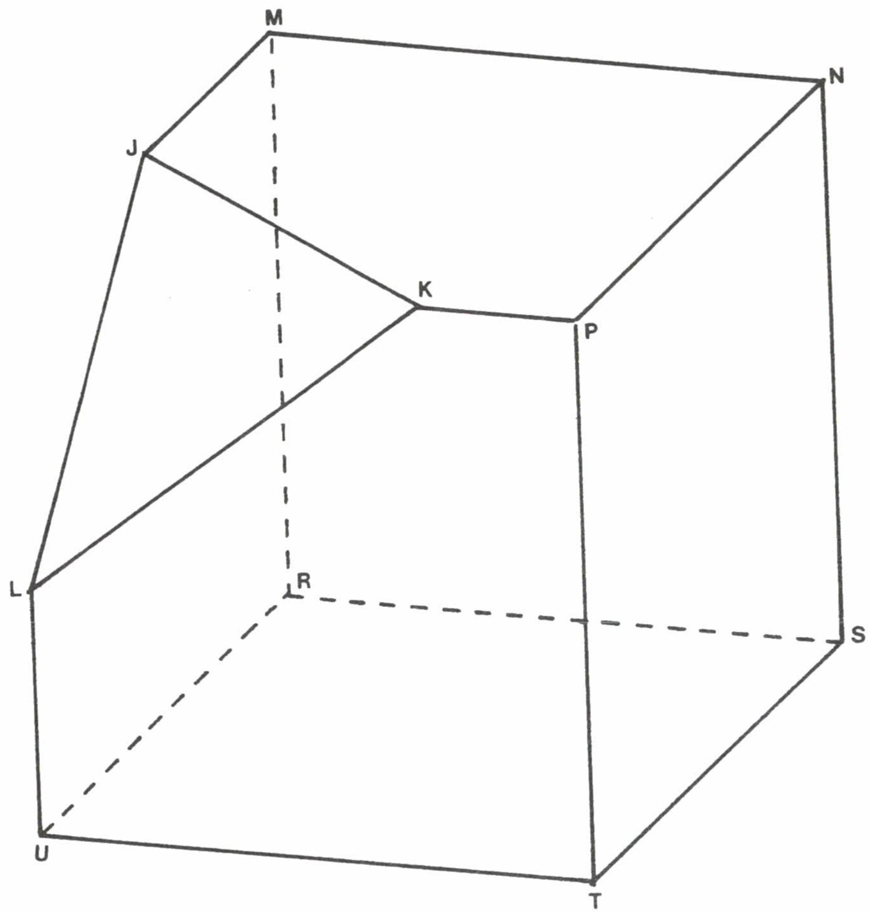
c) Le plan π coupe la partie gauche en deux morceaux. Quel est le volume de chacun des deux morceaux ?

Exercice V_3 :

On a dessiné un cube, avec un coin coupé.

a) Dessine l'intersection de ce cube avec le plan π passant par M et parallèle au plan IJK .

b) Les arêtes du cube ont pour longueur 7 cm . En mesurant sur la figure, dessine en vraie grandeur le triangle IJK , puis l'intersection du cube et du plan π .



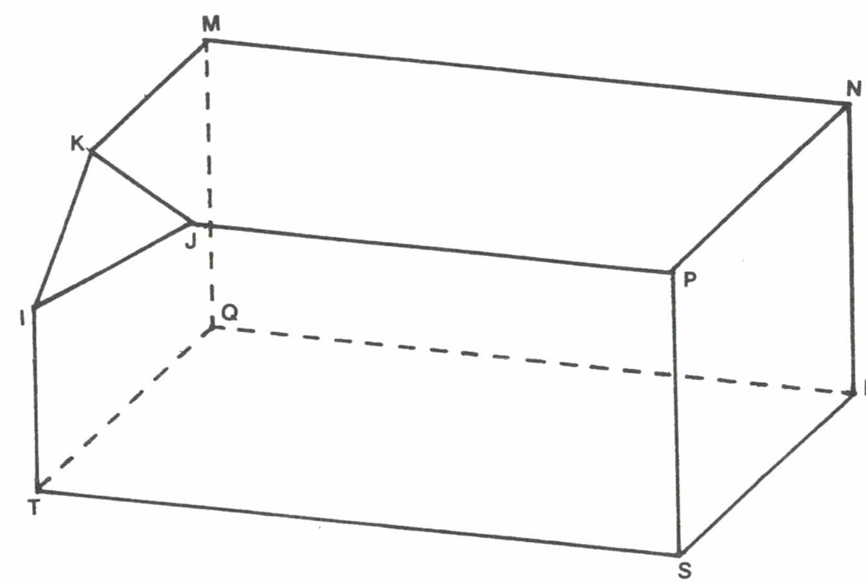
Exercice V_4 :

On a pris un morceau de beurre de 250 g , et on en a coupé un morceau.

a) En mesurant sur la figure, détermine la masse du morceau que l'on a coupé.

b) Notons L le coin du pavé qui n'est pas dessiné ; place le point K' de l'arête LM tel que LK' = 2 LK ; trace la section du cube par le plan passant par K' et parallèle au plan IJK . Quelle est la masse du morceau ainsi coupé ?

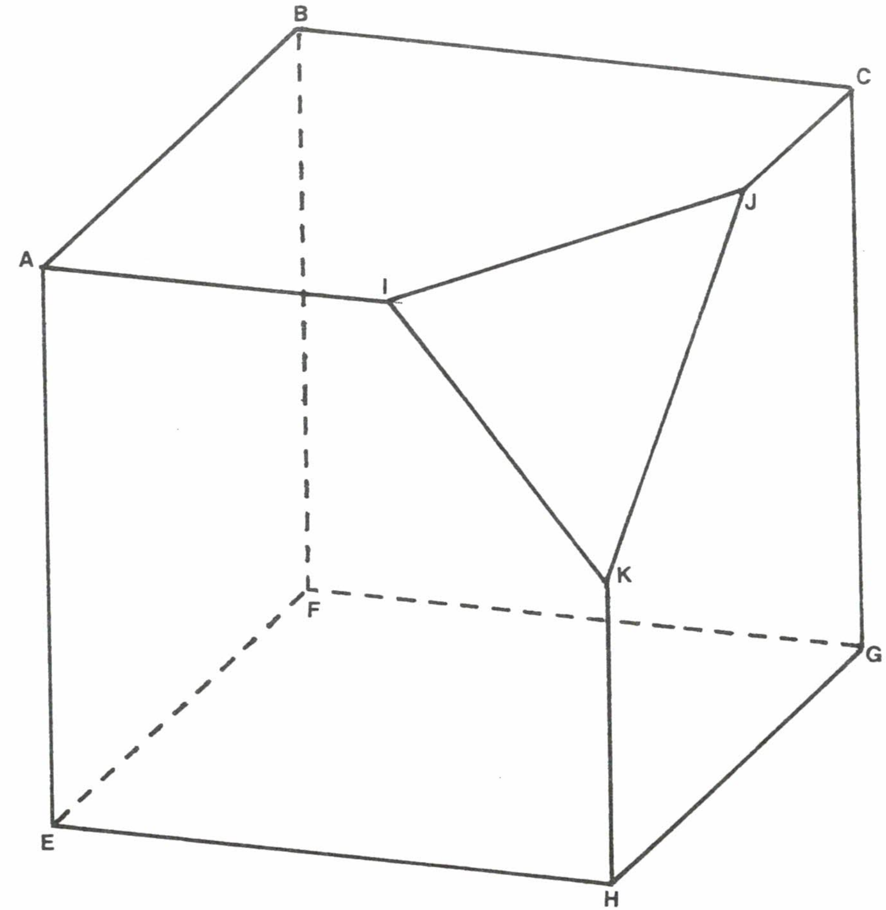
c) On se propose maintenant d'enlever (au morceau dessiné) un morceau de 15 g , en coupant par un plan parallèle au plan IJK . Comment faut-il faire ?



Exercice V_5 :

On a dessiné un cube dont on a coupé un coin.

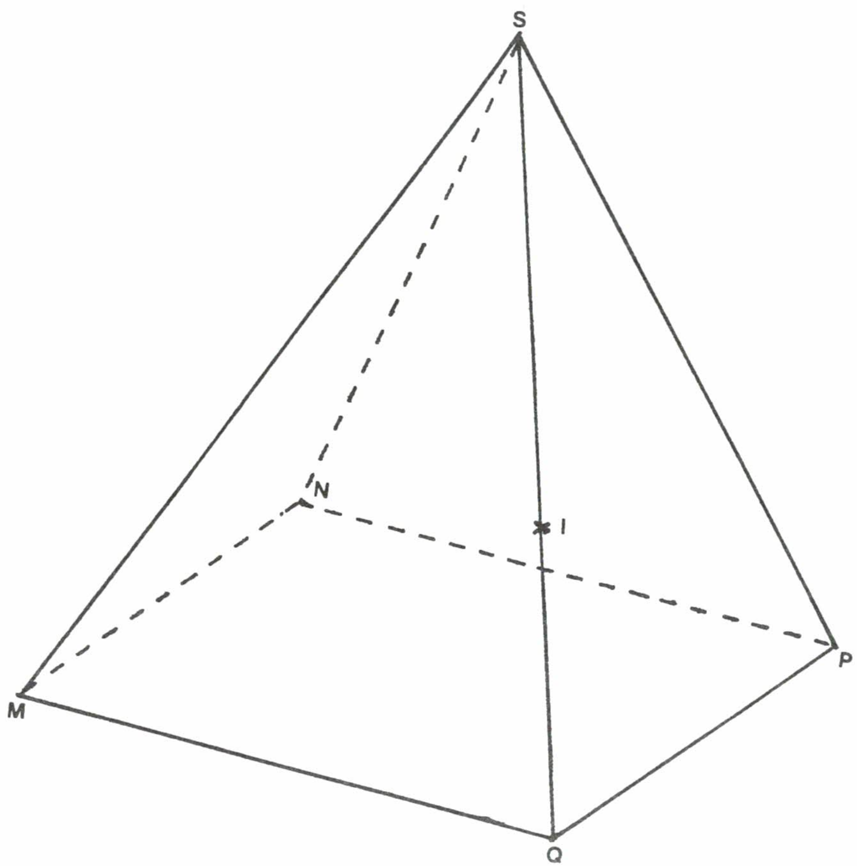
Trace l'intersection de ce solide avec le plan parallèle au plan BDM (où D est le sommet du coin coupé, et M le milieu de EH) et qui passe par K .



Exercice V_6 :

Le point I est sur l'arête SQ de la pyramide SMNPQ . Le plan Z passe par I et est parallèle aux droites PQ et SM .

Trace l'intersection de la pyramide et du plan Z .

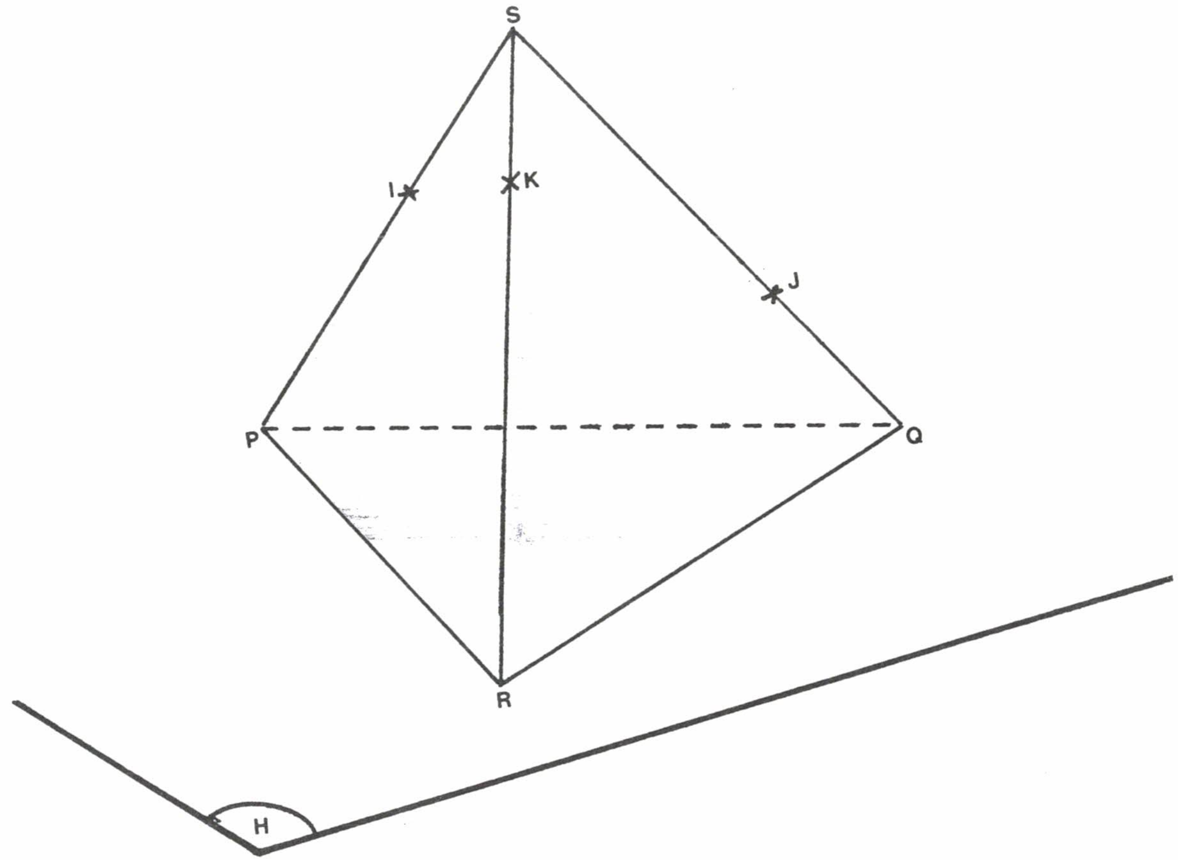


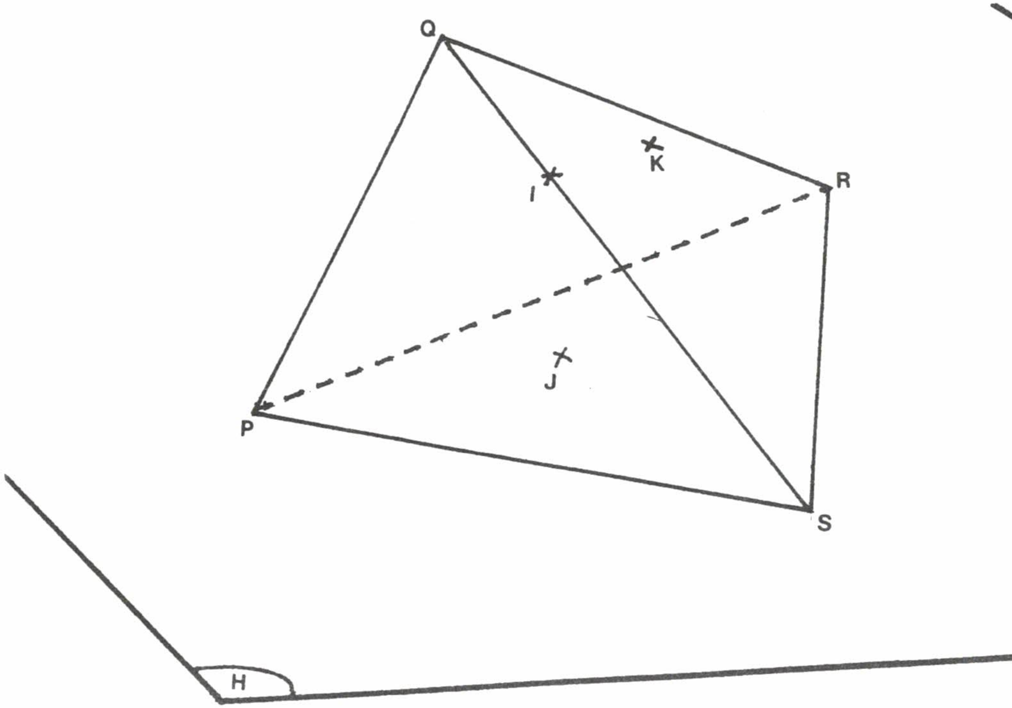
Exercice V_7 :

Un tétraèdre est posé sur le plan H . Sur les arêtes SP , SQ , SR , on a marqué des points I , J , K .

a) Dessine l'intersection A de la droite KJ et du plan H .

b) Dessine l'intersection du plan IJK , et du plan H .





Exercice V_8 :

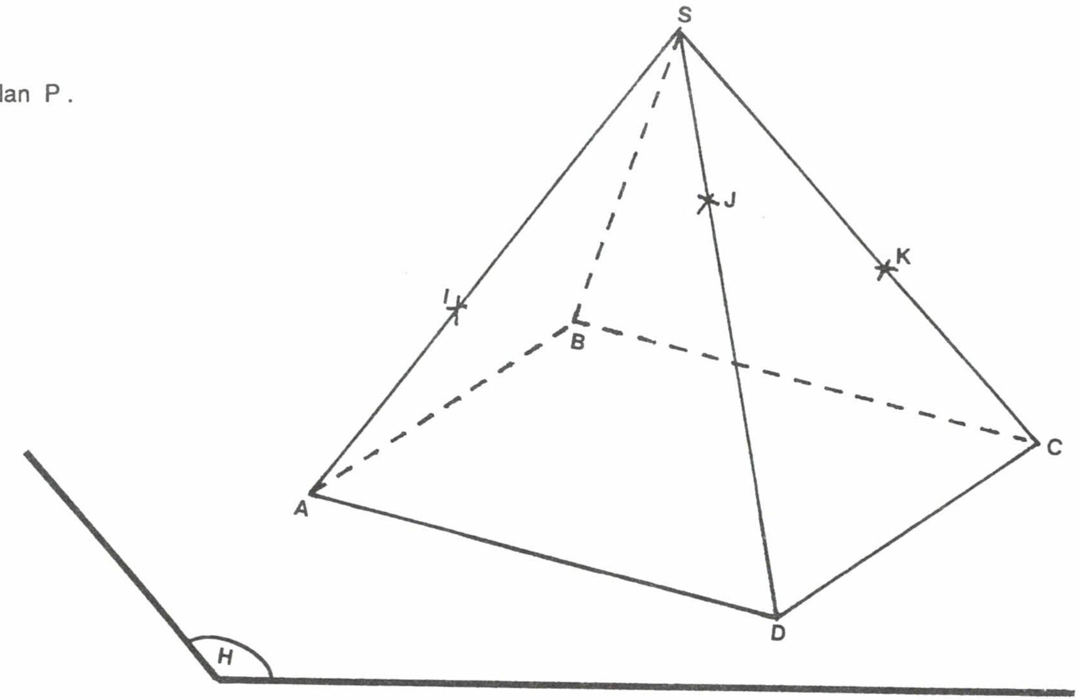
On a marqué un point I sur l'arête QS du tétraèdre. On a marqué un point J dans la face PSQ et un point K dans la face RQS .

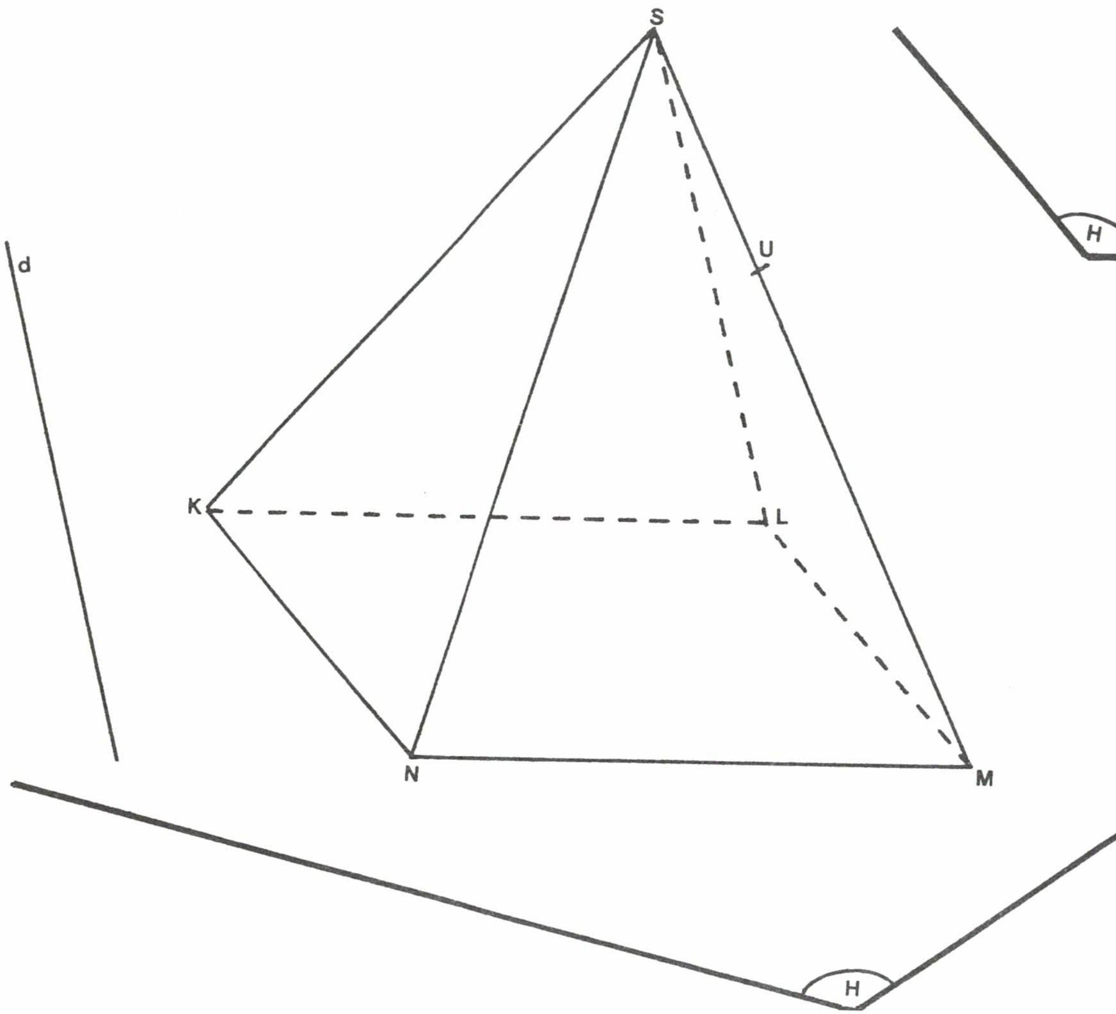
Dessine l'intersection du tétraèdre et du plan IJK .

Exercice V_9 :

Une pyramide de sommet S , de base ABCD , est posée sur le plan P . Sur les arêtes SA , SD , SC , on a marqué des points I , J , K .

a) Dessine l'intersection U de la droite IJ et du plan P .
b) Dessine l'intersection du plan P et du plan passant par I , J et K .
c) Dessine l'intersection de la pyramide et du plan passant par I , J et K .





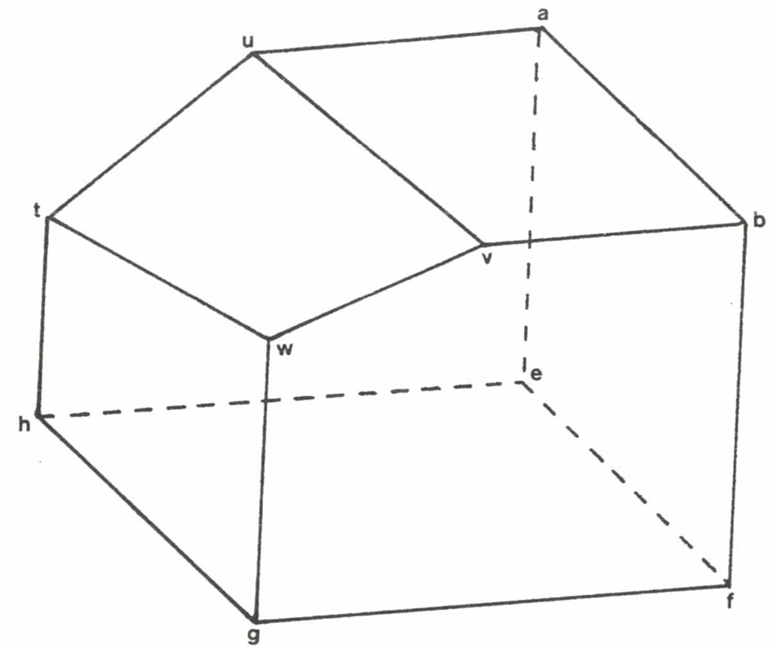
Exercice V_{10} :

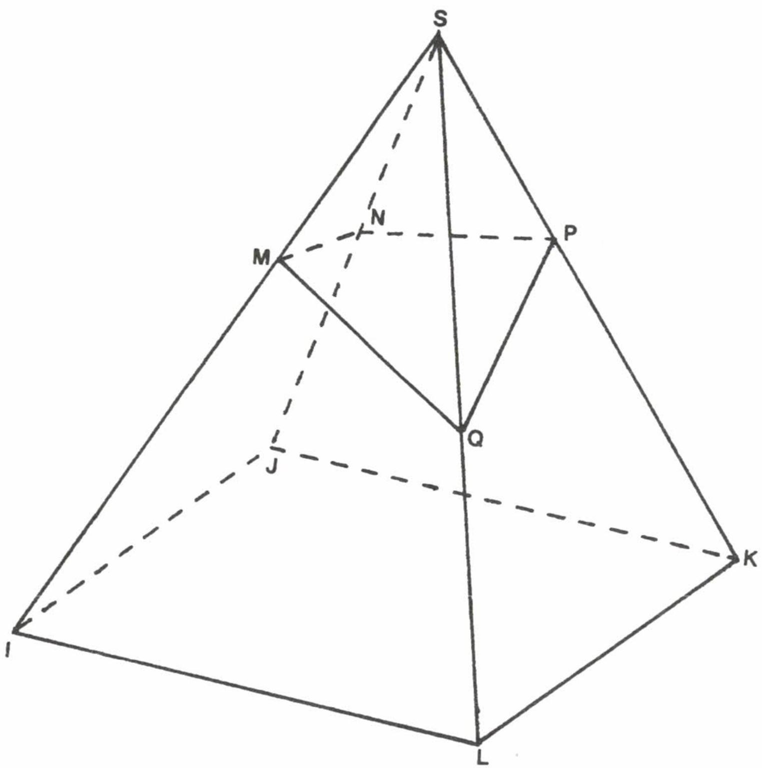
Une pyramide SKLMN est posée sur un plan H . On note P le plan passant par U (qui se trouve sur l'arête SM) et contenant la droite d (qui se trouve dans le plan H) .

a) Trace l'intersection de P et de la face SMN .
b) Trace l'intersection de P et du plan SKN .
c) Trace l'intersection de P et de la pyramide.

Exercice V_{11} :

On a dessiné un pavé, dont un morceau a été découpé. Cette section est-elle plane ? Pourquoi ?



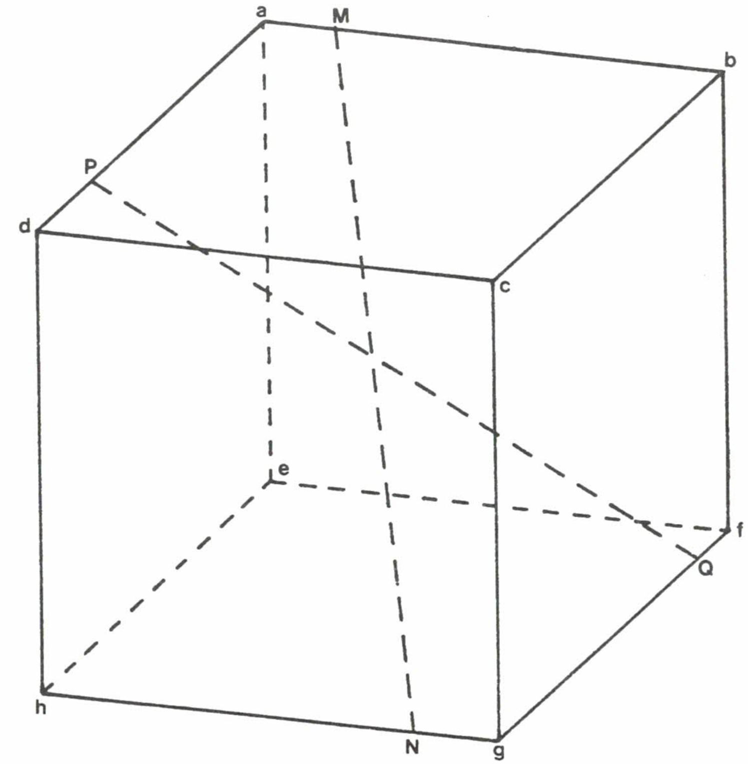


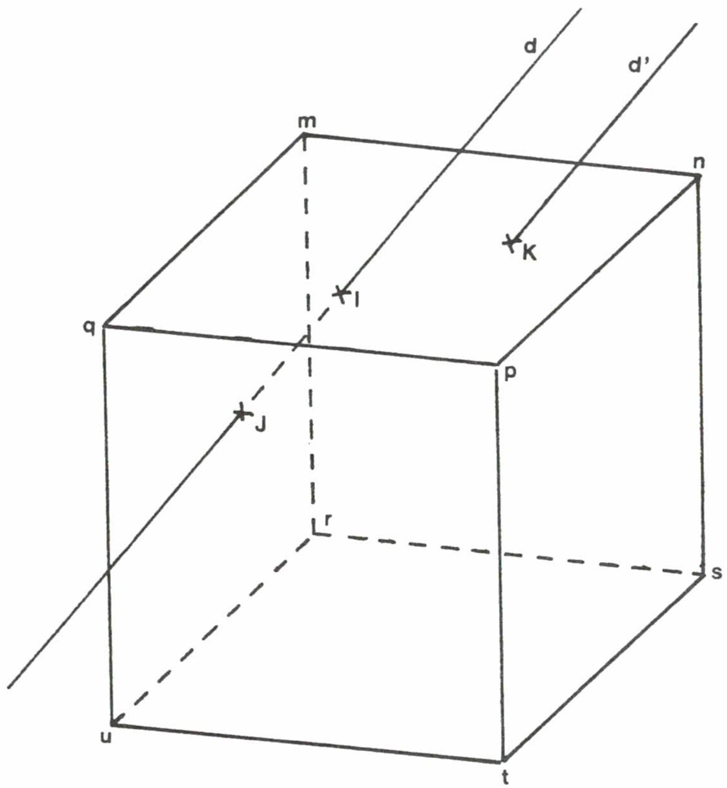
Exercice V_{12} :

La pyramide SIJKL a une base rectangulaire.
La section MNPQ est-elle plane ? Pourquoi ?

Exercice V_{13} :

Sur les arêtes du cube, on a marqué quatre points.
Les droites MN et PQ ont-elles un point commun ?



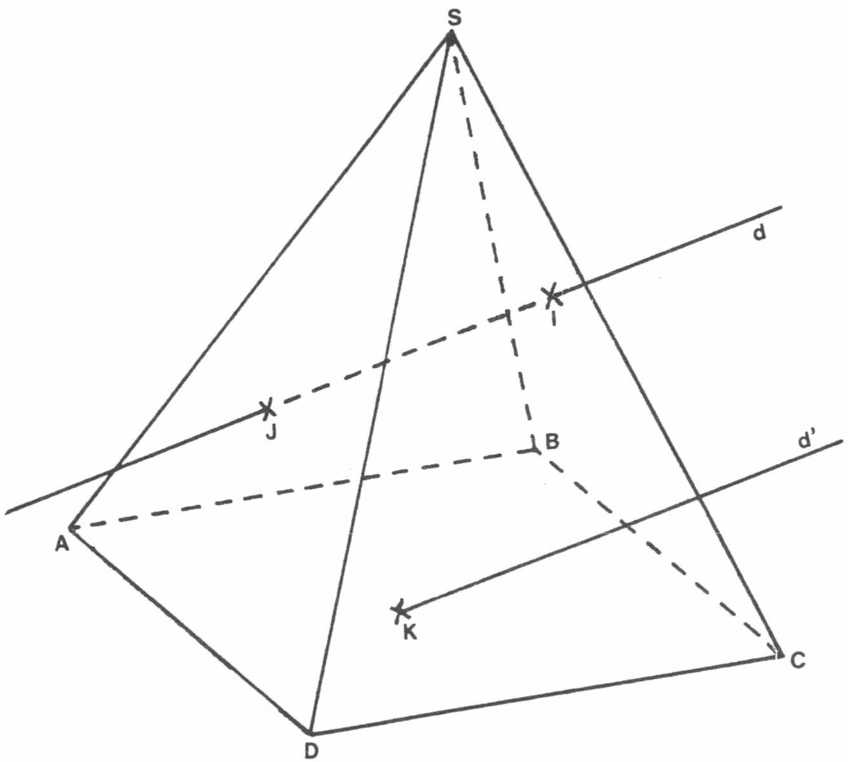


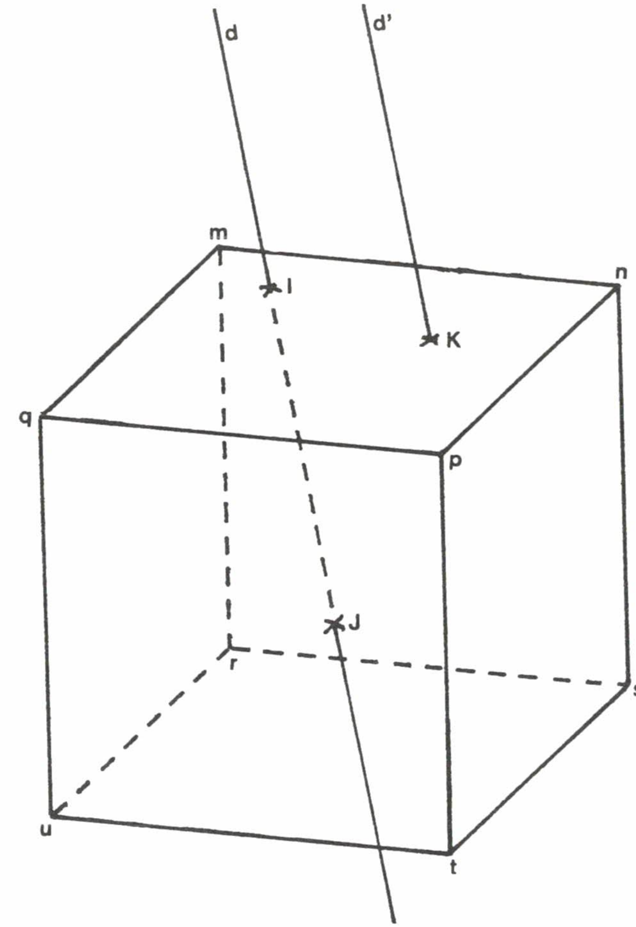
Exercice V_{14} :

Les deux droites d et d' sont parallèles. La droite d rencontre les faces du cube en I et J . La droite d' rencontre les faces du cube en K , et en un point L que tu dois dessiner.

Exercice V_{15} :

Les droites d et d' sont parallèles. La droite d rencontre les faces du cube en I et J . La droite d' rencontre les faces du cube en K , et en un point L que tu dois dessiner.





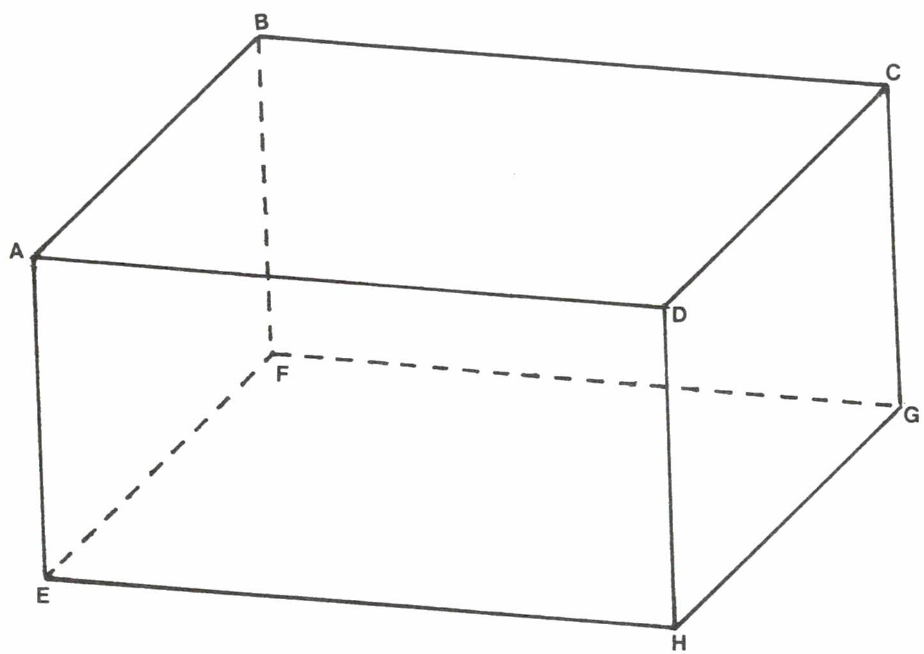
Exercice V_{16} :

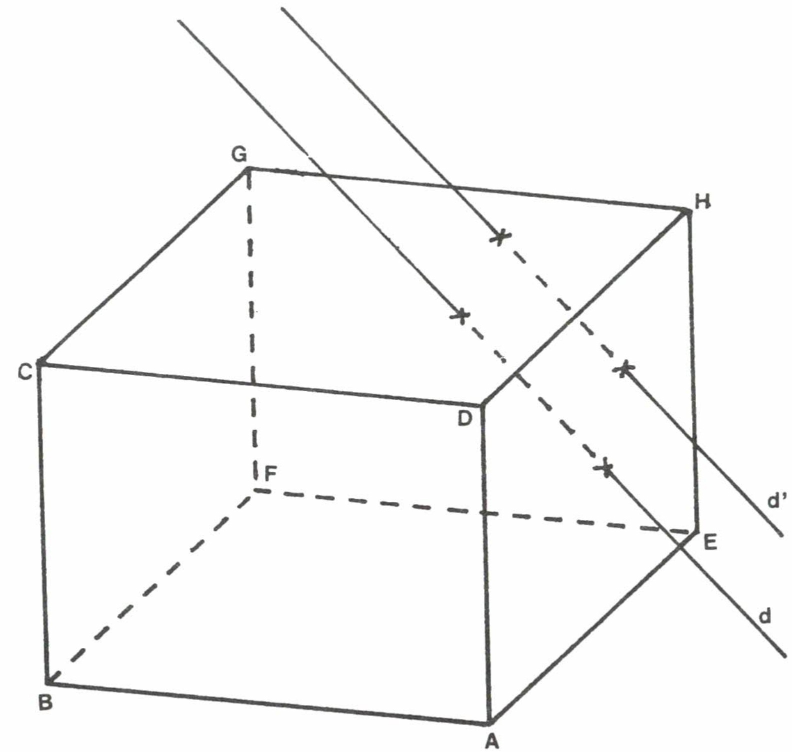
Les droites d et d' sont parallèles. La droite d coupe les faces de la pyramide SABCD en I et J . La droite d' coupe les faces de cette pyramide en K et en un point L que tu dois dessiner.

Exercice V_{17} :

Les droites d et d' coupent les faces du pavé en I , J et en K , L .
Les droites d et d' sont-elles parallèles ?

<u>Solution</u> : si d et d' sont parallèles, elles sont dans un plan P . Tu disposes de deux méthodes pour tracer l'intersection de ce plan et de la droite DH ...





Exercice V_{18} :

On a dessiné un pavé.

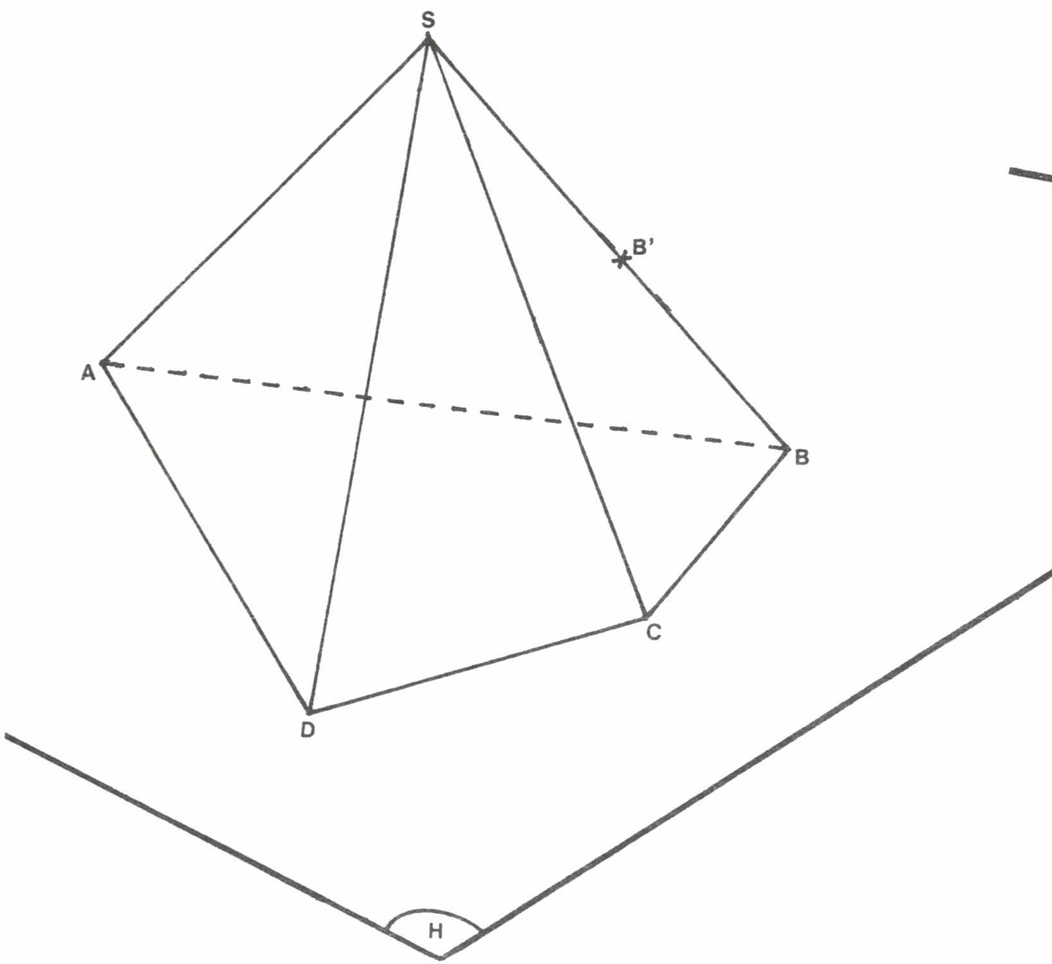
Trace la parallèle d à BH qui passe par le milieu I de AB .
Quelle est l'intersection J de d et de la face ADHE ?

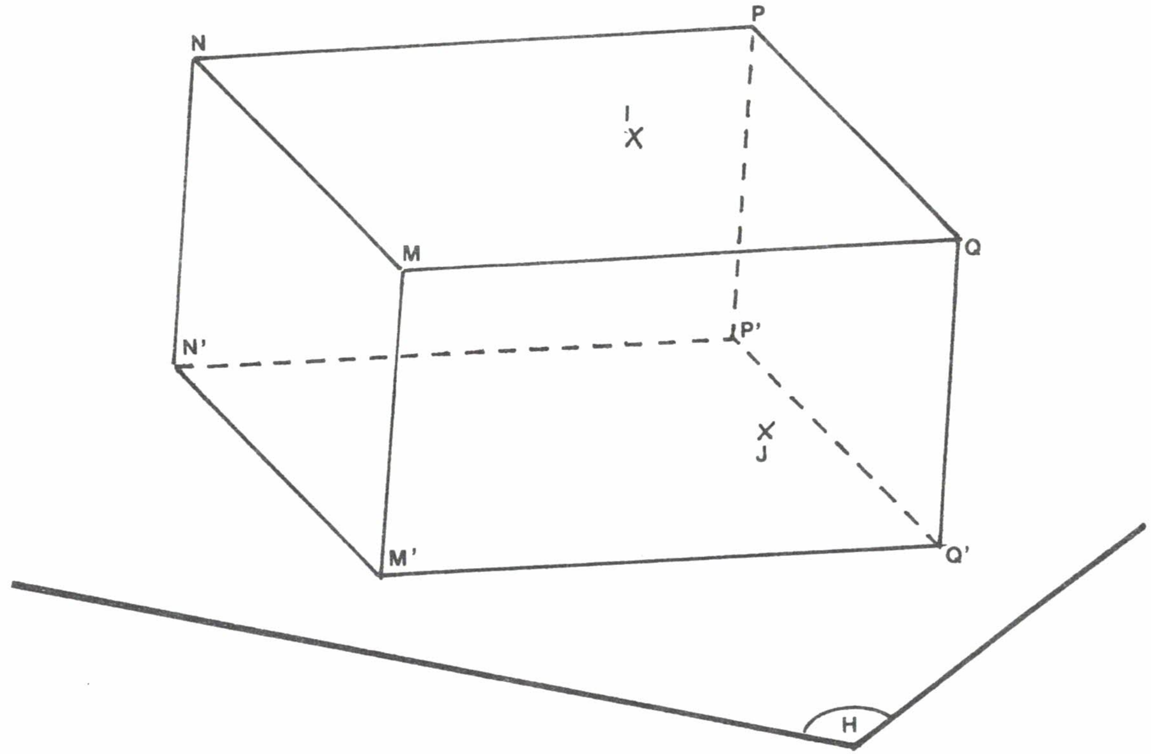
(<u>Conseil</u> : trace d'abord l'intersection du pavé et du plan qui contient BH et d) .

Exercice V_{19} :

Le pavé est posé sur le plan H . Le point I est dans la face MNPQ , le point J dans la face MQQ'M' .

a) Trace l'intersection du plan H et du plan IJQ .
b) Trace l'intersection A du plan H et de la droite IJ .
c) Trace la section du pavé par le plan IJQ .





Exercice V_{20} :

Une pyramide SABCD est posée sur un plan H .

a) Trace l'intersection I des trois plans SAB , SDC et H .
b) Trace l'intersection J des trois plans SBC , SAD et H .
c) Trace les intersections I' et J' du plan H et des parallèles à SI et à SJ qui passent par B' (B' est sur l'arête SB) .
d) Trace l'intersection de la pyramide et du plan P qui passe par B' et est parallèle à SI et SJ .
e) Quelle est la nature du quadrilatère que tu viens de dessiner ?

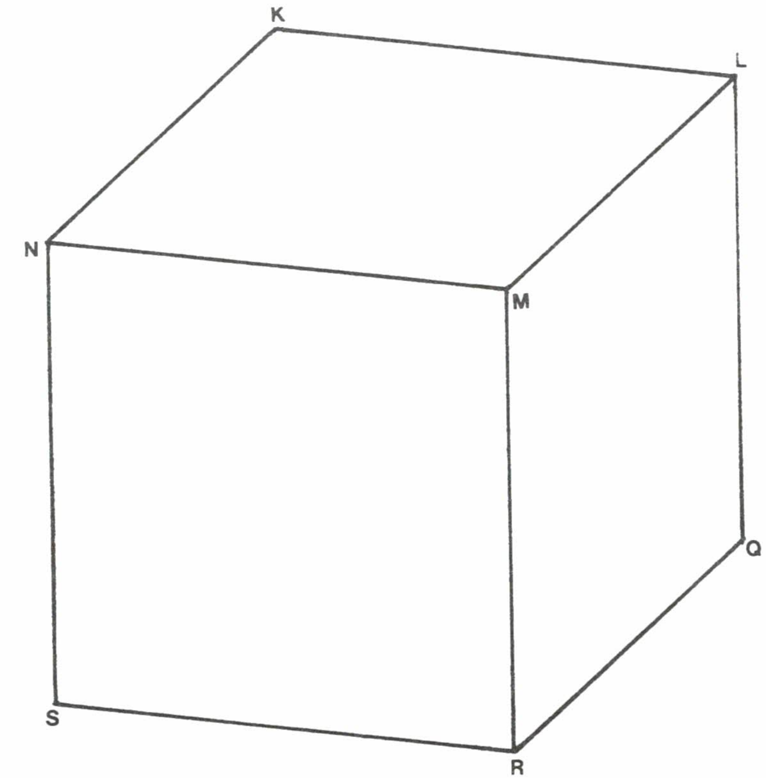
Exercice V_{21} :

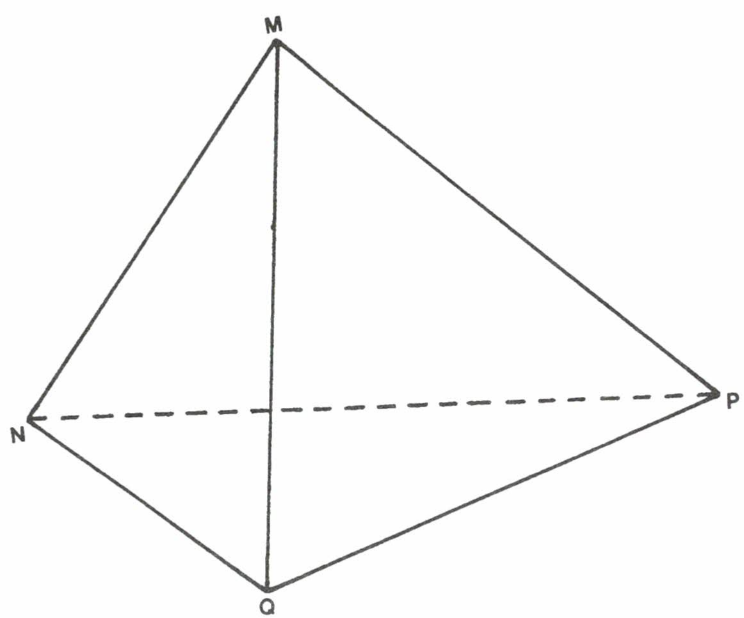
On a dessiné un cube.

a) Dessine en pointillé les arêtes cachées, et le huitième sommet P .

b) Dessine l'intersection de ce cube avec le plan π passant par le milieu de LK , et parallèle au plan LNR .

c) Dessine en vraie grandeur l'intersection que tu viens de tracer (les arêtes du cube mesurent 6 cm) . Que peux-tu dire de cette intersection ?





Exercice V_{22} :

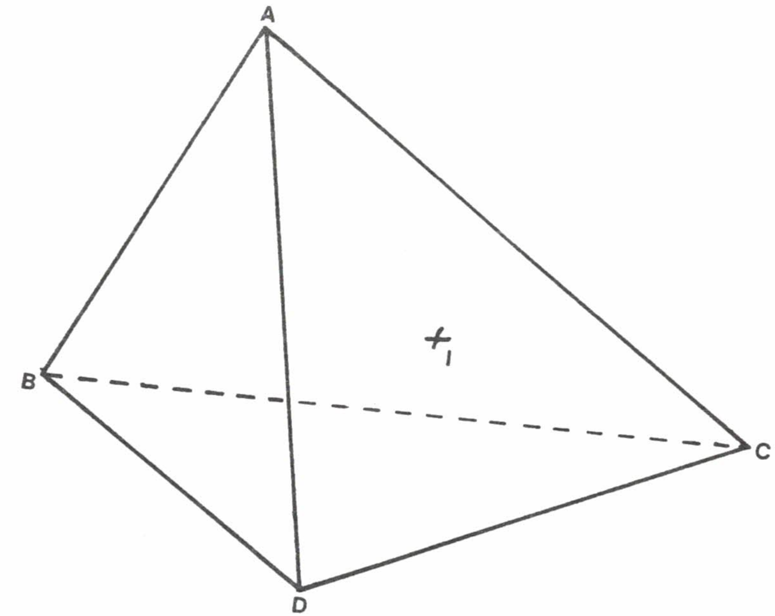
On note I , J , K , L les milieux des arêtes MN , MP , QP , QN de ce tétraèdre.

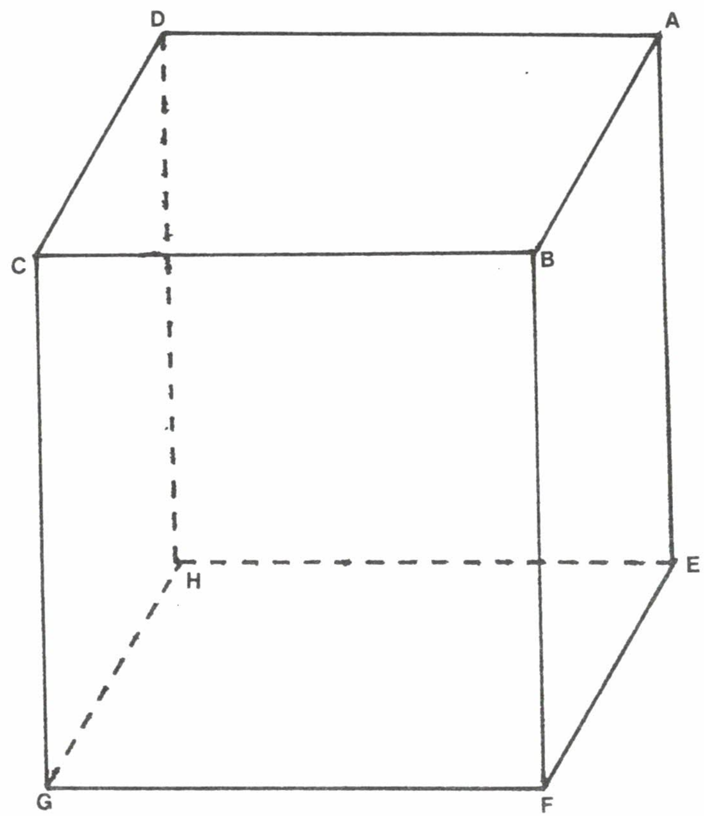
a) Place les points IJKL . Pourquoi sont-ils dans un même plan ?

b) On note U et V les milieux de MQ et NP . Pourquoi les segments UV , IK et JL ont-ils même milieu ?

Exercice V_{23} :

Le point I est dans la face ACD du tétraèdre. Trace l'intersection J de la face BCD et de la droite d parallèle à AB et qui passe par I .





Exercice V_{24} :

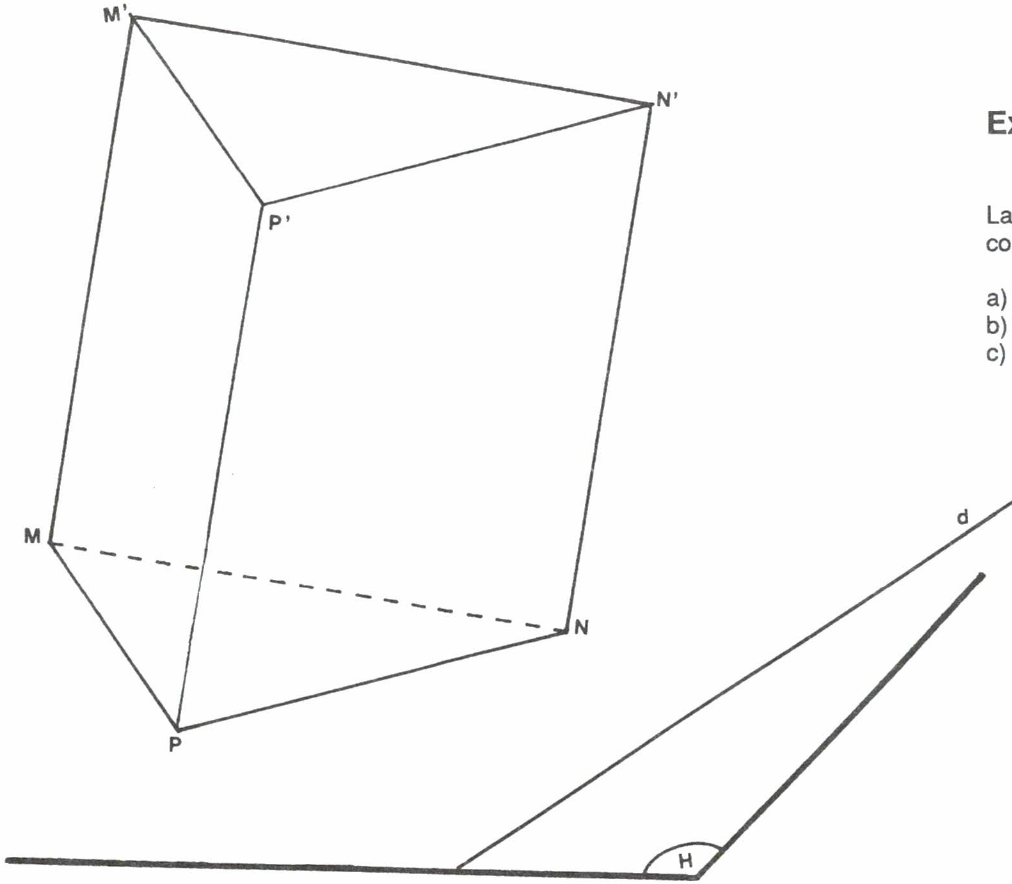
On a dessiné un cube ABCDEFGH ; on notera a la longueur de ses arêtes. Démontre que A , C , F , H sont les sommets d'un tétraèdre régulier.

Quelles sont les longueurs des arêtes de ce tétraèdre ? Quel est le volume de ce tétraèdre ?

Exercice V_{25} :

Le prisme MNPM'N'P' est posé sur le plan H . La droite d est dans le plan H . On note X le plan contenant d et passant par le milieu I de M'N' .

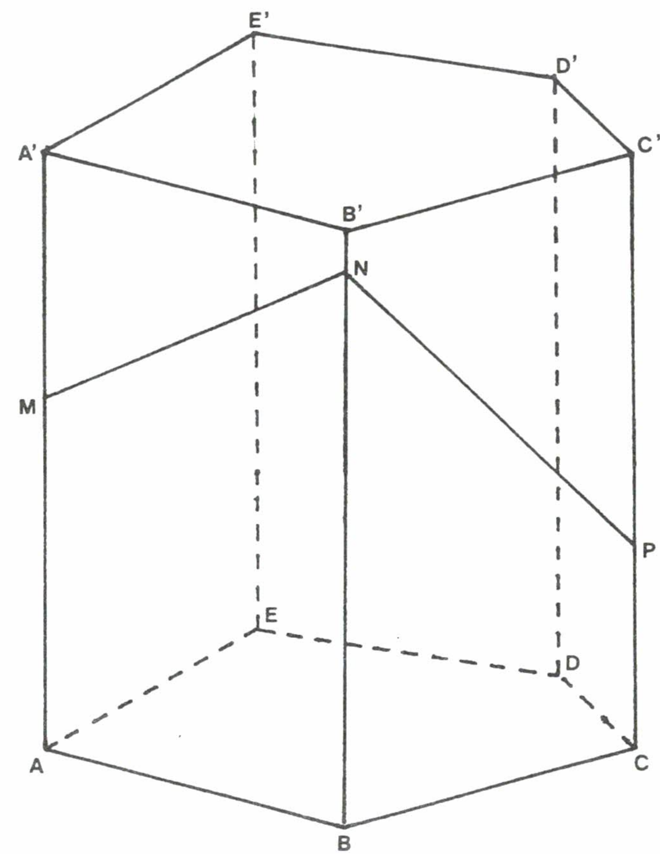
a) Trace l'intersection de X et de la face MNN'M' .
b) Trace l'intersection de X et de la face N'P'PN .
c) Trace l'intersection de X et du prisme.



Exercice V_{26} :

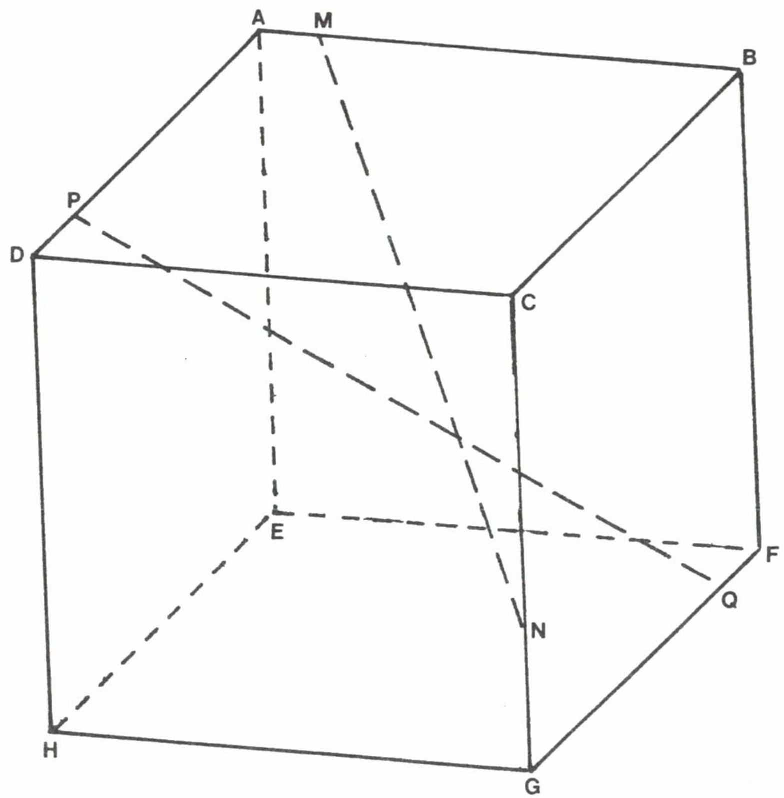
Un prisme à base pentagonale ABCDEA'B'C'D'E' , est coupé par un plan π . Ce plan π coupe les arêtes AA' , BB' et CC' en M , N et P .

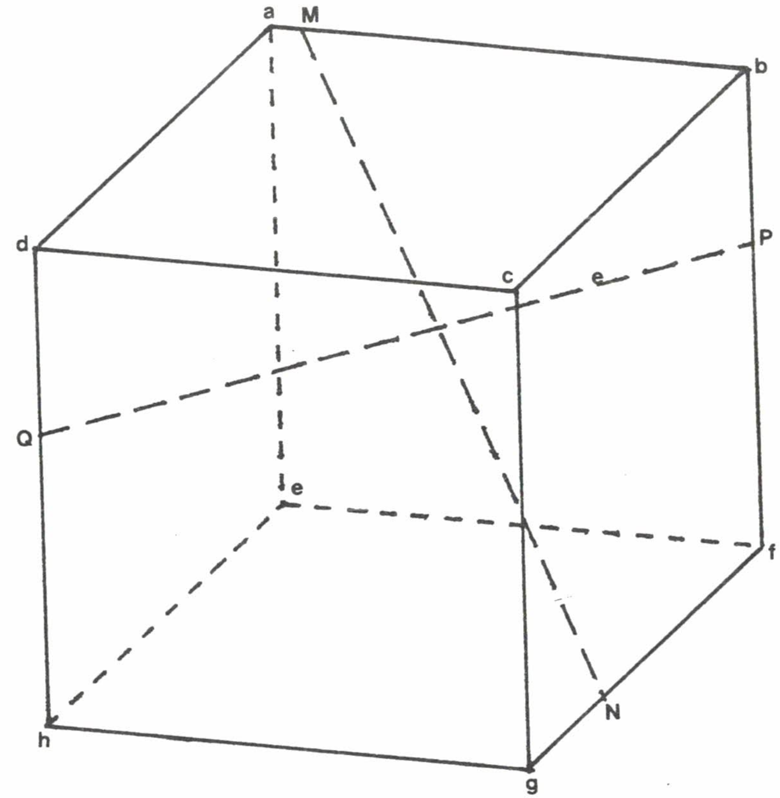
a) Dessine l'intersection du plan π et du plan ABCDE .
b) Dessine l'intersection du plan π et du prisme.



Exercice V_{27} :

Sur les arêtes du cube, on a marqué des points MNPQ .
Les droites MN et PQ ont-elles un point commun ?





Exercice V_{28} :

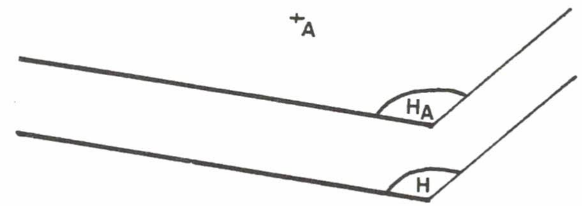
Sur les arêtes du cube, on a marqué des points MNPQ .
Les droites MN et PQ ont-elles un point commun ?

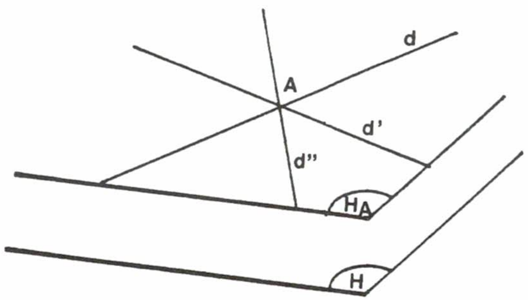
DROITES ET PLANS HORIZONTAUX

Va

Tous les plans horizontaux sont parallèles.

Par un point A , passe un seul plan horizontal H_A .





Vb

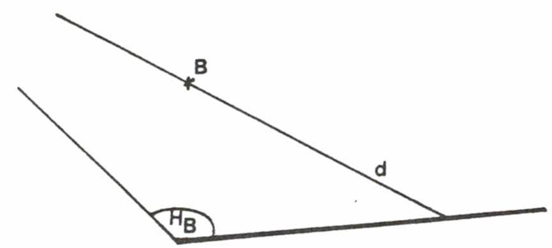
Toute droite contenue dans un plan horizontal, est horizontale.

Par le point A passent une infinité de droites horizontales d , d' , d" ,...
Elles sont toutes dans le plan horizontal H_A .

Vc

Si une droite horizontale rencontre un plan horizontal, elle est tout entière dans ce plan.

Si la droite d est horizontale et passe par B , elle est dans le plan horizontal H_B .

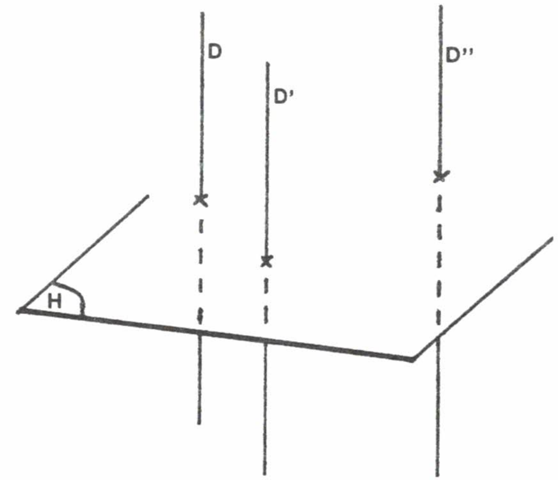


DROITES VERTICALES

VIa

Toutes les droites verticales sont parallèles.

Par un point A donné passe une verticale, et une seule v_A .
On l'appelle quelquefois " la verticale de A " .

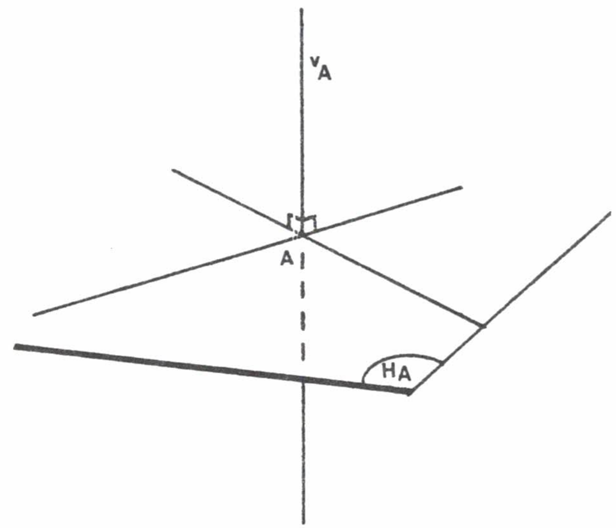


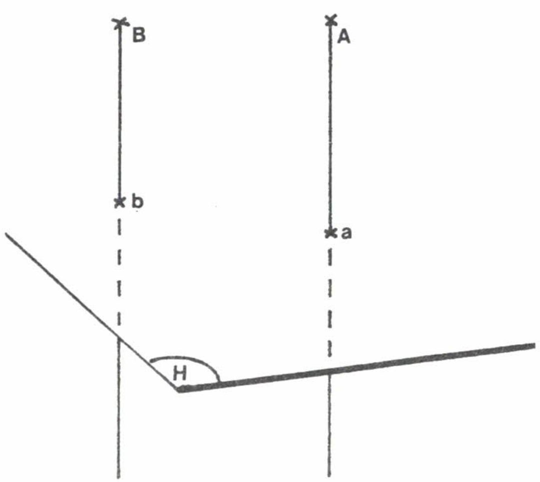
VIb

Si une droite verticale et une droite horizontale passent par A ,
elles sont perpendiculaires en A .

La verticale du point A est perpendiculaire à toutes les droites de H_A ,
qui passent par A .

Si une droite passe par A et est perpendiculaire à la verticale v_A ,
elle est horizontale.





Vocabulaire : Fixons un plan horizontal H . Et à tout point A , associons l'intersection a de H et de la verticale v_A . Le point a est appelé la projection horizontale de A sur H .

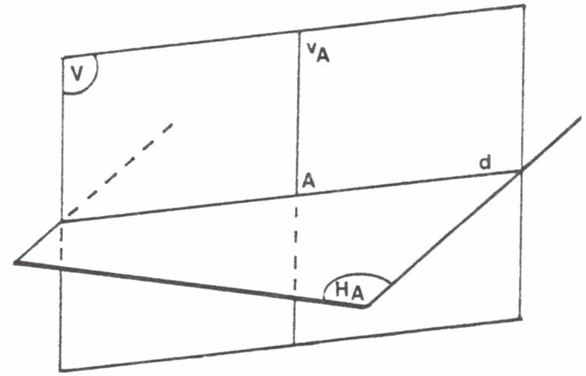
PLANS VERTICAUX

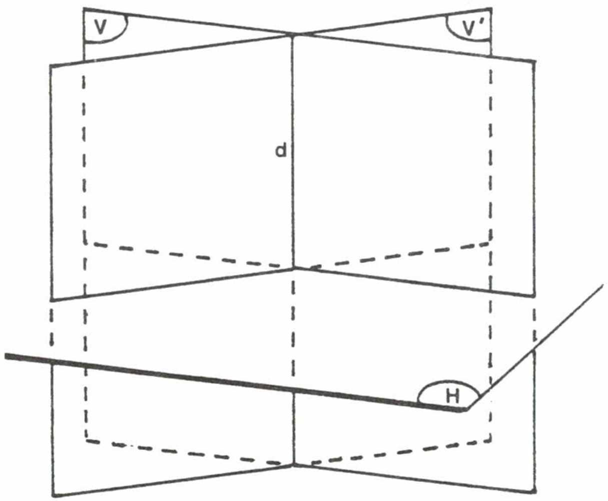
VIIa

Si un plan V contient une droite verticale, il est vertical.

Mais un plan vertical contient aussi des droites non verticales ; il contient même des droites horizontales.

Le plan V contient la verticale v_A ; il est vertical. Mais il contient aussi l'horizontale $d = H_A \cap V$.





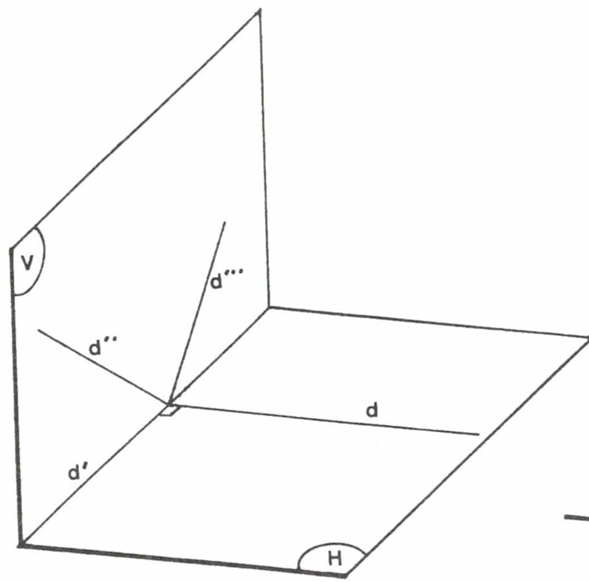
VIIb

L'intersection de deux plans verticaux (non parallèles) est une droite verticale.

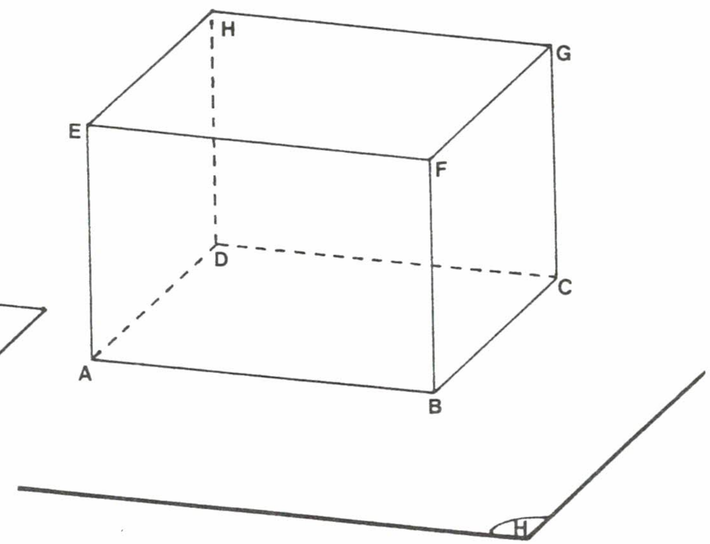
Les plans V et V' sont verticaux, leur intersection d est une droite verticale.

VIIc

Les droites perpendiculaires à d et passant par A , forment un plan vertical. C'est le plan perpendiculaire à d en A .



La droite horizontale d est perpendiculaire aux droites d' , d" , d"' ... qui sont dans le plan vertical V .



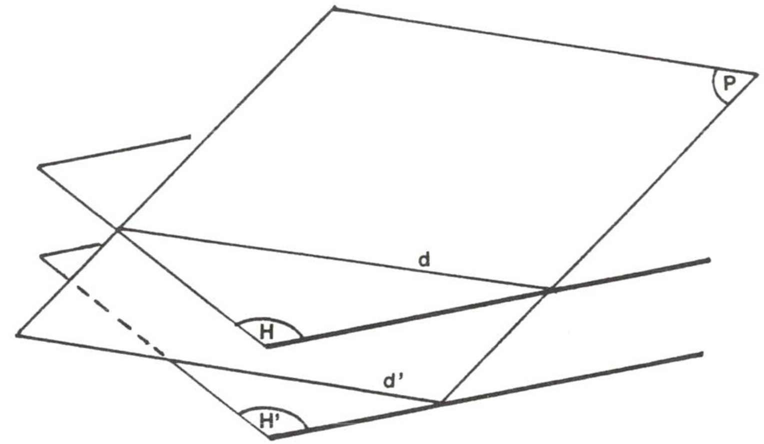
Dans ce pavé droit, si ABCD est horizontale, le plan BCFG est le plan vertical perpendiculaire à AB .

LIGNES DE PENTE D'UN PLAN

VIIIa

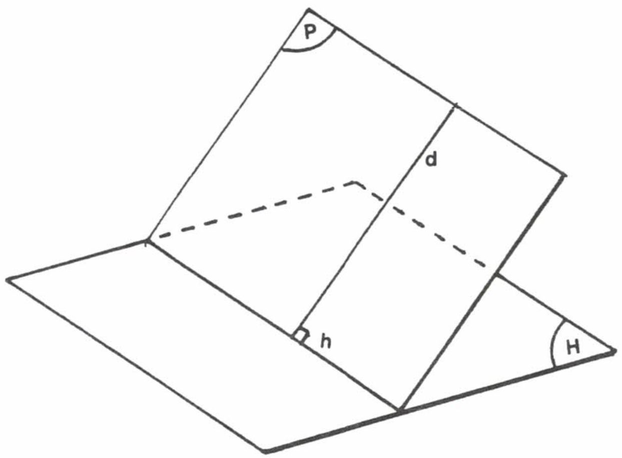
Un plan non horizontal contient une infinité de droites horizontales (ce sont ses intersections avec tous les plans horizontaux) .

$d = P \cap H$ et $d' = P \cap H'$ sont des horizontales du plan P .



VIIIb

Les droites du plan P qui sont perpendiculaires aux horizontales de P sont appelées les lignes de pente (ou lignes de plus grande pente) .

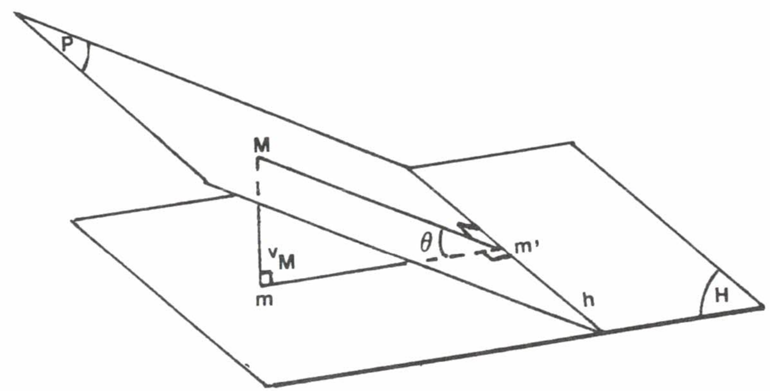


La droite d est perpendiculaire à l'horizontale h ;
c'est une ligne de pente.

VIIIc

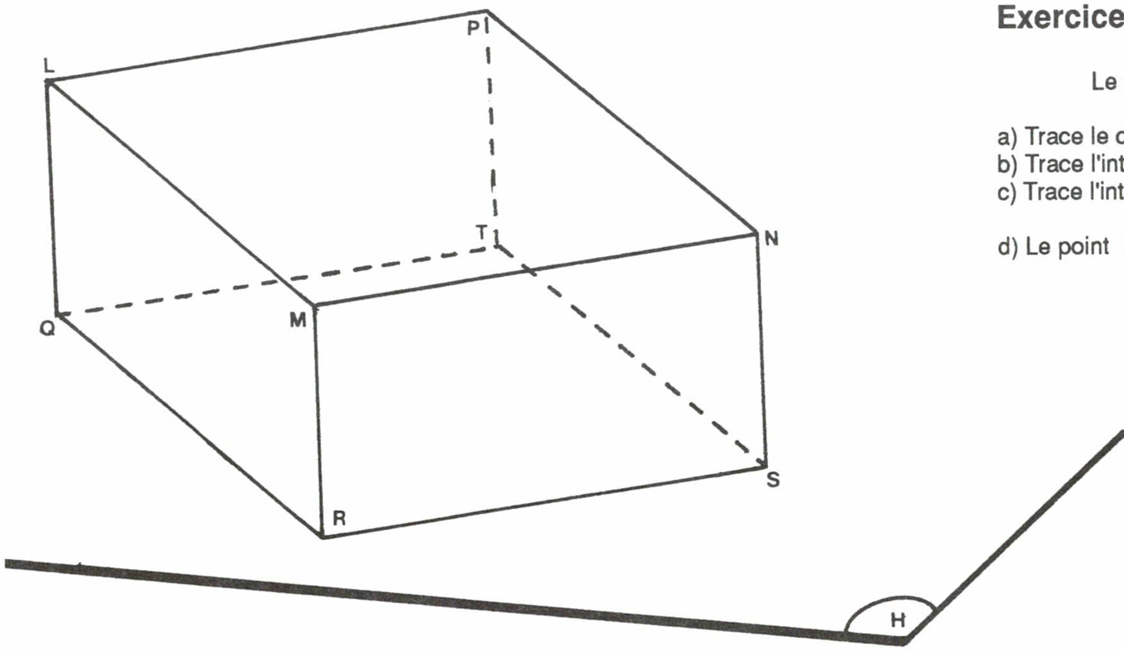
La figure dite des trois perpendiculaires :

Si M est un point de P , et m sa projection horizontale, alors la ligne de pente de M coupe l'horizontale h en m' ; et mm' est perpendiculaire à h .



Le rapport Mm/m'm est appelé
la pente du plan P (c'est aussi $\tan \theta$) .

DROITES ET PLANS VERTICAUX - DROITES ET PLANS HORIZONTAUX - VOLUMES

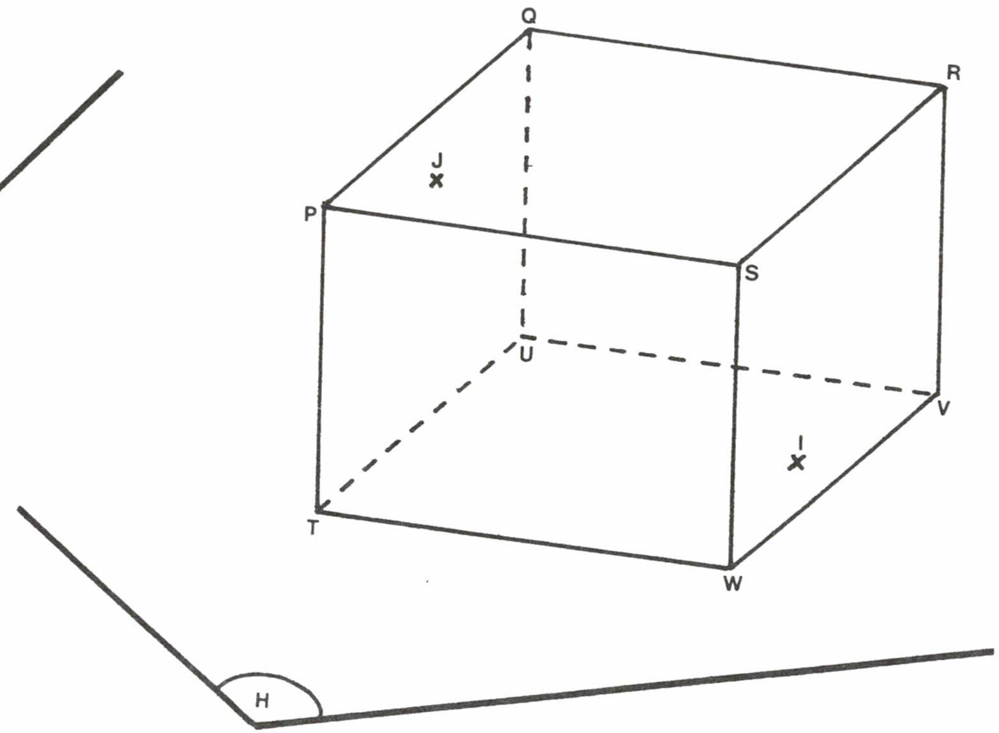


Exercice V_{29} :

Le pavé droit LMNPQRST est posé sur le plan horizontal H .

a) Trace le centre I de la face NPTS . Trace le milieu J du segment LP .
b) Trace l'intersection du pavé (et de H) par le plan vertical passant par I et J .
c) Trace l'intersection K de la droite IJ et de H .

d) Le point K est-il sur la droite RS ?



Exercice V_{30} :

Le pavé droit PQRSTUVW est posé sur un plan horizontal H . Le point I est dans la face SRVW . Le point J est dans la face PQRS .

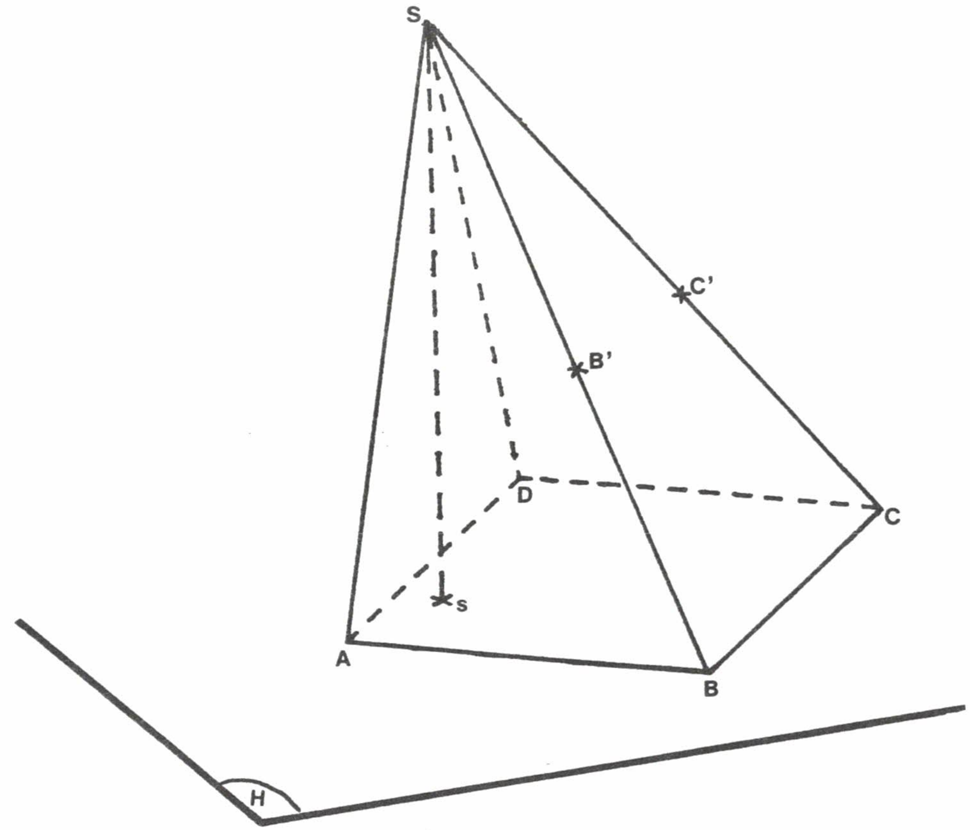
a) Trace les intersections i et j de H et des droites verticales passant par I et J .
b) Trace l'intersection du pavé et du plan vertical passant par I et J .
c) Trace l'intersection de la droite IJ et du plan H .

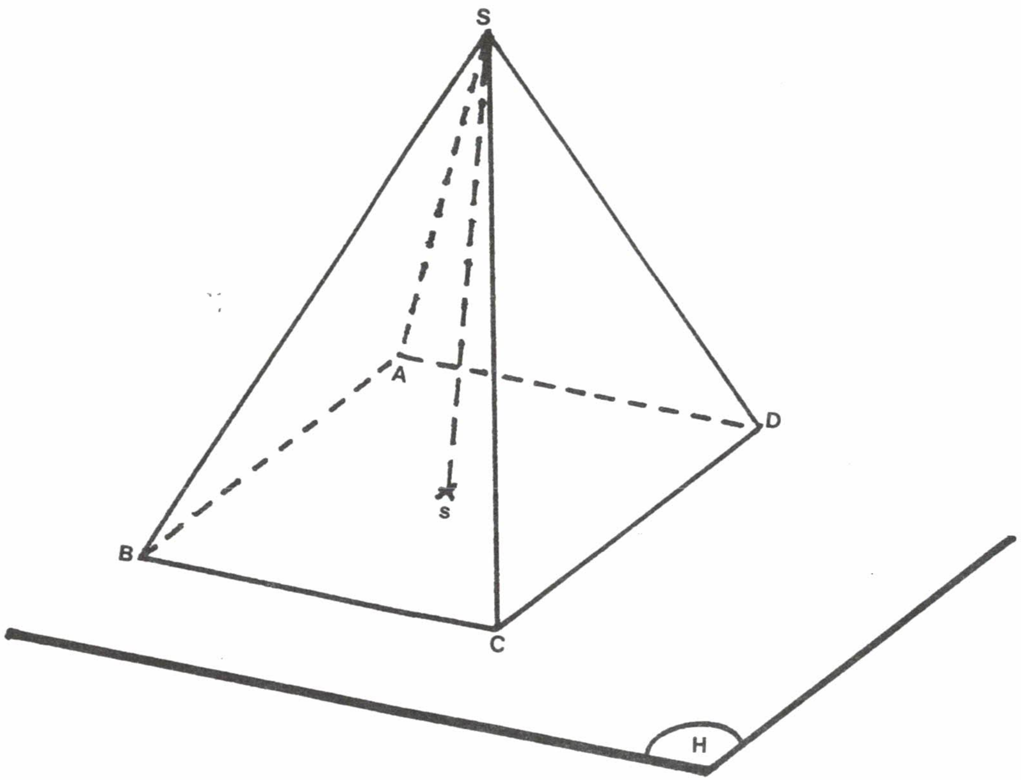
Exercice V_{31} :

Une pyramide SABCD est posée sur un plan horizontal H . La verticale du point S coupe H en s .

Soit V le plan vertical passant par les points C' et B' (situés sur les arêtes SC et SB) .

a) Trace les intersections c et b de H et des droites verticales passant par C' et B' .
b) Trace l'intersection de H et de V .
c) Trace l'intersection de V et de la pyramide.





Exercice V_{32} :

La pyramide SABCD est posée sur un plan horizontal H . La base ABCD est un rectangle de largeur BC = 4,5 cm et de longueur AB = 6 cm . La projection horizontale s de S est le centre de ce rectangle ; et la longueur de Ss est 5,7 cm.

a) Soit I le milieu de BC . Soit V le plan vertical qui contient D et I . Trace l'intersection M de V et de AC , puis l'intersection de V et de la pyramide.

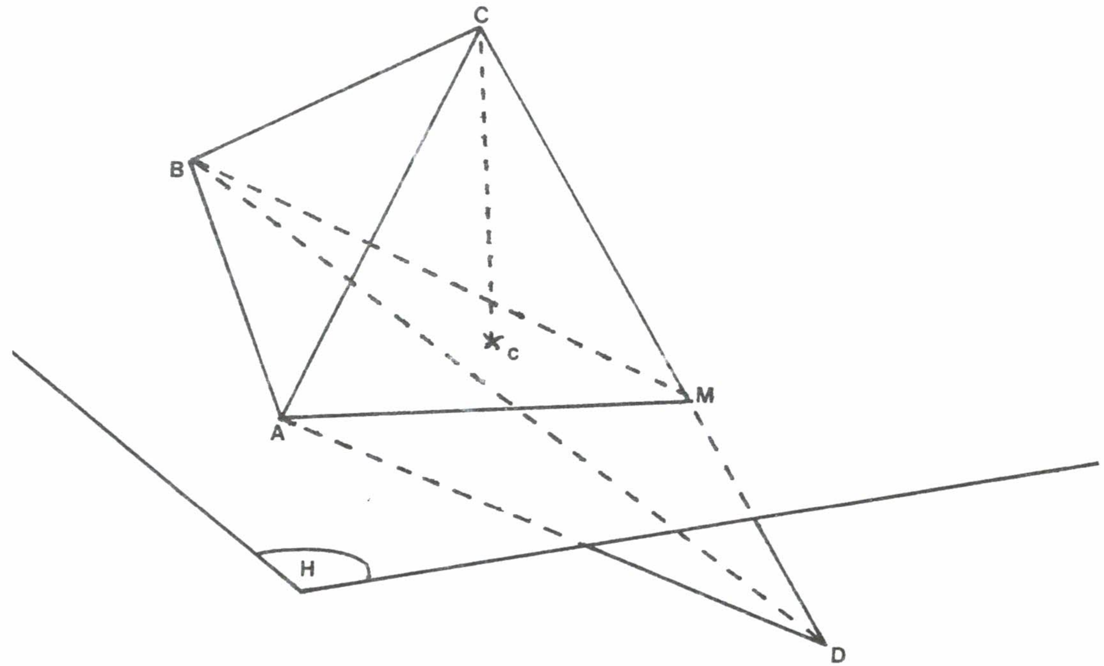
b) Le plan V partage la pyramide en deux parties. Quels sont leurs volumes ? (Tu auras probablement besoin de montrer que MC = 1/3 AC) .

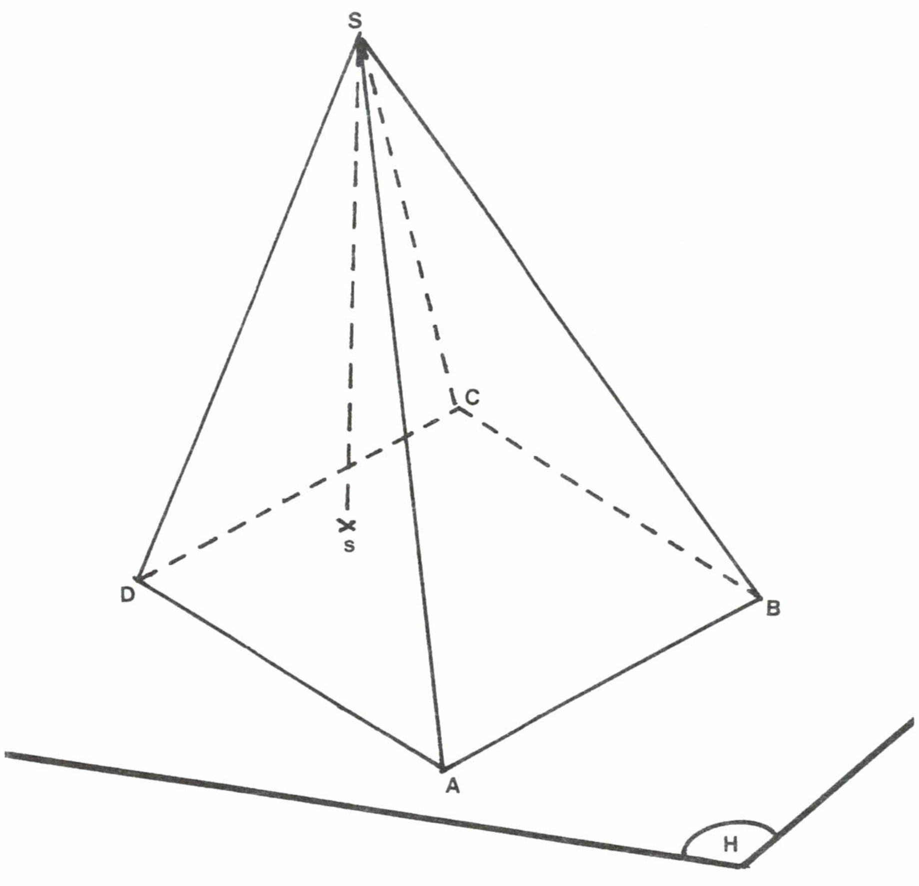
Exercice V_{33} :

L'arête AB du tétraèdre ABCD est horizontale. Le plan horizontal H qui contient AB coupe le tétraèdre suivant le triangle ABM . La verticale du point C coupe H en c .

a) Trace l'intersection d de H et de la verticale qui passe par D .

b) Soit V le volume de ABCD . Quels sont les volumes des tétraèdres ABCM et ABDM ? (Prends CM/MD = 3/2) .





Exercice V_{34} :

Une pyramide SABCD , a une base carrée de côté 6 cm . Cette base ABCD est horizontale. La verticale du point S rencontre le plan ABCD en s , à égale distance de AD et BC , et à 1 cm de DC . La hauteur de la pyramide est 8 cm .

a) Calcule les longueurs SA , SB , SC , SD .

b) Trace la hauteur issue de S dans le triangle SBC . Calcule sa longueur ; puis calcule l'aire du triangle SBC .

Exercice V_{35} :

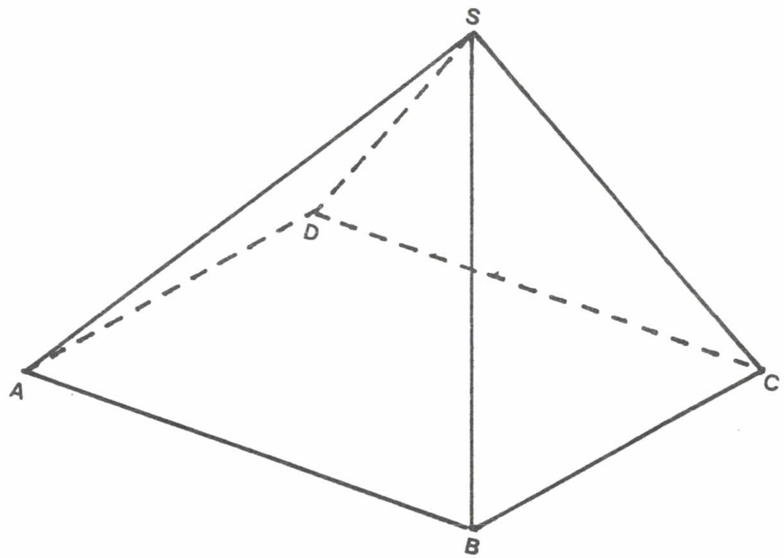
La pyramide SABCD a une base carrée, et ses 8 arêtes mesurent 6 cm (donc les triangles SAB , SBC , SCD et SDA sont équilatéraux) .

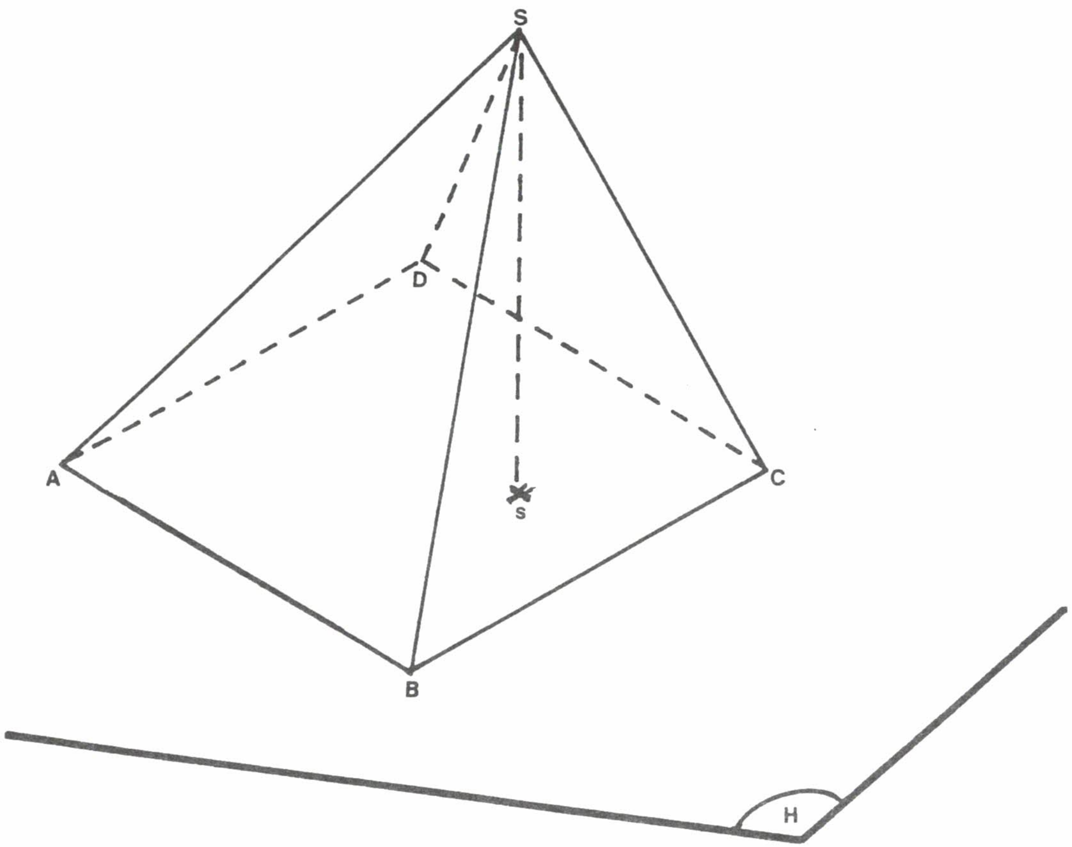
Le plan ABCD est horizontal. Et on note s la projection de S sur ce plan.

a) En appliquant le théorème de Pythagore aux triangles SsA et SsB , démontre que sA = sB .

b) Place le point s sur la figure. Calcule sA suis sS .

c) Calcule le volume de la pyramide.





Exercice V_{36} :

La pyramide SABCD est posée sur le plan horizontal H . La base ABCD est carrée de côté 7 cm . La projection horizontale s de S , est à 2 cm de BC et à 3 cm de CD . La hauteur Ss mesure 8 cm .

a) Calcule les longueurs des arêtes SA , SB , SC , SD .

b) Calcule le volume de la pyramide.

c) Calcule les aires des faces SAB , SBC , SCD , SDA .

d) On veut couper la pyramide par un plan vertical V passant par S qui la partage en deux parties de même volume. Comment faut-il choisir V ? Dessine l'intersection de V et de la pyramide.

Exercice V_{37} :

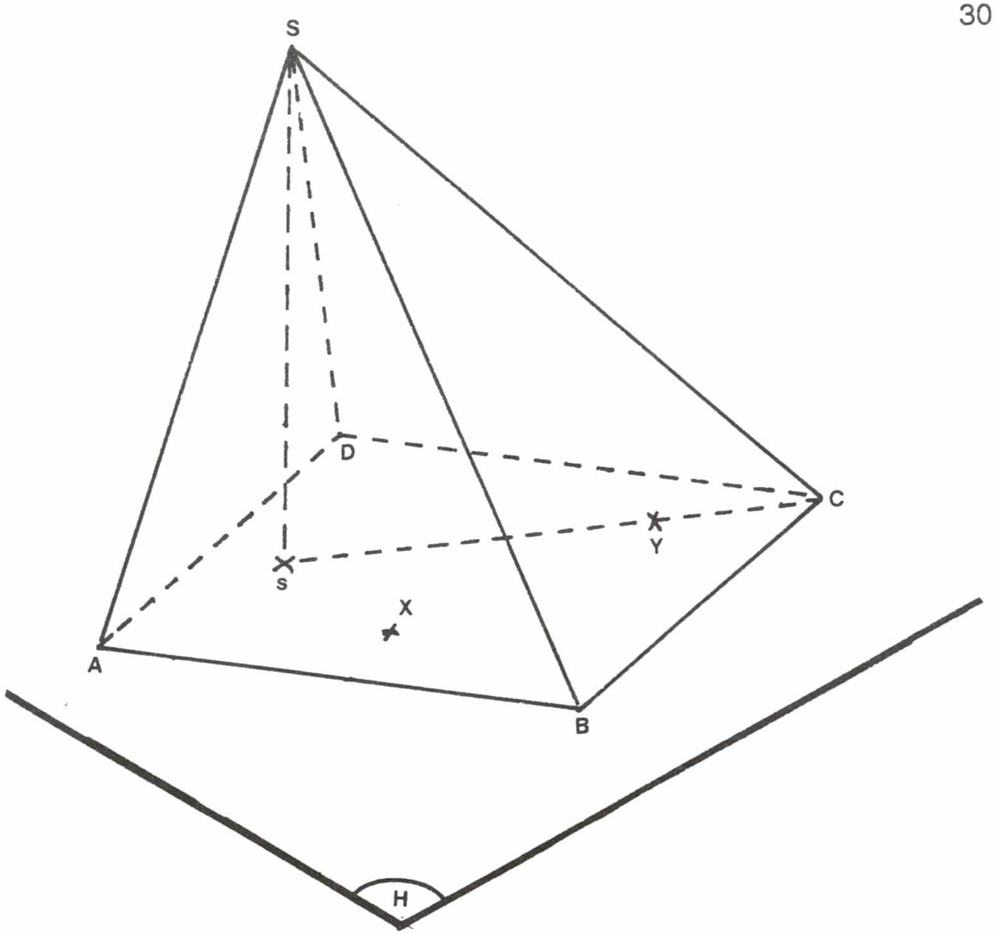
La pyramide SABCD est posée sur un plan horizontal H . La verticale du point S coupe H en s .

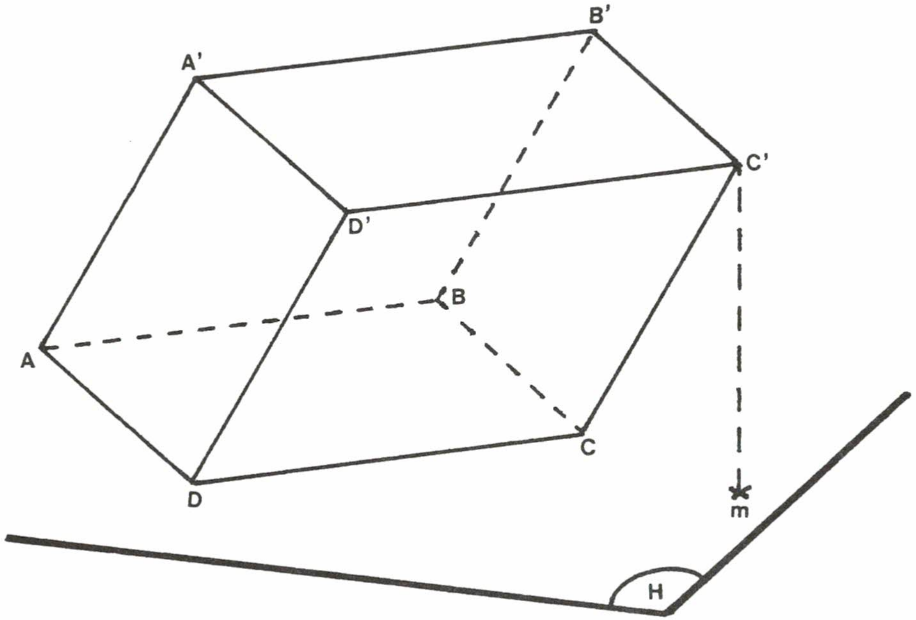
Dans le plan H on a dessiné deux points X, Y .

a) Dessine l'intersection de la pyramide et de la verticale de Y .

b) Dessine l'intersection de la pyramide et de la verticale de X . (Dessine d'abord l'intersection de la pyramide et du plan vertical contenant X et S) .

c) Dessine l'intersection de la pyramide et du plan vertical passant par X et Y .





Exercice V_{38} :

Le pavé oblique ABCDA'B'C'D' est posé sur le plan horizontal H . La verticale du point C' coupe H en m .

a) Soit V le plan vertical qui contient C' et A' . Trace l'intersection de V et de H ; puis l'intersection de V et du pavé.

b) Trace l'intersection de V et de DB' .

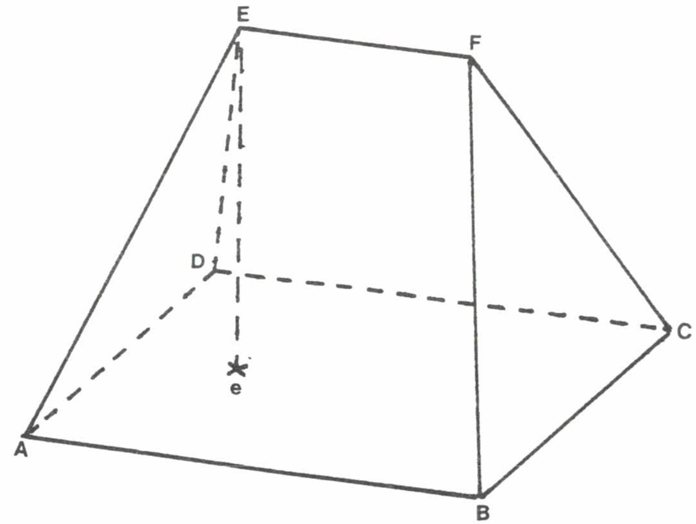
Exercice V_{39} :

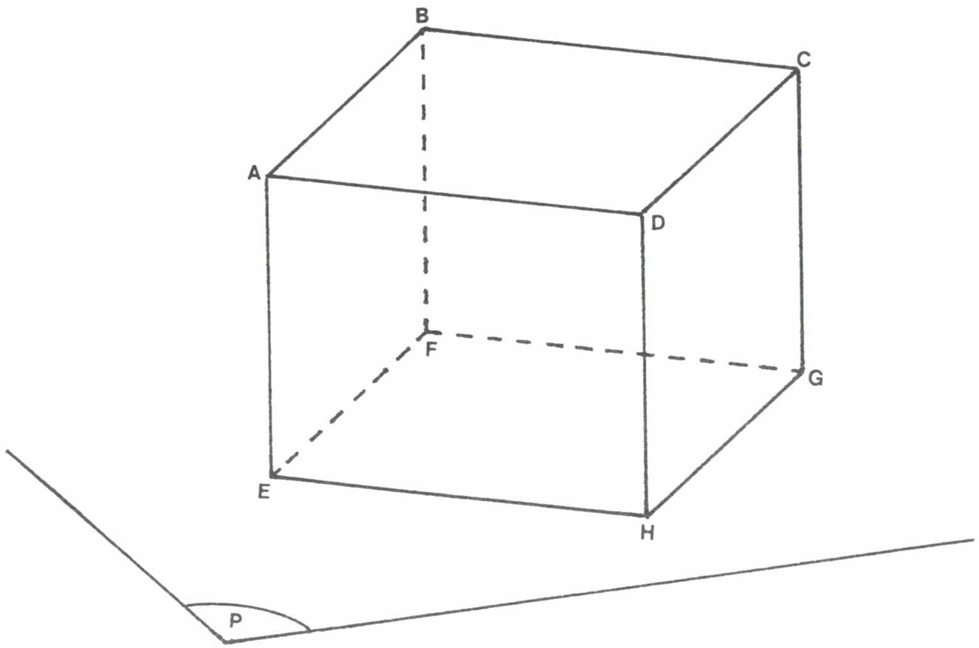
Voici un solide. La base ABCD est posée sur le plan horizontal H ; c'est un rectangle (AB = 6 cm et BC = 5 cm) . Le segment EF est horizontal et parallèle à AB et CD ; il est long de 3 cm ; la projection horizontale de E est le point e (e est à 1,5 cm de AD) . La hauteur Ee est 4,5 cm .

a) Dessine l'intersection du solide et du plan vertical P_1 qui passe par E et est perpendiculaire à EF . Quel est le volume de la partie du solide ABCDEF située à gauche de P_1 ?

b) Dessine l'intersection du solide et du plan vertical P_2 qui passe par F et est perpendiculaire à EF . Quel est le volume de la partie du solide ABCDEF située entre P_1 et P_2 ?

c) Quel est le volume du solide ABCDEF ?





Exercice V_{40} :

La face EFGH de ce pavé droit est horizontale. On note I le milieu de BC. Le plan vertical P est perpendiculaire à la droite horizontale AI , et il passe par B . On suppose AE = 4 cm , AD = 5 cm et AB = 4 cm .

a) Trace l'intersection du pavé et du plan P (commence par dessiner en vraie grandeur la face ABCD , et son intersection par P) .

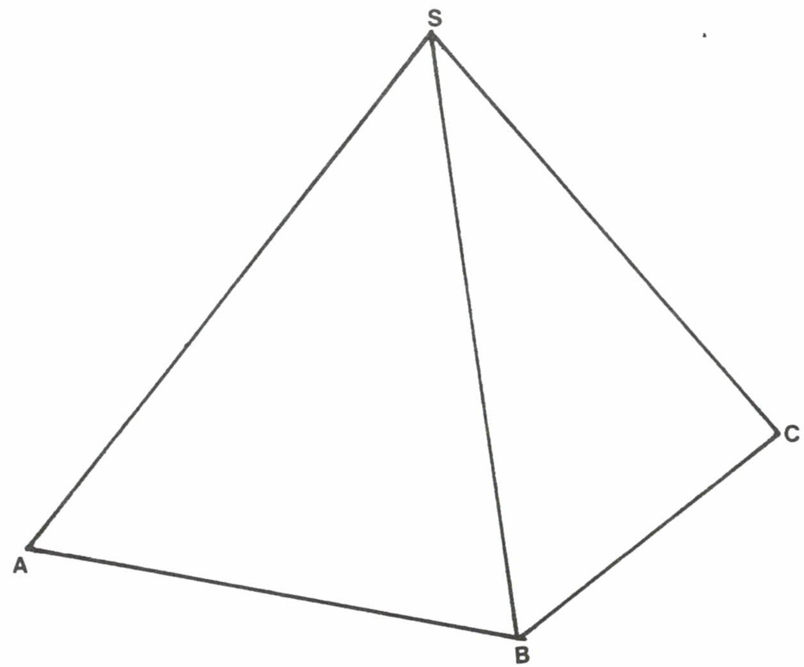
b) Le plan P coupe le cube en deux morceaux, quels sont leurs volumes ?

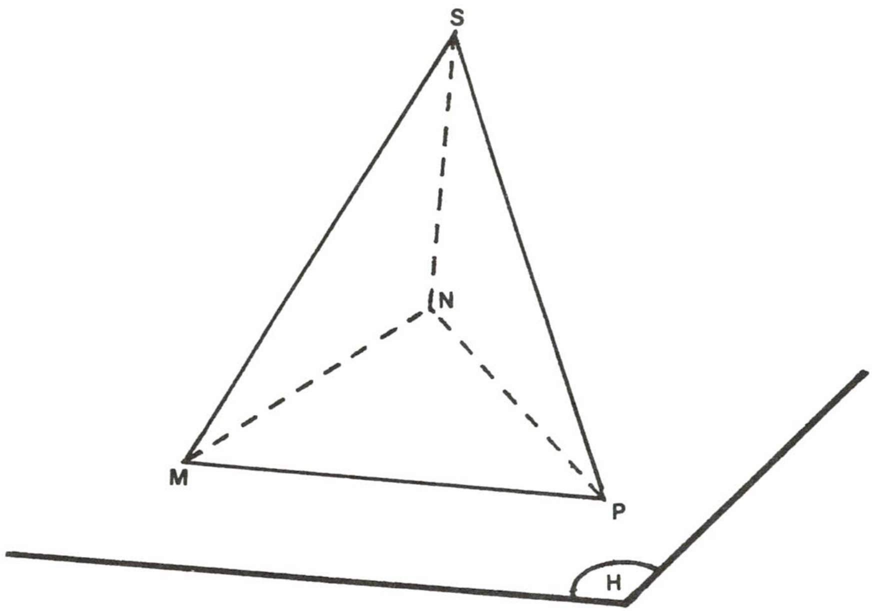
c) Quelle est la distance de A au plan P ?

Exercice V_{41} :

SABCD est une pyramide à base carrée (de côté 6 cm) . La base est dans un plan horizontal H . La projection horizontale de S est le centre s du carré ABCD .

a) Dessine le sommet caché. Dessine en pointillé les arêtes cachées. Dessine la projection horizontale de S .
b) Soit I le milieu de BA , on note P le plan vertical perpendiculaire à CI , et qui passe par S .
Dessine l'intersection de P et de H (tu peux dessiner d'abord en vraie grandeur, la partie de la figure qui se trouve dans H) .
Dessine l'intersection de P et de la pyramide.
c) La pyramide a une hauteur h . Le plan P la coupe en deux morceaux ; quels sont les volumes de ces deux morceaux ?





Exercice V_{42} :

Le tétraèdre SMNP est posé sur le plan horizontal H .

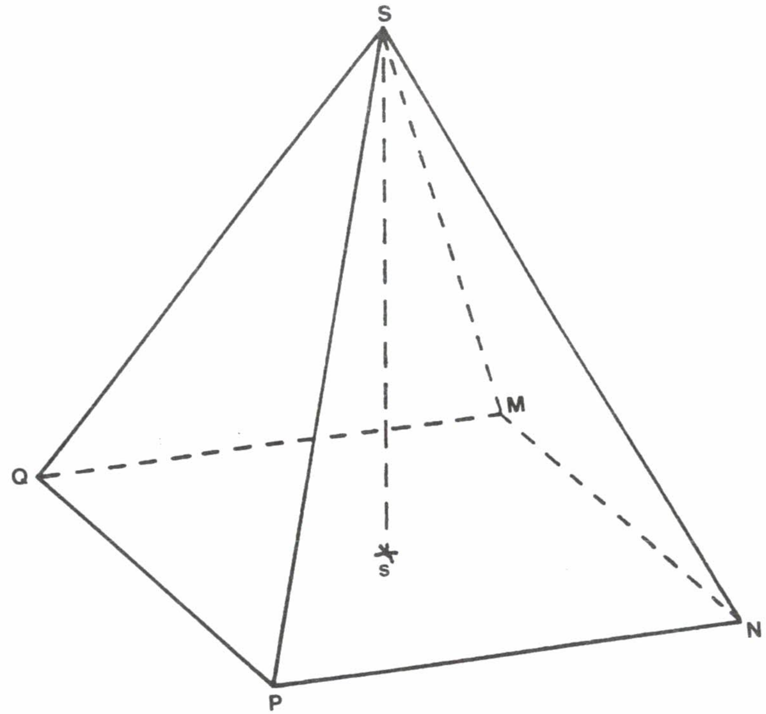
Le couper par deux plans horizontaux H_1 et H_2 , de façon que les volumes des trois morceaux soient égaux.

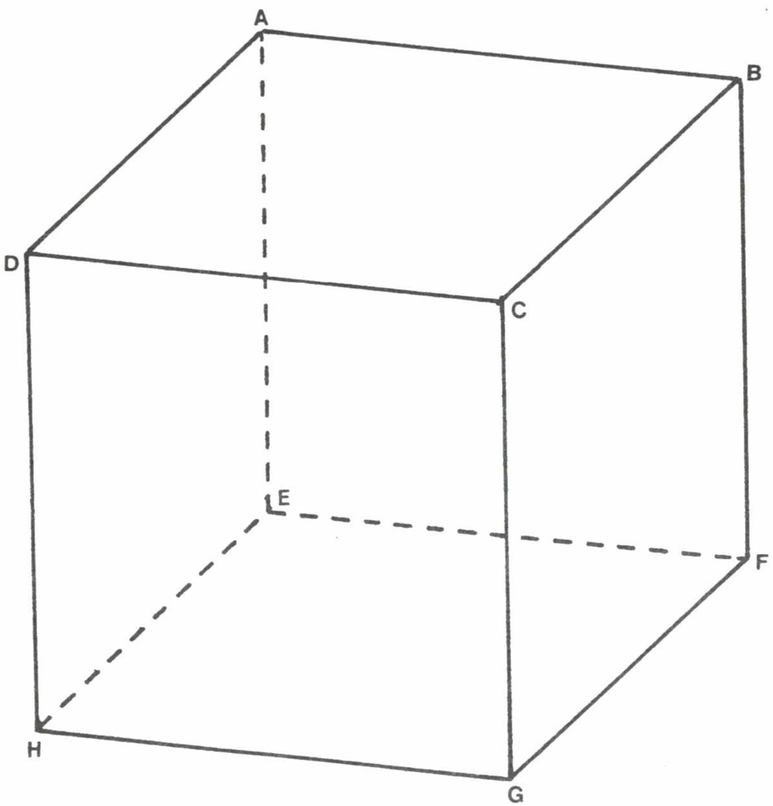
Exercice V_{43} :

La base MNPQ de cette pyramide est dans un plan horizontal H . La projection horizontale du sommet S est le centre s du carré.

Le plan V est vertical et perpendiculaire à PI (I est le milieu de MQ) ; il passe par N .

a) Trace l'intersection de V et du plan vertical MSP . On note T l'intersection de V et de SP .
b) Trace l'intersection de V et de la pyramide.





Exercice V_{44} :

Ce cube a 6 cm de côté. La face ABCD est horizontale. Place sur AE le point M tel que EM = 3,5 cm , sur HE le point N tel que EN = 4 cm , et sur FE , le point P tel que EP = 4 cm .

a) Calcule MN , NP et PM .
b) Trace l'intersection du cube et du plan MNP par le plan vertical V passant par E et perpendiculaire à NP . (Dessine en vraie grandeur la face EFGH avec P et N).
c) Ce plan V coupe le tétraèdre EMNP suivant un triangle. Calcule les longueurs des côtés de ce triangle.
d) Quelle est la pente du plan MNP ?

Exercice V_{45} :

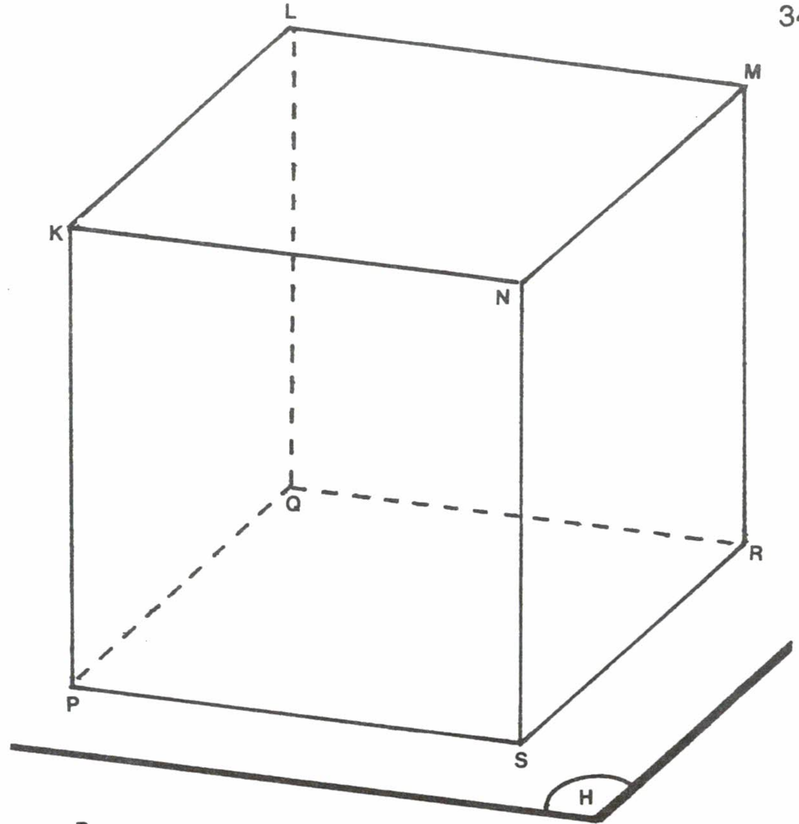
On a dessiné un cube de côté 6 cm posé sur le plan horizontal H .

Le plan Z passe par N , R et I (I est sur l'arête KP et KI = 2/5 KP) .

a) Trace l'intersection du cube et du plan Z .

b) Trace la ligne de niveau de Z qui passe par I .

c) Quelle est la longueur de la portion de cette ligne de niveau qui se trouve à l'intérieur du cube ?

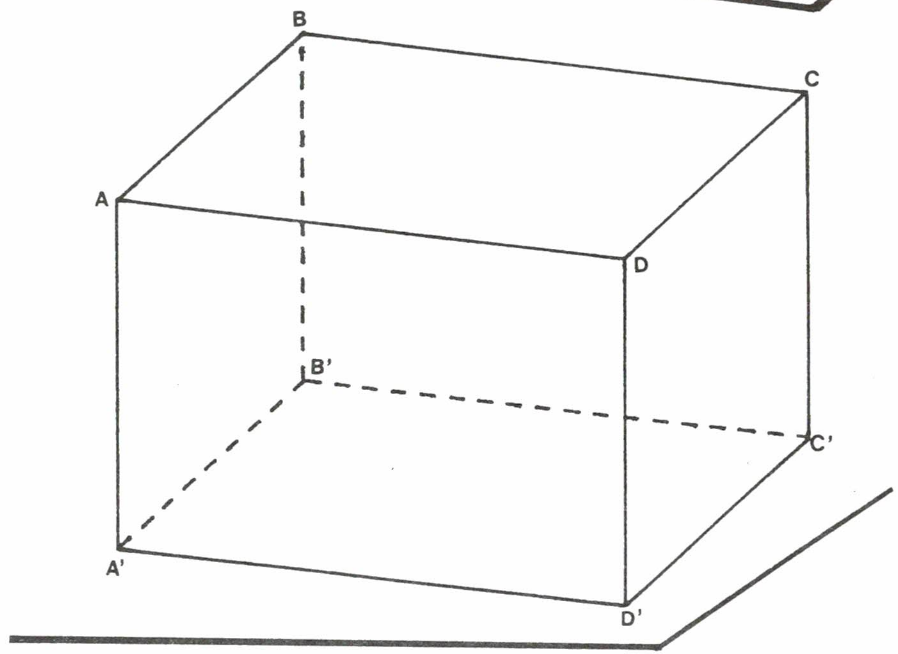


Exercice V_{46} :

Le pavé droit ABCDA'B'C'D' est posé sur le plan horizontal H . Le plan P passe par C , D et I (où I est le milieu de AA') .

a) Trace la droite d , intersection de H et de P (cherche d'abord le point de d qui se trouve dans le plan vertical qui contient I et C) .

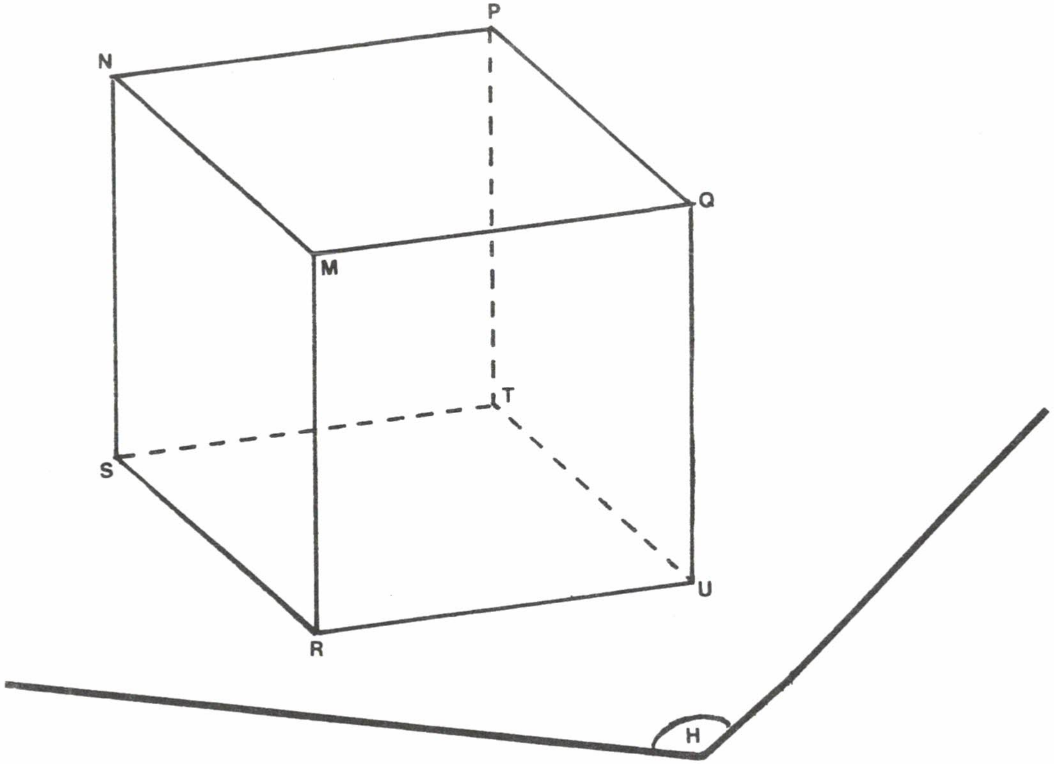
b) Trace la ligne de niveau n du plan P qui passe par I , et trace l'intersection de n et de la face BCC'B' .



Exercice V_{47} :

On a dessiné un cube posé sur le plan horizontal H . Le plan Z contient U , S et le milieu I de TP .

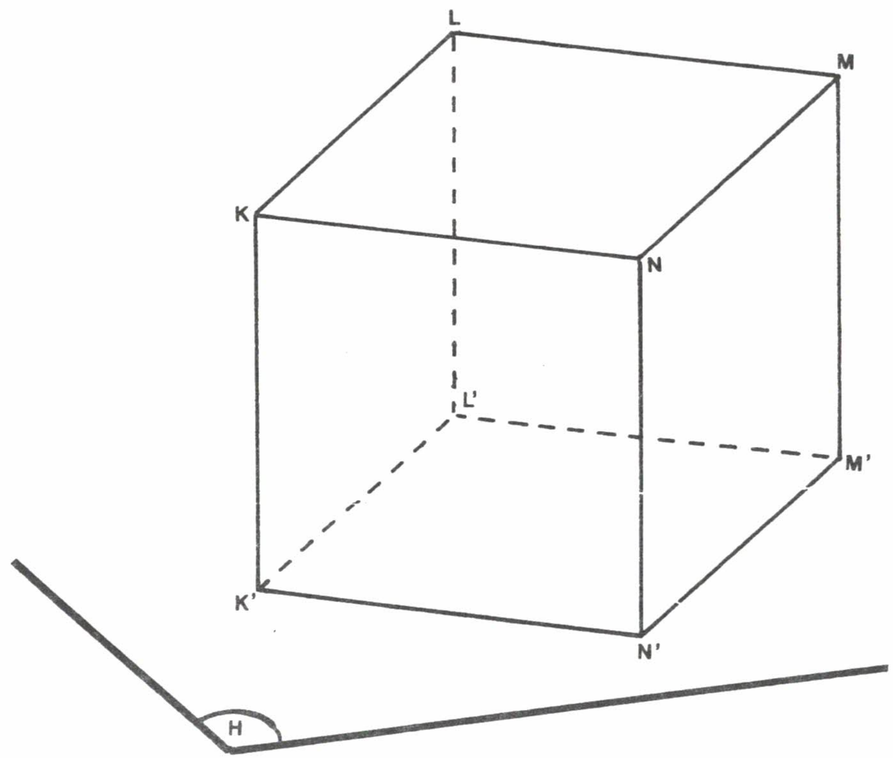
a) Trace la droite qui est perpendiculaire à SU et passe par T (et qui est dans le plan H) .
b) Quelle est la pente du plan Z ?



Exercice V_{48} :

On a dessiné un cube posé sur le plan horizontal H .

a) Trace le point A du plan H tel que K' soit le milieu de AM' .
b) Trace la droite d du plan H qui est perpendiculaire à AM' en A .
c) Le plan P contient d et M . Trace l'intersection de P et du cube.
d) Quelle est la ligne de pente du plan P qui passe par M . Quelle est la pente de P ?

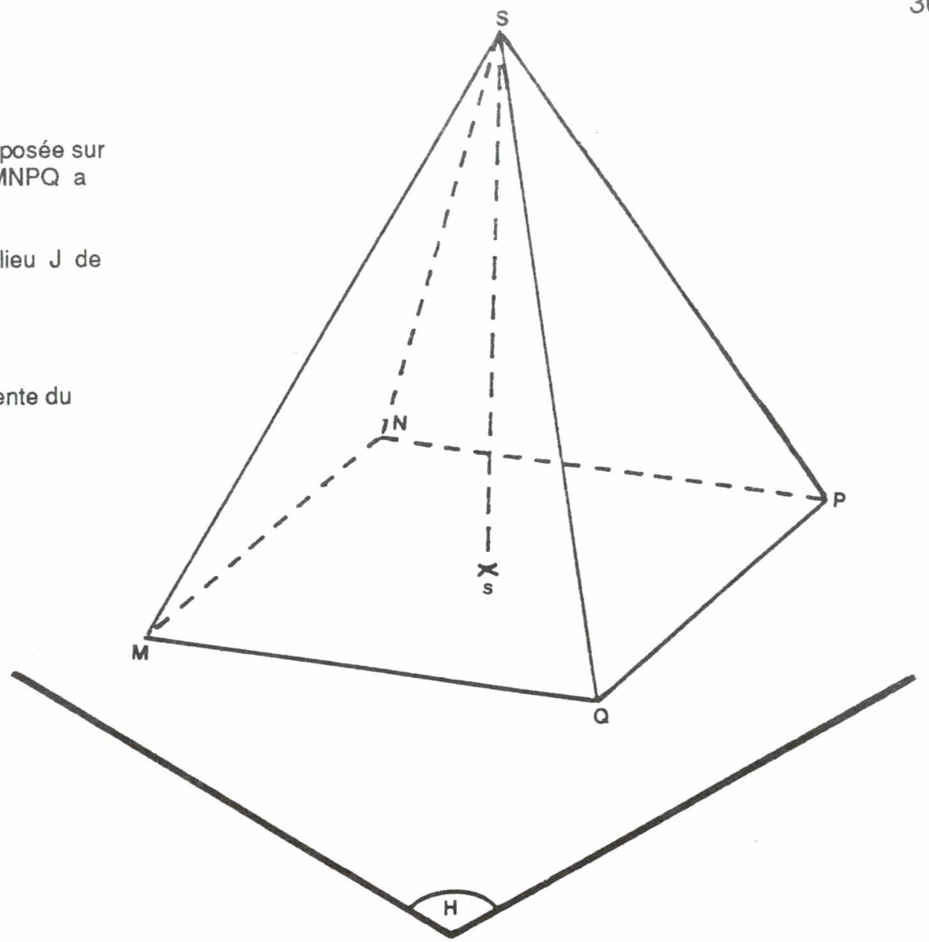


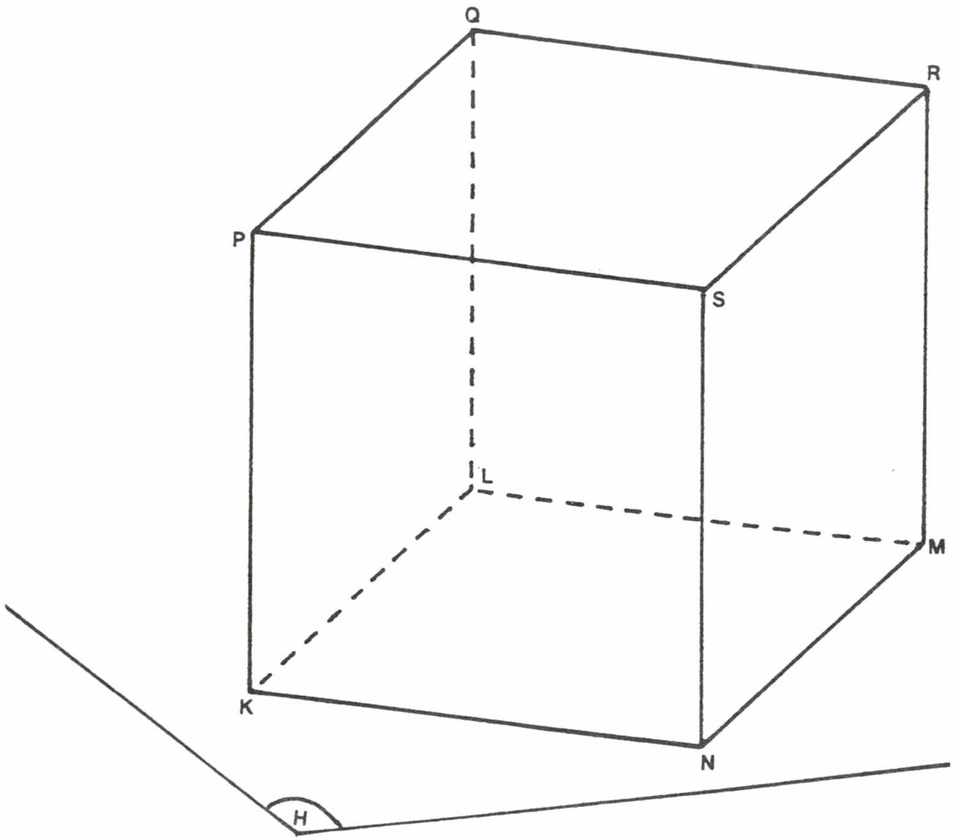
Exercice V_{49} :

La pyramide régulière à base carrée SMNPQ est posée sur le plan horizontal H . Sa hauteur Ss est 7 cm . Le carré MNPQ a 6 cm de côté.

Le plan Z passe par le milieu I de SP , par le milieu J de MN et par Q.

a) Trace la projection horizontale i de I .
b) Trace la ligne de pente de Z qui passe par I .
c) Elle coupe QJ en A . Calcule Ai et Ii . Quelle est la pente du plan Z ?





Exercice V_{50} :

Le cube KLMNPQRS est posé sur le plan horizontal H .
Le plan Z contient L , le milieu I de MN et le milieu J de RM .

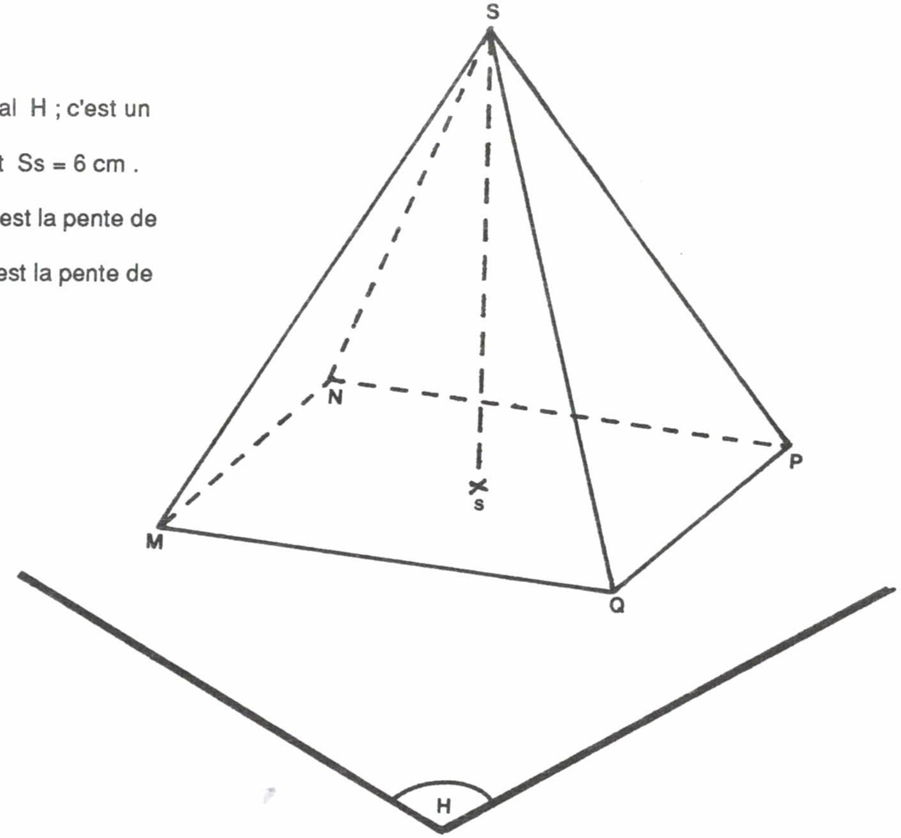
a) Trace l'intersection de Z et du cube.
b) Trace la ligne de pente de Z qui passe par J .
c) Calcule la pente du plan Z .

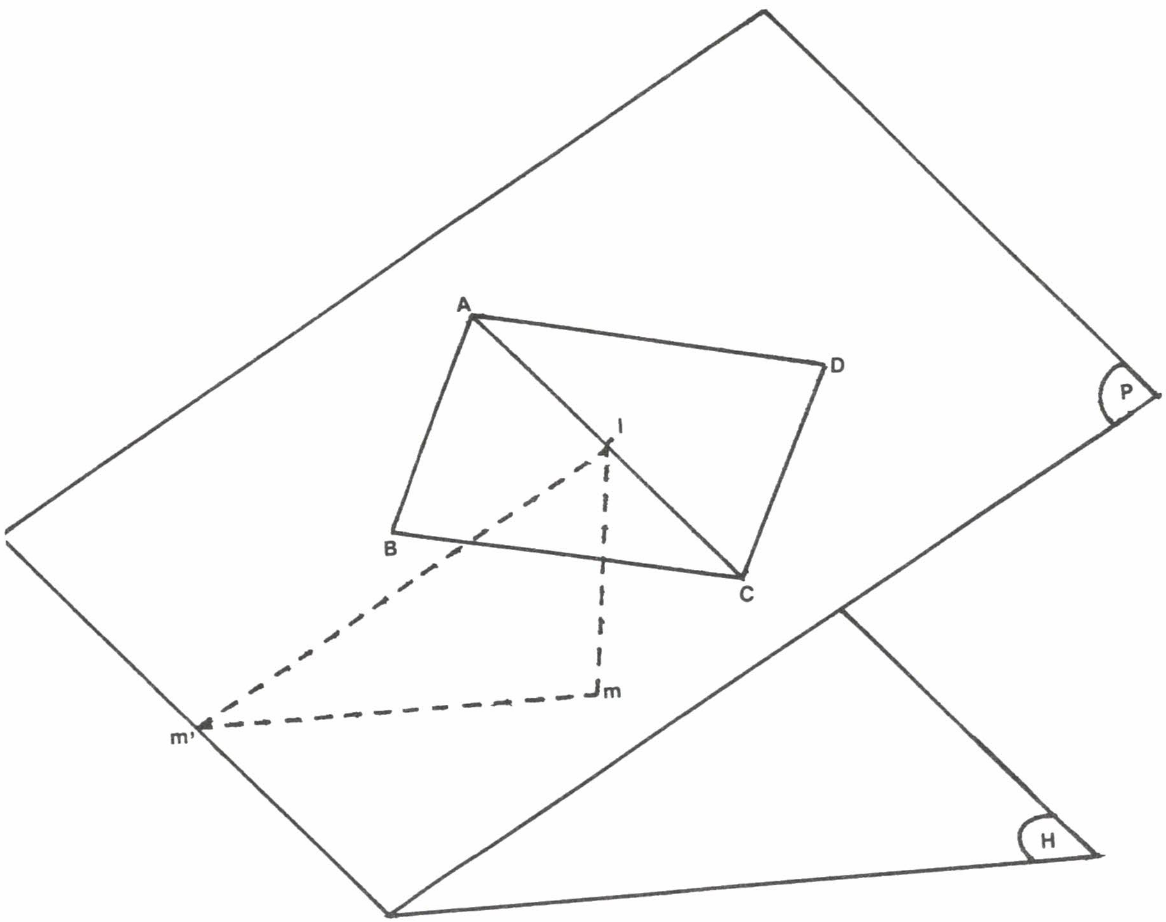
Exercice V_{51} :

La base MNPQ de cette pyramide est dans le plan horizontal H ; c'est un rectangle de longueur MQ = 8 cm , et de largeur NM = 6 cm .

Le point s est le centre de ce rectangle ; Ss est verticale et Ss = 6 cm .

a) Trace la ligne de pente de la face SMQ , qui passe par S . Quelle est la pente de cette face ?
b) Trace la ligne de pente de la face SPQ , qui passe par S . Quelle est la pente de cette face ?





Exercice V_{52} :

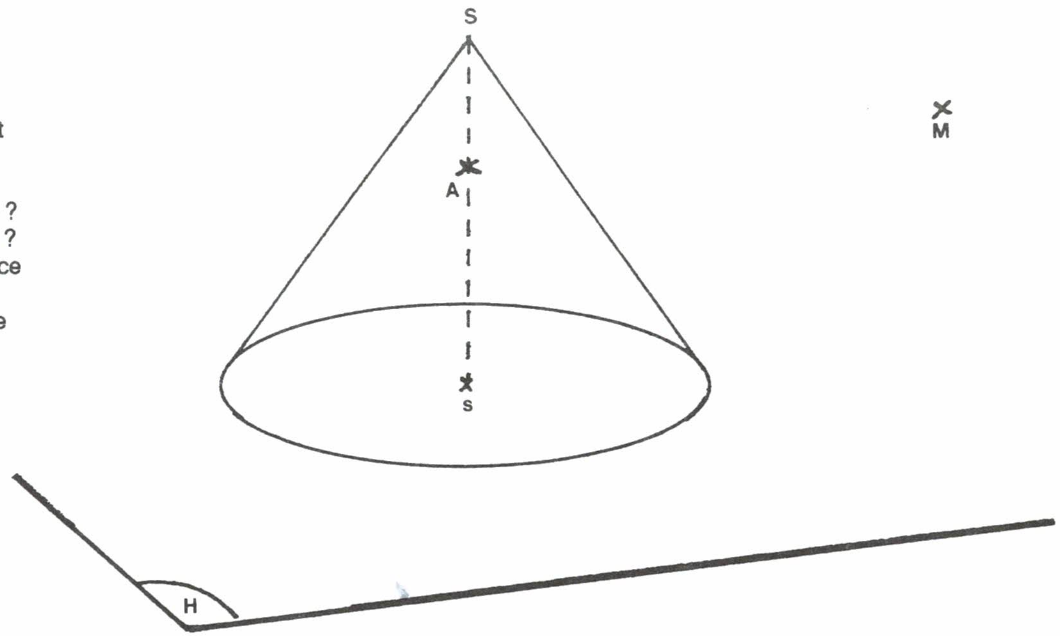
Le plan H est horizontal. Le plan P a pour pente 0,6 . Dans ce plan, la droite AC est horizontale. Le quadrilatère ABCD est un parallélogramme. On donne mm' = 5,3 cm et AC = 7 cm .

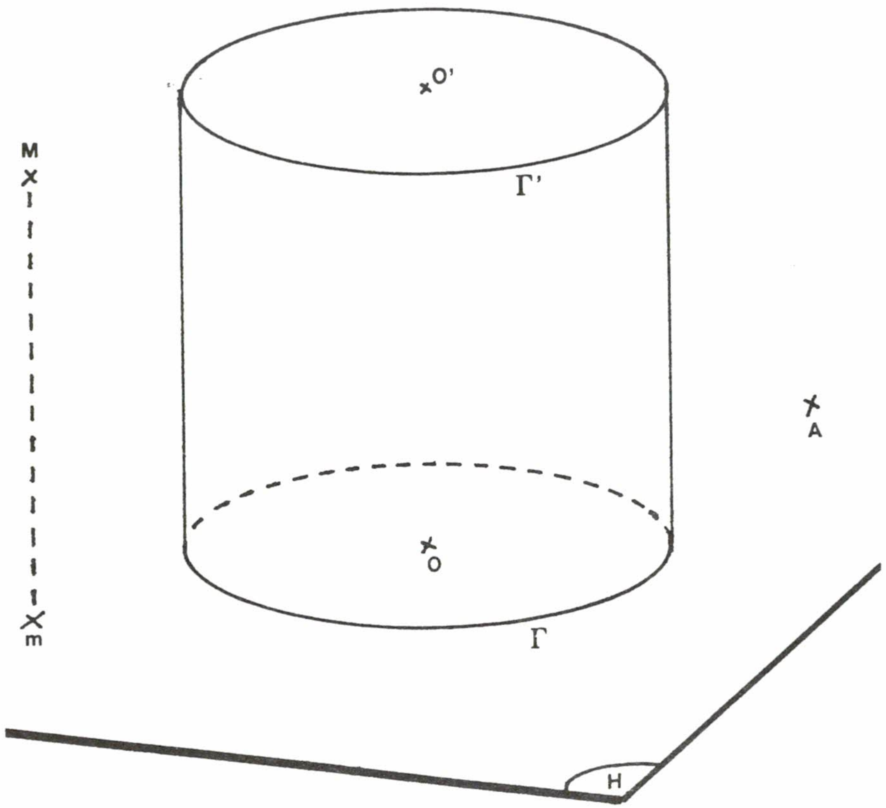
a) En mesurant sur la figure, détermine la cote au dessus de H des points B et D . Calcule la distance des points B et D à la droite AC .
b) Dessine ABCD en vraie grandeur.

Exercice V_{53} :

Un cône de sommet S est posé sur le plan horizontal H . La verticale du point S passe par le centre s du cercle de base. Le point A est sur Ss . Le point M est dans H .

a) Ss = 5 cm . Le rayon du cercle de base est 3,3 cm . Quel est le volume du cône ?
b) Trace l'intersection du segment sM et du cône. Quelle est la distance de s à M ?
c) Trace l'intersection du cône et du plan V vertical passant par S et M . Puis trace l'intersection de la droite AM et du cône.
d) Dessine en vraie grandeur la partie de la figure qui se trouve dans V . Et mesure la longueur de la portion de la droite AM qui est intérieure au cône.

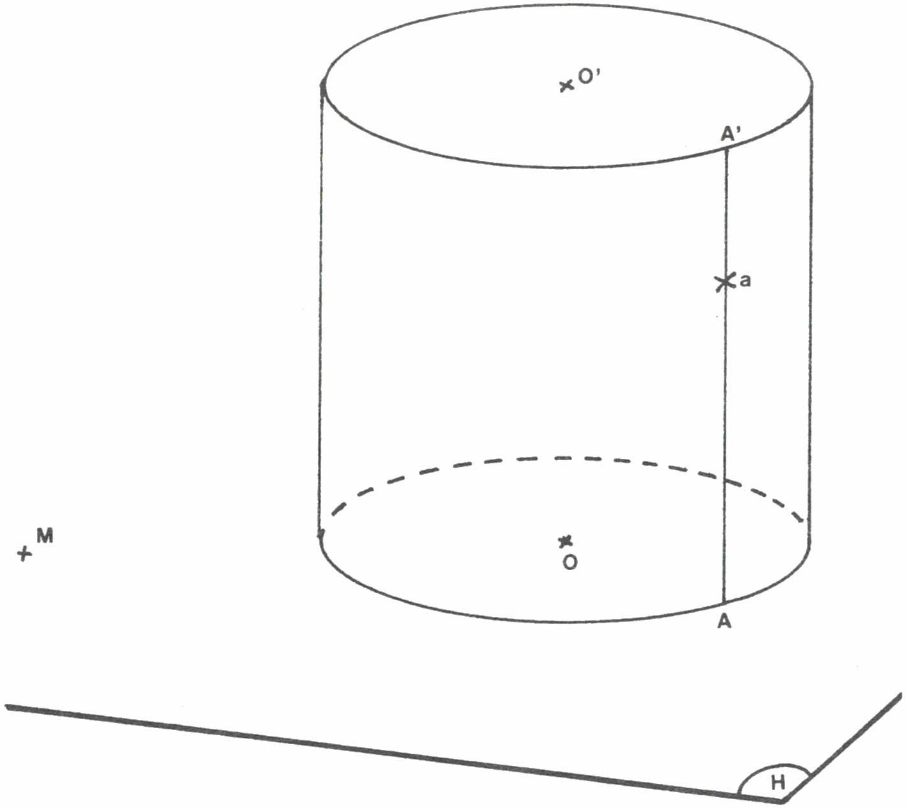




Exercice V_{54} :

Un cylindre droit, a pour base les cercles Γ (de centre 0) et Γ' (de centre 0') ; il est posé sur le plan horizontal H . Le point A est dans H . La verticale de M coupe H en m .

a) Dessine l'intersection du cylindre et du plan vertical qui contient A et M .
b) Dessine l'intersection du cylindre et de la droite AM (elle est formée de deux points, on précisera si ces points sont visibles, ou cachés sur la figure) .



Exercice V_{56} :

Voici un cylindre dont les génératrices sont verticales. Il est posé sur le plan horizontal H . Les points M et N sont dans H . Le point a est sur la génératrice AA' .

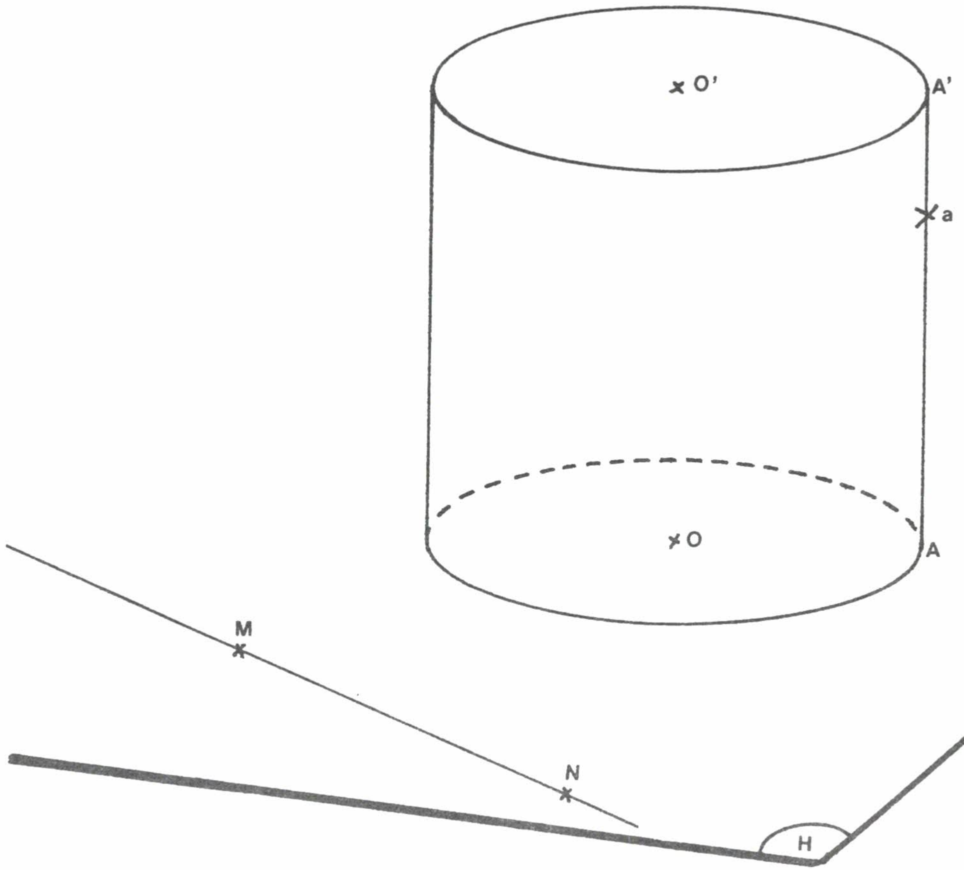
a) En t'inspirant des questions a et b de l'exercice précédent, trace les intersections du cylindre et des droites aM et aN .
b) Puis trace d'autres points de l'intersection du cylindre et du plan MNa . Trace enfin l'intersection du cylindre et du plan MNa .

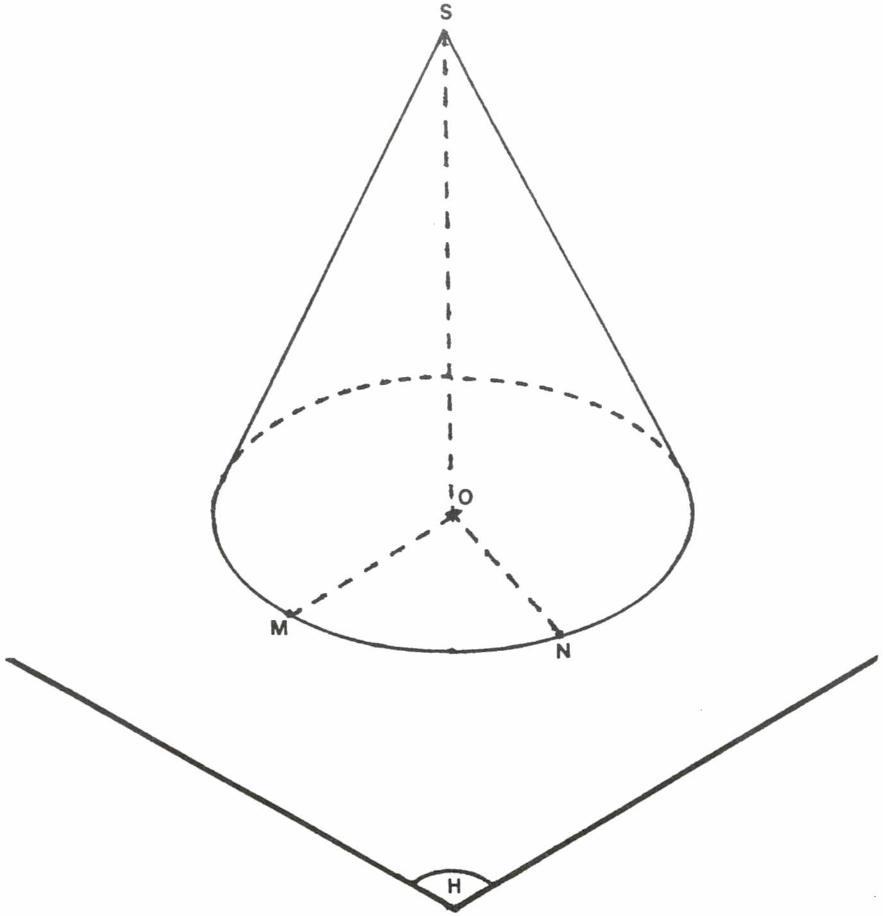
Exercice V_{55} :

Un cylindre est posé sur le plan horizontal H . Ses génératrices sont verticales. Le point M est dans H .

a) Soit V le plan vertical contenant M et A . Construis l'intersection de V et du cylindre.
b) Construis l'intersection de la droite aM et du cylindre.

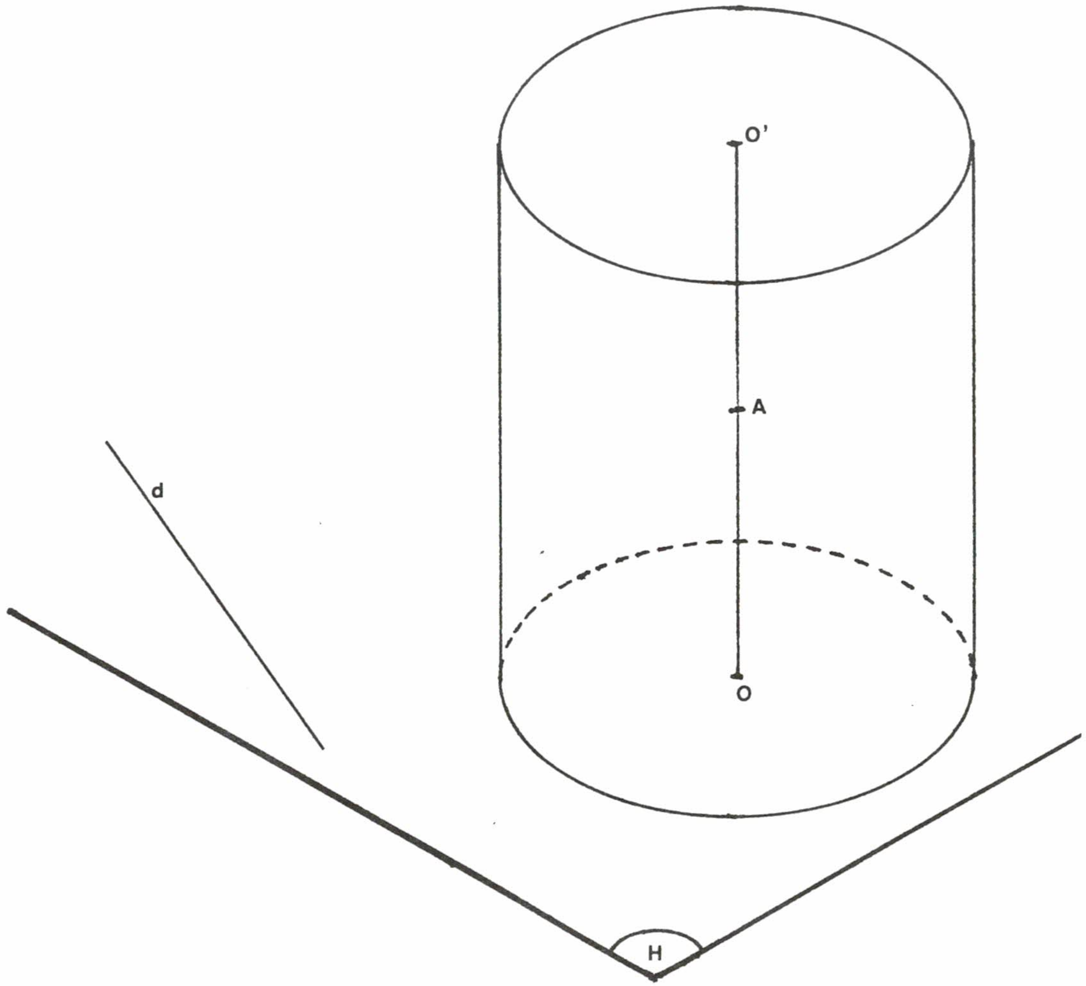
c) AA' = 6 cm , Aa = 4,3 cm , OA = 3,5 cm , $\widehat{AOM}$ = 120° et AM = 9,5 cm . Dessine en vraie grandeur la partie de la figure qui se trouve dans le plan V . Mesure puis calcule la longueur de la partie de la droite Ma qui est intérieure au cylindre.





Exercice V_{57} :

a) (Question préparatoire) : Soit un cercle de centre I, de rayon 6 cm, et sur ce cercle deux points A et B tels que AB = 4 cm. Que vaut $\widehat{AIB}$? Quelles sont les aires des deux secteurs AIB ? Le segment AB partage le disque en deux parties. Quelles sont les aires de ces deux parties ?
b) Sur la figure ci-contre le plan H est horizontal, O est le centre du cercle de base et SO est vertical. Dessine l'intersection du cône et du plan MNS.
c) L'angle $\widehat{MON}$ vaut 70°, MO = 3,5 cm et OS = 7 cm. Le plan MSN coupe le cône en deux parties. Quels sont leurs volumes ?



Exercice V_{58} :

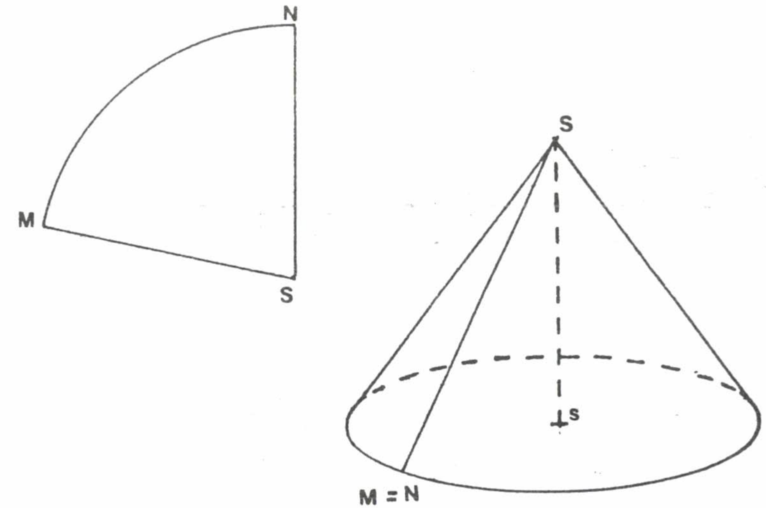
Ce cylindre droit est posé sur le plan horizontal H ; ses génératrices sont verticales ; sa hauteur est 7 cm. Les bases inférieure et supérieure sont des cercles de diamètre 3 cm, centrés en O et en O' ; et A est le milieu de OO'.

a) Choisis un point M sur la droite d (située dans H), trace l'intersection du cylindre et de la droite AM.
b) Soit P le plan contenant d et A. Trace d'autres points de l'intersection de P et du cylindre. Trace cette intersection.
c) Le plan P coupe le cylindre en deux morceaux. Peux-tu expliquer pourquoi ces deux morceaux ont même volume ? Calcule alors leur volume.

Exercice V_{59} :

a) Découpe un secteur circulaire de rayon 10 cm , de centre S , et d'angle $\widehat{MSN} = 80°$.
Quelle est la longueur de l'arc MN ?

b) En recollant SM et SN , on obtient un cône de révolution (comme sur la figure ci-contre) . Quel est le rayon du cercle de base de ce cône ? Quelle est sa hauteur Ss ? Quel est son volume ?



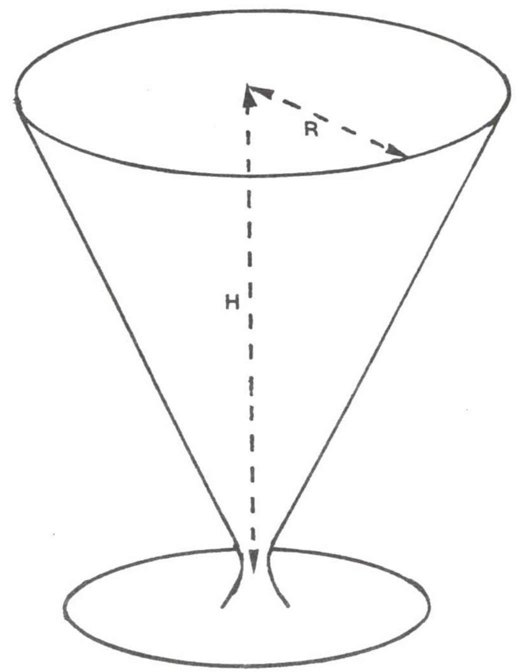
Exercice V_{60} :

Découpe un rectangle ABCD de largeur AB = 6 cm et de longueur AD = 8 cm .
Avec ce rectangle on peut former deux cylindres. L'un en recollant AB et DC , l'autre en recollant AD et BC . Quel est celui qui a le plus grand volume ?

Exercice V_{61} :

Un flacon en forme de cône a une profondeur H = 12 cm , et une contenance de 480 cm^3 .

a) Quel est le rayon R de la base du cône ?
b) On verse **a** cm^3 d'eau dans ce verre. La hauteur du liquide dans le verre est alors de 4 cm . Que vaut **a** ?
c) De façon générale, calcule la quantité y d'eau qui se trouve dans le verre lorsque la hauteur est **x** cm . Représente graphiquement la fonction **y(x)** (unité 1 cm pour 50 cm^3 en ordonnée) .
d) On colle une bande de papier le long du verre. Quelle doit être sa longueur ?
Dessine sur cette bande de papier une graduation donnant de 20 cm^3 en 20 cm^3 la quantité de liquide que l'on a versé.



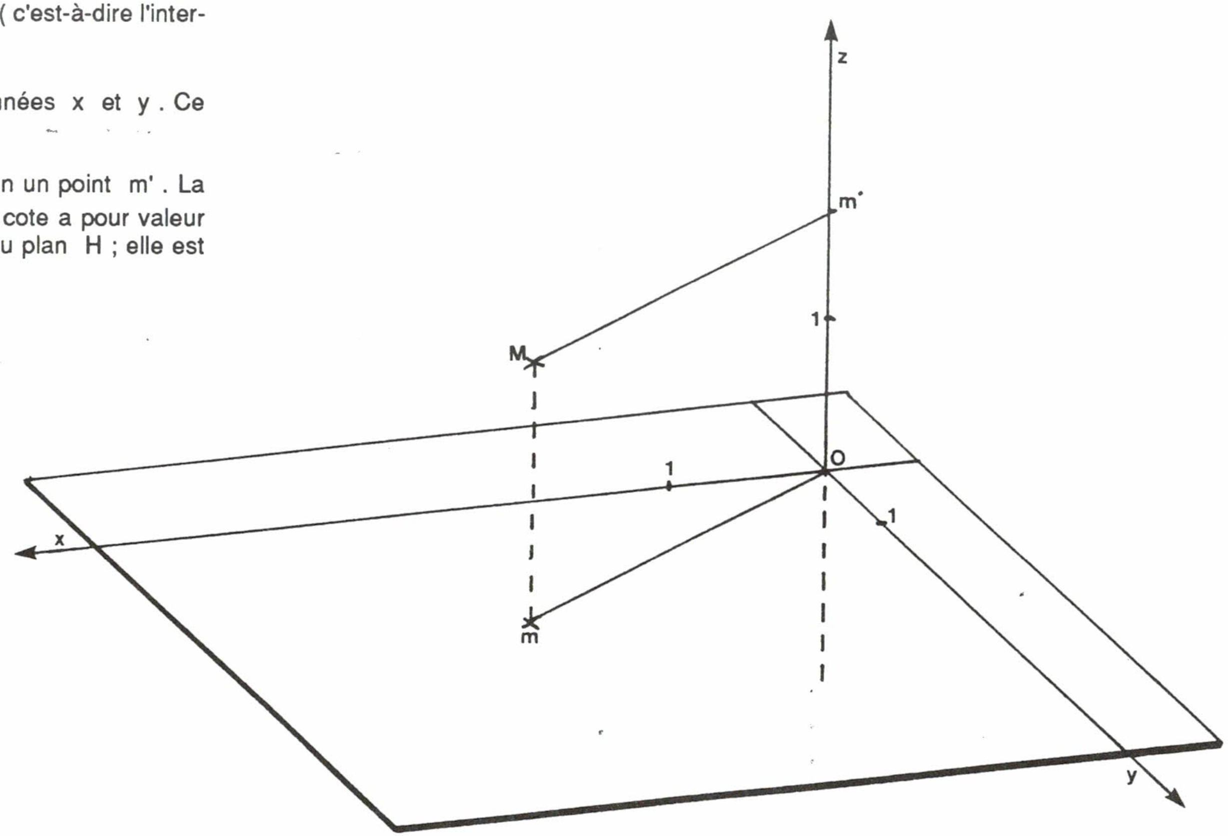
COMMENT CONSTRUIRE UN REPERE ORTHONORME DE L'ESPACE ?

Choisissons un plan horizontal H , et dans ce plan un repère orthonormé (0x,0y) . La verticale du point 0 orientée vers le haut (c'est la coutume) nous donne un axe, que nous noterons 0z . Nous obtenons ainsi un repère orthonormé de l'espace.

Soit M un point de l'espace, et m sa projection sur H (c'est-à-dire l'intersection de H et de la verticale v_M) .

Le point m a (dans le repère (0x, 0y)) des coordonnées x et y . Ce sont l'**abscisse** et l'**ordonnée** de M (et aussi de m) .

Le plan horizontal H_M (qui contient M) coupe 0z en un point m' . La coordonnée z de m' sur l'axe 0z est la **cote** de M . Cette cote a pour valeur absolue la distance Mm ; elle est positive si M est au-dessus du plan H ; elle est négative si M est au-dessous de H .



Ainsi un point M a 3 coordonnées. Lorsqu'on connait ces trois coordonnées (x,y,z) , on peut retrouver le point M ; en effet x et y nous permettent de placer m dans le plan H ; et z nous indique où il faut placer M sur la verticale de m .

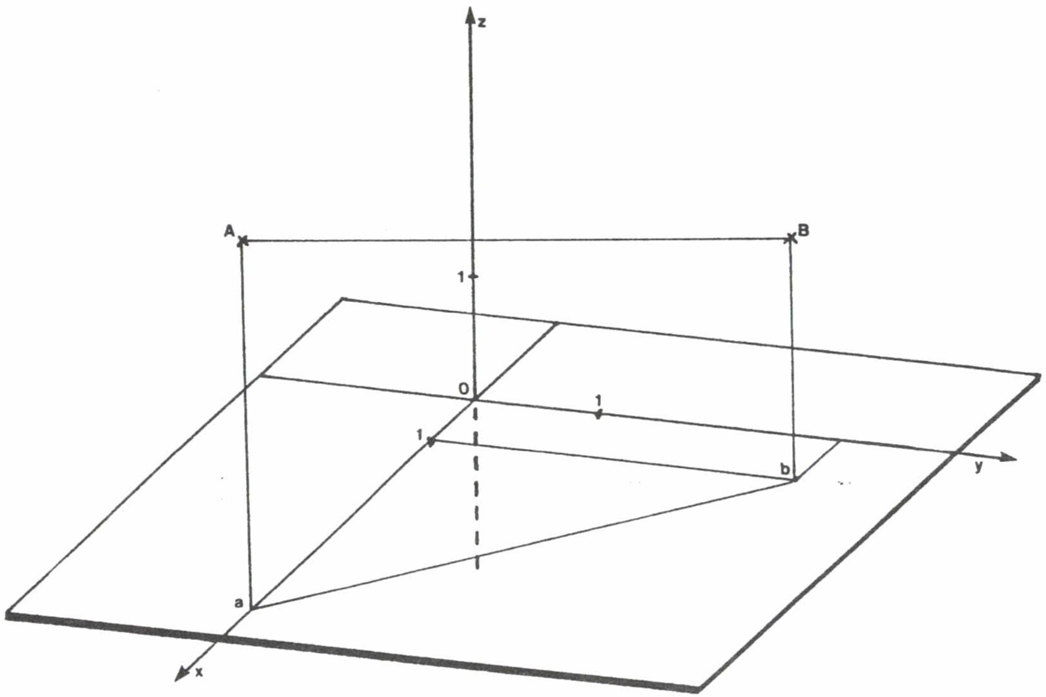
Exemple 1 : Soit à placer le point M(2;3;4) .

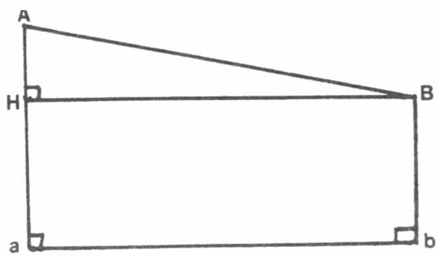
Le point m se trouve :

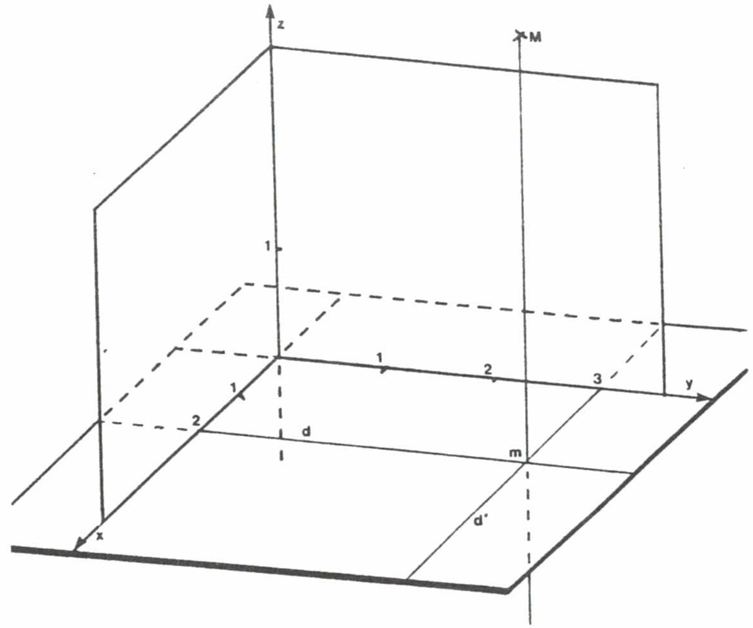
. d'une part sur la droite d du plan x0y , d'équation x = 2 . Elle est parallèle à 0y , et passe par le point de coordonnée 2 de l'axe 0x .

. d'autre part sur la droite d' du plan x0y , d'équation y = 3 . Elle est parallèle à 0x , et passe par le point de coordonnée 3 de l'axe 0y .

Le point M se trouve sur la verticale v_m de m , au-dessus de H (car 4 est positif) , et à une distance de m égale à 4 .







Exemple 2 : Soit à calculer la distance de A à B , où A(5;0;3) et B(1;3;2) .

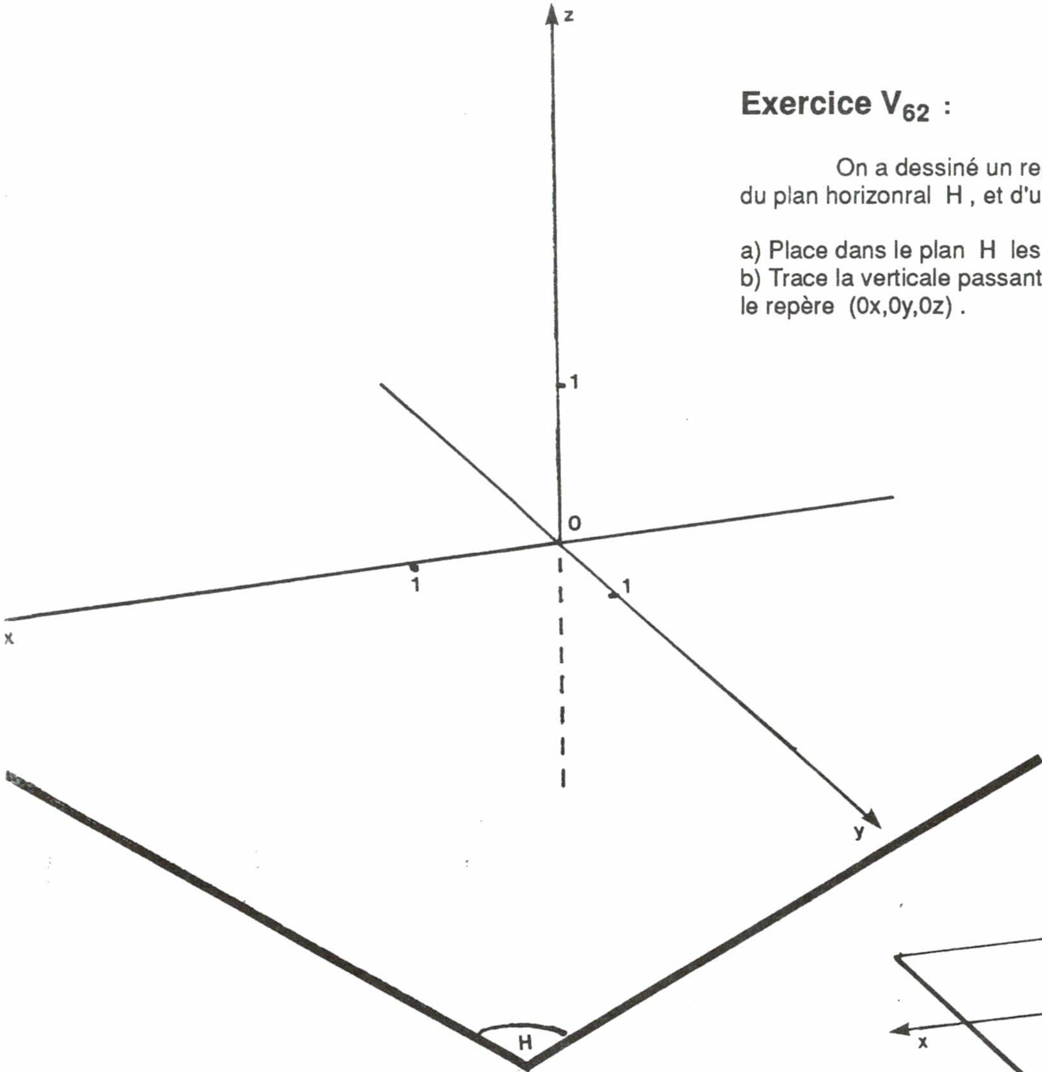
. les points a et b sont dans le plan H . Nous savons calculer leur distance :

$$ab^2 = \sqrt{(x_b-x_a)^2 + (y_b-y_a)^2} = \sqrt{25} = 5$$

. le quadrilatère ABba est un trapèze (car les verticales Aa et Bb sont parallèles) rectangle (car les verticales Aa et Bb sont perpendiculaires à l'horizontale ab) . Il est dessiné ci-contre (avec une unité égale à 1 cm) . Nous avons BH = ba et AH = Aa - Bb = 1 . Donc (d'après le théorème de Pythagore) :

$$AB^2 = BH^2 + AH^2 = 25 + 1$$

Donc AB = $\sqrt{26}$



Exercice V_{62} :

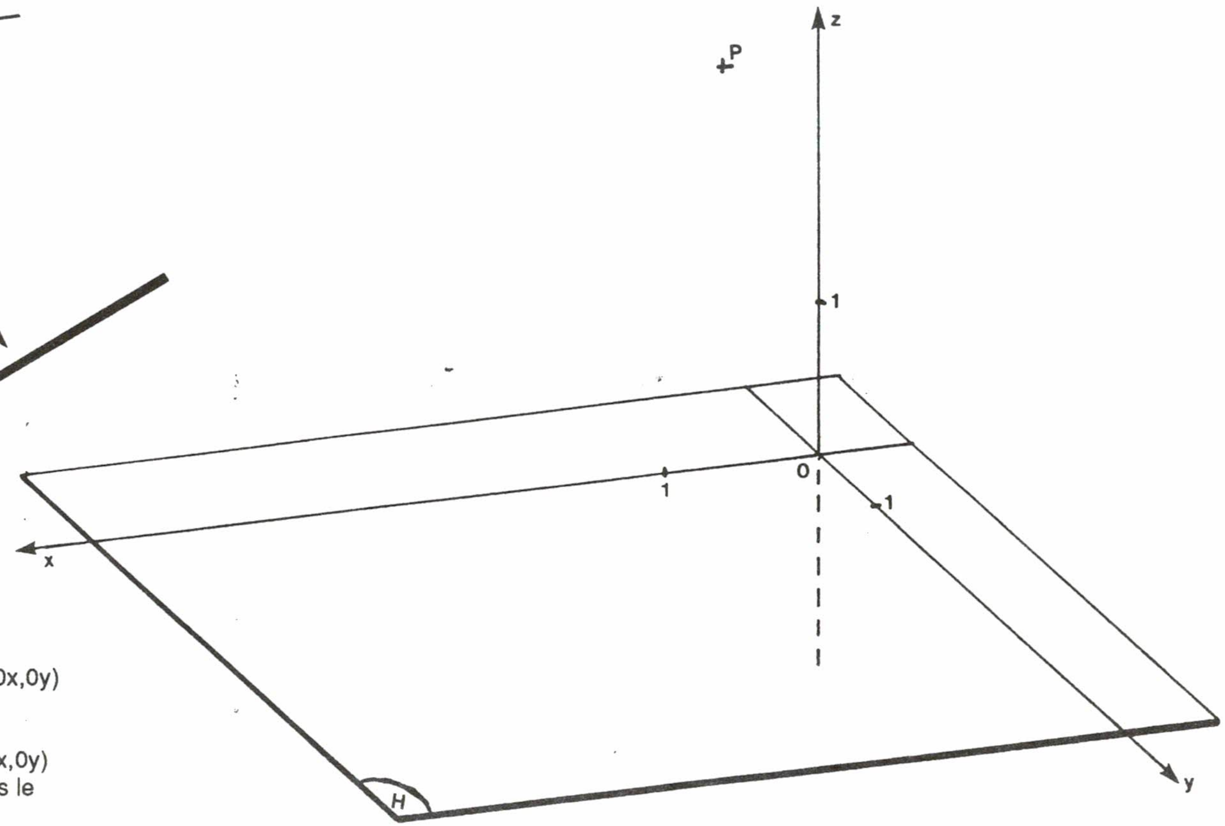
On a dessiné un repère orthonormé de l'espace formé d'un repère (0x,0y) du plan horizonral H , et d'un axe vertical 0z .

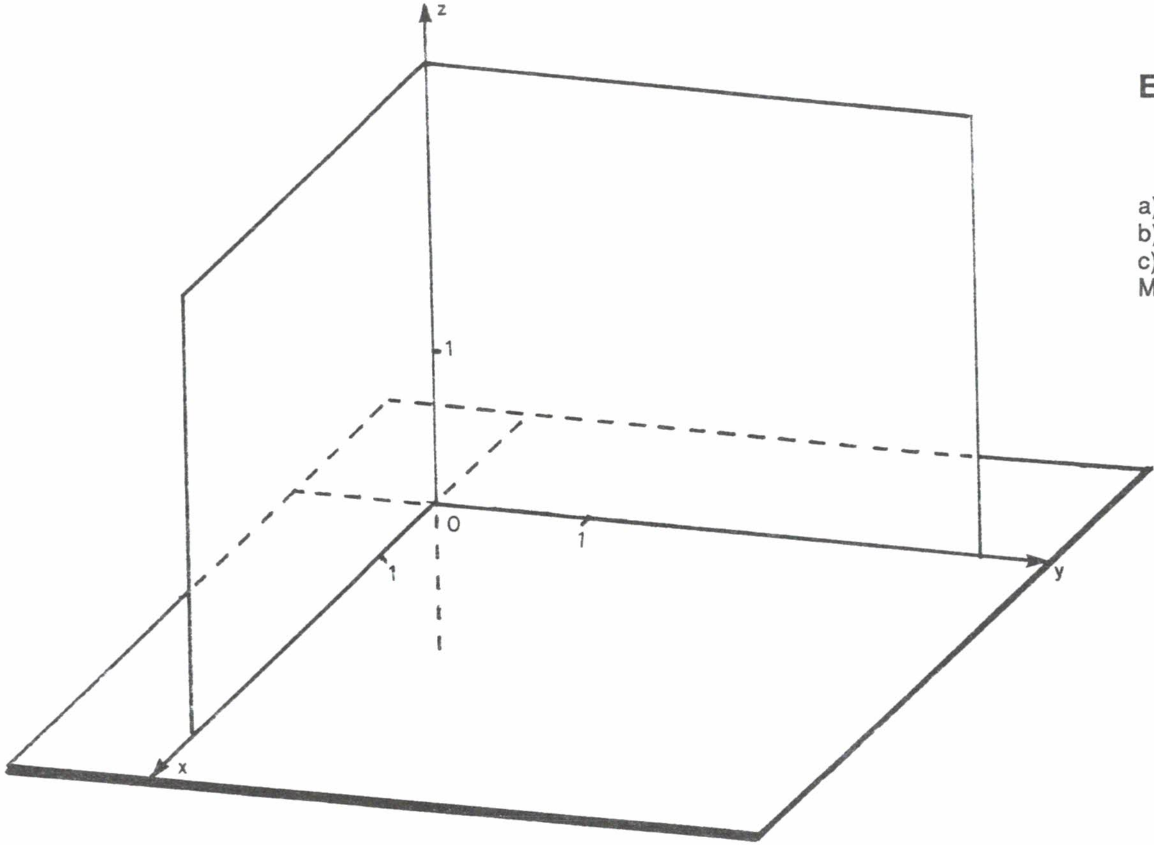
a) Place dans le plan H les points A(2;0) , B(0;1) et C(2;1) dans le repère (0x,0y).
b) Trace la verticale passant par C , puis le point D de coordonnées (2;1;3) dans le repère (0x,0y,0z) .

Exercice V_{63} :

On a dessiné un repère orthonormé de l'espace formé d'un repère (0x,0y) du plan horizontal H , et d'un axe vertical 0z .

a) Place dans le plan H le point m dont les coordonnées, dans le repère (0x,0y) sont (2,5 ; 3,5) . Puis place le point M de coordonnées (2,5 ; 3,5 ; 5,2) dans le repère (0x,0y,0z) .
b) La cote du point P est 3 ; dessine la projection horizontale p de P . Puis mesure l'abscisse et l'ordonnée de P .





Exercice V_{64} :

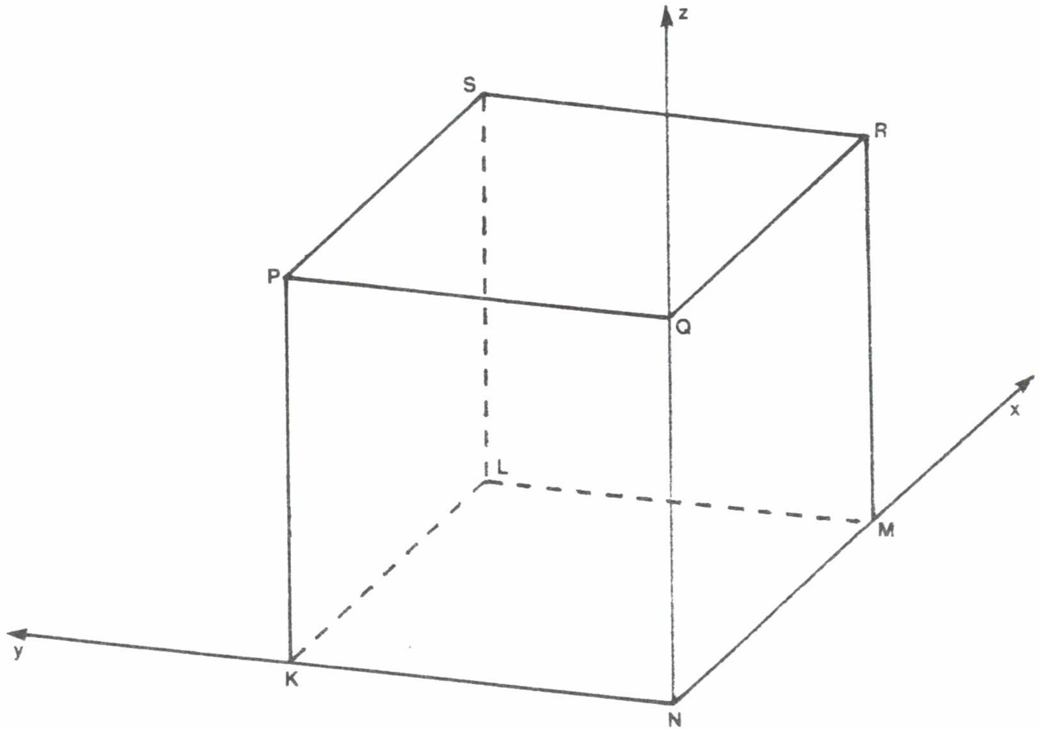
Dans le repère orthonormé ci-contre :

a) Place le point A(0;1;1) et sa projection horizontale a .
b) Place le point B(3;0;0) .
c) Dessine en vraie grandeur (unité 2 cm) le triangle ABa .
Mesure, puis calcule la distance de A à B .

Exercice V_{65} :

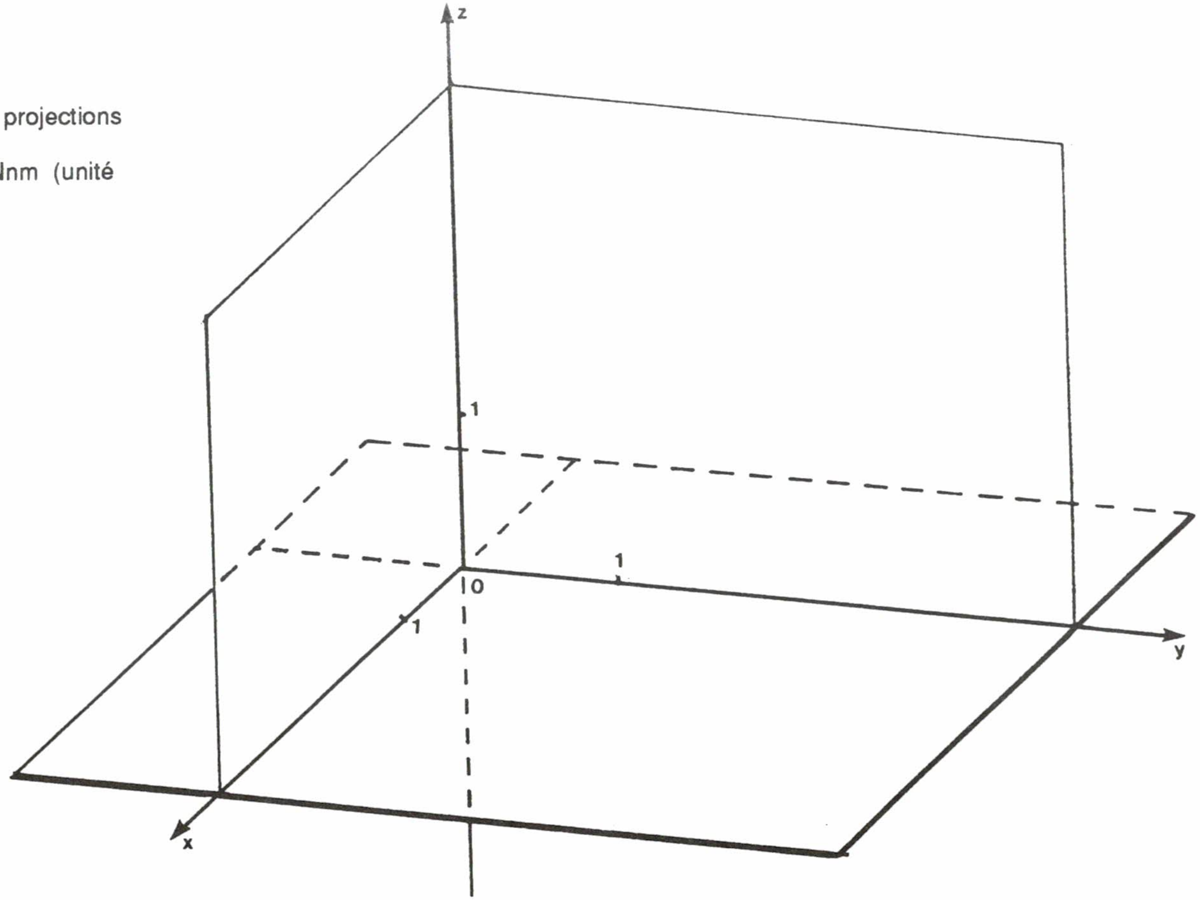
On a dessiné un cube, et un repère orthonormé (Nx,Ny,Nz) .
Dans ce repère, les coordonnées de Q sont (0;0;2) .

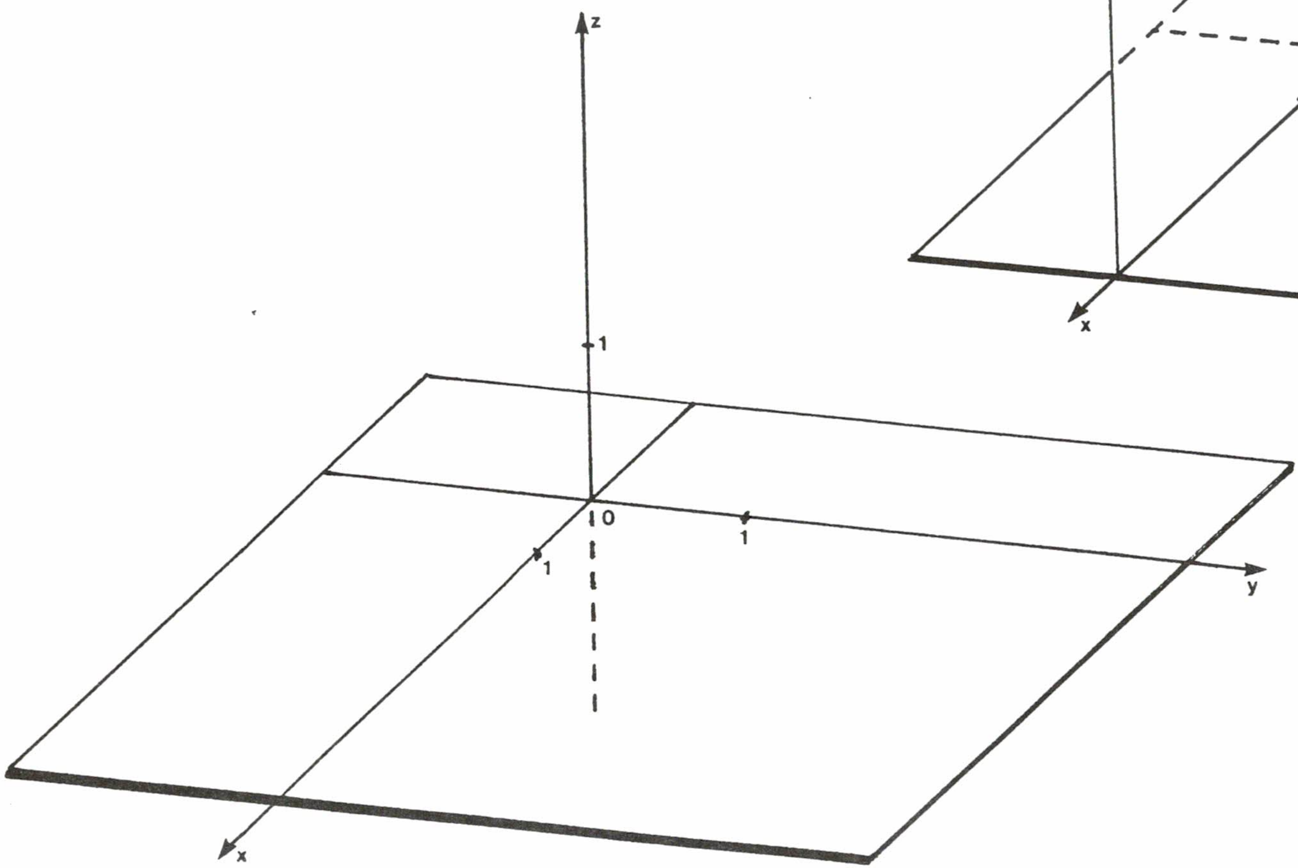
a) Quelles sont les coordonnées de M , de R , de L , de S ?
b) Quelles sont les coordonnées du milieu I de KM ? Quelle est la distance SI ?



Exercice V_{66} :

a) Place les points M(1;3;2) , N(2;1 ; 3) et leurs projections horizontales m et n .
b) Dessine en vraie grandeur le quadrilatère MNnm (unité 2 cm) . Quelle est la distance MN ?



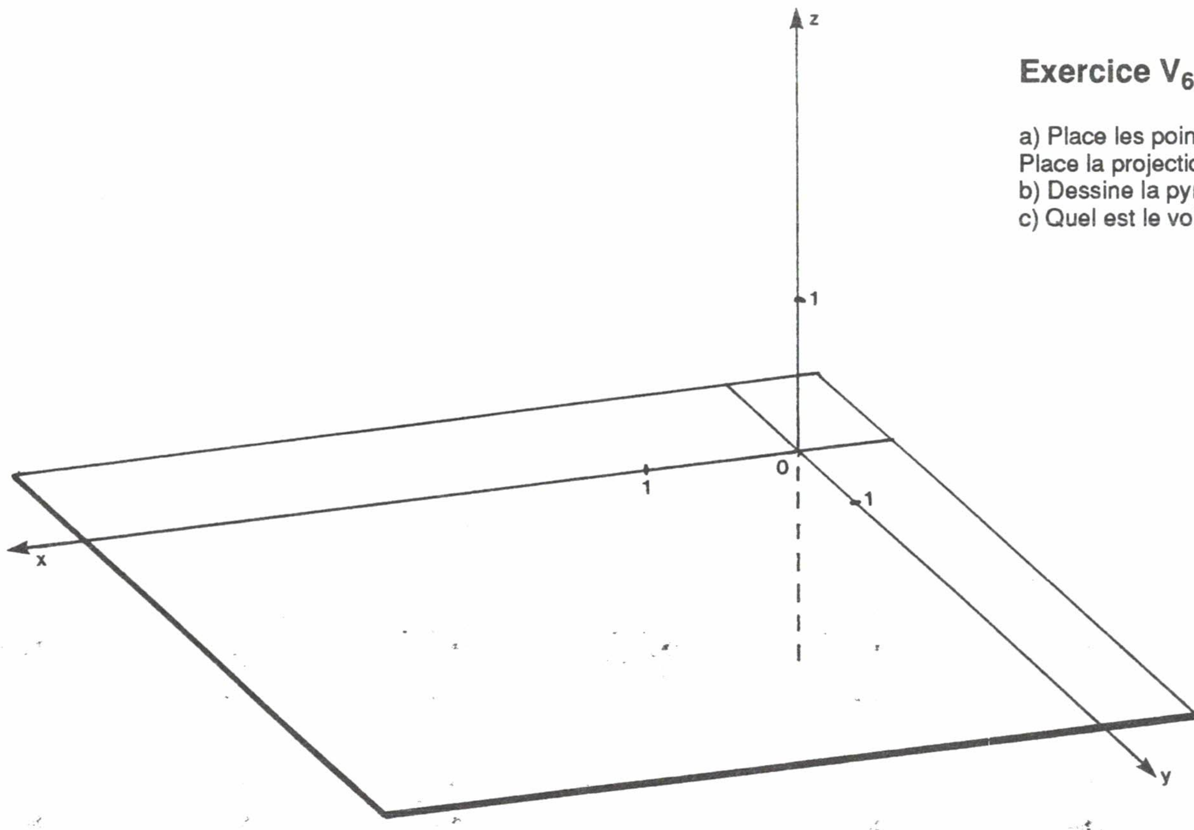


Exercice V_{67} :

a) Place les points A(3;0;0) , B(0;3;0) et C(0;0;2) .
b) Dessine le triangle OAB en vraie grandeur (unité 2 cm) ainsi que sa hauteur OH . Calcule les coordonnées de H . Puis place H sur la figure.
c) Dessine le triangle COH en vraie grandeur (unité 2 cm) , et calcule la distance HC .
d) Calcule l'aire du triangle ABC .

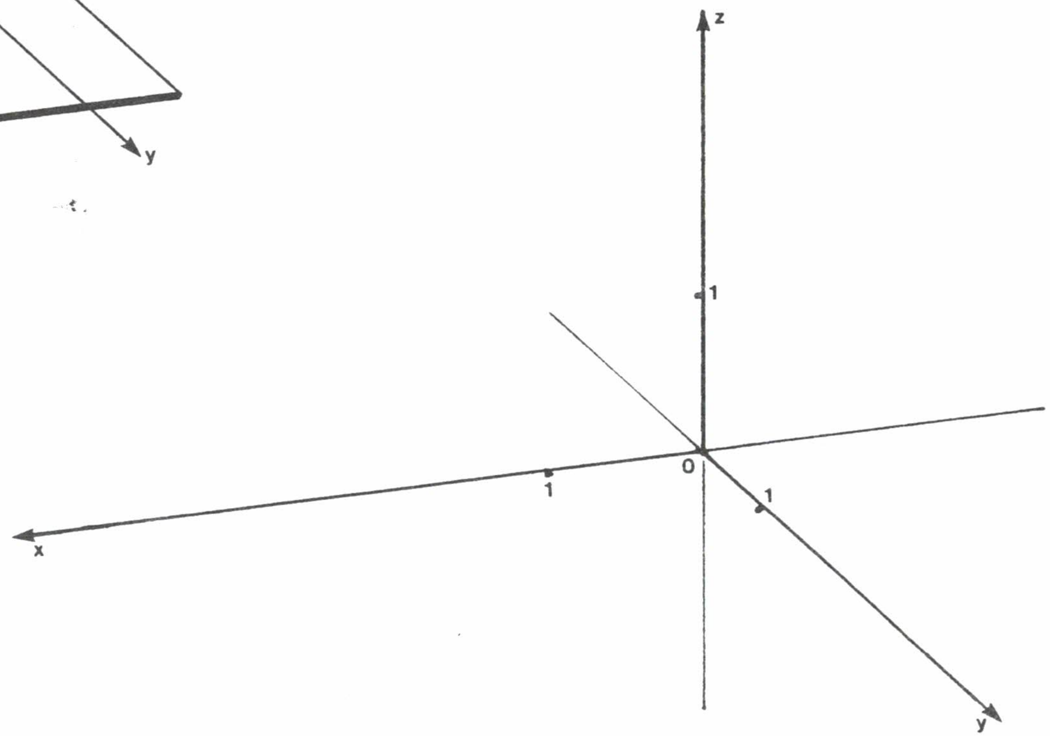
Exercice V_{68} :

a) Place les points A(1;0;0) , B(4;1:0) , C(4;5;0) , D(1;4;0) et S(2,5 ; 3,5 ; 3) .
Place la projection horizontale de S .
b) Dessine la pyramide SABCD (dessine en pointillés les arêtes cachées) .
c) Quel est le volume de cette pyramide ?



Exercice V_{69} :

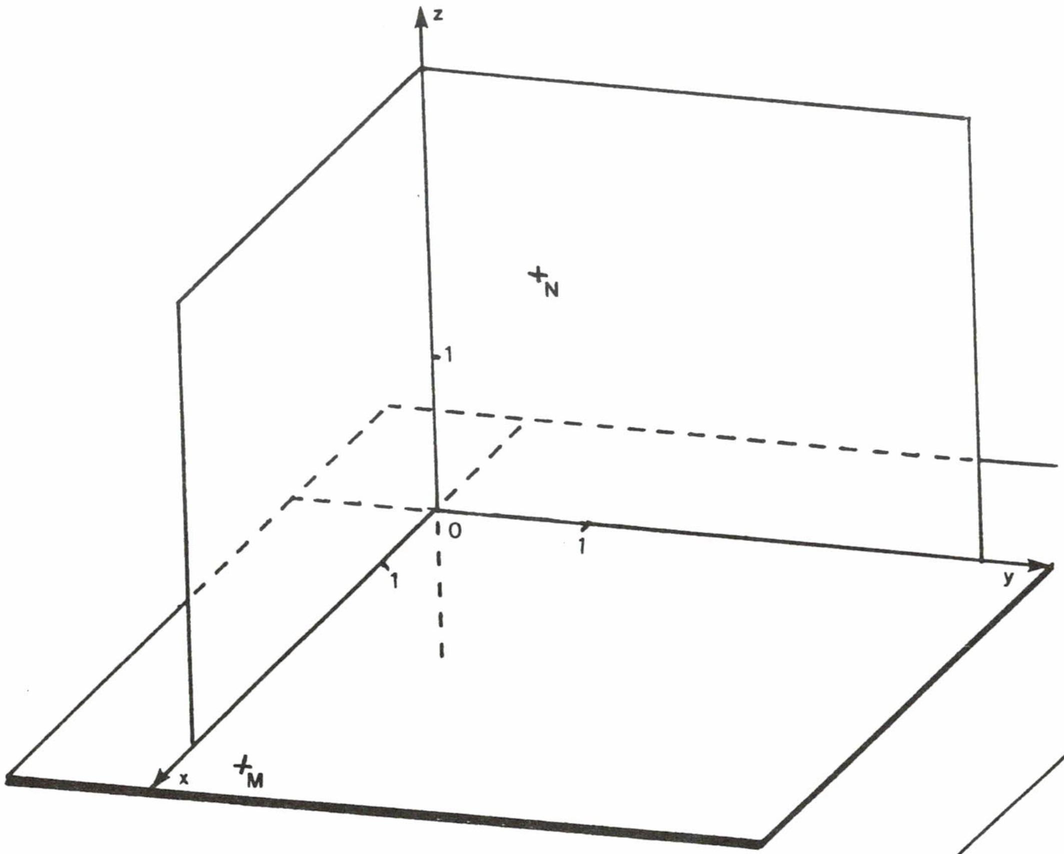
a) Dans le repère orthonormé ci-contre, place les points A(0;2;4) , B(2;4;2) et C(3;5;1) , et leur projections horizontales a , b et c .
b) Explique pourquoi les points a , b , c sont alignés. Explique pourquoi A , B , C , a , b , c sont dans un même plan.
c) Dessine en vraie grandeur la figure formée par ces six points. Puis explique pourquoi A , B , C sont alignés.

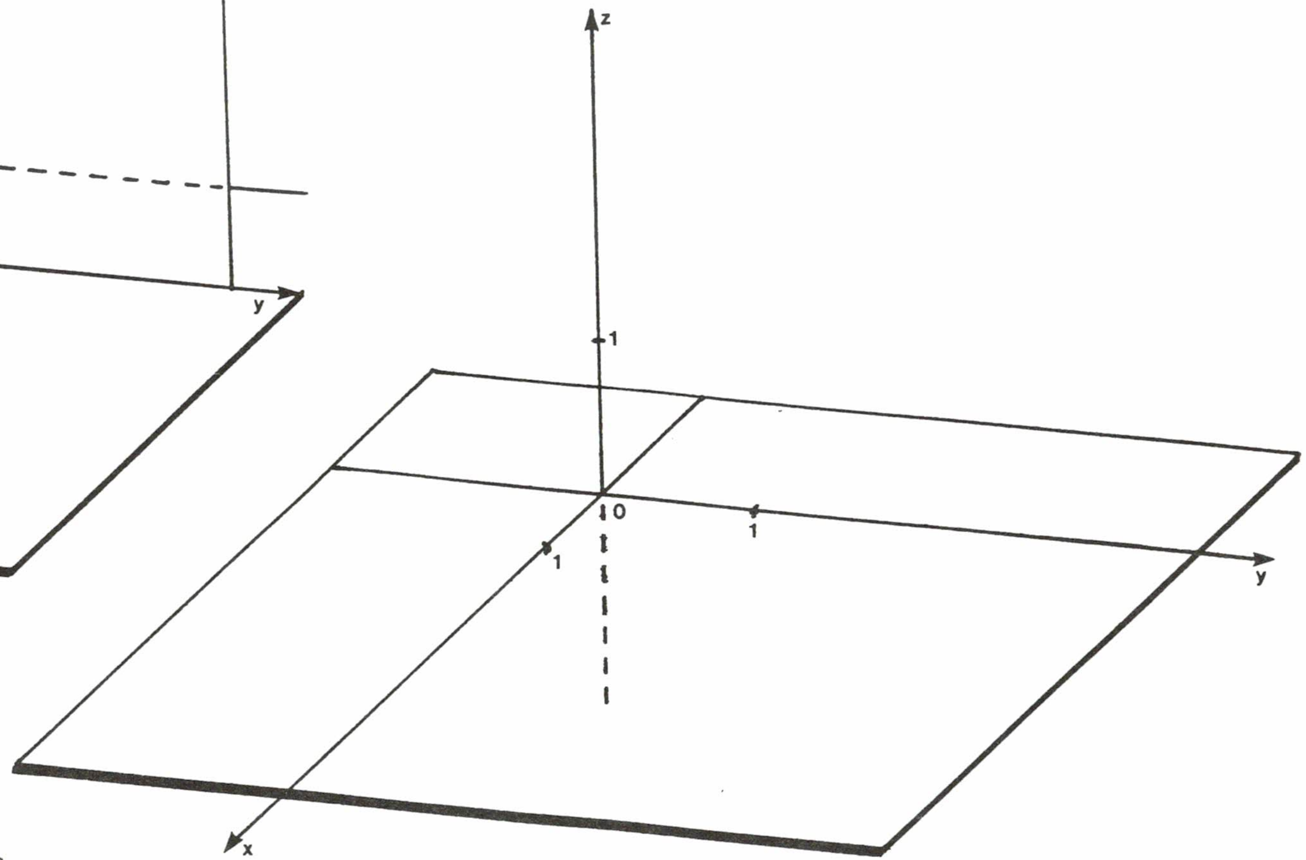


Exercice V_{70} :

Dans le repère orthonormé (Ox,Oy, Oz) le point N a pour cote 2,5 . Le point M a pour cote 0 .

a) Dessine la projection horizontale n de N . Mesure les coordonnées de N .
b) Dessine les intersections du plan vertical V contenant la droite MN , avec les plans xOy et yOz . Dessine l'intersection P de la droite MN et du plan yOz . Mesure les coordonnées de P .

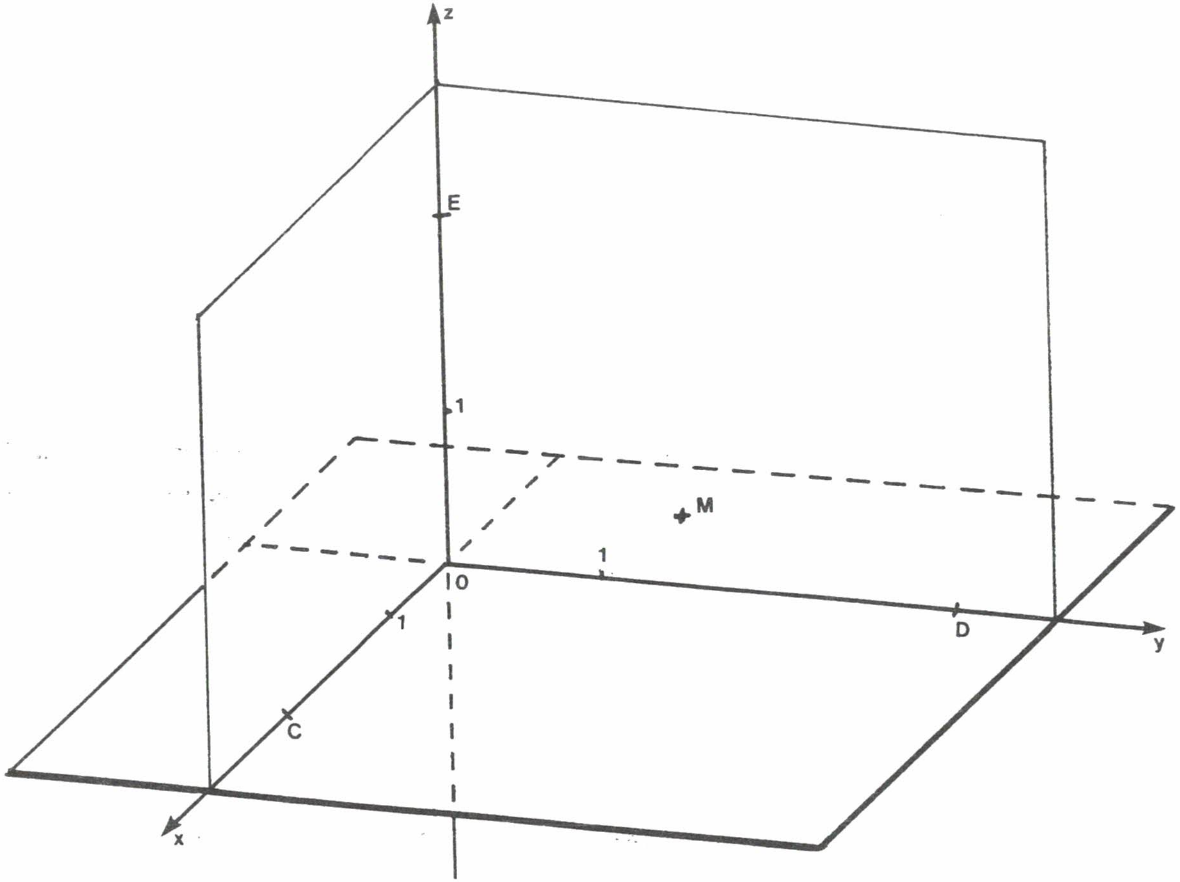




Exercice V_{71} :

Dans le repère orthonormé (Ox,Oy,Oz) :

a) Place le point A(-1;3;2) et sa projection horizontale a .
b) Place le point B(1;-1;0) . Calcule Ba . Puis calcule AB .
c) Place le point C(3;0;0) . Calcule Ca . Puis calcule CA .
d) Démontre que l'angle ABC est droit.



Exercice V_{73} :

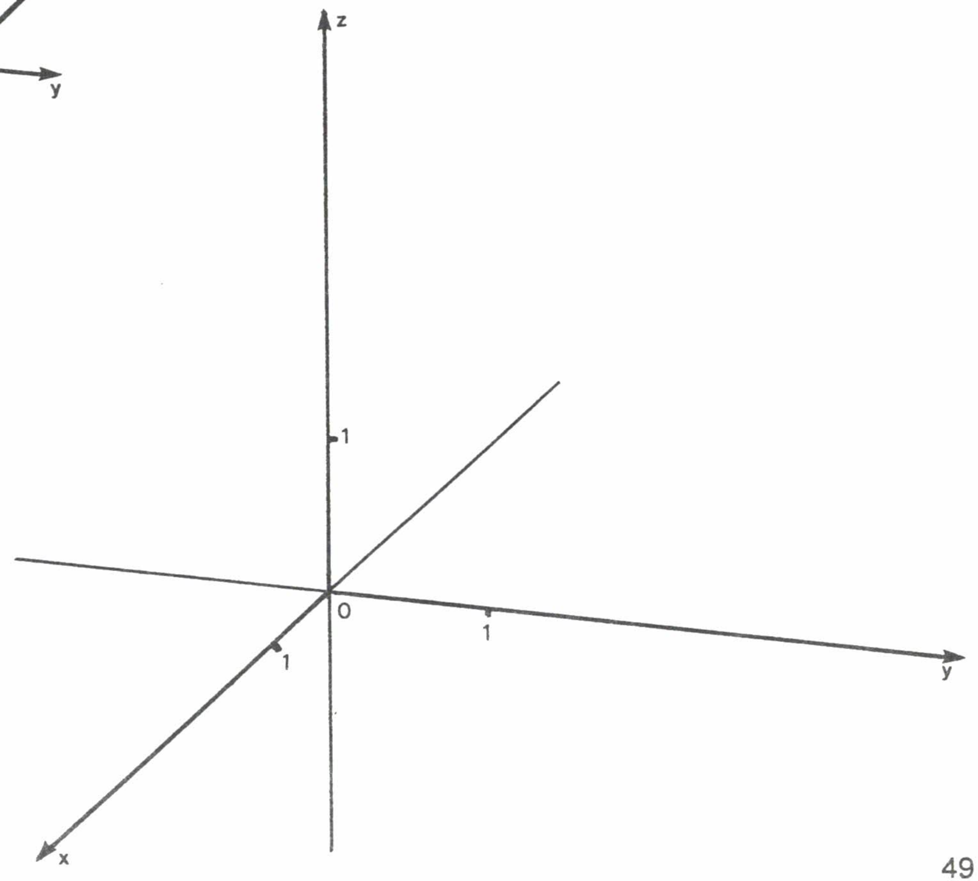
Les points C , D et E sont sur les axes. Le point M est dans le plan CDE .

a) Dessine la projection orthogonale du point M sur le plan xOy .
b) Mesure les coordonnées de M .

Exercice V_{72} :

Dans le repère orthonormé (Ox,Oy,Oz) :

a) Place les points A(1;-3;-2) et B(3;3;4) .
b) Trace l'intersection de xOy et du plan vertical V qui contient A et B .
c) Trace l'intersection de V et du plan xOz . Puis trace le point M intersection de la droite AB et du plan xOz . Mesure les coordonnées de M . Comment ferais-tu pour calculer l'abscisse et l'ordonnée de M ? Comment ferais-tu pour calculer la cote de M ?

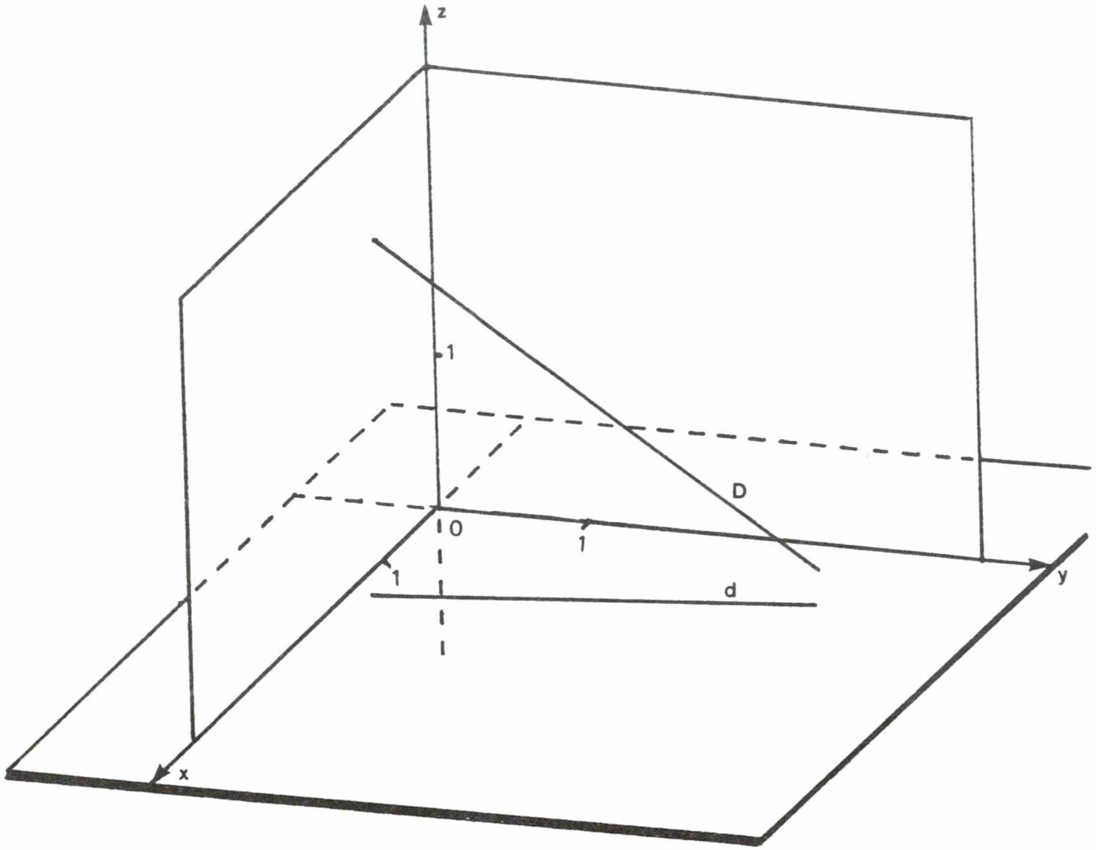


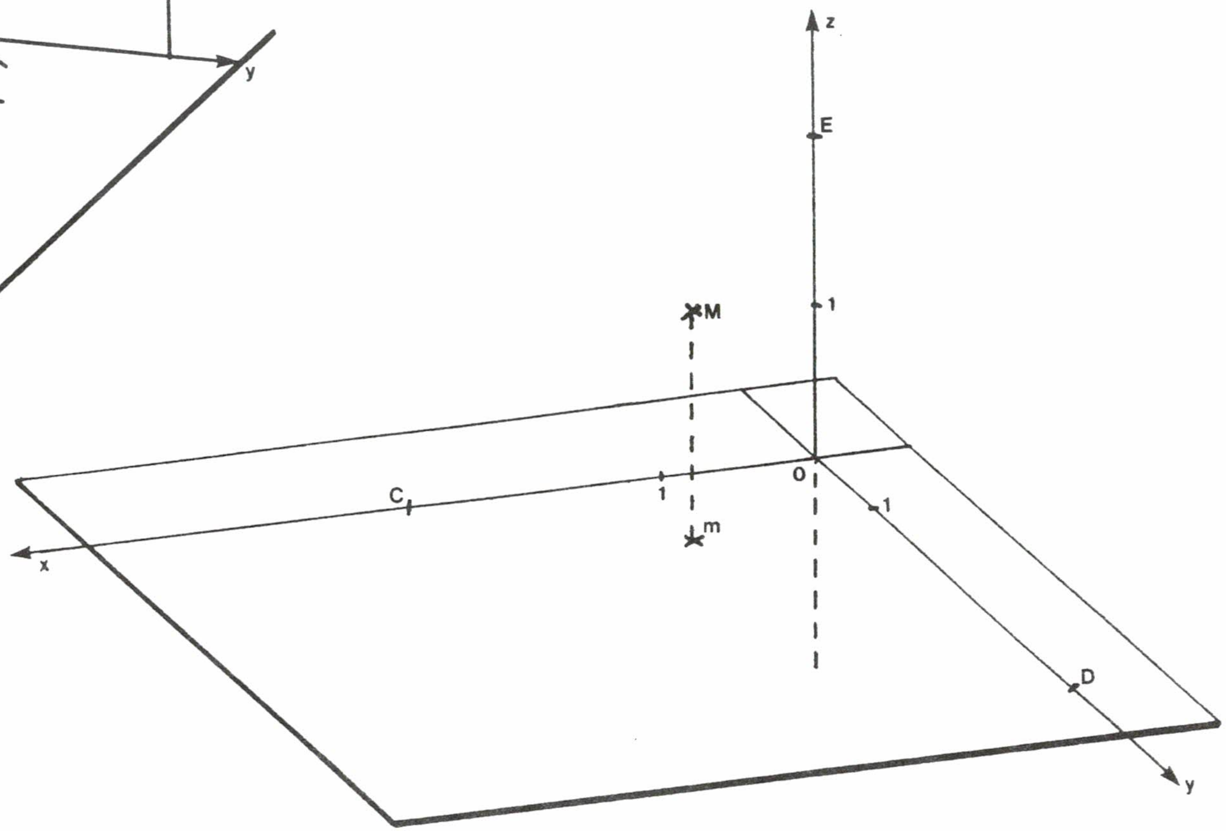
Exercice V_{74} :

La droite D se projette sur le plan xOy suivant la droite d .

a) Trace les points d'intersection de D et des plans xOy et xOz . Mesure leurs coordonnées.

b) Trace les projections de D sur les plans yOz et xOz .





Exercice V_{75} :

Les points C , D , E sont sur les axes. Le point M se projette orthogonalement en m sur xOy .

On appelle P le plan passant par M et parallèle au plan CDE .

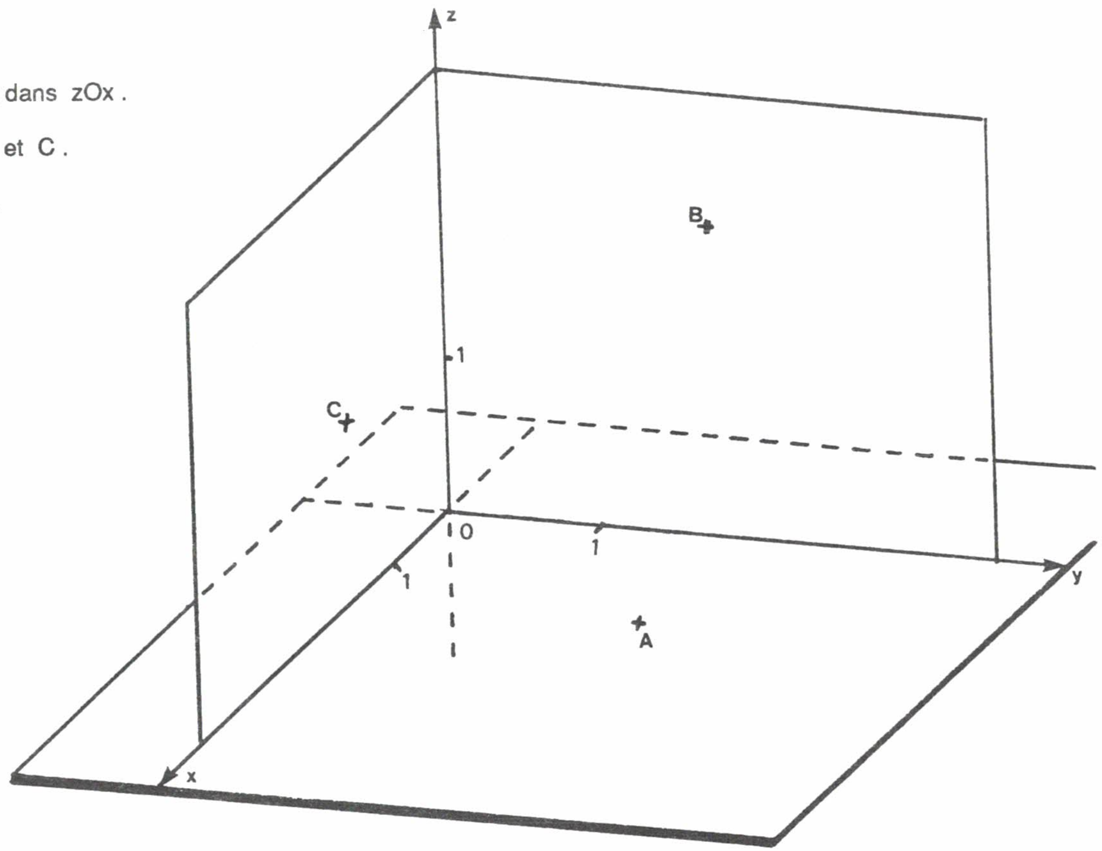
a) Le plan vertical V qui passe par M et est perpendiculaire à Oy , coupe P suivant une droite d . Trace d et l'intersection de d et du plan xOy .

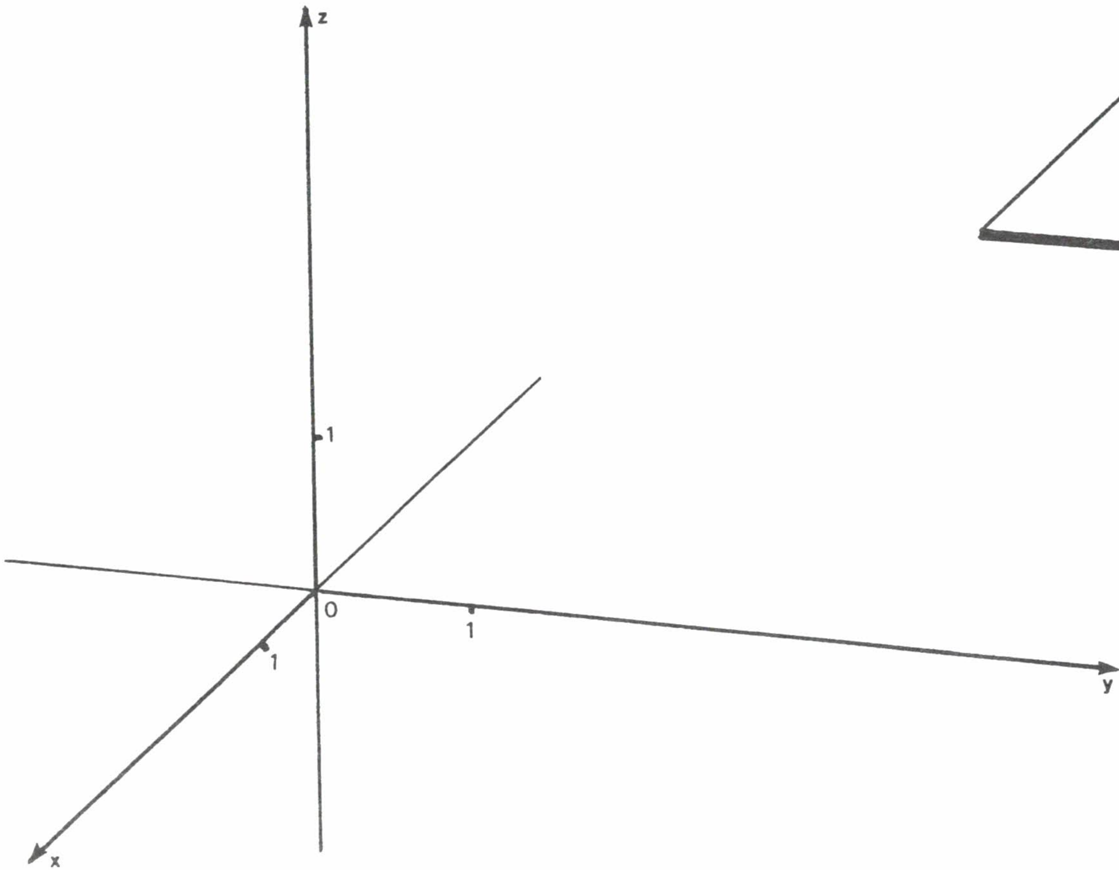
b) Trace l'intersection du plan xOy et du plan P .

Exercice V_{76} :

Le point A est dans le plan xOy , B est dans yOz , C est dans zOx .

a) Trace l'intersection du plan xOy et du plan vertical passant par B et C .
b) Trace l'intersection de la droite BC et du plan xOy .
c) Trace les intersections du plan ABC et des plans de coordonnées.





Exercice V_{77} :

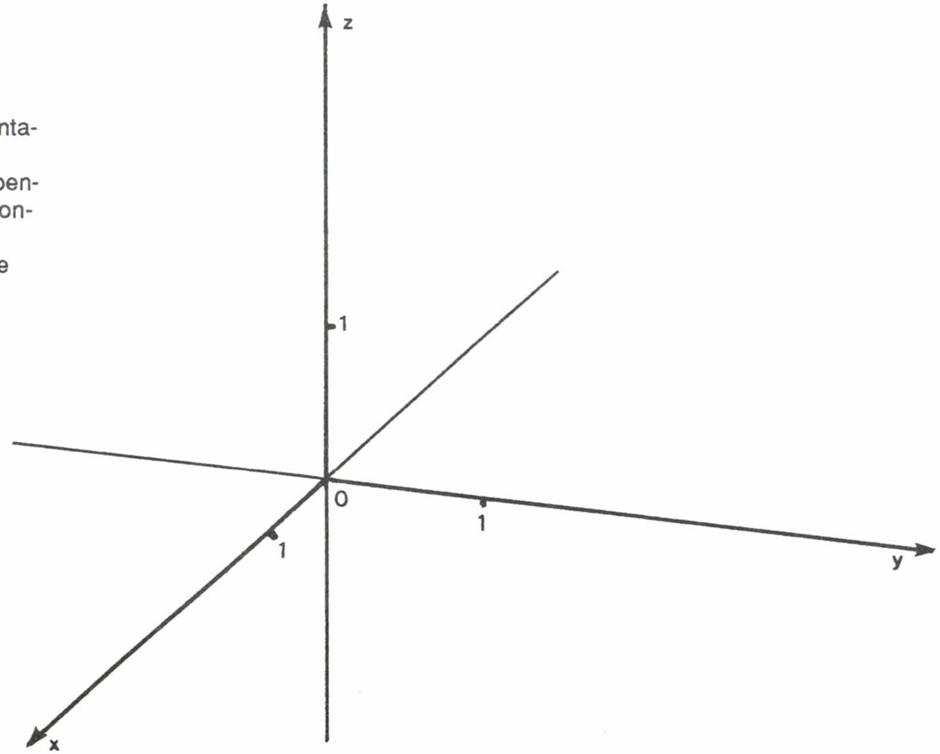
Dans ce repère orthonormé (Ox,Oy,Oz) :

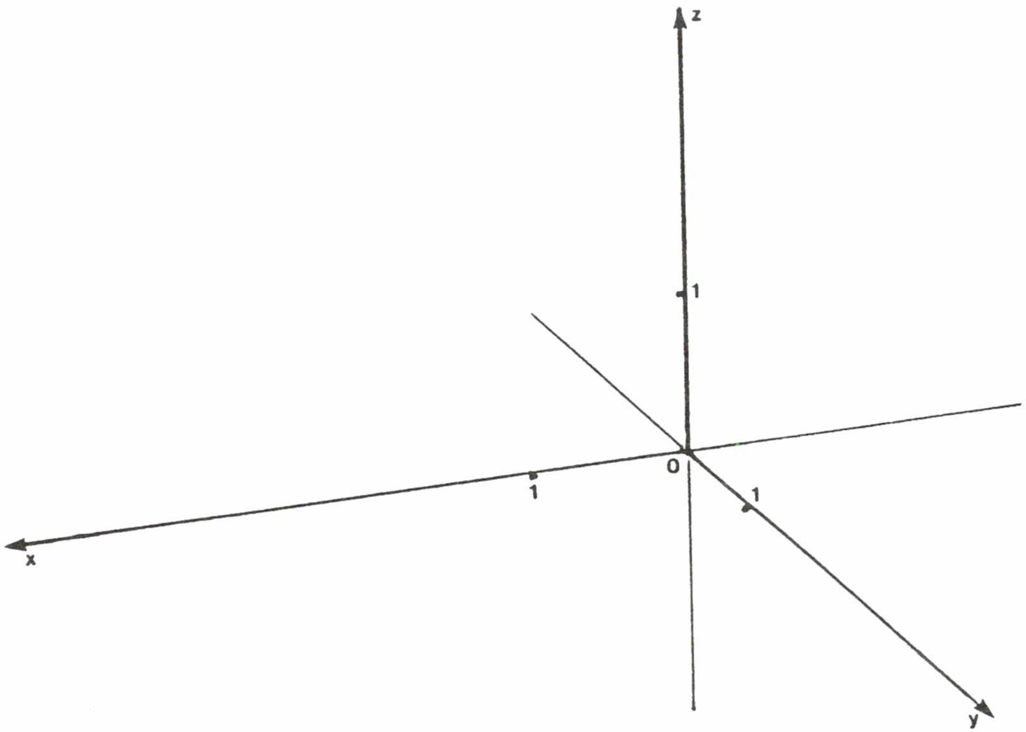
a) Trace les points A(0;4;2) , B(0;2;0) et C(4;4;1) .
b) Dessine à part un repère orthonormé yOz (unité 2 cm) avec les points A et B . Quelle est l'ordonnée du point D de la droite AB dont la cote est 1 ?
c) Place le point D sur la figure initiale. Trace la droite CD et l'intersection du plan ABC par le plan horizontal xOy .

Exercice V_{78} :

Dans ce repère orthonormé (Ox,Oy,Oz) :

a) Place les points A(-2;0;3) , B(1;4;0) et C(4;1;0) , ainsi que la projection horizontale a de A sur xOy .
b) Dessine en vraie grandeur les points a , B , C dans les axes Ox , Oy . La perpendiculaire à BC passant par a coupe BC en un point H . Quelles sont les coordonnées de H ?
c) Place H sur la figure initiale. Dessine la ligne de pente du plan ABC qui passe par A .
d) Dessine le triangle AaH en vraie grandeur. Quelle est la pente du plan ABC ?





Exercice V_{79} :

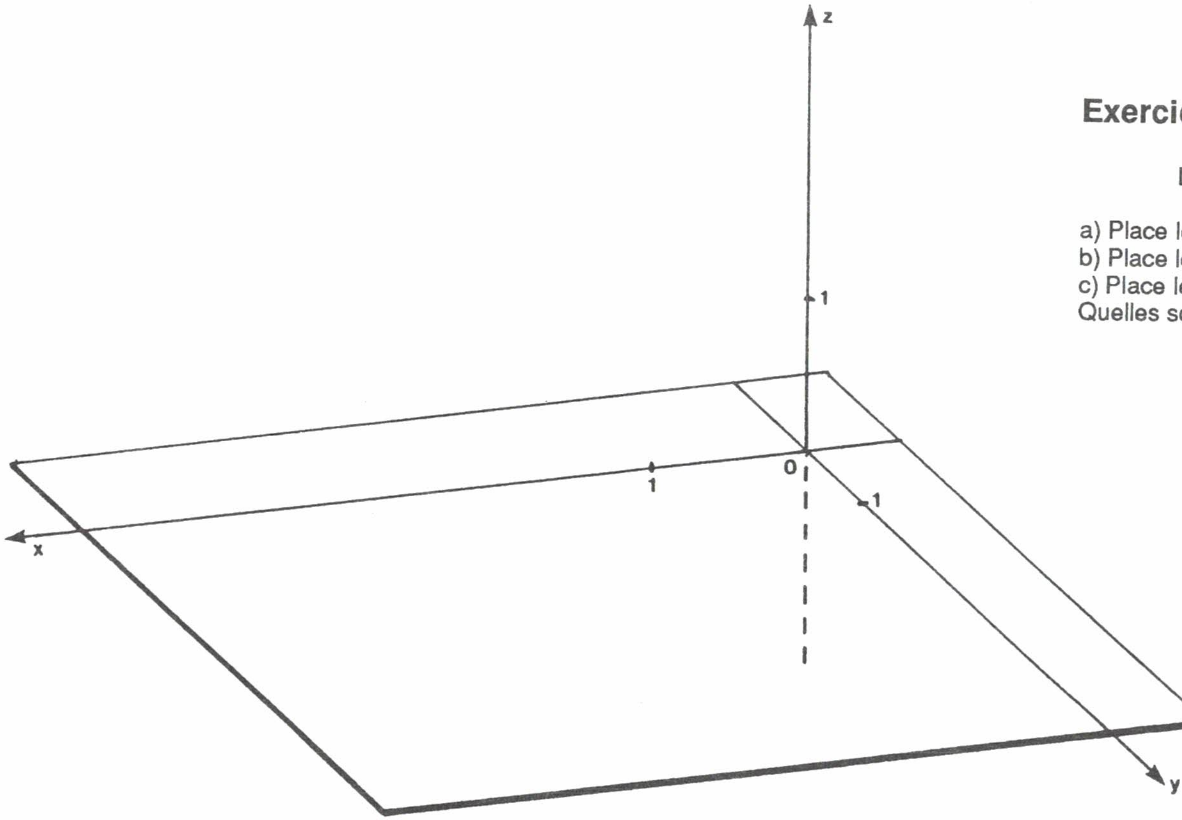
Dans ce repère orthonormé (Ox,Oy,Oz) :

a) Place les points A(-1;3;2) , B(-3;-1;1) et C(3;1;2) ainsi que leurs projections a, b, c sur le plan yOz parallèlement à Ox .
b) Dessine en vraie grandeur (unité 1 cm) le triangle abc et le repère (Oy,Oz) . Que remarques-tu ?
c) Peux-tu expliquer pourquoi le triangle ABC est (aussi) un triangle rectangle ?

Exercice V_{80} :

Dans un repère orthonormé (Ox,Oy, Oz) :

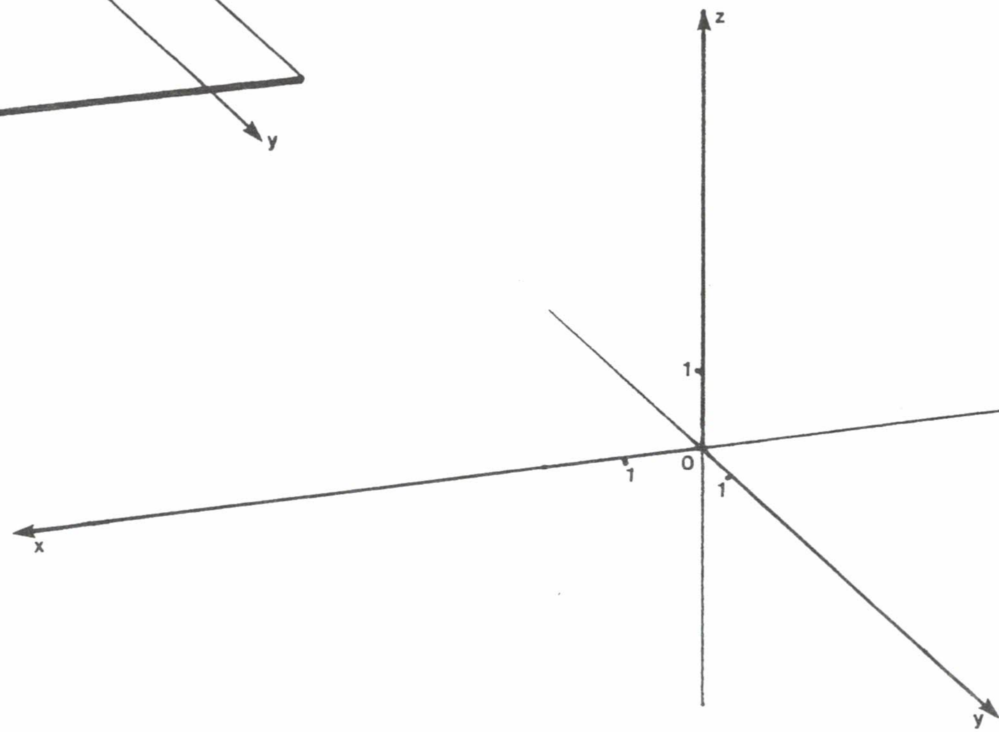
a) Place les points A(3;-2;1) , B(2;-1;2) et C(3;1;2) .
b) Place le milieu I de AC . Quelles sont ses coordonnées ?
c) Place le point D tel que ABCD soit un parallélogramme. Quelles sont ses coordonnées ?



Exercice V_{81} :

Dans un repère orthonormé (Ox,Oy, Oz) :

a) Place les points A(1;2;0) , B(4;6;5) , C(0;9;0) et D(-3;5;5) et les projections b et d de B et D sur le plan horizontal xOy .
b) Le tétraèdre ABDC est régulier. Pourquoi ?

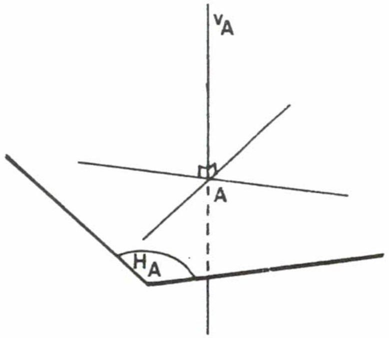


Thème : ORTHOGONALITE DANS L'ESPACE

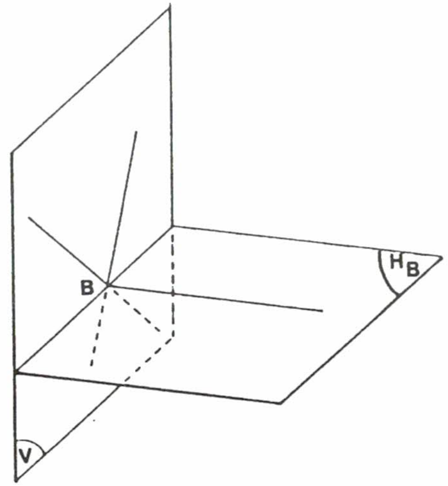
DROITES ET PLANS PERPENDICULAIRES

Dans la deuxième séquence nous avons rencontré deux figures analogues.

Première figure (voir VI_b) . Prenons la verticale v_A du point A , et considérons, toutes les droites perpendiculaires à v_A en A . Ce sont les droites du plan horizontal H_A .



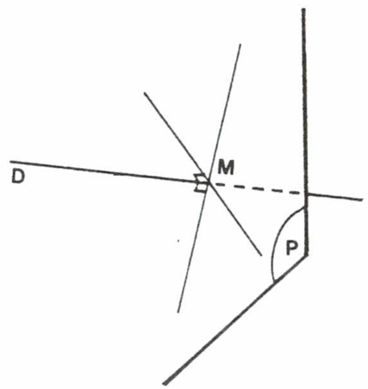
Seconde figure (voir VII_c) . Considérons un point B et une droite horizontale h qui passe par B . Alors les droites perpendiculaires à h en B sont les droites du plan vertical V perpendiculaire à h en B .



Ce sont deux cas particuliers d'une figure plus générale : celle qui est formée d'une droite et d'un plan perpendiculaires.

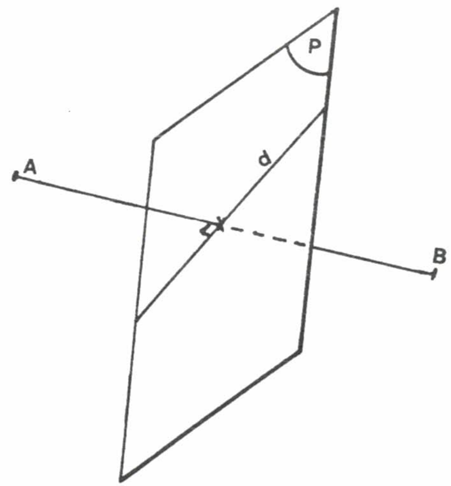
IX_a : Soit une droite D , et un point M de D . Les droites perpendiculaires à D en M sont les droites d'un plan P . On dit que ce plan est perpendiculaire à D en M .

Mais on dit aussi que la droite D et le plan P sont perpendiculaires en M ; on dit aussi que D est perpendiculaire à P en M .



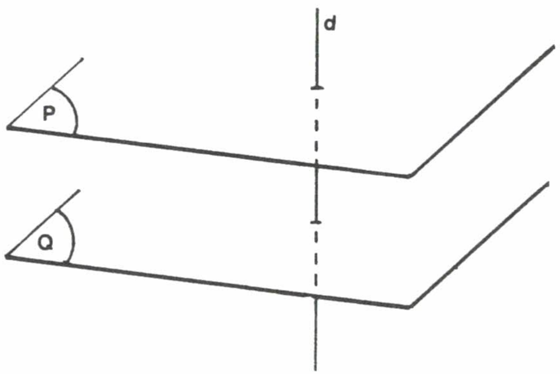
Un nouvel exemple : Soit deux points A et B ; les points M tels que MA = MB , sont les points d'un plan P appelé **plan médiateur de AB** . Ce plan est perpendiculaire à la droite AB .

Les points de P qui sont dans le plan Q défini par d et AB , sont les points de Q équidistants de A et B ; ce sont les points de " la médiatrice du segment AB dans le plan Q " .

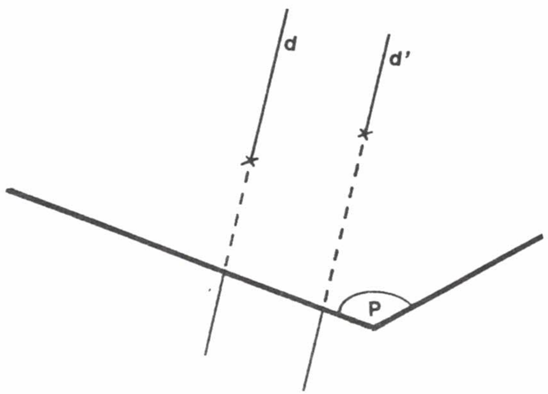


QUELQUES PROPRIETES

IX_b : Deux plans perpendiculaires à une même droite, sont deux plans parallèles.
Si deux plans sont parallèles et si l'un d'entre eux est perpendiculaire à la droite d , alors l'autre est également perpendiculaire à d .



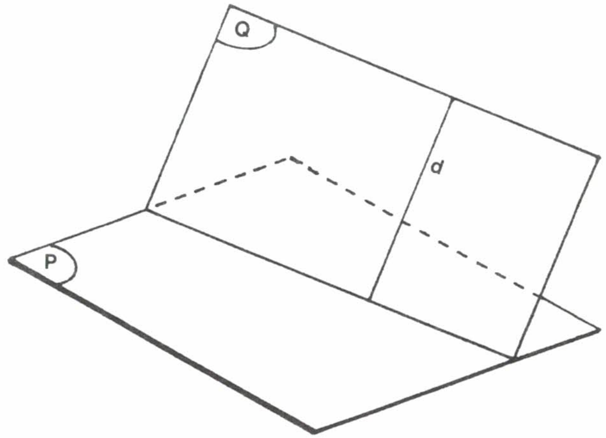
IX_c : Deux droites perpendiculaires à un même plan sont parallèles.
Si deux droites sont parallèles, et si l'une est perpendiculaire au plan P , alors l'autre est aussi perpendiculaire à P .



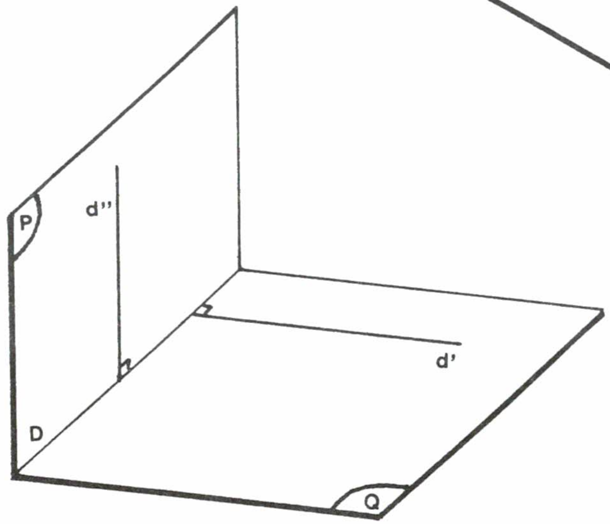
PLANS PERPENDICULAIRES

X_a : Si le plan Q contient une droite d perpendiculaire à P , on dit que Q est perpendiculaire à P .

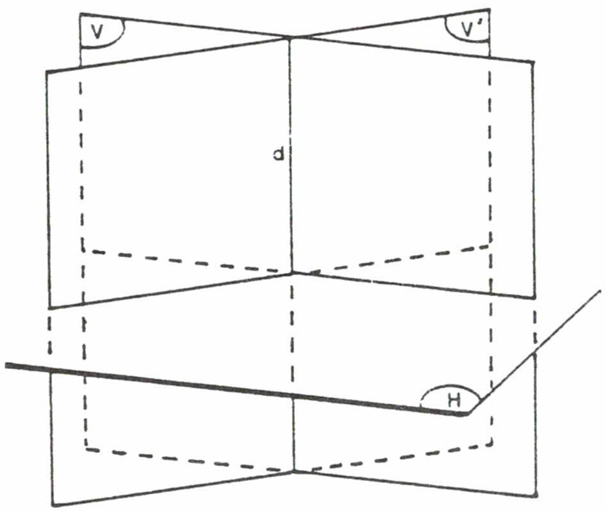
Par exemple, tout plan vertical V est perpendiculaire à tout plan horizontal (ce sont les propriétés VII_a et VI_b) .



Notons alors D l'intersection de P et de Q .



X_b : Toute droite d' qui est perpendiculaire à P en un point de D , est contenue dans Q .
Toute droite d'' qui est perpendiculaire à Q en un point de D , est contenue dans P .



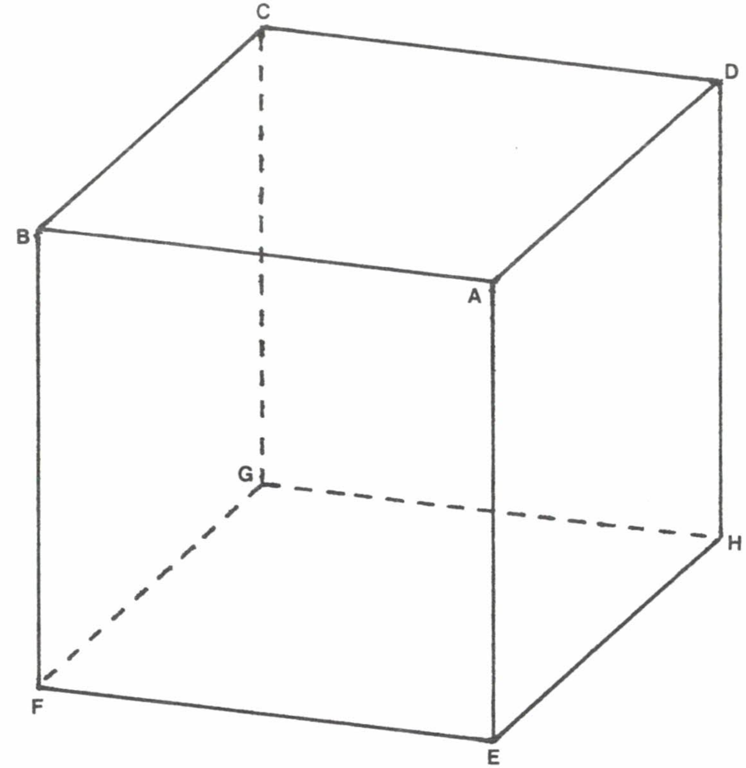
X_c : Si deux plans Q et Q' sont perpendiculaires à P (et s'ils sont sécants) , leur intersection est une droite d perpendiculaire à P .

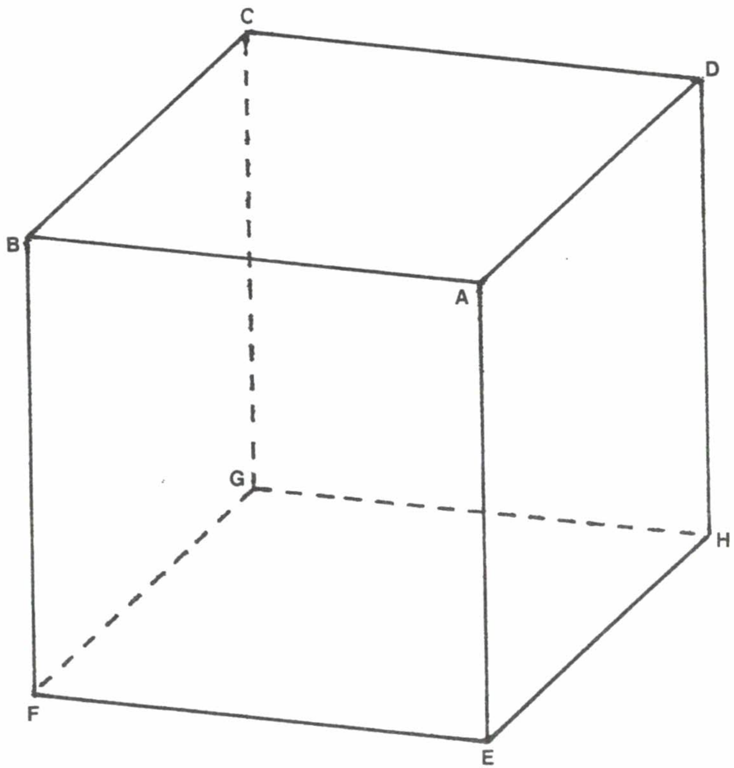
<u>Exemple</u> : Les plans verticaux V et V' sont perpendiculaires au plan horizontal H ; ils ont pour intersection une droite verticale, qui est perpendiculaire à H .

Exercice 82 :

Voici un cube, on cherche à tracer le plan médiateur P de la diagonale BH .

a) Trace l'intersection de P et de l'arête CG ; puis l'intersection de P et de l'arête CD ; ... Trace l'intersection de P et du cube.
b) Trace l'intersection I de P et de la droite AB .
c) Trace en vraie grandeur le triangle ABH (en supposant que les arêtes du cube mesurent 6 cm) et place le point I . Calcule la longueur AI . Sais-tu vérifier sur la figure ?





Exercice 83 :

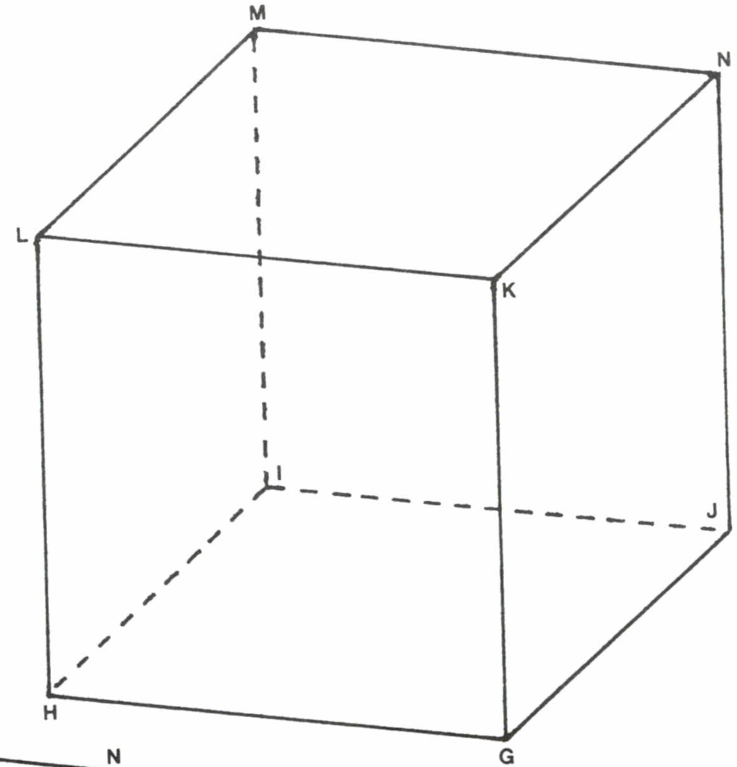
Dans ce cube on note M le centre de la face EFGH , et on appelle P le plan médiateur de MA .

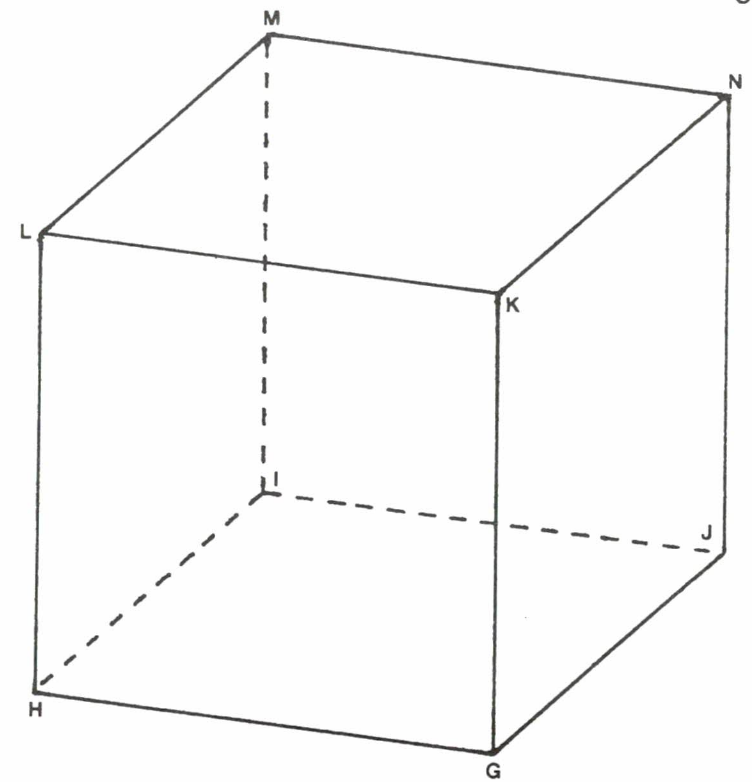
a) Explique pourquoi le plan P contient les centres I et J des faces ADHE et ABFE .
b) Soit K l'intersection de P et de l'arête AE . Dessine le triangle EAM en vraie grandeur (en supposant que les arêtes du cube ont 6 cm de longueur) . Calcule la longueur d = AK . Place le point K .
c) Trace l'intersection de P et du cube.

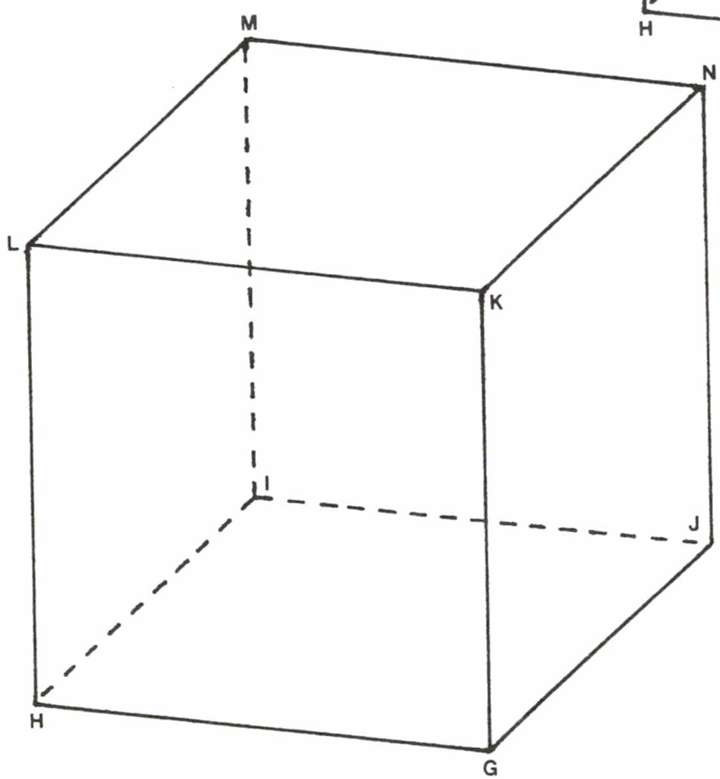
Exercice $_{84}$:

Les points X et Y sont les milieux des arêtes KN et MI du cube KLMNGHIJ .

a) Soit P le plan médiateur de XY . Trace l'intersection de P et du cube, en cherchant d'abord quelques points remarquables (sommets du cube, milieux d'arêtes,...) appartenant à P .
b) Trace l'intersection du cube et du plan perpendiculaire à XY et qui passe par X .







Exercice $_{85}$:

Le point A est le milieu de l'arête KN . On note P le plan médiateur de AH .

a) Soit B le point de l'arête LM tel que BM = 3/4 ML . Vérifie que B est dans P . Détermine le point d'intersection C de P et de l'arête GJ .
b) Trace l'intersection de P et de la face GHIJ . (Pour déterminer sa direction, suppose que GHIJ est dans un plan horizontal H , et examine la projection horizontale de la droite AH .
c) Trace l'intersection de P et du cube.

Exercice $_{86}$:

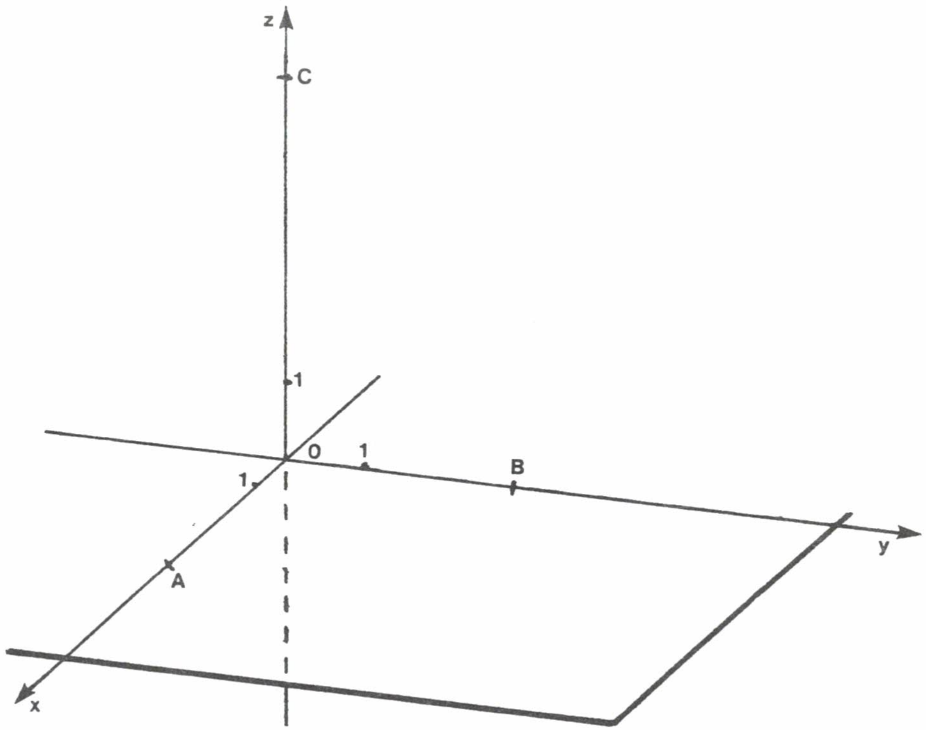
Dans ce cube, la face EFGH est horizontale. Les points I et J sont les milieux des arêtes AE et GH . On note P le plan perpendiculaire à IJ qui passe par J .

a) Soit d la droite du plan EFGH qui est perpendiculaire en J à IJ . Dessine en vraie grandeur (en supposant EH = 5 cm) la face EFGH , la projection de IJ sur cette face, et d . Dessine d sur la figure.
b) Dessine de même l'intersection du plan P et de la face CDHG .
c) Dessine l'intersection du plan P et du cube ?

Exercice $_{87}$:

Les points A , B , C ont pour coordonnées (4;0;0) , (0;3;0) et (0;0;5) . On note d la perpendiculaire au plan ABC passant par O , et H son intersection avec le plan ABC . Soit V le plan vertical qui contient OH .

a) Pourquoi V est-il perpendiculaire à AB ? Dessine la droite d'intersection de V et xOy sur la figure . (Tu peux dessiner d'abord OAB en vraie grandeur) .
b) Dessine H sur la figure.



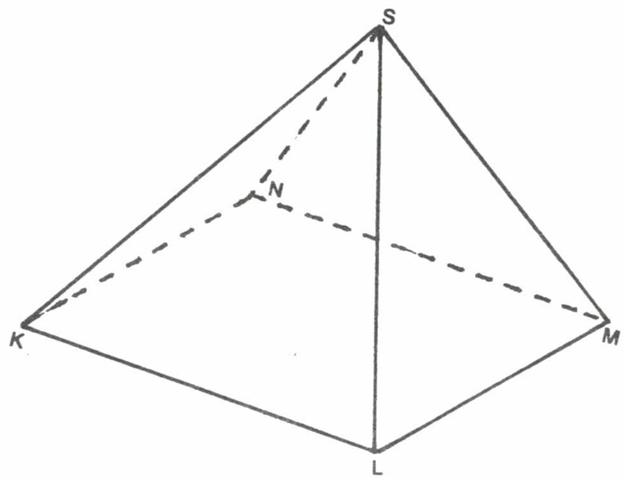
Exercice $_{88}$:

a) On donne un triangle OMN rectangle en O . On note K le point de MN tel que OKM soit un angle droit. Démontre : $1/OM^2 + 1/ON^2 = 1/OK^2$. (Tu peux démontrer d'abord que OK.MN = OM.ON) .
b) Dans le figure de l'exercice 87 , calcule OH .

Exercice $_{89}$:

Dans cette pyramide, toutes les arêtes ont même longueur d . On note P le plan perpendiculaire à SK et qui passe par L .

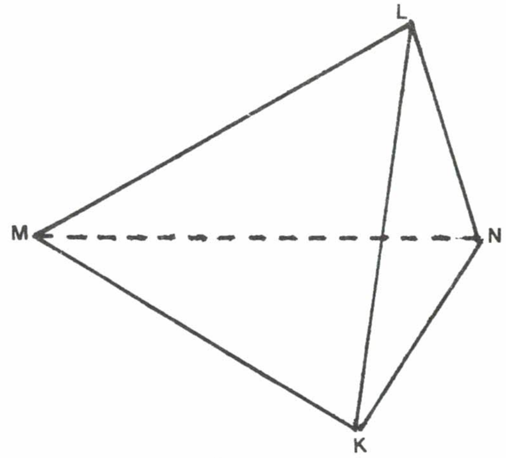
a) Trace l'intersection de P et de la face SKL ; puis l'intersection de P et de la face SKN .
b) Trace l'intersection de la pyramide et du plan Q perpendiculaire à SM et passant par L .
c) Quelle est la perpendiculaire au plan SKM qui passe par L ?



Exercice 90 :

Le tétraèdre KLMN est régulier. Soit d la perpendiculaire à MNL passant par K ; et soit H l'intersection de d et du plan MNL .

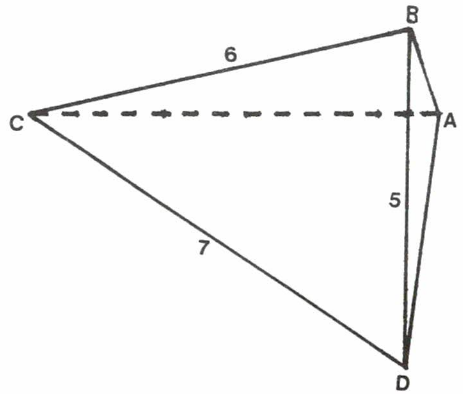
a) Pourquoi a-t-on les égalités HM = HN = HL ? Place le point H sur la figure.
b) Dessine le symétrique de K par rapport au plan MNL .



Exercice 91 :

Dans le tétraèdre ABCD , on a BC = 6 , CD = 7 et DB = 5 . D'autre part les plans ABC , ACD et ADB sont deux à deux perpendiculaires.

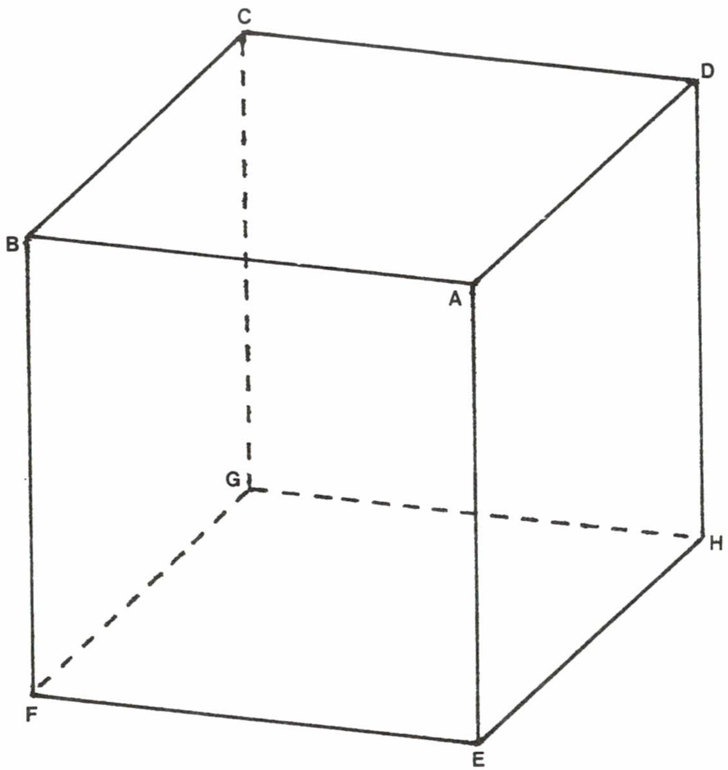
a) Que peut-on dire des triangles CAD , DAB et BAC ?
b) Calcule AB , AC , AD et le volume du tétraèdre.



Exercice 92 :

Dans le cube ABCDEFGH , on note I le centre de la face ABCD .

a) Dessine en vraie grandeur (en supposant que les arêtes du cube sont longues de 6 cm) , la partie de la figure qui se trouve dans le plan ACGE . Que peut-on dire des droites EI et AG ?
b) Soit K le point d'intersection de AG et EI . Trace la parallèle à BD qui passe par K . Peux-tu expliquer pourquoi elle est perpendiculaire à AG ?
c) Dessine l'intersection du cube et du plan perpendiculaire à AG qui passe par I .
d) Calcule les longueurs des côtés du triangle GBK .



♦ *Fiche 13 : SIGNE D'UNE FONCTION*

Exemple : Soit à déterminer les valeurs de x pour lesquelles l'expression

$$f(x) = \frac{(x-3)(2-x)}{x-1}$$

est positive.

On sait que

Pour $x < 3$, on a $x - 3 < 0$. Pour $x > 3$, on a $x - 3 > 0$

Pour $x < 2$, on a $2 - x > 0$. Pour $x > 2$, on a $2 - x < 0$

Pour $x < 1$, on a $x - 1 < 0$. Pour $x > 1$, on a $x - 1 > 0$

Pour étudier le signe de $f(x)$, il est commode de récapituler ces résultats dans un tableau :

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$x - 3$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$2 - x$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$x - 1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f(x)$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	0	$-$	

Dans ce tableau on fait apparaître toutes les valeurs de x pour lesquelles l'un des trois éléments change de signe ; on obtient ainsi un certain nombre d'intervalles sur chacun desquels f a un signe constant.

Noter que la double barre en face du 1, permet de se souvenir du fait que $f(x)$ n'existe pas pour $x = 1$.

1 Etudier, suivant les valeurs de x, le signe de :

$A(x) = \dfrac{x+2}{x-1}$ $\qquad$ $B(x) = \dfrac{(x-2)(x+4)}{x-5}$

$C(x) = \dfrac{(x+2)^2(x-7)}{3x-2}$ $\qquad$ $D(x) = \dfrac{(x-4)(x^2+3)}{2-5x}$

$E(x) = \dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)}{x}$ $\qquad$ $F(x) = (x+4)(x+2)x(x-3)$

2 Ecrire le numérateur et le dénominateur sous forme d'un produit. Puis étudier, suivant les valeurs de x, le signe de :

$$M(x) = \frac{x^2-2x+1}{x^2-4} \qquad N(x) = \frac{(x-1)^2-(2x+1)^2}{x^2-4x+4}$$

$$P(x) = \frac{x^2-2x-3}{x^2-5x+4} = \frac{(x+1)\times\ldots}{(x-1)\times\ldots} \qquad Q(x) = \frac{(x-2)^2-(3x-4)^2}{(3x-1)^2-9}$$

$$R(x) = \frac{(2x-1)^2-4}{x^2-3}$$

3 Pour quelles valeurs de x, les expressions suivantes ont-elles un sens ?

$$A(x) = \sqrt{\frac{(x+2)(2x-1)}{3+x}} \qquad B(x) = \sqrt{\frac{(2x-3)(4-3x)}{x^2-2x+1}}$$

$$C(x) = \sqrt{(5-x)(3+x)} \qquad D(x) = \sqrt{\frac{2-x}{x-3}}$$

$$E(x) = \sqrt{\frac{3-x}{2+x}} + \sqrt{\frac{4+x}{x}} \qquad F(x) = \sqrt{\frac{3-2x}{x-4}} - \sqrt{\frac{2x+3}{5-x}}$$

4 Pour quelles valeurs de x, les expressions suivantes ont-elles un sens ?

$$T(x) = \sqrt{\frac{(x-7)(3-4x)}{(2-x)(5x+2)}} \qquad U(x) = \sqrt{\frac{x-7}{2-x}}\sqrt{\frac{3-4x}{5x+2}}$$

$$V(x) = \frac{\sqrt{(x-7)(3-4x)}}{\sqrt{(2-x)(5x+2)}} \qquad W(x) = \sqrt{\frac{x-7}{(2-x)(5x+2)}}\ \sqrt{3-4x}$$

5 Dans un système d'axes orthonormés (unité 1 cm), colorie l'ensemble des points $M(x,y)$ pour lesquels les expressions suivantes sont (strictement) positives :

$$F(x,y) = (x-y)(x+y-1) \qquad G(x,y) = \frac{(x+y)}{3x+2y-1}$$

$$H(x,y) = \frac{(x+y-1)(x-y+1)}{x-y} \qquad I(x,y) = \frac{(2x-y+3)(x-4y+1)}{xy}$$

◆ *Fiche 14 : EQUATIONS ET INEQUATIONS*

(1) Mettre l'expression sous forme d'un produit de facteurs. Puis déterminer (s'il en existe) les valeurs de x pour lesquelles elle s'annule.

$A(x) = (x^2-6x+9) - 4x^2$

$B(x) = (x^2-4) + (x^2+4x+4)$

$C(x) = (x^2-3) + (x^2 - 2\sqrt{3}x+3)$

$D(x) = x^4 - 4$

$E(x) = (x^2-9)[x^2 - (2x-1)^2]$

$F(x) = (x^2-3)[x^4 - (2x^2+1)^2]$

(2) Les équations suivantes ont deux racines, donr l'une est un nombre entier compris entre −10 et +10 . Déterminer cette racine, factoriser, et trouver ainsi l'autre racine.

$A : 2x^2 + x - 10 = 0$

$B : -2x^2 - 5x + 12 = 0$

$C : 3x^2 + 11x - 4 = 0$

$D : 2x^2 + 8x - 10 = 0$

$E : 3x^2 + 7x - 6 = 0$

$F : 5x^2 - 6x + 1 = 0$

$G : 7x^2 - 8x - 12 = 0$

$H : 5x^2 - 4x - 12 = 0$

(3) Développer, réduire puis résoudre :

$A : (x+2)(x+3) - (2x-3)(x-2) = 0$

$B : (x+1)(3x-1) + (2-x)(4+3x) = 0$

$C : (x-4)(1-x) - (x-4)(x-3) + 2x^2 = 0$

$D : (3x-1)(x-3) + (x+4)(x+6) = 0$

$E : (x-2)^2 + (x+1)^2 + 2x - 6 = 0$

$F : (x-1)(-2-3x) + (3-x)(4+x) = 0$

(4) Résoudre :

$\sqrt{x^2+3x-2} = \sqrt{x^2-5x+4}$

$\sqrt{3x^2-3x+1} = \sqrt{1-2x+3x^2}$

$\sqrt{2x^2-5x-1} = \sqrt{2x-1}$

$\sqrt{x^2-4x-1} = \sqrt{x^2-2x-2}$

$\sqrt{x^2+3x+1} = \sqrt{x^2+5x-1}$

(5) Résoudre :

a) $\dfrac{x-1}{x+3} = \dfrac{x-2}{x+1}$

b) $\dfrac{2x-1}{x-1} \geq \dfrac{4x-3}{x-3}$

c) $\dfrac{4x-1}{x+2} \leq \dfrac{x-3}{x+6}$

d) $\dfrac{2x+1}{x-3} = \dfrac{2x}{x+1}$

6 Résoudre :

(a) $\begin{cases} x+2 = y-3 \\ 2x-y+1 = 3y-x+2 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x-5y+1 = 2x-y+3 \\ x+\frac{1}{2}y+4 = 3y-7 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 3x-\frac{1}{3}y = 1 \\ 2x-\frac{1}{4}y = \frac{5}{7} \end{cases}$

(d) $\begin{cases} 8x-\frac{5}{4}y+2 = 1 \\ 3x-5y+\frac{5}{4} = \frac{2}{3}x-1 \\ 2x-y > 0 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} 5x-3y+1 = \frac{2}{3}x-\frac{1}{4}y \\ 3x-y+4 \leq 0 \\ x+\frac{2}{3}y = 0 \end{cases}$

7 Pour quelles valeurs de x, les expressions $f(x)$ et $g(x)$ ont-elles un sens ? Pour quelles valeurs de x, a-t-on $f(x) \geq g(x)$?

a) $f(x) = \sqrt{x^2-16}$ $\qquad g(x) = \sqrt{(x-3)(x-5)}$

b) $f(x) = \sqrt{(x+2)(4-x)}$ $\qquad g(x) = \sqrt{(1-x)x}$

c) $f(x) = \sqrt{(2x-3)(x+2)}$ $\qquad g(x) = \sqrt{(-x-3)(-x+2)}$

d) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+2}{5-3x}}$ $\qquad g(x) = \sqrt{\dfrac{(x-1)(x-2)}{5-3x}}$

e) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-3}{x+2}}$ $\qquad g(x) = \sqrt{\dfrac{x-3}{(x+2)(x-1)}}$