IREM de LORRAINE

BAC PRO

maths générales

Jean ENEL

François LEIRITZ

© Edité et imprimé par l'**Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques** - (Université de Nancy I - Faculté des Sciences) - B.P. 239 - 54506 VANDOEUVRE-les-NANCY Cedex
Dépôt légal : 4e trimestre 1991
n° de la publication : 2-85406-126-8
Responsable de la publication : Le Directeur de l'IREM, Bernard ANDRE

Cher lecteur,

Aprés les fascicules STATISTIQUES,et MATHEMATIQUES FINANCIERES, ce troisième fascicule,intitulé MATHEMATIQUES GENERALES,constitue la partie "tronc commun" du programme de mathématiques en BAC PRO.

Il est plutôt destiné aux élèves des sections à vocation tertiaire de par le choix des problèmes proposés.

Les chapitres suivants sont abordés:

_ Calcul numérique
_ Calcul littéral
_ Equations
_ Inéquations
_ Suites
_ Fonctions
_ Fonctions dérivées
_ Logarithmes, exponentielles.

Nous avons voulu que les éléments étudiés le soient comme des outils nécessaires à la résolution des problèmes et des situations concrétes proposées dans les deux précédents fascicules.
C'est pourquoi chaque chapitre comprend une partie cours limitée aux résultats essentiels,des exercices d'application directe,et enfin des problèmes concrets où l'on retrouve souvent des statistiques et des mathématiques financières.

Nous avons donné quelques exemples d'utilisation de la calculette et de l'ordinateur (tableur,programmation) afin de mettre en évidence le lien entre les mathématiques et les outils utilisés dans les disciplines professionnelles.

Bon travail

les auteurs

A paraitre: Corrigé et conseils d'utilisation du fascicule "Statistiques en bac pro".

Calcul numérique

LES NOMBRES :

$\mathbb{N}$	ENSEMBLE DES NOMBRES ENTIERS **N**ATURELS 0 ; 2 ; 7 ; 254 Partie décimale nulle.	Ne permet pas de mesurer une altitude par rapport au niveau de la mer,... d'indiquer une température négative...
$\mathbb{Z}$	ENSEMBLE DES NOMBRES ENTIERS RELATIFS (**Z**ahl) (-10) ; (-3) ; 0 ; (+1) Partie décimale nulle.	Ne permet pas de mesurer précisément les dimensions d'un objet...
$\mathbb{D}$	ENSEMBLE DES NOMBRES **D**ECIMAUX -7,5 ; -0,82 ; 1,00 ; 4,0970 Partie décimale limitée.	Ne permet pas de mesurer exactement un segment de 1 mètre coupé en trois parties égales...
$\mathbb{Q}$	ENSEMBLE DES NOMBRES RATIONNELS (**Q**UOTIENTS) $-\frac{4}{7}$; $-\frac{0,5}{1}$; $\frac{2}{3}$; $+\frac{12}{4}$ Partie décimale illimitée périodique.	Ne permet pas de mesurer exactement la diagonale d'un carré de 1 mètre de coté, la longueur d'un cercle...
$\mathbb{R}$	ENSEMBLE DES NOMBRES **R**EELS $-\frac{2}{5}$; $-\sqrt{3}$; $\sqrt{1,2}$; π ; 100 Partie décimale illimitée périodique ou non périodique.	Ne permet pas d'obtenir une surface négative...

LES OPERATIONS

Ordre de priorité

$\mathbb{N}$ | $\mathbb{Z}$ | $\mathbb{D}$ | $\mathbb{Q}$ | $\mathbb{R}$

3°

ADDITION ($\mathbb{N}$)

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

SOUSTRACTION ($\mathbb{N}$)

SOMME

$\mathbb{Z}$

Interne
- Si les nombres sont de même signe, on additionne les valeurs absolues et on conserve le signe.
- Si les nombres sont de signe opposé, on soustrait et on prend le signe de la plus grande des deux valeurs absolues.

Exemples:

$-4 + 9 = 5$
$-3 - 8 = -11$
$7 + 6 = 13$
$-9 + 2 = -7$

Remarque: Suppression des doubles signes:
- $+(+a)$ s'ecrit $+a$
- $+(-a)$ s'ecrit $-a$
- $-(+a)$ s'ecrit $-a$
- $-(-a)$ s'ecrit $+a$

$\mathbb{Q}$

Interne
Regle:
- Simplifier les fractions.
- Reduire au même denominateur.
- Effectuer la somme des numerateurs.
- Simplifier le resultat.

Exemple:

$$S = 0,2 + \frac{7}{3} - \frac{10}{12} = \frac{1}{5} + \frac{7}{3} - \frac{5}{6} = \frac{6}{30} + \frac{70}{30} - \frac{25}{30} = \frac{51}{30} = \frac{17}{10} = 1,7$$

$\mathbb{R}$

Interne

Exemple de somme de reels:

$$S = \sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{98}$$
$$= \sqrt{2^2 \times 3} + \sqrt{3^3} - \sqrt{2 \times 7^2}$$
$$= 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 7\sqrt{2}$$
$$= 5\sqrt{3} - 7\sqrt{2}$$

Attention:

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$$

2°

MULTIPLICATION

×	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	0	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	0	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	0	9	18	27	36	45	54	63	72	81

$\mathbb{Z}$

Interne
Regle:
- Les nombres sont de même signe, le signe est +.
- Les nombres sont de signe contraire, le signe est −.

Exemples:

$3 \times 2 = 6$ $\quad 6 \times (-5) = -30$
$-4 \times 5 = -20$ $\quad -3 \times (-7) = 21$

$\mathbb{D}$

Interne
Notation scientifique
Calculons:

$$P = 12\ 000 \times 0,05 \times 10\ 000\ 000$$
$$= 1,2 \times 10^4 \times 5 \times 10^{-2} \times 10^7$$
$$= 1,2 \times 5 \times 10^{4-2+7}$$
$$= 6 \times 10^9$$
$$= 6\ 000\ 000\ 000$$

DIVISION

$\mathbb{N}$

Externe
La division entière:

$a = bq + r \quad 0 \leqslant r < b$

Exemple:

$124 \div 9$: quotient 13, reste 7 (34 étape intermédiaire)

$124 = 9 \times 13 + 7$

Remarque:
Le diviseur doit être $\neq 0$

$\mathbb{D}$

Externe
Règle pour arrondir les resultats:
- si le 1er chiffre à supprimer est 0,1,2,3 ou 4, on arrondit par défaut.
- si le 1er chiffre à supprimer est 5,6,7,8 ou 9, on arrondit par excès.

PRODUIT/QUOTIENT

$\mathbb{Q}$

Interne
Produit: multiplier les numérateurs et les denominateurs entre eux.
Quotient: multiplier par la fraction inverse.

Exemples:

$$\frac{7}{9} \times \frac{2}{5} = \frac{7 \times 2}{9 \times 5} = \frac{14}{45}$$

$$\frac{4}{5} \div 3 = \frac{4}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{15}$$

Remarque: Simplification d'un produit.

$$\frac{12 \times 50 \times 7}{110 \times 6 \times 14} = \frac{\overset{1}{\cancel{12}} \times 5\cancel{0} \times \overset{1}{\cancel{7}}}{11\cancel{0} \times \underset{1}{\cancel{6}} \times \underset{1}{\cancel{14}}} = \frac{5}{11}$$

$\mathbb{R}$

Interne
Rendre rationnel le denominateur d'une fraction:

$$F = \frac{3}{5 + \sqrt{3}} = \frac{3(5 - \sqrt{3})}{(5 + \sqrt{3})(5 - \sqrt{3})} = \frac{15 - 3\sqrt{3}}{25 - 3} = \frac{15 - 3\sqrt{3}}{22}$$

Remarque: $(5 - \sqrt{3})$ est appelée expression conjuguee de $(5 + \sqrt{3})$

1°

PUISSANCE ENTIERE

$\mathbb{N}$

Interne

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ facteurs}}$$

Exemple:

$$3^2 = 3 \times 3 = 9$$

$\mathbb{Z}$

Interne
Une puissance paire est toujours positive:

$(-3)^4 = +81$

Une puissance impaire peut être positive ou négative.

$(-2)^3 = -8$
$(+4)^5 = +1024$

$\mathbb{D}$

Interne

$$a^n \times a^m = a^{n+m}$$
$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$
$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

$\mathbb{Q}$

Interne

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

RACINE CARREE

$\mathbb{N}$

Externe

La racine carrée (radical) de a s'ecrit $\sqrt{a}$.

Exemples:

$\sqrt{0} = 0 \quad \sqrt{4} = 2 \quad \sqrt{16} = 4$
$\sqrt{1} = 1 \quad \sqrt{9} = 3 \quad$ etc

$\mathbb{Z}$

Externe
La racine carrée n'est definie que sur $\mathbb{Z}^+$.
Une racine carrée est toujours positive.
Remarque:

$\sqrt{a^2} = |a|$
$(\sqrt{a})^2 = a$

$\mathbb{D}$

Externe

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$$

Application:

$$\sqrt{18} = \sqrt{2 \times 3^2} = \sqrt{2}\sqrt{3^2} = 3\sqrt{2}$$

$\mathbb{Q}$

Externe

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Application:

$$\sqrt{0,08} = \sqrt{\frac{8}{100}} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{100}} = \frac{2\sqrt{2}}{10}$$

PUISSANCE RATIONNELLE

$\mathbb{R}$

Interne

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$$

Exemples:

$$2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2^3} = 2\sqrt{2}$$

$$4^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{4^3} = \sqrt[5]{64} = 2,29$$

$$2^{-0,5} = \frac{1}{2^{0,5}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Remarque:

$$\sqrt{a^n} = |a^{\frac{n}{2}}|$$

Le Théatre des Opérations

BAC PRO
IREM DE LORRAINE

Compléter les opérations ou tableaux d'opérations suivants:

8 . . 0 .	+	2 4 3 .	=	. 8 8 . 5
. 9 . 3	+	. 0 .	=	2 . 5 3
8 . .	+	2 . 3 . 4	=	2 . 1 8 5
7 . 7 3	+	7 . 4 8	=	1 . 7 . .
. . 3 . 7	+	. 6 1 9 .	=	1 . 8 . 5 .
. 4 . . 2 3	+	. 1 . 8 . 6	=	. . 0 9 . .

. . 3
x . .
. . 0 .
1 2 1 .
. . . 5 1

2 . . .	. 8
2 9 .	4 .
2	

. . 4 8	-	. 5 .	=	2 . .
5 3 .	-	4 . 9	=	. 1 7
9 9 . 8	-	. . . 2	=	. 5 3 .
. . 0 .	-	. 0 . .	=	5 . 5
. . 5 3 2	-	9 . . .	=	5 . 5 3

(Voir aussi OPERATIONS A TROUS sur Nano-reseau et compatibles aux éditions TOPIQUES)

Calculer $A=4x(y-x)^2$; $B=12y^2-5xy$ et $C=-3(x+y)(x-y)^2$ pour x=12 et y=7; pour x=-5 et y=5; pour x=-2 et y=-1

Calculer $D=3|x-2|-|2x+7|$ pour x=12; x=1; x=-5; x=-10

Calculer $E=(x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-z)$ pour a=1; b=2; c=3; d=4; ...; z=26

Il s'agit, dans les exercices qui suivent, d'utiliser avec le plus d'efficacité possible votre calculette.

Calculer avec une précision du centième:

$C=\frac{36\,000\ I}{t\ n}$ avec I = 124,50; t = 12,5; n = 75

$V=a\frac{(1+i)^n-1}{i}$ avec a = 1248,50; i = 0,0275134; n = 9

$r=\frac{19\,751\,284\ t}{100+t}$ pour t = 8,4; pour t = 7,2; pour t = 5,2

$a=C\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$ avec C = 287000; i = 0,07842169; n = 10

Calculer à l'unité près:

$V=\frac{4}{3}\pi R^3$ pour π= 3,14159 et R = 6400.000

$T=\frac{2\pi(R+h)\sqrt{R+h}}{R\sqrt{g}}$ pour R = 6400; h = 36000; g = 9,81

Calculer au millième près:

$A=(12,4-7,3586)^2\times 7,3586$ $\quad C=\frac{1-0,0234782}{1+0,0234782}$ $\quad E=\frac{3\times 15,7142803}{2\times 15,71428}$

$B=3\times 0,525^2-0,525^3$ $\quad D=2,06466\times\left(1+\frac{1}{2,06466}\right)$ $\quad F=0,8624\times 7,8624^2$

Effectuer "à la main" puis à la calculette:

$A=\frac{2}{5}+\frac{4}{3}$ $\quad B=\frac{5}{11}+\frac{13}{19}-\frac{4}{3}$ $\quad C=\frac{3}{5}+0,16-0,25$ $\quad D=\left(\frac{6}{15}-\frac{3}{4}\right)\times\frac{5}{7}$ $\quad E=\frac{35}{24}\times\left(\frac{72}{42}+\frac{18}{12}\right)$ $\quad F=\frac{\frac{4}{3}+2-\frac{1}{9}}{\frac{16}{15}+3-\frac{2}{5}}$ $\quad G=\frac{\frac{1}{3}-\frac{5}{2}}{\frac{3}{4}+\frac{1}{2}}\times\frac{\frac{5}{6}+\frac{7}{3}}{2-\frac{5}{6}}$

Calculer:

$A=\frac{9\,000\,000\,000\times(0,05)^3\times 49}{(35\,000)^2\times 0,1^3\times 30^2}$ $\qquad B=\frac{(0,0025)^2\times 0,01\times 18\,000^3}{1,25\times(0,9)^3\times 10\,000}$

Calculer:

$I=\frac{a}{b}+2ab-(a+b)^2$ pour $a=-\frac{3}{2}$ et $b=\frac{50}{60}$ $\quad N=\frac{x+y}{2xy}$ pour x = 0,9 et $y=-\frac{1}{3}$ $\quad O=\frac{a^2+b^2-2ab}{a^2-b^2}$ pour $a=-\frac{2}{5}$ et $b=-\frac{15}{20}$

Effectuer au millième près, avec votre calculette:

$3,7^2$ $\quad 3,09^3$ $\quad (-3)^2$ $\quad (-5)^7$ $\quad -5^5$ $\quad (-1)^{2750}$ $\quad 5^{-3}$ $\quad \frac{1}{-5^3}$ $\quad \frac{1}{5^3}$ $\quad 1000^0$ $\quad 3^{0,5}$ $\quad 3^{-\frac{1}{2}}$ $\quad 5^{\frac{2}{3}}$ $\quad -10^{0,2}$ $\quad 1000^{-1}$ $\quad (-2)^{-\frac{1}{3}}$ $\quad \sqrt[3]{2^5}$ $\quad \sqrt[4]{-2}$ $\quad \sqrt[3]{-3^4}$ $\quad -\sqrt[2]{-\ldots}$

Calculer à la main et vérifier à la calculette:

$\sqrt{0,04}$ $\quad \sqrt{39,69}$ $\quad \sqrt{1800}$ $\quad \sqrt{70,56}$ $\quad \sqrt{2704}$

$\sqrt{2}+\sqrt{27}-\sqrt{75}$ $\quad 2\sqrt{48}-\sqrt{27}+\frac{\sqrt{588}}{2}$ $\quad \sqrt{63}+\sqrt{112}-\frac{\sqrt{700}}{2}$ $\quad \sqrt{450}-\sqrt{98}-2\sqrt{18}$ $\quad (3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})$ $\quad \frac{1}{\sqrt{72}}\times\sqrt{32}$

NUM 2

Nombres divers

DIAGRAMME DE VENN

On appelle diagramme de Venn la représentation d'un ensemble sous la forme d'une surface limitée par une courbe quelconque.
Exemple: Soit E l'ensemble des pièces du jeu d'echec qui peuvent se déplacer en diagonale.
Soit F l'ensemble des pièces qui peuvent se déplacer de plusieurs cases.

Représenter par un diagramme de Venn les cinq ensembles de nombres $\mathbb{N}$; $\mathbb{Z}$; $\mathbb{D}$; $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$.
Placer sur ce diagramme les nombres suivants:

$$-2\ ;\ 0\ ;\ -0,7\ ;\ \frac{3}{4}\ ;\ 1,00\ ;\ \sqrt{2}\ ;\ \frac{2}{3}\ ;\ \frac{0,4}{1}\ ;\ \sqrt{16}\ ;\ \frac{54}{26}\ ;\ \pi\ ;\ \sqrt{-9}\ ;\ -\frac{7}{2}\ ;\ \frac{1,5}{0,3}\ ;\ -\sqrt{5}$$

LE SOMBRERO

Un signal lumineux, parti du soleil, met 500 secondes pour parvenir sur terre. Venu de la lune, il met 1,3 secondes.
Le même signal lumineux, envoyé de la galaxie M104, dite du "Sombrero", mettrait 37 millions d'années pour parvenir sur la terre.
1° Sachant que la vitesse de la lumière est de 300 000 Km/s, calculer la distance de la terre à la lune, de la terre au soleil, de la terre à la galaxie M104.
2° On se propose de faire un schéma représentant ces quatre objets celestes. Déterminer l'échelle de ce schéma pour que la terre y soit représentée par un cercle de 1 mm de diamètre. Quels seraient alors les diamètres et les distances entre les objets.

diamètre de la terre = 10 000 Km
diamètre de la lune = 3 500 Km
diamètre du soleil = 1 000 000 Km
diamètre de la galaxie M104 = 30 000 persecs
(un persec = 300 000 Km)

EXPRESSIONS CONJUGUEES

Ecrire les réels suivants sans radical au dénominateur:

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \qquad \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} \qquad \frac{1-\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} - \frac{1-2\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$$

$$\frac{3+\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \qquad \frac{\sqrt{81}-3\sqrt{27}}{\sqrt{3}-1} \qquad \frac{6}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} + \frac{3}{1-\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{2-\sqrt{5}} \qquad \frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}-2\sqrt{2}} \qquad \frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{2\sqrt{2}-3\sqrt{3}} + \frac{2\sqrt{2}-3\sqrt{3}}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}$$

PERDRE AU CHANGE

COURS MOYENS DE CLOTURE DU 24 DÉCEMBRE AU 28 DÉCEMBRE 1990
(La ligne inférieure donne ceux de la semaine précédente.)

PLACE	Livre	$ E.U.	Franc français	Franc suisse	D.mark	Franc belge	Florin	Lire italienne
New-York	1,9150	-	19,5810	77,9423	66,6444	3,2226	59,1016	0,0884
	1,8830	-	19,2178	76,1615	65,3595	3,1646	57,9374	0,0867
Paris	9,7799	5,1070	-	398,05	340,35	16,4583	301,83	4,5155
	9,7882	5,2035	-	396,31	340,09	16,4668	301,48	4,5130
Zurich	2,4569	1,2830	25,1224	-	85,5048	4,1347	75,8274	1,1344
	2,4724	1,3130	25,2330	-	85,8170	4,1551	76,0718	1,1388
Francfort	2,8735	1,5006	29,3815	116,95	-	4,8356	88,6820	1,3267
	2,8810	1,5300	29,4033	116,53	-	4,8417	88,6443	1,3270
Bruxelles	59,4224	31,03	6,0760	24,1855	20,6797	-	18,3392	2,7436
	59,5028	31,60	6,0728	24,0670	20,6536	-	18,3082	2,7407
Amsterdam	3,2402	1,6920	33,1312	1,3188	112,76	5,4528	-	1,4960
	3,2500	1,7260	33,1700	1,3145	112,81	5,4620	-	1,4970
Milan	2165,86	1131	221,46	881,52	753,75	36,4486	668,44	-
	2171,10	1153	221,58	878,14	753,59	36,4873	668,02	-
Tokyo	259,10	135,30	26,4936	105,45	90,1699	4,3602	79,9645	0,1196
	256,09	136,00	26,1362	103,58	88,8889	4,3038	78,7949	0,1180

A Paris, 100 yens étaient cotés le vendredi 28 décembre 3,7745 F, contre 3,8261 F le vendredi 21 décembre.

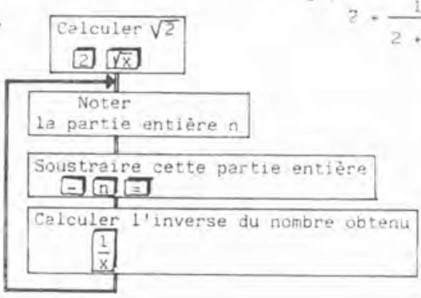
Le tableau ci-contre extrait du journal "Le Monde" du 31 décembre 1990 indique le cours des monnaies sur les principales places financières du monde.
1° Par simple lecture de ce tableau, répondre aux questions suivantes:
- Combien peut-on avoir de Francs Français avec 1 dollar US à Paris ?
- Combien peut-on avoir de dollars avec 100 F.F. à New York ?
- Combien peut-on avoir de Lires Italiennes avec 1 mark à Francfort ?

2° Combien peut-on avoir de Livres Sterling avec 10 000 Florins Hollandais à Bruxelles ?
3° Un importateur belge achète en Colombie 500 tonnes de café au prix moyen de 1,5 dollars US le kilogramme. Le paiement s'effectue sur un compte d'une banque suisse de Zurich. Quelle somme en Francs Belges doit-il virer sur le compte de la banque suisse ?
4° Un homme d'affaires japonais, désirant acheter un immeuble sur les Champs Elysées à Paris (coût : 100 000 000 F.F.) vire sur son compte de la Société Générale la somme équivalente en Yens. Au dernier moment, le vendeur demande à être payé en dollars US. Quelle somme l'homme d'affaires japonais perd-il à cause de ce caprice du vendeur ?

FRACTIONS CONTINUES

Il s'agit de donner une valeur rationnelle ($\frac{a}{b}$) approchée à un nombre irrationnel ($\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; ... ; π).
1° Calculer $A = \sqrt{2}$ et $B = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}}$. Evaluer en pourcentage de A la différence A – B.

2°



Suivre à l'aide d'une calculette l'organigramme ci-contre.
Quelle suite de nombres n_0, n_1, n_2, ... obtient-on ?
En quoi cette suite permet-elle de composer la fraction B ?
Appliquer ce mécanisme pour déterminer la fraction continue équivalente à $\sqrt{3}$ et $\sqrt{5}$.
Trouver une fraction $\frac{a}{b}$ irréductible dont la valeur soit égale au nombre π au millionnième près.

NUM3

Deux épineux dossiers

BAC PRO
IREM DE LORRAINE

PROPRIETES DES OPERATIONS

Dans tout ce dossier, a, b, c représentent des nombres réels quelconques et $*$, $\perp$ des opérations.
Les propriétés que nous allons étudier sont:

Commutativité $\forall a,b : a * b = b * a$

Associativité $\forall a,b,c : a * (b * c) = (a * b) * c$

Elément neutre e $\forall a : a * e = e * a = a$

Elément a' symétrique de a $\forall a : a * a' = a' * a = e$

Etude de l'opération $\boxed{a * b = a^b}$

1° Calculer: $1 * 2$ $3 * 4$ $-3 * 2$ $5 * (-2)$ $-2 * (-3)$ $\frac{2}{5} * 2$ $-8 * \frac{1}{3}$ $-2 * (3 * 2)$ $(5 * 2) * 1$

2° L'opération $*$ est-elle commutative ? associative ? (Il s'agit de prouver votre réponse !)

3° Admet-elle un élément neutre ? à droite (c'est à dire $a * e = a$) ? à gauche ($e * a = a$) ?

4° Si l'élément neutre existe, tout nombre admet-il un sy métrique ?

Etude de l'opération $\boxed{a \perp b = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$

1° Calculer: $2 \perp 3$ $1 \perp 4$ $(2 \perp 3) \perp 5$ $0 \perp 9$ $-1 \perp 1$ $\frac{2}{3} \perp (\frac{1}{2} \perp 3)$

2° Etudier les propriétés de cette opération $\perp$.

Etude des opérations $\boxed{a * b = 2a + b \text{ et } a \perp b = 2ab}$

1° Calculer: $3 * (2 \perp 5)$ $(-2) \perp [5 * (-4)]$ $2 \perp (7 * 3)$ $(2 \perp 7) * (2 \perp 3)$

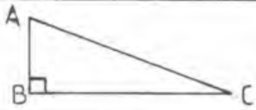
2° Démontrer que l'opération $\perp$ est distributive pour l'opération $*$ c'est à dire que: $\forall a,b,c : a \perp (b * c) = (a \perp b) * (a \perp c)$

Etude de l'opération $\boxed{a * b = \frac{a + b}{2}}$

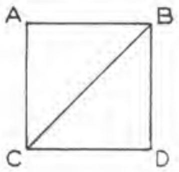
Montrer que cette opération $*$ est autodistributive.

PYTHAGORE

Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.



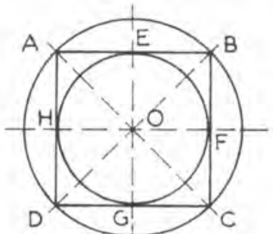
$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$



Application n° 1

Soit un carré de 30 centimètres de côté. Quelle est la longueur de la diagonale BC ?

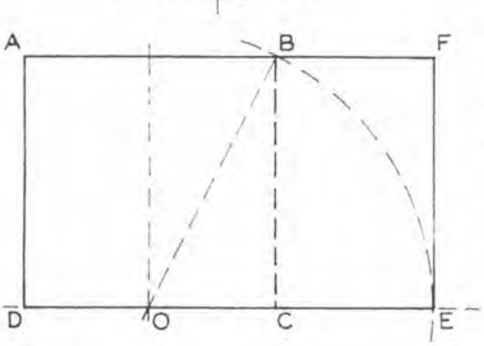
(le résultat doit être donné sous la forme d'un nombre réel exact.)



Application n° 2

L'aire du cercle inscrit étant 100 cm^2, calculer l'aire du cercle circonscrit.

- Le résultat doit être un nombre réel exact et irréductible.
- On donne : aire du disque = πr^2 où r est le rayon du cercle.



Application n° 3

Soit un carré ABCD de 5 cm de côté. Soit O le milieu du côté DC. On trace un arc de cercle de centre O et de rayon OB. On appelle E l'intersection de ce cercle avec la droite contenant C et D. On construit alors le rectangle ADEF.

Calculer la valeur exacte du rapport $\frac{L}{l}$ de sa longueur sur sa largeur.

Résoudre l'équation du second degré $x^2 - x - 1 = 0$.

Mesurer la longueur et la largeur du tableau de Léonard de Vinci "La Joconde" exposé au Louvre , la largeur et la hauteur du fronton du Parthénon à Athènes, la longueur et la hauteur de la façade de Beaubourg,... Faites le rapport $\frac{L}{l}$. Que découvre-t-on ?

- le Nombre d'Or ! -

NUM4

Monômes $M(x) = ax^n$ (a est le coefficient; x est la variable; n est le degré du monôme)

<u>Somme</u>: on ne peut faire la somme que des monômes de même degré. $3x^2 - 7x^2 = -4x^2$

$ax^n + bx^n = (a + b)\,x^n$ — $5a - 3a^2$ ne se calcule pas.

<u>Produit</u>: tout produit de monôme peut être effectué. $3a^3 \,.\, \frac{7a}{2} = \frac{21a^4}{2}$

$ax^n \,.\, bx^m = abx^{n+m}$

<u>Puissance</u>: attention aux parenthèses. $(4x)^2 = 16x^2 \neq 4x^2$

$(ax)^n = a^n x^n \neq ax^n$

Polynômes $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ (a_0, a_1, a_2, ... sont les coefficients; n est le degré; il est ordonné)

<u>Réduction</u>: on réduit le polynôme en effectuant les sommes des monômes de même degré existants dans le polynôme. $\frac{3x^2}{5} - 2x + 7 + x^2 + \frac{x}{3} - 4 = \frac{8x^2}{5} - \frac{5x}{3} + 3$

<u>Développement</u>: Il s'agit d'effectuer les produits de monômes existants dans le polynôme.

Cas les plus fréquents:

$a\,(b + c) = ab + ac$	$2x\,(4x^2 - 3) = 8x^3 - 6x$
$(a + b)\,(c + d) = ab + ac + bc + bd$	$(5x - 3)\,(2x + 5) = 10x^2 + 25x - 6x - 15$
$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$	$(3u + 1)^2 = 9u^2 + 6u + 1$
$(a + b)\,(a - b) = a^2 - b^2$	$(a - 4)\,(a + 4) = a^2 - 16$

<u>Factorisation</u>: mettre le polynôme sous la forme d'un produit de facteurs de degré le plus faible possible.

Formules courantes:

$ab \pm ac = a\,(b \pm c)$	$3x^2 - 6x = 3x\,(x - 2)$
$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$	$4x^2 - 4x + 1 = (2x - 1)^2$
$a^2 - b^2 = (a + b)\,(a - b)$	$9u^2 - 4 = (3u + 2)\,(3u - 2)$
$ax^2 + bx + c = a\,(x - x')\,(x - x'')$ où x' et x" sont les solutions (si elles existent: $\Delta \geqslant 0$) de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.	$\frac{3x^2}{2} - 8x - 6 = \frac{3}{2}\,(x - 6)\,(x + \frac{2}{3})$

Fractions rationnelles $F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ où P(x) et Q(x) sont deux polynômes.

<u>Sommes</u>:

1- Factoriser chaque terme des fractions. $\frac{2x}{x^3 - x} + \frac{x + 1}{x^2 + 2x + 1} = \frac{2x}{x\,(x + 1)\,(x - 1)} + \frac{x + 1}{(x + 1)^2}$

2- Préciser l'ensemble de définition. $D_f = \mathbb{R} - \{-1 \,;\, 0 \,;\, +1\}$

3- Simplifier les fractions par les facteurs communs. $= \frac{2}{(x + 1)\,(x - 1)} + \frac{1}{x + 1}$

4- Réduire au même dénominateur. $= \frac{2}{(x + 1)\,(x - 1)} + \frac{x - 1}{(x + 1)\,(x - 1)}$

5- Effectuer la somme des numérateurs et simplifier le résultat. $= \frac{2 + x - 1}{(x + 1)\,(x - 1)}$

$= \frac{1}{x - 1}$

<u>Produits, quotients</u>:

1- Factoriser chaque terme des fractions. $\frac{1}{2x} \,.\, \frac{x + 2}{x^2 - 4} = \frac{1}{2x} \,.\, \frac{x + 2}{(x + 2)\,(x - 2)}$

2- Préciser D_f et simplifier les fractions. $D_f = \mathbb{R} - \{-2 \,;\, 0 \,;\, +2\}$ $= \frac{1}{2x} \,.\, \frac{1}{x - 2}$

3- Effectuer le produit des numérateurs et des dénominateurs (après avoir inversé la 2ème fraction en cas de quotient). $= \frac{1}{2x\,(x - 2)}$

Réductions

Réduire et ordonner les polynômes suivants:

Niveau 0:

$R1 = 7x^3 + 8x^4 - 5x^3 + 2x - 3 + x^4 - 2x^2 + 1$

$R2 = -x^2 + x^2 - 7x + 2 - 3x$

$R3 = -5y + 3x + y^2 - 2y + x^2 - x - 1$

$R4 = -a^2 - a^2 - 2a + a - 2$

Niveau 1:

$R5 = (7x - 3) + (5 - 2x)$

$R6 = 5x^2 - 3x - (x^2 - 2x + 1)$

$R7 = -(-9u^2 + 2u - 1) + (9u^2 - 1)$

$R8 = -x^4 - (x^3 - x^2) + (x^4 + x)$

Niveau 2:

$R9 = \frac{7}{3}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{5}x^2 + x - 1 + \frac{1}{4}$

$R10 = (\frac{x^2}{2} + \frac{x}{3} - 1) - (x^2 - 3x - \frac{1}{4})$

$R11 = \frac{a^2}{3} + \frac{3a^2}{5} - \frac{143a^2}{22} + \frac{a}{10} + 1$

$R12 = \frac{2x - 3}{5} - \frac{x^2 + x + 1}{2} + \frac{x^2}{10} - \frac{1}{5}$

Développements

Développer, réduire et ordonner les polynômes suivents:

Niveau 0:

$D1 = 3(x^2 - 2x + 1) - 2(5x - 3)$

$D2 = (2x - 1)^2 + (x + 4)^2$

$D3 = (7a - 0,2)(a - 3,1)$

$D4 = (4x^2 - 1)(4x^2 + 1)$

$D5 = (2n + 1)(n^2 + 2n + 1)$

$D6 = 3x(2kx - 3k + 4)$

Niveau 1

$D7 = (\frac{x}{3} - \frac{4}{5})(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{3} - 5)$

$D8 = -\frac{2}{7}(a^2 - 1)(a + \frac{1}{3})$

$D9 = (4x - 1)^2 - 2(2x + 3)^2$

$D10 = (3a - 1)^2 - 2(3a - 1)(a + 3) + (a + 3)^2$

$D11 = (\frac{85x}{51} - \frac{2}{3})^2$

$D12 = (x + 4)(x - 2)^2$

Niveau 2

$D13 = (3x - 5)^3$

$D14 = (\frac{x^2}{2} + 3x - \frac{1}{3})^2$

$D15 = (x - 1)^4 - (x - 1)^3 - (x - 1)^2 - (x - 1)$

$D16 = 3(a + 1)^2 - 4(a - 3)^3 - 1$

$D17 = [(x - 1)^2 - (x + 1)^2]^2$

$D18 = [\frac{7x}{19} + (-1)^9]$

Factorisations

Factoriser les polynômes suivants:

Niveau 0

$F1 = 18x^2 - 15x$

$F2 = 0,04x^2 - 9$

$F3 = \frac{4x^2}{9} - 8x + 36$

$F4 = x^2 - 4x + 4$

$F5 = 2x^2 - 4x - 6$

$F6 = 3x^2 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$

Niveau 1

$F7 = (2x - 3)^2 - (4x + 1)^2$

$F8 = 9a^3 - a$

$F9 = (2x - 1)(3x + 5) - (2x - 1)(8x + 1) + (2x - 1)^2$

$F10 = (3x - 1)^2 + 8(3x - 1) + 16$

$F11 = (x + 1)(x - 3) + (x - 1)(3 - x)$

$F12 = x^4 - 16$

Niveau 2

$F13 = (x^2 - 4)^2 - (x + 2)^2$

$F14 = (n + 3)^2(n - 1) + (3 - n)^2(1 - n)$

$F15 = x^4 + x^3 + 3x^2 + 3x$

$F16 = (4x - 1)^2 - 3(1 - 4x) + 16x^2 - 1$

$F17 = 1 - u - v + uv$

$F18 = 3x^3(x - 1) + 12x(1 - x)^3$

Fractions

Effectuer les calculs suivants (ne pas oublier l'ensemble de définition):

Niveau 0

$Q1 = \frac{x}{x + 1} + \frac{1}{x} + \frac{1}{2}$

$Q2 = \frac{x + 1}{x} + \frac{1}{3x} - \frac{x - 3}{2x}$

$Q3 = \frac{6}{1 + x} - \frac{4}{1 - x} + \frac{10x}{1 - x^2}$

$Q4 = \frac{3x}{x^2 - 4} \cdot \frac{3x - 6}{4x^2}$

Niveau 1

$Q5 = \frac{x}{y(x + y)} + \frac{y}{x^2 + xy} + \frac{2}{x + y}$

$Q6 = \frac{a}{a - 1} - \frac{3a^2}{a^2 - 1} - \frac{3}{2a + 2}$

$Q7 = (\frac{1}{x + 1} + \frac{2x}{1 - x^2})(1 - \frac{1}{x})$

$Q8 = \frac{3x}{3 + x}(\frac{x}{3} - \frac{3}{x})$

Niveau 2

$Q9 = \frac{8x - 12}{4x^2 - 12x + 9} - \frac{20x}{9 - 4x^2} - \frac{5x}{2x^2 + 3x}$

$Q10 = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}}}$

$Q11 = \frac{a^2 + b^2}{ab} - \frac{a^2}{ab + b^2} - \frac{b^2}{a^2 + ab}$

$Q12 = \frac{\frac{n + 1}{n - 1} - \frac{n - 1}{n + 1}}{1 - \frac{n - 1}{n + 1}}$

Le Binôme de Newton

BAC PRO
IREM DE LORRAINE

I°/ LE NOMBRE DE TERMES:

Développer, réduire et ordonner selon les puissances décroissantes de a :

$$(a+b)^2 ;\ (a+b)^3 ;\ (a+b)^4 ;\ (a+b)^5 .$$

Exprimer le nombre de termes obtenus en fonction de l'exposant du binôme n.

II°/ LES COEFFICIENTS:

Ecrire les coefficients obtenus dans la question 1 dans le tableau suivant:

n \ p	0	1	2	3	4	5
1						
2						
3						
4						
5						

← Rang du terme.

↑ Exp. du binôme

Quelle est "la loi" de ce tableau?

En déduire la ligne suivante (pour n = 6)

Calculer:

$$(a+b)^6$$

Informatique:

Utiliser un tableur (MULTIPLAN, EXCEL, WORKS, ...) pour obtenir une feuille de calculs contenant l'ensemble des coefficients du développement du binôme jusqu'à n = 20.

(La loi du tableau précédent permet de programmer toutes les cases du tableur selon la même formule relative)

III°/ LES C_n^p

On appelle combinaison de p éléments parmi n, le nombre C_n^p tel que:

$$C_n^p = \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\ \dots\ (n-p+1)}{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times p}$$

Calculer C_5^3 ; C_4^1 ; C_2^2 ; C_3^1 ; C_3^3 ; C_5^4 . (On admettra que $C_n^0 = 1$)

Comparer les résultats obtenus avec le tableau de la question 2.

En déduire les coefficients pour une ligne n du tableau.

	0	1	2	3	4	5	...	p	...	n
n										

IV°/ LES EXPOSANTS:

Exprimer l'exposant de a et de b en fonction de l'exposant n du binôme et du rang p du terme (utiliser les développements de la question 1).

En déduire la formule de développement du binôme:

$$(a+b)^n = C_{\cdots}^{\cdots} a^{\cdots} b^{\cdots} + C_{\cdots}^{\cdots} a^{\cdots} b^{\cdots} + \dots + C_n^p a^{\cdots} b^{\cdots} + \dots + C_{\cdots}^{\cdots} a^{\cdots} b^{\cdots}$$

ou

$$\boxed{(a+b)^n = \sum C_{\cdots}^{\cdots} a^{\cdots} b^{\cdots}}$$

Utiliser cette formule pour calculer:

$$(x+1)^6 ;\ (2a+3)^5 ;\ (1-u)^{10}$$

Informatique:

En reprenant la feuille de calcul précédente, étudier la possibilité d'obtenir automatiquement le développement de $(ax+b)^n$ où a et b sont deux réels donnés.

Equations

Les équations permettent de résoudre divers problèmes dont la solution serait plus difficile, voire impossible, à trouver par d'autres méthodes.

Une équation est une égalité entre deux membres contenant une ou plusieurs lettres (x, y, ...). Ces lettres remplacent dans un problème des grandeurs que l'on veut déterminer: ce sont les inconnues.

1

1^{er} degré - 1 inconnue

Forme standard: $ax + b = cx + d$

Méthode:
- Regrouper les termes en x dans un membre et les termes constants dans l'autre par TRANSPOSITION (changement du signe du terme).
- Réduire chaque membre.
- Diviser les deux membres par le coefficient de x.

Exemple:

$5x - 7 = 3x + 3$

$5x - 3x = 3 + 7$

$2x = 10$

$\boxed{x = 5}$

Résolution graphique:

(néant)

1^{er} degré - 2 inconnues

Forme standard: $ax + by + c = 0$

Méthode: On obtient une infinité de solutions de la forme (x , y) où y est une fonction affine de x.

Exemple:

$2x + 3y - 6 = 0$

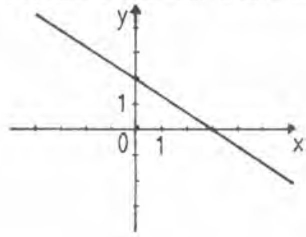
$3y = -2x + 6$

$y = \frac{-2x}{3} + 2$

Les couples solutions sont de la forme $\left(x , \frac{-2x}{3} + 2\right)$

Résolution graphique:

On représente graphiquement la droite d'équation $2x+3y-6=0$



1^{er} degré - système à deux inconnues

Forme standard: $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$

Méthodes

par substitution:
- Exprimer une inconnue en fonction de l'autre dans une des équations.
- Reporter l'expression trouvée dans l'autre équation.

Exemple: $\begin{cases} 2x - y - 8 = 0 \\ 5x + 2y + 3 = 0 \end{cases}$

$y = 2x - 8$

$5x + 2 (2x - 8) + 3 = 0$

$9x = 13$

$\boxed{x = \frac{13}{9}}$ et $y = 2 \times \frac{13}{9} - 8 = \boxed{-\frac{46}{9}}$

par combinaison linéaire:
- Multiplier chaque équation par un nombre judicieusement choisi afin d'éliminer par addition membre à membre une des deux inconnues.
- Répéter l'opération pour éliminer l'autre inconnue.

Exemple: $\begin{cases} 2x - 4y - 16 = 0 \\ -3x + 5y + 21 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 6x - 12y - 48 = 0 \\ -6x + 10y + 42 = 0 \end{cases}$

$-2y - 6 = 0$

$\boxed{y = -3}$

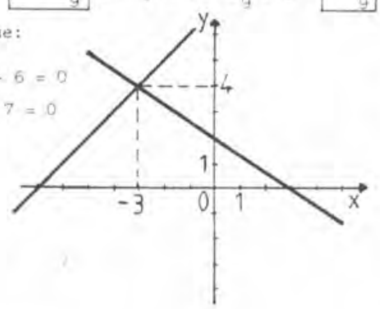
$\begin{cases} 10x - 20y - 80 = 0 \\ -12x + 20y + 84 = 0 \end{cases}$

$-2x + 4 = 0$

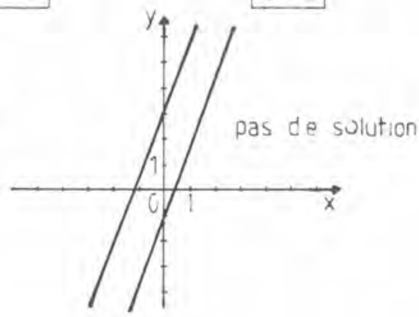
$\boxed{x = 2}$

Résolution graphique:

$\begin{cases} 2x + 3y - 6 = 0 \\ -x + y - 7 = 0 \end{cases}$



$\begin{cases} 5x - 2y + 6 = 0 \\ 15x - 6y - 5 = 0 \end{cases}$



1^{er} degré - n inconnues

Forme standard: Il faut n équations.

Méthode:
- Regrouper les équations par deux.
- Eliminer une inconnue.
- Regrouper les équations obtenues.
- Répéter l'opération jusqu'à l'obtention d'un système à deux inconnues.

Résolution graphique:

(néant)

Exemple: $\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 2x - y + 3z = 0 \\ x + y - z = 2 \end{cases}$

$\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 2x - y + 3z = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} -3x + 6y - 3z = -3 \\ 2x - y + 3z = 0 \end{cases}$

$-x + 5y = -3$

$\begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ x + y - z = 2 \end{cases}$

$\begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ 3x + 3y - 3z = 6 \end{cases}$

$5x + 2y = 6$

$\begin{cases} -x + 5y = -3 \\ 5x + 2y = 6 \end{cases}$

$\begin{cases} -2x + 10y = -6 \\ -25x - 10y = -30 \end{cases}$

$-27x = -36$

$\boxed{x = \frac{4}{3}}$

$\begin{cases} -5x + 25y = -15 \\ 5x + 2y = 6 \end{cases}$

$27y = -9$

$\boxed{y = -\frac{1}{3}}$

$\frac{4}{3} - 2 \times \left(-\frac{1}{3}\right) + z = 1$

$\boxed{z = -1}$

$2^{ème}$ degré - 1 inconnue   Forme standard: $ax^2 + bx + c = 0$

Méthode: - On calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$
- Si $\Delta < 0$, il n'y a pas de solution.
- Si $\Delta = 0$, il y a une solution: $x = -\frac{b}{2a}$
- Si $\Delta > 0$, il y a deux solutions: $x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

Exemples:

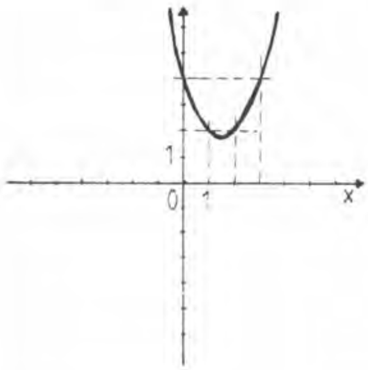
$x^2 - 3x + 4 = 0$
$\Delta = 9 - 16$
$\Delta = -7$
Il n'y a pas de solution

$4x^2 - 4x + 1 = 0$
$\Delta = 16 - 16$
$\Delta = 0$
Une solution:
$x = \frac{4}{8}$
$\boxed{x = 0,5}$

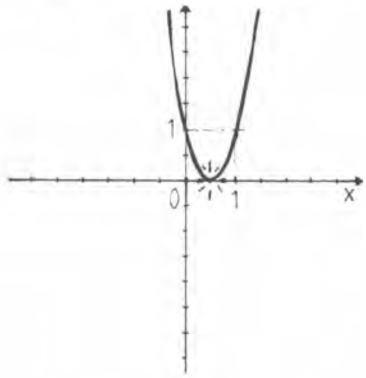
$-x^2 + 7x - 12 = 0$
$\Delta = 49 - 48$
$\Delta = 1$
Deux solutions:
$x = \frac{-7 + \sqrt{1}}{-2}$ $x = \frac{-7 - \sqrt{1}}{-2}$
$\boxed{x = 3}$ $\boxed{x = 4}$

Résolution graphique:

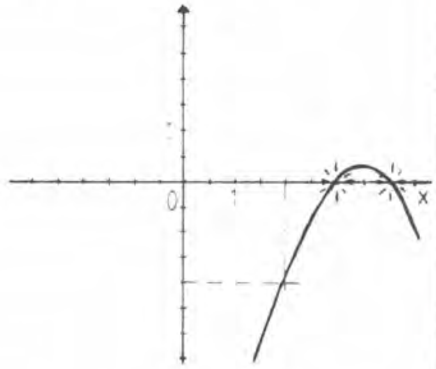
$x^2 - 3x + 4 = 0$



$4x^2 - 4x + 1 = 0$



$-x^2 + 7x - 12 = 0$



Equations diverses

Forme standard: inconnue au dénominateur

Méthode: - Factoriser tous les termes des fractions.
- Simplifier, réduire au même dénominateur et supprimer ce dénominateur.
- Résoudre l'équation formée par les numérateurs.

Exemple:

$\frac{9}{x+3} + \frac{5}{x} = \frac{1}{2x}$ $x \neq -3$ et $x \neq 0$

$\frac{18x}{2x(x+3)} + \frac{10(x+3)}{2x(x+3)} = \frac{(x+3)}{2x(x+3)}$

$18x + 10(x + 3) = x + 3$

$27x = -27$

$\boxed{x = -1}$

Forme standard: $a^x = b$

Méthode: - Il faut utiliser les propriétés des logarithmes.

$\ln(a^x) = \ln b$
$x \ln a = \ln b$
$x = \frac{\ln b}{\ln a}$

Exemple:

$1,02^x = 1,104$

$x = \frac{\ln 1,104}{\ln 1,02}$

$x = \frac{0,09894}{0,01980}$

$\boxed{x = 5}$

Forme standard: $x^n = a$

Méthode: - Le résultat approché s'obtient grâce à la calculette:

[a] [INV] [y^x] [n] [=]

Exemple:

$x^6 = 11,3906$
$x = \sqrt[6]{11,3906}$
$\boxed{x = 1,5}$

Quelques Equations

BAC PRO
IREM DE LORRAINE

	1	2	3	4	5
A	$16x^4 - 1 = 0$	$\begin{cases} 4x + 8y = 35 \\ -3x - 6y = -17 \end{cases}$	$\frac{3}{x^2 + 2x + 1} = \frac{1}{x + 1}$	$15(\frac{x}{3} - \frac{1}{2}) + \frac{x - 7}{7} = \frac{7x}{49} + 5(x - 1,5)$	$\frac{2x^2 + 5x - 3}{x + 3} = 0$
B	$x^2 + 160x - 8000 = 0$	$x - 5 = 6$	$1,065^{-x} = 0,777323$	$2,3(4x - 5,6) = -3(-4,5x + 12,2)$	$2x^2 + 2x - 12 = 0$
C	$\frac{\frac{1 + u}{1 - u} - \frac{1 - u}{1 + u}}{\frac{1 + u}{1 - u} - 1} = \frac{3}{14 - u}$	$\begin{cases} x - y = 7 \\ \frac{x}{y} = -2,5 \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{x}{7} + \frac{y}{2} = -0,1 \\ \frac{2x}{5} - \frac{7y}{3} = 4,2 \end{cases}$	$\begin{cases} x + x\,(1 + y) = 102000 \\ x\,(1 + y)^4 + x\,(1 + y)^5 = 119325 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x + 3y - z = 5 \\ x - y + 2z = 5 \\ x + y + z = 6 \end{cases}$
D	$\begin{cases} xy^6 = 7290 \\ xy^3 = 270 \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{4x}{3} + y = -9 \\ -\frac{5x}{6} + 5y = 12 \end{cases}$	$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} - \frac{3}{4} = 0$	$1 - \frac{2(1 + x)}{3} - \frac{6 - 3x}{2} = \frac{1}{6}$	$(1 + x)^5 = 1,21665$
E	$\frac{2x}{3}\,(\,x - 7\,) = \frac{x}{5}$	$\begin{cases} x + y = 77 \\ xy = 1242 \end{cases}$	$\begin{cases} x^2 + y^2 = 29 \\ 2xy = 20 \end{cases}$	$\frac{x - 1}{2} - \frac{5x + 3}{4} = -2 - \frac{x + 4}{3}$	$\begin{cases} 0,5x - 1,2y = -0,5 \\ 0,9x + 0,15y = 0,255 \end{cases}$
F	$7x + 12 = -14$	$x^2 - x - 1 = 0$	$-3x^2 + 7x - 4 = 0$	$4(x - 3) + 3x = -6(4x - 1)$	$2x^2 = 13 - 5(x + 2)$
G	$\begin{cases} u_0 + u_1 = 15 \\ u_4 = 768 \\ u_1 = u_0 q \\ u_4 = u_0 q^4 \end{cases}$	$\begin{cases} x + y = 11 \\ x + z = 2 \\ y + z = 5 \end{cases}$	$\begin{cases} y = 5580 + \frac{5580 x 6 x n}{36000} \\ y = 5670 + \frac{5670 x 4 x n}{36000} \end{cases}$	$\begin{cases} x + y = z - k + 2 \\ x + y + z + k = 4 \\ 2x + 3y - 3z + 2k = 4 \\ x - k = y + z - 2 \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{4}{x} + \frac{3}{y} = 8,5 \\ \frac{1}{x} - \frac{5}{y} = \frac{7}{6} \end{cases}$
H	$(x - 3)^2 = (3x - 2)^2$	$2x + 3 = 8$	$C + \frac{C x 7 x 8}{1200} = 21980$	$(\sqrt{2} + x)^2 - (x - \sqrt{3})^2 = 2\sqrt{6}$	$1,5x^2 + 3x + 2,3 = 0$
I	$\begin{cases} 3x + y - z = 17 \\ -7x - 2y + 2z = -39 \end{cases}$	$\frac{1}{x} = \frac{x + 1}{2}$	$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 11 \\ xy + 3 = 0 \end{cases}$	$\frac{3}{x - 1} + \frac{5}{x + 1} = \frac{2}{x^2 - 1}$	$\begin{cases} 2x - 3y + 6 = 0 \\ 5x + 12y - 7 = 0 \end{cases}$
J	$\begin{cases} 3x + 4y = -4 \\ 2xy = -2 \end{cases}$	$\begin{cases} x + y = 7 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$	$(19x-12)^2-(17x+48)^2=0$	$\begin{cases} \frac{3(x - 2)}{2} + \frac{2(y - 3)}{3} = 4,5 \\ \frac{5(x + 1)}{6} - \frac{y + 3}{3} = 3 \end{cases}$	$\frac{960 x 4 x m}{1200} = \frac{768 x 6 x (m-4)}{1200}$
K	$\frac{x}{2} - \frac{3(4x - 5)}{12} = \frac{3x}{4} - \frac{1}{3}$	$7 + 3 = 10$	$\frac{1}{3}(21x - 6) = 7x - 2$	$2x(x - 2)(x - 3)(x - 4) = 0$	$\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{5}x - 0,15 = 0$
L	$\frac{1620\,x}{100 + x} = 120$	$-\frac{1}{x} = -\frac{2}{3}$	$7,8 = \frac{1}{3}x$	$1600 - \frac{1600 x t x 150}{36000} = 1570$	$x^3 + 2x^2 + x = 0$
M	$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$	$-6x^2 - x + 12 = 0$	$1,07^n = 1,60578$	$3(x + 1)^2 - 7(x + 1) - 40 = 0$	$-5x - 2 = -12$
N	$\frac{1}{x} + \frac{1}{2x} = \frac{1}{x^2 - 7}$	$3x + \frac{1}{x} = 4$	$\begin{cases} 6(x - 2) = y + 1 \\ \frac{5x}{2} - \frac{y}{3} - 5 = 0 \end{cases}$	$\frac{4x - 5}{7} - \frac{4x + 3}{49} = \frac{3}{14} - 2\frac{(5x + 1)}{7}$	$\begin{cases} \sqrt{x + y} = 5 \\ x - y = 5 \end{cases}$
O	$\begin{cases} \frac{8000 x t x n}{1200} = 160 \\ \frac{8000 x 2 n x (t-3)}{1200} = 240 \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{5}{2y} = -\frac{15}{4} \\ \frac{9}{5x} - \frac{4}{y} = -5 \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{3x}{7} + \frac{2y}{5} + \frac{z}{3} = 12 \\ -\frac{x}{2} - \frac{y}{3} + z = 34 \\ x + \frac{7y}{30} - \frac{z}{9} = 6,5 \end{cases}$	$\frac{3}{x} - 5\,(\,\frac{1}{x} - \frac{1}{3}\,) = \frac{1}{2x} + \frac{5}{4}$	$\begin{cases} \frac{x + 2}{4} - \frac{2}{3}(y - 1) = 1 \\ \frac{x + 3}{4} - \frac{2y + 1}{3} = -2 \end{cases}$
P	$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0 \\ x + y = 1 \\ y + z = 4 \end{cases}$	$\begin{cases} x - z = \frac{2}{15} \\ x - y = \frac{1}{12} \\ y + z = \frac{9}{20} \end{cases}$	$2 + 2 = 3$	$\begin{cases} a + 2b + 3c + 4d = -8 \\ a - b + c - d = 6 \\ 2a - 3b - 4c + 5d = -20 \\ a + b + c + d = -2 \end{cases}$	$\begin{cases} u_0 u_1 u_2 = 343 \\ u_0 + u_1 + u_2 = 36,75 \\ u_1 = u_0 q \\ u_2 = u_1 q \end{cases}$
Q	$9x^2 - 30x + 25 = 0$	$-4x + 2 = 13$	$3x + 4\sqrt{x} - 1 = 0$	$(x - 1)(x + 5) = x^2 - 2 + (2x - 3)^2$	$9x^2 = 4$
R	$x^8 - x^4 - x^2 + 1 = 0$	$\frac{x}{x + 1} = \frac{x + 1}{x}$	$\begin{cases} x + y = 20000 \\ 45x = 940000 - 52y \end{cases}$	$\frac{3x}{x^2 + 2x} = \frac{x - 2}{x^2 - 4x + 4} - \frac{x}{x^2 - 4}$	$x + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 0,75$

Problèmes divers

BAC PRO
IREM DE LORRAINE

MOYENNE ! QUAND TU NOUS TIENS

L'élève de $1^{ère}$, Florence Landry, veut que sa moyenne de mathématiques du premier trimestre soit de 14 sur 20. Pour l'instant, après trois devoirs, ses notes sont les suivantes : 8 - 16 - 13.
Quelle note devra-t-elle obtenir au devoir suivant s'il y a 4 devoirs dans le trimestre ?

MOYENNE TOUJOURS

L'élève Sandra veut obtenir une moyenne de 13 sur 20 en mathématiques au 1^{er} trimestre. Il y a 5 devoirs au cours du trimestre. Elle a déjà obtenu 12 - 10 et 15. A l'aide d'une représentation graphique, donner toutes les possibilités de notes qui lui restent pour les deux derniers devoirs.
(le professeur ne donne que des notes entières sur 20 points)

DES PULLS A GOGO

Un commerçant veut acheter un lot de 50 pulls à un grossiste mais il ne dispose que de 7400 F. Afin de lui permettre d'acquérir néanmoins le lot complet, le grossiste lui accorde une remise de 20 % sur le prix de chaque pull.
Quel était le prix initial d'un pull ?

LA GUERRE DU GOLFE

Au cours de la guerre du Golfe, les marins d'un croiseur de la Marine française ont eu une idée afin de connaître la distance qui les sépare d'accrochages entre navires ennemis. Ils ont utilisé pour cela le fait que la vitesse du son dans l'air est de 340 m/s et de 1400 m/s dans l'eau. Ils ont enregisté le bruit d'une explosion sous-marine 12 secondes plus tôt par l'eau que par l'air. Ils ont pu ainsi calculer la distance séparant leur navire du lieu de l'explosion.
Auriez-vous fait aussi bien ?

UN COMMERCANT MALIN

A l'occasion des soldes, le magasin Fiat Lux veut solder un lampadaire 360 F alors que le prix initial était de 500 F. Mais le commerçant, afin d'attirer le client, veut faire apparaître sur l'étiquette deux remises successives exprimées en pourcentages, la deuxième étant le double de la première*. Comme il n'est pas doué en mathématiques, le propriétaire du magasin vous charge de calculer les taux des deux remises. (*en pourcentage aussi)

INFORMATISATION

L'entreprise Lennitz S.A. distributrice de matériel pour automobiles, décide de s'informatiser. Elle dispose pour cela d'un budjet de 100 000 F. Vous devez calculer combien de postes de travail elle pourra se procurer sachant qu'un poste comporte un ordinateur, une table support et une chaise. De plus, la moitié des ordinateurs sera équipée d'écrans monochromes, l'autre moitié d'écrans couleurs; il doit y avoir une imprimante pour deux postes.
L'entreprise Ordilor propose un devis de 96 600 F avec le tarif suivant :

Ordinateur (monochrome) : 12 000 F   Ordinateur (couleur) : 14 900 F   Table support : 850 F   Chaise : 700 F   imprimante : 2200 F

LES INTERETS DE GASTON

Votre collègue Gaston, qui travaille dans la même banque que vous, vous tient le raisonnement suivant:
" Si je place un capital C pendant un an au taux t, j'obtiens une somme de 27 125 F. Si je place le double pendant deux ans au même taux, j'obtiens 58 500 F et mes intétêts ont été multipliés par 4 ."
Calculer C et t. Gaston ne s'est-il pas trompé ?

C'EST BYZANCE

L'amicale du personnel du lycée Jean Monnet organise un voyage à Istanbul par avion. Elle a traité avec la société Nouveaux Horizons. Le nombre des inscrits est de 70 dont 30 enfants. Nouveaux Horizons propose un prix global de 168 000 F comprenant le transport et l'hébergement. Le responsable de l'amicale se charge de répartir la somme entre les 70 personnes en proposant un tarif "adulte" de x F et un tarif "enfant" de y F. Malheureusement, certains couples qui ont plusieurs enfants trouvent la somme trop importante. Le responsable décide alors de baisser le tarif "enfant" de 500 F et d'augmenter le tarif "adulte" de 12,5 %; la somme globale reste inchangée.
Quels étaient les tarifs initialement prévus ?
A partir de combien d'enfants, un couple partant à Istanbul est-il gagnant avec le nouveau tarif ? Utiliser une méthode graphique (Si n est le nombre d'enfants par couple, on prendra $0 \leqslant n \leqslant 4$).

Résolutions programmées d'équations

BAC PRO
IREM DE LORRAINE

RESOLUTION DE L'EQUATION DU 1^{er} DEGRE STANDARD $ax + b = cx + d$

Méthode mathématique :

Regrouper les termes en x et les termes constants

$$ax - cx = d - b$$

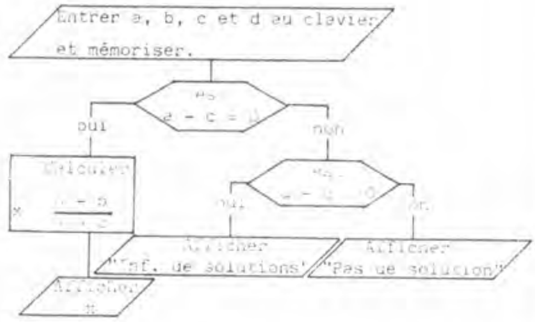
Réduire chaque membre

$$(a - c)x = d - b$$

Diviser (si $a - c \neq 0$)

$$x = \frac{d - b}{a - c}$$

Schéma programmé :



Programme BASIC

```
10 INPUT"a = ";A
20 INPUT"b = ";B
30 INPUT"c = ";C
40 INPUT"d = ";D
50 NUM=D-B:DEN=A-C
60 IF DEN=0 THEN 100
70 X=NUM/DEN
80 PRINT"x =";X
90 END
100 IF NUM=0 THEN 130
110 PRINT"Pas de solution"
120 END
130 PRINT"Inf. de solutions"
```

Activité : Etudier les trois cadres ci-dessus (comprendre les liens entre les trois modes).
Taper le programme de résolution (en l'adaptant à votre matériel).
Tester le programme en résolvant les équations suivantes:

$7x - 3 = 4x + 9$ $\quad 11x + 5 = 8x + 7$ $\quad 5 - 4x = 7 - 5x$ $\quad 3x = 7x - 4$ $\quad 6x - 1 = 6x + 5$ $\quad \frac{x}{3} - 2 = 2x + 1$

$2x + 3 = 2x + 3$ $\quad -4 = x + 2$

RESOLUTION D'UN SYSTEME DE DEUX EQUATIONS A DEUX INCONNUES PAR LA METHODE DES DETERMINANTS

Méthode mathématique :

(déterminant : $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$)

Mettre le système sous la forme

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

Calculer le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$$

Si D est nul, le système a 0 ou une infinité de solutions.

Sinon

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{D} \quad \text{et} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{D}$$

Exemples :

Soit $\begin{cases} 5x - 2y = -6 \\ 15x - 6y = 5 \end{cases}$

$$D = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 15 & -6 \end{vmatrix} = 5x(-6) - 15x(-2) = 0$$

Le système n'a pas de solution.

Soit $\begin{cases} 2x - 4y = 16 \\ -3x + 5y = -21 \end{cases}$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 2x5 - (-3)x(-4) = -2$$

La solution du système est

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 16 & -4 \\ -21 & 5 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{80 - 84}{-2} = \boxed{2} \text{ et } y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 16 \\ -3 & -21 \end{vmatrix}}{-2} = \boxed{-3}$$

Programme CASIO 7500G

```
",A,=,",?,→,A,:,",B,=,",?,→,B,:,
",C,=,",?,→,C,:,
",U,=,",?,→,U,:,",V,=,",?,→,V,:,
",W,=,",?,→,W,:,◢,
A,x,V,-,B,x,U,→,D,:,
D,=,0,⇒,goto,1,:,
(,C,x,V,-,W,x,B,),÷,D,→,X,:,
(,A,x,W,-,U,x,C,),÷,D,→,Y,:,
",X,=,",X,:,",Y,=,",Y,◢,
lbl,1,",D,=,0,",◢,
```

Activité : En vous inspirant de tout ce qui précède, élaborez un schéma de programmation du système standard.
Programmez la résolution sur votre matériel.
Utilisez ce programme pour résoudre:

$\begin{cases} 7x - 5y = 11 \\ -2x + 4y = 2 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} 8x - y = 7 \\ -4x + 0{,}5y = 1 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} 2x + 2y = 10 \\ x + y = 5 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x - 5y - 3 = 0 \\ y + x + 5 = 4 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} 1240x - 738y = 18454 \\ -491x + 217y = -8586 \end{cases}$

RESOLUTION DE L'EQUATION DU SECOND DEGRE

Programme TI58C

2nd lbl	RCL	2nd lbl	RCL
A	02	D	02
STO	x^2	RCL	+/-
01	-	02	-
R/S	4	+/-	RCL
2nd lbl	*	+	04
B	RCL	RCL	$\sqrt{x}$
STO	01	04	=
02	*	$\sqrt{x}$	÷
R/S	RCL	=	RCL
2nd lbl	03	÷	01
C	=	RCL	÷
STO	STO	01	2
03	04	÷	=
R/S	2nd x≥t	2	R/S
	D	=	
	÷	R/S	
	0		
	R/S		

Programme TURBO PASCAL

```
Program Equation;
Var
  a,b,c,d,x1,x2 : real;
Begin
  Write('a=');Readln(a);
  Write('b=');Readln(b);
  Write('c=');Readln(c);
  d:=Sqr(b)-4*a*c;
  if D>=0 then
  Begin
    x1:=(-b-sqrt(d))/(2*a);
    x2:=(-b+sqrt(d))/(2*a);
    Writeln('x1=',x1);
    Writeln('x2=',x2);
  End
  else
    Writeln('Pas de solution');
  Readln;
End.
```

Activité :

Construire le schéma de programmation de la résolution de l'équation du second degré.

Comparer les quatre langages de programmation présentés sur ce dossier :

- Comment entrer une donnée au clavier?
- Comment mettre en mémoire cette donnée?
- Comment s'effectue un test?
- Comment programmer un calcul?
- Comment afficher un texte, un résultat à l'écran?

Traduire les programmes proposés dans les autres langages.

La Société de construction

BAC PRO IREM DE LORRAINE

Vous êtes employé(e) de la Société Lorraine de Construction (SLC) qui construit des maisons et appartements dans l'est de la France. Cette société envisage la construction d'un certain nombre de maisons sur un terrain situé à Thioncy sur Meurthe.
Le dossier dont vous disposez comporte les éléments suivants:

INFORMATIONS FINANCIERES

* L'endettement ne doit pas dépasser 30% du salaire. (le total mensuel des remboursements de crédit ne doit pas dépasser 30% du salaire mensuel).
* Prêt possible sur 20 ans au taux de 8,5% l'an.
* Apport minimum 150 000 F.
* Formule donnant la valeur de l'annuité:

$$a = \frac{V_0 t}{1 - (1 + t)^{-n}}$$

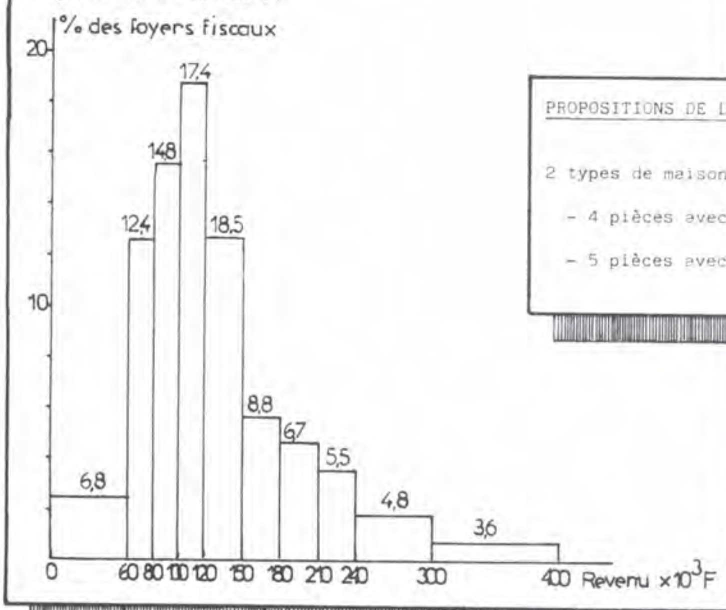
V_0 : Montant emprunté
t : taux annuel
n : nb d'annuités

CAHIER DES CHARGES IMPOSE PAR LA COMMUNE

* Surface en espaces verts : 13 840 m^2
* Surface à usage commun (voirie, école, terrain de sport) : 20 760 m^2
* Les espaces verts et les surfaces à usage commun doivent représenter 50% de la surface totale.
* Le rapport $\frac{\text{surface habitable totale}}{\text{surface totale des parcelles}}$ doit être au plus égal à 0,14.
* Prix du terrain : 120 F/m^2.

REPARTITION DES CONTRIBUABLES D'APRES LEUR REVENU ANNUEL

(total des % < 100 car il n'est pas tenu compte des revenus supérieurs à 400 000 F)



PROPOSITIONS DE L'ARCHITECTE DE LA SLC

2 types de maisons:

- 4 pièces avec 83,8 m^2 habitables sur des parcelles de 580 m^2.
- 5 pièces avec 102,5 m^2 habitables sur des parcelles de 740 m^2.

Travail à faire:

1° Calculer la surface totale du terrain et la surface constructible.

2° Calculer le nombre de maisons de chaque sorte (4 pièces ou 5 pièces) que la société pourra construire au maximum.

3° Vous devez calculer une estimation moyenne du prix de vente des maisons afin que les acheteurs potentiels puissent se permettre l'investissement. Pour cela:

- calculez le salaire moyen d'un foyer fiscal (arrondir au millier de francs).
- sachant que sur le salaire moyen, les crédits courants représentent x% et que les remboursements d'emprunts pour le logement représentent 2x% du reste, calculer x .(attention aux 30% maximum)
- en déduire le montant possible d'une mensualité d'un crédit pour l'achat d'une maison puis le montant d'une annuité.
- calculer le prix total de l'investissement (maison + terrain).
- calculer le prix d'une maison seule (prendre une surface moyenne de parcelle de 650 m^2).
  Ce calcul étant une estimation, il ne sera pas fait de différence entre maisons de 4 et de 5 pièces.

MATHS GENERALES ORIENTEES TERTIAIRE

Inéquations

BAC PRO
IREM DE LORRAINE

Une inéquation est une expression mathématique contenant au moins une inconnue, composée de deux membres dont l'un est plus petit (ou plus grand ou égal) que l'autre.

Résoudre une inéquation, c'est trouver sur quel intervalle l'inconnue doit se situer pour que l'odre indiqué au départ soit vérifié.

1^{er} degré; 1 inconnue

Méthode: les mécanismes sont les mêmes que pour une équation à une exception près:
- lorsqu'on divise par un nombre négatif les deux membres de l'inéquation, il faut inverser le sens de l'inégalité.

Exemple: $2x - 7 \leqslant 6x + 2$

$2x - 6x \leqslant 2 + 7$

$-4x \leqslant 9$

$x \geqslant -\frac{9}{4}$

$S = [-\frac{9}{4} ; +\infty[$

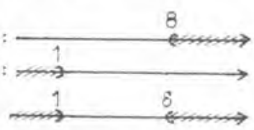
Représentation graphique de la solution:

1^{er} degré; systèmes à une inconnue

Méthode: On procède comme ci-dessus puis on détermine (souvent graphiquement) l'intersection des ensembles de solutions.

Exemple: $\begin{cases} 2x - 5 < x + 3 & \text{solution:} \\ 4x < 6x - 2 & \text{solution:} \end{cases}$

Solution du système :



$2^{ème}$ degré; 1 inconnue $ax^2 + bx + c > 0$

Méthode: Signe du trinôme

Soit x' et x" les racines de ce trinôme ($\Delta \geqslant 0$)

x	$-\infty$	x'	x"	$+\infty$
ax^2+bx+c	signe de a	signe de -a	signe de a	

Si le discriminant Δ est négatif (pas de racines), le trinôme est du signe de a.

Exemple: $2x^2 + 9x - 35 \geqslant 0$

$\Delta = 361$ d'où $x' = -7$ et $x" = \frac{5}{2}$

Le coefficient a étant positif (+2):

$x \leqslant -7$ ou $x \geqslant \frac{5}{2}$ soit $S =]-\infty ; -7] \cup [+\frac{5}{2} ; +\infty[$

$n^{ème}$ degré; 1 inconnue

Méthode: On factorise jusqu'à obtenir un produit de facteurs du premier ou deuxième degré, puis on fait un "tableau de signes".

Exemple: $2x(x - 2)(x^2 - 2x - 3) < 0$

x	$-\infty$	-1		0		+2		+3	$+\infty$
2x	-		-	0	+		+		+
x - 2	-		-		-	0	+		+
$x^2 - 2x + 3$	+	0	-		-		-	0	+
Produit:	+	0	-	0	+	0	-	0	+

La solution de l'inéquation est donc: $S =]-1 ; 0[\cup]+2 ; +3[$

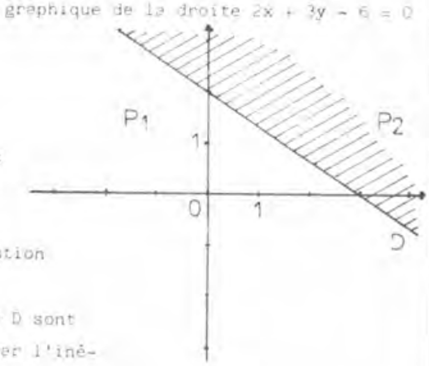
1^{er} degré; 2 inconnues $ax + by + c > 0$

Méthode: On représente la droite d'équation $ax + by + c = 0$. Cette droite divise le plan en deux demi-plans P_1 et P_2.

La solution de l'inéquation correspond à l'ensemble des coordonnées (x,y) de P_1 ou de P_2. On détermine le "bon" demi-plan en testant les coordonnées d'un de ses points (souvent le point (0,0)).

Exemple: $2x + 3y - 6 < 0$

Représentation graphique de la droite $2x + 3y - 6 = 0$

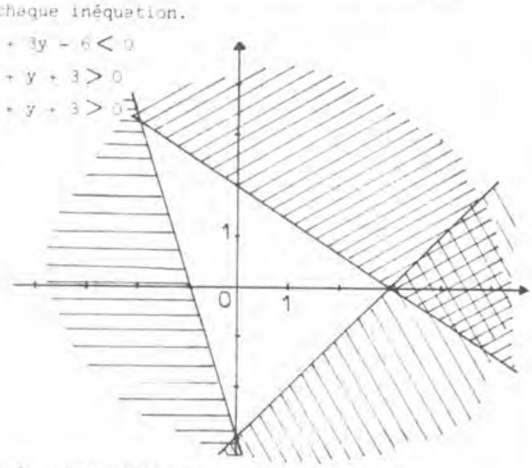


On teste le point (0,0):
$2 \times 0 + 3 \times 0 - 6 = -6$ donc négatif. Ce point fait partie du demi-plan solution de l'inéquation.
(Les points de la droite D sont exclus de la solution car l'inégalité est stricte)

1^{er} degré; système à deux inconnues

Méthode: On procède comme ci-dessus en traçant une droite par inéquation puis en prenant pour solution du système l'intersection des demi-plans solutions de chaque inéquation.

Exemple: $\begin{cases} 2x + 3y - 6 < 0 \\ -x + y + 3 > 0 \\ 3x + y + 3 > 0 \end{cases}$



Après le test du point (0,0) pour chaque inéquation (il appartient au demi-plan solution dans chaque cas), on obtient, pour solution du système, l'ensemble des couples (x,y) des coordonnées des points situés à l'intérieur du triangle non hachuré.

Quelques inéquations

Inéquations du premier degré à une inconnue

$4x + 5 \geqslant 3x - 6$ $\quad$ $5x - 12 < 4(1 + 2x) - 7$ $\quad$ $\frac{x}{7} - \frac{3(x+1)}{42} \leqslant 4\,\frac{(-3x+5)}{6} + 3$

$\frac{3x+5}{2} - \frac{x-2}{8} < 5 + \frac{2x-3}{4}$ $\quad$ $-7(2x + 3) - \frac{3x}{5} > \frac{x+2}{15}$

Inéquations du premier degré à deux inconnues

$-5x + 2y + 7 \geqslant 0$ $\quad$ $2x - 3y < +4$ $\quad$ $4x > -5y$ $\quad$ $7x - 21 \leqslant 0$ $\quad$ $2(3x - 2y) > 6x - 8$

Systèmes d'inéquations du premier degré à une inconnue

$\begin{cases} 2x + 5 < 6 \\ -3x + 12 \geqslant 5x + 3 \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} 3(x+1) - 7 > 5x + 2 \\ -4(2x - 3) + 2 < 3(x + 2) \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} 9x + 11 \geqslant -3x - 1 \\ 5x - 6 \leqslant 4x + 5 \end{cases}$

$\begin{cases} \frac{12x}{5} - \frac{7}{10} > \frac{3(x+1)}{2} + 2 \\ \frac{3x}{12} + 1 < \frac{4(2x-5)}{18} - \frac{1}{36} \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} 4x + 2 < 7 \\ -5x - 6 > 2x + 8 \\ 11x + 2 > 7x - 14 \end{cases}$ $\quad$ $-1 < 2x - 1 < 6x - 5 < 7$

Systèmes d'inéquations du premier degré à deux inconnues

$\begin{cases} 2x - y + 2 > 0 \\ 2x - 9y < 18 \\ -x - 4y + 4 > 0 \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} x < 2y \\ 4x - y > -4 \\ -x < y - 2 \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} x - 6y + 3 < 0 \\ -3x - 4y + 6 > 0 \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} 2x - 3y + 6 > 0 \\ -2x < 3y - 6 \\ y + 2 < 0 \\ -x - 2y + 4 < 0 \end{cases}$

$-3 \leqslant x + 2y \leqslant 0$

Inéquations de degré n à une inconnue

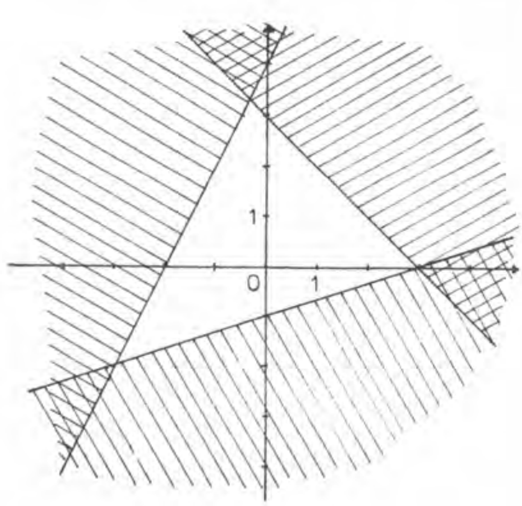
$2x^2 - x - 10 \geqslant 0$ $\quad$ $12x^2 < 20x + 8$ $\quad$ $4x^2 - 5x + 6 > 0$ $\quad$ $-10x^2 - 28x + 6 \leqslant 0$

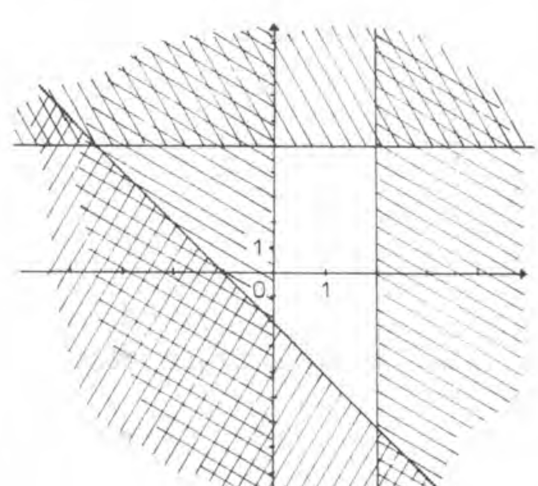
$-2x^2 + 4x > 3$ $\quad$ $(-4x^2 - 42x - 30)(x^2 - x - 2) > 0$ $\quad$ $-x(x + 1)(x^2 - 1) \leqslant 0$

$\frac{2x^2 + 10x - 28}{-3x^2 + 4x - 5} \geqslant 0$ $\quad$ $\frac{x}{3x-2} \leqslant \frac{-1}{x-2}$ $\quad$ $\frac{2x^3 - 18x}{x^2 - 6x + 9} > 0$

Systèmes d'inéquations à deux inconnues (réciproque)

Retrouver, dans chaque cas, le système d'inéquation dont la solution correspond à l'ensemble des points du plan qui ne sont pas hachurés.





Problèmes

A MOI LA MOYENNE

a/ Au cours des cinq premiers devoirs de mathématiques, une élève a obtenu les notes suivantes (sur 20): 12 - 06 - 14 - 15 - 08. Sur quel intervalle devra se situer la note à obtenir au sixième et dernier devoir pour que sa note moyenne soit supérieure à 12 ?

b/ Une autre élève de la classe a obtenu les notes suivantes aux quatre premiers devoirs: 04 - 06 - 08 - 11. Quelles notes devra-t-elle obtenir aux deux derniers devoirs pour que sa moyenne soit supérieure ou égale à 12 ? pour que sa moyenne soit supérieure ou égale à 10 ? Utiliser une représentation graphique.

ADMIS/RECALE ?

L'élève Juste Tassé passe un examen qui comporte quatre épreuves:

mathématiques (coefficient 4) français (coefficient 4) histoire (coefficient 2) anglais (coefficient 3)

Ayant obtenu la note de 04/20 en Français et 04/20 en Anglais, il se demande s'il lui reste une possibilité d'être admis. Pouvez-vous le lui dire ?

(Ecrire l'inéquation à laquelle doivent satisfaire les deux dernières notes, puis utiliser un graphique)

Si le candidat peut encore être admis, quelles sont les notes qu'il devra obtenir en Mathématiques et en Histoire ?

XAVIER ET YVON

Xavier et Yvon ont moins de 8 ans à eux deux. Yvon a moins de quatre ans et il est plus jeune que Xavier. Pourtant, Yvon a plus de la moitié de l'âge de Xavier.

Sachant qu'Yvon n'a pas 2 ans, quel âge ont les deux bambins ?

EN BOITE

Trois amies, Nathalie, Karine et Linda discutent de l'argent de poche que leurs parents leur donnent chaque mois.

a/ Nathalie dit: j'ai 350 F chaque mois; avec cette somme je dois payer mes tickets d'autobus, 120 F, j'achète un magazine 12 F et je mets 100 F de côté pour les vacances. Avec le reste, je vais au cinéma. Combien de fois puis-je aller au cinéma chaque mois ? (Prix de la place 38 F)

b/ Pour sa part, Karine a la chance d'avoir 400 F chaque mois qu'elle dépense presqu'entièrement en allant au cinéma (38 F la place) ou en boîte (65 F l'entrée au "Calypso"). Ses parents ne l'autorisent à sortir qu'au maximum 8 fois par mois et elle ne désire pas aller en boîte plus de quatre fois par mois.
A l'aide d'un graphique, determiner combien de fois Karine pourra aller en boîte et au cinéma si elle veut y consacrer pratiquement la totalité de ses 400 F.

c/ Linda, qui a l'esprit plus mathématique, refuse de dire quelle somme elle reçoit chaque mois, mais propose à ses deux amies le problème suivant: "Si j'avais le double de ce que j'ai plus 30 F, je pourrais aller moins de 17 fois au cinéma." et "Si j'avais le tiers de ce que j'ai plus 50 F, je pourrais quand même aller au moins deux fois en boîte.".
Chercher sur quel intervalle se situe l'argent de poche mensuel de Linda (cinéma: entrée 38 F; boîte : 60 F au "Cigalou").
Ses amies étant curieuses, Linda leur donne un dernier indice: "Je peux aller autant de fois au cinéma qu'en boîte, et il me reste à la fin du mois 6 F.". Quelle somme a donc Linda chaque mois comme argent de poche ?

ON SOLDE

Le propriétaire du magasin "La Boîte aux Fringues" achète à son fournisseur des pulls 180 F pièce. Les frais d'achat sont de 6% sur le prix d'achat et le magasin applique un taux de marque de 40%. (TVA 18,6%)

a/ Quel est le prix de vente d'un article au client (arrondir au franc le plus proche)?

b/ En fin de saison, le commerçant décide de solder les pulls précédents. Dans un premier temps, il consent un rabais de x% sur le prix de vente TTC; pour accélérer la vente, une semaine après, il accorde un deuxième rabais de 2x% sur le précédent prix soldé. Sachant que le prix de vente au client ne peut pas être inférieur au prix d'achat des pulls au fournisseur, chercher quelles sont les valeurs acceptables pour x. Discuter.

c/ Si le commerçant veut solder au maximum, quels sont les taux de remise qu'il appliquera ?

HISTOIRE DE POIDS (LOURDS)

Vous êtes employé(e) au secrétariat de l'entreprise La Flèche Lorraine spécialisée dans le transport de marchandises par la route. La société désire renouveler son parc de camions et désire passer commande de deux types de véhicules: des camions de 10 tonnes et des camions de 18 tonnes.

M.Cochise, votre patron, vous propose le travail suivant: chercher combien de camions de chaque type il va falloir acheter pour respecter les contraintes suivantes:

- Budjet total maximum : 4 000 000 F
- Pouvoir transporter plus de 150 tonnes à un moment donné.
- Il y a en moyenne 1,5 fois plus de transports inférieurs à 10 tonnes que de transports supérieurs à 10 tonnes.
- Il faut au moins trois camions de 18 tonnes
- Il faut pouvoir desservir au moins 10 destinations en même temps
- Prix d'un camion de 10 tonnes : 250 000 F
  prix d'un camion de 18 tonnes : 350 000 F

Donner toutes les solutions possibles. Quelle est la plus avantageuse ?

Le Journal

BAC PRO
IREM DE LORRAINE

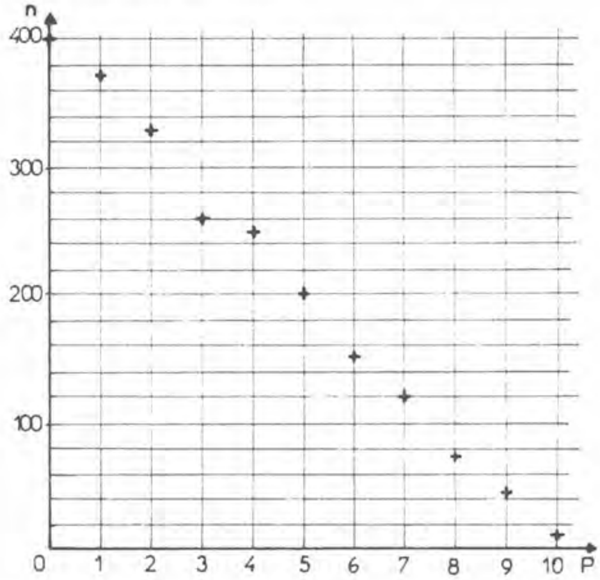
Un groupe d'élèves du lycée Jean Monnet de Dombasle publie un journal de l'établissement: "Le Fouineuropéen".

Afin de déterminer le prix de vente du journal, ce groupe d'élèves a effectué une enquête dans le lycée afin de connaître le nombre d'exemplaires qu'ils sont susceptibles de vendre en fonction du prix du numéro.

Les résultats sont donnés par le graphique:

P : prix de vente au numéro en francs.

n : nombre d'exemplaires vendus si le prix est P



1°- Ajuster par une droite le nuage de points obtenu (voir Statistiques en Bac Pro: ajustement linéaire).

En déduire une relation entre P et n ($n = f(P)$).

2°- Le rédacteur en chef du journal a fait, lui aussi, le travail et a trouvé la relation $n = -40P + 400$ (on conservera cette relation dans la suite). Le prix du journal sera fixé en privilégiant l'une des quatre options suivantes:

A/ Assurer l'équilibre financier de l'opération (Recettes $\geqslant$ Frais).

B/ Obtenir le bénéfice maximum.

C/ Vendre le journal à la moitié au moins des élèves du lycée tout en assurant l'équilibre financier.

D/ Avoir le plus de lecteurs possible en même temps que le bénéfice le plus important possible.

De plus, afin de promouvoir l'opération, le journal sera vendu avec un croissant (Prix global pour le lot journal/croissant).

Données:

Le lycée compte 400 élèves.

Frais de confection du journal:

0,80 F par numéro.

80 F de frais fixes.

Prix d'achat d'un croissant chez le boulanger: 1,50 F.

Relation prix/ventes:

n : nb d'exemplaires vendus
P : prix de vente global
(1 journal + 1 croissant)

$n = -40P + 400$

On supposera que tous les numéros tirés sont vendus.

Travail à faire:

Option A : Déterminer sur quel intervalle doit se situer le prix de vente P pour qu'il n'y ait pas de déficit.

Option B : Déterminer le prix P pour que le bénéfice soit maximum. Calculer ce bénéfice. Quel serait alors le nombre d'exemplaires vendus?

Option C : Déterminer le prix P pour que la moitié au moins des élèves achète le journal et que l'opération ne se solde pas par un déficit.

Option D : On veut trouver la solution optimum: le plus grand nombre de lecteurs et le plus grand bénéfice possible. Tracer sur un même graphique les fonctions nombre de lecteur $n = f(P)$ et bénéfice $B = g(P)$.

Quel est le prix de vente optimum? arrondir à 10 cts près.

Quel est le nombre de lecteurs correspondant ? Quel est le bénéfice réalisé ?

A quel prix conseilleriez-vous au "Fouineuropéen" de vendre son lot Journal + Croissant ?

MATHS GENERALES ORIENTEES TERTIAIRE

Les Suites

BAC PRO
IREM DE LORRAINE

- On appelle suite numérique, un ensemble de nombres a, b, c, d, ... limité ou illimité, quelconque ou obeïssant à une certaine "logique".

  3 ; 7 ; 52 ; 46 ; -3 est une suite numérique limitée de 5 termes quelconques.

  -12 ; -7 ; -2 ; 3 ; 8 ; ... est une suite numérique illimitée dont les termes obeïssent à une certaine "logique".

- Chaque terme d'une suite est repéré par son rang dans la suite. On notera une suite quelconque:

  u_0 ; u_1 ; u_2 ; u_3 ; ... ; u_n

  Attention: Le 1^er^ terme a pour rang 0, donc le n^ième^ terme a pour rang n - 1.

SUITES ARITHMETIQUES	SUITES GEOMETRIQUES

DEFINITION

Suites arithmétiques

Une suite arithmétique de 1er terme u_0 et de raison r est telle que:

$$\boxed{u_{n+1} = u_n + r}$$

(On obtient un terme en additionnant une constante au terme précédent)

Suites géométriques

Une suite géométrique de 1er terme u_0 et de raison q est telle que:

$$\boxed{u_{n+1} = q \cdot u_n}$$

(On obtient un terme en multipliant le terme précédent par une constante)

EXEMPLE

Suite arithmétique de raison r = 3 et de premier terme $u_0 = 5$:

5 ; 8 ; 11 ; 14 ; 17 ; ...

Suite géométrique de raison q = 2 et de premier terme $u_0 = 1$:

1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16 ; 32 ; ...

CALCUL DU TERME DE RANG N

Soit une suite arithmétique de 1er terme u_0 et de raison r:

$$\boxed{u_n = u_0 + n \cdot r}$$

Exemple: Calcul du 10ème terme (u_9) de la suite précédente:

$$u_9 = 5 + 9 \times 3 = 32$$

Soit une suite géométrique de 1er terme u_0 et de raison q:

$$\boxed{u_n = u_0 \cdot q^n}$$

Exemple: Calcul du 15ème terme (u_{14}) de la suite précédente:

$$u_{14} = 1 \times 2^{14} = 16\ 384$$

SOMME DES N PREMIERS TERMES : $U_0 + U_1 + U_2 + \ldots + U_{N-1}$

La somme S des n premiers termes d'une suite arithmétique est:

$$\boxed{S = \frac{n.(\ u_0 + u_{n-1}\ )}{2}}$$

Cette somme est indépendante de la raison de la suite.

Exemple: Somme des 10 premiers termes de la suite:

$$5 + 8 + 11 + \ldots + 33 = \frac{10 \times (\ 5 + 32\ )}{2} = 185$$

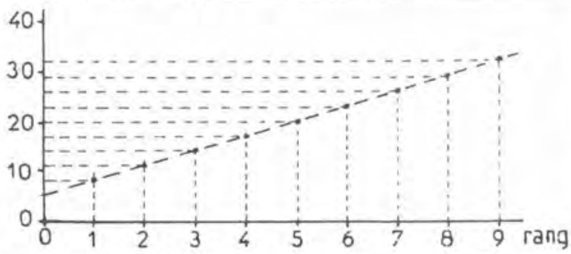
La somme S des n premiers termes d'une suite géométrique est:

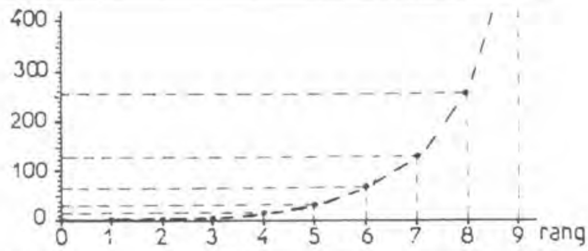
$$\boxed{S = \frac{u_0\ .\ (\ 1 - q^n)}{(\ 1 - q\ )}}$$

Exemple: Somme des 15 premiers termes de la suite:

$$1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 16\ 384 = \frac{1 \times (\ 1 - 2^{15})}{(\ 1 - 2)} = 32\ 767$$

REPRESENTATION GRAPHIQUE $U_N = F\ (\ N\ )$





APPLICATION FINANCIERE (EXEMPLE)

Amortissement constant d'un matériel:

Un équipement informatique d'une valeur nette HT de 100 000 F est amortie en 8 ans. La valeur résiduelle à chaque inventaire représente une suite arithmétique de premier terme a_0 = 100 000 et de raison - 12 500.

Intérêts composés:

Un capital de 500 000 F placé à 8,5 % l'an acquiert chaque fin d'année une valeur correspondant à sa valeur en début d'année augmentée des intérêts annuels.

Cette valeur acquise est une suite géométrique de premier terme 500 000 et de raison 1,085.

Exercices

SUITES ROYALES

Déterminer le nombre suivant:

u : 1 ; 4 ; 7 ; 10 ; 13 ; ....

v : -2 ; 4 ; -8 ; 16 ; ....

w : 625 ; 125 ; 25 ; 5 ; ....

x : 1 ; 2 ; 4 ; 7 ; 11 ; 16 ; ....

y : 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 8 ; 13 ; 21 ; ....

z : 2 ; 4 ; 5 ; 6 ; 4 ; 3 ; 4 ; 4 ; 4 ; 3 ; 4 ; 5 ; .... (very hard!)

THERMES, TERMES, TERM.

Déterminer les cinq premiers termes des suites:

$u_n = 1 + \frac{1}{n}$

$u_n = n^2 - 10$

$u_n = \frac{10}{2 + n}$

$u_0 = 2$ et $u_n = -2u_n + 7$

$u_0 = 2$ et $u_{n+1} = -\frac{1}{u_n}$

$u_0 = 6$ et $u_{n+1} = \frac{10^n}{2 + u_n}$

SUITE ... CASE ?

Compléter le tableau suivant:

Suite	Terme suivant	Définition récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$	Définition fonctionnelle $u_n = f(n)$	$10^{\text{ème}}$ terme
0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4				
0 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16				
$1 ; \frac{1}{4} ; \frac{1}{9} ; \frac{1}{16} ; \frac{1}{25}$				
0 ; 2 ; 8 ; 26 ; 80				
$2 ; 1 ; \frac{2}{3} ; \frac{1}{2} ; \frac{2}{5} ; \frac{1}{3}$				
$1 ; \frac{1}{4} ; \frac{1}{9} ; \frac{1}{16} ; \frac{1}{25}$				

ENSUITE

Reconnaître parmi les suites ci-dessous celles qui sont arithmétiques ou géométriques. Préciser dans ces deux cas la raison et le premier terme.

a : $\frac{1}{4} ; \frac{1}{2} ; 1 ; 2 ; 4$

b : 4,5 ; 1 ; -2,5 ; -6 ; -10,5 ; -14

$c_n = (-1)^n$

$d_n = \frac{3^n}{2}$

$e_n = \frac{n}{3} - 1$

$f_n = 2.f_{n-1} + 3$ et $f_0 = 4$

$g_{n+1} = g_n + 1$ et $g_0 = -\frac{1}{2}$

$h_{n+1} = \frac{h_n}{4}$ et $h_3 = 8$

SOIT UNE SUITE ARITHMETIQUE

1°/ Soit une suite arithmétique définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = u_n - 3$. Calculer u_5 et u_{10}. Déterminer la somme des 10 premiers termes de cette suite.

2°/ Soit une suite arithmétique u telle que $u_{24} = 5$ et $u_{34} = 11$. Calculer u_{29}.

3°/ Soit une suite arithmétique telle que $u_8 = 45$. La somme de ses cinq premiers termes est 75. Calculer la raison de cette suite et son premier terme u_0.

4°/ Soit une suite arithmétique telle que $u_5 + u_6 = u_7$. Déterminer u_4.

5°/ La somme des termes d'une suite arithmétique de raison 4 est 119. Son dernier terme est 29. Combien a-t-elle de termes?

SOIT UNE SUITE GEOMETRIQUE

1°/ Soit une suite géométrique telle que $u_{n+1} = \frac{3u_n}{4}$. Calculer u_3 et u_5. Quelle est la somme de ses quatre premiers termes ?

2°/ Soit une suite géométrique telle que $u_1 = -14$ et $u_4 = 112$. Calculer u_{10}.

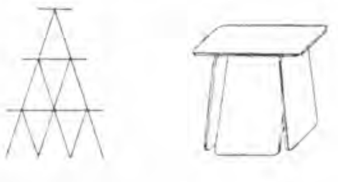
3°/ La somme des trois premiers termes d'une suite géométrique est 10,5 et leur produit est 8. Calculer la raison de cette suite ainsi que les trois termes.

4°/ Quel est le nombre de termes d'une suite géométrique de raison 2,5 si son premier terme est 5 et la somme de ses termes 322,1875 ?

Problèmes

BAC PRO
IREM DE LORRAINE

CHATEAU DE CARTE



Un château de cartes se construit à partir d'éléments de cinq cartes (voir dessin) posés en quinconce les uns sur les autres.

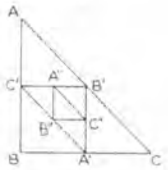
1°/ On dispose de deux jeux de 52 cartes. Combien d'étages peut-on construire ?
Combien restera-t-il de cartes inutilisées ?

2°/ Sachant que chaque étage mesure 10 cm, combien faudra-t-il de cartes pour bâtir un château de 1 mètre de haut ?

PETIT PROBLEME

Montrer que la somme des n premiers nombres entiers impairs est égal au carré de n.

TRIANGLES



Soit un triangle ABC rectangle isocèle tel que AB = BC = 1 m. On trace successivement les triangles rectangles isocèles A'B'C', A"B"C", ... tels que leurs sommets soient les milieux des côtés des triangles précédents (voir figure).
Quelle sera l'aire du 10ème triangle obtenu de cette façon ?

QUITTE OU DOUBLE ?

Un candidat a gagné 63 500 F à un jeu de "Quitte ou double". La première bonne réponse valait 500 F, la deuxième 1 000 F, etc.

1°/ A combien de questions le candidat a-t-il répondu correctement avant de s'arrêter ?

2°/ Quelle somme supplémentaire aurait-il gagnée pour une réponse de plus ?

PLIAGE

On plie une feuille de papier de format A4, d'épaisseur 0,1 mm, en deux, trente fois de suite. Quelle sera l'épaisseur de papier obtenue ?

ARGUS

La valeur "Argus" d'une automobile baisse de 10 % chaque année. Au bout de combien d'années aura-t-elle perdu la moitié de sa valeur ?

SUJET BAC PRO B (année 1990)

Monsieur PONS souhaite obtenir une étude comparative des deux systèmes d'amortissement: l'amortissement linéaire et l'amortissement dégressif.
Pour cela, vous disposez des plans d'amortissement ci-contre.

Vous devez:

1°/ 1.1 Représenter graphiquement le plan d'amortissement linéaire, en portant en abscisses les années (x = 89 pour 1989) et en ordonnées les valeurs résiduelles.
Prendre pour origine du repère le point (89 , 0) et pour unités 3 cm pour un an en abscisse et 1 cm pour 20 000 F en ordonnée.

1.2 U_{89} représentant la valeur résiduelle en 1989, montrer que les valeurs résiduelles U_{89}, U_{90}, U_{91}, U_{92} forment une progression dont on déterminera la nature et la raison.

2°/ 2.1 Représenter graphiquement le plan d'amortissement dégressif sur le repère précédent en portant en abscisse les années et en ordonnée les valeurs résiduelles.

2.2 V_{89} représentant la valeur résiduelle en 1989, montrer que les valeurs résiduelles V_{89}, V_{90}, V_{91} forment une progression dont on déterminera la nature et la raison.

3°/ Déterminer l'équation de la droite représentant le plan d'amortissement linéaire, passant par les points (91 , 216 178) et (92 , 140 178). En déduire la date (année - mois) à laquelle la valeur résiduelle est la moitié de la valeur d'acquisition. Vérifier graphiquement la valeur trouvée.

4°/ Soit la fonction $f(x) = 354\,667 \,.\, 0{,}6^{(x - 89)}$. Calculer f(89), f(90), f(91) et comparer les résultats obtenus avec V_{89}, V_{90} et V_{91}. On admet que la fonction f(x) représente le plan d'amortissement dégressif. En déduire la date (année - mois) à laquelle la valeur résiduelle est la moitié de la valeur d'acquisition. Vérifier graphiquement la valeur trouvée.

Amortissement linéaire

Date d'acquisition 5/08/89
Montant de l'acquisition : 380.000F
Nombre d'années d'amortissements : 5 ans
Taux d'amortissement : 20%

Années	Valeurs début	Annuités	Cumul des annuités	Valeurs résiduelles
1989	380 000	11 822	11 822	368 178
1990	368 178	76 000	87 822	292 178
1991	292 178	76 000	163 822	216 178
1992	216 178	76 000	239 822	140 178
1993	140 178	76 000	315 822	64 178
1994	64 178	64 178	380 000	0

Amortissement dégressif

Date d'acquisition : 5/08/89
Montant de l'acquisition : 380.000F
Nombre d'années d'amortissement : 5 ans
Taux d'amortissement : 20%

Années	Valeurs début	Annuités	Cumul des annuités	Valeurs résiduelles
1989	380 000	25 333	25 333	354 667
1990	354 667	141 867	167 200	212 800
1991	212 800	85 120	252 320	127 680
1992	127 680	63 840	316 160	63 840
1993	63 840	63 840	380 000	0

CROISSANCE

La population d'une ville V augmente, chaque année, de 1 % pendant que celle d'une ville W augmente de 3 %. En 1991, la ville V était deux fois plus peuplée que la ville W.

En quelle année les deux villes auront-elles le même nombre d'habitants ?

En quelle année la ville W sera-t-elle deux fois plus peuplée que la ville V ?

SUI 3

Suites et tableur (Works)

BAC PRO
IREM DE LORRAINE

PROGRAMMER UNE SUITE ARITHMETIQUE OU GEOMETRIQUE A L'AIDE DU TABLEUR DE WORKS :

L \ C	1	2	3	4	5	6	7	8
1	Suite arithmétique:				Suite géométrique:			
2								
3	Raison r		50		Raison q		2	
4	U0		3		V0		3	
5								
6	U0	:	3		V0	:	3	
7	U1	:	53		V1	:	6	
8	U2	:	103		V2	:	12	
9	U3	:	153		V3	:	24	
10	U4	:	203		V4	:	48	
11	U5	:	253		V5	:	96	
12	U6	:	303		V6	:	192	
13	U7	:	353		V7	:	384	
14	U8	:	403		V8	:	768	
15	U9	:	453		V9	:	1536	

=L4C3   =L(-1)C+L4C3   =L4C7   =L(-1)C*L4C7

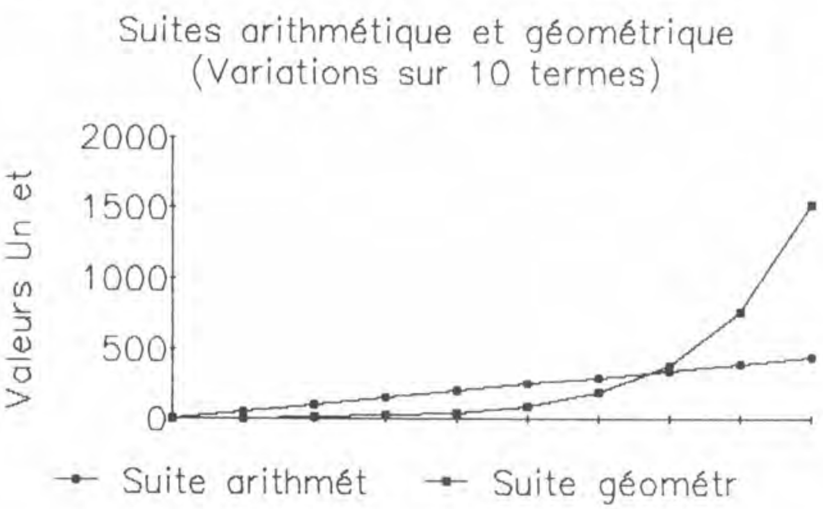
1°/ Définir la largeur des colonnes 1, 2, 5 et 6 respectivement à 5, 3, 5, 3 caractères. FORMAT Largeur (ALT T a)

2°/ Taper les textes comme représentés ci-contre.

3°/ Programmer les cellules en utilisant les formules encadrées ci-contre. Pour les cellules U_2 à U_9 et V_2 à V_9, utiliser l'option EDITION Recopie vers le bas (ALT E b).

4°/ Entrer des valeurs dans les cellules correspondant à r, U_0, q, V_0.

REPRESENTER GRAPHIQUEMENT UNE SUITE ARITHMETIQUE OU GEOMETRIQUE :



1°/ Lorsque le tableau précédent est terminé, passer en mode Grapheur. AFFICHAGE Nouveau Graphique (ALT A N)

2°/ Saisir la colonne des valeur de U et les mettre en première ordonnée. DONNEES 1ère Ordonnée (ALT D 1)

3°/ Mettre les valeurs de V en deuxième ordonnée. (ALT D 2)

4°/ Choisir un titre, sous-titre, ...(ALT D T)

5°/ Choisir le format Courbe (ALT t C) et afficher le graphique (ALT A 1).

APPLICATIONS :

A - On pose $U_0 = V_0 = 1$ et $q = 2$. Déterminer, à l'aide du tableur, la raison r de la suite arithmétique pour que les termes U_9 et V_9 soient égaux. Vérifier ce résultat à l'aide d'une équation.

- On pose $U_0 = V_0 = 10$ et $r = 10$. Déterminer à l'aide du tableur, la raison q de la suite géométrique pour que les termes U_9 et V_9 soient égaux. Vérifier à l'aide d'une équation.
- Soit $U_0 = V_0 = 5$.et $r = q$. Quelles doivent être ces raisons pour que les dixièmes termes des suites soient égaux ? Essayer de vérifier à l'aide d'une équation.

B - Un épargnant dispose d'une somme de 150 000 francs à placer. Il a le choix entre deux banques A et A' qui pratiquent l'une un taux à intérêts simples de t % annuels et l'autre un taux à intérêts composés de t' % annuels. L'intérêt simple se calcule annuellement sur le capital initial alors que l'intérêt composé se calcule sur le capital en début d'année (augmenté des intérêts de l'année précédente).

1° Construire avec "Works" un tableau faisant apparaître le capital initial, le taux pour chaque banque, le capital en début d'année, l'intérêt annuel et le capital en fin d'année pour chaque banque et pour 15 années de placement.

2° Comparer, à l'aide d'un graphique, l'évolution du capital dans chaque cas sur 15 ans pour des taux t = 12 % et t' = 7 %.

3° Déterminer deux taux t et t' pour que les capitaux soient égaux au bout de 15 ans.

Fonction dérivée

FONCTION

Soit $\mathbb{D}$ une partie de $\mathbb{R}$; quand les valeurs d'une grandeur y dépendent des valeurs d'une autre grandeur x (la variable), on dit qu'il existe une fonction f permettant d'associer à chaque nombre x de D un nombre y de $\mathbb{R}$.

$$f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow f(x) = y$$

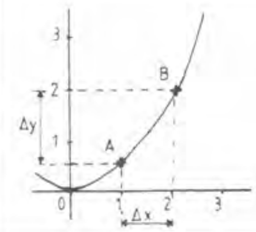
Soit la fonction:

$$f(x) = 0{,}5\,x^2$$

TAUX D'ACCROISSEMENT

Le taux d'accroissement représente le quotient de la variation de y par la variation correspondante de x.

$$T = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$



Taux d'accroissement entre A et B

A $\begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 0{,}5 \times 1^2 = 0{,}5 \end{cases}$

B $\begin{cases} x_2 = 2 \\ y_2 = 0{,}5 \times 2^2 = 2 \end{cases}$

$$T = \frac{2 - 0{,}5}{2 - 1} = 1{,}5$$

NOMBRE DERIVE EN UN POINT

C'est la valeur du taux d'accroissement au voisinage de ce point.

$$N = \lim_{x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Nombre dérivé au point B:

On rapproche x_1 de x_2

x_1	1,5	1,8	1,9	1,95	1,99
Δx	0,5	0,2	0,1	0,05	0,01
y_1	1,125	1,62	1,805	1,901	1,980
Δy	0,875	0,38	0,195	0,099	0,020
$\frac{\Delta y}{\Delta x}$	1,75	1,90	1,95	1,98	1,99

On remarque que le taux d'accroissement se rapproche de 2:

$$N = 2$$

FONCTION DERIVEE

A chaque point (x,y) de f(x) correspond un nombre dérivé. On obtient ainsi une nouvelle fonction qui s'appelle fonction dérivée f'(x).

$$f'(x) = N(x)$$

Elle correspond au coefficient directeur de la tangente à la courbe de f(x) en chaque point.

Nombre dérivé aux points x=0, x=1,…

x	0	1	2	3
f'(x)	0	1	2	3

On s'aperçoit que

$$f'(x) = x$$

CALCULS DES DERIVEES DE FONCTIONS USUELLES

On suppose a et n constantes, x variable, U et V deux fonctions de x:

$(a)' = 0$ $\quad (U + V)' = U' + V'$

$(ax)' = a$ $\quad (U.V)' = U'V + UV'$

$(ax^n)' = nax^{n-1}$ $\quad (U^n)' = nU'U^{n-1}$

$\left(\frac{a}{x}\right)' = -\frac{a}{x^2}$ $\quad \left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}$

Exemples de calculs

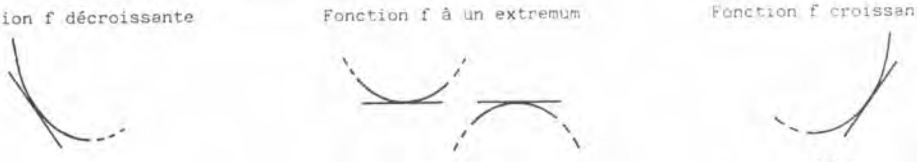
Fonction	Dérivée
4	0
x	1
x^2	2x
$3x^2$	6x

Fonction	Dérivée
$4x^3$	$12x^2$
$\sqrt{x} = x^{1/2}$	$\frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$-x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$
$3x^2+5x-3$	6x+5

Fonction	Dérivée
(x+5)(2x+1)	4x+11
$\frac{5x-1}{x-3}$	$\frac{16}{(x+3)^2}$
$(3x+2)^2$	6(3x+2)

UTILISATION DE LA DERIVEE POUR L'ETUDE DE FONCTIONS

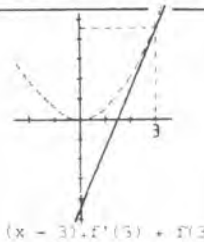
Fonction f décroissante — Fonction f à un extremum — Fonction f croissante



$f' < 0$ — $f' = 0$ — $f' > 0$

De plus, on obtient l'équation de la tangente à la courbe en un point $(x_0, f(x_0))$ par la formule:

$$y = (x - x_0).f'(x_0) + f(x_0)$$



$y = (x - 3).f'(3) + f(3)$

$y = (x - 3).\,3 + 4{,}5$

$y = 3x - 9 + 4{,}5$

$y = 3x - 4{,}5$

Exercices

BAC PRO IREM DE LORRAINE

LE TABLEAU DES DERIVEES

1°/ Après avoir précisé l'ensemble de définition, calculer les dérivées des fonctions suivantes:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	$-5x$	1000	$\frac{5}{x} - x^3$	$5x^7$	$4x^2(3x - 1)$	$x + \sqrt{2x}$	$\frac{4x}{-x+2}$	$\sqrt{2x - 7}$
2	$\frac{1}{7}(x + 2)^2$	$2x - 9$	$\sqrt{x} + \frac{1}{x}$	$p^2 - 1$	$\frac{5}{x^2}$	3	$\frac{1}{2p}$	$\frac{4x}{5}$
3	z^3	$5q^2 - 2q + 20$	$(4x - 1)^5$	$\frac{x}{x^3}$	$(\sqrt{2x + 3})^3$	$3 - x$	$4x^2 + 3x - 7$	$0,1x^2$
4	$7x^3 - 2x$	$ax^2 + bx + c$	$-\frac{4}{x}$	x	$2x^2 - 3x + 1$	-7	$(4x - 5)^3$	$\frac{2x}{-7x+2}$
5	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{x}$	$\frac{a}{x}$	$\frac{1}{x^2}$	$\frac{0,5x - 1,3}{4x - 1,5}$	$z - 5$	$\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4}x$	$\sqrt{\frac{x}{2}}$
6	$(-x)^2$	$-\frac{1}{2}x + 1$	$-\frac{7x}{3}$	0	$\frac{1}{x}(2x + 7)$	$3x + 5$	$-2(2x + 2)^3$	$\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$
7	$\lvert x \rvert$	$-\sqrt{x - 7}$	$2x^3 + 3x^2 - x$	$\frac{2x - 7}{4x + 2}$	$\sqrt{-x}$	$3x^2 - \frac{2}{x}$	$-\frac{3}{x^2}(x + 5)^4$	$-2x + \frac{1}{2}$
8	$(x^2 + 2)(x^3 - 1)$	$2x + \sqrt{x}$	$-\frac{x}{3}$	$2p^2 - 3p + 5$	$(-2).(+3)$	$\frac{2x}{\sqrt{3x - 1}}$	$\lvert 2x - 3 \rvert$	$\frac{x}{2}$
9	$ax + b$	$\sqrt{x}(2x - 5)$	$\frac{1}{3} - \frac{x}{4}$	$(2x + 3)^4 . \frac{4}{x^2}$	$x\sqrt{3}$	$-7x^3 + 2x$	$-x^2$	$\frac{-5x + 1}{x^2 - 2}$

2°/ Ecrire les équations des tangentes aux courbes G3, C4, C7, G9, H1 et B4 aux points d'abscisses $x = 1$; $x = 4$; $x = -4$.

3°/ Etudier les fonctions G5, G3 et E7.

4°/ Etude de la fonction G1:

Etablir le tableau de variations.

Montrer que quand x devient très grand ou très petit, f(x) se rapproche d'une limie L_1. (Utiliser un tableau de valeurs)

Montrer de même que quand x se rapproche de 2, f(x) tend vers une limite L_2.

Les droites $y = L_1$ et $y = L_2$ sont appelées asymptotes à la courbe $f(x) = \frac{4x}{-x+2}$. Les tracer sur un repère.

Une courbe se rapproche de plus en plus de ses asymptotes sans jamais les franchir.

Représenter graphiquement la fonction.

VIRAGE DANGEREUX

Soit la fonction $f(x) = \frac{x^3}{3} - 4x + 1$.

1°/ Déterminer la dérivée f'(x) de cette fonction. Factoriser f'(x) et préciser le signe de cette dérivée en fonction de x.

2°/ En déduire le tableau de variations de la fonction f(x).

3°/ Déterminer l'équation des droites T_1, T_2, T_3, T_4 et T_5 tangentes à la courbe de f(x) aux points d'abscisses respectives $x = -4$; $x = -2$; $x = 0$; $x = 2$; $x = 4$. Représenter graphiquement ces cinq droites.

4°/ En déduire la représentation graphique de la fonction f(x).

MISE EN BOITE

Employé de l'entreprise Charles Pois, vous êtes chargé de concevoir la forme d'une boîte de conserve telle que son prix de revient soit le plus bas possible (sa surface totale doit donc être aussi petite que possible). Le volume des boîtes doit être de un litre (1000 cm^3) et pour des raisons pratiques, vous avez le choix entre trois formes: - le cube; - le pavé à base carrée; - le cylindre.

Vous devez à la fois choisir l'une des trois formes et en déterminer les dimensions pour que la surface soit minimum.

a- Calculer l'arête du cube puis sa surface totale.

b- Comme vous savez utiliser la dérivée, vous concluez que le pavé ne peut pas être retenu. Pourquoi ?

c- Soient R le rayon et h la hauteur du cylindre. Ecrivez le volume et la surface S en fonction de R et h, puis exprimez S en fonction de R. Déterminer R pour que la surface totale soit minimum. Calculez alors h. Que remarquez vous ? Calculez S minimum. Concluez.

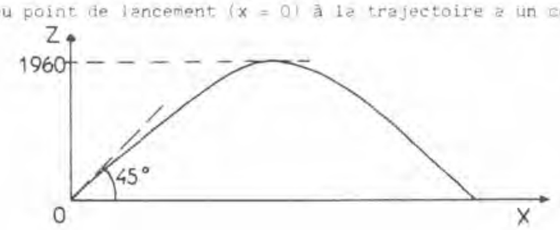
EXERCICE (DE TIR)

Lors de l'une des nombreuses guerres ayant émaillé le XX$^{\text{ème}}$ siècle, un missile SC 20 est envoyé avec une certaine vitesse initiale selon une trajectoire parabolique telle que la tangente au point de lancement (x = 0) à la trajectoire a un coefficient directeur de 1 (l'angle de lancement est de 45°).

La hauteur maximale atteinte par le projectile est de 1960 m.

1°/ Ecrire l'équation de la parabole-trajectoire (elle est de la forme $z = ax^2 + bx$).

2°/ A quelle distance de son point de lancement, le missile touchera-t-il le sol ?



FONCTION

On donne la fonction $y = ax^2 + bx + c$.

a- Déterminer les coefficients a, b, c pour que la courbe représentant la fonction passe par les points A (-2 ; 19) et B (1 ; -2) et qu'elle admette au point B une tangente de coefficient directeur -1.

b- Déterminer l'équation de la tangente en B à la courbe.

LE HANGAR

Un agriculteur veut construire un hangar ayant la forme d'un parallélépipède rectangle sur un terrain lui appartenant. Ce terrain de 10 x 12 mètres est situé en bord de route (ouverture sur la route = 10 m). La législation veut qu'une construction située à deux mètres d'un voisin ne peut dépasser deux mètres de hauteur. En éloignant de x mètres la construction, on gagne x mètres en hauteur.

1°/ Calculer le volume du hangar en fonction de x.

2°/ En dérivant la fonction obtenue, déterminer le décrochement x pour obtenir le volume utile maximum pour l'agriculteur.

3°/ Quels seront alors la longueur, la largeur et le volume de ce hangar?

MOTOS EN STOCK

Une entreprise qui vend des motos, décide d'améliorer le coût de gestion de son stock en étudiant le coût marginal de celui-ci.

Les frais de stockage sont de deux ordres:

- 2 francs par unité pour frais de manutention.
- 9800 francs de frais fixes (location de l'entrepôt, entretien, gardiennage).

1°/ Ecrire en fonction de x le montant des frais occasionnés par le stockage de la x$^{\text{ème}}$ moto.

2°/ Sachant que le coût marginal (surcoût du au stockage d'une moto de plus) peut être assimilé à la dérivée du coût de stockage, déterminer le coût marginal au niveau de la 100$^{\text{ème}}$ unité.

Chocolat

L'entreprise CHOCOLOR commercialise du cacao en poudre conditionné en boîtes de carton de 250 grammes. Le directeur veut optimiser l'approvisionnement et la vente du produit et vous charge de l'étude du dossier.

Vous disposez des données suivantes:

- Approvisionnement:

  Frais de transport : 500 F par livraison

  Frais de stockage : 700 + 0,30 Q (F par mois)

  Prix d'achat du cacao : $20 + \frac{1800}{Q}$ (F par Kg)

  Q étant la quantité commandée en kilogrammes.

- Vente:

  Vous disposez d'une étude de marché donnant les quantités susceptibles d'être vendues en fonction du prix.

  (Données sur un mois)

Prix de vente au Kg en F	x	20	25	30	36	40	45	50	55	60
Quantités vendues (Kg)	Q	480	425	370	300	220	160	130	55	10

Travail à faire

1°/ Calculer le coût total pour une commande de Q Kg.

2°/ Placer sur un graphique les points représentant les couples (x ; Q) du tableau de l'étude de marché.

En utilisant une méthode d'ajustement linéaire, ajuster le nuage de points par une droite et en déduire l'équation de la droite $Q = f(x)$.

3°/ Calculer la recette totale en fonction de x:

$R = f_1(x)$. Etudier et représenter graphiquement la fonction obtenue.

Pour quel prix de vente x, la recette est-elle maximum?

4°/ Ecrire l'expression du bénéfice en fonction de x pour une quantité vendue de Q kilogrammes (on note B(x) ce bénéfice).

Etudier la fonction, représenter B(x) graphiquement sur le même repère que R(x).

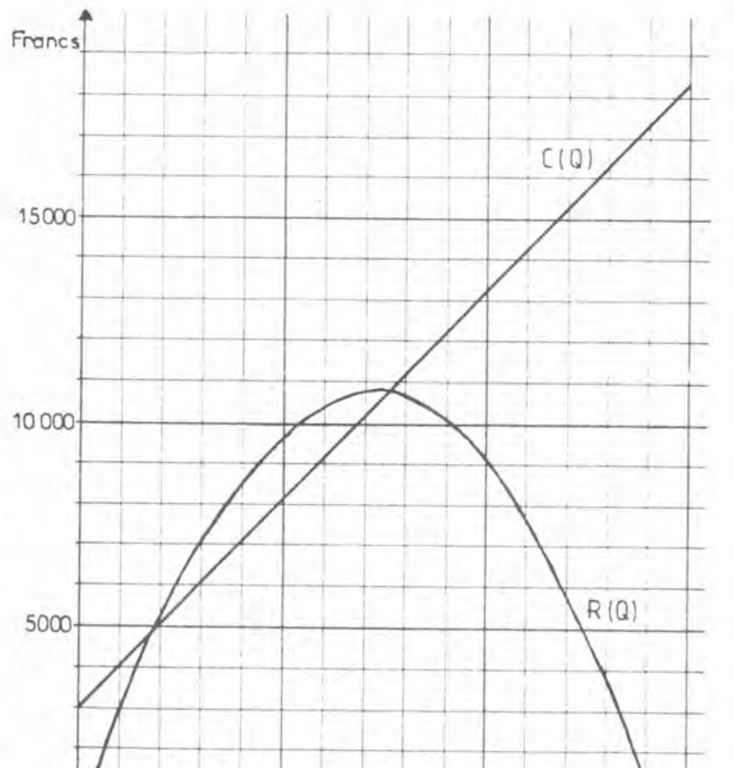
Pour quelle valeur de x le bénéfice est-il le plus grand?

Quelle quantité de cacao est alors vendue par mois?

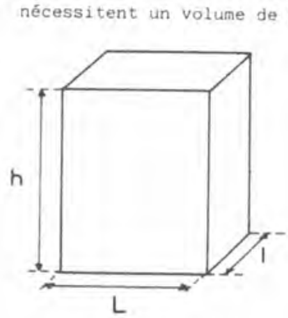
5°/ Le graphique ci-contre représente la recette et le coût total en fonction de la quantité vendue Q (notés R(Q) et C(Q)).

Hachurer la zone bénéficiaire pour l'entreprise.

Retrouver les résultats précédents (recette maxi, bénéfice maxi et quantité correspondante).



6°/ Pour terminer l'étude, vous devez déterminer les dimensions des boîtes de carton devant contenir le cacao. Ces dimensions sont calculées afin de réduire la consommation de carton. Chaque boîte contient 250 g de cacao qui nécessitent un volume de 580 cm^3.



Pour des raisons d'esthétique, la hauteur doit être une fois et demi plus grande que la profondeur : $h = 1,5\ l$

Exprimer le volume de la boîte en fonction de L et l. Calculer la surface S d'une boîte en fonction de l'une des dimensions.

Calculer cette dimension pour que la surface soit la plus petite possible. Calculer les deux autres dimensions.

(Arrondir les valeurs trouvées au mm)

MATHS GENERALES ORIENTEES TERTIAIRE

Fonctions

BAC PRO
IREM DE LORRAINE

GENERALITES

FONCTION : Une fonction f associe à tout nombre x de son ensemble de définition un nombre y unique.

SENS DE VARIATION : Une fonction f est CROISSANTE sur un intervalle si x_1 et x_2 étant choisis dans cet intervalle tels que $x_2 > x_1$ alors $f(x_2) > f(x_1)$. De même, elle sera DECROISSANTE si $x_2 > x_1$ entraîne $f(x_2) < f(x_1)$. Une fonction CONSTANTE est telle que $f(x_1) = f(x_2)$ pour tout x_1 et x_2.

DERIVEE : La fonction dérivée de f notée f' (voir chapitre "Dérivées") est utilisée pour déterminer les extremums de la fonction et le sens de variation.

PARITE : Une fonction est PAIRE si, pour tout x, $f(-x) = f(x)$. Dans ce cas, la courbe représentant la fonction est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Une fonction est IMPAIRE si, pour tout x, $f(-x) = -f(x)$. La courbe admet alors pour centre de symétrie le point (0,0).

FONCTION AFFINE

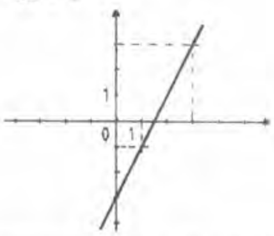
Forme standard: $f(x) = ax + b$

Dérivée: $f'(x) = a$

$\boxed{a > 0}$

x	$-\infty$		$+\infty$
f(x)	$-\infty$	↗	$+\infty$

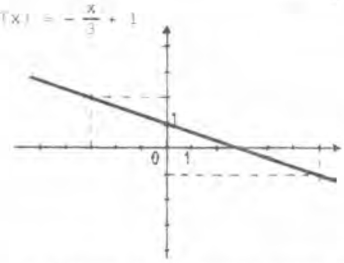
Exemple: $f(x) = 2x - 3$



$\boxed{a < 0}$

x	$-\infty$		$+\infty$
f(x)	$+\infty$	↘	$-\infty$

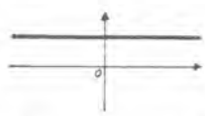
Exemple: $f(x) = -\frac{x}{3} + 1$



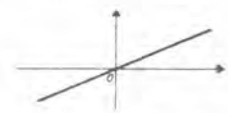
Remarque : Soit deux fonctions $f(x) = ax + b$ et $f'(x) = a'x + b'$. Si $a = a'$, on obtient deux droites PARALLELES. Si $a.a' = -1$, on obtient deux droites PERPENDICULAIRES (à condition d'utiliser un repère orthonormé).

Cas particuliers:

- Fonction CONSTANTE : $f(x) = a$



- Fonction LINEAIRE: $f(x) = ax$



FONCTION du SECOND DEGRE

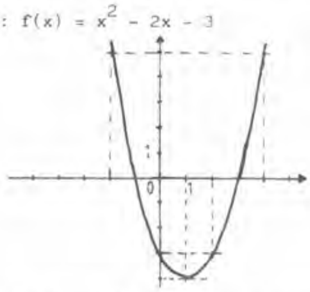
Forme standard: $f(x) = ax^2 + bx + c$

Dérivée: $f'(x) = 2ax + b$

$\boxed{a > 0}$

x	$-\infty$		$-b/2a$		$+\infty$
f(x)	$+\infty$	↘		↗	$+\infty$

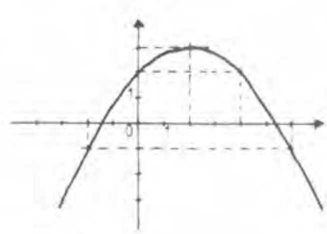
Exemple: $f(x) = x^2 - 2x - 3$



$\boxed{a < 0}$

x	$-\infty$		$-b/2a$		$+\infty$
f(x)	$-\infty$	↗		↘	$-\infty$

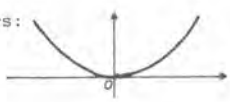
Exemple: $f(x) = -\frac{x^2}{4} + x + 2$



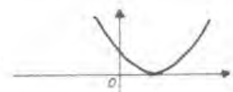
Remarque: La courbe (appelée PARABOLE) a pour axe de symétrie la droite $x = -\frac{b}{2a}$.

Cas particuliers:

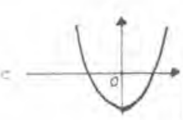
$f(x) = ax^2$



$f(x) = (ax + b)^2$



$f(x) = ax^2 + c$



FONCTION HOMOGRAPHIQUE

Forme standard: $f(x) = \dfrac{ax + b}{cx + d}$

Dérivée: $f'(x) = \dfrac{ad - bc}{(cx + d)^2}$

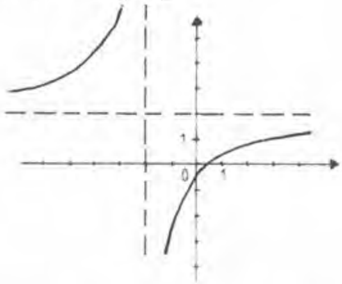
$ad - bc > 0$

x	$-\infty$		$-d/c$		$+\infty$
$f(x)$	a/c	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	a/c

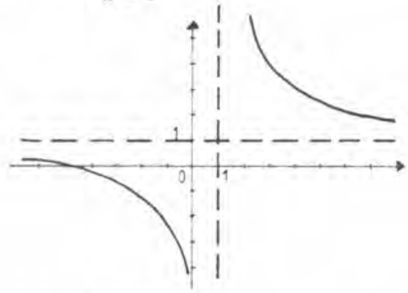
$ad - bc < 0$

x	$-\infty$		$-d/c$		$+\infty$
$f(x)$	a/c	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	a/c

Exemple: $f(x) = \dfrac{2x - 1}{x + 2}$



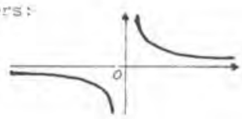
Exemple: $f(x) = \dfrac{x + 5}{x - 1}$



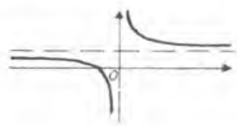
Remarque: La courbe (appelée HYPERBOLE) admet pour asymptotes les droites $y = \dfrac{a}{c}$ et $x = -\dfrac{d}{c}$.

Cas particuliers:

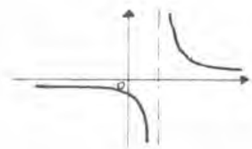
$f(x) = \dfrac{a}{x}$



$f(x) = \dfrac{a}{x} + b$



$f(x) = \dfrac{a}{x + b}$



FONCTION RACINE CARREE

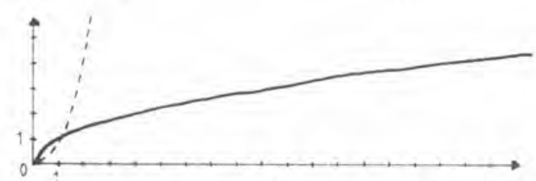
Forme standard: $f(x) = \sqrt{x}$

Dérivée: $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Cette fonction n'est définie que sur $\mathbb{R}^+$.

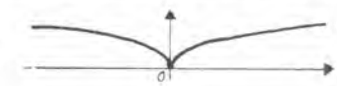
x	0		$+\infty$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

On obtient une demi-parabole symétrique de la parabole $f(x) = x^2$ par rapport à la bissectrice du repère.



Cas particulier:

$f(x) = \sqrt{|x|}$



$f(x) = ax + b$

BAC PRO
IREM DE LORRAINE

REPRÉSENTATIONS GRAPHIQUES

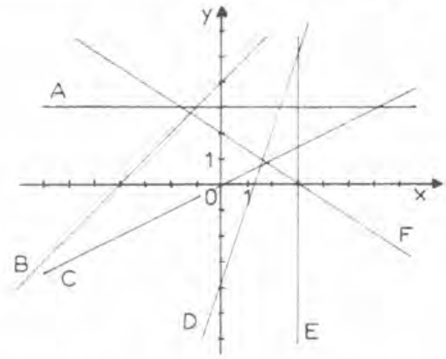
0°/ On a représenté ci-contre les droites correspondant aux fonctions ou aux équations suivantes:

(1) $y = 3x - 4$ (4) $x = 3$

(2) $f(x) = 3$ (5) $f(x) = \frac{x}{2}$

(3) $f(x) = -\frac{2x}{3} + 2$ (6) $x - y = -4$

Retrouver l'ensemble des six couples (fonction/équations ; droite).



1°/ Représenter graphiquement les fonctions suivantes:

$f(x) = 5 - 3x$ $y = \frac{x-1}{3}$ $g(x) = -2$ $I = \frac{2n}{3}$ $h(x) = -\frac{2(x+1)}{7}$ $y = -x + \frac{1}{3}$

2°/ Représenter sur un même repère orthonormé les fonctions $f(x) = \frac{2x}{3}$ et $g(x) = -2x + 3$. Les droites obtenues sont-elles parallèles ? Sinon, quel repère faudrait-il utiliser pour qu'elles le soient ?

3°/ Tracer sur un repère judicieusement choisi les droites représentant les fonctions suivantes:

$f(x) = 1800 + 0,5x$ sur l'intervalle $[0 ; 60]$ $g(x) = 0,04x$ pour $-5 \leqslant x \leqslant 5$.

4°/ En se souvenant que $|a| = a$ si $a \geqslant 0$ et que $|a| = -a$ si $a < 0$, représenter graphiquement les fonctions suivantes:

$f(x) = |\frac{x}{3}|$ $g(x) = |x - 2|$ $h(x) = |x + 1| - 2|3 - x|$

ÉQUATIONS DE DROITES

1°/ La droite passant par les points A(2 ; 7) et B(-2 ; -3) est-elle perpendiculaire, sur un repère orthonormé, à la droite passant par les points C(-2,5 ; 0) et D(5 ; -3) ?

2°/ Tracer sur un repère orthonormé la droite D d'équation $y = 2x - \frac{2}{3}$ et le point P(-1 ; 2). Déterminer l'équation de la droite D' perpendiculaire à la droite D et passant par le point P. Tracer cette droite. Calculer les coordonnées du point H intersection des droites D et D'.

3°/ Soit les points A(-3 ; 1), B(-4 ; -3) et C(4 ; 1). Déterminer les coordonnées du point D pour que ABCD soit un parallèlogramme.

PROBLEMES

1°/ Un rectangle a pour longueur 6 cm et pour largeur 4 cm. On diminue chacune de ses dimensions d'une même longueur x cm. Exprimer le périmètre P de ce rectangle en fonction de x et représenter graphiquement.

2°/ Désirant louer une automobile, M.MERI contacte trois agences dont les conditions sont les suivantes:

- Agence A : 2,00 F par kilomètre parcouru .
- Agence B : Frais d'assurance : 100 F plus 1,25 F par kilomètre parcouru .
- Agence C : Forfait de 180 F comprenant l'assurance et 150 Km gratuits plus 2,00 F par kilomètre supplémentaire .

a- Exprimer la dépense A(x), B(x) et C(x) dans chaque cas en fonction du nombre x de kilomètres à parcourir.

b- Représenter les fonctions obtenues sur un même repère pour $0 \leqslant x \leqslant 400$ Km.

c- Quelle agence M.MERI doit-il choisir en fonction de la longueur de son trajet ?

3°/ Une entreprise d'import-export accorde à ses clients européens des ristournes annuelles en fonction du volume des commandes (en ECU) effectuées dans l'année .

Les conditions de cette ristourne sont les suivantes:

Montant des commandes en ECU	Taux de ristourne
0 à 50 000	2 %
50 000 à 250 000	3 %
250 000 à 500 000	5 %
plus de 500 000	10 %

a- On appelle x le volume des commandes d'un client X. Exprimer le montant R de sa ristourne totale en fonction de x. (Attention: la ristourne se calcule par tranche et se cumule)

b- Tracer le tableau de variation de cette ristourne.

c- Représenter graphiquement en limitant la valeur de x à 600 000 ECU.

d- En déduire la ristourne accordée à un client français dont le montant des commandes annuelles a été de 700 000 FF.

e- Un client italien a reçu de l'entreprise d'import-export une ristourne de 11 200 000 lires. Quel avait été le montant de ses commandes annuelles ?

(100 ECU = 720 FF et 200 lires = 1 FF)

$f(x) = ax^2 + bx + c$

BAC PRO
IREM DE LORRAINE

REPRESENTATIONS GRAPHIQUES

Représenter graphiquement les fonctions du second degré suivantes:

$f(x) = 2x^2 - 2x - 1 \qquad g(x) = -0,25x^2 - x + 2 \qquad h(x) = -(x-1)^2 \qquad i(x) = 5 - \frac{x^2}{2}$

VALEURS ABSOLUES

On rappelle que $|a| = a$ si $a \geqslant 0$ et que $|a| = -a$ si $a < 0$.

Représenter graphiquement les trois fonctions suivantes:

$f(x) = |x^2 - 1| \qquad g(x) = |x^2 + 6x - 7| \qquad h(x) = |x^2 - 4| - |x|$

SYSTEMES

Résoudre graphiquement les systèmes suivants:

$$\begin{cases} 2x^2 - y = 3 \\ 2x - 0,5y = 1,5 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 2y = 3,5 \\ 4x^2 - 12x + 9y = 0 \\ x \text{ et } y \in \mathbb{N} \end{cases}$$

EQUATIONS

Déterminer l'équation de la parabole passant par les points:

a- A(0,0) ; B(1,-1) ; C(2,0) b- A(-2,21) ; B(1,0) ; C(3,16)

Déterminer l'équation de la parabole dont le point minimum est M(3;-2,5) passant par le point P(2,-2).

LE RECTANGLE

Un rectangle a pour longueur 6 cm et pour largeur 4 cm. On diminue chacune de ses dimensions d'une même longueur x cm.

a- Exprimer l'aire A de ce rectangle en fonction de x.

b- Représenter graphiquement les variations de cette aire.

AJUSTEMENTS

Le directeur de la prospective d'une entreprise agro-alimentaire lorraine étudie la production des huit dernières années:

Rang	Années	Production en milliers de tonnes
0	1985	3,2
1	1986	4
2	1987	3,7
3	1988	5
4	1989	7,5
5	1990	9,9
6	1991	12
7	1992	15,6

1°/ Représenter graphiquement les variations de la production en milliers de tonnes en fonction du rang n de l'année. (rang = 0 pour la première année de production 1985)

2°/ Le directeur de la prospective, prudent, suggère une expansion affine de l'entreprise pour les prochaines années. Ajuster, à main levée, le nuage de points par une droite. Déterminer l'équation de cette droite. En déduire un volume de production probable pour l'an 2000 (en milliers de tonnes).

3°/ Le P.D.G., plus optimiste, voit une expansion parabolique à son entreprise. Ajuster le nuage par une branche parabolique. Déterminer l'équation de la parabole. En déduire une production pour l'an 2000.

ON EMBAUCHE !

Une usine de montage de jouets en bois, ayant un effectif de 500 personnes, produit 10 000 unités par jour. Une unité dégage pour l'entreprise un bénéfice net de 15 francs.

L'embauche d'un nouvel ouvrier, tout en augmentant la production de 20 unités, fait baisser le bénéfice par unité de 0,015 F.

Réciproquement, le licenciement d'un ouvrier fait perdre 20 unités par jour mais gagner 0,015 F sur le bénéfice par unité.

1°/ On appelle x le nombre d'ouvriers à embaucher ($x > 0$) ou à licencier ($x < 0$). Calculer le bénéfice total journalier B(x) en fonction de x.

2°/ Sachant que pour produire, il faut au moins un ouvrier et que l'entreprise doit faire des bénéfices, déterminer l'ensemble de définition de cette fonction.

3°/ Représenter graphiquement les [illegible] du bénéfice total B(x).

4°/ Déduire du graphique la politique en matière d'effectifs de l'entreprise pour dégager un bénéfice maximum.

$f(x)=(ax+b)/(cx+d)$ et Cie

REPRESENTATIONS GRAPHIQUES

Tracer le tableau de variation et représenter graphiquement les fonctions homographiques suivantes:

$f(x) = \dfrac{x+4}{-x+2}$ $\qquad g(x) = \dfrac{3}{4x}$ $\qquad h(x) = \dfrac{5}{x} - 3$ $\qquad i(x) = -\dfrac{10}{x+2}$

(Tracer les asymptotes en pointillés)

EQUATIONS

Résoudre algèbriquement et graphiquement les systèmes d'équations suivants:

$$\begin{cases} xy = 6 \\ 2x - y = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3y + x = 5 \\ xy = 2\,(y-3) \end{cases}$$

QUELLE HYPERBOLE !

Soit une fonction homographique $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$

1°/ Déterminer les réels a, b, c et d pour que l'hyperbole représentant cette fonction passe par le point A(2 ; 3) et coupe l'axe Ox en -1 et l'axe Oy en -1.

2°/ Tracer cette courbe.

LE RECTANGLE (TER)

Un rectangle a pour aire 24 cm^2. On appelle L sa longueur en centimètres et l sa largeur en centimètres. Calculer L en fonction de l et représenter graphiquement. Déterminer graphiquement L pour que le rectangle soit un carré.

CAPITAL

Un certain capital C, placé à intérêts simples de 8 % l'an, a acquis au bout d'un nombre de mois m une valeur de 150 000 F.

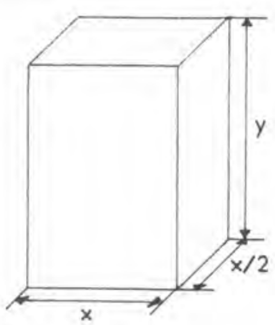
1°/ Exprimer le capital C en fonction de la durée m.

2°/ Représenter la fonction C(m) pour une durée maximum de 3 ans.

MARGE

Un produit dont le coût d'achat est estimé à 1200 F est vendu par un commerçant en appliquant un taux de marque de t %. Exprimer le prix de vente P de ce produit en fonction de t et représenter graphiquement sur l'intervalle [0 - 50].

DESIGN



Un cabinet de design industriel doit concevoir un carton d'emballage alimentaire ayant la forme d'un parallélépipède rectangle (voir ci-contre). Les contraintes sont les suivantes:

- Le pack doit contenir au moins 1 litre de liquide.
- Pour la stabilité, la surface de base doit être égale à au moins deux fois et demi la hauteur.
- La face principale de l'emballage ne doit pas dépasser 200 cm^2 de surface et doit respecter la proportion idéale $\dfrac{\text{hauteur}}{\text{largeur}}$ = nombre d'or (Le nombre d'or est égal à la solution positive de l'équation $n^2 - n - 1 = 0$).

Ecrire les équations ou inéquations résultant de ces contraintes. Résoudre graphiquement.

En déduire les dimensions maximales et minimales pour ce pack alimentaire.

(Comme précisé sur le schéma ci-contre, on appelle y la hauteur du carton, x sa grande largeur et $\dfrac{x}{2}$ sa petite largeur.)

BOUQUET FINAL

Représenter sur un même repère orthonormé pour $-10 \leqslant x \leqslant +10$:

$f_1(x) = x$ $\qquad f_2(x) = -x$ $\qquad f_3(x) = \dfrac{16}{x}$ $\qquad f_4(x) = -\dfrac{16}{x}$ $\qquad f_5(x) = \dfrac{x^2}{4}$

$f_6(x) = -\dfrac{x^2}{4}$ $\qquad f_7(x) = 2\sqrt{|x|}$ $\qquad f_8(x) = -2\sqrt{|x|}$ $\qquad f_9(x) = \sqrt{|16 - x^2|}$ $\qquad f_{10}(x) = -\sqrt{|16 - x^2|}$

(les fonctions f_9 et f_{10} devront être tracées point par point.)

Les tourteaux

BAC PRO
IREM DE LORRAINE

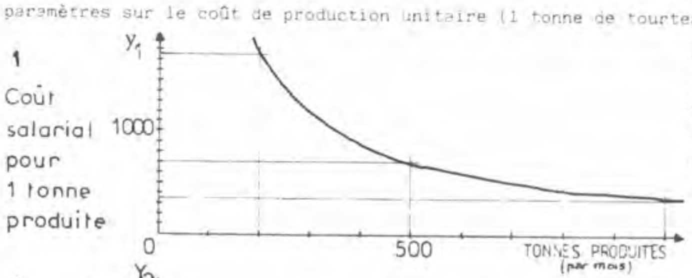
Ce dossier a pour but d'étudier l'incidence des différents paramètres entrant dans la détermination du coût de production d'un objet manufacturé sur les variations de ce coût. Nous allons utiliser le cas de l'entreprise ALIBETAIL de Xainville (57).

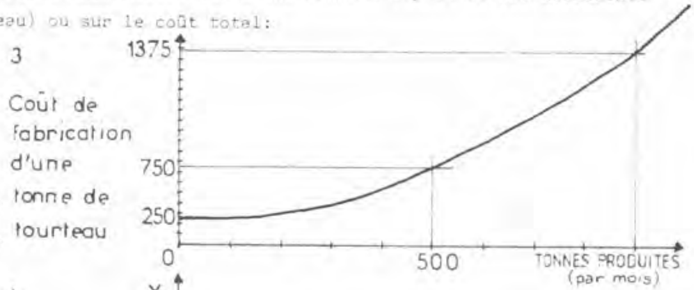
Caractéristiques de l'entreprise:

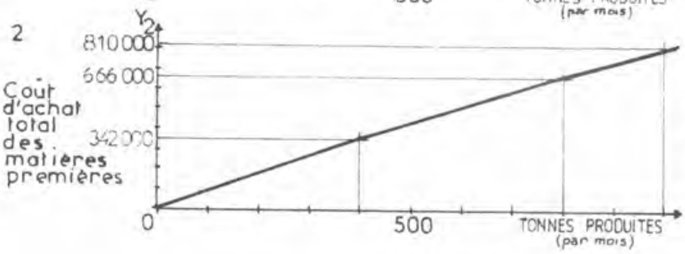
Raison sociale : ALIBETAIL SA Capital: 1 500 000 F
R.C. 1 067 890 T à METZ
Fabrication de tourteaux d'arachide pour la nourriture du bétail.
Production annuelle moyenne: 10 000 tonnes.
Nombre de salariés: 35

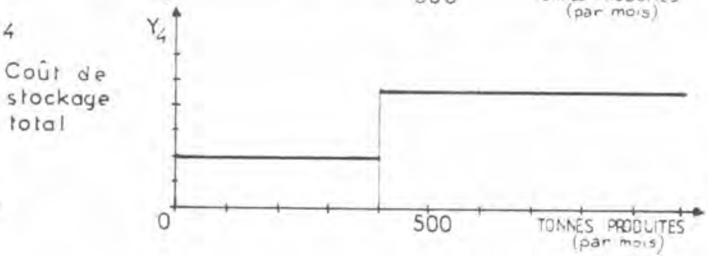
Le coût de production d'un objet manufacturé dépend (entre autres) des paramètres suivants:
- Le coût d'achat des matières premières entrant dans la confection du produit (achat, transport, stockage).
- Le coût en personnel: salaires, primes diverses, cotisations sociales.
- Les frais de fonctionnement de l'entreprise: energie et maintenance de l'outillage principalement.
- Les frais de stockage du produit fini.

Le Directeur Général d'ALIBETAIL SA a dressé les graphiques suivants en vue d'une étude d'impact de ces différents paramètres sur le coût de production unitaire (1 tonne de tourteau) ou sur le coût total:









Votre travail

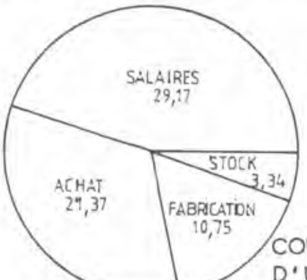
1°/ En étudiant le graphique n°1 (Incidence des charges salariales sur le coût de production), déterminer le coût moyen d'un salarié de cette entreprise (salaire + cotisations sociales) par mois.
Si on appelle y_1 la fonction représentée sur ce graphique et x la production mensuelle en tonnes, déterminer $y_1 = f(x)$.

2°/ L'entreprise achète ses matières premières à un seul fournisseur qui lui consent des remises par tranche. Le graphique n° 2 représente les variations du coût d'achat total en fonction de la quantité produite x. Attention, le tourteau necessite une poids d'arachide 2 fois et demi supérieur au sien (évaporation de l'eau contenue dans le végétal).
Si on appelle Y_2 le coût d'achat total, déterminer la fonction $Y_2 = f(x)$;x étant toujours la production mensuelle en tonnes.
En déduire le coût d'achat unitaire $y_2 = f(x)$. Représenter graphiquement cette fonction sur l'intervalle $[0 - 1000[$.
Quels sont les pourcentages de remise par tranche ? Quel est le prix d'achat brut d'un kilogramme d'arachide ?

3°/ On appelle y_3 le coût de fabrication unitaire. Déterminer la fonction $y_3 = f(x)$ représentée sur le graphique n°3.

4°/ Le stockage des sacs de tourteaux se fait dans deux hangars spéciaux (conditions hygrométriques particulières), l'un d'une capacité de 400 tonnes coûtant 40 000 F par mois et l'autre d'une capacité de 1000 tonnes coûtant 50000 F par mois. (Le coût est indépendant de la quantité de matériel stocké dans le hangar).
Le graphique n°4 représente ce coût en fonction de la production. Déterminer le coût de stockage unitaire correspondant y_4.

5°/ Le graphique ci-contre représente le coût de production d'un sac de 25 Kg de tourteau pour une production mensuelle de 300 tonnes.
Construire un graphique similaire pour une production mensuelle de 900 tonnes. Que remarque-t-on ?
Déduire des questions 1, 2, 3 et 4 la fonction $y = f(x)$ sachant que $y = y_1 + y_2 + y_3 + y_4$.
Représenter point par point cette fonction. (On pourra utiliser un tableur, un grapheur ou une calculette programmable)



COÛT DE PRODUCTION
D'UN SAC DE 25 Kg
(pour une production de 300 t)

MATHS GENERALES ORIENTEES TERTIAIRE

Logarithmes Exponentielles

BAC PRO
IREM DE LORRAINE

LOG FONCTION LOGARITHME DECIMAL

UTILISATION DE LA CALCULATRICE

Utiliser la touche $\boxed{log}$ de votre calculette pour compléter le tableau:

x	1	10	100	1000	0,1	0,01	0,001	3	-4
logx									
10^{logx}									

PROPRIETES

Elles découlent de celles des puissances:

$\log(ab) = \log a + \log b \qquad \log a^n = n\log a$

$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$

DEFINITION

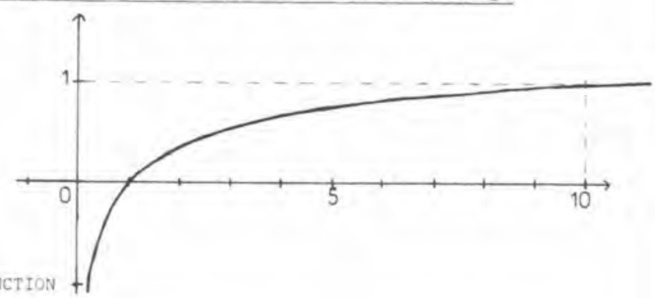
Tout nombre réel positif peut se mettre sous la forme d'une puissance de 10:

$x > 0 \quad x = 10^a$

L'exposant a est appelé logarithme décimal du nombre x:

$x > 0 \quad \boxed{\log x = \log 10^a = a}$

REPRESENTATION GRAPHIQUE DE LA FONCTION $x \longrightarrow \log x$



LN FONCTION LOGARITHME NEPERIEN

UTILISATION DE LA CALCULATRICE

Utilisez la touche $\boxed{ln}$ de votre calculatrice pour compléter le tableau

x	1	2	e	7,5	10	500
lnx						
e^{lnx}						

Prendre e = 2,71828

PROPRIETES

Ce sont les mêmes que celles du logarithme décimal.

De plus:

$$\ln x = \frac{\log x}{\log e}$$

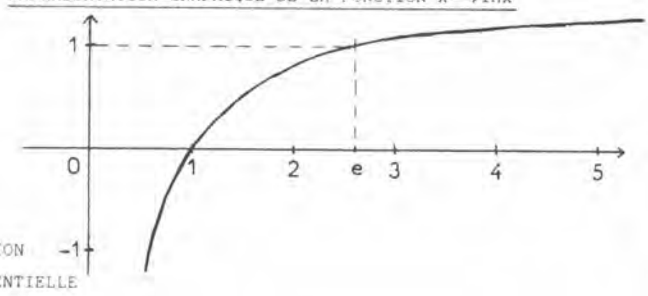
DEFINITION

Comme le logarithme décimal a pour base 10, le logarithme népérien a pour base le nombre e = 2,71828...

$x > 0 \quad \boxed{\ln x = \ln e^b = b}$

Les valeurs logx et lnx sont proportionnelles, le coefficient de proportionnalité étant de 2,3...

REPRESENTATION GRAPHIQUE DE LA FONCTION $x \longrightarrow \ln x$



E FONCTION EXPONENTIELLE

UTILISATION DE LA CALCULATRICE

Utilisez la touche $\boxed{e^x}$ de votre calculatrice pour compléter le tableau

x	-1	0	1	5	10	50
e^x						

PROPRIETES

Ce sont les mêmes que celles des puissances:

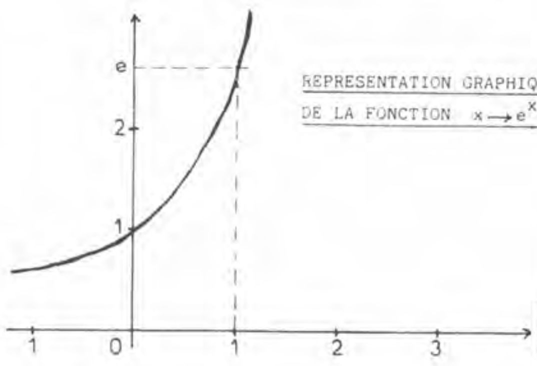
$e^0 = 1 \qquad e^{x+y} = e^x.e^y \qquad (e^x)^y = e^{xy}$

$e^1 = e \qquad e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$

DEFINITION

La fonction exponentielle est la réciproque de la fonction logarithme népérien:

$x \in R \quad \boxed{y = e^x \iff \ln y = x}$



REPRESENTATION GRAPHIQUE DE LA FONCTION $x \longrightarrow e^x$

Divers

CALCULS

A l'aide de la calculatrice, calculer:

$7^{3,2}$; $7^{0,35}$; $7^{-1,25}$; 7^{-6} ; $\log 8$; $\log 100$; $\log(-3)$; $\log 10^{6}$; $\log 10^{-5}$; $\ln 32,65$; $\ln 100$; $\ln(-5,2)$; $\ln e^{4}$

$\ln e^{-6}$; $\ln \frac{e}{2}$; $e^{4,2}$; e^{12} ; e^{-3} ; $e^{-2/3}$; $e^{\sqrt{7}}$

EQUATIONS

Résoudre les équations suivantes:

$\log x = 4$

$\log x = -2$

$\log x = 0,2$

$2\log x = 4,25$

$10^{x} = 30$

$3^{x} = 14,5$

$1,5^{x} = 6,25$

$(-7)^{x} = 13,2$

$4,5^{-x} = 12,4$

$\log(x + 2) = \log(2x - 5)$

$\ln(x - 6) + \ln(x + 1) = 0$

$2\ln(x + 2) - \ln(x + 5) = 0$

$\ln(x - 1) + \ln(x + 2) = \ln(4x^{2} + 3x - 7)$

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ \ln x + \ln y = 3\ln 2 \end{cases}$$

FONCTIONS

1°/ Etude de la fonction $f(x) = e^{2x}$:

Calculer sa dérivée. Etablir le tableau de variation.

Compléter le tableau ci contre et représenter graphiquement la fonction.

x	-2	-1	0	0,25	0,5	0,75	1	1,5
f(x)								

2°/ Etude de la fonction $f(x) = \ln(1 + x)$:

Calculer sa dérivée, établir le tableau de variation et représenter graphiquement la fonction.

DURAND

Mr Durand place un capital de 50 000 F au taux annuel de 8,5 % à intérêts composés. Il voudrait obtenir à la fin du placement une somme de 150 000 F. Au bout de combien de temps y parviendra-t-il ?

EN MUSIQUE

L'entreprise Musicolor désire fabriquer une chaine Hi Fi. Une étude de marché, conduite par les étudiants d'une école de Nancy, a montré que le prix de vente P et la quantité d'appareils q vendus devraient être liés par la relation:

$$P(q) = e^{\frac{3q+1}{q+2}}$$

P = prix en Kilofrancs

q = quantité (x 10^{4})

1°/ Etudier et représenter graphiquement cette fonction pour $q \in [1 ; 6]$.

2°/ L'entreprise a calculé que le prix de revient unitaire Pu d'un appareil était lié à la quantité q ($q \in [1 ; 6]$) par la relation:

$$Pu = -0,75\ q + 5$$

Pu en Kilofrancs

q quantité (x 10^{4})

A partir de quelle quantité q la fabrication de la chaine Hi Fi sera-t-elle bénéficiaire ? (solution graphique)

PHOTOCOPIES

Le lycée Jean Monnet a acquis une photocopieuse pour la somme de 120 000 francs. L'appareil se déprécie de 12 % par an .

1°/ Au bout de combien de temps la machine vaudra-t-elle 50 000 F ? (arrondir au nombre d'années le plus proche)

2°/ A ce moment là, la gestionnaire de l'établissement envisage l'achat d'une nouvelle photocopieuse.
Sachant que le fabriquant reprendra la machine à sa valeur (50 000 F), que l'augmentation des prix est estimée à 4,5 % par an et qu'il faudra débourser 20 % de plus que si l'on veut une machine plus performante, quelle somme faudra-t-il alors investir ?

3°/ Pendant combien d'années faudrait-il placer un capital de 100 000 F à intérêts composés de 4,5 % pour obtenir cette somme ?

SECHERESSE

Un jardinier arrose ses salades (des laitues) avec un seau d'une contenance de 10 litres. La distance entre le robinet et le potager est de 100 mètres. Malheureusement, son seau fuit et perd en moyenne 1 % de son contenu à chaque mètre parcouru. Sachant que le jardinier marche à la vitesse constante de 3,6 Km/h :

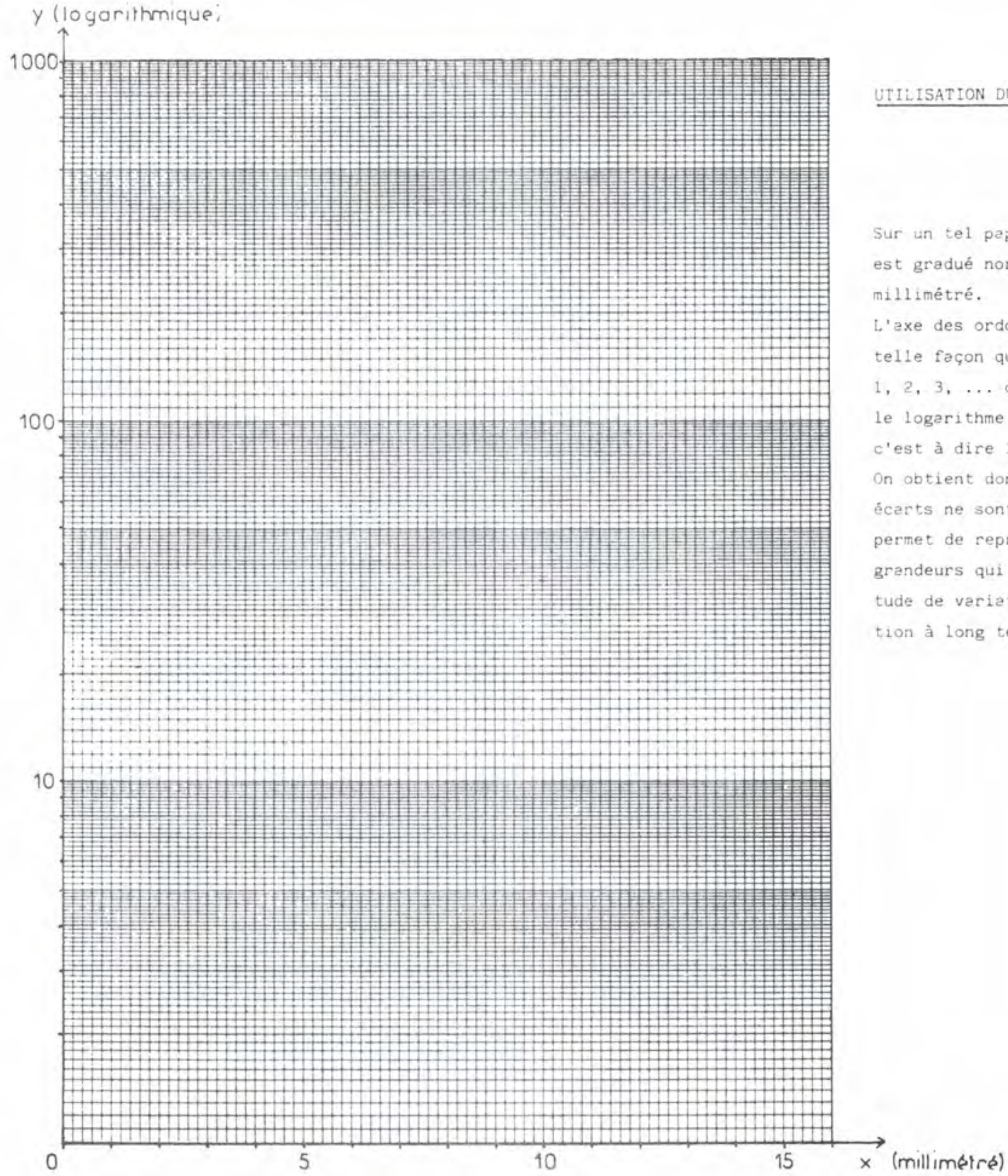
1°/ Exprimer le volume d'eau V contenu dans le seau en fonction de la distance x parcourue par le jardinier.

2°/ Au bout de combien de mètres le seau sera-t-il à moitié vide ?

3°/ A quelle distance sera-t-il entièrement vide ? (Commentez votre réponse et présentez un graphique sommaire)

4°/ En marchant deux fois plus vite, il économise de l'eau en diminuant de moitié la fuite (autrement dit, le taux de fuite est inversement proportionnel à la vitesse du jardinier).
A quelle vitesse devrait-il marcher pour arriver à son potager avec un seau plein aux 2/3 ?

Papier Semi-logarithmique



UTILISATION DU PAPIER SEMI-LOGARITHMIQUE

Sur un tel papier, l'axe des abscisses est gradué normalement, comme du papier millimétré.
L'axe des ordonnées Oy est gradué de telle façon qu'à la place des nombres 1, 2, 3, ... on inscrive le nombre dont le logarithme décimal est 1, 2, 3, ... c'est à dire 10, 100, 1000, ...
On obtient donc une graduation où les écarts ne sont pas constants. Cela permet de représenter commodément des grandeurs qui ont une importante amplitude de variation (population, production à long terme,...)

BOURSES

Le tableau ci-dessous présente une statistique du Ministère de l'Education Nationale donnant l'évolution du nombre d'étudiants boursiers (Enseignement supérieur).

Années scolaires	1960-1961	1970-1971	1980-1981	1985-1986	1986-1987	1987-1988	1988-1989	1989-1990
Nb de boursiers	38 874	118 176	128 353	175 288	187 264	204 256	215 451	245 513

Représenter graphiquement cette évolution en utilisant une échelle semi-logarithmique.

BOUM!

La population du Nigéria était d'environ 82 000 000 habitants en 1982.
L'accroissement de la population annuel étant de 34,5 % , représenter sur un graphique l'évolution du nombre d'habitants jusqu'en 2100 si le rythme actuel se maintient.
(Utiliser du papier semi-logarithmique)