IREM de LORRAINE

BAC PRO

maths financières

Livre du Maître

Jean ENEL François LEIRITZ

© Edité et imprimé par l'**Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques** - (Université de NANCY I - Faculté des Sciences) - B.P. 239 - 54506 VANDOEUVRE-les-NANCY CEDEX
Dépôt légal : 1er trimestre 1994
n° de la publication : 2-85406-141-1
Responsable de la publication : Le Directeur de l'IREM, Michel BONN

QUESTION CLASSIQUE

PAR 2

Objectif: *Bon partage mixte prétexte à une question inattendue.*

Nombres proportionnels:

	Age	Composition de la famille	Fortune
Gonzague	40 ans	9	6 MF
Joséphine	32 ans	3	2,5 MF
Arnauld	n ans	1	3 MF

40 x 9 / 6	ou en simplifiant	**180**
32 x 3 / 2,5		**115,2**
n x 1 / 3		**n**

Tableau de proportionnalité:

G	J	A	G - J
180	115,2	n	64,8
			5,4

Part de Gonzague : 180 x 5,4 / 64,8 = **15 MF**
Part de Joséphine : 115,2 x 5,4 / 64,8 = **9,6 MF**
Part de Arnauld : 27,1 - (15 + 5,5) = **2,5 MF**

Age du Capitaine : n = 2,5 x 64,8 / 5,4 = **30 ans**

INTERESSANT INTERESSEMENT !

PAR 2

Objectif: *Construction d'une équation du 1er degré à partir de deux partages proportionnels simples.*

Ancienneté des salariés:

	Gaston	Robert	André	Total
fin 1987	9	5	4	18
fin 1989	11	7	6	24

Soit **x** le montant du résultat net de l'entreprise en 1987.
Montant de la prime totale fin 1987: x x 5 / 100 soit 0,05x
Part de Gaston en 1987: 0,05x x 9 / 18 soit 0,025x
Résultat net fin 1989: x x 120 / 100 soit 1,2x
Prime totale fin 1989: 1,2x x 5 / 100 soit 0,06x
Part de Gaston en 1989 : 0,06x x 11 / 24 soit 0,0275x

Equation:

0,0275x - 0,025x = 500
0,0025x = 500
x = 500 / 0,0025
x = 200 000

Bénéfice 1987 : 200 000 F
Bénéfice 1989 : **240 000 F**

SOUVENIRS

PAR 2

Objectif: *Histogramme et proportionnalité.*

1/ Lecture de l'histogramme des prix:

	(1)					(2)	
Prix	[0 - 200[	[200 - 350[	[350 - 400[	[400 - 500[	[500 - 650[	[650 - 900[	(2) - (1)
Aire	4 x 7 = 28	3 x 28 = 84	1 x 70 = 70	2 x 56 = 112	3 x 21 = 63	10,5 x 5 = 52,5	24,5
Nb d'articles	120	360	300	480	270	225	105

Chiffre d'affaire total:

Prix moyen	100	275	375	450	575	775
Produit	12 000	99 000	112 500	216 000	155 250	174 375

Total = **769 125 F**

2/ Nb d'articles vendus = 1860

Tableau de proportionnalité :

Artisanat	Photo...	Bimbeloterie	Divers	Total
6	3	4	3	16

Soit en quantité :

698	**349**	**465**	**349**	1860

VROOM

PAR 2

Objectif: *Distance, vitesse, temps et proportionnalité.*

Les trajets étant de même longueur, le temps de parcours est inversement proportionnel à la vitesse sur ce oarcours:

1/50, 1/90, 1/120 soit en simplifiant (dénominateur commun = 180) : 36, 20, 15

Tableau de proportionnalité:

Côte	Plat	Descente	Total
36	20	15	71
216	**120**	**90**	426

(en minutes)

Longueur du trajet en côte: 216 x 50 / 60 = 180 Km

Longueur totale = 180 x 3 = **540 Km**.

TVA EN EUROPE

PAR 3

Objectif: *Etudier le lien entre proportionnalité et pourcentages appliqués aux prix commerçiaux.*

Tableau de proportionnalité correspondant à une TVA de 25 %:

Prix H.T.	TVA	Prix TTC
100	25	125
	t	100

Pourcentage de TVA par rapport au prix TTC:
t = 25 x 100 / 125 = **20 %**
Soit en fraction : **1/5**

TVA sur un prix TTC de 95 000 F = 95 000 / 5 = **19 000F**
Prix de vente hors taxe correspondant = 95 000 x 4 / 5 = **76 000F**.

Proportionnalité entre les prix TTC en France, Allemagne et Grèce:
Attention : Erreur d'énoncé en dernière ligne ... le prix TTC en Allemagne ...

France	Allemagne	Grèce
125	114	136
95 000	**86 640**	**103 360**

JOYEUX NOEL !

PAR 3

Objectif: *Trois partages proportionnels classiques.*

1/ Parts proportionnelles aux enfants:

Nb d'enfants	2	1	4	7
Prime	**4 000**	**2 000**	**8 000**	14 000

2/ Parts inversement proportionnelles aux nbs de jours d'absence:

1/5, 1/10, 1/12 (dénominateur commun 60) soit 12, 6, 5

Absence	12	6	5	23
Prime	**8 400**	**4 200**	**3 500**	16 100

3/ Parts proportionnelles aux enfants et inversement proportionnelles aux absences :
Attention: omission dans l'énoncé du montant de la prime 13 000F.

2/5, 1/10, 7/12 (dénominateur commun 60) soit 24, 6, 35

Enf. / Abs.	24	6	35	65
Prime	**4 800**	**1 200**	**7 000**	13 000

VOYAGE DANS LES ILES

PAR 3

Objectif: *Partages proportionnels comportants la résolution d'une équation.*

Subvention proportionnelle à la superficie:

Corse	Sardaigne	Sicile	Total
8 700	24 000	25 700	58 400

Subvention proportionnelle à la population:

Corse	Sardaigne	Sicile	Total
280 000	1 600 000	4 900 000	6 780 000

Soit x le montant de la manne totale:

8700 x x / 58400 - 280000 x x / 6780000 = 895 314

0,148...x - 0,0412...x = 895314

0,107...x = 895314

x = 8 314 992 Montant de la somme totale = 8 314 992 F soit **1 187 859 ECU**

Somme reçue par chaque île:

1er cas: Corse = **1 238 706 F** Sardaigne = **736 448 276 lires** Sicile = **788 613 362 lires**

2ème cas : Corse = **343 392 F** Sardaigne = **422 896 552 lires** Sicile = **1 295 120 690 lires**

LES HEURES SUPPLEMENTAIRES

PAR 3

Objectif: *Partages proportionnels comportants la résolution d'un système d'équations.*

Soit x le nb d'heures supplémentaires effectuées par M.Colbert et y celui de M.Monnet:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 3 \\ x + y = 39 \end{cases}$$

La solution est x = **24** et y = **15**

Tableau de proportionnalité:

24 h	15 h	39 h
1 500 F	**937,50 F**	**2 437,50 F**

LA COOPERATIVE

PAR 4

Objectif: *Partages proportionnels simples avec lectures de données complexes.*

Recherche du bénéfice total pour l'année 1989:

Département Textile = 8 100 000 F (Total mobil de décembre 1989).

Département Mobilier = 4 460 000 F (Cumul de décembre 1989).

Département Loisirs = 480 000 + 460 000 + 440 000 + 500 000 + 550 000 + 600 000 + 400 000 + 240 000 + 300 000 + 420 000 + 480 000 + 540 000 = 5 410 000 F

Bénéfice total = **17 970 000 F**

Bénéfice redistribué = 17 970 000 x 0,50 = 8 985 000 F

Part destinée aux employés = 8 985 000 x 0,30 = **2 695 500 F**

Part destinée aux sociétaires = 8 985 000 x 0,70 = **6 289 500 F**

1/ Répertition entre les employés:

Partage proportionnel au bénéfice réalisé en décembre 1989:

Textile	Mobilier	Loisirs	Total
800 000	390 000	540 000	1 730 000
1 246 474	**607 656**	**841 370**	2 695 500

Partage proportionnel aux bénéfice cumulé 1989 :

Textile	Mobilier	Loisirs	Total
8 100 100	4 460 000	5 410 000	17 970 000
1 215 000	**669 000**	**811 500**	2 695 500

Partage proportionnel au total mobile de juillet 1989:

Textile = 7 300 000 F

Mobilier = 2 690 000 + 270 000 + 360 000 + 290 000 + 220 000 + 50 000 = 648 391 F

Loisirs = 400 000 + 600 000 + 550 000 + 500 000 + 440 000 + 460 000 + 480 000 +400 000 + 370 000 + 290 000 + 220 000 + 200 000 = = 4 950 000 F

Textile	Mobilier	Loisirs	Total
7 300 000	3 880 000	4 950 000	16 130 000
1 219 910	**648 391**	**827 199**	2 695 500

2/ Répartion entre les sociétaires:

	(2) Mme Dubois	Mme Dupont	(1) Mr Duchemin	Mr Durand	(2) - (1)	Total
Achats	26 500	32 000	3 400	8 400	18 100	**70 000 000**
Prime 1989	**2381,02**	**2875,19**	**305,49**	**754,74**	1 626,28	6 289 500

3/ Election des Délégués du Personnel:

	CGT	CFDT	CFTC	FO	CGC	Total
Nb de voix	185	286	112	293	148	1024
	5,78	8,94	3,5	9,12	4,63	32
Nb d'élus	**5 + 1**	**8 + 1** 6	**3**	**9**	**4 + 1**	

Quelques problèmes classiques

Un commerçant

Objectifs : Calculer avec des pourcentages indirects
Calculer et utiliser un coefficient multiplicateur
Calculer un prix de vente
Calculer un taux de TVA

Commentaires :

1)

a) -méthode algébrique :
Soit x le 1er net commercial : x- 5x/100 = 3610 ==> 0,95x = 3610
==> x = 3610/0,95 = 3800 F
Soit y le prix d'achat brut : y - 20y/100 = 3800 ==> 0,8y = 3800
==> y = 3800 / 0,8 = **4750 F**

Il s'agit de deux pourcentages successifs indirects. Trois méthodes possibles de résolution selon le niveau de compréhension des élèves.

b) -méthode par coefficients :
prix d'achat brut = 3610 X 100 / 95 X 100 / 80 = **4750 F**

Cette méthode rapide est à réserver aux élèves avertis car elle est dangereuse:les coefficients ne s'utilisent pas toujours de la même manière

c) -méthode par tableau de proportionnalité :

1er net	x	100
esc 5%		5
PAnet	3610	95

x X 95 = 3610 X 100

x = 3610 X 100 / 95 = 3800 F

méthode la plus sûre

PA brut	y	100
rem 20%		20
1er net	3800	80

y X 80 = 3800 X 100

y = 3800 X 100 / 80

y = **4750 F**

2) Prix d'achat net 3610

Frais d'achat : 3610 X 15 / 100 = 541,50
Coût d'achat : 3610 + 541,50 = 4151,50
Coût de revient : 4151,50 X 100 / 80 = 5189,38

Prix de vente HT : 4151,50 X 100 / 70 = **5930,71 F**

D'où marge brute = 5930,71 - 4151,50 = 1779,21 F
Le bénéfice est de 5930,71 - 5189,38 = **741,34 F**

20% est à nouveau un pourcentage indirect, le coût de revient n'étant pas connu.

On peut utiliser les autres méthodes.

3)

TVA versée à l'état : 348,10 F
TVA payée par le client : 5930,71 X x / 100
TVA déductible : 3610 X x / 100

Soit t le taux de TVA appliqué : 348,10 = 5930,71 X t / 100 - 3610 X t / 100
==> 348,10 = (5930,71 - 3610) t / 100 ==> 348,10 = 2320,71 X t / 100
d'où t = 348,10 X 100 / 2320,71 = 15

le taux est de **15%**

Le prix de vente est donc de 5930,71 X 115/100 = **6820,32 F**

4) coefficient PA brut-----> PV TTC : K= 6820,32 / 4750 = 1,4358561

nouveau PA brut : 4750 X 108 / 100 = 5130 F

nouveau PV TTC : 5130 X 1,4358561 = **7365,94 F**

il est plus judicieux de calculerle coefficient multiplicateur que de recommencer tous les calculs.
insister sur l'importance des décimales : ne pas arrondir.

UNE FACTURE A COMPLETER

N°	TVA	quantité	prix unitaire	% remise	prix unit.net HT	montant total net HT
1	A	*5*	*46,90*	4	45,02	225,10
2	C	*47*	12,00	*10*	10,80	*507,60*
3	B	10	*5,85*	3	*5,67*	*56,68*
4	B	*8*	79,20	3	*76,82*	614,56
5	A	*23*	8,70	*25*	6,53	*150,19*

TVA A à 7%		TVA B à 18,6%		*TVA C à 28%*		Montant total HT
base	montant	base	montant	base	montant	1554,14
375,29	*26,27*	*671,24*	124,85	*507,60*	*142,13*	*total TVA 293,25*
				Net à payer		1847,39 F

COEFFICIENTS MULTIPLICATEURS

Objectifs : Calculer et utiliser des coefficients multiplicateurs
Calculer la TVA
Calculer des pourcentages successifs
Calculer des pourcentages indirects

Prix d'achat brut	100
Remise 10%	10
1er net	90
Remise 5%	4,50
Prix d'achat net	85,50
Frais d'achat	10,26
Coût d'achat	95,76
Marge	63,84
Prix de vente HT	159,60
TVA	53,20
Prix de vente TTC	212,80

TVA déductible : 85,50 / 3 = 28,50F
TVA versée au fisc : 24,70F
Coefficient multiplicateur : 24,70 / 100 = **0,2470** (PA brut---> TVA versée)

Coefficient multiplicateur : 212,8 / 100 = 2,128 (PA brut---> PV TTC)
Pour un prix de vente TTC de 7840F, le prix d'achat brut sera de : 7840 / 2,128 = 3684,21F.
La TVA versée au fisc sera de 3684,21 X 0,2470 = **910F**

UN AUTRE COMMERCANT

Objectifs : Calculer des pourcentages par tranches
Calculer des taux
Utiliser des résultats

Commentaires :

1) Prix d'achat brut du lot : 25 X 520 = 13000 F
Remise 1ère tranche : 5000 X 2 / 100 = 100 F
Remise 2ème tranche : 5000 X 5 / 100 = 250 F
Remise 3ème tranche : 3000 X 10 / 100 = 300 F
Remise totale = 650 F
Prix d'achat net HT = 13000 - 650 = 12350 F
Prix d'achat net TTC = **13338 F** soit 533,52 F pour un article.

Les remises par tranches sont calculées sur le prix HT

A la 7ème ligne, il faut remplacer "12% du coût de revient" par ***"12% du coût d'achat"***

2) Le pourcentage total, ou global, de remise consenti, est de:
650 / 13000 X 100 = **5%**

3) Frais de transport : 520 X 2 = 1040 F
Frais d'achat divers : 370,50 F
Coût d'achat total : 12350 + 1040 + 370,50 = 13760,50 F HT
Frais de conditionnement : 4,50 X 25 = 112,50 F
Frais de distribution : 12 / 100 X 13760,50 = 1651,26 F
Coût de revient : 13760,50 + 112,50 + 1651,26 = 15524,26 F HT
Bénéfice escompté : 24141,20 - 15524,26 = **8616,94 F**

Il faut bien lire l'énoncé, et ne pas mélanger les données concernant le lot complet avec celles concernant un article.

24121,20 représente le prix de vente hors taxe du lot.

4) Marge brute = 24121,20 - 13760,50 = 10380,70 F
Taux de marque = 10380,70 / 24121,20 X 100 = **43%**

5) Prix d'achat brut HT = 30 X 520 = 15600 F
Remise totale = 350 + 5600 X 10/100 = 910 F
Prix d'achat net HT = 14690 F
Coût d'achat = 14690 + 1040 + 3/100 X 14690 = 16170,70 F
Prix de vente HT = 16170,70 X 100/ 57 = 28369,65 F
Prix de vente TTC = 28369,65 X 108 / 100 = **30639,22 F**

On ne peut pas utiliser un coefficient multiplicateur car la remise, calculée par tranches, n'est pas linéaire; on peut cependant utiliser le taux de marque trouvé précedemment.

Equations et fonctions

ERREUR DE CALCUL

Objectifs : Etablir une équation
Utiliser une équation du 2ème degré

Soit x le taux de marque.
Marge calculée par l'employé : 2850 X x / 100 = 28,5 x
D'où le prix de vente erroné : 2850 + 28,5 x

La perte s'élevant à 237,50 F, le PV aurait du être de :
2850 + 237,50 + 28,5 x = 3087,50 + 28,5 x

Marge + coût d'achat = prix de vente : d'où l'équation :
(3087,50 + 28,5 x) x / 100 + 2850 = 3087,50 + 28,5 x
soit 30,875 x + 0,285 x^2 + 2850 - 3087,50 - 28,5 x = 0
ou encore <u>0,285 x^2 + 2,375 x - 237,5 = 0</u>

L'erreur commise par l'employé est une erreur couramment commise par les éléves; cet exercice peut leur montrer qu'elle peut conduire à des différences importantes.

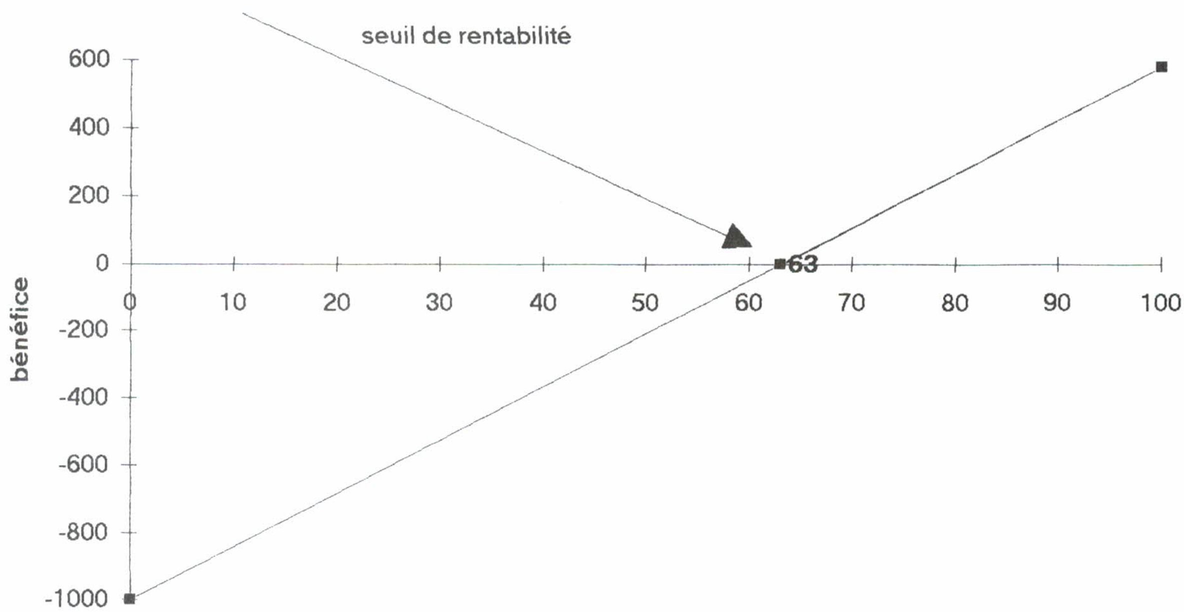
Δ = 5,640625 + 270,75 = 276,39 = $16,625^2$
x' = 25; x" < 0 ne convient pas
Le taux de marque est donc de 25 %

SEUIL DE RENTABILITE

Objectifs : Représenter graphiquement un bénéfice en fonction du nombre d'articles vendus
Déterminer un seuil de rentabilité

1) Appelons x le nombre d'articles vendus.
Prix d'achat total = 125 x
Coût d'achat = 125 x / 0,9
Frais de stockage = 1000 F
Frais de vente = 125x / 0,9 X 2 / 100 = 2,5 x / 0,9
Prix de revient = 125 x / 0,9 + 2,5 x / 0,9 + 1000 = 127,5 x / 0,9 + 1000
Marge nette = 157,5 x - 127,5 x / 0,9 - 1000 = 14,25 x / 0,9 - 1000
= **15,83 x - 1000**

2)



3) Le seuil de rentabilité correspond à un bénéfice nul. Sur le graphique, la droite coupe l'axe des abscisses en **63.**
Par le calcul : bénéfice = 0 ===> 15,83 x - 1000 = 0
===> x = 1000 / 15,83 = ***63 articles***

QUE DE TAUX

Appelons x le taux de l'escompte; le taux de la remise est alors de 2 x %.

Prix brut :	150
Remise 2x %	....
1er net :	....
Escompte x % :	....
Prix net :	136,77

1er net = 150 - 2x/100 X 150 = 150 - 3x
escompte = x / 100(150 - 3x) = $-0,03\,x^2 + 1,5\,x$
prix net = (150 - 3x) - ($-0,03x^2 + 1,5x$) = 136,77
On obtient l'équation : $0,03\,x^2 - 4,5\,x + 13,23 = 0$
D = $4,5^2 - 4 \times 0,03 \times 13,23 = 18,6624 = 4,32^2$
x' = 4,5 + 4,32 / 0,06 = 294 ne convient pas car visiblement trop grand;
x" = 4,5 - 4,32 / 0,06 = 3.
Le taux de la remise est de 6 %, celui de l'escompte de 3 %.

POURCENTAGES PAR TRANCHES

Objectifs : Calculer des remises par tranches
Représenter des fonctions affines par intervalles

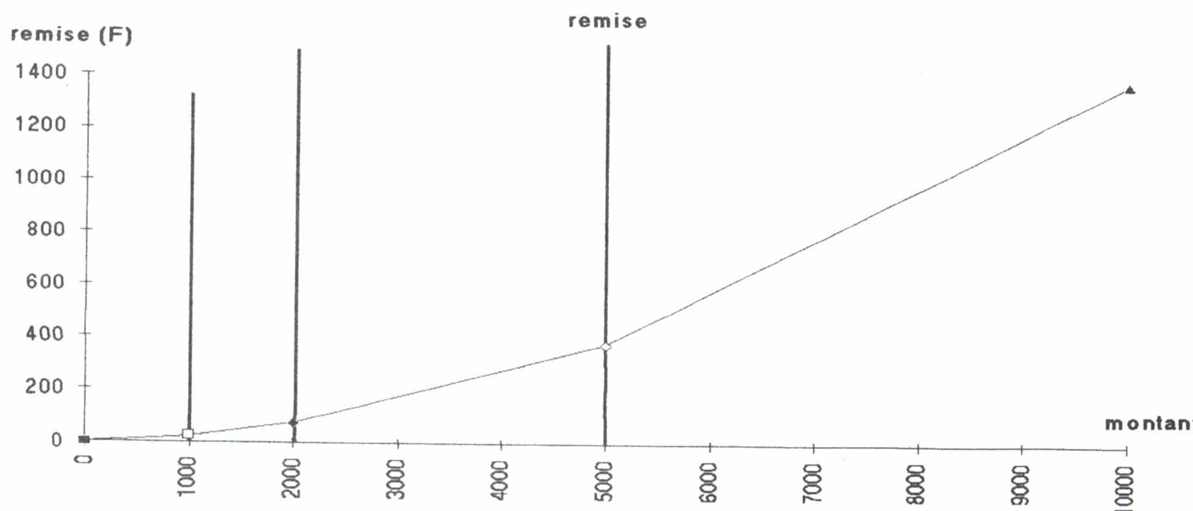
1) 4500 F se trouve dans la 3ème tranche.
remise 1ère tranche = 1000 X 2,2 / 100 = 25 F
remise 2ème tranche = 1000 X 5 / 100 = 50F
remise 3ème tranche = 2500 X 10 / 100 = 250 F
Remise totale = 325 F

2) Si les deux premières tranches sont remplies, la remise est de 75 F. La remise étant ici de 74,45 F, le montant de la commande se situe dans la 2ème tranche.

Remise due au titre de la 2ème tranche = 74,45 - 25 = 49,45 F
Soit x la part du montant de la commande se trouvant dans la 2ème tranche;
on a x X 5 / 100 = 49,45 ===> x = 4945 / 5 = 989 F.

Le montant de la commande est de 1000 + 989 = 1989 F

3) variations du montant de la remise en fonction du montant de la commande



CALCULS DANS LA MARGE

Appelons C l'ancien coefficient multiplicateur, et C' le nouveau.

Si on applique un taux de marque de 40 % sur un coût d'achat de 100 F, le prix de vente HT sera de : 100 X 100 / 60 = 166,67 F
Le prix de vente TTC sera de 166,67 X 118,6 / 100 = 197,67 F
Cela donne un coefficient multiplicateur C' = 1,9767
Ecrivons que C a baissé de 37 % :
$\frac{C - C'}{C} \times 100 = 37$ soit C' = C - 0,37 C ou encore C' = 0,63C
Donc C = 1,9767 / 0,63 = 3,137619
Cela signifie que pour un coût d'achat de 100 F, le commerçant vendait 313,76 F; son prix de vente HT était donc de 264,55 F.
Il appliquait un taux de marque de 264,55 - 100 /264,55 X 100 = **62,2 %**

Simulation commerciale

Objectifs : Utiliser des données à bon escient
Lire un diagramme en Z
Etablir une fonction affine
Déterminer graphiquement un seuil de rentabilité

1) et 2)
Les ventes de février au cours des 2 années précédentes sont de 100 unités.
Celles d'octobre, au cours des 2 années précédentes sont de 400 unités.

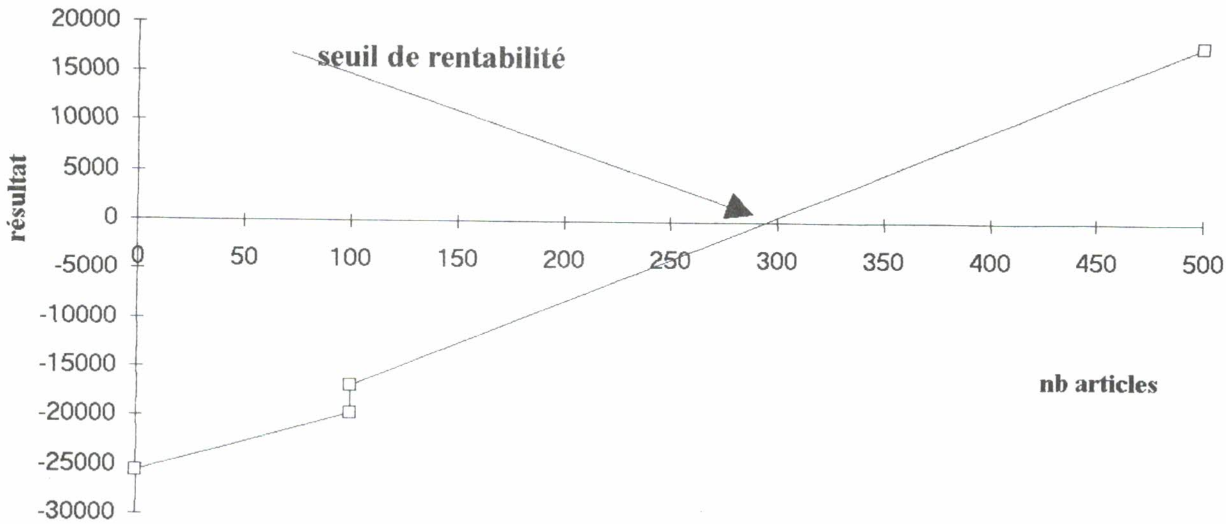
Commentaires
Le diagramme en Z indique 100 unités vendues en février de l'année passée (barre inférieure du Z). La barre supérieure (totaux mobiles), indique 3400 pour janvier et pour février, ce qui signifie que les ventes de février n'ont pas varié d'une année à l'autre. On obtient de même 400 unités pour octobre.

Prix d'achat HT	16000	64000
Remise 20 %	3200	12800
Prix d'achat net HT	12800	51200
Frais divers	5200	5200
Emballage,etc... 8 %	1024	4096
Coût d'achat HT	19024	60496
Frais de fonctionnement	14500	14500
Frais proportionnels	951,20	3024,80
Publicité	5600	5600
Prix de revient HT	40075,20	83620,80
Prix de vente HT	23187,18	92748,74
Prix de vente TTC	27500	110000
Résultat net	**- 16888,02 F**	**+9127,94 F**
	FEVRIER	*OCTOBRE*

3)

1er cas x < 100		**2ème cas x > 100**	
Prix d'achat brut	160 x	Prix d'achat brut	160 x
Remise 5%	8 x	Remise 5 %	32 x
Prix d'achat net	152 x	Prix d'achat net	128 x
Frais divers	5200	Frais divers	5200
Emballage 8% : 152x X 8 / 100	= 12,16 x	Emballage 8 %	10,24x
Coût d'achat	164,16 x + 5200	Coût d'achat	138,24 x + 5200
Frais	14500	Frais	14500
Frais proportionnels	8,208 x + 260	Frais proportionnels	6 ,912 x + 260
Publicité	5600	Publicité	5600
Prix de revient	172,368 x + 25560	Prix de revient	145,152 x +25560
Prix de vente HT	231,872 x	Prix de vente HT	231,872 x
Prix de vente TTC	275 x	Prix de vente TTC	275 x
Résultat	**59,352 x - 25560**	**Résultat**	**86,72 x - 25560**

Il s'agit ici d'étudier le résultat du commerçant d'une façon générale en fonction du nombre d'articles vendus.
Le calcul ne présente pas de difficultés.
Le graphique peut être délicat à tracer car les valeurs des coefficients directeurs ne sont pas simples.



4) Le seuil de rentabilité de ce commerce s'établit à **300 unités vendues.**

HARD

Inconnues utilisées : Prix de vente taxe comprise = P
taux de la TVA = t
taux de marque = m
frais d'achat = F

On utilise les relations classiques suivantes : PVht = 100P / 100 + t
marge = PVht x m / 100
d'où en remplaçant : marge = 100Pm / (100+t)x100 = Pm / 100+t

Le graphique donne le point (16000 ; 4500), ce qui donne en remplaçant dans l'expression de la marge :
4500 = 16000M / 100+t
d'où m = 0,28125(100+t) soit **m - 0,28125t = 28,125 (1)**

Par définition TVA versée = valeur ajoutée x t / 100
or valeur ajoutée = F + marge = F + Pm / 100+t
soit TVA versée = (F + Pm / 100+t) x t /100 = Ft /100 + Pmt /(100+t)x100

Le graphique donne le point (0;420) ce qui implique Ft /100 = 420
autre point du graphique : (20000;1995), on obtient : Ft /100 + 20000mt / (100+t)x100 = 1995
soit en remplaçant : 420 + 200mt /100+t = 1995 ==> 200mt / 100+t = 1575
==> **200mt - 1575t =157500 (2)**

il reste à résoudre le système :

$$\begin{cases} m - 0{,}28125t = 28{,}125 & (1) \\ 200mt - 1575t = 157500 & (2) \end{cases}$$

De (1) on tire m = 28,125 + 0,28125t et en portant dans (2), il vient :
200(28,125 + 0,28125t)t - 1575t = 157500
d'où l'équation du second degré : $56{,}25t^2 + 4050t - 157500 = 0$ ou encore $\mathbf{t^2 + 72t - 2800 = 0}$

$\Delta = 16384 = 128^2$ soit **t** = -72 + 128 / 2 = $\boxed{\mathbf{28\%}}$

On en déduit **F** = 4200 / t = $\boxed{\textbf{1500 francs}}$ et $\boxed{\mathbf{m = 36\%}}$

COMPLETER LE TABLEAU

CAPITAL	INTERET	TAUX annuel	DUREE	VAL.Acquise
1200 F	***11,20 F***	6	56 jours	***1211,20 F***
1562,50 F	250 F	8,8	24 mois	***1812,50 F***
4400 F	***400 F***	5,5	***595 jours***	4800 F
3750 F	360 F	***4,8***	2 ans	4110 F
3000 F	***45 F***	4,5	120 jours	3045 F

LA CAISSE D'EPARGNE

Commentaires :

Les versements sont comptés à partir du début de la quinzaine suivant le dépôt; les retraits sont comptés à la fin de la quinzaine précédent le retrait.

Le calcul de l'intérêt a été globalisé afin de réduire les calculs.

erratum : le retrait du 5 juillet est de 2500 F et non de 25500 F.

(voir tableau page suivante)

Calcul de l'intérêt total :

I =4,5 x 75050 / 2400 soit **I = 140,72 F**

PERIODES	CAPITAL en francs	DUREES en quinzaines	capital x durée
du 1er janvier au 15 janvier	0	1	0
du 16 janvier au 31 janvier	1000	1	1000
du 1er février au 15 février	1500	1	1500
du 16 février au 30 avril	2150	5	10750
du 1er mai au 15 mai	4650	1	4650
du 16 mai au 15 juin	3450	2	6900
du 16 juin au 30 juin	5850	1	5850
du 1er juillet au 31 octobre	3350	8	26800
du 1er novembre au 15 décembre	4850	3	14550
du 15 décembre au 31 décembre	3050	1	3050
		TOTAL	**75050**

LES VOITURES NEUVES

Soit x la somme à placer;

$$\frac{63500}{80010} = \frac{x}{95000} \implies \boxed{x = 75400 \text{ F (environ)}}$$

Commentaires :

Les conditions de placement étant identiques, il est plus rapide d'utiliser la proportionnalité que les formules d'intérêt.

ABAQUE D'INTERETS

1) Pour trouver le capital sur lequel sont calculés les intérêts, le plus simple est de lire le montant de l'intérêt rapporté en un an sur la droite correspondant à 10% : on trouve 1000F. Le capital placé est donc de **10000F**.

Sur l'abaque proposée, il faut lire 15% au lieu de 20%.

2) voir abaque page suivante

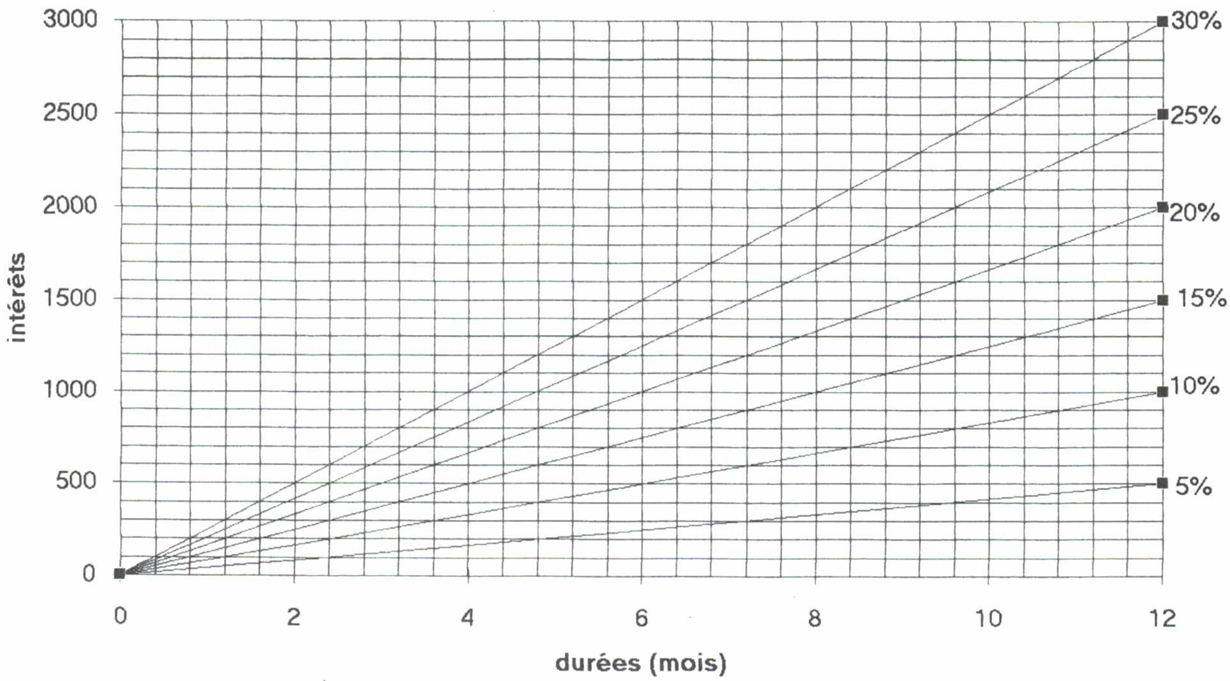
3) L'intérêt produit par un capital de 10000F placé à 15% pendant 8 mois est de 1000F.

On obtiendra 1500F d'intérêts en 9 mois avec 10000F à 20%.

On obtiendra 250F d'intérêts avec 20000F placés à 5% pendant 3 mois.

Un capital de 30000F permettra d'obtenir 3750F d'intérêts en 6 mois à 25%.

question3 : les deux premiers résultats s'obtiennent directement; pour les deux autres, il faut utiliser en plus la proportionnalité.



LE BAS DE LAINE

Sans tenir compte de l'inflation :
la première possédera **12000 F**.
la deuxième aura perçu un intérêt de $\dfrac{7{,}5 \times 1000 \times (12+11+10+\ldots+1)}{1200}$

soit $\dfrac{7{,}5 \times 1000 \times 78}{1200} = 487{,}50$ F

elle aura donc **12487,50 F**

Si l'on tient compte de l'inflation :

la première personne possédera **11568 F** et la seconde **12037,95 F**

LES MENTEURS

Soient A, B, C les 3 parts respectives.

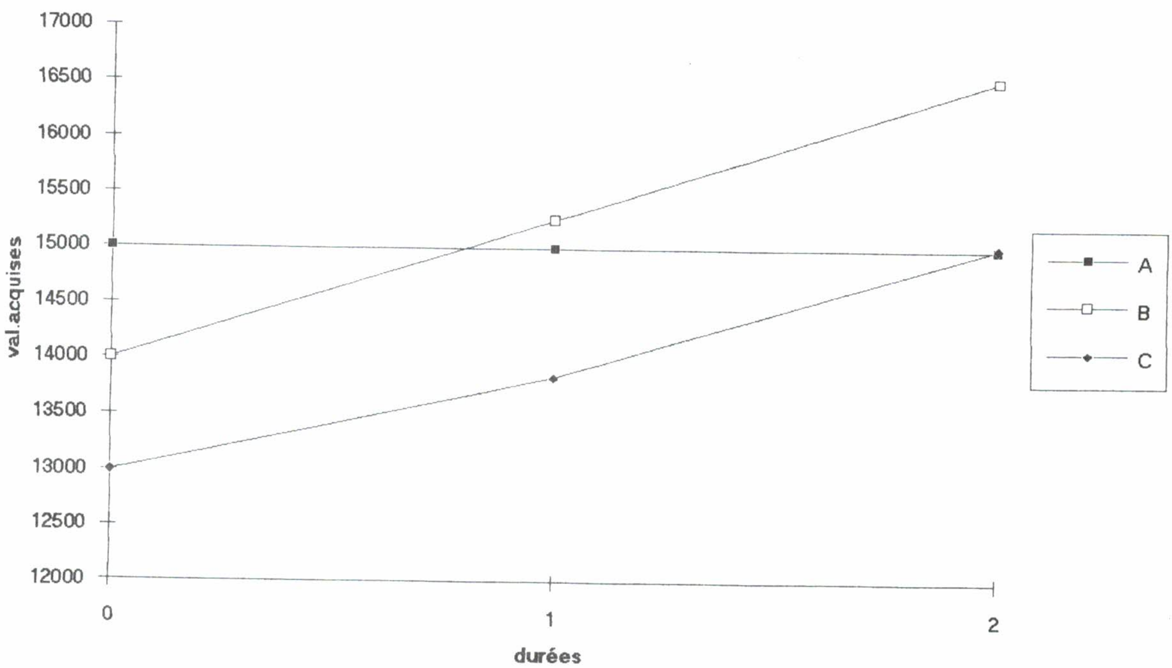
$$\frac{A}{15} = \frac{B}{14} = \frac{C}{13} = \frac{42000}{42} = 1000$$

D'où A = 15000F   B = 14000F   C = 13000F

Pour A, la valeur acquise reste constante et égale à **15000F.**
Pour B, elle atteint en 2 ans la valeur $14000 + \dfrac{14000 \times 9 \times 2}{100} =$ **16520 F**

En ce qui concerne C, elle sera au bout d'un an de 13845 F et au bout de deux ans de **15021,83 F**

Si on représente graphiquement les valeurs acquises, on a les équations suivantes :
A : $y = 15000$
B : $y = 14000 + 1260\,x$
C : $y = 13000 + 845\,x$ pour $0<x<1$ et $y = 13845 + 1176{,}825\,x$ pour $1<x<2$
(x représente la durée du placement en années)



En conclusion : la première personne a menti, les deux autres ont dit vrai.
Commentaire : *le graphique n'est pas nécessaire à la résolution du problème, d'autant qu'il n'est pas suffisamment précis pour départager A et C; il permet de se faire une idée de l'évolution des trois valeurs acquises au cours des deux années de placement.*

L'HERITIER

Intérêt rapporté par le premier placement, au taux t :

$$I_1 = \frac{50000 \times 2 \times t}{100} = 1000\,t$$

D'où la valeur acquise $VA_1 = 50000 + 1000\,t$

Commentaires :
L'intérêt du problème réside en l'utilisation de l'équation du second degré pour un cas concret, et en la discussion des solutions trouvées.

Intérêt rapporté par le deuxième placement au taux t + 3 :

$$I_2 = \frac{(50000 + 1000t) \times (t+3)}{100} = 5040 \text{ F}$$

Il vient en simplifiant par 100 : $(500 + 10t)(t + 3) = 5040$ d'où l'équation :
$10t^2 + 530t - 3540 = 0$ ou encore $t^2 + 53t - 354 = 0$

$\Delta = 2809 + 1416 = 4225 = 65^2$ on trouve $t' = 6$; $t'' < 0$ ne convient pas.
Les taux respectifs de placement étaient donc de 6% et 9%.

LE CONSEILLER FINANCIER

Calculons l'intérêt total rapporté dans chaque cas :

$$I_1 = \frac{25000 \times 6 \times 250}{36000} + \frac{15000 \times 7,5 \times 9}{1200} + \frac{20000 \times 8,5 \times 1}{100}$$

$$\mathbf{I_1 = 3585,42F}$$

Commentaires :
Il s'agit de comparer la rentabilité de deux placements en calculant leurs taux moyens de rendement.

$$I_2 = \frac{15000 \times 7 \times 9}{1200} + \frac{27000 \times 6,5 \times 200}{36000} + \frac{13000 \times 7,5 \times 18}{1200} + \frac{5000 \times 9,1 \times 180}{36000}$$

$$\mathbf{I_2 = 3452,50F}$$

Calcul des taux moyens de placement :
En remplaçant les différents taux par t1 pour le premier placement et par t2 pour le second, et en effectuant les rapports, on obtient :
$173,61t_1 + 112,5t_1 + 200t_1 = 3585,42$ soit $\mathbf{t_1 = 7,38\%}$
$112,5t_2 + 150t_2 + 195t_2 + 25t_2 = 3452,5$ soit $\mathbf{t_2 = 7,16\%}$

Mr M.P.Ksoo avait raison.

GRAPHIQUE

1) Placement A : On lit sur le graphique une valeur acquise de 10300F au bout de 120 jours; l'intérêt est donc de 300F.

$$300 = \frac{10000 \times 120 \times t}{36000} \Rightarrow t = \frac{300 \times 36000}{10000 \times 120} = \mathbf{9\%}$$

Placement C : capital initial= 10050F
Sur le graphique, on lit pour 100jours une valeur de 10300F; mais le placement a lieu 40 jours après A. C'est donc au bout de 60 jours que l'intérêt rapporté est de 250F.

Après un calcul analogue, on trouve t = ***14,92%.***

2) Les variations du placement B proviennent d'un changement de taux en cours de placement.
3) La valeur du placement C devient supérieure le 11 septembre.

Commentaires :
L'objet de l'exercice est de lire un graphique représentant les valeurs acquises par plusieurs placements, et d'en déduire les taux de placement par résolution d'une équation simple.
L'élève peut utiliser le graphique du polycopié ou(mieux) le refaire sur papier millimétré pour davantage de précision.

Intérêts : équations et fonctions

EQUA 1

a) L'intérêt total est de 5148,50-1800-3200 = 148,50F.
Le taux moyen étant de 7,92%, on a :

$$\frac{1800 \times 7{,}92 \times n}{36000} + \frac{3200 \times 7{,}92 \times n}{36000} = 148{,}50$$

$$\Rightarrow 0{,}396\,n + 0{,}704\,n = 148{,}50$$
$$\Rightarrow 1{,}1\,n = 148{,}50$$
$$\Rightarrow n = 135 \text{ jours}$$

la date est le 24 octobre.

b) $$148{,}50 = \frac{1800 \times 6 \times 135}{36000} + \frac{3200 \times t \times 135}{36000}$$

$$\Rightarrow 148{,}50 = 40{,}5 + 12t$$
$$\Rightarrow \mathbf{t = 9\%}$$

Commentaires :

Utilisation du taux moyen, connu, pour trouver une date et un taux.

EQUA 2

L'intérêt total obtenu est de 828 F. Soit n la durée de chaque placement exprimée en jours.

L'intérêt rapporté par le premier placement est :

$$\frac{9000 \times 8 \times n}{36000} = 2n$$

L'intérêt rapporté par le second placement est :

$$\frac{(9000 + 2n) \times 10 \times n}{36000} = \frac{2n^2 + 9000n}{36000}$$

On a donc : $$828 = 2n + \frac{2n^2 + 9000n}{36000}$$

D'où l'équation du second degré : $2n^2 + 16200n - 2980800 = 0$
soit en divisant par 2 : $n^2 + 8100n - 1490400 = 0$

$$\Delta = 71571600$$

On trouve **n = 180 jours**

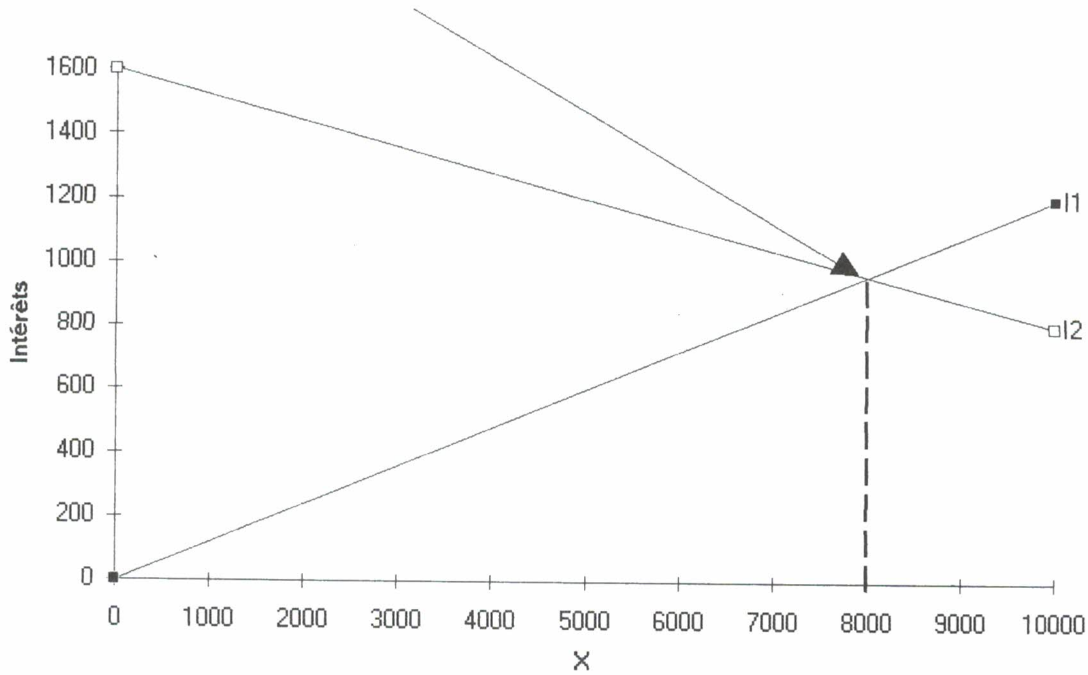
L'autre racine de l'équation, négative, ne convient pas.

Le problème aboutit à la résolution d'une équation du second degré.

FONC 1

Premier placement : $I_1 = \dfrac{12\,x}{100} = 0{,}12\,x$

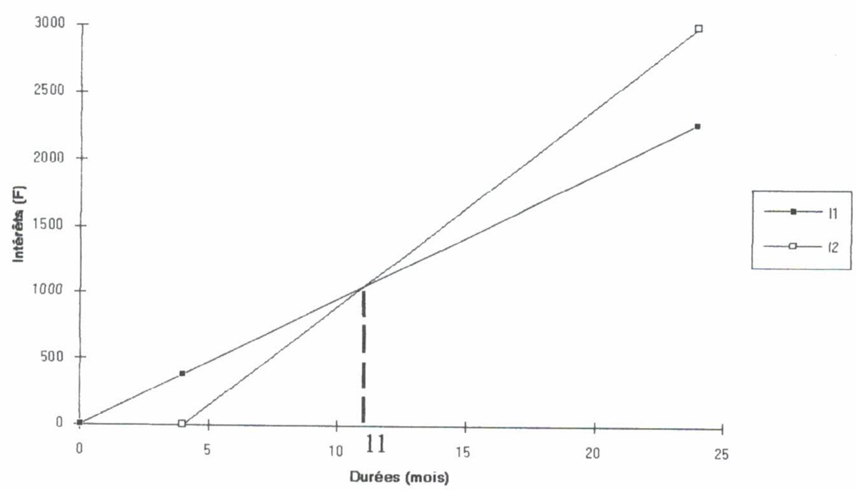
Deuxième placement $I_2 = \dfrac{(2000 - x) \times 8}{100} = -0{,}08\,x + 1600$



Les intérêts seront égaux quand les capitaux vaudront respectivement 8000F et 12000F.

FONC 2

1) $I_1 = \dfrac{9500\,.12\,.\,x}{1200} = 95x$; $I_2 = \dfrac{12000\,.\,15\,.\,(x-4)}{1200} = 150x - 600$



Les intérêts seront égaux au bout de 11 mois; on peut retrouver la solution algébriquement.

EQUA 3

Intérêt total = 2320 F. Soient C_1, C_2, C_3, I_1, I_2, I_3 les 3 capitaux et leurs intérêts respectifs.

$$I_1 = \frac{C_1 \times 9 \times 6}{1200} \quad ; \quad I_2 = \frac{C_2 \times 12 \times 8}{1200} \quad ; \quad I_3 = \frac{C_3 \times 8 \times 10}{1200}$$

Ou encore $I_1 = 0{,}045C_1$; $I_2 = 0{,}08C_2$; $I_3 = \dfrac{C_3}{15}$

On sait aussi que $I_1 = I_2 - 140$

Il faut résoudre le système :
$$\begin{cases} (1)\ C_1 + C_2 + C_3 = 3700 \\ (2)\ I_1 + I_2 + I_3 = 2320 \\ (3)\ I_2 = I_1 + 140 \end{cases}$$

En remplaçant dans (2) les intérêts en fonction des capitaux, on a :

$$0{,}045C_1 + (0{,}045C_1 + 140) + C_3/15 = 2320$$

soit $0{,}09C_1 + C_3/15 = 2180$

On a d'autre part $0{,}08C_2 - 140 = 0{,}045C_1$, d'où $C_2 = 0{,}5625C_1 + 1750$

En remplaçant dans (1), il vient : $1{,}5625C_1 + C_3 = 35250$

Le problème se raméne au système :
$$\begin{cases} (4)\ 1{,}5625C_1 + C_3 = 35250 \\ (5)\ 0{,}09C_1 + C_3/15 = 2180 \end{cases}$$

c'est à dire à :
$$\begin{cases} (4)\ 1{,}5625C_1 + C_3 = 35250 \\ (5)\ 1{,}35C_1 + C_3 = 32700 \end{cases}$$

Par soustraction, on trouve $C_1 = 2550/0{,}2125 =$ **12000F**

d'où **C_2 = 8500F** et **C_3 = 16500F**

Commentaires :

Problème relativement compliqué car il nécessite la résolution d'un système d'équations à 3 inconnues. (plusieurs méthodes sont utilisables)

FONC 3

1) VA = 15000 + 15000 x 0,085 = 16275F
2) VA = 16275 + 16275 x 0,085 = 17658,38F
3) VA = 17658,38 + 17658,38 x 0,085 = 19159,34F

4) $VA = 15000(1+0{,}085)^n = 15000 \times 1{,}085^n$

en remplaçant n par 1, 2, 3, on retrouve les valeursacquises précédentes

5)

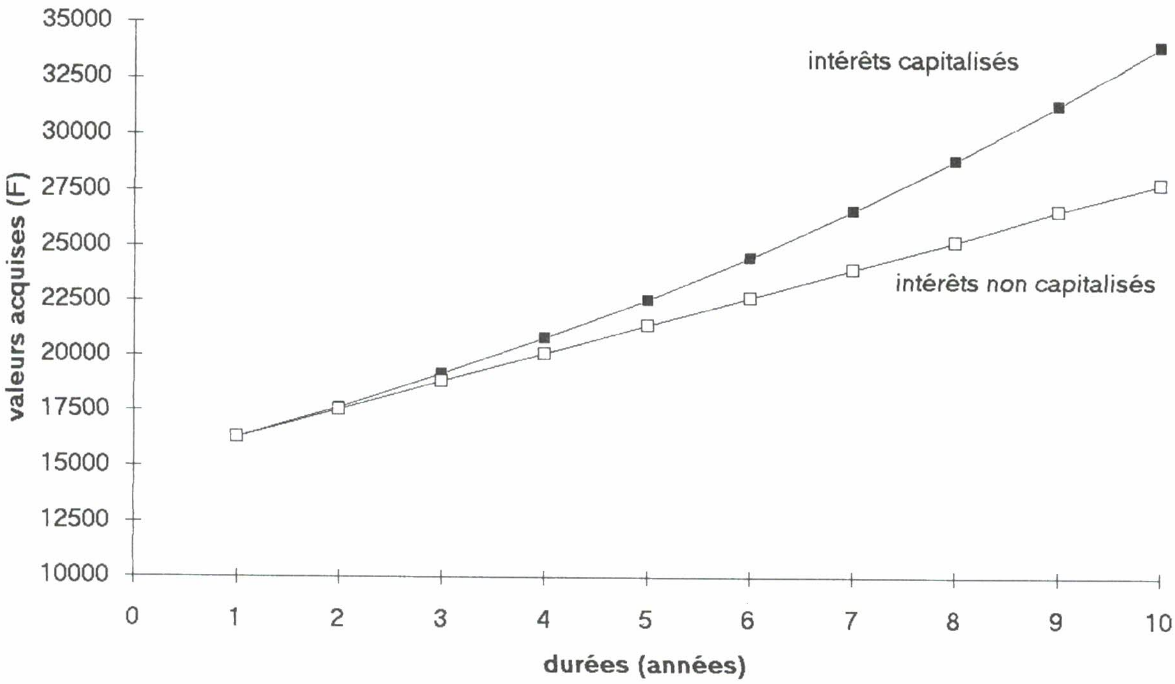
années	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
val.acq	16275	17658	19159	20788	22555	24472	26552	28809	31258	33915

les valeurs acquises ont été arrondies au franc.

L'objectif de l'exercice est l'étude de la valeur acquise par un capital. Il s'agit de calculer et de représenter graphiquement une valeur acquise lorsque les intérêts sont capitalisés ou ne le sont pas afin de comparer les deux formes de placement.

C'est une introduction aux intérêts composés et à la formule :

$VA = C(1 + i)^n$



EQUA 4

Appelons t le taux du premier placement et n sa durée en jours.

On obtient : $I_1 = \dfrac{6000 \text{ x } t \text{ x } n}{36000} = 180$

soit $t\,n = 1080$ (1)

2ème placement : la somme placée est de 6180F.

$$I_2 = \frac{6180 \text{ x } (t+1)(n+30)}{36000} = 257{,}50$$

=> $1500 = (t + 1)(n + 30)$ => $1500 = tn + 30t + n + 30$

=> $1470 = tn + 30t + n$ (2)

De (1) $t = \dfrac{1080}{n}$ on remplace dans (2) :

$$\frac{1080\,n}{n} + \frac{30 \text{ x } 1080}{n} + n = 1470$$

soit $1470 = 1080 + n + \dfrac{32400}{n}$ => $n + \dfrac{32400}{n} - 390 = 0$

ou encore : $n^2 - 390n + 32400 = 0$

$\Delta = 22500 = 150^2$

n' = 270 jours, ce qui donne un taux de 4%

n" = 120 jours, ce qui donne un taux de 9 %

Le problème a deux solutions acceptables.

Commentaires :

Quatre inconnues dans ce problème : les durées et les taux. La résolution méne à une équation du second degré dont les deux solutions sont ici acceptables.

Escompte et équivalences

LEGUMES

$$\text{Escompte} = \frac{40000 \times 12{,}5 \times 26}{36000} = 361{,}11 \text{ F}$$

La somme versée à M. Primeur est de 40000 - 361,11 = **39638, 89 F**

A LA MODE

a) Il doit y avoir équivalence entre les 2 traites : les valeurs actuelles doivent être égales.
Soit A la nouvelle valeur nominale; t = 14%

$$64000 - \frac{64000 \times 14 \times 59}{36000} = A - \frac{A \times 14 \times 81}{36000}$$

=> 62531,56 = A - 0,0315 A = 0,9685 A
A = **64565,37 F**

b) Nombre de jours = 76; taux escompte + endos = 14,6%

$$\text{escompte + endos} = \frac{64565{,}37 \times 14{,}6 \times 76}{36000} = 1990{,}05 \text{ F}$$

commissions : 30 F_{HT} soit 35,58 F_{TTC}

total agio : 2025,63 F
Somme encaissée par Textilor : 64565,37 - 2025,63 = **62539,74 F**

c) Soit T le taux réel pratiqué par la banque;

$$2025{,}63 = \frac{64565{,}37 \times T \times 76}{36000}$$

D'où T = **14,86%**

Commentaires :

Problème classique d'équivalence sans difficultés.

Pour la question a) prendre t = 14%

JOYEUX ANNIVERSAiRE

a) Ecrivons qu'il y a équivalence entre le 1er et le 3e mode de paiement :

$$6300 = 1260 + x - \frac{x.12.1}{1200} + x - \frac{x.12.2}{1200} + \ldots$$

$$= 1260 + 12x - \frac{x.12}{1200}(1 + 2 + 3 + \ldots 12)$$

Encore un problème classique, de paiement à crédit cette fois, avec comparaison entre le paiement comptant et le paiement différé.

Pas de difficultés.

$$= 1260 + 12x - \frac{x \,.\, 78}{1200} \qquad \Rightarrow 6300 - 1260 = 11{,}22x$$

x = **449,20 F**

b) Somme payée par le client :

1e mode : 5985 F
2e mode : 6300 F
3e mode : 6650,40 FR

Le premier mode est le plus avantageux en valeur absolue car le client débourse moins.

DIFFICULTES DE TRESORERIE

Appelons n le nombre de mensualités.

$$120000 = 10000 - \frac{10000 \times 14{,}4 \times 1}{1200} + 10000 - \frac{10000 \times 14{,}4 \times 2}{1200} + \ldots.$$

$$120000 = 10000n - \frac{10000 \times 14{,}4}{1200}(1 + 2 + \ldots + n)$$

$$120000 = 10000n - \frac{120n(n+1)}{2} = 10000n - 60n(n+1)$$

On obtient l'équation : $60n^2 - 9940n + 120000 = 0$

$\Delta = 700036$

$n' = 153;\ n'' = 13$

La solution n = 153 est à rejeter car celà conduit à un remboursement total disproportionné avec le montant de l'avance : 120000F.

Finalement n = **13 mensualités.**

<u>Commentaires :</u>

Encore une équation du second degré; les deux solutions sont positives mais les élèves doivent s'apercevoir que l'une des deux est à rejeter car beaucoup trop grande.

La formule donnant la somme des termes d'une suite arithmétique est rappelée dans l'énoncé.

b) Calculons le montant A de la 13e mensualité pour qu'il y ait effectivement équivalence (les 12 premières mensualités ont un montant de 10000F).

$$120000 = 10000 \times 12 - \frac{10000 \times 14{,}4 \times 12(12+1)}{1200 \times 2} + A - \frac{A \times 14{,}4 \times 13}{1200}$$

$120000 = 120000 - 9360 + A - 0{,}156A$
$9360 = 0{,}844A$

A = 11090,05 F

HISTOIRE DE TAUX

Ecrivons l'équation d'équivalence si la transaction avait été faite le 1er février :
soit le nombre de jours séparant la date d'équivalence de l'échéance;

$$15000 - \frac{1500 \times 12 \times (1 + 2 + ... + 10)}{1200} = 15000 - \frac{15000 \times 12 \times n}{36000}$$

Après simplification, il reste : $\frac{1500 \times 55}{1200} = \frac{15000n}{36000}$

soit n = 165 jours

Echéance le 16 juillet

La transaction a lieu en fait le 1er mars; la valeur actuelle de la première traite est donc de 1500F.

Ecrivons la nouvelle équation d'équivalence :

$$1500 + 1500 - \frac{1500 \times 15 \times 1}{1200} + ... + 1500 - \frac{1500 \times 15 \times 9}{1200}$$

$$= 15000 - \frac{15000 \times 15 \times n}{36000}$$

$$15000 - \frac{1500 \times 15 \times (1 + 2 + ... + 9)}{1200} = 15000 - \frac{15000 \times 15 \times n}{36000}$$

soit 14156,25 = 15000 - 6,25 n ou encore n = 135 jours

La date d'échéance est encore le **16 juillet.**

(il en est ainsi car la valeur nominale du versement unique est égale à la somme des valeurs nominales des 10 traites)

M.Senzun n'a fait ni une bonne ni une mauvaise affaire en réfléchissant, cela n'a rien changé pour lui.

L'industriel, le banquier et le marchand

1) Les taux d'escompte et d'endos sont ajoutés.

Crédit européen : soient T_1 le taux effectif, A la valeur nominale, n le nombre de jours à courir.

$$\frac{AT_1n}{36000} = \frac{A \times 12{,}6 \times n}{36000} + \frac{A \times 0{,}5}{100}$$

$$\Rightarrow \frac{T_1n}{360} = \frac{12{,}6\,n}{360} + 0{,}5 \quad \Rightarrow \quad T_1 = \frac{180}{n} + 12{,}6$$

Banque lorraine : soit T_2 le taux effectif; le calcul s'effectue de la même manière.

$$\frac{AT_2n}{36000} = \frac{A \times 13{,}2 \times n}{36000} + \frac{A \times 0{,}4}{100}$$

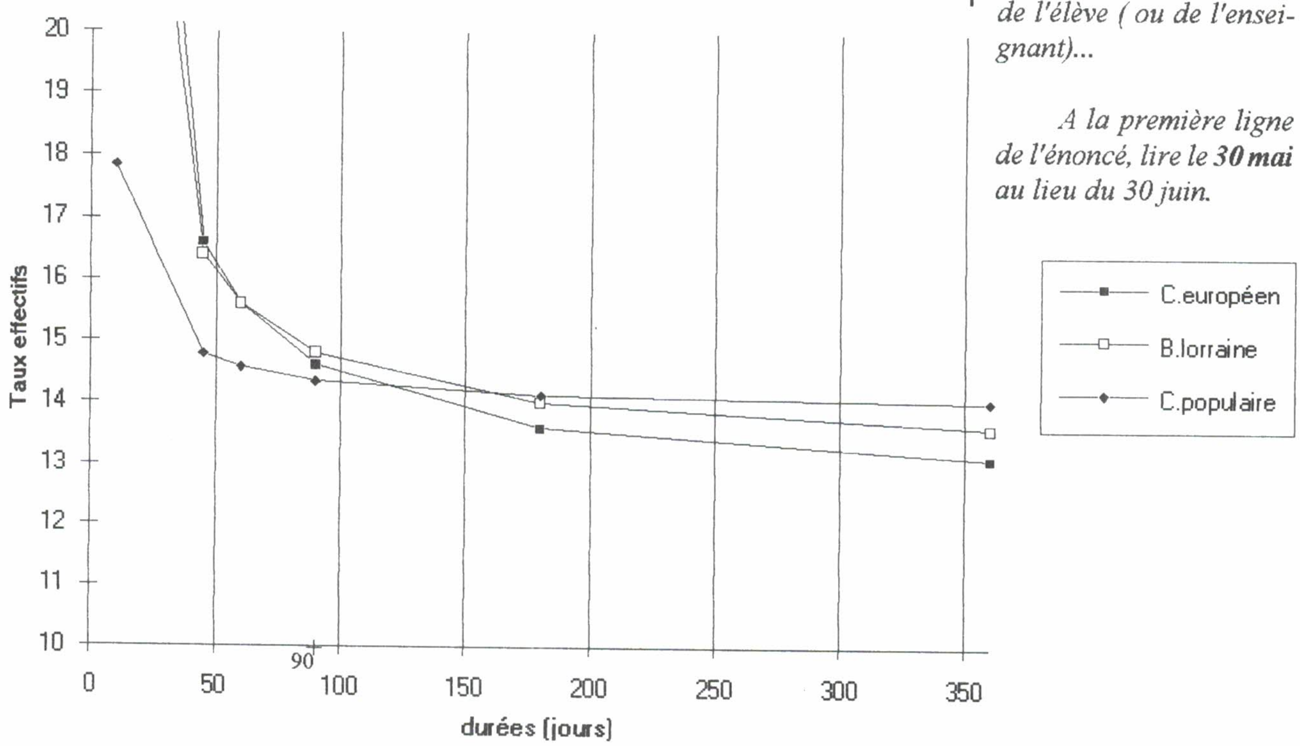
On trouve $T_2 = \dfrac{144}{n} + 13{,}2$

Crédit populaire : soit T_3 le taux effectif pratiqué par cette banque.

$$\frac{AT_3n}{36000} = \frac{A \times 13{,}9 \times n}{36000} + 55$$

En remplaçant A par 50000, on trouve finalement :

$$T_3 = 13{,}9 + \frac{39{,}6}{n}$$



Commentaires :

Ce problème veut être un dossier complet sur les intérêts simples.

Il étudie l'itinéraire d'un lot de marchandises depuis l'industriel jusqu'au consommateur en passant par le commerçant et le banquier.

L'élève dispose de nombreuses données parmi lesquelles il doit faire un choix : toutes ne sont pas utiles.

Le travail est important, aussi il peut s'avérer utile de donner le problème à traiter à la maison, en fractionnant éventuellement la classe en groupes de travail.

La moralité de l'histoire (question 6) est laissée à la libre évaluation de l'élève (ou de l'enseignant)...

*A la première ligne de l'énoncé, lire le **30 mai** au lieu du 30 juin.*

Le nombre de jours à courir étant , dans le cas présent de 90, il apparaît sur le graphique que la banque choisie est le Crédit Populaire (T= 14,34).

Par le calcul, on trouve : T1 = 14,6   T2 = 14,8 et T3 = 14,34

La banque choisie étant le Crédit Populaire, calculons l'agio payé à cette banque :

$$\text{Agio} = \frac{50000 \times 14{,}34 \times 90}{36000} = 1792{,}50 \text{ F}$$

La somme reçue par M. Walroy est de 50000 - 1792,50 = **48207,50 F**

2) Prix d'achat des actions le 1er mars :

Saupiquet : 25 x 1009 = 25225 F
Perrier : 8 x 1920 = 15360 F
Total CFP : 12 x 577 = 6924 F

Total = 47509 F

Frais de courtage 1,5%, soit 712,64 F (on ne tient pas compte des droits de garde)
Coût total des actions : 48221,64 F

Valeur des actions le 1er mai :

Saupiquet : 25 x 1500 = 37500 F
Perrier : : 8 x 1886 = 15088 F
Total CFP : 12 x 567 = 6804 F

Total = 59392 F

Frais de courtage en cas de vente : 890,88 F
Reste net : 58501,12 F

M. Walroy a gagné **8500 F** par rapport aux 50000F initiaux et **10256 F** par rapport à la valeur nette escomptée.

Calcul du taux global de placement :
Somme investie : 48221,64 F   Somme récupérée (en cas de vente): 58501,12 F
gain = 10279,48 F

$$10279{,}48 = \frac{48221{,}64 \times t \times 90}{36000} \quad \text{soit } \mathbf{t = 85{,}27\ \%}$$

3) Intérêt rapporté par un placement sur livret (calcul au jour le jour) :

$$I = \frac{48245 \times 4{,}5 \times 90}{36000} = \mathbf{542{,}76\ F}$$

(on aurait pu faire le calcul par quinzaines comme cela se pratique couramment)

Le 30 mai, M. Walroy posséderait **48787,76 F.**

4)

a) valeur actuelle = $50000 - \dfrac{50000 \times 85{,}27 \times 90}{36000}$ = **39341,25 F**

b) valeur actuelle = $50000 - \dfrac{50000 \times 4{,}5 \times 90}{36000}$ = **49437,50 F**

5) Prix d'achat du lot d'articles : 50000 F

Frais du magasin : $\dfrac{14{,}5}{100} \times 50000 = 7250$ F

Prix de vente total : $\dfrac{100}{70} \times 50000 = 71428{,}57$ F

Le bénéfice est de 71428,57 - 57250 = **14178,57 F**

La somme récupérée par le magasin le 8 mars est de :

71428,57 - 7250 = 64178,57 F

La somme de 64178,57 F est placée à 9,25%.

Bénéfice réalisé grâce au placement : $\dfrac{64178{,}57 \times 9{,}25 \times 83}{36000}$ = **1368,70 F**

Le bénéfice total est finalement de 14178,57 + 1368,70 = **15547,27 F**

6) L'industriel a gagné 8500 F

Le banquier a gagné 1792,50 + 712,64 + 890,88 = 3358,52 F
Le marchand a gagné 15547,27 F

Mais qui donc a perdu dans l'histoire?

TABLEAUX

ICO3

Objectif:

Manipulation des formules de la valeur acquise et de la valeur actuelle $Cn = Co\ (1 + i)^n$

1/ Valeur acquise:

$Co = 12\ 000 \times 1.085^{10} =$ **27 131,80 F**

2/ Capital placé:

$Cn = 23069{,}74 / 1.04^{24} =$ **9 000 F**

3/ Durée:

$540\ 000 \times 1{,}12^n = 951664{,}50$

$1{,}12^n = 1{,}762 \ldots$

$n = \ln(1{,}762 \ldots) / \ln(1.12)$

$n =$ **5 ans**

4/ Taux:

$45\ 000 \times (1 + i)^7 = 90\ 520{,}82$

$(1 + i)^7 = 2{,}011 \ldots$

$1 + i = 2{,}011\ldots^{1/7}$

$1 + i = 1{,}105$

soit t = **10.5 % l'an**

Remarque: *Il faut veiller à ce que les élèves utilisent de façon rationnelle leur calculette (en particulier les valeurs approchées doivent systèmatiquement être stockées en mémoire en cas de réutilisation).*

1/ Valeur nominale:

$Co \times 1{,}095^{-2} = 7923.10$

$Co \times 0{,}834 \ldots = 7923{,}10$

$Co =$ **9 500 F**

2/ Valeur actuelle:

$Cn = 15\ 000 \times 1.08^{-3{,}5} =$ **11457,98 F**

3/Echéance:

$10\ 000 \times 1{,}02^n = 8\ 534{,}90$

$1{,}02^n = 0{,}853 \ldots$

$n = \ln(0{,}853 \ldots) / \ln(1{,}02)$

$n = -8$ soit **8 mois**

4/ Taux:

$150\ 000 \times (1 + i)^{-62} = 81\ 621{,}25$

$(1 + i)^{-62} = 0{,}544 \ldots$

$1 + i = 1{,}00986\ldots$

$i' = 1{,}00986\ldots^{12}$

$i' = 1{,}125$

soit t = **12.5 % l'an**

QUEL INTERET ?

ICO3

Objectif: *Résoudre un système de deux équations à deux inconnues de degré n. Cet exercice reprend un thème traité au niveau des suites géométriques.*

Les intérêts de la 5ème année étant de 26 447,91 : $C_4 \times i = 26\ 447{,}91$

Les intérêts de la 6ème année étant de 28 563,74 : $C_5 \times i = 28\ 563{,}74$

En appliquant la formule $Cn = Co \times (1 + i)^n$:

$$\begin{cases} Co \times (1 + i)^4 \times i = 26\ 447{,}91 \\ Co \times (1 + i)^5 \times i = 28\ 563{,}74 \end{cases}$$

Et en divisant membre à membre : $1 + i = 1{,}08$ soit un taux annuel de **8 %**.

En remplaçant i par sa valeur dans la première équation, on obtient $Co =$ **243 000 F**.

Calcul du nombre d'années de placement:

$Cn - Co = 889\ 612{,}60$

$Co \times 1{,}08^n - Co = 889\ 612{,}60$

$1{,}08^n - 1 = 889\ 612{,}60 / Co$

$1{,}08^n = 3{,}660 \ldots + 1$

$n = \ln(4{,}660\ldots) / \ln(1{,}08)$

$n =$ **20 ans**

TAUX EQUIVALENTS

ICO3

Objectif: *Montrer l'inutilité du calcul du taux équivalent dans le cas d'un seul capital.*

1/ Utilisation du taux équivalent:

$i' = 1{,}06^{1/24} - 1 = 0{,}00243...$

$n = 5{,}5 \times 24 = 132$ quinzaines.

Calcul du capital initial Co:

$Cn - Co = 4\ 171$

$Co \times 1{,}00243...^{132} - Co = 4\ 171$

Co = **11 040,60 F**

2/ Sans utiliser le taux équivalent:

$i = 0{,}06$ et $n = 5{,}5$ ans

Calcul du capital initial:

$Cn - Co = 4\ 171$

$Co \times 1{,}06^{5{,}5} - Co = 4\ 171$

$Co \times 0{,}377... = 4\ 171$

Co = **11 040,60 F**.

ABC

ICO3

Objectif : *Comparaison de taux proportionnels (et un zeste d'intérêts simples).*

On aura soin de corriger l'énoncé en remplaçant 1,5 % mensuel par 0,5 % mensuel.

1/ Calcul du capital initial Co:

$(Co \times 1{,}03^4 - Co) - (Co \times 1{,}06^2 - Co) = 85{,}90$

$0{,}00190 ...\ Co = 85{,}90$

Co = **45 000 F**

2/ Calcul du taux à intérêts simples:

$45\ 000 \times 1{,}005^{24} - 45\ 000 = (45\ 000 \times t \times 2) / 100$

$5722 = 900\ t$

t = **6,36 %**

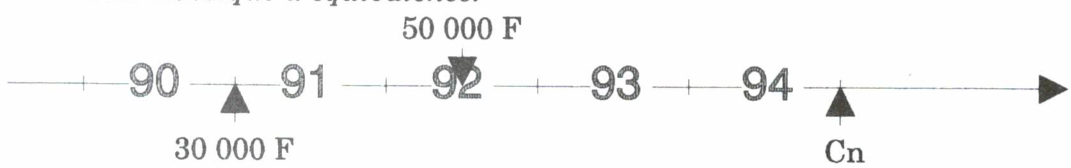
3/ Il suffit de calculer le taux semestriel équivalent au taux mensuel de 0,5 %:

$i' = 1{,}005^6 - 1 = 0{,}0304...$ soit un taux semestriel de **3,04 %**.

DETTE ET VERSEMENT

ICO3

Objectif: *Problème classique d'équivalence.*



Equation d'équivalence fin 1990:

$30\ 000 + C_n \times 1{,}12^{-4} = 50\ 000 \times 1{,}12^{-1{,}5}$

$0{,}635...\ C_n = 42184 - 30000$

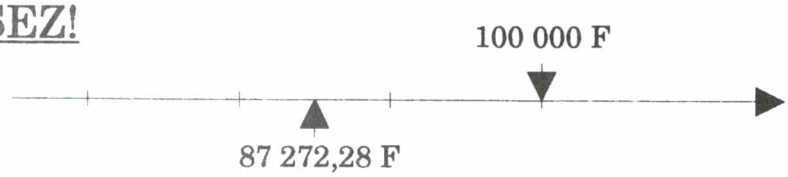
$C_n = 12184 / 0{,}635 ...$

$C_n =$ **19172 F**

REMBOURSEZ!

ICO3

Objectif: *Idem.*



1/ Equation d'équivalence:

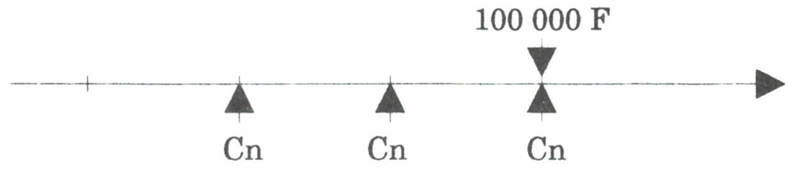
$100\ 000 \times (1 + i)^{-3} = 87\ 272{,}28 \times (1 + i)^{-1{,}5}$

$(1 + i)^{-1{,}5} = 87\ 272{,}28 / 100\ 000$

$(1 + i) = 0{,}872 ...^{-1/1{,}5}$

$(1 + i) = 1{,}095$ soit un taux d'escompte de **9,5 % l'an**.

2/



Equation d'équivalence:

$$Cn \times 1{,}10^{-1} + Cn \times 1{,}10^{-2} + Cn \times 1{,}10^{-3} = 100\ 000 \times 1{,}10^{-3}$$

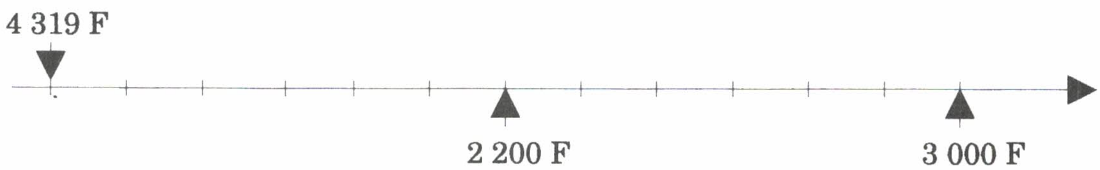
$$2{,}486 \ldots Cn = 75\ 131$$

$$Cn = \mathbf{30\ 211\ F}$$

SECOND DEGRE

ICO3

Objectif: *Effectuer un changement de variable et traiter une équation du second degré.*



Equation d'équivalence:

$$3\ 000 \times (1+i)^{-12} + 2\ 200 \times (1+i)^{-6} = 4319$$

On pose $(1+i)^{-6} = u$

$$3\ 000\, u^2 + 2\ 200\, u - 4319 = 0 \qquad (\Delta = 56\ 668\ 000)$$

La solution positive de cette équation est u = 0,887 ...

$$(1+i)^{-6} = 0{,}887\ldots$$

$$1 + i = 0{,}887\ldots^{-1/6}$$

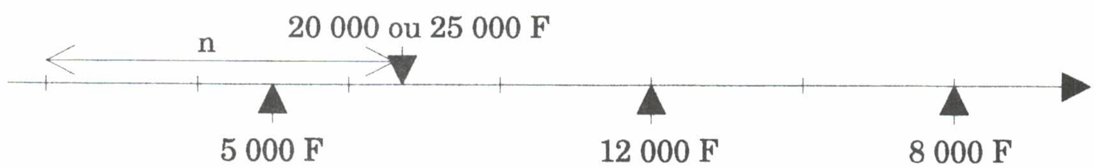
$1 + i = 1{,}02$ soit un taux mensuel de **2 %**

TROIS DETTES

ICO3

Objectif: *Problème d'une échéance antérieure ou postérieure à la date actuelle (n>0 ou n<0)*

1/



Calcul de n pour un versement de 20 000 F:

$$20\ 000 \times 1{,}04^{n} = 5\ 000 \times 1{,}04^{-1,5} + 12\ 000 \times 1{,}04^{-4} + 8000 \times 1{,}04^{-6}$$

$$20\ 000 \times 1{,}04^{n} = 21\ 294$$

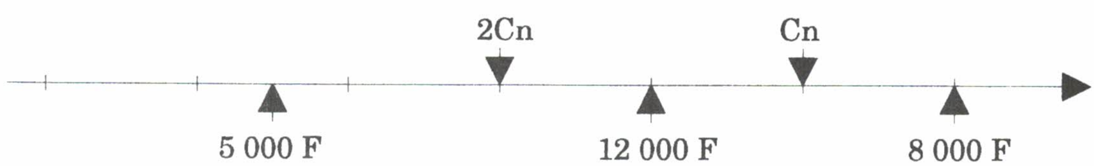
$$1{,}04^{n} = 1{,}064\ \ldots$$

$$n = 1{,}6$$

n étant positif, le versement aurait du avoir lieu il y a **1 an et 7 mois.**

Pour un versement de 25 000 F le même raisonnement donne une échéance d'environ **4 ans** .

2/



$$2Cn \times 1{,}04^{-3} + Cn \times 1{,}04^{-5} = 21\ 294$$

$$2{,}599\ldots \times Cn = 21\ 294$$

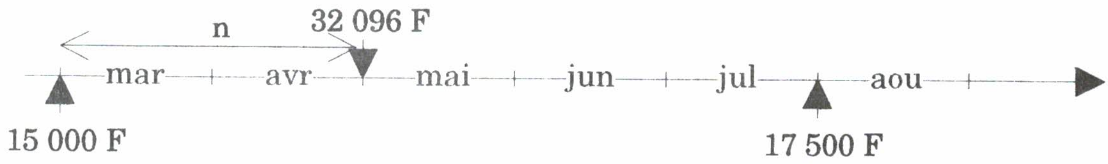
$$Cn = 8\ 190\ F$$

1er versement de **16 380 F** dans 3 ans et
2ème versement de **8190 F** dans 5 ans.

OUBLI

ICO3

Objectif: *Montrer que la date actuelle peut être choisie arbitrairement.*



Equation d'équivalence au 1er mars:

$$32\,096 \times 1{,}02^{\,n} = 15\,000 + 17\,500 \times 1{,}02^{-5}$$

$$32\,096 \times 1{,}02^{\,n} = 30\,850$$

$$1{,}02^{\,n} = 0{,}961\ldots$$

$$n = \ln(0{,}961\ldots) / \ln(1{,}02)$$

$$n = -2$$

Le paiement aura lieu **début mai**.

BAC PRO "B" session 1988

ICO4

Objectif: *Décrypter un énoncé nébuleux.*

Quelques fautes de frappe dans la première édition: lire 01/01/1989 au lieu de 01/01/1991 en ligne 3, lire 160 500 F au lieu de 16 050,00 F en annexe 1 ligne 12.

1/ Financement des travaux de construction.

DATE	EPOQUE	REMBOURSEMENT CONSTANT	REMBOURSEMENT PROGRESSIFS	REMBOURSEMENT EN 3 ECHEANCES
1/1/89	1	**172 819,81**	**160 500,00**	**300 000**
1/7/89	2	**172 819,81**	**164 512,05**	
1/1/90	3	**172 819,81**	**168 625,31**	**450 000**
1/7/90	4	**172 819,81**	**172 840,94**	
1/1/91	5	**172 819,81**	**177 161,96**	
1/7/91	6	**172 819,81**	**181 591,01**	
1/1/92	7	**172 819,81**	**186 130,79**	**550 000**

2/ Financement du matériel:

DATE	EPOQUE	REMBOURSEMENT CONSTANT	REMBOURSEMENT PROGRESSIFS	REMBOURSEMENT EN 3 ECHEANCES
1/1/89	1	**22 516,28**	**21 004,12**	**24 761,90**
1/7/89	2	**21 444,08**	**20 504,01**	
1/1/90	3	**20 422 93**	**20015,83**	**46 647,23**
1/7/90	4	**19 450,41**	**19 539,26**	
1/1/91	5	**18 524,20**	**19 074,04**	
1/7/91	6	**17 642,09**	**18 619,90**	**46 563,84**
TOTAUX		**119 999.99**	**108 757,16**	**117 972,97**

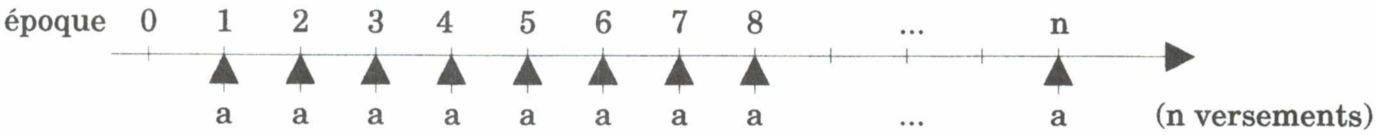
Le second mode est donc le plus intéressant pour le garagiste.

RECHERCHE DES FORMULES DE Vo ET DE Vn

ICO4

Objectif: *Effectuer un parallèle entre suites géométriques et annuités.*

1/



2/ Valeur acquise de chaque versement à l'époque n:

1er versement : $C_1 = a \times (1+i)^{n-1}$
2ème versement: $C_2 = a \times (1+i)^{n-2}$
...
(n-1)ème versement: $C_{n-1} = a \times (1+i)^1$
nème versement: $C_n = a$

En commençant par la fin, on obtient une suite géométrique de 1er terme **a** et de raison **1 + i**.

3/Calcul de la somme de ces valeurs acquises:

$$Vn = \sum_{i=1}^{n} Ci = a\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1} = \mathbf{a\frac{(1+i)^n - 1}{i}}$$

4/ Application numérique:

$V6 = 12\,000 \times (1{,}008^6 - 1) / 0{,}008 =$ **73 455,45 F**

5/ Valeur actuelle des n versements, une époque avant le 1er versement:
On actualise Vn à l'époque 0

$$Vo = Vn\,(1+i)^{-n}$$

$$Vo = a\frac{(1+i)^n - 1}{i}\,(1+i)^{-n} = \mathbf{a\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}}$$

6/ Application numérique:

$Vo = 12\,000 \times (1 - 1{,}008^{-6}) / 0{,}008 =$ **70 026,25 F**

CALCULS

ICO5

Objectif: *Manipuler adroitement sa calculette.*

1/

a	b	n	m	a^n	b^{-n}	a^{n+m}	$(a+b)^n$	$b^{n/m}$
1,5	2	3	4	**3,375**	**0,125**	**17,085...**	**42,875**	**1,681...**
1500	-300	5	3	**7,59...x10^{15}**	**-4,11...x10^{-13}**	**2,56...x10^{25}**	**2,48...x10^{15}**	**imp**
7	9	1/3	0,5	**1,912...**	**0,480...**	**5,061...**	**2,519...**	**4,326...**
20	10	-1	10	**0,05**	**10**	**5,12x10^{11}**	**0,033...**	**0,794...**

Il s'agit ici de déterminer la séquence optimum des touches à utiliser et non pas de trouver le résultat juste. Aucun calcul ne doit se faire de tête et les valeurs intermédiaires ne doivent pas être réentrées au clavier.

2/ a = **1,201...** x = **1,318...** i = **-0,00111...** x = **0,000394...** u = **0,888...**

3/ w = ln (5 / 7,3) = **-0,378...** x = ln (5 + 7,3) / ln 15 = **2,708...**
y = ln (5 / 7,3) / ln (5 + 7,3) = **-0,150...** z = ln (1 - 5 / 7,3) / ln (1 + 15) = **-0,416...**

4/ **Il manque ici la valeur de n. On pourra prendre n = 7.**
C1 = **84 703,91** C2 = **1 700,04** C3 = **83 073,53** C4 = **1 733,40**
C1 = **-5 049,83** C2 = **-49,51** C3 = **-2 279,40** C4 = **-109,68**

5/ **Faute de frappe dans la première édition : $i' = (1 + i)^{n/n'} - 1$**
n = **-19,063...**

RECHERCHE DE TAUX

ICO5

Objectif: *Utilisation d'une Table Financière ou d'un Tableur.*

1/ $400\,000 = 4\,235 \times (1 - (1 + i)^{-240}) / i$
A l'aide d'une table ou d'un tableur, on trouve t = **12 % annuel**.

2/ **Il manque deux données dans l'énonce : échéance en fin d'année et durée 10 ans.**
$Vn = Vo \times (1 + i)^{10}$
$(1 + i)^{10} = Vn / Vo$
$(1 + i)^{10} = 3$
$(1 + i) = 3^{1/10}$
$(1 + i) = 1{,}116...$ soit un taux annuel de **11,6 %.**

3/ $1\,610\,460 = 500 \times ((1 + i)^{40} - 1) / i$
A l'aide d'une table ou d'un tableur, on trouve i = 0,00643.. donc t = **8 % annuel**.

4/ Calcul des annuités à 12 %:
$a = 500\,000 \times 0{,}12 / (1 - 1{,}12^{-12}) = 80\,718{,}40$ F
Calcul du capital restant du après 6 annuités:
$Vo = 80\,718{,}40 \times (1 - 1{,}12^{-6}) / 0{,}12 = 331\,866{,}22$ F
Nouvelles annuités:
$a' = 80718{,}40 - 380{,}50 = 80\,337{,}90$ F
Nouveau taux du crédit:
$331\,866{,}22 = 80\,337{,}90 \times (1 - (1 + i)^{-6}) / i$
Une table ou un tableur donne t = **11,84 %**.

UN JEUNE COUPLE

ICO6

Objectif: *Problème de placement classique.*

1/ $Vn = 1000 \times (1{,}06^{36} - 1) / 0{,}06$ = **119 120 F**

2/ $a = 40\,000 \times 0{,}06 / (1{,}06^{24} - 1)$ = **788 F**

L'HERITAGE

ICO6

Objectif: *Bien différencier valeur acquise d'annuités et valeur acquise par un capital.*

1/ Taux semestriel = $1{,}0625^{1/2} - 1 = 0{,}0307...$

Valeur acquise = $15\,000 \times (1{,}0307...^{24} - 1) / 0{,}0307... =$ **521 450 F**

2/ Valeur acquise à 15 ans = $15\,000 \times (1{,}0307...^{16} - 1) / 0{,}0307... =$ **304 212 F.**

Valeur acquise à 18 ans (en décembre)= $304\,212 \times 1{,}0307...^{8} =$ **387 697 F**

3/ $304\,212 \times (1 + i)^{8} = 521\,450$

$(1 + i)^{8} = 1{,}714 ...$

$(1 + i) = 1{,}069 ...$ soit un taux annuel de **14,4 %**

LE RELEVE DE COMPTE

ICO6

Objectif: *Exploiter un relevé de compte bancaire réel.*

1/ Calcul des intérêts pour le mois de décembre :

171 959,41 - 2 500 - 169 076,74 = 382,67 F

Calcul du taux annuel :

$i = 387{,}67 / 169\,076{,}74 = 0{,}00226...$ soit $i' = (1 + 0{,}00226..)^{12} - 1 = 0{,}0275$

soit un taux de **2,75 %**.

2/ Calcul du nombre d'annuités jusqu'à celle du 01/01/90 :

$171\,959{,}41 = 2\,500 \times (1{,}00226...^{n} - 1) / 0{,}00226...$

$1{,}00226...^{n} = 1{,}155...$

$n = \ln (1{,}155...) / \ln (1{,}00226...) = 64$ mensualités

Le premier virement de 2 500 F a été effectué le **31 août 1985**.

PREMIER CREDIT

ICO6

Objectif: *Problème complet avec taux équivalents, annuités et capitaux.*

Taux mensuel équivalent:

$i' = 1{,}06^{1/12} - 1 = 0{,}00486...$

Montant de la facture du fournisseur:

$V_o = 15\,000 \times (1 - 1{,}00486...^{-16}) / 0{,}00486... =$ **230 353 F**

Taux trimestriel:

$i'' = 1{,}06^{1/4} - 1 = 0{,}0146...$

Montant des remboursements trimestriels:

$a = 230\,353 \times 0{,}0146... / (1 - 1{,}0146...^{-4}) =$ **59 716 F**

Taux mensuel équivalent à 3 % annuel:

$i''' = 1{,}03^{1/12} - 1 = 0{,}00246...$

Nombre de mensualités à 3 %:

$230\,353 = 15\,000 \times (1 - 1{,}00246...^{n}) / 0{,}00246...$

$1{,}00246...^{n} = 0{,}962...$

$n = -15{,}6...$ soit **16 mensualités**

Valeur actuelle de 15 mensualités:

$15\,000 \times (1 - 1{,}00246...^{-15}) / 0{,}00246...$

$= 220\,622$ F

Reste à payer:

230 353 - 220 622 = 9 731 F

Montant de la dernière mensualité:

$9\,731 = C_n \times 1{,}00246...^{-16}$

$C_n =$ **10 122 F**

AU TABLEAU !

ICO6

Objectif: *Utiliser les formules de Cn, Co, Vn et Vo.*

Annuités	Taux i annuel	Taux i' équivalent par période	Nombre d'annnuités	Période	Valeur actuelle une période avant le 1er versement	Valeur acquise au moment du dernier versement
1 200	0,085	**0,085**	20	ans	**11 356**	**58 052**
3 705	0,12	**0,0094888**	240	mois	350 000	**3 376 203**
500	**0,10**	0,0241138	**28**	**trimestres**	10 095	**19 672**
12 215	0,09	0,007207	36	mois	**386 107**	500 000
2 500	0,07	**0,0344080**	6	semestres	13 347	16 351
10 000	0,05	**0,1297263**	8	2 ans 1/2	**48 033**	**127 445**
500	**0,15**	**0,15**	10	ans	2 509	**10 152**

Remarques: - *Il serait intéressant, à la ligne 5, de ne pas donner le taux (0,07) annuel.*
- *La ligne 7 ne peut pas se traiter algébriquement.*

CHERE MAISON

ICO7

Objectif: *Ecrire une équation, la simplifier et trouver une méthode de résolution (table financière ou tableur).*

Equation: $na = 2Vo$ soit $n = 2 \times (1 - 1{,}006627...^{-n}) / 0{,}006627$

En utilisant un tableur, on obtient une solution approchée de 240 mois soit 20 ans.

HARD !!!

ICO7

Objectif: *Changement de taux en cours de remboursement. Traitement d'une équation par ordinateur.*

Taux trimestriel équivalent : $i' = 0{,}027587273$

Montant des 20 trimestrialités:

$a = 1\,500\,000 \times 0{,}0275... / (1 - 1{,}0275...^{-20}) = 98\,588$F

Nouveau taux trimestriel: $i'' = 0{,}022947935$

Montant des n dernières trimestrialités : $a = 98\,588 - 1\,930 = 96\,658$F

Equivalence du capital restant du au changement de taux:

$98\,588 \times (1 - 1{,}0275...^{-n}) / 0{,}0275... = 96\,658 \times (1 - 1{,}0229...^{-n}) / 0{,}0229 ...$

soit $(1 - 1{,}0275...^{-n}) / (1 - 1{,}0229...^{-n}) = 1{,}17863...$

En faisant varier n de 1 à 20, le tableur calcule le quotient $(1 - 1{,}0275...^{-n}) / (1 - 1{,}0229...^{-n})$.

La valeur 1,17863... correspond à $n = 8$.

Il reste donc **8 trimestrialités** à payer.

TABLEAU D'AMORTISSEMENT

ICO7

Objectif: *Problème classique de construction d'un tableau d'amortissement.*

Montant d'une annuité: $a = 140\,000 \times 0{,}06 / (1 - 1{,}06^{-5}) = 33\,235{,}47$ F

Années	Capital restant du en début d'année	Intérêts à payer pour l'année	Amortissements	Annuités
1	140 000	8 400	24 835	33 235
2	115 165	6 910	26 325	33 235
3	88 840	5 330	27 905	33 235
4	60 935	3 656	29 579	33 235
5	31 356	1 881	31 356	33 235

M.DUPONT

ICO7

Objectif: *Problème de synthèse sur la notion d'emprunts indivis.*

1/ Taux mensuel équivalent: $i' = 0{,}009863581$

Montant d'une mensualité:

$a = 120\,000 \times 0{,}00986\ldots / (1 - 1{,}00986\ldots^{-120}) =$ **1 710,31 F**

2/ a/ Amortissement 1ère ligne : 120 000 - 119 444,91 = 555,09 F.

Ils forment une suite géométrique de raison $1 + i$:

$1 + i = 560{,}15 / 555{,}09 = 1{,}009115639$

b/ Taux annuel correspondant: $i' = 1{,}0091\ldots^{12} = 1{,}115$ soit t = **11,5%**.

c/ Calcul de l'annuité : $a = 120\,000 \times 0{,}00911\ldots + 555{,}09 = 1\,648{,}97$ F

	Capital	Intérêts	Amortissement	Annuité
1	120 000,00	1 093,88	555,09	1648,97
2	119 444,91	1 088,82	560,15	1648,97
3	118 884,76	1 083,71	565,26	1648,97
4	118 319,50	1 078,55	570,42	1648,97
5	117 749,08	1 073,36	575,61	1648,97
6	117 173,47	1 068,11	580,86	1648,97

3/ Nouveau taux équivalent : $i' = 0{,}007207323$

Capital restant du:

$Vo = 1\,648{,}97 \times (1 - 1{,}00911\ldots^{-72}) / 0{,}00911\ldots = 86\,775{,}42$F

Nouvelles mensualités:

$a = 86\,775{,}42 \times 0{,}00720\ldots / (1 - 1{,}00720\ldots^{-72}) =$ **1 549,09F**

Il aura économisé (1648,97 - 1549,09) x 72 = **7 191,36 F.**

SUITE ET AMORTISSEMENT

ICO7

Objectif: *Exploiter les données d'un tableau d'amortissement.*

1/ Taux par période: $i = 211{,}49 / 17\,810{,}00 =$ **0,011874789**

2/ Taux annuel: $i' = 1{,}0118...^{4} - 1 = 0{,}0483...$ soit t = **4,8 %** .

3/ Montant de l'emprunt : Vo = **17 810,00 F**

4/ Coût total du crédit = 1 228,79 x 16 = **19 660,64 F**

5/ Seul l'amortissement du capital forme une suite géométrique de raison **q = 1 + i.**

CLASSIQUE

ICO7

Objectif: *Tableau d'amortissement à trous.*

1/ Calcul du taux du crédit :

$$(1 + i)^{2} = 200\,852 / 160\,118$$

$$1 + i = 1{,}254...^{1/2}$$

$$i = 0{,}12$$

Calcul du capital 1994 :

$$C = 129\,015 / 0{,}12 = 1\,075\,125 \text{ F}$$

Calcul du capital 1993:

$$C = 1\,075\,125 + 200\,852 = 1\,275\,977 \text{ F}$$

Calcul de l'intérêt 1993:

$$I = 1\,275\,977 \times 0{,}12 = 153\,117 \text{ F}$$

Calcul de l'annuité:

$$a = 153\,117 + 200\,852 = 353\,969 \text{ F}$$

Année	Capital	Intérêt	Amortissement	Annuité
...	...	...	160 118	...
1992	1 455 309	174 637	179 332	353 969
1993	1 275 977	153 117	200 852	353 969
1994	1 075 125	129 015	224 954	353 969
1995	850 171	102 021	251 948	353 969
1996	598 223	71 787	282 182	353 969
1997	316 041	37 925	316 041	353 966

2/ Calcul du nombre d'annuités :

$$2\,000\,000 = 353\,969 \times (1 - 1{,}12^{\,n}) / 0{,}12$$

$$1{,}12^{\,n} = 0{,}321974523$$

$$n = \ln 0{,}321... / \ln 1{,}12$$

$$n = -10$$

soit un début de remboursement en **1988**.

PRÊTS IMMOBILIERS

ICO8/ICO9

Objectif: *Traiter un problème concrèt de prêt immobilier.*

1/ Les intérêts n'étant capitalisés qu'en fin d'année, il faut calculer les valeurs acquises annuelles à intérêts simples:

Fin 1985 : $C = 1000 + 1000 \times 4{,}5 \times 12 / 1200 + 1000 + 1000 \times 4{,}5 \times 11 / 1200 + \ldots$

$= 12 \times 1000 + 1000 \times 4{,}5 \times (1 + 2 + 3 + \ldots + 12) / 1200$

$= 12\ 292{,}50$ F

Fin 1986 : $C = 12\ 292{,}50 + 12\ 292{,}50 \times 4{,}5 \times 12 / 1200 + 12\ 292{,}50$

$= 25\ 138{,}16$ F

Fin 1987 : $C = 25\ 138{,}16 + 25\ 138{,}16 \times 4{,}5 \times 12 / 1200 + 12\ 292{,}50$

$= 38\ 561{,}88$ F

Fin 1988 : $C = 38\ 561{,}88 + 38\ 561{,}88 \times 4{,}5 \times 12 / 1200 + 12 \times 1500 + 1500 \times 4{,}5 \times 78 / 1200$

$= 58\ 735{,}91$ F

Fin 1989 : $C = 58\ 735{,}91 + 58\ 735{,}91 \times 4{,}5 \times 12 / 1200 + 18\ 438{,}75$

= 79 817,78 F

2/ On peut traiter cette question du taux à l'aide d'un tableur comme déjà vu ou par un système d'équations:

$$\begin{cases} 355\ 460 = 15\ 522{,}99 \times (1 - (1 + i)^{-24}) / i \\ 179\ 620 = 4100 \times (1 - (1 + i)^{-48}) / i \end{cases}$$

En divisant membre à membre, on obtient :

$(1 - (1 + i)^{-48}) / (1 - (1 + i)^{-24}) = 1{,}913178433$

On pose $x = (1 + i)^{-24}$ et on simplifie la fraction:

$1 + x = 1{,}913\ldots$

$x = 0{,}913\ldots$ ou $i = 0{,}913^{-1/24} - 1 = 0{,}003791502$ et t = **4,6 %** annuel.

Montant maximum à rembourser : 18 000 / 4 = 4 500 F

Emprunt sur 9 ans :

Prêt sur livret : capital = 78 750 F mensualité = 889,98 F

Prêt complémentaire : capital = 300 000 - 78 750 = 221 250 F taux mensuel = 0,011436641

mensualité $= 221\ 250 \times 0{,}0114\ldots / (1 - 1{,}0114\ldots^{-108}) = 3\ 578{,}17$ F

soit des mensualités totales de 4 468,15 F.

3/ Taux d'intérêt : $i = 298{,}835719 / 10\ 000 = 0{,}0298\ldots$ $i' = 1{,}0298\ldots^{4} - 1 = 0{,}125$ soit **t = 12,5%**

Durée du prêt:

$10\ 000 = 394{,}927753 \times (1 - 1{,}0298\ldots^{-n}) / 0{,}0298\ldots$

$n = \ln 0{,}24331549 / \ln 1{,}0298\ldots$

n = 48 trimestres ou **12 ans**.

Capital restant du au dernier trimestre:

$V_o = 394{,}927\ldots \times (1 - 1{,}0298\ldots^{-1}) / 0{,}0298\ldots$

$V_o = 383{,}468349$ F

Dernière ligne du tableau d'amortissement:

Trimestre	Capital	Intérêts	Amortissements	Charges
48	383,468349	11,459404	383,468349	394,927753

Coût total du crédit:

$394{,}927753 \times 48 \times 30 =$ **568 695,96 F**.

4/ La première échéance étant juin 1990 , la dernière aurait du être mars 2002.

Nombre d'annuités restant dues en août 1996 : 23 trimestrialités.

Valeur actuelle en juin 1996 :

$$V_o = 394{,}927... \times (1 - 1{,}0298...^{-23}) / 0{,}0298...$$

$$= 6\,501{,}91 \text{ F}$$

Somme à rembourser au 1er août 1996:

$6\,501{,}91 \times 1{,}0298...^{2/3} \times 30 \times 1{,}02 =$ **202 902,69 F**.

LE JOURNAL

Appelons x le nombre de journaux vendus.
Dépenses occasionnées par la fabrication de x journaux : $x + 500$
Recette pour la vente de x journaux : $P x$
Or on sait que $x = 400 - 50 P$
Il y aura équilibre si la condition $x + 500 = P x$
Il y aura bénéfice si $x + 500 < P x$
En remplaçant x par sa valeur, on obtient :
$400 - 50 P + 500 < 400 P - 50 P^2 \Longrightarrow 50 P^2 - 450 P + 900 < 0$
En divisant par 50, on obtient :

$$\boxed{P^2 - 9 P + 18 < 0}$$

Résolvons cette inéquation :
$\Delta = 9$ soit $P' = 6$ et $P'' = 3$
Etudions le signe de $P^2 - 9 P + 18$

P	0		3		6	
$P^2-9p+18$		+	0	-	0	+

L'inéquation est vérifiée si le prix de vente P est compris entre 3 et 6 Francs.

Le nombre d'acheteurs est $x = 400 - 50 P$. Il sera évidemment maximum pour **P = 3F** (dépenses amorties), et sera alors de **250**.

Bénéfice = Recette - Dépenses = $P x - (x + 500)$
en remplaçant x par $400 - 50 P$ on obtient :
$B = P (400 - 50 P) - (400 - 50 P + 500)$ soit
$B = - 50 P^2 + 450 P - 900$

Le bénéfice sera maximum lorsque sa dérivée B' sera nulle, soit :
$B' (P) = - 100 P + 450 = 0$
$B'(P) = 0 \Longrightarrow P =$ **4,50 F**

Le nombre d'acheteurs sera alors de $x = 400 - 50 \times 4,5 =$ **175**

Commentaires

Avant d'aborder ce chapitre, les élèves doivent connaitre le vocabulaire se rapportant à la fabrication et à la commercialisation d'un produit par une entreprise (voir cours).

Ils doivent savoir calculer une dérivée simple, étudier une fonction et résoudre un système d'inéquation à plusieurs variables.

***Correction** à apporter à l'exemple page OPT 1, problème à plusieurs variables, ligne 9 : remplacer " chaque élève doit travailler 8 heures par jour sur une machine" par " chaque appareil fonctionne 8 heures par jour".*

Ce calcul a effectivement été réalisé par les élèves qui animent le journal de l'établissement.

DU BON CAFE

Recette totale : **540 Q**
Bénéfice = Recette - Coût de production = 540 Q - (0,004Q^2 + 50 Q + 10000)
D'où B(Q) = - **0,004 Q^2 + 490 Q - 10000**
Le bénéfice passe par un maximum car le coefficient de Q^2 est négatif;
calculons la dérivée de la fonction B(Q) :
B'(Q) = - 0,008 Q + 490
On a B'(Q) = 0 pour Q = **61250** ce qui correspond à un bénéfice de **14 996 250 F**.

Le coût marginal, C'(Q), est donné par la dérivée du coût de production:
C'(Q) = 0,008 Q + 50
Pour la quantité qui maximalise le bénéfice, on aura :
C'(Q) = 0,008 x 61250 + 50 = **540 F**
on retrouve bien le prix de vente unitaire.

$$\text{Coût moyen} = \frac{0{,}004\,Q^2 + 50\,Q + 10000}{Q} = \mathbf{295{,}16\ F}$$

UNE ENTREPRISE

On suppose que toute la production est vendue; la recette est alors de :

R(Q) = P(Q) x Q = **- 0,05 Q^2 + 200 Q**

Le bénéfice est : B(Q) = R(Q) - C(Q) donc on a :

B(Q) = P(Q) x Q - C(Q) = (200 - 0,05 Q)Q - (0,08 Q^2 + 10 Q + 1200)

B(Q) = - 0,13 Q^2 + 190 Q - 1200

Le coût de production sera amorti lorsque la recette totale sera égale à ce coût de production, ou quand le bénéfice sera nul.

Il faut donc résoudre l'équation :
B(Q) = 0 ==> - 0,13 Q^2 + 190 Q -1200 = 0
D = 35476 soit Q' = 6,34 donc Q' = 7
et Q" = 1455

Il y a donc équilibre pour deux quantités fabriquées : **7 et 1455**

Le bénéfice sera maximum pour une quantité évidemment comprise entre ces deux valeurs.
Cherchons la dérivée de la fonction B(Q) :
B'(Q) = - 0,26 Q + 190
B'(Q) = 0 ==> Q = 730, 76 soit **Q = 731**

Commentaires :

Le coût de production est 0,08 Q^2 + 10 Q + 1200

Le problème ressemble beaucoup au précédent, mais cette fois le prix de vente unitaire du produit est fonction de la quantité produite.

LES FENETRES

Appelons x et y la quantité de fenêtres F1 et F2 à fabriquer mensuellement pour optimiser le résultat.

Les contraintes relatives aux heures d'utilisation des deux machines sont :

$$\begin{cases} x + 2y < 1200 \\ 3x + 5{,}5y < 3600 \end{cases}$$

Calculons le coût de production :

$C = 120x + 240x + 240y + 440y + x.0{,}2.250 + y.0{,}3.250$

soit $C = 410x + 755y$

La recette totale est : $R = 1200x + 1500y$

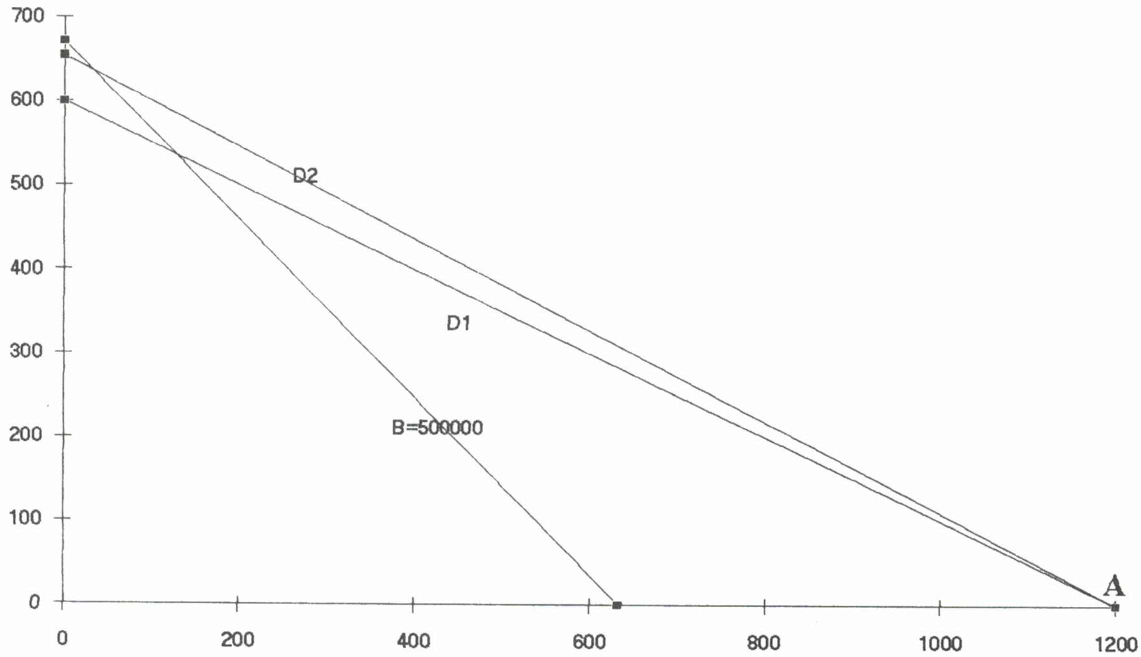
Le résultat (bénéfice) est $B = R - C = 790x + 745y$

Dans le premier cas toute la production est commercialisée, les seules contraintes sont celles énoncées plus haut. On trace sur un graphique les droites d'équations :

$$x + 2y - 1200 = 0 \text{ et } 3x + 5{,}5y - 3600 = 0$$

Commentaires

Il manque dans les données les quantités de bois utilisées : prendre pour F1 : 0,2m³ et pour F2 : 0,3m³



La droite marquée B=500000 est une droite d'iso-bénéfice; toutes les droites d'iso-bénéfice sont parallèles, elles ont un coefficient directeur de -790/745 soit -1,06.

500000 a été choisi arbitrairement, on aurait pu prendre une autre valeur.

Le bénéfice sera maximum lorsque la droite d'iso-bénéfice sera la plus éloignée de l'origine du repère : cela se produit au point A (1200, 0)

Le bénéfice est alors de **948 000 F**

Il faudrait donc fabriquer 1200 fenêtres F1 et 0 fenêtres F2

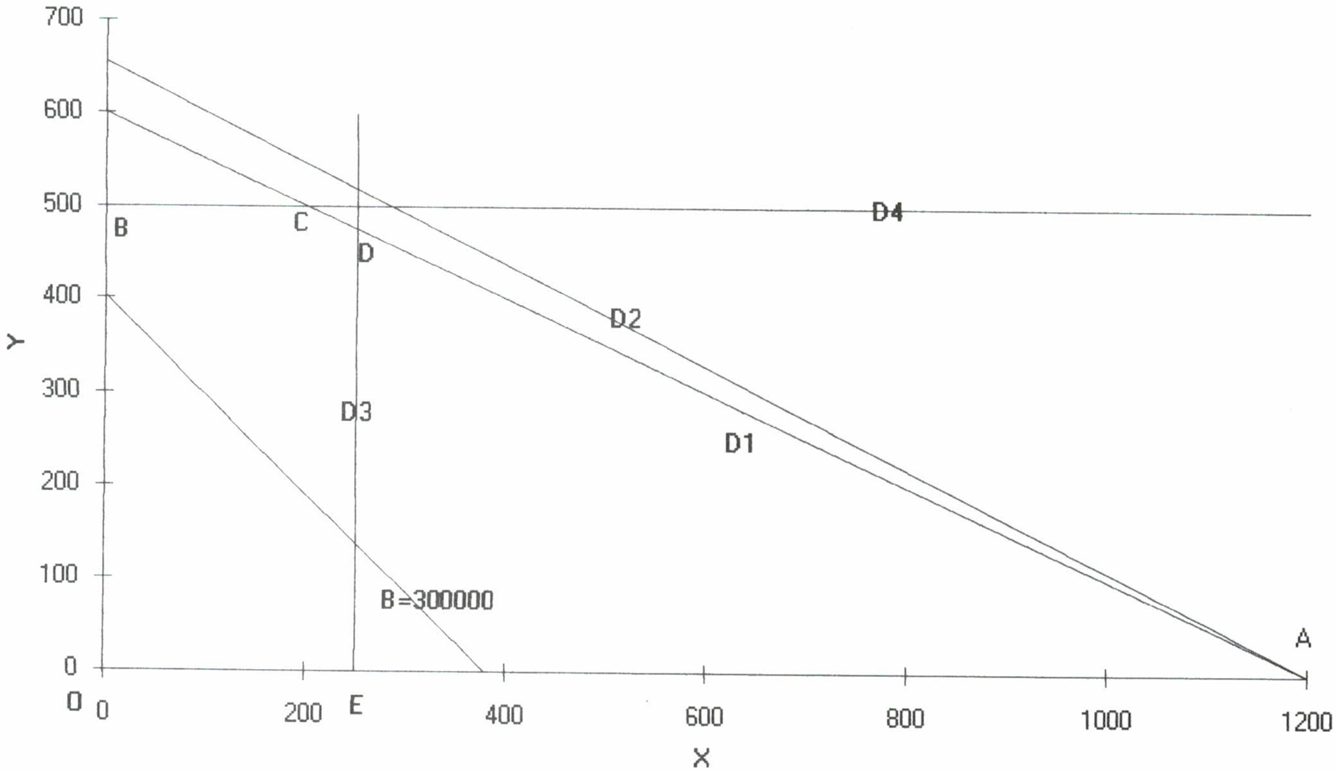
Dans le deuxième cas, le marché est limité, ce qui impose deux contraintes supplémentaires. Ces deux contraintes sont :

$$x < 250 \quad \text{et } y < 500$$

Le système est donc maintenant le suivant :

$$\begin{cases} x + 2y \leqslant 1200 & \text{(D1)} \\ 3x + 5{,}5y \leqslant 3600 & \text{(D2)} \\ x \leqslant 250 & \text{(D3)} \\ y \leqslant 500 & \text{(D4)} \end{cases}$$

aux 2 droites précédentes, il faut ajouter les droites $x = 250$ et $y = 500$.



Nous avons cette fois tracé la droite d'iso-bénéfice B = 300000.

La zone des solutions est délimitée par le polygone OBCDE

La droite d'iso-bénéfice passant par le point D n'a pas d'autre point commun avec la zone-solution : le point D correspond au bénéfice maximum; ses coordonnées sont (250; 475)

La fabrication qui optimisera le bénéfice est de **250 fenêtres type F1 et 475 fenêtres type F2**

Le bénéfice sera alors de **551 375 F**

PNEU MATHS HIC

Déterminons les contraintes imposées à l'entreprise Degome.

Contraintes concernant les ouvriers :

heures disponibles : $\begin{cases} \text{OP1 : } 10 \times 39 = 390 \text{ heures par semaine} \\ \text{OP2 : } 4 \times 39 = 156 \text{ heures par semaine} \end{cases}$

Appelons a le nombre de pneus A et b le nombre de pneus B à fabriquer pour que le chiffre d'affaires soit le plus grand possible.

heures ouvriers nécessaires : OP1 : $3a + 2{,}2b$
OP2 : $1{,}5a + 0{,}8b$

Contraintes concernant la matière première :

quantité nécessaire à la fabrication des pneus : $6a + 7{,}5b$

Contraintes concernant le nombre de pneus à fabriquer par semaine:

130 pneus minimum par semaine (types confondus)
70 pneus minimum de type A
50 pneus minimum de type B

Ecrivons les inéquations qui traduisent les contraintes :

$$\begin{cases} 3a + 2{,}2b \leqslant 390 & \text{(ouvriers OP1)} \\ 1{,}5a + 0{,}8b \leqslant 156 & \text{(ouvriers OP2)} \\ 6a + 7{,}5b \leqslant 900 & \text{(matière première)} \\ a + b \geqslant 130 & \text{(nombre de pneus total)} \\ a \geqslant 70 & \text{(pneus type A)} \\ b \geqslant 50 & \text{(pneus type B)} \end{cases}$$

Commentaires

*Le nombre de pneus à déterminer est évidemment le nombre de pneus à fabriquer **par semaine**.*

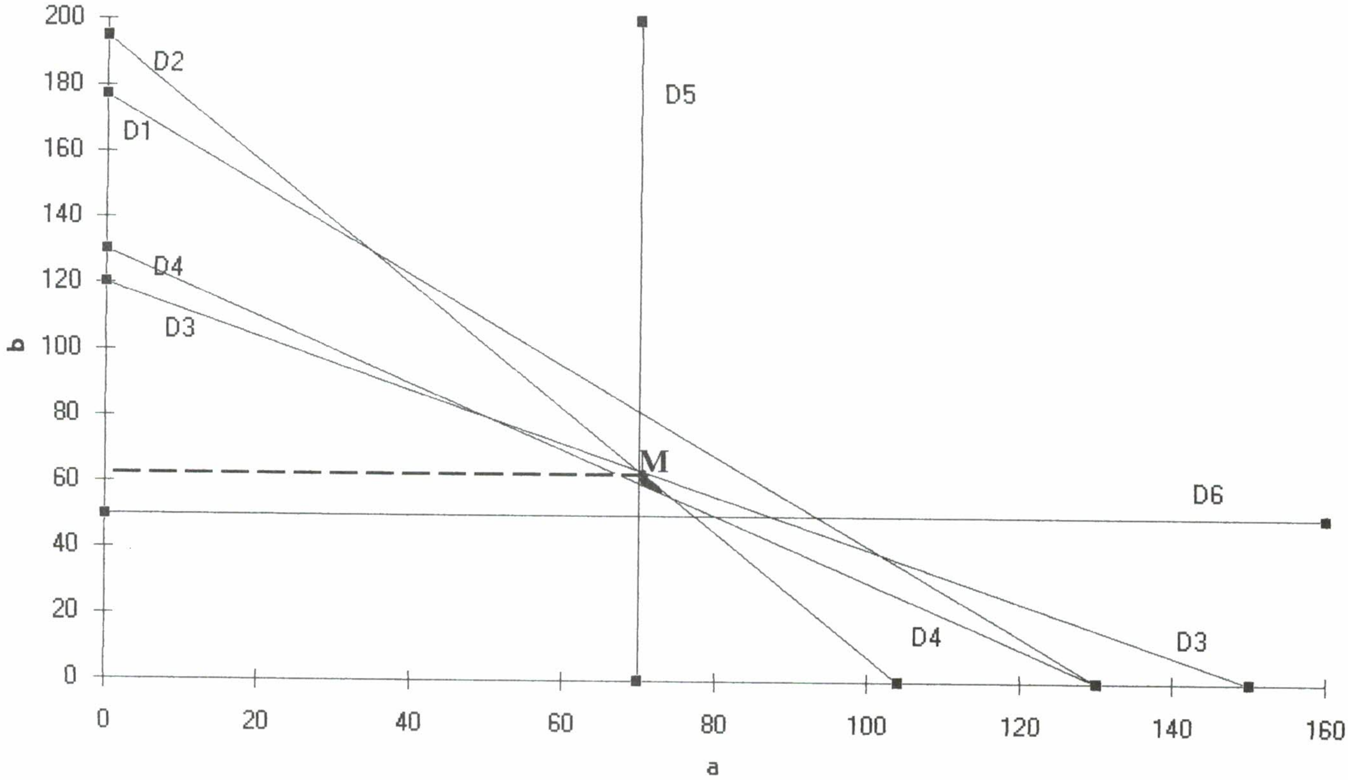
Ce problème est plus complexe car les contraintes sont nombreuses : on obtient 6 inéquations.

Il faut que les élèves lisent attentivement l'énoncé afin de ne pas oublier de contraintes. Pour cela il leur faut travailler avec méthode et classer les contraintes par types : ouvriers OP1, ouvriers OP2, matière première, nombre de pneus minimum à fournir. Après seulement, ils pourront écrire les inéquations correspondantes puis tracer le graphique.

Ce problème s'adresse aux élèves ayant un bon niveau, donc plus particulièrement à ceux ayant choisi l'option A.

Il faut maintenant tracer les droites qui correspondent aux 6 contraintes soit :

(D1) : $3a + 2{,}2b - 390 = 0$
(D2) : $1{,}5a + 0{,}8b - 156 = 0$
(D3) : $6a + 7{,}5b - 900 = 0$
(D4) : $a + b - 130 = 0$
(D5) : $a = 70$
(D6) : $b = 50$



Pour déterminer la zone "solutions" il faut hachurer tout ce qui ne convient pas (inéquations).

(cela n'est pas réalisé ici pour ne pas nuire à la lisibilité)

Il reste finalement un petit triangle (en noir) dont le sommet M correspond au chiffre d'affaires maximum.

Les coordonnées de M sont : 70; 63

L'entreprise Degome devra donc fabriquer chaque semaine 70 pneus du type A et 63 pneus du type B.

Le chiffre d'affaires correspondant est de **46900 F.**

Commentaires :

Pour ne pas alourdir le graphique, la droite d'iso-chiffre d'affaires ne figure pas, ni les hachures.

Faire vérifier aux élèves que les solutions trouvées sont compatibles avec les différentes contraintes.

La zone-solution étant très petite, il faut apporter beaucoup de soin au tracé du graphique.

Des Stylos et des Courbes

1) Sur le graphique 1, la zone bénéficiaire est celle où la recette R(Q) est supérieure au coût de production C(Q), soit pour une quantité comprise entre 70 et 380 stylos environ.

Sur le graphique 2 la précision est meilleure; la zone bénéficiaire est celle où la recette moyenne est supérieure au coût moyen.

2) - Le prix de vente d'un stylo se lit facilement sur le graphique 2, il est de **20 F.**

- Le seuil de rentabilité se déduit de la question 1, il est de **70 stylos** environ (on peut le trouver sur les deux graphiques).

- De même la quantité à ne pas dépasser est de **380 stylos.**

- Le coût moyen minimum se lit sur le graphique 2 : il est de **9 F** si la fabrication est de **160 stylos.**

- Le bénéfice maximum (optimum économique) sera atteint lorsque la différence entre la recette et le coût de production sera la plus grande (et positive évidemment).

La lecture sur le graphique 1 n'est pas aisée, mais on peut accepter comme réponse une quantité **Q = 200 stylos.**

Il est plus commode ensuite de déterminer le bénéfice sur le graphique 2 :

pour Q = 200, le coût moyen est de 10 F, ce qui donne un coût total de 2000 F.

La recette étant alors de 4000 F,

le bénéfice maximum est de 2000 F.

Commentaires :

Modification à apporter à l'énoncé : à la toute dernière question lire " déduire des graphiques le résultat si la quantité est Q = 300, 400, 40 stylos.

Ce problème n'est pas difficile; il consiste essentiellement à utiliser des graphiques.

On peut utiliser l'un ou l'autre des graphiques pour trouver les réponses : l'un représente la recette totale et le coût total, l'autre la recette moyenne et le coût moyen.

Les graduations n'étant pas très précises, on admettra une marge d'erreur dans les réponses fournies par les élèves.

Déterminons le résultat pour des quantités de stylos vendues de 300, 400, 40 stylos :

Q = 300 : C(Q) = 300 x 14 = 4200 F et R(Q) = 300 x 20 = 6000 F
résultat = **1800 F** (bénéfice)

Q = 400 : C(Q) = 400 x 22 = 8800 F et R(Q) = 400 x 20 = 8000 F
résultat = **- 800 F** (perte)

Q = 40 : C(Q) = 40 x 32,50 = 1300 F et R(Q) = 40 x 20 = 800 F
résultat = **- 500 F** (perte)