FRAGMENTS POUR UNE INITIATION A L'HISTOIRE DES SCIENCES

© Edité et imprimé par l'**Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques** - (Université de NANCY I - Faculté des Sciences) - B.P. 239 - 54506 VANDOEUVRE-les-NANCY CEDEX
Dépôt légal : 3ème trimestre 1993
n° de la publication : 2-85406-138-1
Responsable de la publication : Le Directeur de l'IREM, Michel BONN

Avant-Propos

La mission académique pour la formation des personnels de l'Education Nationale (M.A.F.P.E.N.) de l'Académie de NANCY-METZ a permis de programmer deux stages sur "l'Initiation à l'Histoire des Sciences" et plus particulièrement sur l'histoire des mathématiques pendant les années 1991/92 et 1992/93.

Ce stage a touché plus de 50 collègues. Il y eut une dizaine de conférences de trois heures partagées en deux parties : une première partie exposé-débat et une deuxième partie travaux pratiques.

Nous avons cherché à avoir des conférenciers chercheurs bien au fait des dernières évolutions dans leurs domaines respectifs.

Nous avons été comblés, tous ceux à qui nous avons fait appel ont répondu à notre invitation, ils n'ont pas craint le déplacement PARIS-NANCY ou STRASBOURG-NANCY dans la journée.

Les collègues qui ont assisté à ces conférences avaient tous exprimé le désir de reconduire cette formule pour les années à venir.

L'équipe qui a mis au point ce stage a estimé utile de publier les compte rendus de ces conférences afin d'en faire profiter d'autres collègues. Malheureusement, faute de temps, nous n'avons pu venir à bout de ce travail. Nous nous excusons auprès des intervenants dont le résumé des conférences ne figurent pas dans cette brochure.

Suite à ces stages, quelques collègues ont introduit dans leur enseignement une initiation à l'histoire des mathématiques. Vous trouverez un exemple d'un travail rendu par un groupe d'élèves de Première A_1.

L'équipe qui a travaillé pour réaliser cette modeste brochure remercie l'IREM de NANCY-METZ de lui avoir permis sa réalisation matérielle et tout particulièrement la secrétaire qui a eu la difficile tâche de déchiffrer les hiéroglyphes de certains manuscrits.

L'équipe remercie aussi pour l'aide précieuse qu'elle nous a apportée, notre collègue, Lucie AULAGNE, qui a permis de finir la frappe de cette brochure juste à temps afin qu'elle soit imprimée avant le 19 juillet 1993.

L'équipe :

Nicole KARST Etienne MOREL Mohamed JENDOUBI

Sommaire

1 - Mathématiques mésopotamiennes par Jim Ritter p. 1

2 - Les éléments d'Euclide : occident-orient du IIIème siècle avant J.C. au XIIIème siècle après J.C. d'après l'intervention de Tony Lévy p. 24

3 - Introduction à l'histoire des mathématiques indiennes d'après l'intervention de Guy Mazars p. 31

4 - Histoire des sciences en Chine avec une référence particulière à l'histoire des mathématiques par Karine Chemla p. 40

5 - Mathématiques japonaises d'après l'intervention de Catherine Horiuchi p. 56

6 - Le programme d'Erlangen d'après l'intervention de Philippe Nabonnand p. 62

7 - Exposé d'élèves dans une classe de TA1 du Lycée Alfred Mézières à Longwy p. 66

INTRODUCTION

Nous allons ici décrire le commencement des mathématiques en Mésopotamie, plus précisément dans la période qui va de 3200 à 1600 avant notre ère. Comme nous le verrons, cette période est le siège d'évolutions profondes tout autant de la société et de l'écriture que des mathématiques elles-mêmes et ces évolutions sont étroitement liées. Bien sûr le développement ne s'arrête pas au milieu du deuxième millénaire — par exemple toute l'astronomie mathématique est un produit du premier millénaire ! — mais cette époque correspond à la pleine maturation des outils et des techniques les plus caractéristiques des mathématiques mésopotamiennes.

A notre programme figurent en particulier l'élaboration lente et complexe du concept même de nombre, et la mise en place d'un système scolaire à forte composante mathématique, dont les problèmes et les solutions proposées nous semblent parfois très proches. J'aborderai aussi à la fin la difficile question de l'interprétation des textes paléobabyloniens et essayerai de justifier leur organisation très poussée sans pourtant recourir à une prétendue « algèbre babylonienne ».

Commençons donc par une brève présentation de la Mésopotamie.

I. LES COMMENCEMENTS (avant 2700)

La Mésopotamie (qui recouvre essentiellement l'actuel Iraq) et l'Élam (correspondant à l'Iran de notre époque) forment deux plateaux séparés par des montagnes. Le premier est bordé à l'Ouest par le désert syro-arabien, au Nord par les montagnes et plateaux d'Anatolie et au Sud par le Golfe arabo-persique. Les régions montagneuses constituent les zones de premier peuplement avant que la révolution néolithique du VII^{e} millénaire avec son invention de l'agriculture ne voie une occupation des plateaux et la formation de villages. Mais il faut attendre quelques trois millénaires, ponctués d'avances cruciales, sur le plan technologique (tour de potier, moule à briques, fusion du cuivre et production de bronze) et social (croissance démographique, développement d'une société de classes), pour assister à la formation de véritables villes par amalgame de villages et drainage de la population rurale. C'est ainsi qu'Uruk en Mésopotamie et Suse en Élam deviennent les centres les plus importants pendant le IV^{e} millénaire. Cette éclosion urbaine est essentielle pour nous car c'est dans ce cadre que vont naître écriture et mathématiques.

L'invention de l'écriture

Les fouilles archéologiques faites à Suse depuis les années soixante et leur interprétation ultérieure ont permis de suivre presque étape par étape l'invention et développement d'un système d'écriture. La stratigraphie du site, mieux préservée qu'à Uruk, nous permet d'avoir un aperçu sur les premières étapes du processus en Élam, d'ailleurs cohérent avec les vestiges plus éparpillés trouvés à Uruk[1].

Au tout début, pendant le quatrième millénaire, on trouve couramment des bulles creuses d'argile contenant de petits jetons de même matière, de taille et de forme variées; la surface des bulles porte des impressions faites par des sceaux-cylindres. L'interprétation généralement admise est que ces bulles sont des registres de comptabilité primitifs. La forme et la taille des jetons à l'intérieur représentent la nature des objets comptés et/ou les unités employées (moutons, mesures de blé, huile, etc.); le nombre de jetons de chaque sorte indique le nombre d'objets comptés; la marque du sceau indique le propriétaire ou les parties contractantes.

Dans un deuxième temps, sans doute pour éviter de casser la bulle avant la fin du contrat pour une vérification, les jetons sont appuyés dans l'argile fraîche de la bulle avant d'être placés à l'intérieur, laissant donc à l'extérieur des encoches caractéristiques de leur forme et taille.

L'étape suivante voit la disparition des jetons concrets dont seules les encoches subsistent à l'extérieur de la bulle : celle-ci s'aplatit puisqu'elle n'a plus à contenir des jetons.

Un pas nouveau est franchi lorsque des marques de calame (roseau) figurent à la surface de la bulle aplatie, c'est-à-dire de la tablette, les encoches des jetons : il y a donc apparition d'un outil spécial, unique, qui permet de représenter les signes autrefois imprimés par des objets différenciés.

Jusqu'alors la répétition du même signe indiquait le nombre d'objets concernés : dans la dernière étape, l'enfoncement d'une extrémité du calame sert à indiquer la quantité, un dessin tracé par le même instrument complète l'information en indiquant la nature de l'objet compté. Il y a donc une première séparation entre signe quantitatif et signe qualitatif. Attention toutefois : à cet~~te~~ stade, les signes quantitatifs ne sont pas des nombres abstraits comme nous l'entendons car leur aspect et valeur dépendent des systèmes métrologiques en question. Mais il s'agit d'un pas important vers la libération du nombre de sa gangue matérielle.

Étape 1 — Bulle + jetons —	
Étape 2 — Bulle + jetons + encoches de jetons	>3000 ?
Étape 3 — Bulle aplatie + encoches de jeton	3000 ?
Étape 4 — Tablettes + marques de calame	2900 ?
Étape 5 — Tablettes + marques de calame (nombres + logogrammes)	2800 ?

Ce système d'écriture, appelé par les spécialistes protoélamite, s'étendit à tout l'Élam au cours du IIIe millénaire pour être remplacé finalement par l'écriture cunéiforme mésopotamienne pour des

[1] Je suis dans ses grandes lignes la reconstitution proposée par SCHMANDT-BESSERAT **1977** et **1978**. Cependant certaines de ses affirmations sur l'ancienneté et l'universalité de ce système me semblent grossièrement exagérées. Le meilleur article de synthèse récent sur la Mésopotamie est NISSEN **1985** (en anglais) et NISSEN, DAMEROW & ENGLUND **1990** (en allemand); pour Suse on peut consulter LE BRUN & VALLAT **1978**.

raisons toujours discutées mais qui inclut l'invasion et la domination militaire d'une partie du pays par leurs voisins de l'Ouest.

Cette écriture cunéiforme est sans doute elle-même le résultat du même type de processus que celui décrit plus haut, avec un décalage dans le temps : la dernière étape en a eu lieu vers 3200 à Uruk. L'écriture, dite protosumérienne, atteinte alors, se retrouve dans plusieurs sites de Mésopotamie (Jemdet Naṣr, Ur) et évolue vers l'écriture cunéiforme proprement dite, sur les caractéristiques de laquelle nous reviendrons un peu plus tard. Retenons simplement que dans leurs premiers pas, aussi bien en Élam qu'en Mésopotamie, les écritures apparaissent donc comme des aides-mémoire servant à garder trace de nombres et d'objets utilisés dans des transactions commerciales et **non pas,** en dépit de leurs noms, comme des transcriptions des langues parlées dans les pays correspondants, l'élamite et le sumérien. Retenons aussi que mathématiques et écritures sont au début étroitement associées.

Étudions de plus près le contenu de ces premiers textes de comptabilité. Comme nous l'avons déjà signalé, les valeurs d'un signe numérique sont toujours liées au système métrologique particulier qu'on considère. Heureusement, l'addition des objets comptés et la présence des totaux sur les tablettes permettent souvent de déterminer au moins les valeurs relatives des signes. Voici un exemple tiré d'un compte de troupeau de moutons :

Béliers : ● ● ●
Brebis : ● ● ●
Moutons (total) : ▷

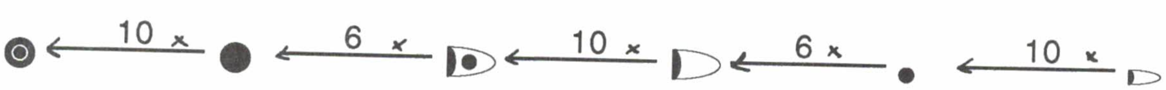
indique que 1 ▷ vaut 6 ●. De même, une autre tablette dans la même série contient le calcul suivant :

Agneaux : ▷ ▷ ▷ ▷ ▷
Agnelles : ▷ ▷ ▷ ▷ ▷
Petits pour l'année : ●

qui montre que 1 ● vaut 10 ▷.

Plusieurs systèmes de relations cohabitent selon le type d'objets comptés. Le système dit S (Sexagésimal) que nous venons de rencontrer est utilisé pour le comptage d'objets discrets et les mesures linéaires; les signes qui le constituent avec les relations entre unités successives peuvent être représentés par le diagramme ci-dessous :

Système S (Sexagésimal — mesures de comptage, longueurs)



Voici d'autres exemples :

Système G (GÁN — mesures de surface)

Système Š (ŠE — mesures de capacité)

Un examen de ces systèmes et d'autres encore utilisés à cette époque montrent qu'en dépit de la richesse des systèmes le répertoire des signes est petits, à cause des restrictions imposées par les instruments utilisés. Des calames de deux tailles fournissent seulement quatre marques différentes : un petit et un grand cercle (extrémité ronde du calame) et une petite et une grande encoche (extrémité en biais). Ces marques sont utilisées soit séparément (4 signes), soit combinées dans la forme d'un cercle plus une encoche de la même taille (2 signes) ou de deux cercles de taille différentes (1 signe), ce qui fournit en tout sept signes. Même si les mêmes signes apparaissent dans tous les systèmes métrologiques, leurs valeurs, tant absolues que relatives, varient selon le système, comme on le voit d'ailleurs sur les diagrammes.

III. ÉPOQUE PROTODYNASTIQUE (2700–2350)

A peu près autour de 2700 les cités-états constituant le Sumer antique ont atteint un stade de taille et de richesse tel que l'écriture, jusque là confinée à quelques sites, devient commune à tout le sud de la Mésopotamie, atteignant même le nord « barbare ». L'implosion des campagnes dont nous avons parlé pour la période précédente fait maintenant place à une croissance régulière des vastes centres urbains, ainsi qu'à une augmentation du nombre et de la taille des villages environnants[2].

Quelques rares documents d'origine scolaire contenant des listes de signes et de vocabulaire coexistaient dès le début avec les textes de comptabilité : leur nombre s'accroît et leur contenu s'enrichit au cours de la période protodynastique. En particulier c'est durant cette période que nous trouvons les premiers textes mathématiques reconnaissables qui sont destinés à enseigner au jeune scribe l'art du calcul. Dès leur apparition ces textes sont de deux sortes distinctes : des **tables** et des textes de **procédure** (textes de problèmes). Ces derniers consistent, à cette période, en problèmes de calcul proposés aux étudiants, normalement accompagnés de la réponse donnée à la fin. Voici l'un

[2] Pour une histoire de cette période voir HUOT **1989**.

d'entre eux[3] (pour abréger, nous indiquons dorénavant par un chiffre arabe le nombre de fois où un signe est répété) :

> Orge, (un) grenier (***guru***$_7$);
> 7 ***sila***$_3$ [environ 7 litres]
> un homme reçoit.
> Ses hommes :
>
> 
>
> [i. e. 164 571 hommes]
> Orge, 3 ***sila***$_3$ restent.

TSŠ 50

Le problème est posé dans la partie supérieure de la tablette et la réponse de l'élève dans la partie inférieure — notons que les nombres utilisés sont identiques à ceux en usage pendant la période précédente pour compter les objets concrets (Système S).

Malheureusement nous ne disposons pas des textes dans lesquels serait donnée la procédure de calcul effective suivie par l'élève, contrairement à ce qui sera le cas des textes ultérieurs, au II^e millénaire. Nous sommes donc incapables de dire exactement comment un tel problème était résolu, sauf par référence (qui peut être trompeuse) aux problèmes similaires dans les textes plus récents. Bien qu'il soit clair pour nous que ce problème concerne la division, on doit garder à l'esprit que l'arsenal des méthodes mésopotamiennes ne contient aucune opération de cette sorte[4] : la procédure pourrait être la détermination de l'inverse d'un ***guru***$_7$ de grain et sa multiplication par ***sila***$_3$.

Plus important peut-être d'un point de vue pédagogique est la nature du problème posé; une réponse de plus de cent mille hommes n'est clairement pas réaliste pour l'époque. Il semble s'agir surtout de développer la pratique des techniques calculatoires; s'esquisse déjà la production de problèmes ayant gagné une autonomie relative vis-à-vis de la demande économique.

Aucun texte mathématique mésopotamien, quel que soit son époque, ne donne les détails des calculs effectués dans sa solution. L'opération de multiplication ou la recherche d'un inverse seront plus tard parfois explicitement requises dans le texte; la méthode pour effectuer l'opération dans le cas étudié n'est jamais spécifiée dans le texte. Ceci parce que le résultat de ces opérations était obtenu à partir de la seconde catégorie de textes mathématiques, les tables.

Celles-ci offrent un arrangement ordonné systématiquement de signes numériques et étaient utilisées pour résoudre les calculs nécessaires au cours des algorithmes dans les textes de problèmes. Leur forme est clairement une extension directe des listes lexicales. Voici un exemple d'une série de

[3] Copie : JESTIN **1937**, n° 50. Voir aussi HØYRUP **1982**. Attention : le 3 du signe ***sila***$_3$ par exemple n'a aucune valeur numérique; il ne s'agit que d'une convention adoptée par les Assyriologues pour différencier des signes homophones.

[4] Pour une discussion des opérations disponibles en Mésopotamie voir RITTER **1989**.

longueurs et de largeurs de champs carrés (en unités du système S) et des aires correspondantes, écrites directement dans les mesures de surface (en unités du système GÁN)[5]. Comme toute table, celle-ci peut être utilisée dans les deux sens, soit pour éviter de refaire à chaque fois la multiplication suivie de la conversion d'unités, soit pour déterminer le côté d'un champ carré dont on connaît la surface.

1 ▶ ***nindan*** longueur	1 ▶ [carré]	[ ]
9 ▷	9 ▷ carré	2 ● 4 ✲ 2 •
8 ▷	8 ▷ carré	2 ● 8 •
7 ▷	7 ▷ carré	[1 ●] 3 ✲ 8 •
6 ▷	[6 ▷ carré]	1 ● 1 ✲ 2 •
5 ▷	5 ▷ carré	5 ✲
4 ▷	4 ▷ carré	3 ✲ 2 •
3 ▷	3 ▷ carré	1 ✲ 8 •
2 ▷	2 ▷ carré	8 •
1 ▷	1 ▷ carré	2 •
5 •	5 • carré	1 • 1 ▸ 1 ▹
4 •	4 • carré	2 ▸ 3 ▹
3 •	3 • carré	1 ▸ 3 ▹
2 •	2 • carré	[ ]
1 •	[1 • carré]	[ ]
5 ▹	[5 ▹ carré]	[ ]
.... (cassé)		

VAT 12593

Cette table, lorsque elle était complète, s'étendait de 1 ▶ à 1 ▹, c'est-à-dire, d'environ 300 mètres à 50 centimètres. Ici le signe ✲ est un développement de l'ancien ◉, le cercle extérieur étant remplacé par quatre traits croisés « cunéiformes ». C'est un simple exemple de la « cunéiformisation » croissante de l'écriture en général — y inclus les signes numériques — typique de cette période. De plus en plus, les lignes incurvées gravées de la veille forme semi-pictographique de l'écriture, difficiles à tracer dans l'argile, sont remplacées par les traits plus rapides et plus simples taillés par le calame.

Un document contemporain témoigne d'une étape supplémentaire dans cette discrétisation de l'écriture; il s'agit d'une table, elle aussi de longueurs et d'aires[6]. On y trouve une suite de cases couplées par paires dans laquelle la première de chaque paire contient une mesure linéaire indiquant le

[5] Photographie : NISSEN, DAMEROW & ENGLUND **1990**, fig. 18m. L'ancienne copie, souvent reproduite, dans DEIMEL **1922–4**, vol. II, pl. 75, n° 82 est inexacte et doit être corrigée d'après la photo.
[6] Copie : LUCKENBILL **1930**, n° 70; traduction allemande et commentaire dans EDZARD **1969**.

côté d'un carré et la seconde la mesure de sa surface. Voici le commencement de cette tablette :

[1 ▷] ***kùš*** est le côté du carré.	[1] SA_{10} ***mana*** 1 • 5 ⟍ ***gín***
2 ▷ ***kùš*** est le côté du carré.	2 ⟍ ***gín*** moins 1 ▷ ***mana***
[3 ▷ ***kùš***] est le côté du carré.	[4 ⟍ ***gí***]***n*** moins ***igi***-4 ⟍
4 ▷ ***kùš*** est le côté du carré.	6! ⟍ ***gín*** 2 ◡ ***mana***
5 ▷ [***kùš***] est le côté du carré.	1 • ***gí***[***n***] 1/3 <1• > 5 ⟍
6 ▷ [***kùš***] est le côté du carré.	1 • [5 ⟍] ***gín***

OIP **14** 70

Plusieurs changements sont à l'œuvre ici. Au niveau de l'écriture, la « cunéiformisation » s'est développée. Le vieux signe des unités ▷ est conservé pour les mesures de longueur (colonne de gauche dans la transcription) mais est remplacé par le signe cunéiforme ⟍ dans une partie du système de mesures de surface pour marquer le nombre de ***gín*** (mais on notera le maintien du vieux • pour les dizaines de ***gín*** de même que le signe ◡ pour le nombre de ***mana***[7]).

Mais le changement le plus important est dans la même manière même de présenter l'information métrologique. Au lieu d'ensembles séparés de signes numériques pour chaque système métrologique, nous assistons ici à une certaine autonomisation des nombres : un ensemble standard de nombres (le choix en l'occurrence est celui du vieux système S) est couplé avec le nom de l'unité pour indiquer à quelles unités ces nombres sont attachés. Ceci nous rappelle évidemment le processus par lequel les signes numériques s'étaient détachés des signes qualitatifs des objets.

IV. AKKADE (2350–2200)

L'ultime vainqueur dans la bataille pour l'hégémonie parmi les cités-états combattantes ne fut aucune de celles qui semblaient favorisées au début. La victoire revint à cette fraction de la population qui parlait une langue sémitique — l'akkadien — et dont les traces précédentes ne consistent pour nous qu'en des noms de scribes dans quelques textes écrits en sumérien. Avec une nouvelle capitale, Akkade, et un nouveau nom — Šarrum-kīn, qui signifie « le roi est établi », a en effet peu de chances d'être son nom originel — l'homme que nous appelons maintenant Sargon fonda le premier véritable empire en Mésopotamie vers 2350. S'étendant à son apogée du golfe arabo-persique à la Syrie et au Liban, le modèle ainsi créé et son créateur devaient avoir un impact durable sur l'imagination mésopotamienne.

La nouvelle administration centralisée de l'empire sargonique introduisit deux innovations qui nous intéressent plus particulièrement : elles concernent l'écriture et la métrologie. Les deux sont

[7] Peut-être est-ce dû au fait que cette mesure est une adaption du système de poids aux petites unités du système de surface.

uniformisés sur toute l'étendue du territoire et les besoins croissants de gestion et de communication induisent une simplification rapide des signes utilisés pour améliorer la vitesse et la fiabilité de l'enregistrement.

Ces phénomènes peuvent être illustrés par le petit texte scolaire suivant[8] :

> 4 𒁹 3 𒁹 est la longueur.
> (La) largeur (est telle qu'il y ait) 1 𒀸 (comme) surface.
> Sa largeur
> est à trouver.

PUL 31

Les unités de longueur utilisées dans le texte — 𒁹 et 𒁹 remplaçant les anciens ▷ et ▷ — nous frappent par le niveau de cunéiformisation atteint. La complexité des systèmes d'unités demeure pourtant, et ce jusqu'à la fin de la civilisation mésopotamienne. Le système métrologique pour les surfaces surtout conserve sa pléthore d'unités comme en témoigne l'exercice scolaire suivant (problème + solution — fausse ! — de l'élève)[9] :

> 1 ◇ 5 𒁹 moins 1 𒁹 ***kùš-numun*** est le côté du carré.
> Sa surface : 2 ◇ + ***gal*** 2 ◈ 4 ⁑ 9 𒌋 5 𒀸 1 𒐋 ***aša₅*** 5 𒀸 𒈦 ***sar*** 1 𒁹 ***gín*** 𒑚 ŠA
> a été trouvée.

PUL 28

Comment comprendre ce texte ? La première ligne contient deux unités de longueur du même système, le ***nindan***, dont le nom n'est pas explicité séparément des signes numériques (pas plus que dans le texte précédent) et le ***kùš-numun*** qui en est un sous multiple et dont le nom est juxtaposé au signe numérique; cette ligne se lit donc ainsi : 1 ◇ 5 𒁹 (= 15 ***nindan***) moins 1 𒁹 ***kùš-numun*** .

La seconde ligne met en œuvre différentes unités du système de surface; là encore, certaines (***sar***, ***gín***, ŠA) sont marquées par leur nom, signe spécifique accolé à un signe purement numérique, d'autres ne sont pas dissociables du nombre représenté (attention : le mot ***gal*** n'est pas une unité mais marque la taille du chiffre précédent ! ◇ est le signe utilisé à l'époque akkadienne pour l'archaïque •, ◇ + ***gal*** représente un « grand » ◇, l'ancien ●). Les deux groupes sont séparés par le mot ***aša₅*** (lit. surface). On notera aussi dans ce texte des signes pour des « fractions », 𒈦 (1/2) et 𒑚 (2/3)[10].

Ainsi apparaissent dans ce court texte huit unités différentes, chacune avec sa manière particulière d'écrire les nombres. Là encore aucune méthode de solution n'est donnée et l'on peut que

[8] LIMET **1973**, n° 39: pl. X et p. 67. Cf. POWELL **1975**.

[9] LIMET **1973**, n° 37: pl. IX et p. 65. Cf. WHITING **1983**, p. 61*sqq*.

[10] Pour les fractions dans les textes mésopotamiens voir BENOIT, CHEMLA & RITTER **1991**.

deviner les détails de la multiplication effectuée.

Nous avons toutefois des informations supplémentaires, grâce à une autre tablette[11] :

> 2 ◈ 8 ◇ moins 1 𒁹 ***šu-dù-a*** est le côté du carré.
> (Assigné à) Meluḫḫa.
> 1 ◇ 5 𒌋 moins 1 𒁹 ***kùš-numun*** est le côté du carré.
> (Assigné à) Ur-Ištaran.

A 5446

Nous reconnaissons le deuxième problème, celui assigné à l'élève Ur-Ištaran, comme celui qui nous intéresse. Il semble bien que nous avons ici un exemple (le seul) d'une tablette de maître associée à une réponse d'élève.

VI. UR III (2200–2000)

L'empire sargonique s'écroule après seulement une centaine d'années, en partie sous les effets de l'invasion des Gutiens venant de l'est. Mais cette occupation dure peu de temps, plusieurs cités-états (Lagaš, Uruk, …) réussissant à reconquérir leur indépendance. Le combat contre les Gutiens et la résurgence des guerres intestines occupèrent en priorité la classe dirigeante de ces états. Sous la direction d'Ur-Nammu, la cité d'Ur reconquit une grande partie de la Mésopotamie vers 2100 et un nouvel empire centralisé fut établi.

Contrairement à la période troublée qui précède, l'empire dit d'Ur III nous a légué une énorme quantité de tablettes, plusieurs centaines de milliers, dont une petite fraction seulement a été publiée. Parmi elles une écrasante majorité est formée de textes de nature économique (comptes, textes d'administration). Ce n'est que récemment qu'un petit nombre de textes scolaires, surtout des compositions littéraires, a été édité. La presque totalité des textes est écrite en sumérien, qui est déjà une langue morte (elle joue un rôle analogue à celui du latin pendant l'époque médiévale en Europe). Quant aux textes mathématiques, aucun texte de problèmes n'a encore été identifié. Cette circonstance est particulièrement malheureuse car nous avons un début de preuve (provenant d'un texte économique) pour croire que durant au moins la période d'Ur III les calculs mathématiques étaient faits dans un système sexagésimal de position[12].

Le texte en question est une tablette de comptabilité pour la réception d'argent. Seules les cinq premières lignes nous intéressent ici :

---

[11] WHITING **1983**, p. 65.

[12] Cette analyse est due à POWELL **1976**.

1	1𒌋4𒁹	5𒌋4𒁹	
2	2𒌋9𒁹	5𒌋6𒁹	5𒌋
3	1𒌋7𒁹	4𒌋3𒁹	4𒌋
4	3𒌋	5𒌋3𒁹	2𒌋
5	Total : 1 1/2 ***mana*** 3 1/2 ***gín*** moins 7 ***še*** d'argent.		

YOS **4** 293

Ici l'évolution des signes numériques du vieux Système S est complète. Il n'en reste que deux — 𒌋 (l'ancien ● et •) et 𒁹 (autrefois ▷ et ▻) — le premier valant 10 fois le second et la valeur « absolue » de chacun dépendant de sa position dans le nombre. Ainsi, la seconde ligne est composée de trois « chiffres », vingt neuf, cinquante six, et cinquante; leur juxtaposition signifie donc 29 de l'unité la plus grande plus 56 de l'unité intermédiaire plus 50 de l'unité la plus petite.

Pour comprendre la signification de ce petit texte, nous avons besoin du diagramme des mesures de poids durant la période d'Ur III :

mana ——60—— ***gín*** ——180—— ***še***

Si nous interprétons les entrées de ligne 1 à 4 comme étant écrites en notation sexagésimale de position, leur somme donne 1 33 27 50, c'est-à-dire $(1 \times 60^{n}) + (33 \times 60^{n-1}) + (27 \times 60^{n-2}) + (50 \times 60^{n-3})$. Sans informations supplémentaires, il n'est pas possible de déterminer la valeur de *n* dans cette expression et donc d'obtenir sa valeur « absolue », autrement dit, de savoir où placer la « virgule » (l'usage en assyriologie est en fait d'utiliser un point virgule pour séparer la partie entière de la partie sexagésimale).

Ce que nous pouvons faire est de récrire le poids total d'argent donné ligne 5 — 1 1/2 ***mana*** 3 1/2 ***gín*** moins 7 ***še*** — dans une notation sexagésimale de position, en adoptant provisoirement le ***gín*** comme unité de base. Puisque, par le diagramme ci-dessus :

1 ***mana*** = 60 ***gín*** = 1.00 ***gín***,
1 ***še*** = 1/(3 x 60) ***gín*** = 1/3 x 1/60 ***gín*** = 1/3 x 0;01 ***gín*** = 0;00.20 ***gín***,

la conversion de la ligne 5 s'ensuit :

1 1/2 ***mana*** = 1 1/2 x 1.00 ***gín*** = 1.30 ***gín***
3 1/2 ***gín*** = 3 1/2 x 1 ***gín*** = 3;30 ***gín***
7 ***še*** = 7 x 0;00.20 ***gín*** = 0;02.20 ***gín***.

La somme des deux premières équations moins la troisième fournit un résultat 1.33;30 – 0;02.20 = 1.33;27.40. Celui-ci coïncide presque avec le calcul fait plus haut. La différence — 0;00.10 (0,003%) — peut être expliquée par le fait que le ***še*** étant la plus petite unité de poids disponible, la réponse exacte — 1 1/2 ***mana*** 3 1/2 ***gín*** moins 6 1/2 ***še*** — ne pourrait être exprimée sans fraction et a donc été probablement arrondie. Nous avons donc une interprétation immédiate de cette portion de tablette : le poids total d'argent indiqué dans les lignes 1 à 4, écrite en base soixante, avec une notation de position, a été additionné et traduit dans les unités métrologiques conventionnelle, ce qui est inscrit ligne 5.

Le problème de la valeur de *n* est ainsi résolu, au moins partiellement. Ou bien l'unité utilisée est le ***gín***, $n = 2$ et le point virgule suit le 3 ou bien l'unité est le ***mana*** et, avec $n = 1$, le même calcul montre que le point virgule suit le 1. Seul le ***še*** comme unité de base est exclu, comme on le voit à partir du diagramme.

Cette appellation de « système sexagésimal de position » est peut-être un peu déconcertant pour le lecteur ou la lectrice moderne. Nous avons l'habitude, dans notre système décimal de position, d'utiliser un symbole unique pour chacun des 10 chiffres. Les Mésopotamiens, ayant aplati la distinction de taille qui distinguait autrefois les traits verticaux du Système S les uns des autres, ont utilisé les 𒌋 (avec valeur 10) et les 𒁹 (avec valeur 1) pour composer les 59 (il n'y a pas de zéro) « chiffres » nécessaires pour un système sexagésimal.

Nous ne manquons pas non plus de tables à cette période; nous avons même les premiers représentants d'une classe importante de tables, celle des **inverses**. Voici une partie d'un de ces textes[13] :

4 𒌋 2 𒁹	inverse	aucun
4 𒌋 3 𒁹	inverse	aucun
4 𒌋 4 𒁹	inverse	aucun
4 𒌋 5 𒁹	inverse	1 𒁹 2 𒌋
4 𒌋 6 𒁹	inverse	aucun
5 𒌋 moins 3 𒁹	inverse	aucun
5 𒌋 moins 2 𒁹	inverse	1 𒁹 1 𒌋 5 𒁹
5 𒌋 moins 1 𒁹	inverse	aucun
5 𒌋	inverse	1 𒁹 1 𒌋 2 𒁹

Ist. T 7375

Les entrées à gauche de la tablette, écrites dans un système sexagésimal de position, vont de 2 𒁹 à 1 𒁹, c'est-à-dire de deux à soixante. Dans la dernière colonne figure soit un nombre, l'inverse correspondant, soit le mot ***nu*** (négation en sumérien) qui indique qu'il n'y a pas d'inverse, c'est-à-dire pas d'inverse exprimable sous forme sexagésimale finie. Dans les tables d'inverses plus tardives,

[13] DELAPORTE **1912**, n° 7375, r. IV:1–9. De Girsu (Tello).

du IIe et Ier millénaire, les nombres sans inverse ne figurent plus.

L'existence d'une telle table implique probablement que la méthode classique de division babylonienne, la multiplication par l'inverse du diviseur, est déjà en place dès la période Ur III. Comme nous avons déjà eu des témoignages pour l'existence de l'addition, de la soustraction, de la multiplication et de l'extraction de racines (au moins carrées), il est clair que la panoplie complète des techniques arithmétiques mésopotamiennes était disponible à cette époque.

D'un autre point de vue, peut-être plus important, nos textes d'Ur III révèlent une différence majeure avec les textes précédents, qui les rapprochent des textes mathématiques qui seront utilisés en Mésopotamie jusqu'à la fin de cette civilisation. Les nombres sexagésimaux utilisés dans ces textes ne sont plus liés à un système métrologique. Les signes cunéiformes utilisés sont ceux du vieux Système S, mais ils sont libérés de leur attache exclusive à ce système : l'indépendance du nombre et de la mesure est complète.

VI. ÉPOQUE PALÉOBABYLONIENNE (2000–1600)

Contrairement à ce que l'on dit souvent, l'histoire ne se répète pas : c'est d'Ouest, cette fois, que viennent les envahisseurs amorrites ! Après l'écroulement de l'empire d'Ur, les rivalités de cités-états et l'installation dans la plupart de dynasties d'origine amorrite qui adoptent le langage et les coutumes locales, émerge une cité d'importance moyenne, jusque là peu connue, Babylone. Elle atteindra l'apogée de sa puissance au début du dix-huitième siècle, sous le gouvernement de Ḫammurapi. Une fois de plus, celui-ci bénéficie d'un royaume étendu, fortement centralisé, avec de nombreux fonctionnaires spécialisés formés par un système scolaire bien organisé.

Nous avons ainsi hérité d'une importante quantité de textes scolaires, en particulier mathématiques, qui témoignent de la maturation des connaissances progressivement apparues au cours des époques précédentes et permettent de fixer les traits caractéristiques des mathématiques mésopotamiennes classiques. Les quatre opérations arithmétiques de base sont l'addition, la soustraction, la multiplication et l'inversion, effectuées par consultation de tables qui forment l'un des deux grands groupes de textes disponibles. L'autre est constituée de textes de procédure. Ceux-ci sont des problèmes suivis de leur solution donnée sous la forme d'un algorithme **rhétorique** (c'est-à-dire sans symbolisme autre que les chiffres) et **numérique** (c'est-à-dire avec des valeurs particulières). Leur structure particulière peut être également décelée dans des textes de certains autres domaines, dessinant ainsi les limites et les traits caractéristiques de ce que j'ai appelé ailleurs les « pratiques rationnelles » : les disciplines concernées sont la **médecine**, la **divination** et la **jurisprudence**[14]. Nous voyons au passage à quel point les catégories modernes (par exemple, celle de « science », qui recouvre à la fois pour nous des comportements sociaux, des formes écrites particulières, des relations à l'expérimentation codifiées) sont mal adaptées à l'étude de l'Antiquité.

[14] Voir, par exemple, BOTTÉRO **1987** et RITTER **1990**.

Des liaisons formelles et professionnelles entre mathématiques et certaines de ces disciplines ont aussi été mises en évidence dans le cas de l'Égypte (médecine et divination) et de l'Italie de la Renaissance (jurisprudence)[15].

Le point principal est de couvrir tout le domaine du possible par une **grille d'exemples typiques**, procédé qui permet à l'étudiant (et plus tard au scribe praticien) de placer dans ce cadre tout nouveau problème, et de le résoudre par comparaison avec des problèmes voisins. L'approche babylonienne de la généralisation n'était pas comme la nôtre de découvrir et d'énoncer une « règle » dans laquelle englober chaque cas, mais d'**interpoler** (par une méthode bien déterminée, elle aussi enseignée) à partir de modèles de résultats connus. Nous allons donner quelques exemples.

Le premier exemple est un **manuel de maître** : nous disposons en effet pour cette période d'une série de textes mathématiques dans lesquelles aucune solution algorithmique n'apparaît; il s'agit généralement d'une suite de problèmes (liés), souvent présentés sous une forme sommaire avec un usage presque exclusif de signes sumériens en guise d'abréviations. S'y ajoutent parfois, mais rarement, les réponses. Un exemple de ce type est l'extrait suivant[16] :

9 La surface était un ***eše***
10 2/3 de la longueur et 5 ***nindan***
11 par un facteur j'ai multiplié :
12 1 ***iku*** était la surface.
13 La longueur excédait le facteur de 5.
14 1/6 de (ce dont) la longueur excédait la largeur
15 à la première longueur j'ai ajouté : 31 40.

---

16 j'ai doublé (et)
17 à la première longueur j'ai ajouté : 33 20.

---

18 de la première longueur j'ai soustrait : 28 20.

YBC 4715

Les lignes dans la traduction correspondent aux lignes tracées sur la tablette elle-même, séparant les parties de cette liste elliptique de problèmes, chacun partageant les données des lignes **9–14** , mais différant précisément par un élément additionnel indiqué ligne **15**, resp. **16–17**, resp. **(16 +) 18**... Autrement dit, il y a trois problèmes distincts ici, dont les énoncés correspondent respectivement aux lignes

9–14 + 15, 9–14 + 16–17, 9–14 + 16 + 18.

[15] Voir G. CIFOLETTI, ces Actes.

[16] Copie : NEUGEBAUER **1935–7**, II pl. 60. Voir aussi THUREAU-DANGIN **1938**, p. 190–194; NEUGEBAUER **1935–7**, I p. 478–485.

Nous disposons donc clairement d'une sorte de manuel du maître, contenant des exercices modèles du même type que ceux donnés aux étudiants, développement d'une longue tradition dont nous avons déjà rencontré un avatar paléoakkadien.

Les sujets abordés dans tous ces problèmes traitent de **mensuration** (hauteur, profondeur, etc.; surface; somme de surface et longueur; volume), de calcul des **paiements** (salaires et intérêt), de **charge de travail** des ouvriers, d' **héritage** et de divisions de biens, etc., de manière plus ou moins réaliste (de moins en moins à mesure du développement de ces problèmes).

Voici ensuite une **tablette d'élève** contenant un unique problème : sa présentation, l'utilisation de la langue akkadienne, les détails de l'algorithme de résolution et même le style de mathématiques « faussement appliquées » sont typiques des textes mathématiques paléobabyloniens[17]. Pour clarifier nous avons divisé le texte en étapes numérotées.

> Un roseau j'ai pris. Sa mesure je ne connaissais pas. 1 coudée j'ai rompu, puis soixante par la longueur je suis allé. Ce que j'en avais rompu, je lui ai rajouté, puis 30 fois par la largeur je suis allé. 6 15 était la surface. Qu'est la (longueur) originaire du roseau ? Toi, dans ton procédé :
>
> **1** Pose 1.00 et 30
> **2** Pour le roseau, que tu connais pas, pose 1
> **3a** Par 1 les soixante fois que tu es allé tu multiplieras : 1.00 est la longueur fausse
> **3b** Multiplie 30 par ce 1 : 30 est la largeur fausse
> **4** 30, la largeur fausse, par 1.00, la longueur fausse, multiplie : 30.00 est la surface fausse
> **5** 30.00 par 6.15, la surface vraie, multiplie : 3.07.30.00 il te donne
> **6** 0;05, qui a été rompu, par la longueur fausse multiplie : 5 il te donne
> **7** 5 par la largeur fausse multiplie : 2.30 il te donne
> **8** 1/2 de 2.30 fractionne (:) 1.15
> **9** 1.15 carre (:) 1.33.45
> **10** A 3.07.30.00 ajoute(-le :) 3.09.03.45
> **11** Qu'(en) est la racine carrée ? 13.45 est la racine carrée
> **12** 1.15, que tu as carré, ajoutes-y : 15.00 il te donne
> **13** Trouve l'inverse de 30.00 (:) 0;.00.02
> **14** 0;.00.02 par 15.00 multiplie : (0;30).
>
> 0;30 est la (longueur) originaire du roseau.
>
> Str 368

[17] Photo : NEUGEBAUER **1935–7**, II pl. 13; copie : FRANK **1922**, n° 11. D'Uruk (?). Voir aussi THUREAU-DANGIN **1938**, p. 91–92; NEUGEBAUER **1935–7**, I p. 311–314.

Chaque étape comporte un calcul (effectué par recours à une table) à partir des données originelles du problème (**D**$_1$, **D**$_2$, **D**$_3$, **D**$_4$, cf. ci-dessous) et des résultats de calculs d'étapes précédentes.

Données	**D**$_1$ = 1 coudée (= 0;05 ***nindan***)
	D$_2$ = 1.00
	D$_3$ = 30
	D$_4$ = 6.15

1	1.00	|	30
2		1	
3	1 x 1.00 = 1.00	|	1 x 30 = 30
4	30 x 1.00 = 30.00		
5	30.00 x 6.15 = 3.07.30.00		
6	0;05 x 1.00 = 5		
7	5 x 30 = 2.30		
8	1/2 (2.30) = 1.15		
9	$(1.15)^2$ = 1.33.45		
10	3.07.30.00 + 1.33.45 = 3.09.03.45		
11	$\sqrt{3.09.03.45}$ = 13.45		
12	1.15 + 13.45 = 15.00		
13	$(30.00)^{-1}$ = 0;.00.02		
14	0;.00.02 x 15.00 = 0;30		

Depuis le travail pionnier de Otto Neugebauer dans les années 1930, il est fréquent de lire les anciens textes mathématiques à la lumière de l'algèbre élémentaire; on suppose, implicitement ou non, que la manière « réelle » d'obtenir les résultats ou de les transmettre était d'assigner des valeurs symboliques abstraites aux données d'un problème et d'arriver à la solution en résolvant des équations plus ou moins complexes. Les Anciens auraient alors, pour des raisons que les analystes de cette école n'éclaircissent guère, déguisé leur activité mathématique et ne l'auraient rendue publique que sous l'aspect d'algorithmes numériques (pour les Babyloniens et les Egyptiens) ou de théorèmes géométriques généraux (pour les Grecs). Dans cette façon de voir les choses, le problème ci-dessus consisterait en fait à poser et résoudre une équation du second degré :

Soit L = longueur du roseau

a = longueur ôtée

n = nombre de fois que le roseau brisé mesure la longueur du champ.

m = nombre de fois que le roseau entier mesure la largeur du champ.

S = surface du champ

alors

$$n(L-a) = x$$
$$mL = y$$
$$xy = S$$

$$S = xy = n(L-a)\cdot mL = nmL^2 - nmaL$$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{nm}\left[\sqrt{nmS + \left[\frac{1}{2}anm\right]^2} + \frac{1}{2}anm\right]$$

Plus précisément, la méthode est celle de « fausse position ». Ayant choisi une valeur arbitraire — mais simple, toujours, d'ailleurs, 1 — pour la longueur originaire du roseau, on calcule la surface du champ et puis on corrige par rapport à la valeur réelle donnée de cette surface. Il s'agit de trouver le « facteur de correction » c tel que, ayant choisi une longueur « fausse » arbitraire L', avec $L = cL'$, l'équation à résoudre devient

$$(nmaL'^2)c^2 - (nmaL')c = S.$$

Mais il y a un problème avec une telle interprétation. Les étapes 6–**7** de l'algorithme, qui donneraient le terme « linéaire de l'équation », seraient en fait incorrects puisqu'il s'agit là du calcul de $anL'\cdot mL' = nma(L')^2$, plutôt que de $nmaL'$. Puisque, comme toujours, $L' = 1$, on n'est pas induit en erreur du point de vue numérique. L' écriture correcte du terme linéaire du point de vue algébrique aurait nécessité le maniement du concept de coefficient (multiplier la longueur rompue par la longueur fausse du champ et puis par le **coefficient** de la largeur fausse du champ), quelque chose d'évident symboliquement mais qui n'a aucun sens sans cet apparat et n'a pas d'équivalent algorithmique.

D'autre part, si la réinterprétation algébrique nous paraît naturelle, parce que nous sommes extrêmement habitués à son usage[18], elle n'est pas la seule imaginable. On peut par exemple être tenté de prendre au sérieux le vocabulaire employé —tous ces problèmes font usage d'un vocabulaire géométrique, longueur, surface, etc.— et de réécrire le problème comme un exemple d'« application des aires » dans lequel les différentes étapes représenteraient les transformations géométriques (changement d'échelles, complétion du carré, etc.) qui servent à transformer le rectangle original en un carré de surface connu dont le côté peut alors être calculé par une extraction de racine carrée[19].

Nous préconisons pour notre part la solution la plus simple, qui consiste à prendre au sérieux tout le texte. Les Babyloniens écrivaient leurs solutions sous une forme algorithmique, parce que c'est

---

[18] Il n'est pas inutile de rappeler une fois de plus que l'algèbre dite « élémentaire » ne l'a pas été avant le XVIII^e^ siècle, de notre ère cette fois-ci !

[19] C'est l'approche adoptée dans HØYRUP **1991**.

ainsi qu'ils travaillaient. Il n'y a aucune raison de croire que, s'ils avaient possédé des techniques comme l'algèbre symbolique ou des théorèmes de type euclidien sur les aires, il n'y en aurait aucune trace explicite dans les textes : les mathématiques n'étaient nullement comme on le lit encore parfois un sujet ésotérique —en tout cas, pas plus qu'aujourd'hui ! — à cacher soigneusement des yeux profanes; elles étaient au contraire enseignées, comme une des disciplines majeures du curriculum, à chaque écolier (ce qui ne l'empêchait pas de se plaindre, alors comme maintenant, de leur difficulté).

Une telle approche n'est nullement synonyme de « recettes » au coup par coup. Avec l'avance des études algorithmiques modernes, nous avons commencé à comprendre à quel point les algorithmes pouvaient être des objets mathématiques complexes et généraux. L'interprétation algorithmique des textes babyloniens a plusieurs mérites : d'une part, elle en épouse la forme réelle, d'autre part, elle permet aussi de comprendre et d'apprécier dans quelles directions se fait le développement des mathématiques — son évolution met en évidence une complexité croissante des structures algorithmiques employées (immersion d'une procédure dans une autre, boucles, etc.)[20].

Quant à l'autre grande catégorie de textes, les **tables**, elles se diversifient également : à côté des tables usuelles de multiplication, d'inverses, de racines carrées et cubiques, dont les domaines s'étendent de plus en plus, on trouve également des tables de conversions métrologiques et des tables d'*iggigubû* comme ci-dessous, c'est-à-dire de constantes utilisées dans différentes procédures standard : ainsi l'*iggigubûm* du cercle, 5, intervient dans le calcul de sa surface (la valeur $\pi = 3$ que certains veulent à tout prix détecter dans les calculs sur le cercle en Mésopotamie ne correspond donc pas à une quantité réellement mise en valeur par les Mésopotamiens eux-mêmes[21]).

5	*iggigubûm* du cercle
7 30	*iggigubûm* du *sakkakum*
2 13 20	*iggigubûm* du panier
1 40	*iggigubûm* d'une charge de terre
4 30	*iggigubûm* d'une charge de briques
7 12	*iggigubûm* d'un tas de briques
6	*iggigubûm* du mur
5	*iggigubûm* des briques
6	*iggigubûm* de ma mesure de grain

IM 49949

[20] Voir Ritter **1989**

[21] Voir Goldstein **1989** et Ritter **1989**.

CONCLUSION

Bien entendu, l'histoire ne s'arrête pas ici. Bien que la plupart des aspects formels des mathématiques babyloniennes — le concept de nombres abstraits, le système de position sexagésimal, les opérations arithmétiques de base, la séparation des textes en tables et problèmes, la nature des procédures de résolution — soient déjà en place pendant cette période paléobabylonienne, l'extension constante et le raffinement des méthodes et des grilles d'exemples traités témoignent de la vitalité des mathématiques mésopotamiennes et de l'activité des ses praticiens jusqu'aux premiers siècles de notre ère. Une sorte de renaissance eut même lieu pendant la période séleucide (4^{e} au 1er siècle avant notre ère), lorsque la pratique rationnelle nouvelle de l'astrologie numérique réclama des outils mathématiques appropriés et plus performants, tout comme à l'époque moderne, les interactions entre les mathématiques et d'autres disciplines, la physique ou l'informatique, ont fécondé chaque discipline impliquée.

Ceci étant, même si le champ couvert par ce survol n'épuise pas, tant s'en faut, la totalité des connaissances et des pratiques mathématiques de la Mésopotamie antique, nous avons vu au cours du millénaire et demi étudié des développements spectaculaires s'effectuer. Le lent dégagement du nombre, de l'écriture des objets, puis des systèmes métrologiques, est bien sûr un point crucial. Mais d'autres aspects, moins techniques, peuvent aussi retenir l'attention : ainsi, la place importante des mathématiques dans le système scolaire, deux mille ans avant notre ère.

REFERENCES

*Les textes de synthèse les plus accessibles en français sont signalés par un *.*

ADAMS (Robert McC.) & NISSEN (Hans)

1972 *The Uruk Countryside. The Natural Setting of Urban Societies*, University of Chicago Press, Chicago

BENOIT (Paul), CHEMLA (Karine) & RITTER (Jim)

***1991** *Histoire de fractions, fractions d'histoire*, Birkhäuser, Bâle/Boston/Berlin

BOTTÉRO (Jean)

***1987** *Mésopotamie. L'écriture, la raison et les dieux*, Gallimard, Paris

BURROWS (Eric)

1935 *Archaic Texts* (Ur Excavation Texts 2), British Museum / University of Philadelphia, Londres

DEIMEL (Anton)

1922–4 *Die Inschriften von Fara. I. Liste der archaischen Keilschriftzeichen. II. Schultexte aus Fara. III. Wirtschaftstexte aus Fara* (Wissenschaftliche Veröffentlichung der Deutschen Orient-Gesellschaft 40/43/45, 3 vols.), J. C. Hinrich's, Leipzig

DELAPORTE (Louis)

1912 *Inventaire des tablettes de Tello conservées au Musée Impérial Ottoman IV. Textes de l'époque d'Ur*, Geuthner, Paris

EDZARD (Dietz Otto)

1969 "Eine altsumerische Rechentafel (*OIP* 14, 70)" in M. DIETRICH & W. RÖLLIG (éds.), liˇān mitḫurti. *Festschrift Wolfram Freiherr von Soden…* (Alter Orient und Altes Testament 1), Verlag Butzon & Bercker Kevelaer, Neukirchener Verlag, Neukirchen-Vluyn, p. 101–104

EDZARD (Dietz Otto), FARBER (Gertrud) & SOLLBERGER (Edmond)

1977 *Répertore Géographique des Textes Cunéiformes I. Die Orts- und Gewässernamen der präsargonischen und sargonischen Zeit* (Beihefte zum Tübinger Atlas des Vorderen Orients, B 7/1), Ludwig Reichert, Wiesbaden

FRANK (Carl)

1928 *Straßburger Keilschrifttexte in sumerischer und babylonischer Sprache* (Schriften der Straßburger Wissenschaftlichen Gesellschaft in Heidelberg, NF 9), Walter de Gruyter, Berlin/Leipzig

GELB (Ignace)

1970 *Sargonic Texts in the Ashmolean Museum,Oxford* (Materials for the Assyrian Dictionary 5), University of Chicago Press, Chicago

GOLDSTEIN (Catherine)

***1989** "L'un est l'autre : pour une histoire du cercle" *in* Michel SERRES (éd.), *Éléments d'histoire des sciences*, Bordas, Paris, p. 129–149

GREEN (Margaret) & NISSEN (Hans) [with the collaboration of P. DAMEROW and R. ENGLUND]

1987 *Zeichenlist der archaischen Texte aus Uruk* (Archaische Texte aus Uruk 2), Gebräuder Mann, Berlin

HØYRUP (Jens)

1982 "Investigations of an Early Sumerian Division Problem", *Historia Mathematica* 9, p. 19–36

1990 "Algebra and Naive Geometry, An Investigation of Some Basic Aspects of Old Babylonian Mathematical Thought", *Altorientalische Forschungen* 17, p. 27–69; 262–354

HUOT (Jean-Louis)

***1989** *Les Sumériens. Entre le Tigre et l'Euphrate*, Éditions Errance, Paris

JESTIN (Raymond)

1937 *Tablettes sumériennes de Šuruppak conservées au Musée de Stamboul* (Mémoires de l'Institut français d'archéologie de Stamboul 3), E. de Boccard, Paris

KEISER (Clarence)

1919 *Selected Temple Documents of the Ur Dynasty* (Yale Oriental Studies 4), Yale University Press, New Haven

LE BRUN (A.) & VALLAT (François)

***1978** "L'origine de l'écriture à Suse", *Cahiers de la Délégation archéologique française en Iran* 8, p. 11–59

LIMET (Henri)

1973 *Études des documents de la période d'Agadé* (Bibliothèque de la Faculté de Philosophie et Lettres de l'Université de Liège 206), Les Belles Lettres, Paris

LUCKENBILL (Daniel)

1930 *Inscriptions from Adab* (Oriental Institute Publications 14), University of Chicago Press, Chicago

MEEK (Theophile)

1935 *Excavations at Nuzi III. Old Akkadian, Sumerian and Cappadocian Tablets from Nuzi* (Harvard Semitic Series 10), Harvard University Press, Cambridge [USA]

NEUGEBAUER (Otto)

1935–7 *Mathematische Keilschrift-Texte* (3 vols.), Springer-Verlag, Berlin [réimpression : 1973]

NISSEN (Hans)

1985 "The Emergeance of Writing in the Ancient Near East", *Interdisciplinary Science Reviews* 10, p. 349–361

1988 *The Early History of the Ancient Near East. 9000–2000 B.C.*, University of Chicago Press, Chicago

NISSEN (Hans), DAMEROW (Peter) & ENGLUND (Robert)

1990 *Frühe Schrift und Techniken der Wirtschaftsverwaltung im alten Vorderen Orient*, Verlag Franzbecker, Berlin

POWELL (Marvin A.)

1975 Book review of LIMET **1973** in *Journal of Cuneiform Studies* 27, p. 180–188

1976 "The Antecedents of Old Babylonian Place Notation and the Early History of Babylonian Mathematics", *Historia Mathematica* 3, p. 417–439

RITTER (James)

***1989** "Chacun sa vérité : les mathématiques en Égypte et en Mésopotamie" *in* Michel SERRES (éd.), *Éléments d'histoire des sciences*, Bordas, Paris, p. 39–61

***1990** "Les pratiques de la raison en Mésopotamie" *in* Jean-François MATTÉI (éd.), *La naissance de la raison en Grèce*, PUF, Paris, p. 99–110

SCHMANDT-BESSERAT (Denise)

1977 *An Archaic Recording System and the Origin of Writing* (Syro-Mesopotamian Studies I/2), Undena Publications, Malibu [CA, USA]

***1978** "Les plus anciens précurseurs de l'écriture", *Pour la science* 10, p. 12–22

THUREAU-DANGIN (François)

1938 *Textes mathématiques babyloniens*, E. J. Brill, Leyde

WHITING (Robert M.)

1983 "More Evidence for Sexagesimal Calculations in the Third Millenium B.C.", *Zeitschrift für Assyriologie und vorderasiatische Archäologie* 74, p. 59–66

Str 368 / Texte

Un roseau j'ai pris. Sa mesure je ne connaissais pas.

1 coudée j'ai rompu, puis soixante par la longueur je suis allé.

Ce que j'en avais rompu, je lui ai rajouté, puis

30 fois par la largeur je suis allé.

6 15 était la surface. Qu'est la (longueur) originaire du roseau ?

Toi, dans ton procédé [***ak-da-zu-dè*** = *epēšuka*] :

Pose 1 et 30. Pour le roseau, que tu connais pas,

pose 1. Par 1 les soixante fois que tu es allé

tu multiplieras : 1 est la longueur fausse [***uš lul*** = *šiddum sarrum*].

Multiplie 30 par ce 1 : 30 est la largeur fausse [***sag lul*** = *pūtum sarratum*].

30, la largeur fausse, par 1, la longueur fausse,

multiplie : 30 est la surface fausse [***a-šà lul*** = *eqlum sarrum*].

30 par 6 15, la surface vraie [***a-šà gi-na*** = *eqlum kīnum*],

multiplie : 3 7 30 il te donne.

5, qui a été rompu, par la longueur fausse multiplie :

5 il te donne. 5 par la largeur fausse multiplie :

2 30 il te donne. 1/2 de 2 30 fractionne (:) 1 15.

1 15 carre (:) 1 33 45.

A 3 7 30 ajoute(-le :) 3 9 3 45.

Qu'(en) est la racine carrée ? 13 45 est la racine carrée.

1 15, que tu as carré, ajoutes-y :

15 il te donne. Trouve l'inverse de 30 (:) 2.

2 par 15 multiplie : 30 est la (longueur) originaire du roseau.

BM 13901 / Texte (I: 1–15)

La surface et mon côté de carré j'ai additionné : 45. — 1, la *wāṣitum*, tu poseras. La moitié de 1 tu fractionneras. [30] et 30 tu multiplieras. 15 à 45 tu ajouteras : 1. — 1 (en) est la racine carrée. Le 30, que tu as multiplié, de 1 tu soustrairas. 30 est le côté de carré.

Mon côté de carré de la surface j'ai so[ustrait] : 14 30. — 1, la *wāṣitum*, tu poseras. La moitié de 1 tu fractionneras. 30 et 30 tu multiplieras. 15 à 1[4 30 tu aj]outeras : 14 30 15. — 29 30 (en) est la racine carrée. Le 30, que tu as multiplié, à 29 30 tu ajouteras. 30 est le côté de carré.

Le tiers de la surface j'ai soustrait et puis le tiers du côté de carré à la surface j'ai ajouté : 20. — 1, la *wāṣitum*, tu poseras. Le tiers de 1, la *w®◊i[tum*, (soit) 20 tu soustrairas.] 40 par 20 tu multiplieras. 13 20 tu inscriras. [La moitié de 20, le ti]ers que tu as soustrait, tu fractionneras. 10 et [10 tu multiplieras. 1 40] à 13 20 tu ajouteras (:) 15. — 30 [(en) est la racine carrée. Le 10, que tu as multiplié, de 30] tu soustrairas : 20. Son quarantième. [1 30 par 20 tu multiplieras. 30] est le côté de carré.

Les Eléments d'Euclide
Orient-Occident : du IIIème siècle avant J.C. au XIIIème siècle après J.C.

On a choisi, pour illustrer l'histoire des rapports entre l'Orient et l'Occident, de suivre le parcours historique d'un des textes les plus célèbres de l'histoire des mathématiques : les Eléments d'Euclide. De leur écriture, probablement à Alexandrie, au IIIème siècle avant J.C. jusqu'à la renaissance européenne des XVème et XVIème siècle, le parcours des différentes versions de ce texte est exemplaire des vicissitudes qu'ont connues les grands ouvrages de l'antiquité grecque comme les livres d'Aristote et de Ptolémée.

On pourra commencer par préciser le contenu du texte. Il s'agit d'un traité de géométrie qui n'est ni un manuel élémentaire ni un traité de recherche. Le titre "Eléments", traduction littérale, a pour signification dans l'esprit grec : "ce qui entre dans la composition". Le texte est le bilan d'un savoir et d'une technique mathématique acquis par les Grecs ; il offre une voie d'accès à ce savoir en partant du degré zéro et en arrivant à des propositions difficiles comme celles du livre X sur les irrationnels.

Le texte est organisé en 13 livres. Les quatre premiers traitent de la géométrie plane sans faire usage de la proportionnalité. Le premier livre débute par une série de définitions, demandes (ou postulats) et notions communes ; s'en suivent une série de propositions déduites logiquement sur les tiangles, les parallèles, l'algèbre géométrique élémentaire, les figures inscrites dans un cercle.

Le cinquième livre expose la théorie des proportions qui est appliquée à la géométrie dans le livre VI.

Les livres VII, VIII, IX contiennent des éléments de théorie des nombres ; c'est-à-dire des entiers positifs supérieurs ou égaux à deux puisque pour les Grecs le concept du zéro est inexistant et un,.nommé"l'unité", n'est pas un nombre. Dans une formulation n'utilisant aucun symbolisme, on y expose les théories des nombres parfaits, des rapports d'entiers, des puissances et des rapports de puissances. On appelle souvent ces trois livres les "livres arithmétiques".

Le livre X étudie dans 109 propositions les lignes droites commensurables et incommensurables, en particulier celles appelées "irrationnelles" ainsi que les aires qui leurs correspondent. Ce livre difficile fait appel aux notions exposées dans les neuf premiers. Le livre XI est dans l'espace le pendant des livres I à IV et donne les thorèmes élémentaires sur les solides simples de l'espace.

Le livre XII donne des résultats de mesures sur le cercle, la pyramide, le cône et la sphère. Y apparaît une méthode qui peut ressembler à du calcul intégral, la méthode de sommation en série appelée à la Renaissance méthode "d'exhaustion".

Le livre XIII est consacré à la construction des 5 solides platoniciens inscriptibles dans une sphère. On y utilise des résultats déduits des autres livres ; Proclus considérait d'ailleurs que le but des Eléments était la construction de ces solides.

On a traditionnellement attribué à Euclide deux autres livres plus .tardifs sur les mêmes solides platoniciens.

L'ensemble forme la base de la géométrie occidentale, indiscutée jusqu'au XIXème siècle. Cet ouvrage fut probablement écrit sous le règne de Ptolémée 1er (- 323, - 285), en tout cas avant les premiers travaux d'Archimède vers -250. On a longtemps balancé entre l'hypothèse d'un seul auteur ou d'une rédaction collégiale sans que l'une ou l'autre puisse être prouvée. Pappus situe Euclide à Alexandrie où il en fait un maître d'Apollonius, des sources arabes le placent à Tyr ou Damas. Il est cependant certain qu'Alexandrie est au IIIème siècle avant notre ère un des plus grands centre d'activités scientifiques du monde hellénistique autour du musée et de la bibliothèque créés par Ptolémée 1er. Cette école scientifique perdurera, avec un éclat variable, jusqu'à l'époque de l'astronome C. Ptolémée ; puis avec un déclin rapide jusqu'à la prise de la ville en 640 par les armées arabes.

Les manuscrits les plus anciens des Eléments que nous possédions datent du Xème siècle, on en trouve à la bibliothèque vaticane et à la bibliothèque Laurenticienne à Florence. La confrontation des différents textes - notamment celui de la vaticane probable copie d'un texte antérieur à l'édition de Théon d'Alexandrie au IIIème siècle après J.C. - permet de penser qu'on est en présence de rédactions relativement proches de celle d'Euclide. En fait, c'est très peu par les originaux grecs que les Eléments ont été connus en Europe à partir du XIIème siècle mais bien plus par l'intermédiaire des savants arabes.

Aux VIIème - VIIIème siècles, Byzance est le seul véritable conservatoire de la culture grecque. Le Basiléus (empereur d'orient) offre des manuscrits grecs à son puissant voisin le Calife Abbasside de Bagdad. Ainsi Al-Mansur (+ 773) reçoit une première copie des Eléments. Une traduction de ce texte est effectuée par Al-Haggag sous le califat d'Harun-Al-Rachid (+ 803) ; de cette version perdue, il ne reste plus que quelques traces. Un second manuscrit sera offert au calife Al-Mammun en 813 ; sous son règne se développe à Bagdad une intense activité intellectuelle. Le texte est immédiatement traduit par le même Al-Haggag (version dite Mammounienne); cette version bénéficie des importantes améliorations qu'ont connues les techniques de traduction sous le califat d'Al-Mumumm. On en possède des traces importantes dans un commentaire arabe du Xème siècle qui malheureusement s'arrête au 7ème livre et dont l'auteur semble avoir utilisé d'autres versions ; on en trouve d'autres traces dans des traductions latines.

Une troisième version, perdue aujourd'hui, est produite par Ishaq ibn Hunayn (+ 910) puis une 4ème version qui est en fait celle d'Ishaq revue par Thabit ibn Qurra (836-901) qui semble avoir confronté les manuscrits grecs et arabes dont il pouvait disposer pour faire ses corrections. Il n'est pas exclu qu'il ait existé une version purement produite par Ibn Qurra. De cette dernière version il reste 13 manuscrits répertoriés dont le plus ancien date environ du XIIème siècle.

Enfin on compte une cinquantaine de commentaires et de récensions - Tahrir ou réécriture - dont les plus célèbres sont celle d'Avicenne (980 - 1037). Le salut de l'âme et deux textes attribués à At-Tusi (1201-1274) dont l'un dit "petite édition" date de 1248 et l'autre dit "grande édition" est probablement un apocryphe de 1298 dont le seul manuscrit se trouve à Florence et fut édité à Rome en 1594.

On trouve trace aussi dans le proche et moyen orient médiéval de versions des Eléments en persan - attribuées à At-Tusi -, en arménien au XIème siècle et en syriaque. On peut rappeler ici le rôle capital qu'a joué le syriaque comme lien linguistique entre le grec déclinant et l'arabe ; très peu de textes mathématiques semblent être passé par cet intermédiaire, on a toutefois découvert un fragment du livre I et divers textes font mention d'une version des Eléments dans cette langue. Un autre intermédiaire moins connu est la langue hébraïque. En effet, dans les communautés juives arabophones de la Provence du XIIIème siècle, on sent la nécessité de traduire en hébreu les textes arabes qu'on craint de ne plus pouvoir comprendre. C'est dans ces textes que l'on trouve notamment trace de la version perdue d'Al Haggag.

La première version latine attestée des Eléments est traditionnellement attribuée à Boëce mais elle ne nous est parvenue que très altérée. Deux autres traductions, d'après le grec, nous sont connues ; une est partielle et très incorrecte. La seconde est issue des écoles siciliennes du XIIème siècle, réunies autour de l'empereur Frédéric II ; elle serait due à un médecin palermitain qui aurait travaillé sur un texte grec de l'édition de Théon. Ce texte complet et exact n'a pratiquement pas été diffusé dans l'occident médiéval ; il en subsiste des copies à Paris et Florence et n'a été redécouvert qu'il y a une trentaine d'années par J. Murdoch et édité récemment par H.L.L. Busard.

C'est bien par les textes arabes traduits au XIIème et XIIIème siècle que les savants médiévaux eurent accès au livre d'Euclide.

La première version est due à Gérard de Crémone (1114 - 1187) qui a travaillé à Tolède, grand centre de traductions arabo-latines dans l'Espagne de la Réconquista, où il réalisa quelques soixante dix traductions de textes arabes. Il s'agit, semble-t-il, d'une version littérale du texte de Thabit ibn Qurra avec quelques fragments d'Al-Haggag.

On possède de l'anglais Adélard de Bath qui travaillait dans le premier tiers du XIIème siècle, trois versions différentes. La première, simplement attribuée à Adélard, semble très fortement inspirée de la version perdue d'Al Haggag. La seconde, dite Adélard II, est une version compacte dans laquelle ne sont données que des indications et des commentaires quant aux preuves des propositions. La troisième, Adélard III ou "édition spéciale" (R. Bacon) offre à la fois les preuves de la première et les commentaires de la seconde avec des considérations sortant parfois du cardre mathématique. On peut citer aussi une version d'Hermann de Carinthie datant des années 1140-1150.

Enfin, en 1259, Campanus de Novares rédige, en partant d'Adélard II, la meilleure des traductions latines médiévales du point de vue mathématique ; cette version sera une des plus répandues au Moyen Age. C'est elle que choisit l'imprimeur vénitien Ehrard Ratold en 1492 pour donner la première édition imprimée des Eléments ouvrant une voie royale puisque l'ouvrage d'Euclide fut le plus imprimé et le plus traduit (80 langues) depuis l'invention de l'imprimerie.

Bibliographie:

I - En complément, on pourra trouver une liste des différentes versions présentes dans la bibliothèque de l'Abbaye bénédictine de St-Mihiel ; collection qui n'est plus qu'un reflet de ce que pouvait être la bibliothèque d'une grande abbaye à la fin du XVIIIème siècle.

n° 133 - Les Eléments d'Euclide
R.P. Déchalles et Ozanam - Paris 1753

n° 176 - Eudidis Elementorium libri XV graece et latine - Lutetia 1558

n° 196 - Les 15 livres des Eléments d'Euclide traduction du latin en Français par
Henrion - Paris 1631

n° 216 - Les 15 livres des Eléments d'Euclide par le P. Le ... - Paris 1622

n° 246 - 247 - Eudidis Elementorum libri XV a Christopho Clavio - Franckfort 1608
- c'est une récension marquée par la personnalité de l'auteur, un jésuite très brillant, qui combine la version de Campanus et celle de Zamberti et Commandinus (XVIème siècle) et est excellente sur le plan mathématique.

n° 405 - Liber Eudidis Elementorum in urtem géométrie venetiis 1482
- il s'agit de l'édition d'Ehrard Ratold utilisant la version de Campanus de Novure.

n° 427 - Versio arabica tractatus Eudidi de superficiarum divisionibus - Rome 1594
- "Grande édition" d'At-Tusi qui est donc une récension et non une traduction littérale.

Il s'agit, avec la sphère de J. de Sacro-Bosco qui expose de manière simplifiée le système de Ptolémée et a été un des ouvrages les plus répandu au Moyen Age, du seul texte mathématique présent en plusieurs exemplaires dans le fond des moines.

II - Ouvrages généraux sur l'histoire des mathématiques.

F. Cajori, A. history of mathematrical notations, Illinois, 1928.

A. Dahan-Dalmedico et J. Peiffer, une histoire des mathématiques - Paris (Seuil Points - Sciences), 1986.

P. Dédron et J. Itard, Mathématiques et mathématiciens, Paris (Magnard), 1959.
R. Rashed (éd.), Philosophie et mathématiques de l'Antiquité à l'âge classique, Paris (Ed. CNRS), 1991.

D.E. Smith, History of mathematics, 2 vol., New-York (Dover), 1953.

R. Taton (sous la direction de), Histoire générale des sciences, Paris (PUF), 1957.

id., Histoire du calcul, Paris ("Que sais-je ?" n° 198), 1969.

A. Youschkevitch, Les mathématiques arabes (Ville - XVème siècle), Paris (Vrin), 1976.

III - à propos des mathématiques grecques :

Les Eléments d'Euclide : le texte, sa portée, son histoire, sa transmission à travers les traductions en arabe, en latin, en hébreu.

H.L.L. Busard, "Uber die Uberlieferung der Elemente Euklids über die Länder des Nahen Ostens nach West-Europa", Historia Mathematica, 3 (1976) : 279-290.

id. "Some Early Adaptations of Euclids Elements and the Use of its Latin Translations", in M. Folkerts und I. Lindgren (eds), Mathemata Festschrift für Helmut Gericke, Stuttgart (1985), pp. 129-164.

M. Clagett, "The Medieval Latin Translations from the Arabic of the Elements of Euclid...", Isis, 44 (1953) : 16-42.

G. De Young, "The Arabic Textual Traditions of the Euclid's Elements", Historia Mathematica, 11 (1984) : 147-160.

M. Folkerts, "Adelard's Versions of Euclid's Elements", in C. Burnett (ed), Adelard of Bath. An English Scientist and Arabist of the Early Twelfth Century, London (1987), pp. 55-68.

T.L. Heath (trad.), Euclid. the thirteen books of the Elements. 3 vol. (Reprint) New-York (Dover) 1956.

Id. , A History of greek mathematics. 2 vol. (Reprint) New-York (Dover) 1961.

J. Itard. Les livres arithmétiques d'Euclide. Paris (Hermann) 1961.

H. Klamroth, "Uber den arabischen Euklid", Zeitschrift der Deutschen morgeniandischen gesellschaft, 35 (1881), pp. 270-326.

W. R. Knorr, The evolution of the euclidean elements - Dordrecht/Boston (Reidel), 1975.

Id. , The ancient tradition of geometric problems. Boston/Bâle/Stuttgart (Birkhäuser), 1986.

P. Kunitzsch, "Findings in some texts of euclid's elements (Mediaeval transmission, arabo-latin)", in Mathemata, op. cit., pp. 115-128.

R. Lorch. "Some Remarks on the Arabo-latin euclid", in Adelard of Bath, op. cit., pp. 45-54.

P. H. Michel, De Pythagore à Euclide - Paris (Belles Lettres) 1950.

I. Mueller, Philosophy of Mathematics and Déductive Structure in Euclid's Elements. Cambridge (MIT Press), 1981.

Ch. Mugler, Dictionnaire historique de la terminologie géométrique des Grecs - Paris (Klincksiek). 2 vol., 1958-9.

Id. , Platon et la recherche mathématique de son époque. Strasbourg/Zurich, 1948.

J. Murdoch, "Euclid : Transmission of the Elements", in dictionary of scientific biography - New-York, 1971, vol. IV, pp. 432-45.

Id. "The Medieval Euclid : salient aspects of the translations of the Elements by adelard of bath and campanus of novara", XII Cong. int. d'hist. des Sciences (Paris 1968). Actes, Tome I (A), Paris (1970), pp. 67-94.

M. Steinschneider, Die hebraischen ubersetzungen des mittelalters und die juden als dolmetscher - Berlin (1893), réimp. Graz (1956), pp. 503-509.

A. Szabo, Les débuts des mathématiques grecques - Paris (Vrin), 1975.

P. Tannery, La géométrie grecque - Paris, 1887.

C. Thaer, "Die Euklid-Oberlieferung durch at-Tusi", Quellen und studien zur geschichte der mathematik, astronomie und physik, 3 (1936) : 116-121.

B. Vitrac (trad.), Euclide . Les Elements. Vol. 1 intr. générale (M. Caveing). Livres I-IV. Paris (PUF), 1990 - dernière traduction en français, la précédente est celle de Peyrard (1802).

Mathématiques indiennes

I - Contexte historique :

L'Inde, qui semble être isolée du reste du monde par la chaîne de l'Himalaya et l'Océan indien a été souvent envahie. D'admirables réalisations architecturales, vestiges des villes Arapa et Monjedao, datant de - 2500 témoignent d'une civilisation de l'Indus. De cette période on a peu de documents, les rares textes gravés qui subsistent ne sont pas toujours traduits. Cependant, la construction selon des plans préconçus nécessitent des connaissances en géométrie et en arithmétique. Dans les textes gravés on trouve des barres et des lignes qui représentent peut-être des chiffres ou des instruments de mesures. Par les défilés du nord-ouest, les tribus Aryennes détachées de la communauté indoeuropéenne entrèrent en Inde avant le milieu du IIème millénaire.avant J.C. Les clans védiques imposèrent leurs structures à toute l'Inde du nord, ainsi on a des textes en sanscrit qui datent de - 1500.

L'Inde est restée une civilisation orale : l'imprimerie ne fut introduite que par les Anglais au XiXème siècle ce qui explique l'abondance de manuscrits et le rareté des imprimés.

Les premiers textes mathématiques sont connus par les VEDA et SOUTRA, ils expliquent la construction des autels qui nécessite l'empilage de briques de différentes formes sur une aire ayant un contour donné. Ainsi il n'y a pas de textes de mathématiques purescomme chez les grecs mais des problèmes posés (- XVème au - XIème). Entre le XIème et le VIème siècle on a des textes mathématiques qui traitent du calendrier, plus quelques données sur l'arithmétique et la géométrie.

Durant la période qui va de – 560 à – 480 on assiste à un développement important des sciences : l'astronomie et donc l'arithmétique et la géométrie, système de numération en base 60.

De – 350 à – 320, l'Inde est sous le règne de la dynastie des NANDA.

En – 325 Alexandre arrive en Inde : il représente le premier contact avec la civilisation grecque mais aussi avec l'astronomie assyro babylonienne.

De – 320 à – 185 la dynastie des MAMYA a le pouvoir en Inde ; elle fut remplacée par celle de CHURGA de – 185 à – 75 et par les KUSUD de – 75 à + 300.

La période qui commence vers – 560 est la période BOUDHIQUE, ainsi sour le règne des KUSUD se développe le Jahinisme rival du Boudhisme et qui a une cosmographie particulière : avec deux soleils et deux lunes.

De 320 à 500 : la dynastie des GUPTA batit un puissant empire : extension territoriale, éclosion et développement du savoir : médecine, chimie, astrologie, algèbre et trigonométrie.

le grand nom de cette période est ARYABHATA, né vers 476. Il est le plus étudié, son manuel est un aide mémoire pour les astronomes ; il contient quelques tables dont celles des sinus. Il fut un professeur et un grand nom de l'algèbre et de la trigonométrie : on a trouvé plusieurs commentaires de l'Aryabhata qui datent de son vivant. La partie mathématique de son oeuvre est formée de 33 vers, elle ne concerne que l'astronomie. Ses idées sont connues à travers les critiques de ses contradicteurs. Il semble qu'il ait conçu la rotation de la terre. Ce savant a beaucoup voyagé et fait aussi beaucoup d'observations astronomiques.

. Vers 500, interruption de la dynastie des GUPTA, avec le règne de HARSUA.(600-647)
. On assiste au développement de l'algèbre avec BHASKARA I et BRAHMAGUPTA
. 712, conquête de l'Inde par 3 musulmans, la période qui suivit fut une période trouble, il y eut quelques savants, MAHAVIRA, SRIDHARA, BAYASKARA II.

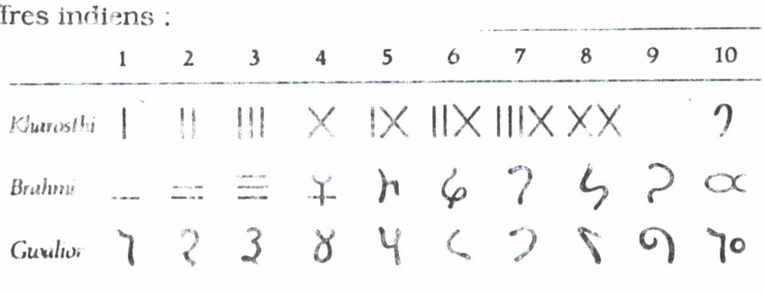
La domination turco-afghane dura jusqu'au XIème siècle et il a fallu attendre 1483 pour avoir un empire unitaire en Inde avec la prise du pouvoir des Mogols. L'empire indien fut grignoté par la pénétration européenne pour finir sous la tutelle de l'Angleterre au XIXème siècle. C'est à cette période que fut introduite l'imprimerie en Inde.

L'Inde fut védique du milieu du Vème millénaire jusqu'au Vème siècle avant J.C. ; ensuite elle est devenue boudhique. L'aire de la science indienne a été vaste grâce au boudhisme notamment. La production scientifique est importante : il y a plus de manuscrits scientifiques que de textes religieux.

II - L'Influence indienne à travers trois exemples :

- sinus : demi-corde de l'arc double = ardha-gya qui se prononce djiba, la traduction arabe a été littérale ce qui a donné djiba et ensuite jib = جيب qui signifie aussi poche d'oû la traduction latine faite à partir de l'arabe par le mot sinus.

- les chiffres indiens :



The Kharosthi numeral for nine is not known for certain.

Comme la tradition chinoise veut qu'on écrive les chiffres dans les marges en leur faisant subir une rotation de $+\frac{\pi}{2}$ on a obtenu ainsi deux séries de chiffres :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	٠

- utilisation du symbole + pour la soustraction :

la lettre क est la première du mot diminution , elle a donné + pour indiquer la soustraction () ainsi 4 + 2 signifie 4 diminué de 2.

III - Contenu des mathématiques indiennes :

a) l'arithmétique. Dans les VEDA on a des noms précis pour les puissances de 10.

Par exemple 10^4 : Ayuta

10^5 : Niyuta

10^6 : Prayuta

On y trouve le nombre 735 622 198 443 682 155 écrits en toutes lettres en sansrit.

On a un système d'écriture des nombres par position et la lecture peut se faire de plusieurs manières ainsi on a 18 se lit aussi 2 multiplié par 9

39 " " et 1 qu'on ôte de 40

45 " " et 5 et 40...

Le nombre π est représenté par le rapport : $\frac{62832}{20000}$

Pour les besoins de la versification, les nombres et les puissances de 10 ont plusieurs synonymes ainsi :

O = . = vide, espace, trou.

1 = toute chose dont on ne trouve qu'un exemplaire : soleil, lune, nez.

2 = jumeaux, yeux, ailes, couple, oreilles.

3 = feux : (les 3 feux...)

4 = aire cosmique

5 = éléments (les 5 éléments constitutifs de la matière)

sens (les 5 sens)

12 = signes du zodiaque

7 = voyelles (il y en a 7 en sanscrit)

32 = dents

33 = dieux

Les 25 premières lettres de l'alphabet valent leur rang et une voyelle donne la puissance de (son rang dans l'alphabet – 1)

ex : MAKHI : = 25 100° 2 100 = 25 x 1 + 2 x 100 = 225

ce nombre a été utilisé par ARYAB HATA pour donne la table des sinus de 225' en 225'.

Aryabhata utilise la formule suivante pour la construction de la table précédente :

$$\sin(n+1)x = \sin x + \{\sin nx - \sin(n-1)x\} - \frac{1}{225}\sin x$$

On a souvent oublié le côté némotechnique des mathématiques indiennes : ex : on mémorise la table des carrés et des cubes.

Représentation des nombres :

$$a + \frac{b}{c} = \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix} \quad \text{par exemple} \quad \begin{matrix} 6 \\ 1 \\ 4 \end{matrix} = 6 + \frac{1}{4} \text{ et } \begin{matrix} 6 \\ +1 \\ 4 \end{matrix} = 6 - \frac{1}{4}$$

Extraction de la racine carrée d'un nombre

Etaient connus les 4 opérations : +, –, x, / plus les puissances de 2, les racines carrées, les puissances de 3 et les racines cubiques, ainsi que les règles de réduction des fractions.

Exemple de fractions : baga $= \frac{a}{b}$ ou $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$

$$\text{bati} = \frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} \pm \frac{e}{g} \text{ qui est représenté par } \begin{matrix} a & c & e \\ b & d & g \end{matrix}$$

b) Géométrie : Elle est classée en deux types : algébrique et géométrique. A la géométrie il faut ajouter la trigonométrie qui est la science des ombres.

C'est pour les besoins du culte vedique que la géométrie s'est développée en Inde. Ainsi on trouve des textes techniques comme les "Aphorismes sur les cordeaux" entre le 8 et le 4ème siècle avant J.C. ou comme le Sylva-Sutra traité du fil qui rappelle les règles nécessaires pour la construction des autels, dans ce traité on y trouve le théorème de Phytagore, des constructions de cercles et de rectangles ainsi que le problème de la quadrature du cercle. On y trouve les deux évaluations suivantes entre autres :

$d = c + \frac{c}{3} + \frac{c}{3x4} - \frac{c}{3x4x34}$ où d représente la diagonale du carré de côté c

ce qui donne $\sqrt{2} \simeq 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{12} - \frac{1}{408}$.

$\sqrt{2} \simeq 1{,}414$

et $C = D \left(1 - \frac{28}{8x29} - \frac{1}{6x8x29} + \frac{1}{6x8x29x8}\right)$ ou c est le côté du carré d'aire égale à celle du cercle de diamètre D.

On savait aussi résoudre les équations suivantes :

$ax^2 = c$	carré = rectangle
$N(x^2 - 1) = a$	autel de MAHAVEDI
$ax^2 + bx + cy = d$	autel de SYENACIT
$x^2 + y^2 = z^2$	
$\begin{cases} x + y = 21 \\ \frac{x}{m^2} + \frac{4}{n^2} = 1 \end{cases}$	x et y représentent le nombre de briques m et n ont les côtés d'un autel rectangle

On donne le résultat sans indiquer la procédure.

c) L'algèbre d'ARYABHATA

On y trouve :

- une résolution des systèmes d'équation linéaire à plusieurs inconnues.
- une classification des équations du premier degré et du second degré.
- une représentation des équations. exemple :

3	5	1	15	3				
2	5	1		10	2	15	7	2

$(3x + 2)(5x - 1) = 15x^2 + 7x - 2$

- le théorème du binôme
- des calculs de probabilité sur des dés à quatre faces.

Exemples de problèmes de mathématiques indiennes

En dehors des applications à l'astronomie, les textes mathématiques sanskrits nous livrent, avec leurs solutions, différents problèmes se rapportant notamment au commerce : calcul d'intérêts, de montants d'honoraires, détermination du titre d'un alliage, etc... Certains de ces problèmes nécessitent seulement la connaissance de la règle de trois, d'autres, plus compliqués font appel à la résolution d'équations algébriques du premier ou du second degré.

Voici deux exemples simples :

I - "Le taux d'intérêt étant de 5 pour 100 par mois, une certaine somme s'élève à 96 (unités) au bout d'un an. Trouver le capital et l'intérêt".

Ganitatilaka, V.112

Soient S une somme de 100 (unités)
T le taux d'intérêt (ici 5)
M le montant total (capital + intérêts)
N le nombre de mois (ici 12)
C le Capital
I les intérêts

La solution indienne proposée revient à effectuer les opérations suivantes :

$$C = \frac{SxM}{S+(TxN)} = \frac{100x96}{100+(5x12)} = \frac{9600}{160} = 60$$

$$I = \frac{TxNxM}{S+(TxN)} = \frac{5x12x96}{100+(5x12)} = \frac{5760}{160} = 36$$

II - "Le taux d'intérêt étant de 5 pour 100 par mois, l'assurance de 1 pour 100 par mois, les honoraires du comptable 1/2 pour 100 par mois, les frais de scribe 1/4 pour 100 par mois, une certaine somme se monte à 905 (unités) au bout d'un an. (Trouver le capital, les intérêts, l'assurance, la part du comptable et celle du scribe)".

Ganitatilaka, V. 114

On procède comme précédemment :

Soient S une somme de 100 (unités)
T1 le taux d'intérêt (ici 5)
T2 le taux d'assurance (1)

T3 les honoraires du comptable (1/2)

T4 les frais de scribe (1/4)

M le montant total

N le nombre de mois

C le capital

I les intérêts

A l'assurance

H les honoraires du comptable

F les frais de scribe

On obtient :

$$C = \frac{S \times M}{S + (T_1+T_2+T_3+T_4) \times N} = \frac{100 \times 905}{100 + (5+1+1/2+1/4) \times 12} = 500$$

et I = 300, A = 60, H = 30 et F = 15

Histoire des Mathématiques indiennes : Bibliographie

BAG, A.K., Mathematics in Ancient and Medevieval India, Benares, Chaukhambha Orientalia, 1979.

DATTA, B., SINGH, A.N., History of hindu mathematics, a source book, Parts I and II, (Réimpression) Bombay/London, Asia Publishing House, 1962.

FILLIOZAT, P.-S., MAZARS, G., "Observations sur la formule du volume de la pyramide et de la sphère chez Aryabhata", Bulletin d'Etudes Indiennes, 3, 1985, p. 37-48.

FILLIOZAT, P.-S., MAZARS, G., "La terminologie et l'écriture des fractions dans la littérature mathématique sanskrite", Bulletin d'Etudes Indiennes, 5, 1987, p. 67-96.

MAZARS, G., "La notion de sinus dans les mathématiques indiennes", Fundamenta Scientiae, 15, 1974, p. 1-23.

MAZARS, G., "L'Inde", dans : Le Matin des mathématiciens, Paris, Editions Belin-Radio France, 1985, p. 122-123.

MAZARS, G., "Les fractions dans l'Inde ancienne de la civilisation de l'Indus à Mahâvîra (IXe siècle)", Histoire de fractions, fractions d'histoire, Basel/Boston/Berlin, Birkhäuser Verlag, 1992, p. 209-218.

MAZARS, G., "Introduction à l'histoire des mathématiques indiennes", D'Imhotep à Copernic. Astronomie et mathématiques des origines orientales au moyen âge. Actes du Colloque International. Université Libre de Bruxelles 3-4 novembre 1989. Lettres Orientales 2 - Cahiers d'Altaïr édités par Fr. Mawet et Ph. Talon, Leuven, Peeters, 1992, p. 75-82.

MEHTA, D.D., Mathematics in the Vedas, New Delhi, Academy of Vedic Researches, 1959.

RANGACARYA, M., The Ganita-sara-sangraha of Mahaviracarya with english transsssssslation and notes. Introduction by David Eugen Smith, Madras, Government Press, 1912.

SARASVATI AMMA, T.A., Geometry in Ancient & Medieval India, Delhi, Motilal Banarsidass, 1979.

SEN, S.N., BAG, A.K., The Sulbasutras of Baudhayana, Apastamba, Katyayana and Manava with Text, English translation and commentary, New Delhi, Indian National Science Academy, 1983.

SHUKLA, K.S., SARMA, K.V., Aryabhatiya of Aryabhata critically edited with introduction, english translation, notes, comments and appendices, New Delhi, Indian National Science Academy, 1976.

SRINIVASIENGAR, C.N., The history of ancient indian mathematics, Calcutta, World Press, 1967.

Guy MAZARS - Nancy - 14/01/1993

Note sur l'histoire des sciences en Chine avec une référence particulière à l'histoire des mathématiques

Karine Chemla, REHSEIS, CNRS

I - Introduction

Le développement des sciences présente des figures différentes selon qu'on l'observe en Asie ou, en un sens large, autour du Bassin méditerranéen. Par exemple, si la poursuite de l'activité scientifique a nécessité en "Occident", et ce de manière récurrente, que l'on procède à des traductions (de grec en syriaque, de grec en arabe, de sanskrit en arabe, d'arabe en latin, d'hébreu en latin, de grec en latin...), la situation fut tout autre en Asie : malgré les différences de langue qui affectent du Nord au Sud, de l'Est à l'Ouest, la communication orale entre Chinois, ceux-ci partagent la même langue écrite et peuvent donc se lire mutuellement ; de même la Corée, le Japon ont adopté les caractères chinois pour écrire leur langue, pourtant fort éloignée de la langue chinoise. Ceci eut pour conséquence que les mêmes textes scientifiques chinois continuèrent à servir de classiques pendant des siècles et sur des milliers de kilomètres : ils furent l'objet de commentaires répétés en Chine, mais, de plus, ils servirent de point de départ pour le développement d'une activité scientifique en Corée et au Japon. En ce sens, la Chine a joué son rôle d'"Empire du Centre", et l'histoire des sciences en Chine est un passage obligé pour qui veut travailler sur les sciences en Asie.

Cependant, sur ce fond de continuité qui le singularise, le développement des sciences connut en Chine une dynamique de même type que partout ailleurs : dans la mesure où les textes que nous avons conservés offrent un reflet fidèle de ce qui s'est passé, on y note des périodes d'activité intense, marquées par des productions scientifiques nombreuses et diversifiées, et des périodes plus ternes qui n'ont laissé que peu d'oeuvres marquantes. C'est dans le contexte d'une période de moindre importance scientifique que s'amorcèrent à la fin du XVIème siècle des relations scientifiques plus intenses entre Chine et Europe, qui devaient contribuer à la construction de ce que nous connaissons aujourd'hui sous les espèces de la "science mondiale". Nous nous arrêterons un instant sur ce moment de premier contact significatif et montrerons comment cette rencontre avec la science "occidentale" devait par réaction amener à lancer les recherches sur l'histoire des sciences en Chine. Puis nous nous concentrerons sur le cas des mathématiques pour esquisser le profil de leur développement, tel qu'il nous apparaît aujourd'hui dans le droit fil de cette tradition.

2 - Rencontre scientifique entre Chine et Europe : les débuts de l'histoire des sciences en Chine.

L'introduction en Chine de sciences venues d'Occident, à partir de la fin du XVIème siècle et ce jusqu'à l'orée du XIXème siècle, est due pour l'essentiel à la conception que les missionnaires jésuites se sont faite de leur tâche.Ceux-ci décidèrent de tirer parti de la curiosité que leurs connaissances scientifiques et techniques suscitaient chez les gouvernants chinois pour obtenir le droit de s'installer en Chine. Là, à la différence des membres d'autres ordres religieux, ils choisirent de se rendre utiles auprès du pouvoir par leur activité scientifique et d'introduire des connaissances diverses. Ayant compris le bénéfice qu'ils pouvaient tirer de leur savoir, ils prirent l'option de l'exploiter et firent venir d'Occident Jésuites érudits, livres et instruments, définissant ainsi un type particulier de mission. Leurs motivations étaient multiples : se maintenir en Chine, pouvoir y effectuer des conversions et faire valoir la supériorité de leur religion par la vertu d'une identification entre religion chrétienne et "science occidentale". Ainsi la Chine eut accès à des connaissances scientifiques développées en Occident dans un contexte bien précis qui modela de plusieurs manières le processus de leur introduction.

Deux conditions étaient nécessaires pour une telle rencontre. Il fallait tout d'abord que les Chinois soient en mesure d'apprécier les objets techniques, les savoirs scientifiques, de leurs interlocuteurs. Dans certains cas, ils furent émerveillés, par les mécaniques de petite taille comme les montres ou par les instruments comme les prismes,- ce qui ne manqua pas de leur faire en Europe une réputation de "peuple crédule", fasciné par la verroterie - J. Spence a décrit avec talent la convoitise pour une horloge qui décida un préfet chinois à prendre sous sa protection les Jésuites Matteo Ricci et Ruggieri, l'année de leur entrée en Chine, en 1583. Dans d'autres cas, les lettrés chinois eurent un bon goût scientifique qui atteste de la vitalité intellectuelle de leurs milieux à l'époque : c'est ainsi qu'ils s'intéressèrent aux six premiers livres des **Eléments** d'Euclide, que M. Ricci traduisit en collaboration avec un érudit chinois tôt converti au christianisme, Xu Guangqi et publia en 1607.

Mais il fallait aussi que ces connaissances scientifiques aient un parfum de nouveauté. Si les horloges mécaniques devinrent la coqueluche des milieux dirigeants, ce fut pour beaucoup parce que la magnifique tradition chinoise d'horlogerie, qui atteignit son plein développement entre les dixième et quatorzième siècles, sous les dynasties Song et Yuan, était tombée dans l'oubli, de même que bon nombre d'autres connaissances. De même, par exemple que les contributions mathématiques du XIIIème siècle, qui avaient amené les savants chinois à la pointe du savoir mathématique de leur temps et dont les traces écrites étaient soit perdues soit devenues incompréhensibles. Certes, l'introduction d'Euclide en Chine portait à la connaissance des lettrés un type de géométrie dont il semble qu'il ne s'y soit pas développé antérieurement. Mais le niveau mathématique des gens auxquels elle s'adressait n'avait plus de commune mesure avec les sommets atteints au XIIIème siècle. L'abaque était devenue l'instrument par excellence du calcul, l'arithmétique l'essentiel de la culture mathématique.

La perte de connaissances scientifiques affectait aussi un domaine beaucoup plus important pour le gouvernement chinois, celui des techniques calendériques. En effet, l'établissement du calendrier a toujours été en Chine sous le contrôle de l'Etat qui tirait autorité de son adéquation avec les événements célestes. Or le calendrier en vigueur lors de l'arrivée des Jésuites, datait pour l'essentiel du XIIIème siècle et présentait des insuffisances que les dirigeants chinois essayaient depuis longtemps avec un succès mitigé de juguler. Les Jésuites, ayant bénéficié de connaissances calendériques qu'avait rendues communes la réforme récente du calendrier en Europe, saisirent là l'opportunité de se rendre indispensables à la Cour et y placèrent, pour ainsi dire en otages, quelques-uns d'entre eux, tandis que les autres pouvaient poursuivre leurs activités missionnaires. De même, ils trouvèrent nombre de terrains d'intervention cruciaux, comme la réalisation de cartes qui rencontraient des intérêts militaires ou la connaissance de langues qui les amena à participer à des négociations diplomatiques.

Quelles furent les caractéristiques principales de ce transfert de science ? Tout d'abord, il porta essentiellement sur les sciences appliquées, dans la mesure où la priorité était de se rendre utile à court terme. Pour ce qui est de l'introduction de savoir théorique lorsqu'elle eut lieu, comme dans le cas des livres d'Euclide, elle nécessita la création, presque *a nihilo*, de toute une terminologie, en chinois, qui pourrait permettre la traduction. Cette création à laquelle s'attelèrent Ricci et Xu Guangqi fournit à la terminologie mathématique chinoise un socle sur lequel elle repose encore aujourd'hui.

Par ailleurs, ces savoirs divers furent dispensés par des éléments certes brillants, mais en aucun cas par des pionniers de la science européenne contemporaine. Le résultat en était prédictible : ce furent des connaissances datées qui furent présentées. Ainsi les chinois n'entendirent pas parler de calcul différentiel avant le milieu du XIXème siècle. Dans le contexte particulier qui fut celui de l'introduction des sciences occidentales en Chine, ce fait eut des conséquences fâcheuses. Par exemple, en matière de théories astronomiques, ç'avait été le système ptolémaïque qui avait été introduit, donné à l'appui des prévisions astronomiques réussies qui avaient installé des Jésuites au bureau impérial d'astronomie. Mais, plus tard, alors qu'en Europe le système de Galilée devint largement accepté, l'identification que les Jésuites avaient pratiqué entre l'excellence de la science "occidentale" et celle de la religion chrétienne les contraint à ne pas pouvoir se "dédire", à ne pas pouvoir remplacer le système ptolémaïque par un autre, sous peine de saper l'autorité qu'ils avaient acquise par une science qui se devait d'apparaitre tout aussi unique que la religion. L'on voit donc que les Chinois ne furent pas, à l'époque, introduits dans la communauté scientifique internationale.

Enfin, et c'en est une autre raison, par le fait que leurs motivations les amenaient essentiellement à gagner les faveurs du pouvoir, les Jésuites ne destinèrent leurs enseignements scientifiques qu'à l'intention d'un milieu restreint, et ces savoirs ne diffusèrent pas dans l'ensemble des milieux lettrés, ils restèrent confinés entre les murs des palais.

Néanmoins cela initia une intensification de l'activité scientifique en Chine, par exemple en astronomie, en mathématiques... Mais cela amena aussi les Chinois à s'interroger sur leur passé. Ces connaissances venaient-elles d'Occident, en prouvaient-elles la supériorité ? N'étaient-elles pas des savoirs dont les Chinois jouissaient par le passé et qu'ils auraient oubliés ? L'on commença alors à rechercher les textes scientifiques anciens, à les éditer, à tenter de les comprendre. Dès le XVIIème siècle, l'on voit un scientifique comme Mei Wending mettre à profit le contenu de tels textes pour effectuer une synthèse entre mathématiques chinoise et occidentale. Et cette volonté de synthèse sera une des caractéristiques de l'activité scientifique ultérieure. Cependant d'autres textes anciens résistaient à la lecture. Peut-on imaginer ce que pensèrent les Chinois lorsqu'au début du XVIIIème siècle, ils purent mettre à profit l'algèbre récemment introduite pour parvenir à déchiffrer enfin des textes du XIIIème siècle et qu'ils y découvrirent l'équivalent de cette algèbre avec laquelle on voulait leur démontrer la supériorité de l'Occident ?

Toujours est-il que l'activité scientifique en Chine s'accompagna systématiquement d'une activité historique, visant à la mise à jour de l'héritage chinois, et l'on peut reconnaître là les débuts de l'histoire des sciences en Chine, débuts dont tout historien des sciences chinoises aujourd'hui est tributaire.

Nous ne pouvons présenter ici un bilan global de tout ce que l'on a trouvé sur le sujet depuis. Le lecteur intéressé pourra se reporter à la bibliographie qui clôt ce texte, et tout particulièrement à l'oeuvre magistrale par laquelle J. Needham a amené des occidentaux à découvrir le passé scientifique chinois. Nous nous contenterons ici de donner un bref aperçu de l'histoire des mathématiques, dont le profil reflète par plus d'un aspect la situation d'autres sciences.

3 - Aperçu de l'histoire des mathématiques en Chine

Les premiers documents mathématiques que nous ayons datent de la dynastie Han (du troisième siècle avant notre ère au troisième siècle après). Avec cette dynastie, on voit se mettre en place les institutions essentielles de l'Empire chinois. Cela s'accompagna de l'organisation d'archives, de la réalisation de bibliographie, de l'édition des textes importants dans tous les domaines, philosophiques, scientifiques..., d'une mise en ordre des données, telles les données astronomiques. Ce fut aussi le moment de la définition et du figement des grands classiques, comme les textes confucéens. De même en mathématiques, probablement au premier siècle, on rédigea les Neuf Chapitres sur les Procédures Mathématiques, fruit d'une compilation des connaissances mathématiques antérieures dont nous sommes encore capables de décrire la genèse. Tous les mathématiciens ultérieurs, surtout jusqu'au XIIIème siècle, se réfèreront à cet ouvrage, le travailleront, s'en serviront comme source et comme modèle.

Les mathématiques qu'on y trouve sont liées pour partie aux besoins de la bureaucratie : problèmes de taxes, d'échanges, de répartition de travaux, constructions architecturales... Mais c'est l'occasion d'y aborder de nombreux domaines de la recherche mathématique. En particulier, les Neuf Chapitres contiennent l'ensemble des règles pour l'arithmétique fractionnaire, la règle de trois, des procédures pour les partages inégaux, des algorithmes pour l'extraction de racines carrées et cubiques ainsi que la résolution de certaines équations du second degré, des formules pour le calcul d'aires et de volumes, la règle de fausse double position (qui permet la résolution, même approchée, de n'importe quel problème), des algorithmes pour chercher les solutions de systèmes d'équations linéaires simultanées, et de nombreux problèmes mettant en oeuvre ce que l'on a coutume d'appeler le théorème de Pythagore. Bref, il s'agit là d'un des livres mathématiques les plus importants qui existent au début de l'ère commune. Les siècles ultérieurs verront la rédaction d'un certain nombre d'ouvrages qui seront réunis sous le titre Les mathématiques en dix livres lorsque, pour la première fois dans l'histoire chinoise, l'on instituera au 7ème siècle un bureau de mathématiques. C'est probablement à son caractère officiel que l'on doit d'avoir pour l'essentiel conservé cet ouvrage. Bien d'autres nous manquent, dont seuls les titres nous sont conus grâce à la compilation des bibliographies impériales.

Les sujets abordés dans les Dix livres reprennent pour la plupart ceux que l'on trouve dans les Neuf Chapitres. Mais l'on y rencontre aussi de nouvelles questions, en particulier des résolutions de problèmes d'analyse indéterminée qui portent aujourd'hui encore en mathématiques le nom de chinois. L'intérêt que leur ont porté les mathématiciens provient vraisemblablement de leur utilité pour établir le calendrier, point dont nous avons déjà vu l'importance en Chine.

Cependant la création d'un bureau de mathématiciens ne semble pas avoir eu pour conséquence d'activités mathématiques particulièrement notables. L'on pense que peu de choses furent produites avant le onzième siècle où à nouveau une période d'or de la science chinoise se profile. Les débuts de l'imprimerie amènent à la publication, entre autres, des textes scientifiques anciens, dûment édités, au nombre desquels les Neuf Chapitres. Corrélativement, des commentaires nouveaux en sont faits, des résultats nouveaux apparaissent, prélude à l'apogée du XIIIème siècle, à l'époque de laquelle l'on rencontre les résultats les plus intéressants : résolution des équations de degré quelconque et à coefficients quelconques, algèbre polynomiale à plusieurs indéterminées, techniques d'élimination, théorème des restes chinois, sommations de séries... Puis, pour des raisons encore mal élucidées, l'activité mathématique se tarit ; bientôt les nouvelles éditions des textes du XIIIème siècle révèlent que les mathématiciens ne sont plus en mesure de les comprendre. Parallèlement, l'abaque, l'arithmétique deviennent le centre de l'activité mathématique... C'est la situation dans laquelle les Jésuites trouveront la Chine, à la fin du XVIème siècle.

Outre offrir à la réflexion des matériaux pour aborder les questions que pose la dynamique des civilisations scientifiques, la Chine nous donne l'exemple d'une tradition mathématique, qui s'est développée indépendamment des influences grecques et qui possède ses propres références. Elle constitue ce faisant un cas idéal pour analyser ce que peut être à proprement parler une tradition en mathématiques. En particulier, on aperçoit, à la lecture des textes mathématiques chinois des traits caractéristiques, récurrents, et qu'on peut pour la plupart trouver dès les Neuf Chapitres sur les Procédures Mathématiques.

Le style mathématique de cet ouvrage, qui procède par problèmes et algorithmes de résolution, ne l'oppose pas à la majeure partie des textes d'autres traditions anciennes, comme les traditions babylonienne, égyptienne, indienne... Cependant les algorithmes que l'on y rencontre possèdent des propriétés qui semblent le singulariser. Ils sont rédigés de manière générale. Ils recourent aux itérations, aux conditionnelles, à l'assignation de variables, trois éléments de la rédaction des algorithmes qu'un spécialiste moderne de l'algorithme, D. Knuth, a reconnu comme en étant les opérations fondamentales. Plus encore, les mathématiciens chinois se sont intéressés aux rapports que pouvaient entretenir les uns avec les autres des algorithmes comparables, ils en ont retravaillé les descriptions jusqu'à faire apparaître les analogies. Parfois, ils ont même fusionné des algorithmes devenus, au moins partiellement, formellement identiques, et ce même lorsque le sens de leurs opérations dans les divers contextes dans lesquels ils les ont appliqués pouvaient se trouver être différents.

On relève, par ailleurs, dans les Neuf Chapitres une prédilection pour les notations positionnelles, qui reviendra à plusieurs endroits dans l'histoire des mathématiques en Chine. De même que 1 dans 123 signifie de par sa position 100 (propriété que les calculs arithmétiques que l'on trouve ont su mettre en oeuvre), de même les mathématiciens chinois ont recouru de manière recurrente à l'utilisation de positions pour désigner les inconnues et leurs puissances, peut-être induits à cela par l'instrument de calcul qui a prédominé avant la diffusion massive de l'abaque : la surface à calculer, avec baguettes.

A travers ces caractéristiques, brièvement exposées, on voit des particularités récurrentes se faire écho pour signaler, peut-être, ce que furent les intérêts théoriques propres à la tradition mathématique chinoise, intérêts dont l'obsession euclidienne a inhibé la recherche systématique en histoire des mathématiques.

Guide Bibliographique :

Pour une présentation d'ensemble sur l'histoire des sciences en Chine, le lecteur peut se reporter à l'oeuvre encyclopédique publiée sous la direction de Joseph Needham, Science and Civilisation in China, Cambridge University Press, 1954, (pour la partie consacrée aux mathématiques: Vol. III, pp. 1-168). Les premiers volumes de cette encyclopédie ont fait l'objet de deux compte-rendus substantiels : l'un par Lynn White jr. et Jonathan Spence (Isis. 75 : 1 : 276 (1984), pp. 171-189), l'autre par Mark Elvin, Willard Peterson, U. Libbrecht, C. Cullen (Past and Present, 87 (1980), pp. 17-53).

On trouvera par ailleurs une liste des textes que Joseph Needham publia avant 1973 sur l'histoire des sciences en Chine dans Changing Perspectives in the History of Science, Essays in Honour of Joseph Needham, collection d'essais réunis par M. Teich et R. Young (Heinemann, London, 1973).

Les ouvrages les plus importants en sont :

- J. Needham et Lu Gwei-Djen, Celestial Lancets. A History and Rationale of Acunpuncture and Moxa, Cambridge University Press, 1980, 432 p.
- J. Needham, Science in Traditional China, Harvard University Press, Chinese University of Hong-Kong Press, 1981, 136 p.
- J. Needham et Lu Gwei-Djen, Transpacific Echoes and Resonances : Listening Once Again, World Scientific, Singapore, Philadelphia, 1985, 100 p.
- J. Needham, Lu Gwei-Djen, John H. Combridge, John S. Major, The Hall of Heavenly Records, Korean Astronomical Instruments and Clocks, 1380-1780, Cambridge University Press, 1986, 204 p.
- J. Needham, Wang Ling, Derek J. de Solla Price, Heavenly Clockwork, The Great Astronomical Clocks of Medieval China. Seconde édition, avec un supplément de John Combridge, Cambridge University Press, 1986, 268 p.

Deux recueils d'articles de J. Needham ont été traduits en français :

La science chinoise et l'Occident, (Collection Points, sciences, Le Seuil, 1973) et La tradition scientifique chinoise, (Collection Savoir, Hermann, 1974).

Un troisième est en préparation aux éditions la Découverte, sous la direction de G. Métailié (à paraître fin 1990).

Nous ne pouvons mentionner ici l'ensemble de la littérature asiatique sur le sujet, cependant le lecteur trouvera dans l'ouvrage suivant un reflet de l'activité chinoise en matière d'histoire des sciences en Chine :

Ancient China Science and Technology, un ensemble d'articles préparés par les chercheurs de l'Institut d'Histoire des Sciences de la Nature, Academia Sinica, Foreign Language Press, Beijing, 1983.

De même, on peut consulter le recueil d'articles issus de la revue Isis, que Nathan Sivin a publié : Science and Technology in East Asia, History of Science : Selections from ISIS, Science History Publications, 1977.

L'on pourra compléter ces indications bibliographiques grâce au numéro spécial en deux volumes que la Revue d'Histoire des Sciences (tome XLII-4 (1989) et tome XLIII-1 (1990) a consacré à l'histoire des sciences en Chine : on y trouvera de nombreuses contributions à ce sujet ainsi qu'une bibliographie des titres les plus importants.

Plusieurs ouvrages donnent un aperçu général de l'histoire des mathématiques en Chine :

Yoshio Mikami, The Development of Mathematics in China and Japan, in Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen begruendet von Moritz Cantor, XXX Heft, 1913, reprinted by Chelsea Publishing Company.

Adolf P. Juschkewitsch, Geschichte der Mathematik im Mittelalter, B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1964.

Li Yan and Du Shiran, Chinese Mathematics : A concise History, 1987, traduit du chinois par John N. Crossley et Anthony W.C. Lun, Oxford Science Publications.

Jean-Claude Martzloff, Histoire des mathématiques chinoises, Masson, 1987.

On trouvera la traduction en allemand de l'ouvrage fondamental du premier siècle, les Neuf Chapitres sur les procédures mathématiques, dans :

K. Vogel, Neun Bücher arithmetischer Technik, 1968, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig.

Pour une analyse de quelques preuves contenues dans les commentaires de Liu Hui aux Neufs Chapitres (troisième siècle), voir :

Donald Wagner "An early derivation of the volume of a pyramid : Liu Hui, third century A.D. Historia Mathematica, 6 (1979), pp. 164-188.

Donald Wagner "Liu Hui and Tsu Keng-chih on the volume of a sphere", Chinese Science, 3, (1978), pp. 59-79.

Les grands traités du treizième siècle sont analysés dans les ouvrages suivants :

Ulricht Libbrecht, Chinese Mathematics in the Thirteenth Century, MIT University Press, 1973.

Lam Lay yong, A critical Study of the Yang Hui Suan Fa, a Thirteenth Century Chinese Mathematical Treatise, Singapore University Press, 1977.

John Hoe, Les systèmes d'équations polynômes dans le Siyuan Yujian (1303), Mémoires de l'Institut des hautes Etudes Chinoises, volume VI, 1977.

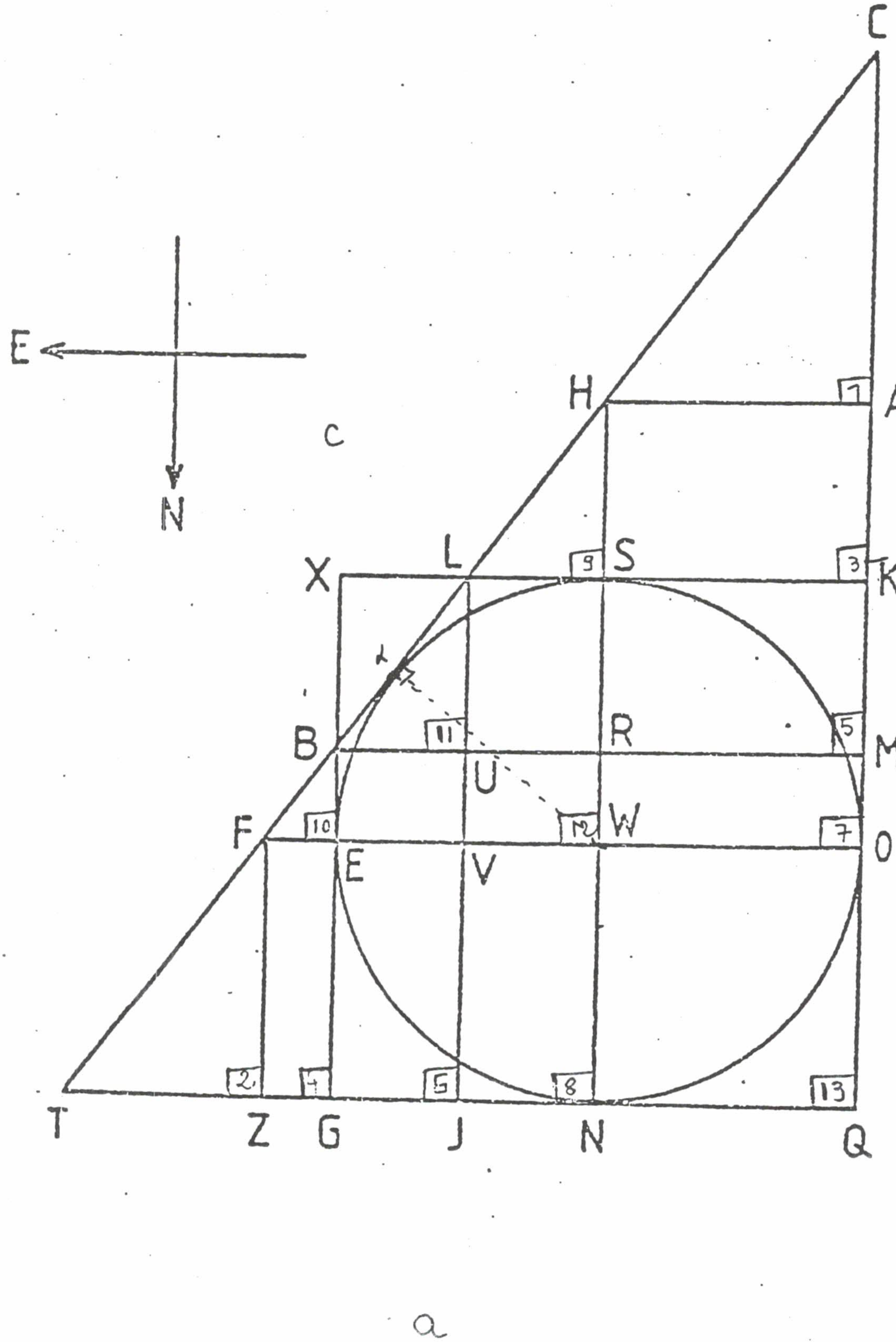
Karine Chemla, Etude du livre "Reflets des mesures du cercle sur la mer" de Li Ye, thèse non publiée, Université de Paris XIII, 1982.

L'étude de l'activité mathématique en Chine après les contacts avec les sciences occidentales est abordée dans :

Jean-Claude Martzloff, Recherches sur l'oeuvre mathématique de Mei Wending (1633-1721), Mémoires de l'Institut des Hautes Etudes Chinoises, vol. XVI, 1981.

Catherine Jami, Les *Méthodes rapides pour la trigonométrie et le rapport précis du cercle* (1774). Tradition chinoise et apport occidental en mathématiques, Mémoires de l'Institut des Hautes Etudes Chinoises, vol. XXXII, 1990.

De nombreux articles sur l'histoire des sciences en Chine sont publiés dans les revues suivantes : Chinese Science (éditée par N. Sivin), Historia Mathematica (éditée par E. Knobloch), Archive for History of Exact Sciences (éditée par C. Truesdell).



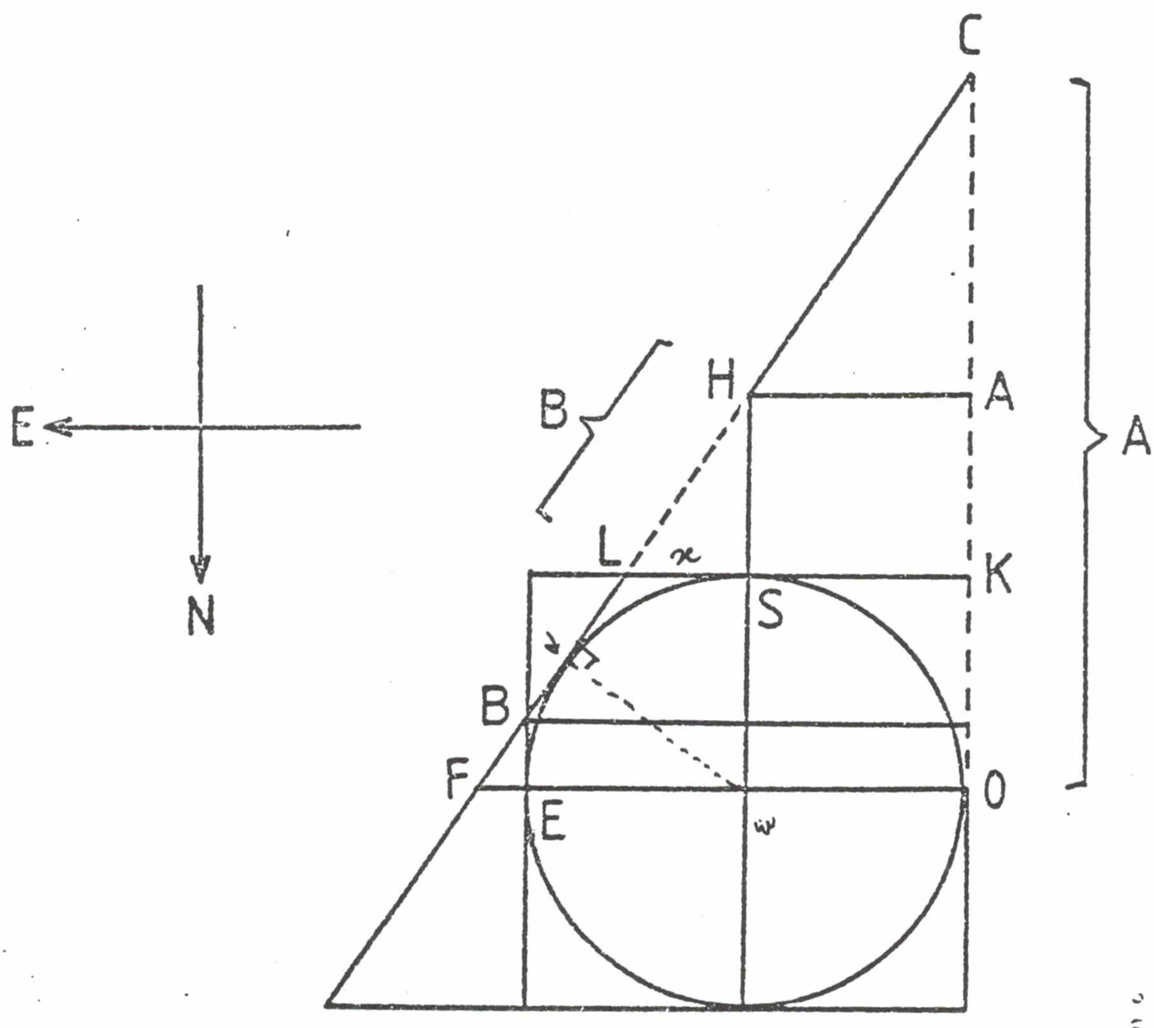
b

numérotation of triangles

HKWα = CHA

échange base-haut

1 → 2
3 → 4


E
N
C
H
A
A
B
L
x
K
S
B
F
E
0
ω

problème III-13

énoncé : on connaît OC (A), 480; HL (B), 153 . Question et réponse comme précédemment.

première méthode	calcul symbolique
Une fois prise la différence entre les deux données	A-B
du double de celle-ci, on retranche OC;	2(A-B)-A
puis avec OC on multiplie ceci;	A.(2(A-B)-A) = h
ce qui est mis en haut;	
ensuite avec HL au carré,	
on multiplie la place d'en haut	B².(A(2(A-B)-A)) = a
ce qui donne le terme constant.	
(...)	
l'extraction de la racine donne LS , 72	

description terme à terme des éléments de l'équation pas de données numériques

détail de la méthode:	calcul du terme constant
poser l'inconnue égale à LS;	calcul symbolique sur 3 termes constant
ajouté à LH, cela donne $\boxed{\begin{matrix}1 \times \\ 153\end{matrix}}$ comme CA;	B
soustraire CA de CO; il reste $\boxed{\begin{matrix}-1 \times \\ 327\end{matrix}}$ comme CH ;	-B+A
doubler ceci donne $\boxed{\begin{matrix}-2 \times \\ 654\end{matrix}}$ comme CB;	2(A-B)
en retrancher CO donne $\boxed{\begin{matrix}-2 \times \\ 174\end{matrix}}$ comme BE	2(A-B)-A

raisonnement géométrique doublé de données numériques puis avec C0 on multiplie ceci;

cela donne $\boxed{\dfrac{-960\ x}{83520}}$, qui est mis en haut;

ensuite L élevé au carré, donne 23409

comme dénominateur.

en multiplier ce qui est en haut

donne $\boxed{\dfrac{-\ 22472640\ x}{1955119680}}$ comme le rayon au carré

(portant un dénominateur)

placer à gauche

(suit un calcul polynomial différent de la même quantité; puis, par élimination, on obtient une équation vérifiée par l'inconnue choisie)

A(2(A-B)-A)

$B^2(A(2(A-B)-A))$

1/ on construit une représentation polynomiale du carré du rayon.

2/ dans une autre document on opère une autre représentation

3/ en faisant la différence on trouve l'inconnue $\frac{x}{3}$

3 polynômes sont représentés positionnellement

1		x^2	
2	x	$2x$	$x = x^1$
3		3	

problème III-13

<u>calcul du terme constant</u>: A-2B A(A-2B) $B^2(A(A-23)) = a$	<u>deuxième méthode</u>: de OC, on retranche 2 HL; puis avec OC, on multiplie ceci; puis avec HL au carré, on multiplie ceci, ce qui donne le terme constant d'une équation du quatrième degré. Les autres coefficients sont tous identiques à ceux de la méthode précédente.
A-B B A-B-B (ce qui suit est identique à la première méthode)	<u>détail de la méthode</u>: (...) poser l'inconnue égale à LS; la retrancher à la différence des deux nombres donnés, ce qui fait $\boxed{\begin{array}{c}-1\times\\327\end{array}}$ égal à CH. CH retranché de CO donne $\boxed{\begin{array}{c}1\times\\153\end{array}}$ égal à CA. CA retranché de la différence des deux nombres donnés donne $\boxed{\begin{array}{c}-1\times\\174\end{array}}$ égal à LB. puis l'inconnue retranchée de LB donne $\boxed{\begin{array}{c}-2\times\\174\end{array}}$ égal à BE. (...)

problème IV-13

<u>énoncé</u>: on connaît TN (A'), 200; FB (B'), 34. Question et réponse comme précédemment.

<u>première méthode</u>:

Une fois prise la différence entre les deux données
du double de celle-ci, on retranche TN;
puis avec TN, on multiplie ceci,
ce qui est mis en haut
puis avec FB au carré,
on multiplie la place d'en haut
ce qui donne le terme constant.

(...)

<u>détail de la méthode</u>

poser l'inconnue égale à BE;

ajouté à BF, cela donne $\boxed{\begin{matrix}1 \times \\ 34\end{matrix}}$ comme TZ ;

soustraire TZ de TN; il reste $\boxed{\begin{matrix}-1 \times \\ 166\end{matrix}}$ comme TF;

doubler ceci donne $\boxed{\begin{matrix}-2 \times \\ 332\end{matrix}}$ comme TL;

de cette hypoténuse retrancher TN;

le reste donne l'expression suivante $\boxed{\begin{matrix}-2 \times \\ 132\end{matrix}}$ comme LS.

(...)

草曰識別得二數相減餘[illegible]爲高股虛弦其又爲[illegible]
明勾其此餘數內又去半徑即明和也明和明弦相[illegible]
即股因差相減則明黃方也又倍明弦加明黃亦得[illegible]
因差也邊股內減明勾餘即大差弦也　立天元一爲[illegible]
明勾減於云數相減數得[illegible]即高弦也以高弦減[illegible]
股得[illegible]即高股也以高股減於云數相減數得[illegible]
即虛弦也以天元又減虛弦得[illegible]即直股也乃置[illegible]
弦以天元乘之得[illegible]合明弦除不受除便以此爲[illegible]
勾也（即半徑）高勾自之得[illegible]爲半徑冪（內帶分母明）[illegible]
寄左 然後置邊股以直股乘之得[illegible]爲半徑冪又以[illegible]

明弦冪二萬三千四百○九分母通之得[illegible]爲同[illegible]
與左相消得實從廉隅五層一如前式
或問邊股四百八十步高弦二百五十五步問答同前
法曰以邊股減於二之高弦復以邊股乘之開平方[illegible]
半徑
草曰立天元一爲半徑先倍高弦內減邊股餘[illegible]復[illegible]
邊股乘之得[illegible]寄左 以天元冪與左相消得[illegible]○
開平方得數倍之即減徑也合問
戊問[illegible]

Mathématiques Japonaises

La période la plus importante pour les mathématiques japonaises fut le XVIIème, XVIIIème et la première moitié du XIXème siècle.

La première époque peut être appelée : époque d'Edo (1600 à 1668). En 1600 le shôguun Tokugawa s'installe à Edo (Tôkyô) et unifie le pays. Au début du XVIIème siècle, la paix favorise la vie culturelle du pays, le commerce se développe. Les japonais se servent des traductions d'ouvrages chinois mais ne produisent pas leurs propres mathématiques.

En 1627 parution du "traité inaltérable " (Jinkoki) de Yoshida Mitsuyoshi ; ce manuel eut un grand succès. On y trouve les règles des opérations, une succession de petits problèmes utilisant la règle de trois, les proportions, des problèmes de répartition (cf. Pb. n° 33 annexe n° 1).

Mitsuyoshi est issu d'une famille de marchands de Kyoto grand centre économique de l'époque. L'auteur s'est inspiré d'un ouvrage chinois de la fin du XVIème siècle, à cette période les mathématiques chinoises sont plus évoluées et les japonais s'en inspireront jusqu'au milieu du XVIIème siècle.

A cette même époque (1630 environ) le pays se ferme à l'occident : expulsions, interdictions visant les missionnaires et les marchands portugais. Les sciences occidentales n'influenceront pas l'évolution des mathématiques japonaises.

En 1641 le Jinkoki est réédité, on y ajoute des problèmes sans solution : "les problèmes légués". Les solutions seront publiées les années suivantes en y ajoutant d'autres problèmes légués.

En 1658 est publié une version japonaise du traité chinois **"Introduction à la science du calcul"** (Suanxue quimeng) datant de la fin du XIIIème siècle. Cet ouvrage est parvenu au Japon via la Corée, à cette époque ce manuel a disparu en Chine, les japonais éprouvent des difficultés pour en comprendre le contenu.

(Utilisation des nombres négatifs et positifs, écriture avec des batonnets, algèbre polynomiale) - cf. Pb. n° 30 annexe n° 1 -

En 1670 parution du **"traité de mathématiques anciennes et modernes"** (Kokan sanpôki) de Sawaguchi Kazuyuki avec à la fin 15 problèmes à résoudre.

En 1674 Seki Takakazu considéré comme le plus grand mathématicien japonais publie le **"Traité de mathématiques qui dévoile le sens caché"** (Hatsubi sampô). Seki est un samouraï de

Odo, pour lui les mathématiques ne doivent pas être simplement des méthodes de calculs pour résoudre des problèmes de marchands. Il considère les mathématiques comme une science permettant de comprendre le mouvement des astres, d'établir le calendrier. Il classe les problèmes en différentes catégories :

- problèmes se résolvant sans l'aide de l'algèbre
- problèmes se résolvant avec une algèbre utilisant une inconnue.
- problèmes se résolvant avec une algèbre utilisant plusieurs inconnues.

Dans son livre, Séki donne les solutions des problèmes légués de Sawaguchi mais il ne rajoute pas d'autres problèmes. Les solutions qu'il propose sont contestées car incomplètes, onze ans plus tard un de ses disciples publiera les solutions complètes. Séki développe l'algèbre : il se libère de l'écriture en bâtonnets (héritage chinois) et passe à une écriture en notation littérale avec des idéogrammes ; dans les équations, il procède par élimination progressive des inconnues qui deviennent des données. Il propose également un calcul du déterminant, sa méthode imparfaite sera améliorée plus tard. Il s'est aussi intéressé au calcul de Π, mais ses résultats ne sont pas satisfaisants car il a considéré Π comme une fraction.

Takebe, samouraï et disciple de Séki dès l'âge de 13 ans, va poursuivre les recherches de Séki. Dans sa vie on peut distinguer 2 époques : la première où il seconde Séki, la deuxième où il est conseiller auprès du Shogum pour l'astronomie et les mathématiques. A cette époque, vers 1720, le Japon s'ouvre à l'occident, levée partielle de l'interdiction portant sur les adaptations d'ouvrages occidentaux réalisées par les Jésuites de Chine, rencontre de Takebe avec des marchands hollandais résidant sur un îlot artificiel dans la baie de Nagasaki. Mais ce ne sont pas des savants et ils ne peuvent répondre à toutes les questions de Takebe. Ces marchands hollandais vont apporter et vendre aux japonais des ouvrages scientifiques occidentaux. Takebe constatera alors une similitude entre ses travaux et ceux des occidentaux.

En 1854, signature des premiers traités de paix entre le Japon et les puissances occidentales, en 1872 le nouveau gouvernement rend l'enseignement du calcul occidental obligatoire dans les écoles primaires. A partir de cette époque la spécificité des mathématiques japonaises disparait.

Annexe n° 1

Exemples de problèmes :

Problème n° 33

Jinkôki de Yoshida Mitsuyoshi

Pour deux ponts, on a besoin de 21 kanme d'argent (1). Parmi ces 21 kanme, 7 sont à fournir par l'ensemble des secteurs de la ville. Les secteurs compris entre les deux ponts fournissent un montant égal, et ceux situés à l'extérieur des ponts versent respectivement une somme en diminution d'une pièce d'argent(2). Quand on sait qu'il y a de part et d'autre des ponts trois et sept secteurs, on demande le montant versé par chacun des secteurs du milieu (3).

1 - Unité de poids.

2 - Une pièce d'argent vaut 43 monme.

3 - Il existe plusieurs versions de ce problème, certains problèmes donnent la réponse, d'autres non. Certains énoncés précisent le nombre de secteurs entre les deux ponts : 4.
Le calcul est simple : Pour les 7 secteurs situés à l'extérieur du pont A, on a la série 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Et pour l'autre pont, 1, 2, 3. Ce qui donne un total de 28 et 6 respectivement. En les ajoutant et en les multipliant à 43 monme, on obtient 1 kanme 462 monme. Ajouté à 7 kanme, on a 8 kanme 462 nonme. Divisé par 14, on a approximativement 604, 43.

Problème 30, chapitre Kaifang shisuo, Suanxue qimeng (Introduction à l'art du calcul).

"On a maintenant une pyramide à base carrée dont le volume est 9408 *chi*. On dit seulement que la racine carrée de la hauteur est inférieure au côté de la base de 22 *chi*. On demande combien valent respectivement le côté de la base et le hauteur".

"La réponse est : le côté de la base 28 *chi* ; la hauteur 36 *chi* ;
La procédure est :

1 - On pose l'unité de l'élément céleste : on dit que c'est la racine de la hauteur.

2 - Multiplier par lui-même : ce qui donne la hauteur.

3 - Placer à nouveau la racine. Ajouter le "ce dont il est inférieur". Cela donne le côté de la base.

4 - Multiplier par lui-même, puis multiplier par la hauteur : on dit que c'est 3 fois le volume de la pyramide. Placer à gauche.

5 - Placer le volume. Multiplier par 3. Annuler le nombre placé à gauche. On obtient la configuration pour l'extraction de la racine.

6 - Extraire la racine. On obtient 6 *chi*. Ce qui donne la racine de la hauteur. En ajoutant le " nombre dont il est inférieur", on obtient 28 *chi*. Multiplier par lui-même, cela donne la hauteur. C'est ce qui était demandé".

Annexe n° 2

Exemple de résolution d'une équation du type (P(x) = 0 proposé par Séki.

$16 - 8x + x^2 = 0$

$P(x) = a + bx + cx^2$

Il choisit une valeur u et calcule des coefficients a_1 ; b_2, c ainsi :

a	$a_1 = b_1 u + a$	a_1	a_1
b	$b_1 = cu + b$	$b_2 = c_1 u + b$	b_2
c	c	c	c

a_1 ; b_2 ; c sont les coefficients d'un polynôme

$Q(y) = a_1 + b_2 y + cy^2$ avec $x = y + u$ tel que $P(x) = Q(y)$

Si le coefficient a_1 est nul alors $x = u$ est solution sinon il recommence le procédé jusqu'à ce que a_1 soit nul.

$16 - 8x + x^2 = 0$

$u = 1$

16	$a_1 = 9$	$a_1 = 9$	
-8	$b_1 = -7$	$b_2 = -6$	$Q(y) = 9 - 6y + y^2$
1	$c = 1$	$c = 1$	avec $x = y + 1$
	$u = 3$		

9	$a_1 = 0$	$a_1 = 0$	$Q(z) = z^2$
-6	$b_1 = -3$	$b_2 = 0$	avec $y = z + 3$
1	$c = 1$	$c = 1$	or a_1 est nul donc
			$y = 3$ et $x = 3 + 1 = 4$

La solution de $16 - 8x + x^2 = 0$ est 4

Annexe 3

Factorisation d'un polynôme par la méthode de Hörner (1819) - (mathématicien anglais 1786-1837)

$P(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + e\,x^4$

Tout polynôme peut s'écrire

$P(x) = a + x\,(b + x\,(c = x\,((d + ex)))$

Si on remplace x par y + u

$P(x) = a + (y + u)\,(b + (y + u)\,(c + (y + u)\,(d + e\,(y + u))))$

$P(x) = a + (y + u)\,(b + (y + u)\,(c + (y + u)\,(d + ey + eu)))$

on pose $d_1 = d + eu$

$P(x) = a + (y + u)\,(b + (y + u)\,(c + (y + u)\,(ey + d_1)))$

$\quad = a + (y + u)\,(b + y\,(y + u)\,(c + ey^2 + d_1 y + uey + ud_1))$

on pose $d_2 = d_1 + eu$ et $c_1 = d_1 u + c$

$P(x) = a + (y + u)\,(b + (y + a)\,(ey^2 + d_2 y + c_1))$

$\quad = a + (y + u)\,(b + ey^3 + d_2\,y^2 + c_1 y + uey^2 + ud_2 y + uc_1)$

on pose $d_3 = d_2 + eu$ $c_2 = c_1 + d_2 u$ et $b_1 = b + uc_1$

$P(x) = a + (y + u)\,(b_1 + c_2 y + d_3 y^2 + ey^3)$

$P(x) = a + yb_1 + c_2\,y^2 + d_3\,y^3 + ey^4 + ub_1 + uc_2 y + ud_3 y^2 + uey^3$

on pose $d_4 = d_3 + ue$ $\qquad c_3 = c_2 + ud_3$ $\qquad b_2 = b_1 + uc_2$ $\qquad a_1 = a + b_1$

$P(x) = a_1 = b_2\,y + c_3\,y^2 + d4\,y^3 + ey^4$

Disposition pratique du calcul des coefficients de :

a	$a_1 = b_1 u + a$	a_1	a_1	a_1	a_1
b	$b_1 = c_1 u + b$	$b_2 = c_2 u + b_1$	b_2	b_2	b_2
c	$c_1 = d_1 u + c$	$c_2 = d_2 u + c_1$	$c_3 = d_3 u + c_2$	c_3	c_3
d	$d_1 = eu + d$	$d_2 = eu + d_1$	$d_3 = eu = d_2$	$d_4 = d_3 + eu$	d_4
e	e	e	e	e	e

CONFERENCE DU 22 JANVIER 1993

LE PROGRAMME D'ERLANGEN

On appelle programme d'Erlangen le texte du discours prononçé par Félix Klein lors de son admission à l'Université d'Erlangen en 1872. Ce texte est un des fondements de la géométrie moderne : il arrive à un moment carrefour de la géométrie et permettra l'émergence d'un nouveau point de vue. Le thème central en est : toute géométrie est un espace muni d'un groupe de transformations, et faire de la géométrie c'est étudier les ensembles de points invariants par les transformations. Par exemple, la géométrie euclidienne plane est le plan muni du groupe des isométries, et la géométrie projective est le plan projectif muni du groupe des transformations projectives.

L'objectif de cet exposé est une présentation sommaire des origines historiques et mathématiques de ce point de vue. La recherche en géométrie durant la première moitié du XIXème siècle s'est développée suivant trois directions a priori distinctes : la géométrie projective avec Poncelet (1788-1857) ; les géométries non-euclidiennes de Gauss (1777-1855), Lobatchevski (1797-1846) et Bolay Fils (1802-1860) ; l'étude des groupes de transformations avec Jordan (1838-1922) et Galois (1811-1832).

Le premier à établir un lien entre ces différents courants est Cayley (1821-1895) qui réussit à montrer que la géométrie euclidienne est un cas particulier de géométrie projective, mais il ne voit pas qu'il en est de même pour les géométries non- euclidiennes. C'est Klein qui fera cette démonstration.

A -Eléments de géométrie projective

La géométrie projective est basée sur une quinzaine d'axiomes dont l'axiome fondamental est : deux droites sont toujours sécantes.

Dans le point de vue moderne, on définit le plan projectif P2 (R) = R*3/ : où est la relation d'équivalence -ensemble des droites de R3. Si x appartient à P2(R), x peut être représenté par un vecteur de R3 (x1, x2, x3) et on appelle groupe projectif le groupe des transformations noté G (P2(R)), qui vérifient :

$$g : M \longrightarrow M' \quad \text{tel que} \quad \begin{cases} x'1 = \sum_{1}^{3} a1j\, xj \\ x'2 = \sum_{1}^{3} a2j\, xj \\ x'3 = \sum_{1}^{3} a3j\, xj \end{cases}$$

On définit les invariants : fonctions F de P2 (R) dans C qui mesurent de manière scalaire des configurations de l'espace telles que :

$$\forall g \in G : F(M1, \ldots, Mn) = F(M'1, \ldots, M'n) \text{ où } M'i = g(Mi)$$

Dans P2 (R), il n'y a pas d'invariants à trois points car il existe des projections envoyant ABC sur A'B'C'.

Si quatre points sont alignés, le birapport : $\frac{tc-tA}{tc-tB} : \frac{TD-TA}{tD-TB}$ est invariant -

C'est l'invariant fondamental car tous les invariants s'y ramènent. Mais si les points ne sont pas alignés, il n'y a pas d'invariant.

On démontre aussi que tout invariant de cinq points dont trois ne sont pas alignés se ramène à l'invariance du birapport.

On démontre enfin que la géométrie affine est un cas particulier de géométrie projective.

On considère la droite (D) de P2 (R) d'équation homogène ($x3 = 0$) que l'on appelle "droite à l'infini" (Plûcker) et le plan affine P2 (R) (D). On montre assez facilement que l'ensemble des transformations qui conserve (D) est un sous-groupe de G qui est appelé sous-groupe affine.

On dira que la géométrie affine est la "géométrie projective moins les points à l'infini".

B ELEMENTS SUR LES GEOMETRIES NON-EUCLIDIENNES.

L'histoire de la genèse des géométries non-euclidiennes est assez connue : elle repose sur la tentative de démontrer ou d'éclaircir le cinquième postulat d'Euclide. Jusqu'au début du XIXème siècle, malgré des travaux qui paraissent arriver trés près des géométries non-euclidiennes, les mathématiciens restent bloqués sur la représentation euclidienne dogmatisée de l'espace -représentation dont Kunt a fait un "a priori" à toute expérience. C'est Gauss le premier qui ose à partir de 1813 dépasser cette conception sans pourtant rien publier directement sur le sujet.

Vers les années 1825, Lobatchevski et Bolay arrivent, semble-t-il indépendamment, à construire une géométrie dans laquelle par un point extérieur à une droite passe une infinité de "non-sécantes" à cette droite et où la somme des angles d'un triangle est inférieure à deux droits.

L'hypothèse inverse, la somme des angles est supérieure a deux droits, ne retient pas leur attention. Elle apparaissait pourtant dès le XVème siècle dans certains traités de géométrie sphérique où on montre, pour un triangle d'une sphère plongée dans l'espace, que la somme des angles est supérieure à deux droits. En fait, il faut étudier les surfaces en tant que variétés et non sous-variétés ; c'est Riemann qui franchira cette étape dans son mémoire d'habilitation à l'Université de Goêttingen en 1854. On s'apercevra après que la conception Riemanienne s'applique à la géométrie de Gauss et Lobatchevski.

Riemann utilise les travaux de Gauss sur la courbure des surfaces plongées. Pour une courbe du plan, on définit la courbure $C = \frac{1}{R}$ où R est le rayon de courbure.

Gauss généralise le procédé aux surfaces et définit la courbure dite "de Gauss" égale à $\frac{1}{R1} \times \frac{1}{R2}$

où R1 et R2 sont respectivement les rayons de courbure maximale et minimale. Riemann étend cette notion aux espaces de dimension quelconque.

Avec une courbure nulle, on se trouve en géométrie euclidienne. Dans le cas d'une courbure négative, les géodésiques divergent, ce qui correspond à la géométrie de Gauss et Lobatchevski. Si $c = -1$ on parle de géométrie hyperbolique. Enfin, si la courbure est positive, les géodésiques convergent et on est dans l'hypothèse riemannienne. On conclut cette partie par deux exemples de géométrie hyperbolique et un de géométrie à courbure positive.

1)- Dans R3 muni de la métrique $d\,x2 + d\,y2 - d\,z2$, S l'hyperboloïde d'équation $x2 + y2 - z2 = 1$
$z >= 0$
utilisé comme surface plongée. La restriction de la métrique au plan tangent en M est définie positive ; la courbure est alors égale à -1.

2) - Demi-plan de Poincaré

3)- La sphère est un modèle de surface à courbure positive où les géodésiques sont les grands cercles.

Klein a fait la synthèse des géométries non-euclidiennes et de la géométrie projective.

Par l'étude des coniques, Cayley a réussi a montrer que la géométrie euclidienne est un cas de la géométrie projective. Klein en exploitant les idées de Cayley cherche à partir de 1871 à faire le même travail pour les géométries non-euclidiennes. Pour cela, il étudie dans le plan projectif les coniques :

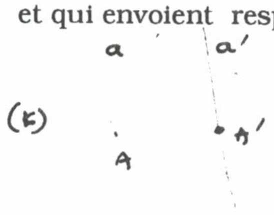
$$Ax_1^2 + Bx_2^2 + Cx_3^2 + Dx_1x_2 + Ex_1x_3 + Fx_2x_3 = 0.$$

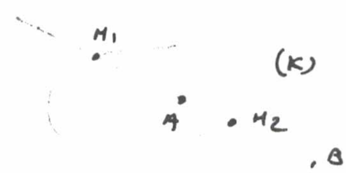
En choisissant des systèmes de coordonnées correctes, on se ramène à cinq types de coniques :

$x_1^2 = 0$, $x_1^2 + x_2^2 = 0$, $x_1^2 - x_2^2 = 0$: conique dégénéré
$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$: conique imaginaire
$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$: conique réel.

Klein s'intéresse au sous-groupe du groupe projectif qui conserve une conique (k) non dégénérée. Il démontre la proposition :

Soit (k) une conique donnée, A et A' des points de (k) , a et a' des directions. Il existe exactement deux transformations projectives qui conservent (k) et qui envoient respectivement A sur A' et a sur a'.





La démonstration utilise la polarité. Si le birapport $(B\,M_1\,A\,M_2) = -1$, on dit que A et B sont conjugués harmoniques par rapport à (k). On montre que l'ensemble des conjugués harmoniques de A est une droite appelée polaire de A. On applique la polarité à la configuration de la proposition. Enfin, Klein établit une distance de nature purement projective : si P et Q sont des points de P2 (R), U et V, les points d'intersection de (PQ) et de (k) , on pose d (P,Q) = log (P, Q,U, V). On montre que d est une distance. On arrive donc à la conclusion suivante :

Si (k) est réel, on se trouve dans la géométrie de Gauss, Bolay, Lobatchevski.

Si (k) est imaginaire, on retrouve la géométrie sphérique de Riemann.

Si (k) est dégénéré, on est dans le cadre des travaux de Cayley, avec la droite à l'infini et les points cycliques fixes. C'est la géométrie euclidienne.

Toutes les géométries sont projectives, elles se distinguent par le sous-groupe de G (P2 (R)). On doit rappeler qu'à l'époque on ne possède pas encore de notion précise du plan projectif, on travaille essentiellement en coordonnées ou de manière axiomatique.

En conclusion, Klein établit la classification de la terminologie suivante :

- géométrie à courbure négative : c'est la géométrie hyperbolique liée à une conique réelle avec laquelle toutes les droites ont deux points d'intersection. (L'hyperbole a deux points d'intersection avec la droite à l'infini).

- géométrie à courbure positive : c'est la géométrie elliptique liée à une conique imaginaire avec laquelle les droites n'ont pas de point d'intersection. (L'ellipse ne coupe pas les droites à l'infini).

- géométrie à courbure nulle : c'est la géométrie euclidienne ou parabolique puisque les droites coupent la conique en un seul point réel.

Bibliographie

ROSENFELD : A. History of Non-Euclidian Geometry - Ed. Springer-Verly

YAGLOM : Klein and Lie

EFINON : Geometrie Supérieure - Ed. MIR.

Expérience de travail en histoire des sciences dans une classe de 1° A_2

L'idée de ce travail est née de deux choses ; une conversation avec une collègue de philo qui trouvait ses élèves de terminale A peu réceptifs à son cours d'épistémologie et, d'autre part l'opportunité de travailler avec un groupe restreint de 15 élèves, taille de classe qui offrait la possibilité d'un travail dans lequel on pouvait dépasser le programme officiel de la section.

Sur les deux heures hebdomadaires, on en a consacré en moyenne une à l'histoire des mathématiques. Deux thèmes ont été traité sous forme d'exposés magistraux comme première approche possible de connaissance à développer dans le dossier de terminale. :

- l'émergence de la notion de nombre et des nominations en prenant l'exemple des civilisations Assyrio-babyloniennes. Le même exposé devant faire l'objet d'une présentation aux élèves de terminale en philo à la suite du cours d'épistémologie.

- Une présentation de diverses cosmologies des grecs à Képler.

Par ailleurs, durant le deuxième trimestre, les élèves ont eu à faire deux recherches sur l'astronomie et la géométrie grecques ; en étudiant en particulier Ptolémée et d'Euclide.

Enfin, le troisième trimestre a été consacré à la présentation par les élèves d'exposés dont ils avaient chosi le thème ; Les textes d'un de ces exposés est présenté ci-après. Les élèves ont largement exploité la documentation présente dans l'établissement. A cet effet, nous avions prévu, après le choix des thèmes, deux séances de travail au C.D.I. pour guider les recherches des élèves dans un fond bibliographique qu'ils connaissent mal.

L'expérience paraît avoir été positive et a, semble-t-il permis à des élèves en difficultés en mathématiques d'aborder la matière de façon différente. On peut affirmer que certains se sont vraiment pris au jeu et ont fourni un travail intéressant qui peut déjà être une esquisse de leur dossier en terminale.

Le texte choisi a pour thème : les sciences hindoues

D'autres exposés ont eu pour objet les sciences arabes, les nombres ou des biographies de scientifiques : Pascal, Descartes, Newton, Fermat.

Les mathèmatiques indiennes

I - Rappel : la civilisation de l'Inde

Les fouilles archéologiques entreprises dans les ruines de l'antique cité ont révélé l'existence d'une civilisation contemporaine dont la culture était probablement aussi riche et aussi diversifiée que celle des civilisations de la vallée du Nil et de la Mésopotamie. Cependant la rareté des documents nous oblige à la prudence lorsqu'il s'agit de déterminer la contribution mathématique du peuple hindou vers le IIIème millénaire avant J.C., les aryens envahissent l'Inde et parviennent à dominer le peuple hindou en imposant le système des castes (classe formant une des divisions hiérarchiques de la société et dont l'institution, à l'origine, a permis d'établir, semble-t-il, une démarcation entre les conquérants aryens, venus des plaines de l'Asie centrale, et les populations arborigènes locales) une littérature comportant les textes sacrés de l'hindouisme se développe au Vème siècle avant J.C., Bouddha enseigne les principes de sa religion mais le bouddhisme fut par la suite éliminé de l'Inde, par respect du systèmes des castes. Au IVème siècle avant J.C., l'Inde est tour à tour dominée par plusieurs peuples puis à partir du IIIème siècle après J.C. les empereurs d'origine hindoue règnent sur le pays jusqu'au Vème siècle où l'Inde connaîtra l'occupation étrangère jusqu'au début du XVème siècle.

II - Apparition des mathématiques dans la civilisation indienne

La chute de l'empire romain, en 476 après J.C. marque la naissance d'un des deux Aryabhata, auteur d'un ouvrage hindou sur les mathématiques. Par ailleurs, certains textes de l'Inde nous sont connus et dont nous évaluons l'origine, quoique incertaine, avant l'ère chrétienne. De plus la construction des autels religieux exigeaient des connaissances mathématiques telles qu'il est impensable d'imaginer que les premières activités hindoues en mathématiques ne commencent qu'au début de l'ère chrétienne.

L'ensemble des connaissances requises pour ériger les temples et les autels se trouve dans les subrasutras ou règles des cordes. Subra → se réfère à des cordes utilisées pour effectuer des mesures. Sutra → signifie ensemble de règles.

Le tout est écrit en vers. Trois versions nous sont connues, celles : d'Apastamba, de Bandhayama, de Katyayana

Dans ces oeuvres, on trouve des règles de construction d'angle droits au moyen de triplets de cercles dont les longueurs forment des triplets pythagoriciens.

Les problèmes qui traitent de l'équivalence de carrés et de rectangles ont trait à la construction d'autels dont la taille était déterminée à l'avance. Ainsi au moyen du théorème de Pythagore, les hindous pouvaient construire un carré égal à la somme de deux carrés, un rectangle égal à un carré donné, un carré égal à la différence de deux carrés.

Dans certaines constructions pratiques bien spécifiques, on devrait nécessairement réaliser, quoique imparfaitement, la quadrature du cercle (construction d'un cercle égal à une aire donnée) et en conséquence, on constate dans les subasutras des tentatives pour solutionner le problème célèbre des oracles de Delos.

Selon Kaye, les hindous s'intéressaient au théorème de Pythagore car il servait bien leurs besoins mais le concept du nombre irrationnel était pour eux inexistant. Par la suite, les sub... n'ont pas influencé le reste des mathématiques indiennes. Il semble bien qu'un laps de temps considérable sépare la période des subasutras des premiers développements ultérieurs des mathématiques indiennes influencées par les concepts astronomiques occidentaux.

Au moment où le roi Gupta fonde sa dynastie, on assiste à une renaissance de la culture et l'Inde devient un foyer culturel et intellectuel, les Siddhantas apparaissent.

III - <u>Les Siddhantas</u>

Vers le IVème siècle après J.C., les Siddhantas ou systèmes astronomiques apparaissent. Si les subasutras contiennent des mathématiques essentiellement appliquées à la religion, les Siddhantas renferment des mathématiques assujetties surtout à l'astronomie. Cinq versions nous sont connues : Paulisha, Surya, Vasisishta, Paitamaha, Ramanka.

Le Surya Siddhantas ou système du soleil écrit vers 400 semble être le seul complet. Le contenu astronomique est nettement d'origine grecque mais présente de nombreuses anciennes croyances hindoues. Le contenu mathématique est essentiellement composé de trigonométrie et a une origine inconnue (on se demande encore aujourd'hui si l'influence est extérieure - grecque, babylonienne ou chinoise - ou si elle est propre aux hindous). La trigonométrie présentée dans les Siddhantas est différente de celle présentée par C. Ptolémée.

Trigonométrie de Claude Ptolémée	Trigonométrie extraite des Siddhantas
- relation fonctionnelle entre les cordes d'un cercle et l'angle qui sous-tend chacune des cordes.	- relation fonctionnelle entre une demi-corde et le demi-angle au centre qui sous-tend cette demi-corde. Cela correspond approximativement à la fonction sinus.

Remarque : la fonction sinus qui a été reprise plus tard par le moine bouddhiste I - Hsing qui a utilisé la table sinus à base 3438 pour analyser les mesures de l'ombre du soleil pour construire une table de longueur des ombres. Les musulmans en constuiront une autre un siècle plus tard.

IV - Un grand mathématicien : Aryabhata

A partir du VIème siècle, on connaît les noms des mathématiciens hindous qui ont contribué à faire avancer la trigonométrie, l'algèbre et la théorie des équations par des travaux qui sont parvenus jusqu'à nous alors que certains de leurs prédécesseurs ne nous sont connus que par un petit nombre de fragments très peu élaborés.

Le plus ancien et probablement le plus important fut Aryabhata qui a écrit en 499 un ouvrage consacré formellement aux mathématiques, intitulé "Aryabhatira" divisé en quatre parties :

- "Harmonies Célestes",
- "Eléments de calcul",
- "Du temps et de sa mesure",
- "Les sphères".

Ce petit livre descriptif a pour but de fournir les règles de calculs usuelles en astronomie et dans les maths de la mesure, le tout présenté sans aucune méthodologie préalable et constituant un sommaire des travaux antérieurs.

Dans cet ouvrage on trouve :

- des règles pour effectuer les racines carrées et les racines cubiques.
- des règles de mesure (dont une bonne partie sont fausses)
- des éléments de géométrie en termes de formules (lesquelles sont vraies pour l'aire du triangle, du cercle avec $\pi = 3{,}1416$, du trapèze et sont fausses pour le volume de la pyramide, de la sphère et l'aire de toute figure plane : (produit de deux côtés)

- des règles arbitraires - en ce qui regarde les progressions arithmétiques, en termes de la somme, du nombre de termes et de la différence entre les termes.
- des problèmes d'intérêts composés en termes de progressions géométriques.
- des identités algébriques simples.

Voici la deuxième règle sur les progressions arithmétiques telle que la présente l'Aryabhatiya.

(Rappel : progression arithmétique : suite de nombres tels que la différence entre l'un d'eux et celui qui le précède immédiatement est une quantité constante appelée raison 1, 4, 7, 10, 13 ... (raison + 3).
"Multiplier la somme de la progression par 8 fois la différence commune, additionner le carré de la différence entre 2 fois le 1er terme et la différence commune, effectuer la racine carrée de ceci, soustraire 2 fois le 1er terme, diviser par la différence commune, ajouter 1, diviser par 2. Le résultat sera le nb. de termes".

ex : progression : 1, 4, 7, 10, 13 ...

La deuxième partie du livre d'aryabhata porte sur la mesure du temps et la trigonométrie sphérique. On trouve la phrase suivante : "De place en place, chacun est 10 fois le précédent".

* L'auteur croyait en termes de la valeur en place composante essentielle de notre système positionnel.

Chez Aryabhata on ne trouve pas de symbole pour le zéro et sa notation est déficiente à plusieurs points de vue. Cependant il faut admettre que les astronomes hindous écrivaient en vers et que la nature rythmique de l'écriture occasionnait beaucoup d'ennuis à ceux qui exprimaient les nombres par des noms susceptibles de remplir le rôle de rimes. Ainsi les astronomes hindous ont substitué vers le IXème siècle des noms aux nombres : 1 → lune

2 → yeux

3 → feu ou frère

etc...

afin que ces nombres puissent être intégrés aux vers.

* Facilité de mémorisation notamment pour la table du sinus exprimée en vers que l'on retrouve dans l'Aryabhatiga où les sinus d'angle (cordes) sont donnés de 0 à 90° à chaque intervalle de $3° \frac{3}{4}$. Le rayon utilisé par Aryabhata est de 3438 et la circonférence correspond à 60 . 360 = 21600. Pour la trigonométrie $\pi = \sqrt{10}$. Pour le sinus de $3 \frac{3°}{4}$, on trouve dans les Siddhantas et

l'Aryabhatiya la valeur 225 (c'est-à-dire 60 x 3 $\frac{3}{4}$. Les autres valeurs, multiples de 3° $\frac{3}{4}$ sont obtenues par une formule de récurrence : soit le "n" le nb, "sn" le sinus pour $1 \leq n \leq 24$ et SN la somme des n premiers inus alors sn + 1 =
$sn + s1 - \frac{SN}{S1}$.

On trouve aussi dans cette table les valeurs équivalentes à $1 - \cos\theta$ de $\theta = 3\frac{3°}{4}$ à θ de $\theta = 3\frac{3°}{4}$ $\theta = 90°$.

Il est difficile de minimiser l'utilité et la précision.

* Les outils trigonométriques des hindous dans les calculs astronomiques, même si l'on a de la difficulté à percevoir comment ils ont développé cette formule de récurrence cependant un fait demeure leur trigonométrie possède une précision suffisante pour leurs besoins pratiques en astronomie.

Brahgmagupta

Brahgmagupta était le plus grand mathématicien hindou du VIIème siècle. Vers 628, il a écrit un ouvrage d'astronomie intitulé Brahma-sphutasidd' hanta où le système révisé de Brahma, contenant 21 chapitres dont quelques uns sur les mathématiques. Dans ses ouvrages, il mentionne deux valeurs de π :

– la valeur pratique 3
- la valeur précise $\sqrt{10}$

Dans sa trigonométrie, il utilise un rayon de 3270 plutôt que celui de 3438 d'Aryabhata.

En géométrie, tout comme Aryabhata, il associe des résultats vraisemblables à des résultats contenant des erreurs.

Parmi ses contributions, nous pouvons mentionner sa généralisation de la formule d'Héron pour l'aire d'un quadrilatère, des solutions générales pour des équations quadratiques incluant des racines négatives et positives, l'arithmétique des nombres négatifs et du zéro, la solution générale d'une équation linéaire diaphantienne ax + by = c où a, b et c sont des entiers incluant toutes les solutions entières.

La généralisation de la formule d'Héron est formulée ainsi : $A = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$ où a, b, c, d, sont les côtés et s le demi-périmètre. Elle n'est valable que pour un quadrilatère cyclique et ça, les prédécesseurs de Brahmagupta ne l'avaient pas compris.

Dans la géométrie algébrique grecque, on retrouve l'équivalence de certaines relations numériques englobant les nombres négatifs (a+ b) (a – b) ; (– b) (+ b)... Ce sont les Hindous qui ont converti ces règles géométriques en règles numériques. La quantité négative y est considérée comme un nombre et 0 aussi.

Cependant, Brahmagupta, en arithmétique, n'arrive pas à trouver la solution de son affirmation :

"Positif divisé par positif, ou négatif divisé par négatif, est positif (donc $\frac{+}{1} = +$ et $\frac{-}{-} = +$). Zéro divisé par zéro est rien. Postifi divisé par négatif est négatif ($\frac{+}{-} = -$). Négatif divisé par positif ($\frac{-}{+} = -$) est négatif. Positif ou négatif divisé par zéro est une fraction en rapport avec le dénominateur".

Dans l'algèbre de Brahmagupta, les opérations élémentaires, les termes "inconnu", "entier", "seconde inconnu" et d'autres encore sont exprimés par des abréviations obtenues à partir des premières syllabes de certains mots comme produit, irrationnel, nombre absolu... En particulier, l'inconnue est exprimée par l'abréviation "yâ" provenant du mot "yâvattâvat" qui signifie "autant que".

Dans l'analyse indéterminée, il fut le premier, sans doute, à fournir une solution générale à l'équation diaphantienne $ax + by = c$ ou a, b, c sont des entiers. Pour cette équation, une solution entière est obtenue si le plus grand commun diviseur de a et b divise aussi c , et Brahmagupta savait que lorsque a et b sont premiers entre eux, toutes les solutions sont données par $x = r + mb$, $y = s - ma$, où m est un entier quelconque. De plus, il fournissait toutes les solutions entières à l'équation diaphantienne, alors que Diaphante se contentait le plus souvent de ne chercher qu'une solution. Il étudia aussi l'équation de Pell : $y^2 = ax^a + 1$ où a est un entier dont la racine carré est irrationnelle et dont la théorie complète ne sera achevée qu'avec les travaux de Lagrange au XVIIIème siècle.

VI Bhâshara

Après Brahmagupta, l'Inde a connu quelques mathématiciens dont le plus éminent fut Bhâshara (XIIème siècle). Il dépasse les mathématiques antérieures dans ses travaux. Il comblera certaines lacunes de Brahmagupha. Dans son principal traité, Lilavati (nom de sa fille), il a regroupé les problèmes de Brahmagupta et de bien d'autres, en y ajoutant sa note personnelle.

Dans un autre ouvrage, Bijaganita, on trouve le premier énoncé qu'un nombre différent de 0 divisé par 0 donne en quotient infini mais un peu plus tard, il admet que $\frac{a}{\grave{a}}$ x o = a. Donc sa compréhension du zéro n'est pas tout à fait au point.

Dans ces deux ouvrages, on retrouve les sujets préférés des Hindous :

- les équations linéaires et quadratiques
- les mesures
- les progressions arithmétiques et géométriques
- les irrationnels
- les triades pythagoriciennes
- de nombreux problèmes de nature géométrique et algébrique dont il nomme la méthode de résolution des équations trouvée par Tuyabkata "méthode du pulvérisateur" puis plus généralement "algèbre". Les solutions sont partielles.

L'analyse indéterminée occupe une place importante dans les problèmes traités par Bhâskara : il fournit des solutions particulières à l'équation : $x^a = 1 + py^2$; pour p = 8, 11, 32, 61 et 67. Par exemple lorsque $x^a = 1 + \delta\ 1y^a$ il trouve la solution x = 1 776 319 04^a et y = 22 615 390. Ce sont des résultats qui ont exigé de longs calculs. Comme Bhâskara n'a pas fait de distinction entre les résultats exacts et ceux estimés exacts, on ne peut affirmer que les mathématiques hindoues soient exactes.

En plus, Bhâskara a condamné les études de ses prédécesseurs notamment celles de Brahmagupta sur les aires et diagonales d'un quadrilatère général. Il n'a pas non plus remarqué que ces formules étaient exactes pour des quadrilatères cycliques.

VII - Conclusion

Les mathématiques hindoues, cultivées surtout par les prêtres, sont caractérisées surtout par un développement du calcul numérique et algébrique, une trigonométrie basée sur la fonction sinus ; l'algèbre et la géométrie, qui est pauvre, sont fondés sur de bons et de faux énoncés, sauf pour ce qui concerne l'étude des quadrilatères et de leurs propriétés. Elle est aussi caractérisée par un système de numérotation qui donnera naissance à notre système décimal avec les contributions des Arabes.

Annexe 1

L'algèbre en Inde est une tradition autonome qui n'est pas inspirée d'autres pays. Une technique de calcul illustre le talent des savants indiens : les permutations, les combinaisons et compositions à tiroirs. Les métriciens indiens ont trouvé le calcul des coefficients directeurs de la puissance n du binome en utilisant un triangle arithmétique : c'est le développement en pyramide.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

Cette pyramide confirme l'affinité en Inde entre les mathématiques et la littérature.

Annexe 2

Brahmagupta a découvert la règle d'addition au XIIème siècle.

Elle est ainsi formulée : "les sinus de deux arcs donnés sont multipliés l'un par le cosinus de l'autre et chaque produit est divisé par le rayon ; la somme des quotients est le sinus de la somme des arcs, et leur différence est le sinus de leurs différence" soit :

$$R.\ \sin(a+\beta) = \frac{R.\ \sin a \times R.\ \cos\beta}{R}$$

$$= \frac{I\,R.\ \sin\beta \times R\cos a}{R}$$

R = arc

Généalogie de notre système de numération