IREM de LORRAINE

BAC PRO

maths générales

LIVRE du MAÎTRE

Jean ENEL

François LEIRITZ

© Edité et imprimé par l'**Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques** - (Université de NANCY I - Faculté des Sciences) - B.P. 239 - 54506 VANDOEUVRE-les-NANCY CEDEX
Dépôt légal : 4ème trimestre 1994
n° de la publication : 2-85406-146-2
Responsable de la publication : Le Directeur de l'IREM, Michel BONN

MATHS GENERALES ORIENTEES TERTIAIRE — **Calcul Numérique** — CORRIGES — BAC PRO IREM DE LORRAINE

Le Théatre des Opérations

ENSEMBLE $\mathbb{N}$

NUM2

Opérations à trou :

86 409	+	2 436	=	88 845
1 953	+	700	=	2 653
831	+	25 354	=	26 185
7 573	+	7 148	=	14 721
52 357	+	76 198	=	128 555
149 123	+	111 836	=	260 959

```
   243
 x  57
 -----
  1701
 1215_
 -----
 13851
```

```
2210 | 48
     |----
 290 | 46
     |
   2 |
```

448	-	153	=	295
536	-	419	=	117
9 948	-	5 412	=	4 536
3 600	-	3 095	=	505
14 532	-	9 079	=	5 453

ENSEMBLE $\mathbb{Z}$

NUM2

	$x = 12 ; y = 7$	$x = -5 ; y = 5$	$x = -2 ; y = -1$
$A = 4x\,(y - x)^2$	**1200**	**-2000**	**-8**
$B = 12y^2 - 5xy$	**168**	**425**	**2**
$C = -3\,(x + y)\,(x - y)^2$	**-1425**	**0**	**9**

	$x = 12$	$x = 1$	$x = -5$	$x = -10$
$D = 3\,\lvert x - 2\rvert - \lvert 2x + 7\rvert$	**-1**	**-6**	**18**	**23**

E est évidement égal à 0 car $(x - x) = 0$!

ENSEMBLE $\mathbb{D}$

NUM2

	$t = 8{,}4$	$t = 7{,}2$	$t = 5{,}2$
$r = \dfrac{19\,751\,284t}{100 + t}$	**1 530 542,30**	**1 326 578,78**	**976 299,21**

Résultats au centième près.

	$I = 124{,}50 ; t = 12{,}5 ; n = 75$
$C = \dfrac{36\,000\,I}{tn}$	**4780,80**

	$a = 1248{,}50 ; i = 0{,}0275134 ; n = 7$
$V = a\dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$	**9494,86**

	$C = 287000 ; i = 0{,}07842169 ; n = 10$
$a = C\dfrac{i}{1 - (1+i)^{-n}}$	**42467,47**

La "règle du jeu" est d'économiser le plus de frappes de touche de la calculette possible tout en entrant uniquement les chiffres de l'énoncé.

	¶ = 3,14159 et R = 6 400 000
$V = \frac{4}{3}\P R^3$	**$1{,}0980652 \times 10^{21}$**

	R = 6400 ; h = 36 000 ; g = 9,81
$T = \frac{2\P(R+h)\sqrt{R+h}}{R\sqrt{g}}$	**2737**

$A = (12{,}4 - 7{,}3586)^2 \times 7{,}3586 = \mathbf{187{,}024}$

$B = 3 \times 0{,}525^2 - 0{,}525^3 = \mathbf{0{,}682}$

$C = \dfrac{1 - 0{,}0234782}{1 + 0{,}0234782} = \mathbf{0{,}954}$

$D = 2{,}06466 \times \left(1 + \dfrac{1}{2{,}06466}\right) = \mathbf{3{,}065}$

$E = \dfrac{3 \times 15{,}7142803}{2 \times 15{,}71428} = \mathbf{1{,}500}$

$F = 0{,}8624 \times 7{,}8624^2 = \mathbf{53{,}311}$

ENSEMBLE $\mathbb{Q}$

NUM2

$A = \dfrac{2}{5} + \dfrac{4}{3} = \mathbf{\dfrac{26}{15}}$

$B = \dfrac{5}{11} + \dfrac{13}{19} - \dfrac{4}{3} = -\mathbf{\dfrac{122}{627}}$

$C = \dfrac{3}{5} + 0{,}16 - 0{,}25 = \mathbf{0{,}51}$

$D = \left(\dfrac{6}{15} - \dfrac{3}{4}\right) \times \dfrac{5}{7} = -\mathbf{\dfrac{1}{4}}$

$E = \dfrac{35}{24} \times \left(\dfrac{72}{42} + \dfrac{18}{12}\right) = \mathbf{\dfrac{75}{16}}$

$F = \dfrac{\dfrac{4}{3} + 2 - \dfrac{1}{9}}{\dfrac{16}{15} + 3 - \dfrac{2}{5}} = \mathbf{\dfrac{29}{33}}$

$G = \dfrac{\dfrac{1}{3} - \dfrac{5}{2}}{\dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{2}} \times \dfrac{\dfrac{5}{6} + \dfrac{7}{3}}{2 - \dfrac{5}{6}} = -\mathbf{\dfrac{494}{105}}$

$A = \dfrac{9\,000\,000\,000 \times (0{,}05)^3 \times 49}{(35\,000)^2 \times 0{,}1^3 \times 30^2} = \mathbf{0{,}05}$

$B = \dfrac{(0{,}0025)^2 \times 0{,}01 \times 18\,000^3}{1{,}25 \times (0{,}9)^3 \times 10\,000} = \mathbf{40}$

$M = -\mathbf{\dfrac{427}{90}}$ $N = -\mathbf{\dfrac{17}{18}}$ $O = -\mathbf{\dfrac{7}{23}}$

ENSEMBLE $\mathbb{R}$

NUM2

$3{,}7^2 = \mathbf{13{,}69}$ $3{,}09^3 = \mathbf{29{,}504}$ $(-3)^2 = \mathbf{9}$ $(-5)^7 = \mathbf{-78\,125}$ $-5^5 = \mathbf{-3\,125}$ $(-1)^{2750} = 1$

$5^{-3} = \mathbf{0{,}008}$ $1/(-5)^3 = \mathbf{-0{,}008}$ $1/5^3 = \mathbf{0{,}008}$ $1000^0 = \mathbf{1}$ $3^{0,5} = \mathbf{1{,}732}$ $3^{-1/2} = \mathbf{0{,}577}$

$5^{2/3} = \mathbf{2{,}924}$ $-10^{0,2} = \mathbf{-1{,}585}$ $1000^{-1} = \mathbf{0{,}001}$ $(-2)^{-1/3} = \mathbf{-0{,}794}$

$\sqrt[4]{-2} = \mathbf{imp.}$ $\sqrt[3]{-3^4} = \mathbf{-4{,}327}$ $-\sqrt[2]{(-2)^4} = \mathbf{-4}$

$\sqrt{0{,}04} = \mathbf{0{,}2}$ $\sqrt{39{,}69} = \mathbf{6{,}3}$ $\sqrt{1800} = \mathbf{30\sqrt{2}}$ $\sqrt{70{,}56} = \mathbf{8{,}4}$ $\sqrt{2704} = \mathbf{52}$

$\sqrt{3} + \sqrt{27} - \sqrt{75} = \mathbf{-\sqrt{3}}$ $2\sqrt{48} - \sqrt{27} + (\sqrt{588})/2 = \mathbf{12\sqrt{3}}$

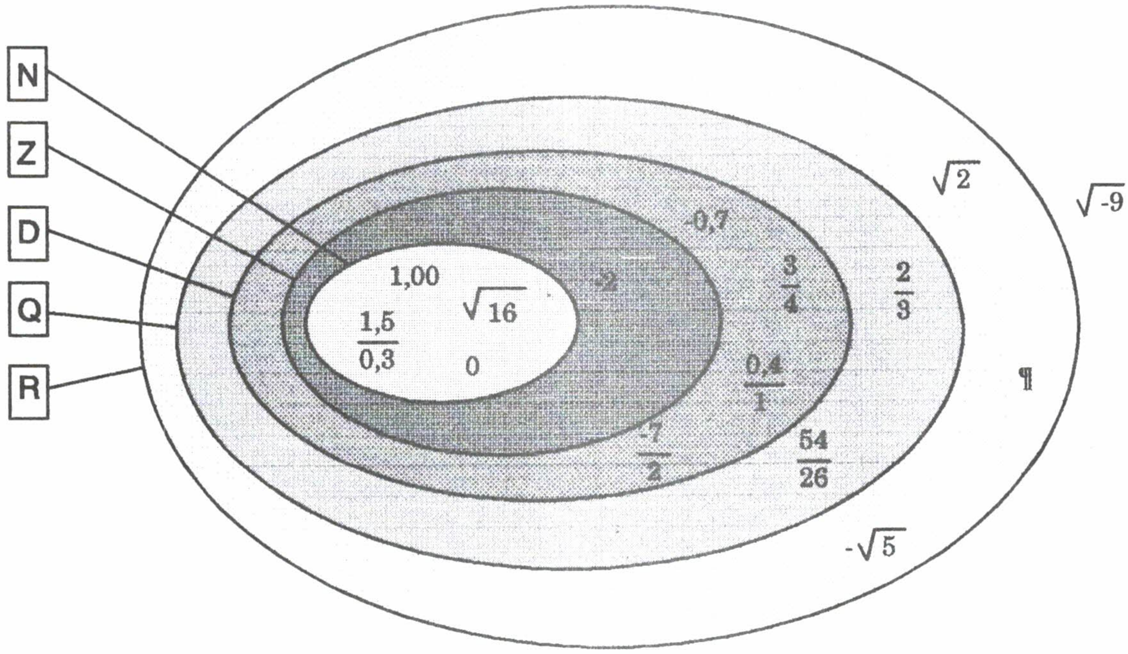
$\sqrt{63} + \sqrt{112} - (\sqrt{700})/2 = \mathbf{2\sqrt{7}}$ $\sqrt{450} - \sqrt{98} - 2\sqrt{18} = \mathbf{2\sqrt{2}}$

$(3 + \sqrt{2})(3 - \sqrt{2}) = \mathbf{7}$ $\dfrac{1}{\sqrt{72}} \times \sqrt{32} = \mathbf{2/3}$

Nombres Divers

DIAGRAMME DE VENN

NUM 3



LE SOMBRERO

NUM 3

1°/ Distance Terre - Lune = $1,3 \times 3 \times 10^{5} = 3,9 \times 10^{5}$ = **390 000 Km.**

Distance Terre - Soleil = $5 \times 10^{2} \times 3 \times 10^{5} = 1,5 \times 10^{8}$ = **150 000 000 Km.**

Distance Terre - galaxie M104 = $3,7 \times 10^{7} \times 365 \times 24 \times 3,6 \times 10^{3} \times 3 \times 10^{5} = 3,5 \times 10^{20}$

= **350 000 000 000 000 000 000 Km .**

2°/ Echelle de la carte :

1 mm = 10 000 Km soit E = 1 / 10 000 000 000 ème. (10^{-10})

Calcul des dimensions sur la carte :

Diamètres :

Terre = 1 mm

Lune = $3,5 \times 10^{9} / 10^{10} = 0,35$ mm

Soleil = $10^{12} / 10^{10} = 10^{2}$ mm = 10 cm

galaxie M104 = $3 \times 10^{4} \times 3 \times 10^{11} / 10^{10} =$

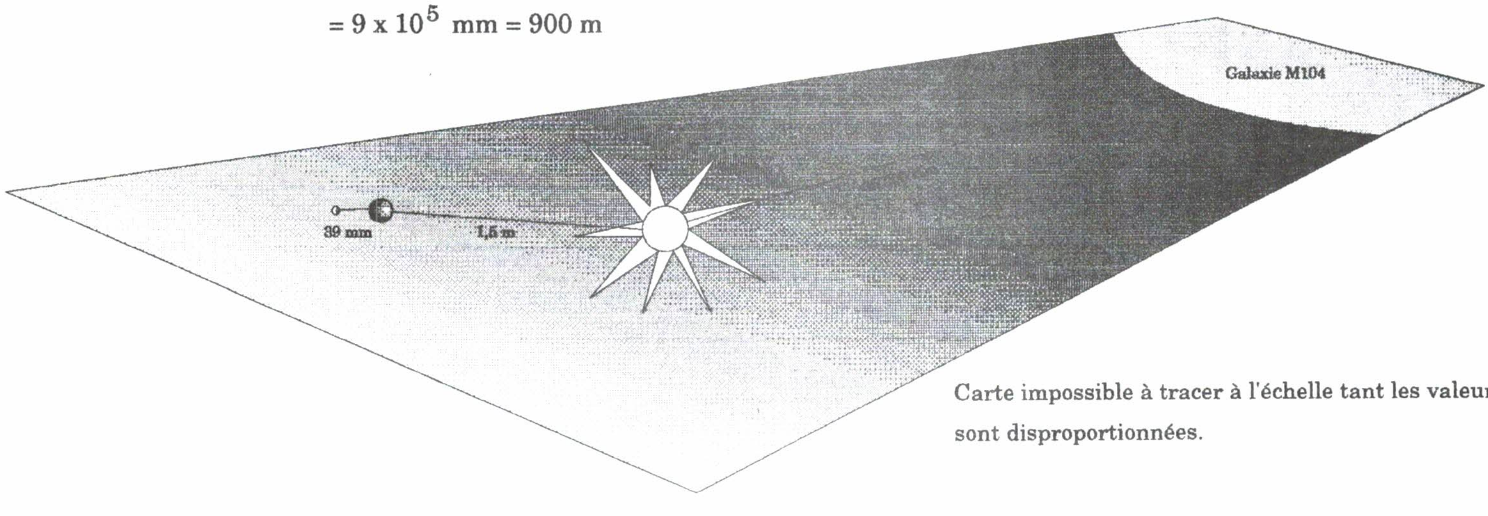
$= 9 \times 10^{5}$ mm = 900 m

Distances :

Terre - Lune = $3,9 \times 10^{11} / 10^{10} = 39$ mm

Terre - Soleil = $1,5 \times 10^{14} / 10^{10} = 1,5 \times 10^{4}$ mm = 1,50 m

Terre - M104 = $3,5 \times 10^{20} / 10^{10} = 3,5 \times 10^{10}$ mm = 35 000 Km



Carte impossible à tracer à l'échelle tant les valeurs sont disproportionnées.

EXPRESSIONS CONJUGUEES

NUM 3

$$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{3+\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{6}}{6}$$

$$\frac{1}{2-\sqrt{5}} = -2-\sqrt{5}$$

$$\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = 7-4\sqrt{3}$$

$$\frac{\sqrt{81}-3\sqrt{27}}{\sqrt{3}-1} = -9$$

$$\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}-2\sqrt{2}} = -3-\sqrt{10}$$

$$\frac{1-\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} - \frac{1-2\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} = \frac{-15+5\sqrt{5}}{4}$$

$$\frac{6}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} + \frac{\sqrt{3}}{1-\sqrt{2}} = -2\sqrt{2}$$

$$\frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{2\sqrt{2}-3\sqrt{3}} + \frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{2\sqrt{2}-3\sqrt{3}} = \frac{390-325\sqrt{6}}{114}$$

PERDRE AU CHANGE

NUM 3

1°/ Lecture du tableau :

1 dollar US à Paris = **5,1070 FF**

100 FF à New-York = **19,5810 $**

1 DM à Francfort = 1000 / 1,3267 = **1753,75 lires**

2°/ Conversion Florins ⇨ Francs belges (1 Florin = 18,3392 FB) :

10 000 florins à Bruxelles = 183 392 FB

Conversion Francs Belges ⇨ Livres (1£ = 59,4224 FB) :

183 392 / 59,4224 = **3 086,24 £**

3°/ Coût de la commande de café en dollars :

500 x 1,5 x 1000 = **750 000 $**

Conversion en francs suisses :

750 000 x 1,2830 = **962 250 FS**

Conversion en francs belges :

962 250 / 0,041347 = **23 272 547 yens.**

4°/ Conversion en yens :

100 000 000 / 0,037745 = **2 649 357 531 yens**

Conversion en dollars :

100 000 000 / 5,1070 = **919 580 967 $**

Conversion en yens à Tokyo :

19 580 967 x 135,30 = **2 649 304 835yens.**

Il économise ainsi 52 655 yens soit 0,002% de la somme.
(Il n'y a donc ni gain ni perte. En effet , on ne tient pas compte, dans cet exercice, des cours à l'achat et à la vente des devises)

FRACTIONS CONTINUES

NUM 3

Les Auteurs ont disjoncté !

(toute ressemblance avec un casse-tête chinois n'est pas que pure coïncidence)

Deux Epineux Dossiers

PROPRIETES DES OPERATIONS

NUM 4

Etude de l'opération $a * b = a^{b}$

1°/ Calculs :

$1 * 2 = \mathbf{1}$ | $-2 * (-3) = \mathbf{-0{,}125}$ | $-2 * (3 * 2) = -2 * 9 = \mathbf{-512}$

$3 * 4 = \mathbf{81}$ | $\frac{2}{5} * 2 = \mathbf{\frac{4}{25}}$ | $(5 * 2) * 3 = 25 * 3 = \mathbf{15\,625}$

$-3 * 2 = \mathbf{9}$ | $-8 * \frac{1}{3} = \mathbf{-2}$

$5 * (-2) = \mathbf{0{,}04}$

2°/ Commutativité :

Pour prouver que **l'opération n'est pas commutative**, il suffit d'un exemple : $1 * 2 = 1$ alors que $2 * 1 = 2$.

Associativité :

$3 * (2 * 5) = 3 * 32 = 1{,}853 \times 10^{15}$

$(3 * 2) * 5 = 9 * 5 = 59\,049$ **L'opération * n'est donc pas associative.**

3°/ Elément neutre à droite : Elément neutre à gauche :

$a * e = a$ | $e * a = a$

$a^{e} = a$ | $e^{a} = a$

$\mathbf{e = 1}$ | **Il n'y a pas d'élément neutre à gauche.**

On ne peut donc pas y avoir d'élément symétrique.

Etude de l'opération $a \perp b = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$:

1°/ Calculs :

$2 \perp 3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \mathbf{\frac{5}{6}}$ | $0 \perp 9 =$ **impossible.**

$1 \perp 4 = \frac{1}{1} + \frac{1}{4} = \mathbf{\frac{5}{4}}$ | $-1 \perp 1 = \frac{-1}{1} + \frac{1}{1} = \mathbf{0}$

$(2 \perp 3) \perp 5 = (\frac{1}{2} + \frac{1}{3}) \perp 5 = \frac{5}{6} \perp 5 = \frac{6}{5} + \frac{1}{5} = \mathbf{\frac{7}{5}}$ | $\frac{2}{3} \perp (\frac{1}{2} \perp 3) = \frac{2}{3} \perp (2 + \frac{1}{3}) = \frac{2}{3} \perp \frac{7}{3} = \mathbf{\frac{27}{14}}$

2°/ Commutativité :

$a \perp b = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{b} + \frac{1}{a} = b \perp a$ **L'opération $\perp$ est commutative.**

Associativité :

$a \perp (b \perp c) = a \perp (\frac{1}{b} + \frac{1}{c}) = a \perp (\frac{b + c}{bc}) = \frac{1}{a} + \frac{bc}{b + c} = \frac{b + c + abc}{a\,(b + c)}$

$(a \perp b) \perp c = (\frac{1}{a} + \frac{1}{b}) \perp c = \frac{a + b}{ab} \perp c = \frac{ab}{a + b} + \frac{1}{c} = \frac{a + b + abc}{c(a + b)}$ **L'opération $\perp$ n'est pas associative.**

Elément neutre :

$a \perp e = a$

$\frac{1}{a} + \frac{1}{e} = a$

$\frac{a + e}{ae} = a$

$e = \frac{a}{a^2 - 1}$

L'opération $\perp$ n'admet donc ni élément neutre ni élément symétrique.

Etude des opérations $a * b = 2a + b$ et $a \perp b = 2ab$

1°/ Calculs :

$3 * (2 \perp 5) = 3 * (2 \times 2 \times 5) = 3 * 20 = 2 \times 3 + 20 = \mathbf{26}$

$(-2) \perp [5 * (-4)] = (-2) \perp (2 \times 5 - 4) = (-2) \perp 6 = 2 \times (-2) \times 6 = \mathbf{-24}$

$2 \perp (7 * 3) = 2 \perp (2 \times 7 + 3) = 2 \perp 17 = 2 \times 2 \times 17 = \mathbf{68}$

$(2 \perp 7) * (2 \perp 3) = (2 \times 2 \times 7) * (2 \times 2 \times 3) = 28 * 12 = 2 \times 28 + 12 = \mathbf{68}$

2°/ Distributivité de $\perp$ pour * :

$a \perp (b * c) = a \perp (2b + c) = 2a\,(2b + c) = 4ab + 2ac$

$(a \perp b) * (a \perp c) = 2ab * 2ac = 2 \times 2a + 2ac = 4ab + 2ac$ **L'opération $\perp$ est distributrive pour l'opération *.**

Etude de l'opération $a * b = \dfrac{a+b}{2}$:

Autodistributivité :

$$a * (b * c) = a * \left(\frac{b+c}{2}\right) = \frac{a + \frac{b+c}{2}}{2} = \frac{\frac{2a+b+c}{2}}{2} = \frac{2a+b+c}{4}$$

$$(a * b) * (a * c) = \left(\frac{a+b}{2}\right) * \left(\frac{a+c}{2}\right) = \frac{\frac{a+b}{2} + \frac{a+c}{2}}{2} = \frac{\frac{2a+b+c}{2}}{2} = \frac{2a+b+c}{4}$$

L'opération * est autodistributive.

PYTHAGORE

NUM 4

1°/ Longueur de la diagonale BC :

$AB^2 + AC^2 = BC^2$
$30^2 + 30^2 = BC^2$
$BC = \sqrt{2 \times 30^2}$
$BC = 30\sqrt{2}$ cm

2°/ Rayon du cercle inscrit :

$A = \P\, r^2$

$100 = \P\, r^2$

$r = \dfrac{10}{\sqrt{\P}}$ cm

Rayon du cercle circonstrit :

$BD^2 = BC^2 + CD^2$

$BD = \sqrt{\left(\dfrac{20}{\sqrt{\P}}\right)^2 + \left(\dfrac{20}{\sqrt{\P}}\right)^2}$

$BD = \dfrac{10}{\sqrt{\P}}\sqrt{2}$ cm

Aire du cercle circonscrit :

$A' = \P \times \left(\dfrac{10}{\sqrt{\P}}\sqrt{2}\right)^2$

$A' = \P \times \dfrac{100 \times 2}{\P}$

$\mathbf{A' = 200\ cm^2}$

3°/ Calcul de OB :

$OB = \sqrt{\left(\dfrac{5}{2}\right)^2 + 5^2}$

$OB = \sqrt{\dfrac{25 + 100}{4}}$

$OB = \sqrt{\dfrac{125}{4}}$

$OB = \dfrac{5}{2}\sqrt{5}$ cm

Calcul du rapport L/l :

$L / l = DE / AD$

$= \dfrac{\frac{5}{2} + \frac{5}{2}\sqrt{5}}{5}$

$= \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$

Résolution de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$:

$x^2 - x - 1 = 0$

$\Delta = 1 + 4 = 5$

$x = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$

Le Nombre d'Or correspond, selon la coutume, à la proportion idéale.

MATHS GENERALES ORIENTEES TERTIAIRE — Calcul Littéral — CORRIGES — BAC PRO IREM DE LORRAINE

3-1-12-3-21-12 12-9-20-20-5-18-1-12 *

** Calcul littéral codé.*

REDUCTIONS

LIT 2

Niveau 0 :

$R1 = 7x^3 + 8x^4 - 5x^3 + 2x - 3 + x^4 - 2x^2 + 1$

$= \mathbf{9x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 2x - 2}$

$R2 = - x^2 + x^2 - 7x + 2 - 3x$

$= \mathbf{- 10x + 2}$

$R3 = - 5y + 3x + y^2 - 2y + x^2 - x - 1$

$= \mathbf{x^2 + 2x - 7y + y^2 - 1}$

$R4 = - a^2 - a^2 - 2a + a - 2$

$= \mathbf{- 2a^2 - a - 2}$

Niveau 1 :

$R5 = (7x - 3) + (5 - 2x)$

$= 7x - 3 + 5 - 2x$

$= \mathbf{5x + 2}$

$R6 = 5x^2 - 3x - (x^2 - 2x + 1)$

$= 5x^2 - 3x - x^2 + 2x - 1$

$= \mathbf{4x^2 - x - 1}$

$R7 = - (- 9u^2 + 2u - 1) + (9u^2 - 1)$

$= 9u^2 - 2u + 1 + 9u^2 - 1$

$= \mathbf{18u^2 - 2u}$

$R8 = - x^4 - (x^3 - x^2) + (x^4 + x)$

$= - x^4 - x^3 + x^2 + x^4 + x$

$= \mathbf{- x^3 + x^2 + x}$

Niveau 2 :

$R9 = \frac{7}{3} x^2 + \frac{1}{2} x - \frac{3}{5} x^2 + x - 1 + \frac{1}{4}$

$= \frac{35}{15} x^2 - \frac{9}{15} x^2 + \frac{1}{2} x + \frac{2}{2} x - \frac{4}{4} + \frac{1}{4}$

$= \mathbf{\frac{26}{15} x^2 + \frac{3}{2} x - \frac{3}{4}}$

$R10 = (\frac{x^2}{2} + \frac{x}{3} - 1) - (x^2 - 3x - \frac{1}{4})$

$= \frac{x^2}{2} + \frac{x}{3} - 1 - x^2 + 3x + \frac{1}{4}$

$= \frac{x^2}{2} - \frac{2x^2}{2} + \frac{x}{3} + \frac{9x}{3} - \frac{4}{4} + \frac{1}{4}$

$= \mathbf{- \frac{x^2}{2} + \frac{10x}{3} - \frac{4}{4}}$

$R11 = \frac{a^2}{3} + \frac{3a^2}{5} - \frac{143a^2}{22} + \frac{a}{10} + 1$

$= \frac{a^2}{3} + \frac{3a^2}{5} - \frac{13a^2}{2} + \frac{a}{10} + 1$

$= \frac{10a^2}{30} + \frac{18a^2}{30} - \frac{195a^2}{30} + \frac{a}{10} + 1$

$= \mathbf{- \frac{167a^2}{30} + \frac{a}{10} + 1}$

$R12 = \frac{2x - 3}{5} - \frac{x^2 + x + 1}{2} + \frac{x^2}{10} - \frac{1}{5}$

$= \frac{2x}{5} - \frac{3}{5} - \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} - \frac{1}{2} + \frac{x^2}{10} - \frac{1}{5}$

$= - \frac{5x^2}{10} + \frac{x^2}{10} + \frac{4x}{10} - \frac{5x}{10} - \frac{5}{10} - \frac{2}{10}$

$= \mathbf{- \frac{2x^2}{5} - \frac{x}{10} - \frac{7}{10}}$

DEVELOPPEMENTS

LIT 2

Niveau 0 :

$D1 = 3 (x^2 - 2x + 1) - 2 (5x - 3)$

$= 3x^2 - 6x + 3 - 10x + 6$

$= \mathbf{3x^2 - 16x + 9}$

$D2 = (2x - 1)^2 + (x + 4)^2$

$= 4x^2 - 4x + 1 + x^2 + 8x + 16$

$= \mathbf{5x^2 + 4x + 17}$

$D3 = (7a - 0,2)(a - 3,1)$

$= 7a^2 - 21,7a - 0,2a + 0,62$

$= \mathbf{7a^2 - 21,9a + 0,62}$

$D4 = (4x^2 - 1)(4x^2 + 1)$

$= \mathbf{16x^4 - 1}$

$D5 = (2n + 1)(n^2 + 2n + 1)$

$= 2n^3 + 4n^2 + 2n + n^2 + 2n + 1$

$= \mathbf{2n^3 + 5n^2 + 4n + 1}$

$D6 = 3x (2kx - 3k + 4)$

$= \mathbf{6kx^2 - 9kx + 12x}$

Niveau 1 :

$D7 = (\frac{x}{3} - \frac{4}{5})(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{3} - 5)$

$= \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{9} - \frac{5x}{3} - \frac{2x^2}{5} - \frac{4x}{15} + 4$

$= \frac{x^3}{6} + \frac{5x^2}{45} - \frac{18x^2}{45} - \frac{25x}{15} - \frac{4x}{15} + 4$

$= \mathbf{\frac{x^3}{6} - \frac{13x^2}{45} - \frac{29x}{15} + 4}$

$D8 = -\frac{2}{7}(a^2 - 1)(a + \frac{1}{3})$

$= -\frac{2}{7}(a^3 + \frac{a^2}{3} - a - \frac{1}{3})$

$= \mathbf{-\frac{2a^3}{7} - \frac{2a^2}{21} + \frac{2a}{7} + \frac{2}{21}}$

$D9 = (4x - 1)^2 - 2(2x + 3)^2$

$= 16x^2 - 8x + 1 - 2(4x^2 + 12x + 9)$

$= 16x^2 - 8x + 1 - 8x^2 - 24x - 18$

$= \mathbf{8x^2 - 32x - 17}$

$D10 = (3a - 1)^2 - 2(3a - 1)(a + 2) + (a + 2)^2$

$= (9a^2 - 6a + 1) - 2(3a^2 + 6a - a - 2) + (a^2 + 4a + 4)$

$= 9a^2 - 6a + 1 - 6a^2 - 12a + 2a + 4 + a^2 + 4a + 4$

$= \mathbf{4a^2 - 12a + 9}$

$D11 = (\frac{85x}{51} - \frac{2}{3})^2$

$= (\frac{5x}{3} - \frac{2}{3})^2$

$= \mathbf{\frac{25x^2}{9} - \frac{20x}{9} + \frac{4}{9}}$

$D12 = (x + 4)(x - 2)^2$

$= (x + 4)(x^2 - 4x + 4)$

$= x^3 - 4x^2 + 4x + 4x^2 - 16x + 16$

$= \mathbf{x^3 - 12x + 16}$

Niveau 2 :

$D13 = (3x - 5)^3$

$= (9x^2 - 30x + 25)(3x - 5)$

$= 27x^3 - 45x^2 - 90x^2 + 150x + 75x - 125$

$= \mathbf{27x^3 - 135x^2 + 225x - 125}$

$D14 = (\frac{x^2}{2} + 3x - \frac{1}{3})^2$

$= (\frac{x^2}{2} + 3x - \frac{1}{3})(\frac{x^2}{2} + 3x - \frac{1}{3})$

$= \frac{x^4}{4} + \frac{3x^3}{2} - \frac{x^2}{6} + \frac{3x^3}{2} + 9x^2 - \frac{3x}{3} - \frac{x^2}{6} - \frac{3x}{3} + \frac{1}{9}$

$= \frac{x^4}{4} + \frac{6x^3}{2} - \frac{x^2}{6} + \frac{54x^2}{6} - \frac{x^2}{6} - x - x + \frac{1}{9}$

$= \mathbf{\frac{x^4}{4} + 3x^3 + \frac{26x^2}{3} - 2x + \frac{1}{9}}$

$D15 = (x - 1)^4 - (x - 1)^3 - (x - 1)^2 - (x - 1)$

$= (x^2 - 2x + 1)(x^2 - 2x + 1) - (x^2 - 2x + 1)(x - 1) - (x^2 - 2x + 1) - (x - 1)$

$= (x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x^3 + 4x^2 - 2x + x^2 - 2x + 1) - (x^3 - x^2 - 2x^2 + 2x + x - 1) - (x^2 - 2x + 1) - (x - 1)$

$= x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x^3 + 4x^2 - 2x + x^2 - 2x + 1 - x^3 + x^2 + 2x^2 - 2x - x + 1 - x^2 + 2x - 1 - x + 1$

$= \mathbf{x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 6x + 2}$

$D16 = 3(a + 1)^2 - 4(a - 3)^2 - 1$

$= 3(a^2 + 2a + 1) - 4(a^2 - 6a + 9) - 1$

$= 3a^2 + 6a + 3 - 4a^2 + 24a - 36 - 1$

$= \mathbf{-a^2 + 30a - 34}$

$D17 = [(x - 1)^2 - (x + 1)^2]^2$

$= (x^2 - 2x + 1 - x^2 - 2x - 1)^2$

$= (-4x)^2$

$= \mathbf{16x^2}$

$D18 = [\frac{7x}{19} + (-1)^9]$

$= \mathbf{\frac{7x}{19} - 1}$

FACTORISATION

LIT 2 

Niveau 0 :

$F1 = 18x^2 - 15x$

$= \mathbf{3x(6x - 5)}$

$F2 = 0{,}04x^2 - 9$

$= \mathbf{(0{,}2x + 3)(0{,}2x - 3)}$

$F3 = \frac{4x^2}{9} - 8x + 36$

$= \mathbf{(\frac{2x}{3} - 6)^2}$

$F4 = x^2 - 4x + 4$

$= \mathbf{(x - 2)}$

$F5 = 2x^2 - 4x - 6$

$= \mathbf{2(x^2 - 2x - 3)}$

$F6 = 3x^2 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$

$\Delta = 1/4 + 4 \times 3 \times 1/2 = 1/4 + 6 = 25/4$

$x1 = 1/3$ et $x2 = -1/2$

$F6 = \mathbf{3(x - \frac{1}{3})(x + \frac{1}{2})}$

Niveau 1 :

$$\begin{aligned} F7 &= (2x - 3)^2 - (4x + 1)^2 \\ &= [(2x - 3) + (4x + 1)][(2x - 3) - (4x + 1)] \\ &= (6x - 2)(- 2x - 4) \\ &= \mathbf{- 4\ (3x - 1)(x + 2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F8 &= 9a^3 - a \\ &= a\ (9a^2 - 1) \\ &= \mathbf{a\ (3a + 1)(3a - 1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F9 &= (2x - 1)(3x + 5) - (2x - 1)(8x + 1) + (2x - 1)^2 \\ &= (2x - 1)[(3x + 5) - (8x + 1) + (2x - 1)] \\ &= (2x - 1)(- 3x + 3) \\ &= \mathbf{- 3\ (2x - 1)(x - 1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F10 &= (3x - 1)^2 + 8\ (3x - 1) + 16 \\ &= [(3x - 1) + 4]^2 \\ &= (3x + 3)^2 \\ &= \mathbf{9\ (x + 1)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F11 &= (x + 1)(x - 3) + (x - 1)(3 - x) \\ &= (x - 3)[(x + 1) - (x - 1)] \\ &= \mathbf{2\ (x - 3)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F12 &= x^4 - 16 \\ &= (x^2 + 4)(x^2 - 4) \\ &= \mathbf{(x + 2)(x - 2)(x^2 + 4)} \end{aligned}$$

Niveau 2 :

$$\begin{aligned} F13 &= (x^2 - 4)^2 - (x + 2)^2 \\ &= [(x + 2)(x - 2)]^2 - (x + 2)^2 \\ &= (x + 2)^2[(x - 2)^2 - 1] \\ &= (x + 2)^2[(x - 2) + 1][(x - 2) - 1] \\ &= \mathbf{(x + 2)^2(x - 1)(x - 3)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F14 &= (n + 3)^2(n - 1) + (3 - n)^2(1 - n) \\ &= (n - 1)[(n + 3)^2 - (3 - n)^2] \\ &= (n - 1)[(n + 3) + (3 - n)][(n + 3) - (3 - n)] \\ &= (n - 1)(6)(2n) \\ &= \mathbf{12n\ (n - 1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F15 &= x^4 + x^3 + 3x^2 + 3x \\ &= x\ (x^3 + x^2 + 3x + 3) \\ &= x\ [x^2(x + 1) + 3\ (x + 1)] \\ &= \mathbf{x\ (x + 1)(x^2 + 3)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F16 &= (4x - 1)^2 - 3\ (1 - 4x) + 16x^2 - 1 \\ &= (4x - 1)^2 + 3(4x - 1) + (4x + 1)(4x - 1) \\ &= (4x - 1)[(4x - 1) + 3 + (4x + 1)] \\ &= \mathbf{(4x - 1)(8x + 3)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F17 &= 1 - u - v + uv \\ &= 1 - u - v\ (1 - u) \\ &= \mathbf{(1 - u)(1 - v)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F18 &= 3x^3\ (x - 1) + 12x\ (1 - x)^3 \\ &= 3x\ (x - 1)[x^2 - 4\ (x - 1)^2] \\ &= 3x\ (x - 1)[x + 2\ (x - 1)][x - 2\ (x - 1)] \\ &= \mathbf{3x\ (x - 1)(3x - 2)(- x + 2)} \end{aligned}$$

FRACTIONS

LIT 2 

Niveau 0 :

$$\begin{aligned} Q1 &= \frac{x}{x + 1} + \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \qquad x \neq -1,\ x \neq 0 \\ &= \frac{2x^2}{2x\ (x + 1)} + \frac{2\ (x + 1)}{2x\ (x + 1)} + \frac{x\ (x + 1)}{2x\ (x + 1)} \\ &= \frac{2x^2 + 2x + 2 + x^2 + x}{2x\ (x + 1)} \\ &= \frac{2x^2 + 2x + 2 + x^2 + x}{2x\ (x + 1)} \\ &= \mathbf{\frac{3x^2 + 3x + 2}{2x\ (x + 1)}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q2 &= \frac{x + 1}{x} + \frac{1}{3x} + \frac{x - 3}{2x} \qquad x \neq 0 \\ &= \frac{6(x + 1)}{6x} + \frac{2}{6x} + \frac{3\ (x - 3)}{6x} \\ &= \frac{6x + 6 + 2 - 3x - 9}{6x} \\ &= \mathbf{\frac{3x + 17}{6x}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q3 &= \frac{6}{1 + x} + \frac{4}{1 - x} + \frac{10x}{1 - x^2} \qquad x \neq -1,\ x \neq 1 \\ &= \frac{6\ (1 - x)}{(1 + x)(1 - x)} + \frac{4\ (1 + x)}{(1 + x)(1 - x)} + \frac{10x}{(1 + x)(1 - x)} \\ &= \frac{6 - 6x - 4 - 4x + 10x}{(1 + x)(1 - x)} \\ &= \mathbf{\frac{2}{(1 + x)(1 - x)}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q4 &= \frac{3x}{x^2 - 4} \cdot \frac{3x - 6}{4x^2} \qquad x \neq -2,\ x \neq 0,\ x \neq 2 \\ &= \frac{9x\ (x - 2)}{4x^2(x + 2)(x - 2)} \\ &= \mathbf{\frac{9}{4x\ (x + 2)}} \end{aligned}$$

Niveau 1 :

$$Q5 = \frac{x}{y\,(x+y)} + \frac{y}{x^2+xy} + \frac{2}{x+y} \qquad \begin{matrix} x \neq 0 \\ y \neq 0 \\ x \neq -y \end{matrix}$$

$$= \frac{x}{y\,(x+y)} + \frac{y}{x\,(x+y)} + \frac{2}{x+y}$$

$$= \frac{x^2+y^2+2xy}{xy\,(x+y)}$$

$$= \frac{(x+y)^2}{xy\,(x+y)}$$

$$= \mathbf{\frac{x+y}{xy}}$$

$$Q7 = \left(\frac{1}{x+1} + \frac{2x}{1-x^2}\right)\left(1 - \frac{1}{x}\right) \qquad \begin{matrix} x \neq -1 \\ x \neq 0 \\ x \neq 1 \end{matrix}$$

$$= \left[\frac{1}{x+1} - \frac{2x}{(x+1)(x-1)}\right]\left(1 - \frac{1}{x}\right)$$

$$= \left[\frac{x-1}{(x+1)(x-1)} - \frac{2x}{(x+1)(x-1)}\right]\left(\frac{x}{x} - \frac{1}{x}\right)$$

$$= \left[\frac{x-1-2x}{(x+1)(x-1)}\right]\left(\frac{x-1}{x}\right)$$

$$= \frac{-x-1}{(x+1)(x-1)} \cdot \frac{x-1}{x}$$

$$= \mathbf{\frac{-1}{x}}$$

$$Q6 = \frac{a}{a-1} - \frac{3a^2}{a^2-1} - \frac{3}{2a+2} \qquad \begin{matrix} a \neq -2 \\ a \neq -1 \\ a \neq 1 \end{matrix}$$

$$= \frac{a}{a-1} - \frac{3a^2}{(a+1)(a-1)} - \frac{3}{2\,(a+1)}$$

$$= \frac{2a\,(a+1)}{2\,(a+1)(a-1)} - \frac{6a^2}{2\,(a+1)(a-1)} - \frac{3\,(a-1)}{2\,(a+1)(a-1)}$$

$$= \frac{2a^2+2a-6a^2-3a+3}{2\,(a+1)(a-1)}$$

$$= \frac{-4a^2-a+3}{2\,(a+1)(a-1)} \qquad (\Delta = 49)$$

$$= \frac{-4\,(a+1)(a-0{,}75)}{2\,(a+1)(a-1)}$$

$$= \mathbf{\frac{1{,}5-2a}{a-1}}$$

$$Q8 = \frac{3x}{3+x} \cdot \left(\frac{x}{3} - \frac{3}{x}\right) \qquad \begin{matrix} x \neq -3 \\ x \neq 0 \end{matrix}$$

$$= \frac{3x}{3+x} \cdot \left(\frac{x^2}{3x} - \frac{9}{3x}\right)$$

$$= \frac{3x}{3+x} \cdot \frac{x^2-9}{3x}$$

$$= \frac{3x\,(x+3)(x-3)}{3x\,(3+x)}$$

$$= \mathbf{x-3}$$

Niveau 2 :

$$Q9 = \frac{8x-12}{4x^2-12x+9} - \frac{20x}{9-4x^2} - \frac{5x}{2x^2+3x} \qquad \begin{matrix} x \neq -3/2 \\ x \neq 0 \\ x \neq 3/2 \end{matrix}$$

$$= \frac{4\,(2x-3)}{(2x-3)^2} - \frac{20x}{(3+2x)(3-2x)} - \frac{5x}{x\,(2x+3)}$$

$$= \frac{4}{2x-3} - \frac{20x}{(3+2x)(3-2x)} - \frac{5}{2x+3}$$

$$= \frac{4\,(2x+3)}{(2x+3)(2x-3)} + \frac{20x}{(2x+3)(2x-3)} - \frac{5\,(2x-3)}{(2x+3)(2x-3)}$$

$$= \frac{8x+12+20x-10x+15}{(2x+3)(2x-3)}$$

$$= \frac{18x+27}{(2x+3)(2x-3)}$$

$$= \mathbf{\frac{9}{2x-3}}$$

$$Q11 = \frac{a^2+b^2}{ab} - \frac{a^2}{ab+b^2} - \frac{b^2}{a^2+ab} \qquad \begin{matrix} a \neq 0 \\ b \neq 0 \\ a \neq -b \end{matrix}$$

$$= \frac{a^2+b^2}{ab} - \frac{a^2}{b\,(a+b)} - \frac{b^2}{a\,(a+b)}$$

$$= \frac{(a^2+b^2)(a+b)}{ab\,(a+b)} - \frac{a^3}{ab\,(a+b)} - \frac{b^3}{ab\,(a+b)}$$

$$= \frac{a^3+a^2b+ab^2+b^3-a^3-b^3}{ab\,(a+b)}$$

$$= \frac{a^2b+ab^2}{ab\,(a+b)}$$

$$= \frac{ab\,(a+b)}{ab\,(a+b)}$$

$$= \mathbf{1}$$

$$Q10 = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{x}}}} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{x+1}{x}}}} \qquad \begin{matrix} x \neq -1 \\ x \neq -2/3 \\ x \neq -1/3 \\ x \neq 0 \end{matrix}$$

$$= \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{x}{x+1}}} = \cfrac{1}{1+\cfrac{x+1}{2x+1}} = \mathbf{\frac{2x+1}{3x+2}}$$

$$Q12 = \frac{\dfrac{n+1}{n-1} - \dfrac{n-1}{n+1}}{1 - \dfrac{n-1}{n+1}} = \frac{\dfrac{(n+1)^2}{(n+1)(n-1)} - \dfrac{(n-1)^2}{(n+1)(n-1)}}{\dfrac{n+1}{n+1} - \dfrac{n-1}{n+1}}$$

$$= \frac{\dfrac{n^2+2n+1-n^2+2n-1}{(n+1)(n-1)}}{\dfrac{n+1-n+1}{n+1}} = \frac{4n}{(n+1)(n-1)} \cdot \frac{n+1}{2}$$

$$= \mathbf{\frac{2n}{n-1}} \qquad \begin{matrix} n \neq -1 \\ n \neq 0 \\ n \neq 1 \end{matrix}$$

Le Binôme de Newton

1°/ LE NOMBRE DE TERMES

LIT 3

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

Nombre de termes du développement de $(a+b)^n$ = **n + 1**

2°/ LES COEFFICIENTS

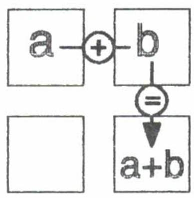
LIT 3

n \ p	0	1	2	3	4	5
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

← Rang du terme

↑ Exposant du binôme

"Loi" du binôme :



$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

Coefficients du binôme jusqu'à n = 20 :

1	1																			
1	2	1																		
1	3	3	1																	
1	4	6	4	1																
1	5	10	10	5	1															
1	6	15	20	15	6	1														
1	7	21	35	35	21	7	1													
1	8	28	56	70	56	28	8	1												
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1											
1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1										
1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1									
1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1								
1	13	78	286	715	1287	1716	1716	1287	715	286	78	13	1							
1	14	91	364	1001	2002	3003	3432	3003	2002	1001	364	91	14	1						
1	15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435	5005	3003	1365	455	105	15	1					
1	16	120	560	1820	4368	8008	11440	12870	11440	8008	4368	1820	560	120	16	1				
1	17	136	680	2380	6188	12376	19448	24310	24310	19448	12376	6188	2380	680	136	17	1			
1	18	153	816	3060	8568	18564	31824	43758	48620	43758	31824	18564	8568	3060	816	153	18	1		
1	19	171	969	3876	11628	27132	50388	75582	92378	92378	75582	50388	27132	11628	3876	969	171	19	1	
1	20	190	1140	4845	15504	38760	77520	125970	167960	184756	167960	125970	77520	38760	15504	4845	1140	190	20	1

3°/ LES C_n^p :

LIT 3

$C_5^3 = \mathbf{10}$ $\quad C_4^1 = \mathbf{4}$ $\quad C_2^2 = \mathbf{1}$ $\quad C_3^1 = \mathbf{3}$ $\quad C_3^3 = \mathbf{1}$ $\quad C_5^4 = \mathbf{5}$

Coefficients pour une ligne n du tableau en fonction de n :

	0	1	2	3	....	p	....	n
n	C_n^0	C_n^1	C_n^2	C_n^3	....	C_n^p	....	C_n^n

4°/ LES EXPOSANTS :

$(a+b)^n = C_n^0\, a^n b^0 + C_n^1\, a^{n-1}\, b^1 + \ldots\ldots + C_n^p\, a^{n-p}\, b^p + \ldots\ldots + C_n^n\, a^0\, b^n$

ou :

$$\mathbf{(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p\, a^{n-p}\, b^p}$$

$(x+1)^6 = x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 15x^2 + 6x + 1$

$(2a+3)^5 = 32a^5 + 240a^4 + 720a^3 + 1080a^2 + 810a + 243$

$(1-u)^{10} = 1 - u + u^2 - u^3 + u^4 - u^5 + u^6 - u^7 + u^8 - u^9 + u^{10}$

Remarques préliminaires:

-Les équations sont données dans le désordre: elles ne sont pas classées par types ou par degré de difficulté; cela pour que les élèves détectent eux-mêmes à quel type d'équation ils ont à faire et réagissent en conséquence...

-Plusieurs des équations proposées représentent des situations rencontrées lors de la résolution de problèmes de mathématiques financières.

- Pour les équations simples, seul le résultat est donné sans développement.

	1	2	3	4	5
A	x = 0,5 ou -0,5	système impossible déterminant nul	x = 2	pas de solution	mettre x+3 en facteur; on trouve x=0,5 (x=-3 ne convient pas)
B	Δ=57700=240² x'= -200; x"= 40	x= 11	$\log 1,065^{-x} =$ $\log 0,777323$ x = 4	x = 5,516 (valeur appro-chée)	Δ= 25 x = 2 et x =-3
C	réduire au même dénominateur u = 5	x = 5 ; y = -2	x = -4,9 ; y = -1,2	difficile $\begin{cases} x(2+y)=102000 \\ x(1+y)^4(2+y)=119325 \end{cases}$ par division : $(1+y)^4 = \frac{119325}{102000}$ $1+y = \pm 1,04$ S =(50000;0,04) et (-2550000;-2,04)	2x+3y-z = 5 (1) x-y+2z = 6 (2) x+y+z = 6 (3) on ajoute (1) et (2)après avoir multiplié(1) par 2: il vient x+y = 3 (2)devient z-y =1 finalement : x=1; y= 2 et z = 3.
D	$xy^6=xy^3y^3=270y^3$ $270y^3=7290$ y = 3; x = 10	$x = \frac{-38}{5}$ $y = \frac{17}{15}$	$-3x^2 + 4x + 4 = 0$ D = 64 $x' = -\frac{2}{3}$; x"= 2	x = 3,4	$1+x=(1,21655)^{0,2}$ x = 0,04 ou 5ln(1+x) = ln1,21665 ln(1+x)=0,0392202
E	x = 0 ; x = 7,3	$y^2-77y + 1242 = 0$ D = 961 = 31² S= (23;54);(54;23)	$x^2+ y^2 + 2xy = 49$ $(x+y)^2 = 49$ $x+y = \pm 7$ 4 solutions (5;2);(-5;-2) (2;5);(-2;-5)	x = 7,4	x = 0,2 y = 0,5
F	$x = -\frac{26}{7}$	$x' = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ $x'' = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$	x' = 1 $x'' = \frac{4}{3}$	$x = \frac{18}{31}$	x' = 0,5 x" = -3

	1	2	3	4	5
G	suite géomètrique $q = 4$ $u_0 = 3$ $u_1 = 12$ $u_4 = 768$	$x = 4$ $y = 7$ $z = -2$	$n = 300$ $y = 5859$	(1)-(2)-->z = 1 nouveau système x+y+k = 3 (5) 2x+3y+2k = 7(6) x - y -k = -1 (7) (5)+(7): x = 1 puis k =1; y =1	$x = 0{,}5$ $y = 6$
H	$-8x^2 + 6x + 5=0$ $\Delta = 196$ $x' = -0{,}5$ $x'' = 1{,}25$	$x = 2{,}5$	$C = 21000$	$x = \frac{5V2 - 3V3}{2}$	pas de solution
I	multiplier (1) par 2 : $x = 5$ le reste du système est indéterminé	$x' = 1$ $x'' = -2$	$x'=\frac{V2+V14}{2}$ $y'=\frac{V2-V14}{2}$ $x''=\frac{-V2+V14}{2}$ $y''=\frac{-V2+V14}{2}$ et inversement	$x = 0{,}5$	$x = -1$ $y = 1$
J	$4y^2 + 4y -3 = 0$ $\Delta = 64$ $y' = 0{,}5$; $x' = -2$ $y''= -1{,}5$; $x''= 2/3$	$2x^2 - 14x + 24 =0$ $D = 1$ $x' = 4$; $y' = 3$ $x'' = 3$; $y'' = 4$	$(36x+36)(2x-60) = 0$ $x' = -1$ $x'' = 30$	$x = 5$ $y = 3$	$m = -24$
K	$x = \frac{19}{15}$	pas d'inconnue équation toujours vraie	équation toujours vérifiée; S= R	$x = 0$; $x = 2$; $x = 3$ $x = 4$	$5x^2 - 6x - 2{,}25 =0$ $\Delta = 91$ $x' = 1{,}5$; $x'' = -0{,}3$
L	$x = 8$	$x = 1{,}5$	$x = 23{,}4$	$t = 4{,}5$	$x = 0$; $x = -1$
M	on pose $y = x^2$ $y^2 - 13y + 36 =0$ $\Delta = 25$ $y' = 9$; $y'' = 4$; $x'= 3$; $x'' = -3$; $x''' = 2$; $x'''' = -2$	$D = 289 = 17^2$ $x' = -3$; $x'' = \frac{8}{3}$	nlog1,07 = log1,60578 $n = 7$	$3x^2 - x - 44 = 0$ $D = 529 = 23^2$ $x' = 4$; $x'' = \frac{-11}{3}$	$x = 2$
N	$3x^2 -2x - 21 = 0$ $D = 256 = 16^2$ $x' = 3$; $x'' = \frac{-7}{3}$	$3x^2 - 4x + 1 = 0$ $D = 4$ $x' = 1$; $x'' = \frac{1}{3}$	$\begin{cases} 6x - y = 13 \\ 15x - 2y = 30 \end{cases}$ $x = \frac{4}{3}$; $y = - 5$	$x = \frac{69}{188}$	$\begin{cases} x + y = 25 \\ x - y = 5 \end{cases}$ $x = 15$; $y = 10$

	1	2	3	4	5
O	$\left.\begin{array}{l} tn = 24 \\ 2n(t-3) = 36 \end{array}\right\}$ $n = 2$; $t = 12$	on multiplie (1) par 8 et (2) par 5 puis on ajoute: $x = \frac{-3}{5}$ $y = 2$	$45x+42y+35z=1260$ $-3x-2y+6z = 204$ $90x+21y-10z=585$ $x = 14$; $y = -15$; $z = 36$	$x = 6$	$\left.\begin{array}{l} 3x - 8y = -2 \\ 3x - 8y = -29 \end{array}\right\}$ système impossible
P	$S = \{ -1; 2; 2 \} \cup \{ 3; -2; 6 \}$	$x = \frac{1}{3}$ $y = \frac{1}{4}$ $z = \frac{1}{5}$	pas d'inconnue; équation jamais vérifiée	écrire des combinaisons linéaires: $a = 0$; $b = -1$; $c = 2$; $d = -3$	suite géomètrique. 2 suites sont solutions: $q = 4$; $u_0 = 1,75$; $u_1 = 7$; $u_2 = 28$ et $q' = 0,25$; $u_0 = 28$; $u_1 = 7$; $u_2 = 1,75$
Q	$x = \frac{5}{3}$	$x = \frac{-11}{4}$	on pose $y = \sqrt{x}$ $3y^2 + 4y - 1 = 0$ $\Delta = 28$ une seule racine convient : $y = \frac{-2 + \sqrt{7}}{3}$ finalement $x = \frac{11 - 4\sqrt{7}}{9}$	$x^2 - 4x + 3 = 0$ $\Delta = 4$ $x' = 3$; $x'' = 1$	$x = \pm \frac{2}{3}$
R		$x = -0,5$	$x = 14285,71$ $y = 5714,29$	$3x^2 - 14x + 16 = 0$ $\Delta = 4$ $x' = \frac{8}{3}$ $x'' = \frac{5}{3}$	$x = \frac{9}{25}$

Problèmes divers

Moyenne ! Quand tu nous tiens

Remarques :

Soit x la note à obtenir au devoir suivant;

$\frac{8 + 16 + 13 + x}{4} = 14$ ==> $37 + x = 56$ ==> $\mathbf{x = 19}$

1er degré, 1 inconnue

Moyenne toujours

Soient x et y les notes à obtenir aux deux derniers devoirs;
on obtient $x + y = 28$, avec $0 < x < 20$ et $0 < y < 20$, x et y entiers;
les solutions sont les couples de coordonnées des points de la droite d'équation $x + y - 28 = 0$ qui satisfont aux conditions précédentes.

1 équation, 1er degré, 2 inconnues

On obtient les solutions : **(20;8), (19;9), (18;10), (17;11), (16;12), (15;13), (14;14)** et les couples d'ordre inverse.

Des pulls à gogo

Soit x le prix initial; prix net d'un pull = 0,80x
équation : 50 X 0,80x = 7400 ==> **x = 185 F**

1er degré, 1 inconnue
calcul de prix
faire vérifier le résultat

La guerre du golfe

Appelons **x** la distance séparant le navire du lieu de l'explosion, et **t** le temps mis par le son pour arriver par la voie des airs (en secondes).

Le temps mis par le son dans l'eau est de (t-12) secondes;
La distance parcourue par le son étant supposée la même dans l'air et dans l'eau, on obtient les équations :

1er degré, 2 inconnues
exercice demandant de la réflexion

$$\begin{cases} 340\,t = x \\ 1400\,(t-12) = x \end{cases}$$

donc $340t = 1400\,(t-12)$ on trouve $t = 15,85$ s
d'où **x = 5389m**

Un commerçant malin

Soit x le taux de la première remise;

Prix initial :	500 F
1ère remise:	5x
1er net :	500 - 5x
2e remise:	0,02x (500 - 5x)

2e degré, 1 inconnue
discuter la vraisemblance des résultats

Prix net : $500 - 5x + 0{,}1x^2 - 10x = 360$

équation : $0{,}1x^2 - 15x + 140 = 0$

$\Delta = 169$
$x' = 140$ (ne convient pas) et $x'' = 10$

Les deux remises sont respectivement de 10 et 20%

Informatisation

Soit n le nombre de postes pouvant être achetés;
écrivons les différentes contraintes :

Coût d'un poste de travail couleur :	16450 F
Coût d'un poste de travail noir et blanc :	13550 F
Coût des imprimantes :	1100x F

1er degré, 1 inconnue
plusieurs contraintes

équation (montant de la facture) :

$$16450\,\frac{x}{2} + 13550\,\frac{x}{2} + 1100\,x = 96600$$

on trouve **x = 6 postes**

Les intérêts de Gaston

système de 2 équations à 2 inconnues
calcul d'intérêts simples;
plusieurs méthodes possible;
faire rechercher la plus simple.

Intérêts rapportés par le 1er placement : $I_1 = Ct / 100$
Intérêts rapportés par le 2e placement : $I_2 = 2C \times t \times 2 / 100 = 4Ct / 100$
$= 4\,I_1$

Les intérêts sont bien multipliés par 4.

Ecrivons le système :

$$\begin{cases} C + I_1 = 27125 \\ 2C + 4I_1 = 58500 \end{cases}$$

en multipliant la 1ère équation par -2 et en ajoutant membre à membre,
on trouve : **$I_1 = 2125$ F et $C = 25000$ F**

$t = 100\, I_1 / C =$ **8,5%**

Vérification : 2 x 25000 + 4 x 2125 = 58500 F

Gaston a donc raison

C'est Byzance

x : tarif adulte; y : tarif enfant (initialement prévus)

Répartition initiale : $40\,x + 30\,y = 168000$

Répartition retenue : $40\,(x + 0{,}125x) + 30\,(y - 500) = 168000$

On obtient le système :

$$\begin{cases} 40\,x + 30\,y = 168000 \\ 45\,x + 30\,y = 153000 \end{cases}$$

$5\,x = 15000 \Longrightarrow$ **$x = 3000$ F et $y = 1600$ F**

les nouveaux tarifs sont respectivement de 3375 F et 1100 F.

système à 2 inconnues

les inconnues sont proposées par l'énoncé

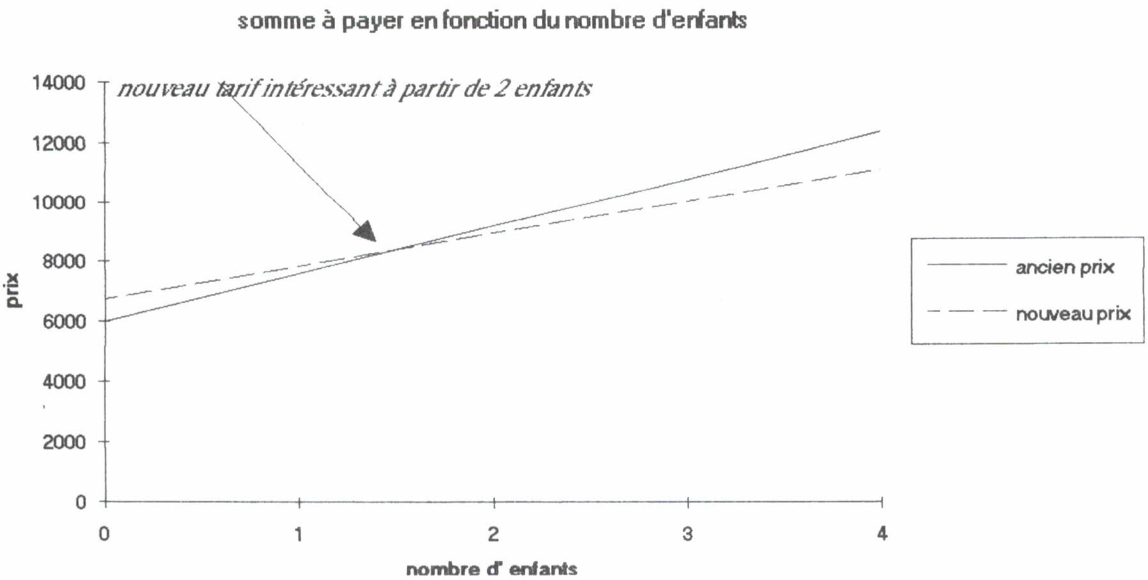
fonction affine

problème simple d'optimisation

Prix à payer pour un couple avec n enfants :

ancien : $p = 1600n + 6000$

nouveau : $p = 1100n + 6750$



La Société de construction

1) Surface totale du terrain : (13840 + 20760) x 2 = **69200 m²**
Surface constructible : **34600 m²**

2) La surface habitable totale doit être de 34600 x 0,14 = 4844 m²

Soit x le nombre des maisons de 4 pièces et y celui des maisons de 5 pièces.

On obtient le système :

$$\begin{cases} 580x + 740y = 34600 \\ 83{,}8x + 102{,}5y = 4844 \end{cases}$$

soit en simplifiant la 1ère équation par 20 :

$$\begin{cases} 29x + 37y = 1730 \\ 83{,}8x + 102{,}5y = 4844 \end{cases}$$

par combinaison linéaire, on trouve **x = 15 et y = 35** (valeurs arrondies)

3) Calcul du salaire moyen en utilisant l'histogramme;
le salaire moyen est de 134617 F; on prendra **135000F.**

Le salaire mensuel moyen est de 11250 F; l'endettement peut atteindre 3375 F.

salaire :	11250
crédits :	112,5x
reste :	11250 - 112,5x
logement :	0,02x (11250 - 112,5x)
	= 225x - 2,25x²

Calculons x si l'on veut atteindre un endettement mensuel de 3375 F:

$3375 = 112{,}5x + 225x - 2{,}25x^2$ soit l'équation :

$2{,}25x^2 - 337{,}5x + 3375 = 0$

$\Delta = 83531{,}25 = 289^2$

x' = 401,7 ne convient pas x" = **10,78 %**

Les crédits courants représentent donc 0,1078 X 11250 = 1213F
Il reste 3375 - 1213 = 2162 F pour les remboursements d'emprunts-logement.
Le montant possible d'une mensualité d'un crédit pour l'achat d'une maison est donc environ de **2200 F.**

L'annuité est de 12 X 2200 = **26400 F**

En plus de la résolution d'équations (1er et 2e degré, systèmes), l'objectif de ce dossier est la recherche d'informations. L'énoncé n'est, volontairement, pas toujours précis; il faut bien comprendre la finalité des calculs : la société de construction fait une étude de marché pour savoir à quel prix elle peut vendre ses maisons. Les calculs ne sont donc pas à faire au franc près mais doivent être arrondis (on ne fait qu'une estimation).

Les calculs seront faits de façon à être à chaque fois à la limite des contraintes.

Dans le calcul de l'endettement, on suppose que les "foyers fiscaux" sont endettés au maximum admis.

On peut maintenant calculer la somme que peut emprunter l'acheteur moyen d'une maison (qui gagne le salaire moyen calculé plus haut); on utilise la formule proposée :

$$a = \frac{V_0 t}{1 - (1 + t)^{-n}} \qquad \text{soit } V_0 = \frac{a[1 - (1 + t)^{-n}]}{t}$$

$$V_0 = \frac{26400 [1 - 1{,}085^{-20}]}{0{,}085} = 249832 \text{ F} \qquad \text{soit environ } 250000 \text{ F}$$

L' apport minimum étant de 150000 F, on arrive à un investissement total possible (maison + terrain) de **400000 F.**

Prix du terrain pour une parcelle de 650 m² : 78000 F
Prix de la maison seule : 400000 - 78000 = **322000 F**

La Société Lorraine de Construction, en vendant ses maisons environ 322000 F, peut permettre à un foyer gagnant le salaire moyen d'en acquérir une.

Quelques inéquations

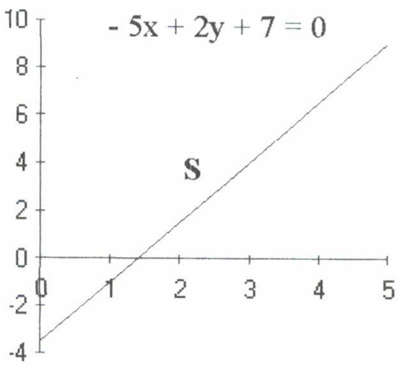
Inéquations du premier degré à une une inconnue

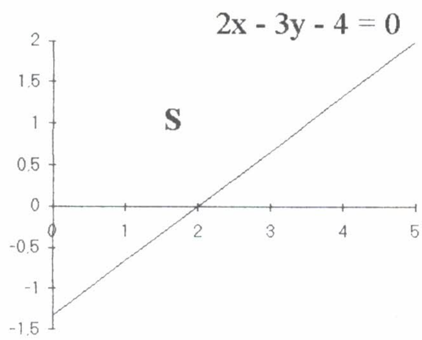
1) $x \geqslant -11$ 2) $x > -3$ 3) $x \leq 269 / 87$ 4) $x < 12 / 7$

5) $x < -317 / 220$

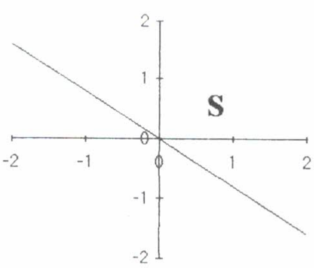
Inéquations du premier degré à deux inconnues

Résolution graphique exclusivement;

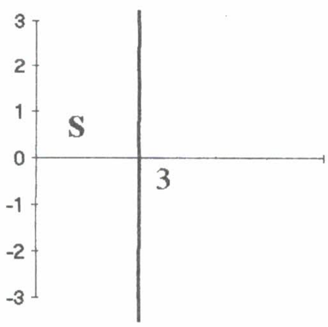




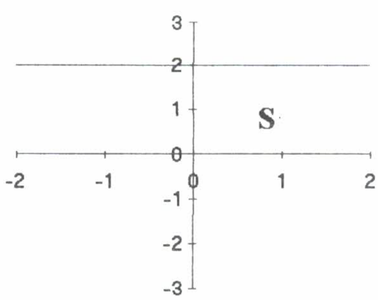
4x + 5y = 0



7x - 21 = 0



- 4y + 8 = 0



Systèmes d'inéquations du premier degré à une inconnue

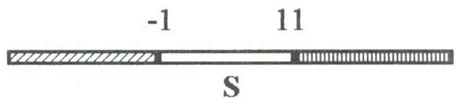
1) $\begin{cases} 2x + 5 < 6 \\ -3x + 12 \geq 5x + 3 \end{cases}$ ==> $\begin{cases} x < 0{,}5 \\ x \leq 1{,}125 \end{cases}$

$S =]-\infty\,;\,0{,}5\,[$

2) $\begin{cases} 3(x+1) - 7 > 5x + 2 \\ -4\,(2x-3) + 2 < 3(x+2) \end{cases}$ ==> $\begin{cases} x < -3 \\ x > 8/11 \end{cases}$

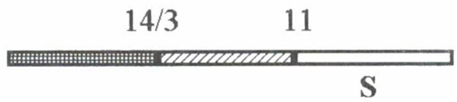
$S = \varnothing$

3) $\begin{cases} 9x + 11 \geq -3x - 1 \\ 5x - 6 \leq 4x + 5 \end{cases}$ ==> $\begin{cases} x \geq -1 \\ x \leq 11 \end{cases}$



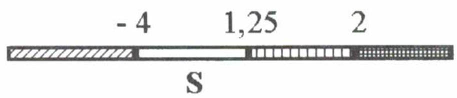
$S = [\,-1;\,11]$

4) $\begin{cases} 24x - 7 > 15x + 15 + 20 \\ 9x + 36 < 16x - 40 - 1 \end{cases}$ ==> $\begin{cases} x > 14/3 \\ x > 11 \end{cases}$



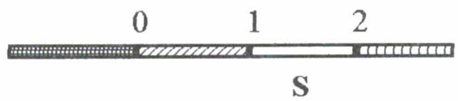
$S =]\,11;\,+\infty[$

5) $\begin{cases} 4x + 2 < 7 \\ -5x - 6 > 2x + 8 \\ 11x + 2 > 7x - 14 \end{cases}$ ==> $\begin{cases} x < 1{,}25 \\ x < 2 \\ x > -4 \end{cases}$



$S =]\,-4;\,1{,}25\,[$

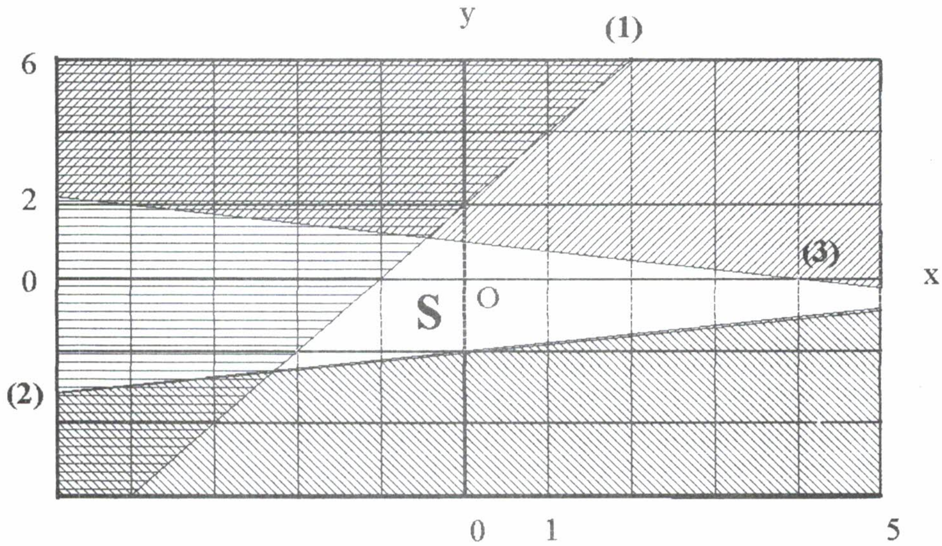
6) $\begin{cases} 2x - 1 > -1 \\ 2x - 1 < 6x - 5 \\ 6x - 5 < 7 \end{cases}$ ==> $\begin{cases} x > 0 \\ x > 1 \\ x < 2 \end{cases}$



$S =]\,1;\,2\,[$

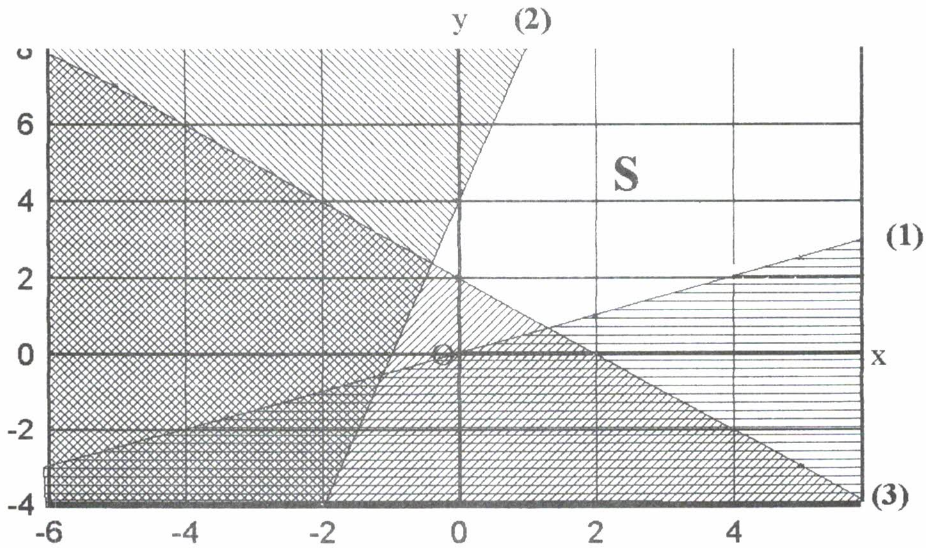
Systèmes d'inéquations du premier degré à deux inconnues

1)



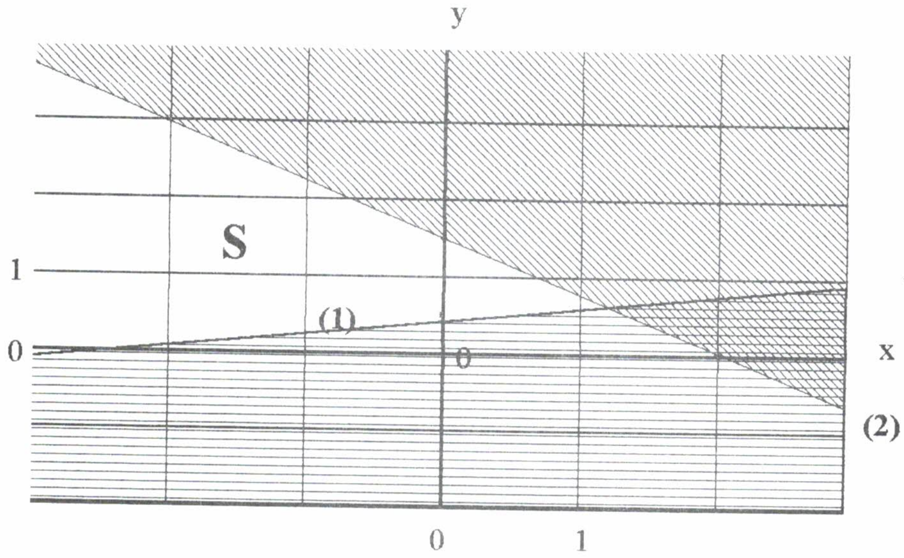
$$\begin{cases} 2x - y + 2 > 0 & (1) \\ 2x - 9y < 18 & (2) \\ -x - 4y + 4 > 0 & (3) \end{cases}$$

2)



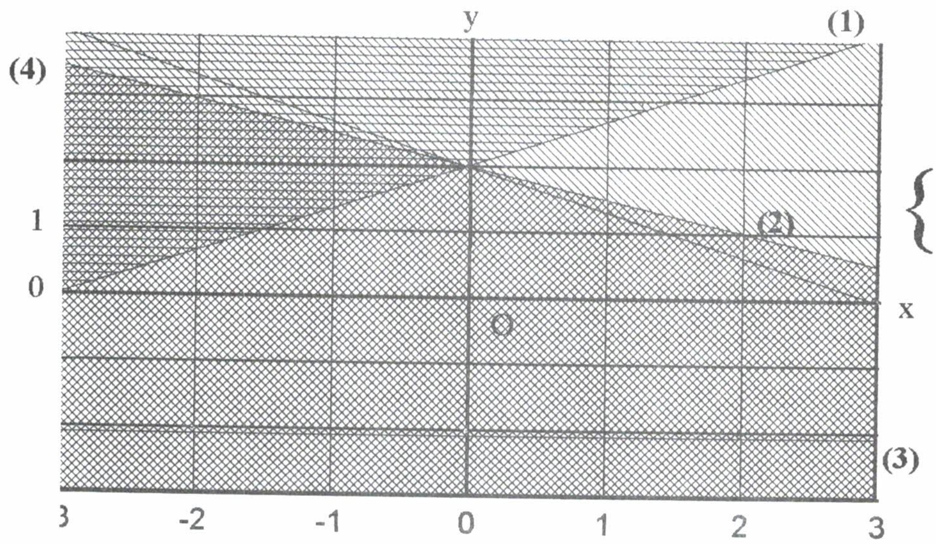
$$\begin{cases} x < 2y & (1) \\ 4x - y > -4 & (2) \\ -x < y - 2 & (3) \end{cases}$$

3)



$$\begin{cases} x - 6y + 3 < 0 & (1) \\ -3x - 4y + 6 > 0 & (2) \end{cases}$$

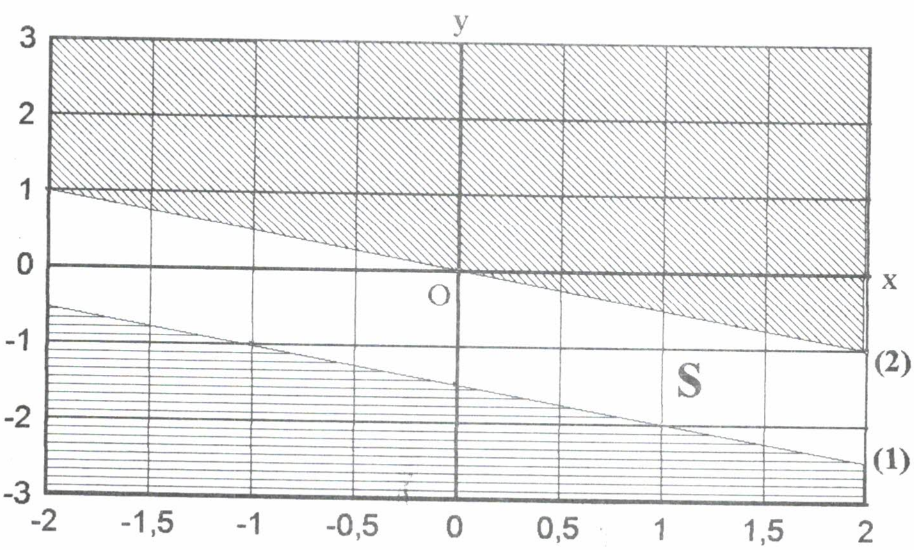
4)



$$\begin{cases} 2x - 3y + 6 > 0 & (1) \\ -2x < 3y - 6 & (2) \\ y + 2 < 0 & (3) \\ -x - 2y + 4 < 0 & (4) \end{cases}$$

S $= \varnothing$

5)



(1)

$-3 \leq x + 2y \leq 0$

(2)

Inéquations de degré n à une inconnue

1) $2x^2 - x - 10 \geq 0$; l'équation du second degré associée a comme discriminant 81; ses racines sont -2 et 2,5.

$P(x) = 2x^2 - x - 10$

x	$-\infty$		-2		2,5		$+\infty$
P(x)		+	0	-	0	+	

S =] - ∞ ; -2] U [2,5 ; + ∞ [

2) $12x^2 < 20x + 8$; l'équation du second degré associée a comme discriminant 49 (après simplification par 4) ; ses racines sont -1/3 et 2.

$P(x) = 12x^2 - 20x - 8$

x	$-\infty$		-1/3		2		$+\infty$
P(x)		+	0	-	0	+	

S =] -1/3 ; 2 [

3) $4x^2 - 5x + 6 > 0$; l'équation du second degré associée a un discriminant négatif; l'expression est toujours positive.

S = ℝ

4) $-10x^2 - 28x + 6 \leq 0$; l'équation du second degré associée a comme discriminant 256 (après simplification par 2); ses racines sont -3 et 0,2.

$P(x) = -10x^2 - 28x + 6$

x	$-\infty$		-3		0,2		$+\infty$
P(x)		-	0	+	0	-	

S =] -∞ ; -3] U [0,2 ; + ∞]

5) $-2x^2 + 4x > 3$; l'équation du second degré associée a un discriminant négatif; l'expression $-2x^2 + 4x - 3$ est toujours négative.

S = ∅

6) $(-4x^2 - 42x - 30)(x^2 - x - 2) > 0$

$-4x^2 - 42x - 30 = 0$ a comme discriminant 1284 et comme racines -46,48 et -0,8
$x^2 - x - 2 = 0$ a comme discriminant 9 et comme racines -1 et 2 .

x	$-\infty$		-46,48		-1		-0,8		2		$+\infty$
P(x)		-	0	+		+	0	-		-	
Q(x)		+		+	0	-		-	0	+	
R(x)		-	0	+	0	-	0	+	0	-	

$P(x) = -4x^2 - 42x - 30$

$Q(x) = x^2 - x - 2$

$R(x) = P(x) \times Q(x)$

S =] -46,48 ; -1 [U] -0,8 ; 2 [

7) $-x(x+1)(x^2-1) \leq 0$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
-x		+		+	0	-		-	
x+1		-	0	+		+		+	
x^2-1		+	0	-		-	0	+	
P(x)		-	0	-	0	+	0	-	

S = R -] 0 ; 1 [

8) $\dfrac{2x^2 + 10x - 28}{-3x^2 + 4x - 5} \geqslant 0$

$N(x) = 2x^2 + 10x - 28$ et $D(x) = -3x^2 + 4x - 5$

$Q(x) = N(x) / D(x)$

$N(x) = 0$ a comme discriminant 324 et comme racines -7 et 2;
$D(x) = 0$ a un discriminant négatif et est donc toujours négatif.

x	$-\infty$		-7		2		$+\infty$
N(x)		+	0	-	0	+	
D(x)		-		-		-	
Q(x)		-	0	+	0	-	

S = [-7 ; 2]

9) $\dfrac{x}{3x-2} \leq \dfrac{-1}{x-2} \implies \dfrac{x(x-2)+3x-2}{(3x-2)(x-2)} \leq 0$

$\implies \dfrac{x^2+x-2}{(3x-2)(x-2)} \leq 0$

$N(x) = x^2 + x - 2$, $D(x) = (3x-2)(x-2)$ et $Q(x) = N(x) / D(x)$

L'équation $x^2 + x - 2$ a comme discriminant 9 et comme racines -2 et 1;

x	$-\infty$	-2		2/3		1		2	$+\infty$
N(x)	+	0	-		-	0	+		+
D(x)	+		+	0	-		-	0	+
Q(x)	+	0	-	||	+	0	-	||	+

S = [-2 ; 2/3 [U [1 ; 2 [

10) $\dfrac{2x^3 - 18x}{x^2 - 6x + 9} > 0 \implies \dfrac{2x(x+3)(x-3)}{(x-3)^2} > 0$

x	$-\infty$	-3		0		3	$+\infty$
N(x)	-	0	+	0	-	0	+
D(x)	+		+		+	0	+
Q(x)	-	0	+	0	-	||	+

S =] -3 ; 0 [U] 3 ; + ∞ [

Systèmes d'inéquations à deux inconnues (réciproque)

Il suffit d'écrire les équations des droites représentées sur le graphique en repérant, pour chacune d'elles, les coordonnées de deux de leurs points.

1) On trouve après simplification :

$$\begin{cases} -x + 3y - 3 < 0 \\ x + y - 3 < 0 \\ -2x + y - 4 < 0 \end{cases}$$

2) On trouve comme équations de droites :

$$x = 2$$
$$y = 5$$
$$y = -2x - 2$$

Mais les hachures représentées sur le graphique montrent que ces droites ne suffisent pas et qu'il faut ajouter la droite $x = 0$.

On obtient finalement le système :

$$\begin{cases} x < 2 \\ y < 5 \\ x > 0 \\ y + 2x + 2 > 0 \end{cases}$$

Problèmes

A moi la moyenne

a) $\dfrac{12 + 6 + 14 + 15 + 8 + x}{6} > 12$ soit $x > 72 - 55$ ou $\mathbf{x > 17}$

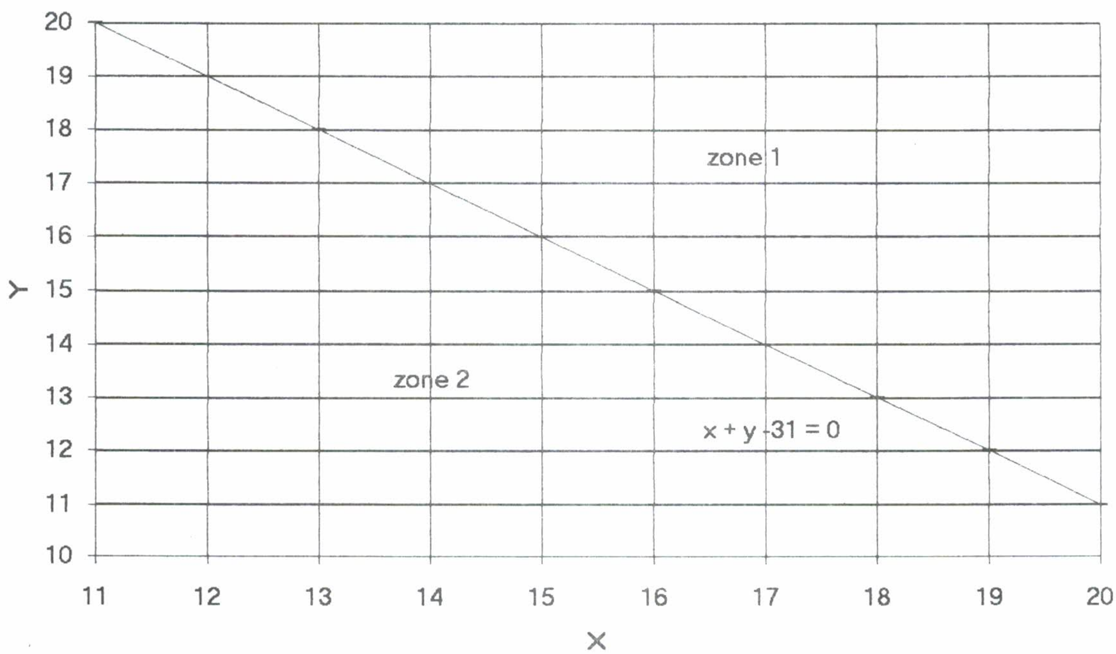
b) Soient x et y les notes à obtenir aux deux derniers devoirs (dans n'importe quel ordre).

$\dfrac{4 + 6 + 8 + + 11 + x + y}{6} \geq 12 \implies 29 + x + y \geq 72 \implies x + y - 43 \geq 0$

ce qui donne $x + y \geq 43$; c'est donc **impossible**, les notes ne dépassant pas 20.

Si l'on veut que la moyenne de l'élève soit supérieure ou égale à 10, on obtient :

$$\begin{cases} x + y - 31 \geq 0 \quad \text{avec} \\ 0 \leq x \leq 20 \\ 0 \leq y \leq 20 \end{cases}$$



Si les notes sont entières, les couples- solutions sont donnés par les coordonnées des points de la zone 1 quand elles sont entières.

Admis/ Recalé

Soient respectivement x et y les notes que le candidat doit obtenir en maths et en histoire. Elles doivent satisfaire à l'inéquation :

$$\frac{4x + 2y + 16 + 12}{13} \geq 10$$

soit $4x + 2y + 28 \geq 130$ ou encore $4x + 2y - 102 \geq 0$.
On représente graphiquement la droite $4x + 2y - 102 = 0$ (x et y sont comprises entre 0 et 20)

Les solutions sont données par les points de la zone 1 dont les coordonnées sont entières (si on suppose que les notes données sont entières). Il y en a 30 !

Xavier et Yvon

Appelons x l'âge de Xavier et y celui d'Yvon; les inéquations traduisant l'énoncé sont :

$$\begin{cases} x + y < 8 \\ y < 4 \\ x > y \\ y > x/2 \\ y \neq 2 \end{cases}$$

on trouve x = 4 ans et y = 3 ans

la solution peut être obtenue par une représentation graphique.

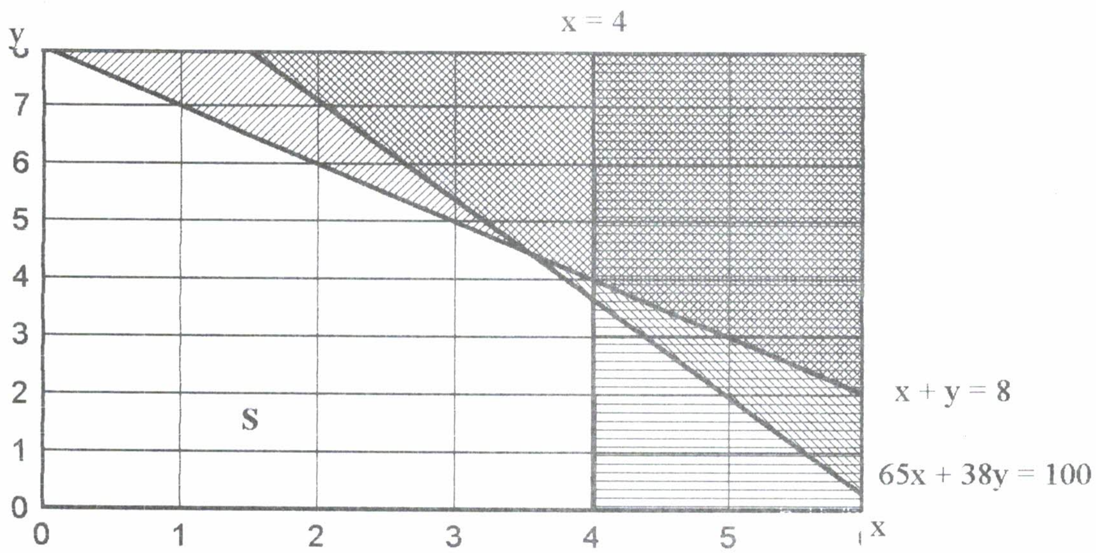
En boîte

a) Soit n le nombre de fois que Nathalie peut aller au cinéma;
$350 > 120 + 12 + 100 + 38n \implies n \leq 118/38 \implies n \leq 3{,}1$

soit **n = 3**

b) x est le nombre de fois où Karine peut aller en boîte, y le nombre de fois où elle peut aller au cinéma;
les contraintes sont les suivantes :

$$\begin{cases} x \leq 4 \\ x + y \leq 8 \\ 65x + 38y \leq 400 \end{cases}$$



Parmi les couples-solutions, celui qui correspond à la plus grande dépense est le couple (3;5)
Karine pourra aller 3 fois en boîte et 5 fois au cinéma pour une dépense égale à 385F.

Remarque : on aurait pu tracer la droite d'iso-dépense (voir optimisation).

c) Appelons z la somme reçue par Linda chaque mois; ses affirmations conduisent aux inéquations suivantes :

$$\begin{cases} 2z + 30 < 17 \times 38 \\ z/3 + 50 \geq 2 \times 60 \end{cases} \implies \begin{cases} z < 308 \\ z \geq 210 \end{cases} \implies \mathbf{210\ F \leq z < 308\ F}$$

Linda peut aller autant de fois au cinéma qu'en boîte et il lui reste 6F, soit n ce nombre de fois .

$z - 6 = 38n + 60n = 98n \implies z = 98n + 6$
la valeur de n pour laquelle z est la plus proche possible de 308 est 3;

donc **z = 300 F**

On solde

a)

Prix d'achat :	180
Frais :	10,80
Coût d'achat :	190,80
Marge :	127,20
Prix de vente ht :	318
TVA :	59,15
Prix de vente ttc :	377,15 soit **377 F**

b)

Prix de vente initial :	377
Rabais x% :	3,77x
Reste :	377 - 3,77x
Rabais 2x% :	$0{,}02x\ (377 - 3{,}77x) = 7{,}54x - 0{,}0754x^2$

Prix final : $377 - 3{,}77x - 7{,}54x + 0{,}0754x^2 = 0{,}0754x^2 - 11{,}31x + 377$

Ce prix ne pouvant être inférieur au prix d'achat, on obtient l'inéquation :

$$0{,}0754x^2 - 11{,}31x + 377 > 180 \quad \text{soit} \quad 0{,}0754x^2 - 11{,}31x + 197 > 0$$

La résolution de l'équation du second degré associée donne les solutions :

$x' = 129{,}88$ et
$x'' = 20{,}12$

Les valeurs acceptables pour x sont celles comprises entre 0 et 20,12 et celles supérieures à 129,88 du point de vue mathématique.

Les seules valeurs acceptables, commercialement parlant, sont celles comprises entre 0 et 20.

c) Si le commerçant veut solder au maximum il appliquera des rabais successifs de **20 et 40%.**

Histoire de poids (lourds)

Appelons x le nombre de camions de 10 t et y celui de camions de 18 t; les contraintes se traduisent par les inéquations suivantes :

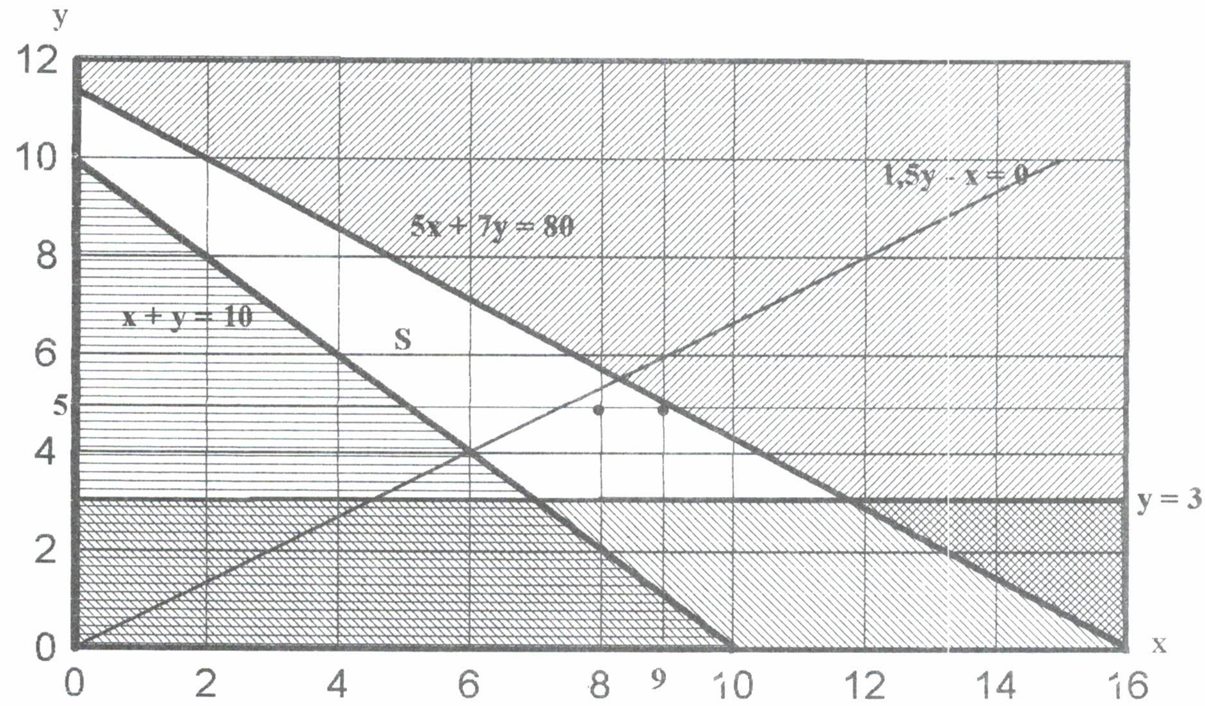
$$\begin{cases} 250000x + 350000y \leq 4000000 \\ 10x + 18y > 150 \\ y > 3 \\ x + y > 10 \end{cases}$$

on a d'autre part $x = 1{,}5y$ en moyenne.

Le graphique permet de déterminer la zone dans laquelle se trouve la meilleure solution (S);

La relation $x = 1{,}5y$ permet de déterminer cette solution optimum parmi toutes celles possible;

(voir graphique page suivante)



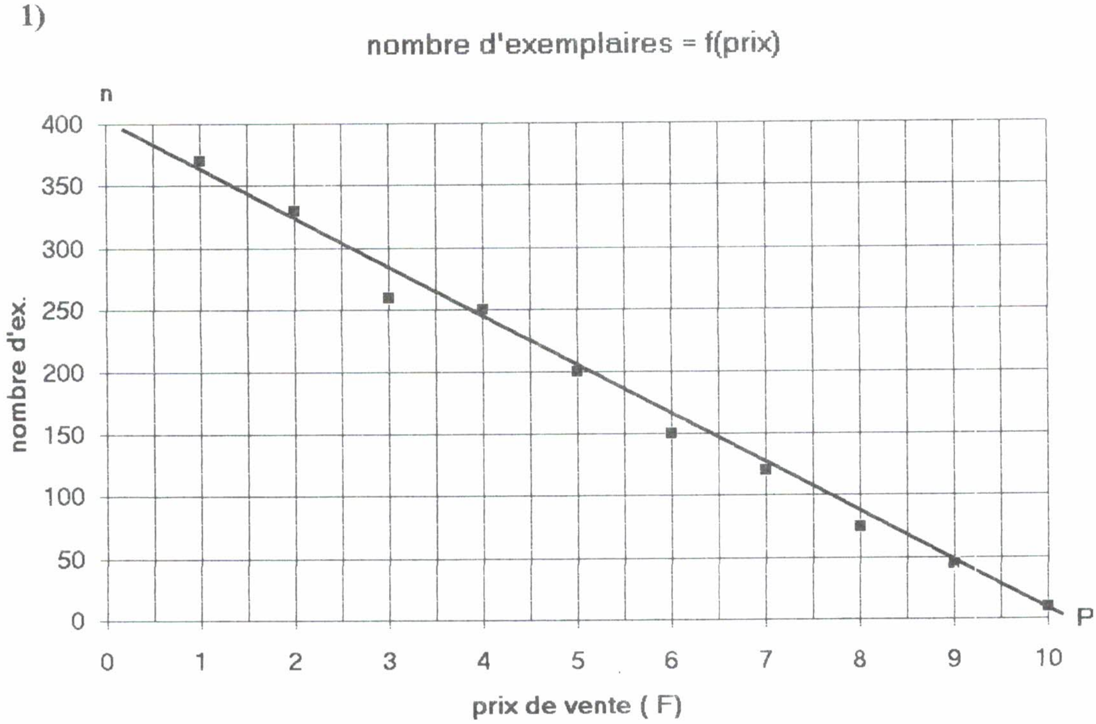
On constate que plusieurs solutions respectent les trois contraintes, mais deux se rapprochent le plus de la dernière indication " il y a en moyenne 1.5 fois plus de transports inférieurs à 10 tonnes".

Ces solutions sont (8 ; 5) et (9 ; 5). Le point (8 ; 5) est le plus proche de la droite $1{,}5y - x = 0$ et de plus il correspond à la solution la moins coûteuse.

Finalement vous faites acheter à la Société La Flèche Lorraine 8 camions de 10 tonnes et 5 camions de 18 tonnes.

Le Journal

1)



La droite d'ajustement passe par les points (2,5 ; 300) et (9 ; 50).
En résolvant le système d'équations, on trouve son équation :
$y = -40x + 400$ (les valeurs des coefficients sont arrondies, la méthode n'étant pas rigoureuse).

La relation liant n et P est donc : $\mathbf{n = -40\,P + 400}$

OPTION A :

Coût total pour n exemplaires : $0{,}80n + 80 + 1{,}5n = 2{,}3n + 80$
Recette pour n exemplaires : Pn
Il y aura équilibre si $Pn \geq 2{,}3n + 80$ soit $P(-40P + 400) \geq 2{,}3(-40P + 400) + 80$

ou encore $-40P^2 + 492P - 1000 \geq 0$

La résolution de l'équation du second degré associée donne : $\Delta = 82064$ et $x' = 2{,}57$
$x'' = 9{,}73$

L'équilibre sera assuré si le prix de vente est compris entre 2,57 F et 9,73 F.

OPTION B :

La fonction bénéfice est B = Recette - Coût = $-40P^2 + 492P - 1000$
Elle est maximum quand sa dérivée est nulle :
$B' = -80P + 492$; $B' = 0 \Longrightarrow P = 492 / 80 = 6{,}15$ F

Le bénéfice maximum sera de 512,90 F soit environ **513 F**

Il sera obtenu grâce à la vente de **155 exemplaires.**

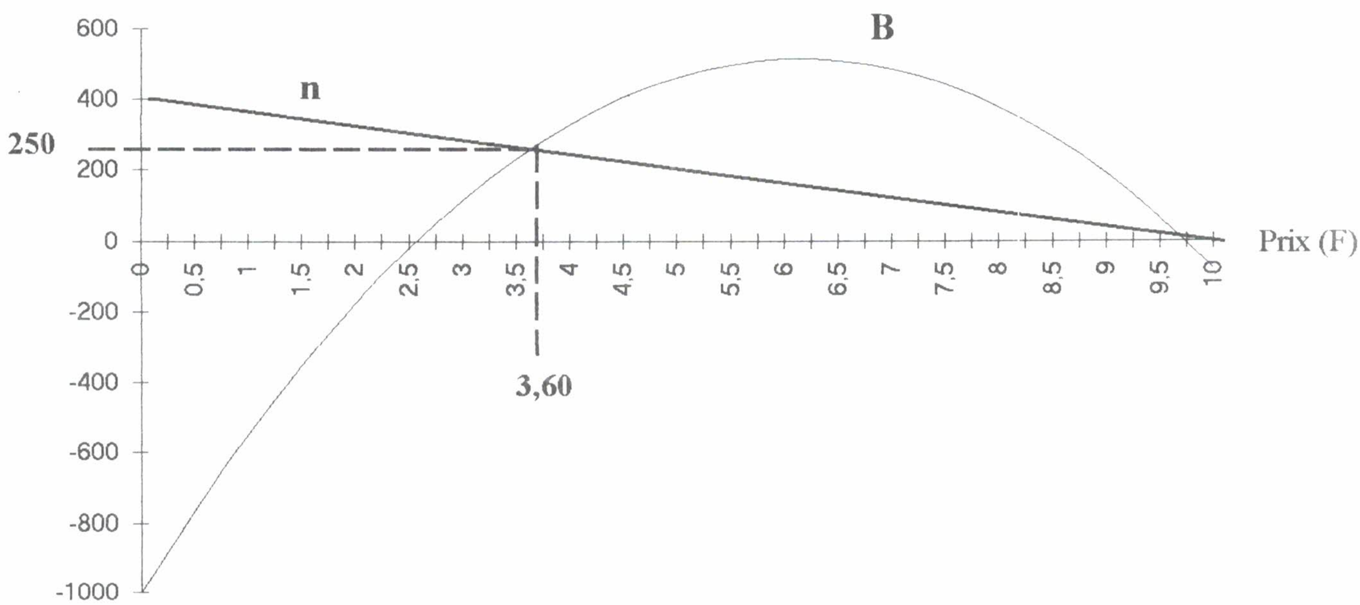
OPTION C :

Le lycée comptant 400 élèves, on veut vendre 200 journaux au moins.
$n \geqslant 200 \Longrightarrow -40P + 400 \geqslant 200 \Longrightarrow P \leqslant 5$

Si l'on veut vendre au moins 200 journaux et ne pas faire de déficit, il faudra que le prix de vente soit compris **entre 2,60 F et 5F.**

OPTION D :

nb ex / francs



Le prix de vente optimum est de 3,60 F

Il correspond à un nombre d'acheteurs de 250 et à un bénéfice de 250 F

EXERCICES

SUITES ROYALES

SUI 2

u : 1 ; 4 ; 7 ; 10 ; 13 ; **16**

v : -2 ; 4 ; -8 ; 16 ; **-32**

w : 625 ; 125 ; 25 ; 5 ; **1**

x : 1 ; 2 ; 4 ; 7 ; 11 ; 16 ; **22**
(l'écart augmente de 1 à chaque rang)

y : 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 8 ; 13 ; 21 ; **34**
(on additionne les deux termes précédents)

z : 2 ; 4 ; 5 ; 6 ; 4 ; 3 ; 4 ; 4 ; 4 ; 3 ; 4 ; 5 ; **6**
(Il s'agit, tout simplement, du nombre de lettres composant les mots un ; deux ; trois ; quatre ; .... ; treize !)

THERMES, TERMES, TERM.

SUI 2

u_0 n'existe pas $u_1 = 2$ $u_2 = 3/2$ $u_3 = 4/3$ $u_4 = 5/4$

$u_0 = -10$ $u_1 = -9$ $u_2 = -6$ $u_3 = -1$ $u_4 = 6$

$u_0 = 5$ $u_1 = 10/3$ $u_2 = 2{,}5$ $u_3 = 2$ $u_4 = 5/3$

$u_0 = 2$ $u_1 = 3$ $u_2 = 1$ $u_3 = 5$ $u_4 = -3$

$u_0 = 2$ $u_1 = -1/2$ $u_2 = 2$ $u_3 = -1/2$ $u_4 = 2$

$u_0 = 6$ $u_1 = 5/4$ $u_2 = 40/13$ $u_3 = 65/33$ $u_4 = 330/131$

SUITE ..... CASE ?

SUI 2

ATTENTION : Deux erreurs d'énoncé dans la première édition du fascicule :
- premier terme de la suite n°2 : lire 1 et non 0.
- supprimer la dernière suite.

Suite	Terme suivant	Déf. récurrente	Déf. fonctionnelle	10 ème terme
0;1;2;3;4	**5**	$u_{n+1} = u_n + 1$	$u_n = n$	**9**
1;2;4;8;16	**32**	$u_{n+1} = 2u_n$	$u_n = 2^n$	**512**
1;1/4;1/9;1/16;1/25	**1/36**		$u_n = 1/(n+1)^2$	**0,01**
0;2;8;26;80	**242**	$u_{n+1} = 3u_n + 2$		**19682**
2;1;2/3;1/2;2/5;1/3	**2/7**		$u_n = 2/(n+1)$	**1/5**

ENSUITE

SUI 2

a : suite géométrique de premier terme $a_0 = 1/4$ et de raison $q = 2$.

b : suite arithmétique de premier terme $b_0 = 4{,}5$ et de raison $r = -3{,}5$.

c : suite ni arithmétique, ni géométrique.

d : suite ni arithmétique, ni géométrique.

e : suite ni arithmétique, ni géométrique.

f : suite ni arithmétique, ni géométrique.

g : suite arithmétique de premier terme $g_0 = -1/2$ et de raison $r = 1$.

h : suite géométrique de premier terme $h_0 = 512$ et de raison 1/4.

SOIT UNE SUITE ARITHMETQUE

SUI 2

1°/ $u_5 = 5 + 5 \times (-3) = \mathbf{-10}$ $u_{10} = 5 + 10 \times (-3) = \mathbf{-25}$ $u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_9 = \dfrac{10\,(5 - 22)}{2} = \mathbf{-85}$

2°/ On résout le système :

$\begin{cases} u_0 + 24r = 5 \\ u_0 + 34r = 11 \end{cases}$ On trouve $\mathbf{u_0 = -9{,}4}$ et $\mathbf{r = 0{,}6}$.

3°/ On a $u_0 + 8r = 45$ et $\dfrac{5\,(u_0 + u_4)}{2} = 75$. On résout le système :

$\begin{cases} u_0 + 8r = 45 \\ 2u_0 + 4r = 30 \end{cases}$ On trouve $\mathbf{u_0 = 5}$ et $\mathbf{r = 5}$.

4°/ En exprimant u_5, u_6 et u_7 en fonction de u_4, on obtient :

$u_4 + r + u_4 + 2r = u_4 + 3r$ soit $\mathbf{u_4 = 0}$.

SOIT UNE SUITE GEOMETRIQUE

SUI 2

1°/ ATTENTION : erreur d'énoncé dans la première édition. Il manque le premier terme $u_0 = 2$.

$u_3 = 2 \times (3/4)^3 = \mathbf{27/32}$ $u_5 = 2 \times (3/4)^5 = \mathbf{243/512}$ $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = \dfrac{2[1 - (3/4)^4]}{1 - 3/4} = \mathbf{175/32}$

2°/ On résout le système :

$\begin{cases} u_0\, q = -14 \\ u_0\, q^4 = 112 \end{cases}$ On obtient $\mathbf{q = -2}$; $\mathbf{u_0 = 7}$ et $\mathbf{u_{10} = 7168}$.

3°/ Il faut résoudre le système :

$\begin{cases} u_0 + u_1 + u_2 = 10{,}5 \\ u_0\, u_1\, u_2 = 8 \end{cases}$ ou $\begin{cases} u_0 + u_0 q + u_0 q^2 = 10{,}5 \\ u_0^3 q^3 = 8 \end{cases}$

De la seconde équation, on tire $u_0\, q = 2$ soit en remplaçant u_0 par $2/q$ dans la première équation :

$2/q + 2 + 2q = 10{,}5$ ou $2q^2 - 8{,}5q + 2 = 0$

Cette équation a pour solutions $q = 0{,}25$ et $q' = 8$ (avec $\Delta = 56{,}25$)

On en déduit deux suites possibles :

u : 8 ; 2 ; 0,5 ; ... **($u_0 = 8$ et $q = 0{,}25$)**
u' : 0,25 ; 2 ; 8 ; ... **($u'_0 = 0{,}25$ et $q' = 8$)**

4°/ On résout l'équation :

$5 \times \dfrac{1 - 2{,}5^n}{1 - 2{,}5} = 322{,}1875$ ou $2{,}5^n = 97{,}65625$

En utilisant la fonction Lnx, on obtient $\mathbf{n = 5}$.

Problèmes

CHATEAU DE CARTES

SUI 3 

1°/ Le nombre de cartes par étage constitue une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $r = 5$.

Soit n le nombre de termes de la suite :

$n \times \frac{5 + u_{n-1}}{2} \leqslant 52$ soit en résolvant l'inéquation $5n^2 + 5n - 104 \leqslant 0$, on obtient $n \leqslant 4{,}53$.

On peut ainsi construire un château de **4 étages**.

On utilisera 4 x (5 + 5 +5x3) / 2 = 50 cartes. Il restera **2 cartes** inutilisées.

2°/ Le château doit comporter n = 100 / 10 = 10 étages. On calcule :

$S = 10 \times \frac{5 + u_9}{2}$ = **275 cartes**.

PETIT PROBLEME

SUI 3 

Les nombres entiers impairs forment une suite arithmétique de premier terme 1 et de raison 2. Il suffit donc de déterminer S en fonction de n :

$S = n \times \frac{1 + u_{n-1}}{2} = \mathbf{n^2}$

TRIANGLES

SUI 3 

L'aire des triangles représente une suite géométrique de premier terme $u_0 = 0{,}5$ m² et de raison $q = 0{,}25$.

Calculons le 10 ème rectangle :

$u_9 = 0{,}5 \times 0{,}25^9 =$ **0,0000019 m²**

QUITTE OU DOUBLE

SUI 3 

Les questions successives ont une valeur correspondant à une suite géométrique de premier terme 500 F et de raison 2.

1°/ Soit n le nombre de bonnes réponses :

$500 \times \frac{1 - 2^n}{1 - 2} = 63500$

On obtient **n = 7 bonnes réponses**.

2°/ On calcule u_7 :

$u_7 = 500 \times 2^7 =$ **64 000 F**.

PLIAGE

SUI 3 

L'épaisseur double à chaque pliage. On a donc une suite géométrique de premier terme 0,1mm et de raison 2.

Calculons :

$u_{30} = 0{,}1 \times 2^{30} = 107\,000\,000$ mm soit **107 Km**.

ARGUS

SUI 3

On considère une suite géométrique de raison 0,90. On résout :

$u_n = u_o / 2$ soit $u_o \times 0{,}9^n = 0{,}5 u_o$

On obtient n = **6,57 années**.

SUJET BAC PRO B (1990)

SUI 3

1°/ Voir graphique plus loin.

Les valeurs résiduelles forment une suite arithmétique de premier terme 368 178 et de raison - 76 000 :

$u_{90} - u_{89} = u_{91} - u_{90} = u_{92} - u_{91} =$ **- 76 000**

2°/ Voir graphique plus loin.

Les valeurs résiduelles forment une suite géométrique de premier terme 354 667 et de raison 0,6 :

$u_{90} / u_{89} = u_{91} / u_{90} = u_{92} / u_{91} =$ **0,6**

3°/ On résout le système :

$$\begin{cases} 91a + b = 216176 \\ 92a + b = 140178 \end{cases}$$

On obtient l'équation de droite **y = - 76 000 x + 7 132 000**

Valeur résiduelle = 380 000 / 2 = 190 000 F.

On résout l'équation :

$- 76\,000\, x + 7\,132\,000 = 190\,000$

On obtient x = 91,34 . La date est donc le **3 mai 1992** (valeurs en fin d'année).

4°/ On calcule les valeurs résiduelles :

$f(89) = 354\,667 \times 0{,}6 = 354\,667 = V_{89}$

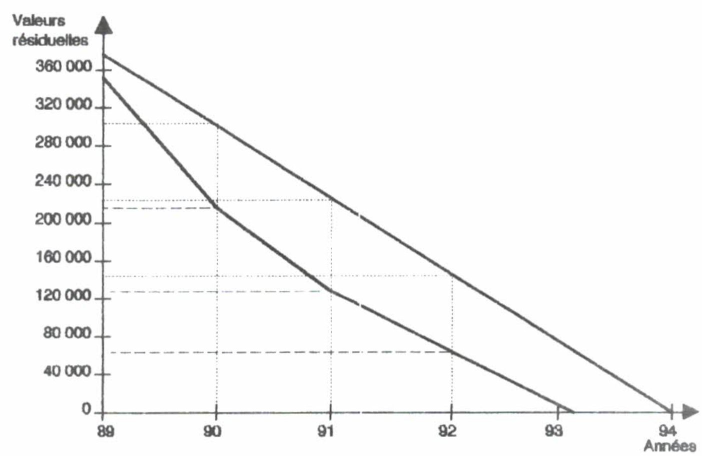
$f(90) = 354\,667 \times 0{,}6 = 212\,800 = V_{90}$

$f(91) = 354\,667 \times 0{,}6^2 = 127\,680 = V_{91}$

On résout l'équation :

$354\,667 \times 0{,}6^{(x-89)} = 190\,000$

On obtient x = 90,22 . La date est le **20 mars 1991**.



CROISSANCE

SUI 3

Population de la ville V : suite géométrique de 1er terme V_0 et de raison q = 1,01.

Population de la ville W : suite géométrique de 1er terme W_0 et de raison q' = 1,03.

On a $V_0 = 2W_0$. Déterminons n pour que $W_n = V_n$:

$V_0 \times 1{,}01^n = W_0 \times 1{,}03^n$ On trouve n = 35 soit en **2026**.

De même, déterminons n pour que $W_n = 2 V_n$:

$2 \times V_0 \times 1{,}01^n = W_0 \times 1{,}03^n$ On trouve naturellement n = 70 soit en **2061**.

APPLICATIONS

SUI 4

A/ En faisant varier r avec le tableur, on trouve r = 56,78.

Résolvons l'équation :

$1 + 9r = 1 \times 2^9$ On trouve également **r = 56,78.**

Avec le tableur, on trouve q = 1,2916.

Résolvons l'équation :

$10 + 9 \times 10 = 10 \times q^9$ On trouve **q = 1,2916**.

Avec le tableur, on trouve **r = q = 1,131**.

L'équation $5 + 9x = 5\,x^9$ ne peut être résolue (équation du 9ème degré!).

B/ On obtient des graphiques semblables à celui de l'énoncé.

En faisant varier le taux q et en fixant r à 12 %, on obtient des capitaux égaux (42 000 F) à 0,5% près pour un taux d'intérêt composé q = 1,0711 soit **7,011%**.

Le tableau des dérivées

	A	B	C	D
1	-5	0	$-5/x^2 - 3x^2$	$42x^6$
2	$\frac{2x+4}{7}$	2	$\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}$	$2p$
3	$3z^2$	$10q - 2$	$20(4x-1)^4$	$-2/x^3$
4	$21x^2 - 2$	$2ax + b$	$4/x^2$	1
5	0	$\frac{-7}{x^2}$	$-a/x^2$	$-2/x^3$
6	$2x$	$-0{,}5x$	$-7/3$	0
7	1	$\frac{-1}{2\sqrt{x-7}}$	$6x^2 + 6x - 1$	$\frac{32}{(4x+2)^2}$
8	$5x^4 + 6x^2 - 2x$	$2 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$-1/3$	$4p - 3$
9	a	$\frac{6x-5}{2\sqrt{x}}$	$-0{,}25$	$\frac{8(2x+3)^3(2x-3)}{x^3}$

	E	F	G	H
1	$36x^2 - 8x$	$1 + 1/\sqrt{2x}$	$8/(2-x)^2$	$1/\sqrt{2x-7}$
2	$-10/x^3$	0	$-1/2p^2$	$0{,}8$
3	$3\sqrt{2x+3}$	-1	$8x + 3$	$0{,}2x$
4	$4x - 3$	0	$12(4x-5)^2$	$4/(-7x+2)^2$
5	$\frac{4{,}45}{(4x-1{,}5)^2}$	1	$x - 0{,}75$	$\frac{1}{4\sqrt{x/2}}$
6	$-7/x^2$	3	$-12(2x+2)^2$	$-1/x^2 + 2/x^3$
7	$-1/2\sqrt{x}$	$6x + 2/x^2$	$-\frac{12(x+5)^3}{x^2} + \frac{6(x+5)^4}{x^3}$	-2
8	0	$\frac{6x-5}{(\sqrt{3x-1})^{1,5}}$	2 ou -2	$0{,}5$
9	$\sqrt{3}$	$-21x^2 + 2$	$-2x$	$\frac{5x^2 - 2x + 10}{(x^2-2)^2}$

Les variables sont supposées appartenir au domaine de définition des fonctions.

2) Pour chaque courbe et chaque abscisse, on calcule l'ordonnée et le coefficient directeur de la tangente

G3	
(1 ; 0)	y = 11x - 11
(4 ; 69)	y = 35x - 71
(-4 ; 45)	y = -29x - 71

C4	
(1 ; -4)	y = 4x - 8
(4 ; -1)	y = 0,25x
(-4 ; 1)	y = 0,25x + 2

C7	
(1 ; 4)	y = 11x - 7
(4 ; 172)	y = 119x - 304
(-4 ; -76)	y = 71x + 208

G9	
(1 ; -1)	y = -2x + 1
(4 ; -16)	y = -8x – 16
(-4 ; -16)	y = 8x + 16

H1

les valeurs 1 et -4 n'appartiennent pas au domaine de définition;

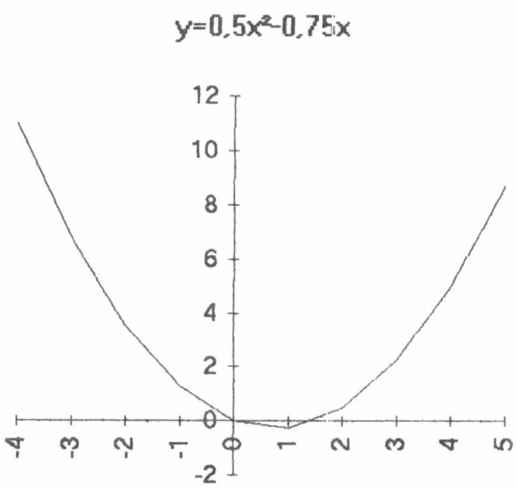
(4 ; 1) y = x - 3

B4	
(1 ; a+b+c)	y = (2a+b)x+c-a
(4 ; 16a+4b+c)	y = (8a+b)x-16a+c
(-4 ; 16a-4b+c)	y = (-8a+b)x-16a+c

3)

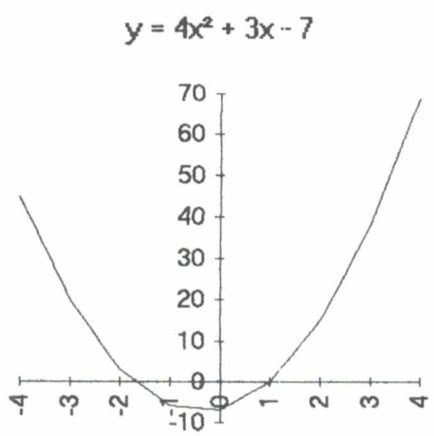
x	$-\infty$		0,75		$+\infty$
f'(x)		-	0	+	
f '(x)	$+\infty$	$\searrow$	- 0,28	$\nearrow$	$+\infty$

G5

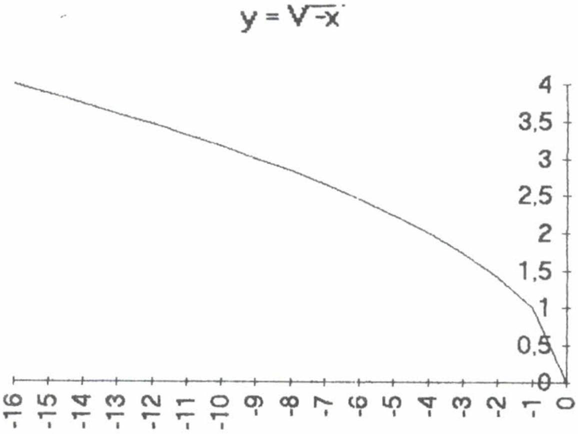


x	$-\infty$		-3/8		$+\infty$
f '(x)		-	0	+	
f(x)	$+\infty$	$\searrow$	-7,56	$\nearrow$	$+\infty$

G3



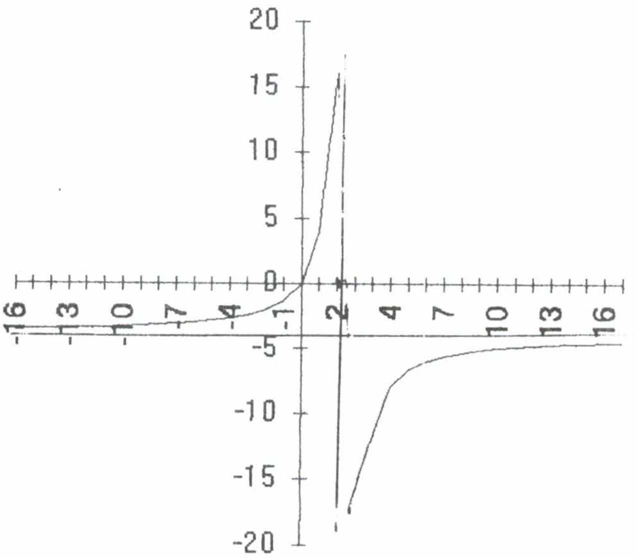
x	$-\infty$		0
$f'(x)$		$-$	0
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0



E7

4) Etude de la fonction $f(x) = \dfrac{4x}{-x+2}$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	
$f(x)$	-4	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	-4



asymptotes :

$y = -4$ et $x = 2$

Virage dangereux

1) $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - 4x + 1$

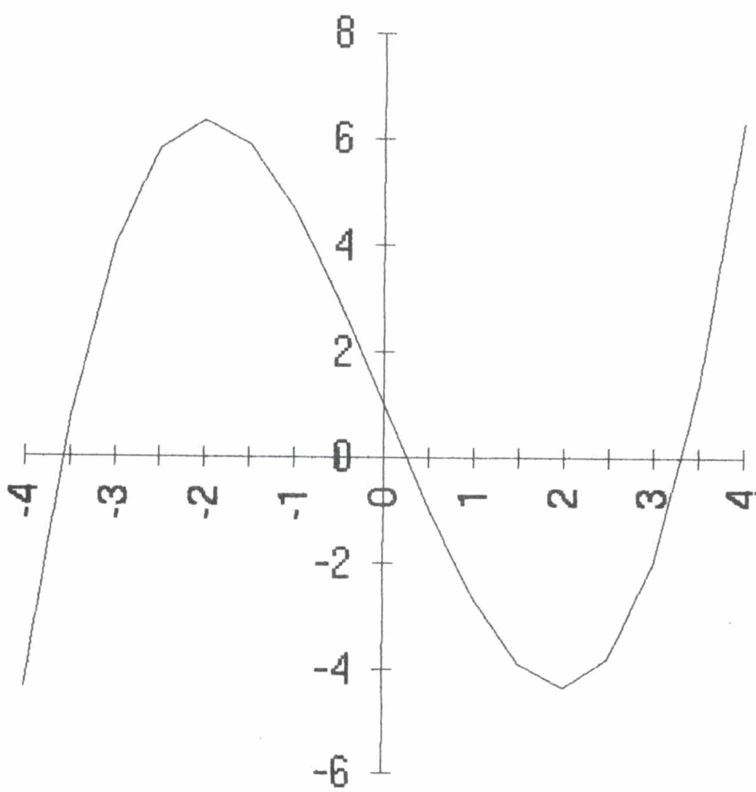
$f'(x) = x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$

2)

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$19/3$	$\searrow$	$-13/3$	$\nearrow$	$+\infty$

3) Le tableau de la page suivante donne, pour les abscisses données, les ordonnées correspondantes, les coefficients directeurs des tangentes et leurs équations.

x	y	coefficient	équation y = ...
-4	-13 / 3	12	12x + 131 / 3
-2	19 / 3	0	19 / 3
0	1	-4	-4x + 1
2	-13 / 3	0	- 13 / 3
4	19 / 3	12	12x - 125 / 3



Mise en boîte

a) V = 1000 cm3; appelons a l'arête du cube ayant comme volume 1000 cm^3:

$a = 1000^{1/3} =$ **10 cm**

d'où S = 6 x 100 = **600 cm²**

b) Soit c le côté du carré de base et h la hauteur du pavé;

$V = c^2 h = 1000 \Longrightarrow h = 1000 / c^2$

Donc $S(c) = 2c^2 + 4ch = 2c^2 + 4c\,(1000 / c^2) = 2c^2 + 4000 / c$
La fonction surface passera par un minimum si sa dérivée s'annule :
$S'(c) = 4c - 4000 / c^2$ et $S'(c) = 0$ si c = 10 cm.

La surface du pavé est minimum si ce pavé est un cube d'arête 10 cm; on peut donc éliminer le pavé.

c) $V = \Pi R^2 h = 1000 \Longrightarrow h = 1000 / \Pi R^2$

$S = 2\Pi R^2 + 2\Pi Rh = 2\Pi R^2 + 2\Pi R \times 1000 / \Pi R^2 = 2\Pi R^2 + 2000 / R$
$$S'(R) = 4\Pi R - 2000 / R^2 = \frac{4\Pi R^3 - 2000}{R^2}$$

$S'(R) = 0 \Longrightarrow 4\Pi R^3 - 2000 = 0 \Longrightarrow R^3 = 2000 / 4\Pi = 500 / \Pi$

$\Longrightarrow$ **R = 5,42 cm** (environ) ; $h = 1000 / \Pi R^2 =$ **10,84 cm**

La boîte doit être aussi haute que large.

Calculons la surface minimum du cylindre :
$S_{min} = 2\Pi R^2 + 2000 / R =$ **553,58 cm²**

Pour que le prix de revient soit le plus bas possible, il faut donc que la boîte soit cylindrique et que son diamètre soit égal à sa hauteur.

Exercice (de tir)

cet exercice demande de la réflexion

1) $z = ax^2 + bx$; la dérivée est $z' = 2ax + b$

Au point x = 0, on a z' = b = 1 donc $z = ax^2 + x$

L'apogée est atteinte pour z' = 0, donc pour 2ax + b = 0 soit x = - b / 2a
On a alors z = 1960.

En remplaçant x par $-b / 2a$ dans l'équation $z = ax^2 + x$ on obtient :

$1960 = a(-b / 2a)^2 - b / 2a = ab^2 / 4a^2 - b / 2a$
soit $1960 = b^2 / 4a - b / 2a = (b^2 - 2b) / 4a$
Or $b = 1$
D'où $1960 = -1 / 4a$ et $a = -1 / 7840$

L'équation de la parabole est : $z = \dfrac{-x^2}{7840} + x$

2) Le missile touchera le sol quand $z = 0$:

$-x^2 / 7840 + x = 0 \implies x(1 - x / 7840) = 0 \implies$ **$x = 7840$ m**

Fonction

a) $y = ax^2 + bx + c$ d'où $y' = 2ax + b$

En remplaçant par les coordonnées de A et B, et en utilisant la tangente au point B, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} 4a - 2b + c = 19 & (1) \\ a + b + c = -2 & (2) \\ 2a + b = -1 & (3) \end{cases}$$

L'exercice peut paraître délicat car il nécessite la résolution d'un système de 3 équations à 3 inconnues, mais cette résolution est relativement simple.

$(1) - (2) \implies 21 = 3a - 3b \implies a - b = 7$

$$\begin{cases} a - b = 7 \\ 2a + b = -1 \end{cases} \quad \text{d'où } 3a = 6 \text{ et } a = 2$$

On en déduit $b = -5$; $c = 1$

L'équation est donc $y = 2x^2 - 5x + 1$

b) L'équation générale de la tangente est $y = ax + b$;
son coefficient directeur est -1; en remplaçant par les coordonnées de B, il vient :

$$-2 = -1 + b \implies b = -1$$

L'équation est : $y = -x - 1$

Le hangar

1) On appelle x le décrochement entre la construction et les voisins; x doit être supérieur à 2 m et inférieur à 5 m.
La hauteur autorisée est égale à la valeur de ce décrochement.
En jouant sur x, il faut obtenir le volume maximum.

Les dimensions du hangar sont :
largeur $l = 10 - 2x$
longueur $L = 12 - x$
hauteur $h = x$

$V(x) = (10 - 2x)(12 - x)x = 2x^3 - 34x^2 + 120x$

2) Dérivons la fonction $V(x)$:
$V'(x) = 6x^2 - 68x + 120$
Le volume est maximum quand la dérivée est nulle :

$V'(x) = 0 \Longrightarrow 6x^2 - 68x + 120 = 0$ ou $3x^2 - 34x + 60 = 0$

$D = 436 = 20{,}88^2$

$x' = 9{,}15$ m ne convient pas
$\mathbf{x'' = 2{,}19}$ **m**

La résolution de ce problème nécessite une lecture attentive de l'énoncé.
Un schéma peut être très utile
. On suppose que le décrochement est le même sur les 3 côtés (aucun du côté route) et que le terrain a trois voisins.

3) Les dimensions du hangar sont :

l = 5,62 m
L = 9,81 m
h = 2,19 m

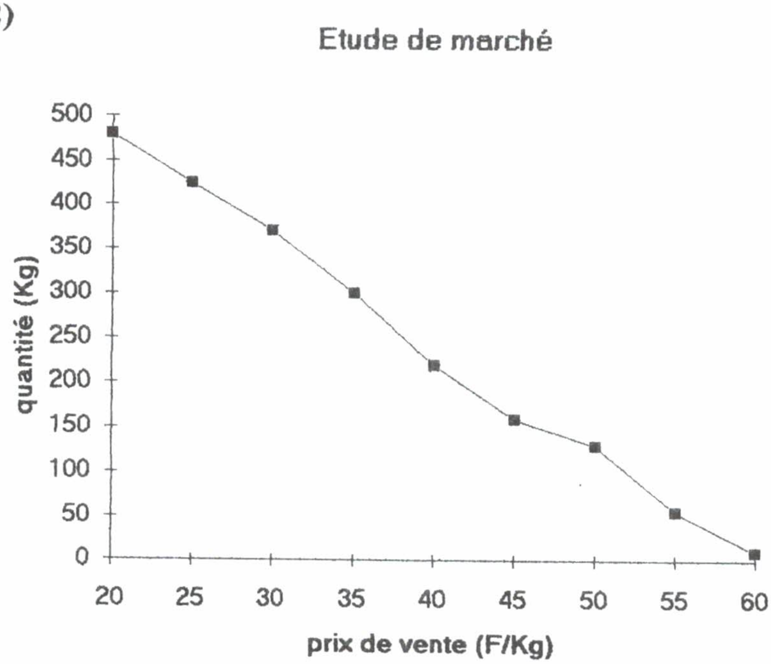
Motos en stock

L' énoncé du problème n'étant pas satisfaisant, nous vous demandons de le supprimer du fascicule.

Chocolat

1) $C(Q) = 500 + 700 + 0{,}30Q + (20 + 1800 / Q)\,Q$
$C(Q) = 20{,}3\,Q + 3020$

2)



Remarques

Ce problème est un dossier qui essaie d'être dans le style de l'épreuve subie par les candidats au bac pro (avec plus de maths, évidemment).

Il s'agit de suivre un produit, de la phase d'approvisionnement en gros, jusqu'à la commercialisation.

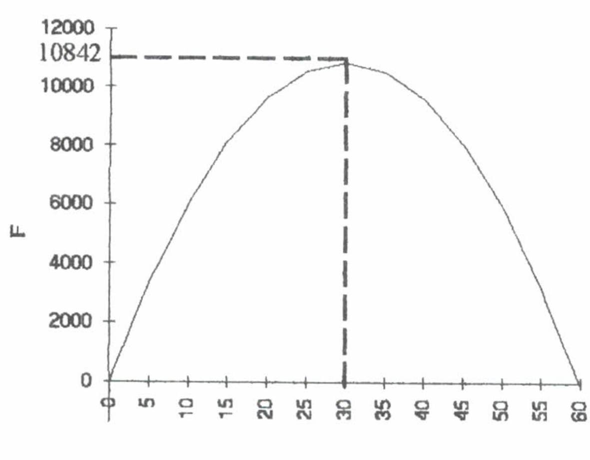
Il demande à l'élève une recherche des élèments de réponse.

Utilisons ma méthode de Mayer;
On obtient les points moyens G_1 (30,2 ; 359) et G_2 (52,5 ; 88,75)
L'équation de la droite d'ajustement est du type $y = ax + b$.
D'où les équations : $\begin{cases} 359 = 30{,}2\,a + b \\ 88{,}75 = 52{,}5\,a + b \end{cases}$

on trouve par soustraction : $a = -12{,}12$ et $b = 725$
D'où l'équation $y = -12{,}12\,x + 725$ ou **$Q = -12{,}12\,x + 725$**

question 1 : attention, le prix d'achat est donné pour un Kg

3) $R(x) = Qx = (-12{,}12\,x + 725)\,x = -12{,}12\,x^2 + 725\,x$
$R'(x) = -24{,}24\,x + 725$
La fonction passe par un maximum pour $x = 29{,}90$ F qui vaut 10842 F.



4) B (x) = R (x) - C (x)

$= - 12{,}12\, x^2 + 725\, x - 3020 - 20{,}3\, Q$

Or $Q = - 12{,}12\, x + 725$

donc $B(x) = - 12{,}12\, x^2 + 725\, x - 3020 - 20{,}3\,(-12{,}12\, x + 725)$

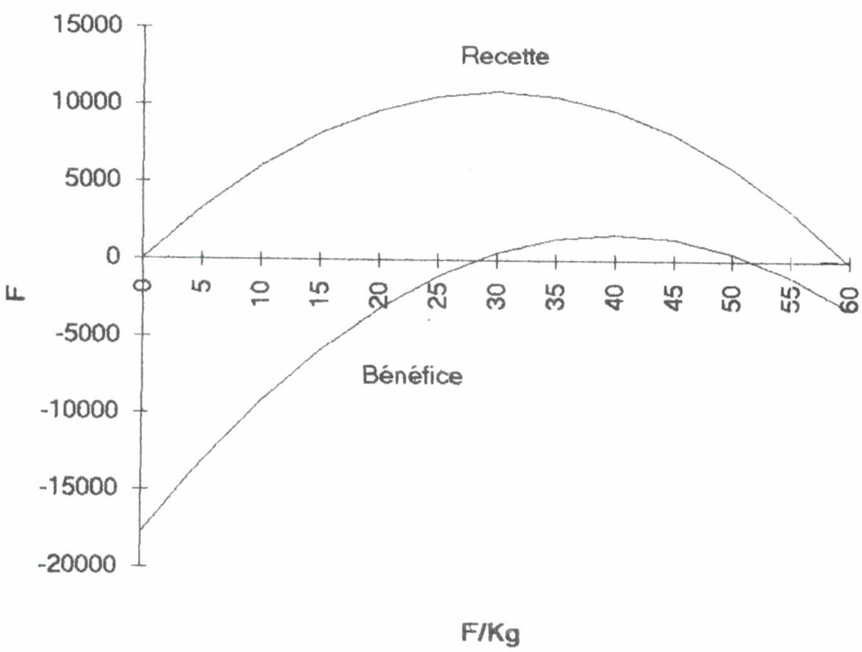
$= - 12{,}12\, x^2 + 971\, x - 17737$

(arrondir, le calcul est une estimation)

$B'(x) = - 24{,}24\, x + 971$

La fonction bénéfice passe par un maximum pour x = 40,06 F, soit pour x = 40 F. La quantité est alors de 240 Kg.*(elle est différente de celle de l'étude de marché car on a ajusté)*

Le bénéfice est alors de 1711 F



5) La zone à hachurer est celle où la courbe représentant la recette est située au dessus de la droite représentant le coût total.

On retrouve sur ce graphique les résultats précédents.

6) $V = L \times l \times h = L \times l \times 1{,}5 \times l = 1{,}5\, L\, l^2$

$1{,}5\, L\, l^2 = 580 \Longrightarrow L = \dfrac{580}{1{,}5\, l^2}$

$S = 2\, h\, L + 2\, l\, h + 2\, L\, l = 2\left(1{,}5\, l \times \dfrac{580}{1{,}5\, l^2} + 2l \times 1{,}5\, l + \dfrac{1160\, l}{1{,}5\, l^2}\right)$

$= 2\left(\dfrac{580}{l} + 3\, l^2 + \dfrac{1160}{1{,}5\, l}\right) = 2\left(3l^2 + \dfrac{2030}{1{,}5\, l}\right) = 6\, l^2 + \dfrac{4060}{1{,}5\, l}$

$S' = 12\, l - \dfrac{6090}{2{,}25\, l^2}$ $\qquad S' = 0 \Longrightarrow l = 6{,}087$ ou 6,1 cm

Les dimensions de la boîte sont : **l = 6,1 cm , L = 10,4 cm , h = 9,1 cm**

REPRESENTATIONS GRAPHIQUES

FON 3

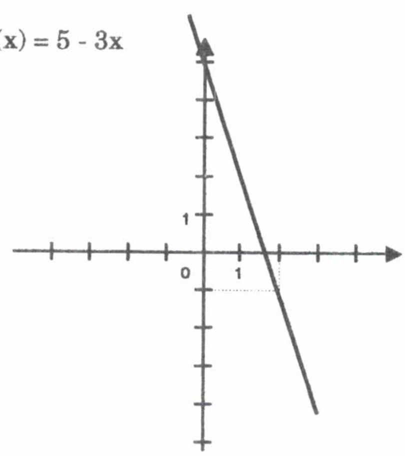
Objectif: *Tout sur la fonction affine.*

0°/ Les associations sont :

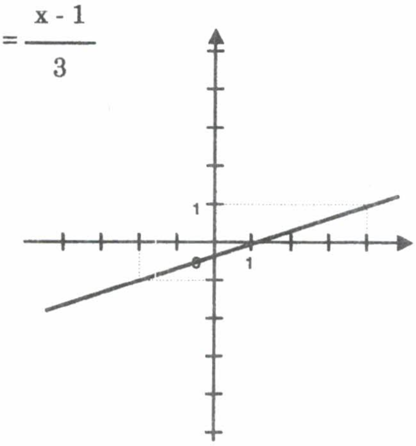
1 avec (D) ; 2 avec (A) ; 3 avec (F) ; 4 avec (E) ; 5 avec (C) ; 6 avec (B) .

1°/ Représentations graphiques :

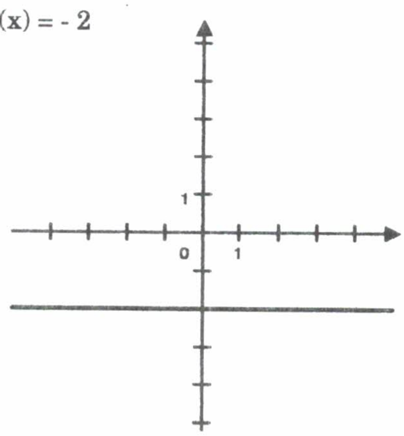
$f(x) = 5 - 3x$



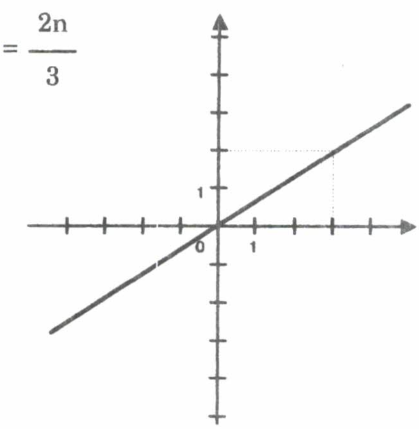
$y = \dfrac{x - 1}{3}$



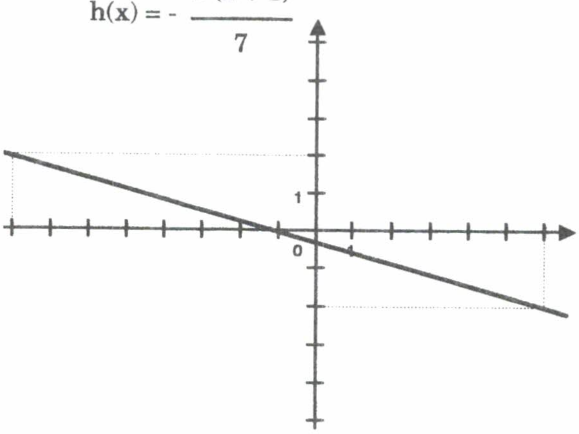
$g(x) = - 2$



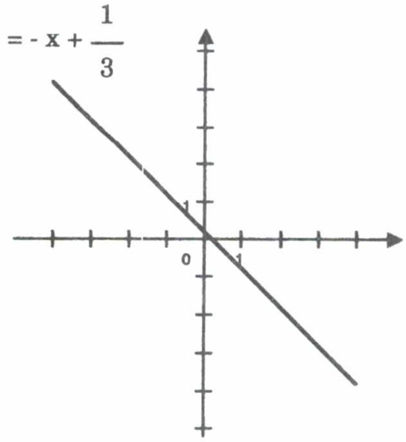
$I = \dfrac{2n}{3}$



$h(x) = - \dfrac{2\,(x + 1)}{7}$



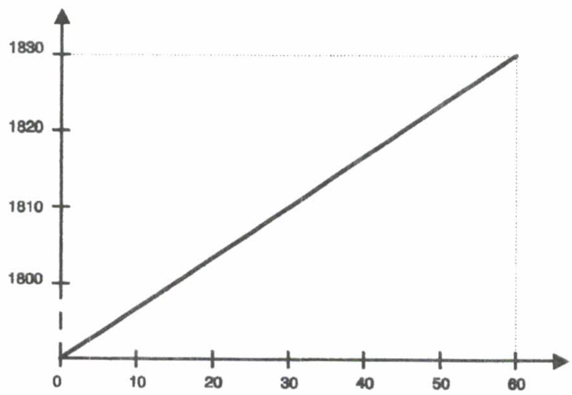
$y = - x + \dfrac{1}{3}$



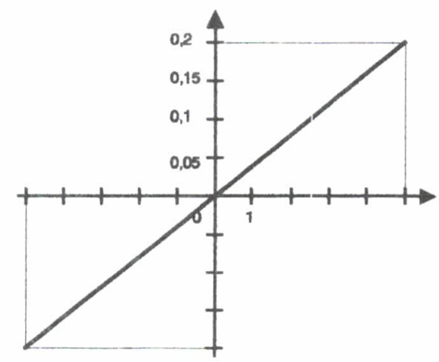
2°/ Attention, la question est à éliminer !

3°/ Il faut veiller à ce que l'élève choisisse une graduation appropriée.

$f(x) = 1800 + 0{,}5\,x$ sur $[\,0\,;\,60\,]$



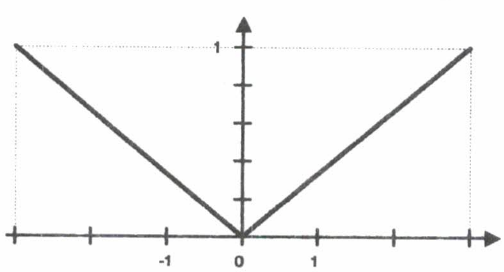
$g(x) = 0{,}04\,x$ avec $-5 \leqslant x \leqslant 5$



4°/ Fonctions avec valeurs absolues :

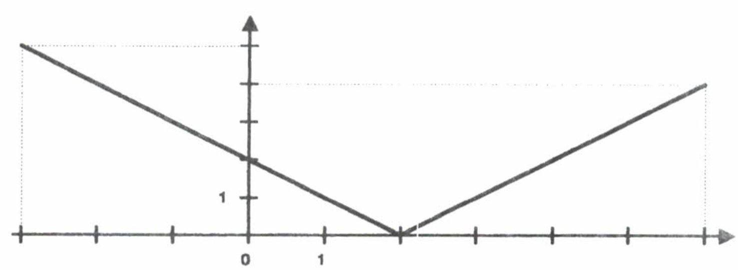
$f(x) = \left| -\dfrac{x}{3} \right|$ si $x < 0$ $f1(x) = -\dfrac{x}{3}$

si $x > 0$ $f2(x) = \dfrac{x}{3}$



$g(x) = \left| x - 2 \right|$ si $x < 2$ $g1(x) = -x + 2$

si $x > 2$ $g2(x) = x - 2$

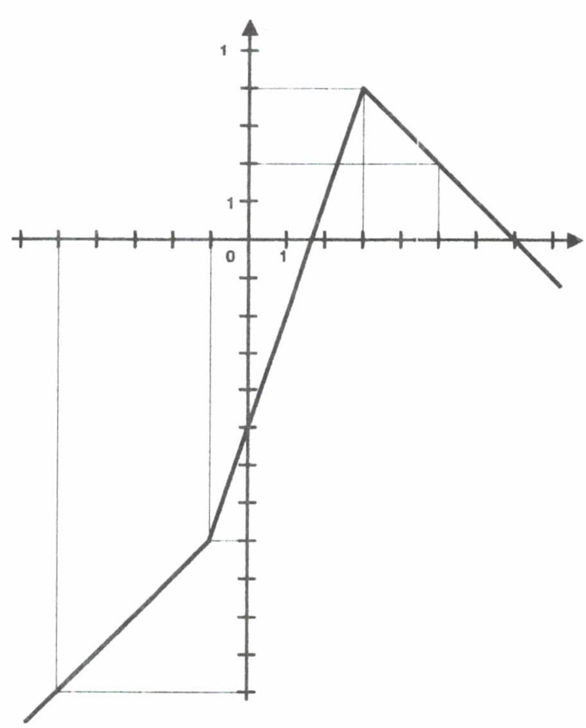


$h(x) = \left| x + 1 \right| - 2 \left| 3 - x \right|$

Si $x < -1$: $h1(x) = x - 7$

Si $-1 < x < 3$: $h2(x) = 3x - 5$

Si $x > 3$: $h3(x) = -x + 7$



EQUATIONS DE DROITES

Objectif: *Equations de droite passant par deux points, parallèles / perpendiculaire à une droite donnée et passant par un point, ... etc ...*

1°/ Equation de la droite (AB) :

Point A(2 ; 7)
Point B(-2 ; -3)

$$\begin{cases} 2a + b = 7 \\ -2a + b = -3 \end{cases}$$

En résolvant ce système, on obtient :

$y = 2{,}5x + 2$

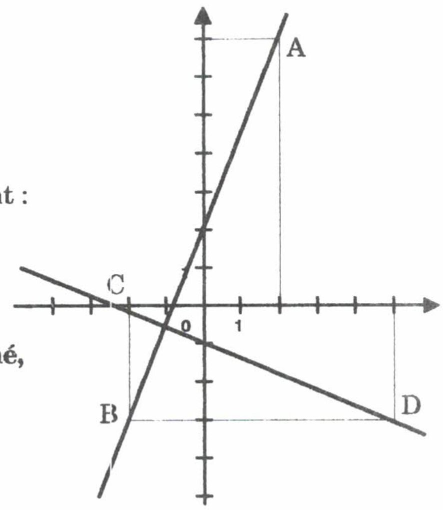
Equation de la droite (CD) :

Point C(-2,5 ; 0)
Point D(5 ; -3)

$$\begin{cases} -2{,}5a + b = 0 \\ 5a + b = -3 \end{cases}$$

En résolvant ce système, on obtient :

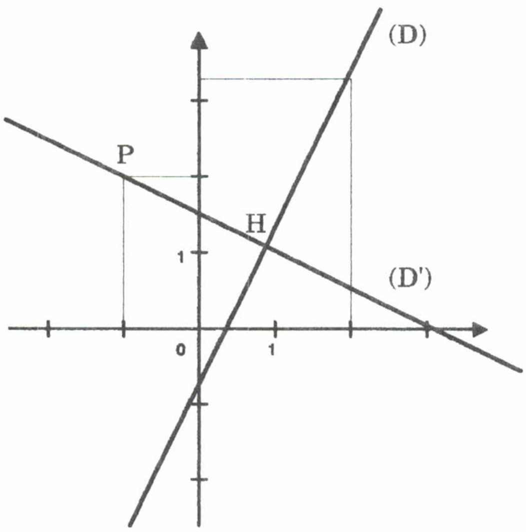
$y = -0{,}4x - 1$



Conclusion :

Comme -0,4 x 2,5 = -1 les deux droites sont, dans un repère orthonormé, perpendiculaires.

2°/



Equation de la droite (D') :

$$\begin{cases} 2a = -1 \\ -a + b = 2 \end{cases}$$

On obtient :

$y = -0{,}5x + 1{,}5$

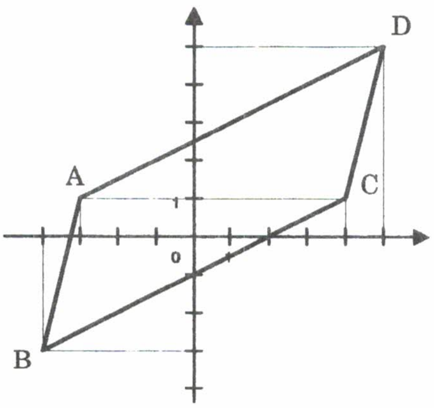
Coordonnées du point H :

$$\begin{cases} y = 2x - 2/3 \\ y = -0{,}5x + 1{,}5 \end{cases}$$

En résolvant ce système, on obtient :

H (13/15 ; 16/15)

3°/



Equation de la droite (AB) :

$$\begin{cases} -3a + b = 1 \\ -4a + b = -3 \end{cases}$$

On obtient :

$y = 4x + 13$

Equation de la droite (BC) :

$$\begin{cases} -4a + b = -3 \\ 4a + b = 1 \end{cases}$$

On obtient :

$y = 0{,}5x - 1$

Equation de la droite (CD) :

$$\begin{cases} a = 4 \\ 4a + b = 1 \end{cases}$$

On obtient :

$y = 4x - 15$

Equation de la droite (AD) :

$$\begin{cases} a = 0{,}5 \\ -3a + b = 1 \end{cases}$$

On obtient :

$y = 0{,}5x + 2{,}5$

Coordonnées du point D pour que ABCD soit un parallélogramme :

$$\begin{cases} y = 0{,}5x + 2{,}5 \\ y = 4x - 15 \end{cases}$$

On trouve :

D (5 ; 5)

PROBLEMES

FON 3

1°/ Soit x la diminution. Cette diminution x est naturellement limitée à l'intervalle [0 ; 4] car la largeur ne peut diminuer de plus de 4 cm !

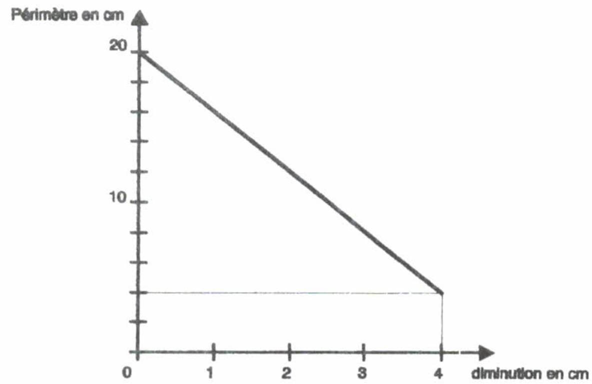
Soit P le périmètre du rectangle :

$$P = 2(6 - x + 4 - x)$$

ou

$$\mathbf{P = 20 - 4x}$$

Le périmètre est donc une fonction affine de la diminution x.



2°/Soit x le nombre de Km à parcourir :

Agence A : $\mathbf{A(x) = 2x}$

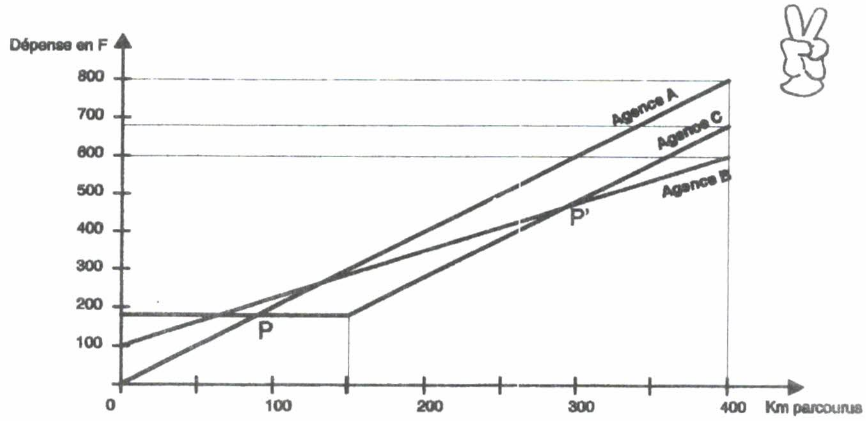
Agence B : $\mathbf{B(x) = 1{,}25x + 100}$

Agence C :

si $x < 150$: $\mathbf{C1(x) = 180}$

si $x > 150$: $C2(x) = 180 + 2(x - 150)$

ou $\mathbf{C2(x) = 2x - 120}$



Coordonnées des points d'intersection :

Point P :

$2x = 180$

$x = 90$

Point P' :

$2x - 120 = 1{,}25x + 100$

$0{,}75x = 220$

$x = 293$

Conclusion :

si $0 < x < 90$: agence A **si $90 < x < 293$: agence C**

si $293 < x < 400$: agence B

3°/ Soit x le volume des commandes en ECU et R la ristourne cumulée correspondante :

Si $x \in [0 ; 50\,000]$:

$\mathbf{R1(x) = 0{,}02x}$

si $x \in [50\,000 ; 250\,000]$:

$R2(x) = 1\,000 + (x - 50\,000) \times 0{,}03$

ou $\mathbf{R2(x) = 0{,}03x - 500}$

si $x \in [250\,000 ; 500\,000]$:

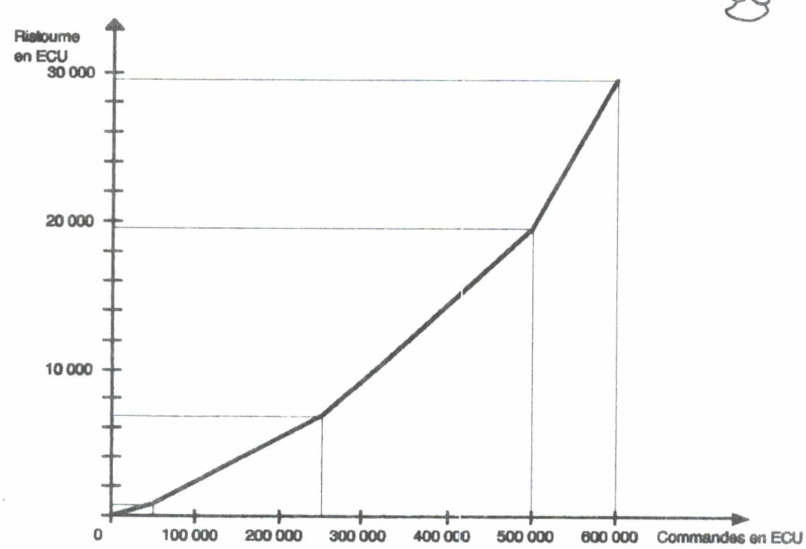
$R3(x) = 1\,000 + 6\,000 + (x - 250\,000) \times 0{,}05$

ou $\mathbf{R3(x) = 0{,}05x - 5\,500}$

si $x \in [500\,000 ; 600\,000]$:

$R4(x) = 7\,000 + 12\,500 + (x - 500\,000) \times 0{,}10$

ou $\mathbf{R4(x) = 0{,}1x - 30\,500}$



Ristourne accordée au client français :

700 000 FF = 97 222 ECU   R = 97 222 x 0,03 - 500 = 2 419 ECU   soit **17 400 FF**

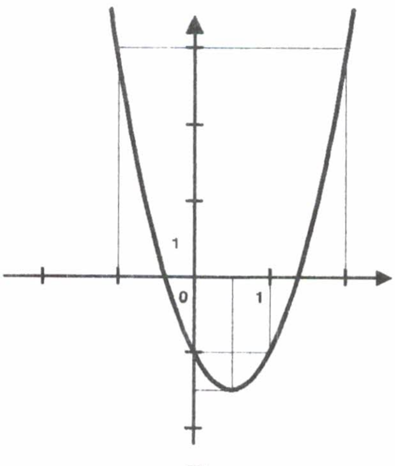
Montant des commandes du client italien :

11 200 000 lires = 7 777 ECU   x = (7 777 + 5 500) / 0,05 = 265 540 ECU   soit **382 377 600 lires.**

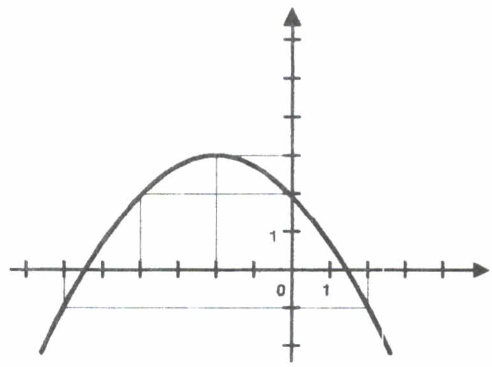
REPRESENTATIONS GRAPHIQUES

FON 4

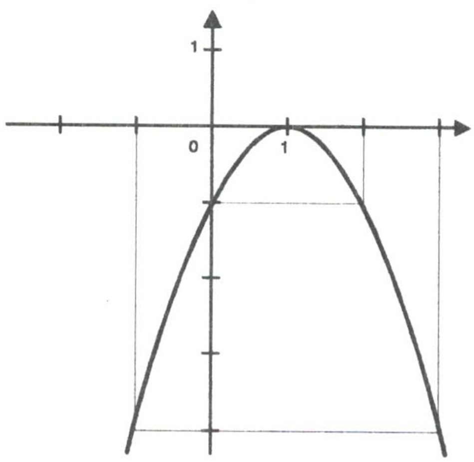
$f(x) = 2x^2 - 2x - 1$
minimum(0,5 ; -1,5)



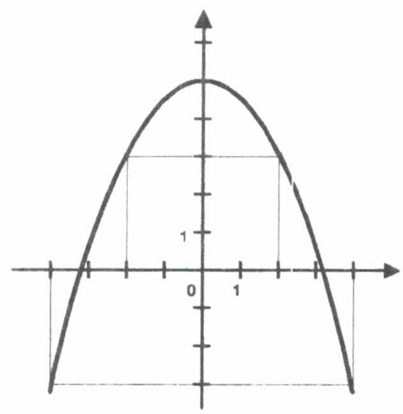
$g(x) = -0{,}25x^2 - x + 2$
maximum(-2 ; 3)



$h(x) = -(x - 1)^2$
maximum(1 ; 0)



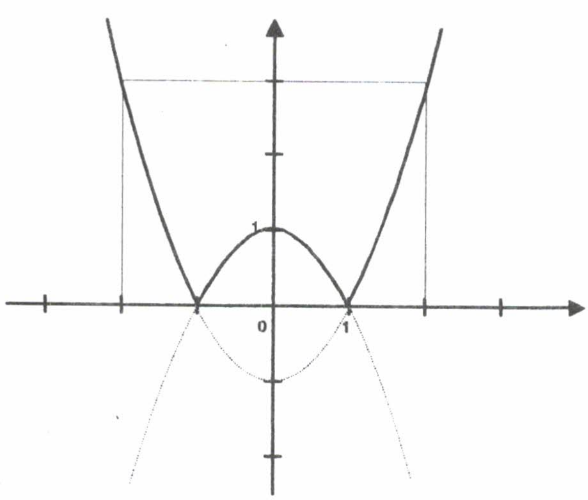
$i(x) = 5 - x^2/2$
maximum(0 ; 5)



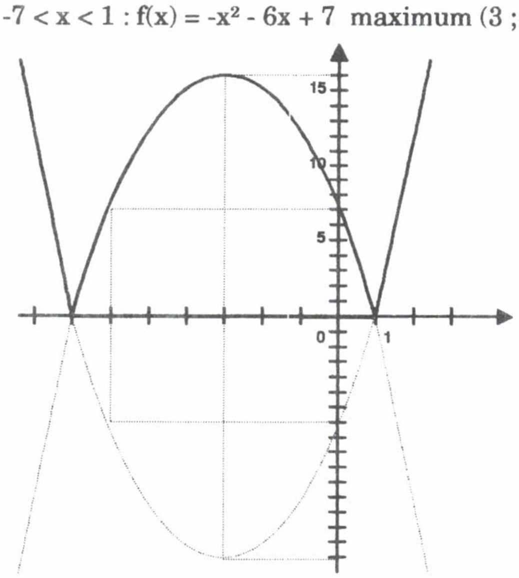
VALEURS ABSOLUES

FON 4

$f(x) = |x^2 - 1|$
ou
si $x < -1$ ou $x > 1$: $f(x) = x^2 - 1$ minimum (0 ; -1)
si $-1 < x < 1$: $f(x) = -x^2 + 1$ maximum (0 ; 1)

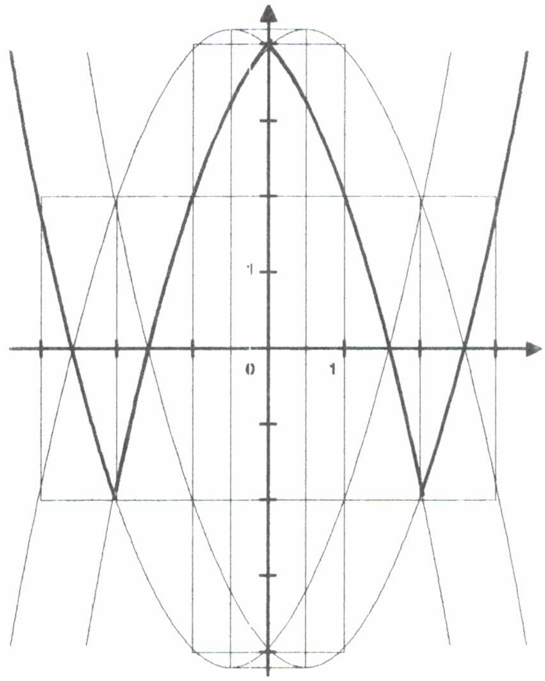


$g(x) = |x^2 + 6x - 7|$
ou
si $x < -7$ ou $x > 1$: $f(x) = x^2 + 6x - 7$ minimum (3 ; -16)
si $-7 < x < 1$: $f(x) = -x^2 - 6x + 7$ maximum (3 ; 2)



$h(x) = \left|x^2 - 4\right| - \left|x\right|$

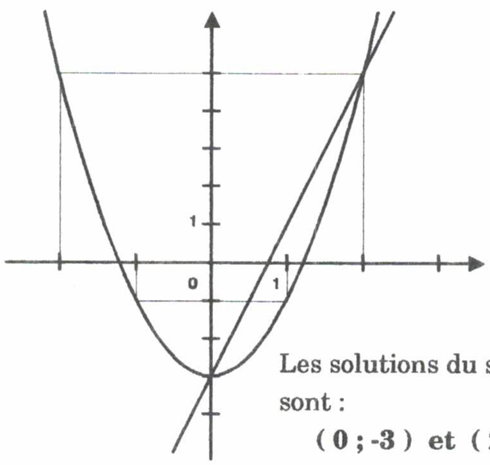
x	$-\infty$	-2	0	2 $+\infty$
$\lvert x \rvert$	$-x$	$-x$	x	x
$\lvert x^2 - 4 \rvert$	$x^2 - 4$	$-x^2 + 4$	$-x^2 + 4$	$x^2 - 4$
h(x)	$x^2 + x - 4$	$-x^2 + x + 4$	$-x^2 - x + 4$	$x^2 - x - 4$
	max(-1/2 ; -17/4)	min(1/2 ; 17/4)	min(-1/2 ; 17/4)	max(1/2 ; -17/4)



SYSTEMES

FON 4

$$\begin{cases} 2x^2 - y = 3 \\ 2x - 0,5y = 1,5 \end{cases}$$

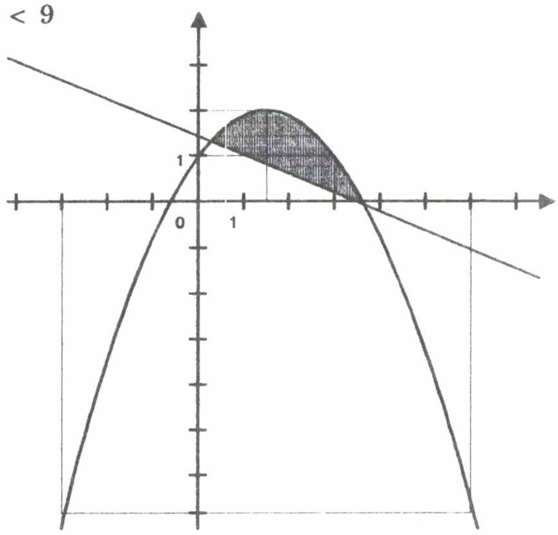


Les solutions du système sont :

(0 ; -3) et (2 ; 5)

Attention : les signes d'inéquation manquent dans l'énoncé de la première édition. Le système est :

$$\begin{cases} x + 2y > 3,5 \\ 4x^2 - 12x + 9y < 9 \\ x \text{ et } y \in \mathbb{N} \end{cases}$$



La solution entière est :

(2 ; 1)

EQUATIONS

FON 4

a/

A(0;0) B(1;-1) C(2;0) $\begin{cases} a \times 0^2 + b \times 0 + c = 0 \\ a \times 1^2 + b \times 1 + c = -1 \\ a \times 2^2 + b \times 2 + c = 0 \end{cases}$

Soit à résoudre :

$$\begin{cases} c = 0 \\ a + b + c = -1 \\ 4a + 2b + c = 0 \end{cases}$$

La solution est a = 1 ; b = -2 et c = 0.

La parabole a pour équation :

$$\mathbf{y = x^2 - 2x}$$

b/

A(-2;21) B(1;0) C(3;16) $\begin{cases} a \times (-2)^2 + b \times (-2) + c = 21 \\ a \times 1^2 + b \times 1 + c = 0 \\ a \times 3^2 + b \times 3 + c = 16 \end{cases}$

Soit à résoudre :

$$\begin{cases} 4a - 2b + c = 21 \\ a + b + c = 0 \\ 9a + 3b + c = 16 \end{cases}$$

La solution est a = 3 ; b = -4 et c = 1.

La parabole a pour équation :

$$\mathbf{y = 3x^2 - 4x + 1}$$

c/

M(3;-2,5) " P(2,-2) $\begin{cases} -b / 2a = 3 \\ (4ac - b^2)/4a = -2,5 \\ a \times 2^2 + b \times 2 + c = -2 \end{cases}$

Soit à résoudre :

$$\begin{cases} 6a + b = 0 \\ 4ac - b^2 + 10a = 0 \\ 4a + 2b + c = -2 \end{cases}$$

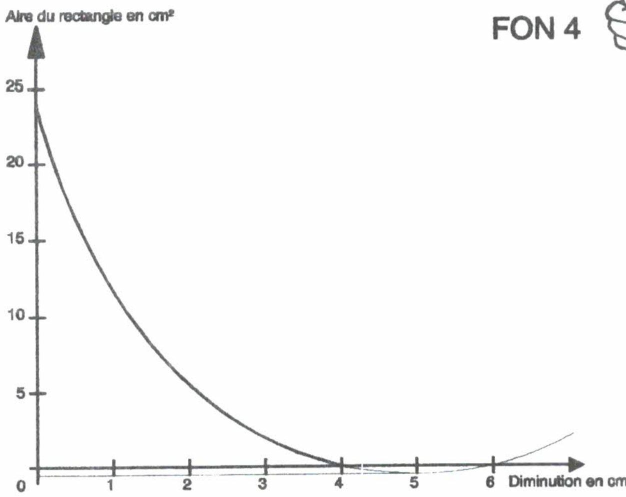
La solution est a = 1/2 ; b = -3 et c = 2.

La parabole a pour équation :

$$\mathbf{y = x^2/2 - 3x + 2}$$

LE RECTANGLE

FON 4



Soit x la diminution et A(x) l'aire du rectangle :

$A(x) = (6 - x)(4 - x)$

ou

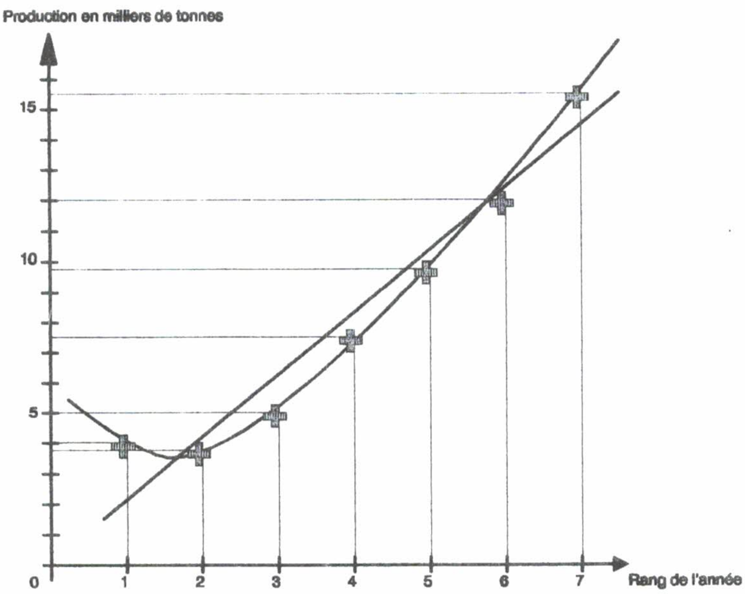
$\mathbf{A(x) = x^2 - 10x + 24}$

avec $0 < x < 4$

point minimum (5 ; -1)

AJUSTEMENTS

FON 4



Ajustement linéaire à main levée :

P(2 ; 4) P'(7 ; 14) $\begin{cases} 2a + b = 4 \\ 7a + b = 14 \end{cases}$

La solution de ce système est a = 2 et b = 0.

L'équation de la droite d'ajustement linéaire est donc:

$y = 2x$

L'an 2 000 correspond au rang x = 15 soit une production possible de **30 000 tonnes**.

Ajustement parabolique :

A(1 ; 4) B(3 ; 5) C(6 ; 12) $\begin{cases} a + b + c = 4 \\ 9a + 3b + c = 5 \\ 36a + 6b + c = 12 \end{cases}$

La solution de ce système est a = 11/30 ; b = -29/30 et c = 4,6. L'équation de la parabole est donc :

$y = 11/30x^2 - 29/30x + 4,6$

En l'an 2 000 la production serait de **72 600 tonnes**.

ON EMBAUCHE

FON 4

1°/ Soit x le nombre d'ouvriers à embaucher ou à licencier et B(x) le bénéfice total journalier :

$B(x) = (10\,000 + 20x)(15 - 0,015x)$

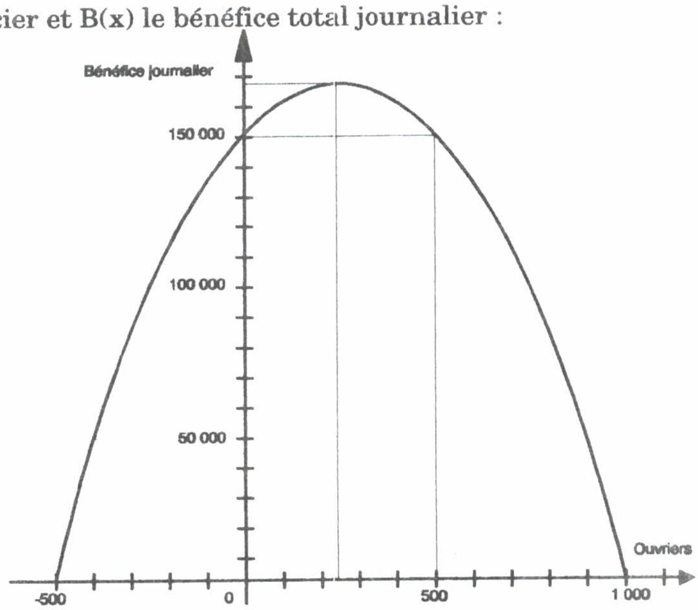
ou

$\mathbf{B(x) = -0,3x^2 + 150x + 150\,000}$

maximum (250 ; 168 750)

2°/ Les solutions de l'équation B(x) = 0 sont x = -500 et x' = 1000 (avec $\Delta = 202\,500$).
L'ensemble de définition de la fonction B(x) est donc **] -500 ; 1 000]**

3°/ Graphique :



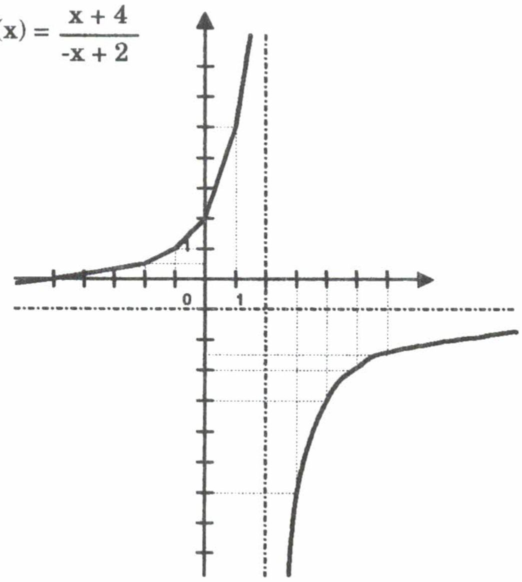
4°/ Le bénéfice maximum sera obtenu pour **une embauche de 250 ouvriers**.

REPRESENTATIONS GRAPHIQUES

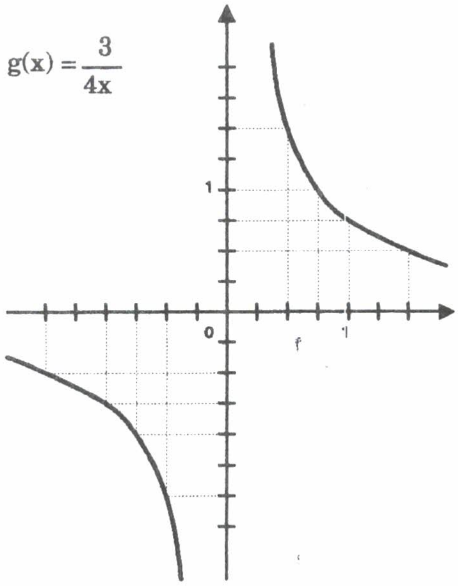
FON 5

Objectif: *Tout sur la fonction homographique.*

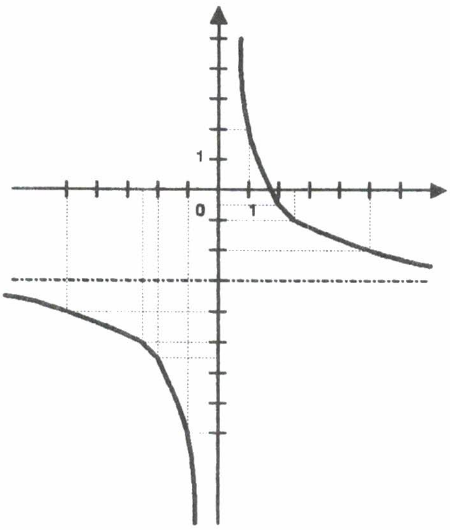
$f(x) = \dfrac{x + 4}{-x + 2}$



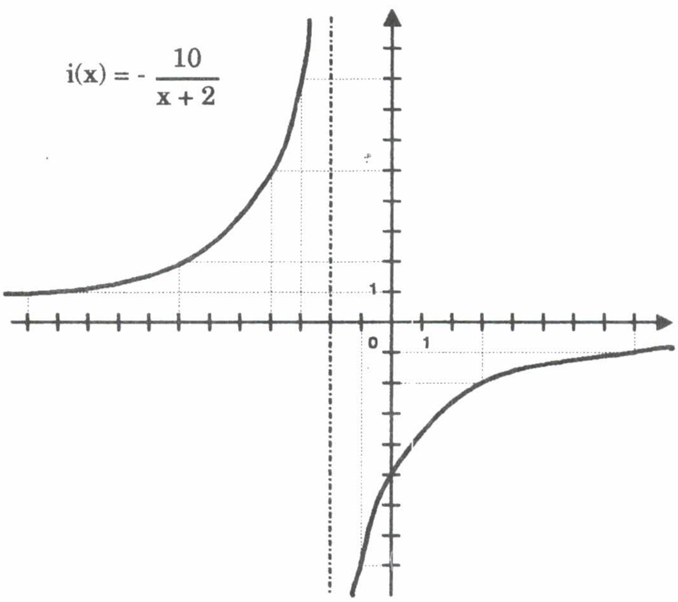
$g(x) = \dfrac{3}{4x}$



$h(x) = \dfrac{5}{x} - 3$



$i(x) = - \dfrac{10}{x + 2}$



EQUATIONS

FON 5

$\begin{cases} xy = 6 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$

$\begin{cases} y = 6/x \\ 2x - 6/x = 4 \end{cases}$

$\begin{cases} y = 6/x \\ 2x^2 - 4x - 6 = 0 \end{cases}$

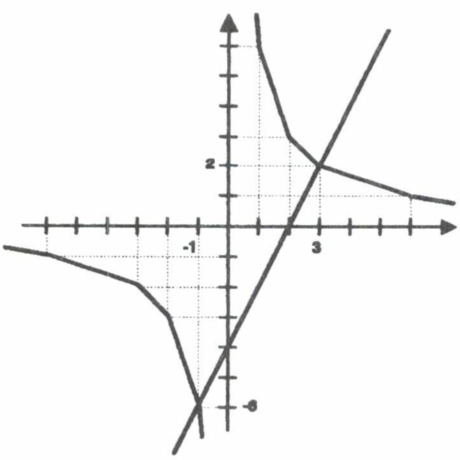
$\begin{cases} y = 6/x \\ x^2 - 2x - 3 = 0 \end{cases}$

$\Delta = 16$

x = 3 et y = 2

ou

x' = -1 et y' = -6



$\begin{cases} 3y + x = 5 \\ xy = 2\,(y - 3) \end{cases}$

$\begin{cases} 3y + x = 5 \\ y = -6\,/\,(x - 2) \end{cases}$

$\begin{cases} -18\,/\,(x - 2) + x = 5 \\ y = -6\,/\,(x - 2) \end{cases}$

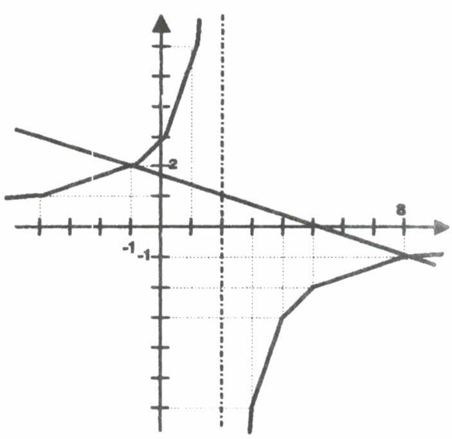
$\begin{cases} x^2 - 7x - 8 = 0 \\ y = -6\,/\,(x - 2) \end{cases}$

$\Delta = 81$

x = 8 et y = -1

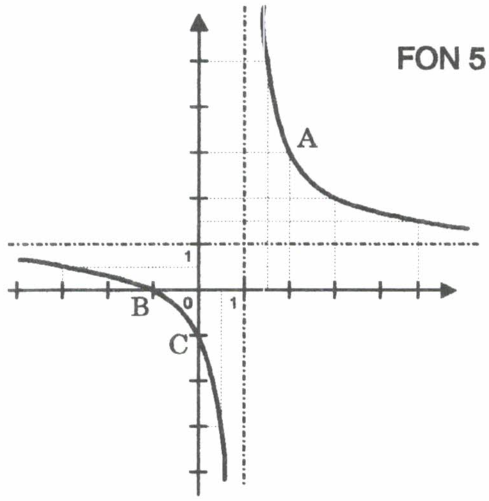
ou

x' = -1 et y' =2



QUELLE HYPERBOLE !

FON 5



Déterminons les coefficients a, b, c et d :

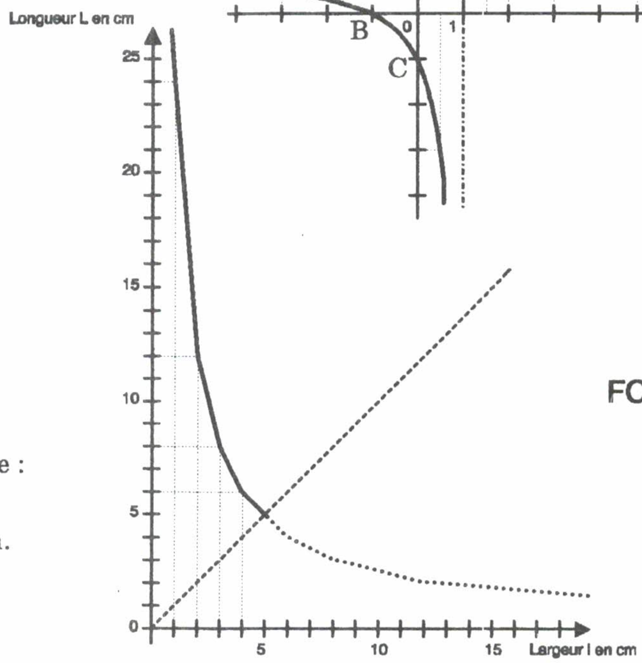
$$\begin{cases} A\,(2\,;3) & \dfrac{2a+b}{2c+d} = 3 \\ B\,(-1\,;0) & \dfrac{-a+b}{-c+d} = 0 \\ C\,(0\,;-1) & \dfrac{b}{d} = -1 \end{cases}$$

Par substitution, on trouve a = b = c = -d.
Une solution sera :

$$\mathbf{f(x)} = \frac{\mathbf{x+1}}{\mathbf{x-1}}$$

LE RECTANGLE (Ter)

FON 5



Soit L la longueur et l la largeur du rectangle :
L = 24 / l avec L > l
Le rectangle sera un carré pour **L = l = 4,9 cm**.

CAPITAL

FON 5

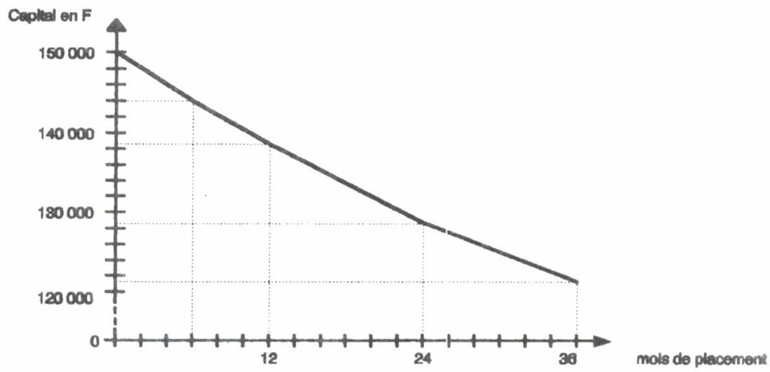
Soit C le capital placé en francs et m la durée du placement en mois :

$$C + \frac{C \times 8 \times m}{1\,200} = 150\,000$$

ou

$$C = \frac{150\,000}{1 + m/150}$$

m	6	12	24	36
C	144 000	139 000	129 000	121 000



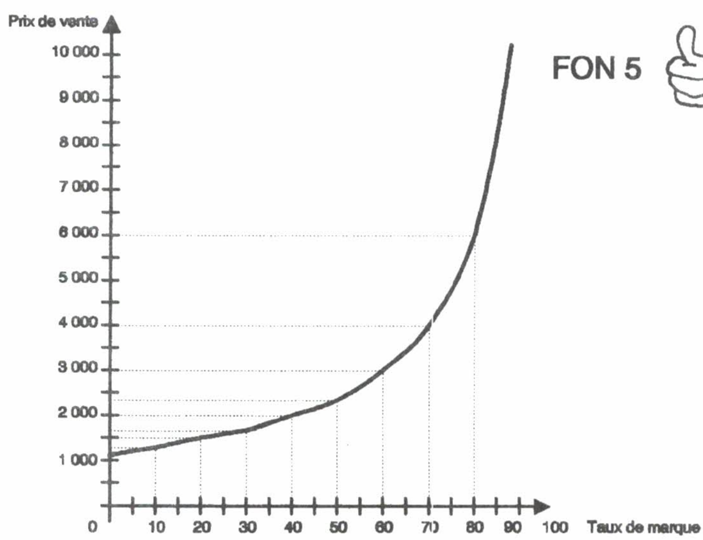
MARGE

FON 5

On appelle P le prix de vente et t le taux de marque.

$$P = \frac{120\,000}{100 - t}$$

(Il semble plus intéressant de représenter la fonction sur l'ensemble de l'intervalle [0 ; 100]).



DESIGN

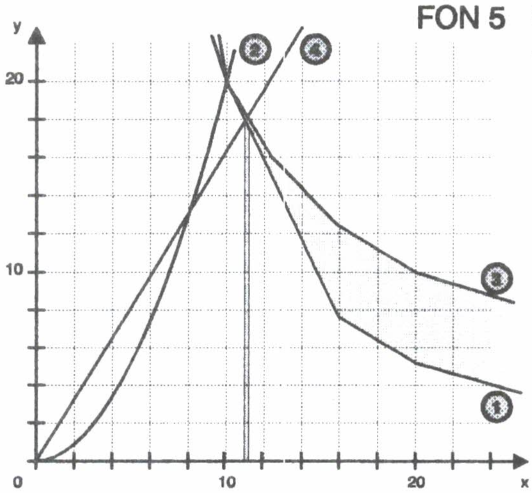
FON 5

Soit x la grande largeur de la boîte, x/2 sa petite largeur et y sa hauteur :

Contenance = 1 litre.	$x \times x/2 \times y \geqslant 1\,000$
Surface de base supérieure à deux fois et demi la hauteur.	$x \times x/2 \geqslant 2{,}5y$
La face principale ne doit pas dépasser 200 cm².	$x \times y \leqslant 200$
Proportion idéale : $\Delta = 5$ n = 1,618 (nb d'or)	$x / y = 1{,}618$

On représente donc les fonctions :

1 - $y = 2000 / x^2$
2 - $y = x^2 / 5$
3 - $y = 200 / x$
4 - $y = 1{,}618x$

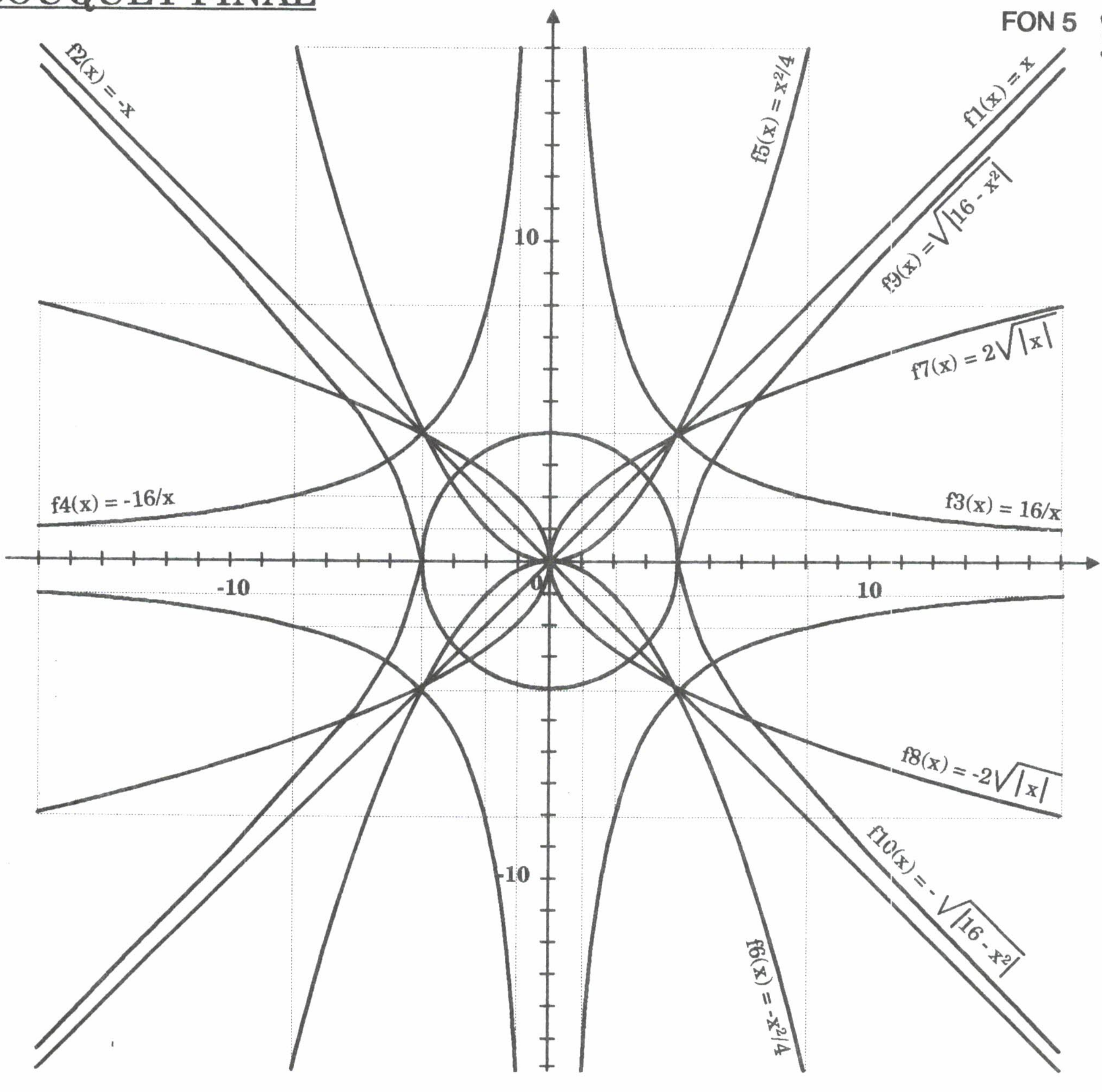


On obtient graphiquement la fourchette :

10,5 ⩾ x ⩾ 11

BOUQUET FINAL

FON 5



LES TOURTEAUX

FON 6

Objectif: *L'élève doit mobiliser, ici, toutes ses connaissances sur les fonctions. De plus, il devra lire attentivement l'énoncé pour en dégager les renseignements utiles. Une partie des données étant d'ordre graphique, l'élève devra arrondir judicieusement ses résultats.*

1°/ Coût salarial :

La fiche signalétique de l'entreprise ALIBETAIL nous indique une production annuelle de 10 000 tonnes soit environ 800 tonnes par mois.

On lit sur le graphique (compte tenu d'une production mensuelle de 800 tonnes) :

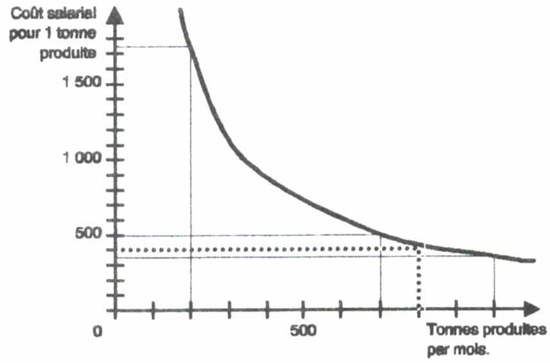
Coût salarial pour 1 tonne = **400 F**

Soit un coût salarial total de :

400 x 800 = **320 000 F**.

La même fiche signalétique indique 35 salariés. On obtient donc un coût salarial unitaire de :

320 000 / 35 = **9 100 F**.



Recherche de la fonction $y1(x) = \dfrac{ax + b}{cx + d}$:

A(200 ; 1 750) $\begin{cases} (200a + b) / (200c + d) = 1750 \\ (500a + b) / (500c + d) = 700 \\ (1\,000a + b) / (1000c + d) = 350 \end{cases}$ ou $\begin{cases} 200a + b - 350\,000c - 1750d = 0 \\ 500a + b - 350\,000c - 700d = 0 \\ 1\,000a + b - 350\,000c - 400d = 0 \end{cases}$

B(500 ; 700)

C(1 000 ; 350)

En soustrayant membre à membre, on obtient :

$\begin{cases} 300a + 1050d = 0 \\ 500a + 350d = 0 \end{cases}$

Ce système a pour solution a = 0 et d = 0. La fonction f1(x) est donc de la forme f(x) = a / x. calculons a :

A(200 ; 1 750) a / 200 = 1 750 soit a = 350 000.

La fonction est :

y1(x) = 350 000 / x

2°/ Le coût d'achat unitaire :

x étant toujours la production mensuelle :

si 0 < x < 400 :

A(400 ; 342 000) 400a = 342 000 soit a = 855

On a donc Y2(x) = 855x et y2(x) = 855x / 2,5x

soit : **y2(x) = 342**

si 400 < x < 800 :

A(400 ; 342 000) $\begin{cases} 400a + b = 342\,000 \\ 800a + b = 666\,000 \end{cases}$

B(800 ; 666 000)

On obtient Y2(x) = 810x + 18 000

soit : **y2(x) = (324x + 7 200) / x**

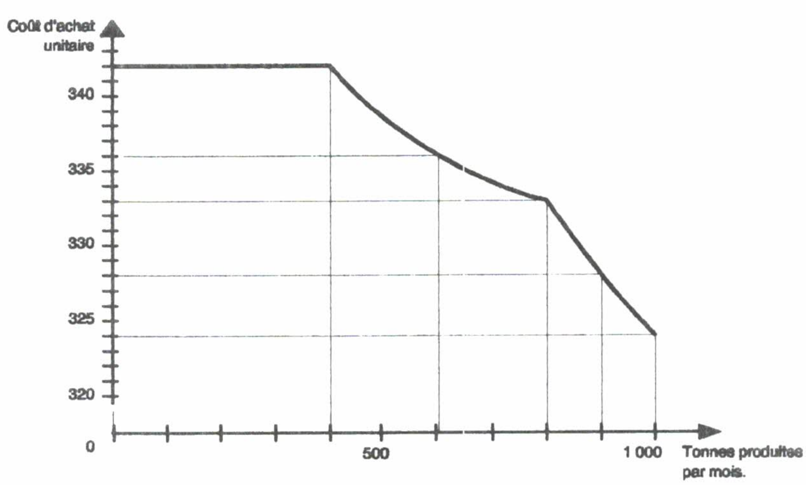
si 800 < x < 1 000 :

B(800 ; 166 000) $\begin{cases} 800a + b = 166\,000 \\ 1\,000a + b = 810\,000 \end{cases}$

C(1 000 ; 810 000)

On obtient Y2(x) = 720x + 90 000

soit **y2(x) = (288x + 36 000) / x**



Il manque des données pour résoudre les deux dernières parties de la question (pourcentages par tranche et prix d'achat brut des arachides). Elles ne sont pas indispensables pour la suite du dossier.

3°/ Coût de fabrication :

La fonction est du type $f(x) = ax^2 + bx + c$. Déterminons a, b et c :

$$\begin{array}{ll} A(0\,;250) & \\ B(500\,;750) & \\ C(900\,;1\,375) & \end{array} \quad \begin{cases} c = 250 \\ 500^2a + 500b + c = 750 \\ 900^2a + 900b + c = 1\,375 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 250\,000a + 500b = 500 \\ 810\,000a + 900b = 1\,123 \end{cases}$$

Résolution du système :

$$\begin{cases} 2\,250\,000a + 4\,500b = 4\,500 \\ -4\,050\,000a - 4\,500b = -5\,625 \end{cases}$$
$$-1\,800\,000a = -1125$$
$$a = 0{,}000\,625$$

$$\begin{cases} 20\,250\,000a + 40\,500b = 40\,500 \\ -20\,250\,000a - 22\,500b = -28\,125 \end{cases}$$
$$18\,000b = 12\,375$$
$$b = 0{,}6875$$

soit $\mathbf{y3(x) = 0{,}000\,625x^2 + 0{,}6875x + 250}$

4°/ Le stockage :

x est toujours la production mensuelle :

si $0 < x < 400$ $\mathbf{f4(x) = 40\,000 / x}$ et si $400 < x < 1\,000$ $\mathbf{f4(x) = 90\,000 / x}$

5°/ Coût de production :

Constitution du coût de production pour une production mensuelle de 900 tonnes de tourteaux :

Salaires :

$y1(900) = 350\,000 / 900 = 390$ F pour 1 tonne

soit : $390 / 40 =$ **9,75 F** pour 25 Kg.

Achat :

$y2(900) = (288 \times 900 + 36\,000) / 900 = 328$ F

soit $328 / 40 =$ **8,20 F**.

Fabrication :

$y3(900) = 0{,}000\,625 \times 900^2 + 0{,}6875 \times 900 + 250$

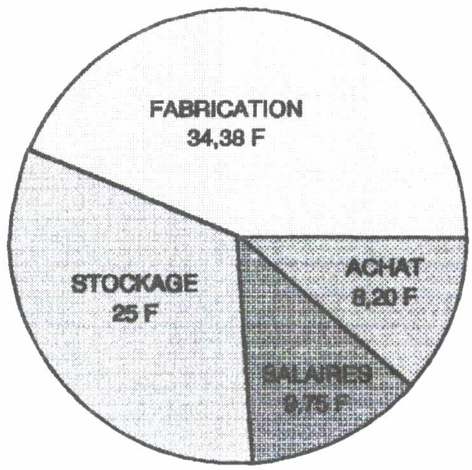
$= 1\,375$ F

soit $1\,375 / 40 =$ **34,38 F.**

Stockage :

$y4(900) = 90\,000 / 900 = 1\,000$ F

soit $1\,000 / 40 =$ **25 F.**



Fonction "Coût de production" :

Soit x la production mensuelle :

$$y(x) = y1(x) + y2(x) + y3(x) + y4(x)$$

Si $0 < x < 400$

$$y(x) = 350\,000 / x + 342 + 0{,}000\,625x^2 + 0{,}6875x + 250 + 40\,000 / x$$

ou

$$\mathbf{y(x) = (0{,}000625x^3 + 0{,}6875x^2 + 592x + 390\,000) / x}$$

Si $400 < x < 800$

$$y(x) = 350\,000 / x + (324x + 7\,200) / x + 0{,}000\,625x^2 + 0{,}6875x + 250 + 90\,000 / x$$

ou

$$\mathbf{y(x) = (0{,}000625x^3 + 0{,}6875x^2 + 574x + 447\,200) / x}$$

Si $800 < x < 1\,000$

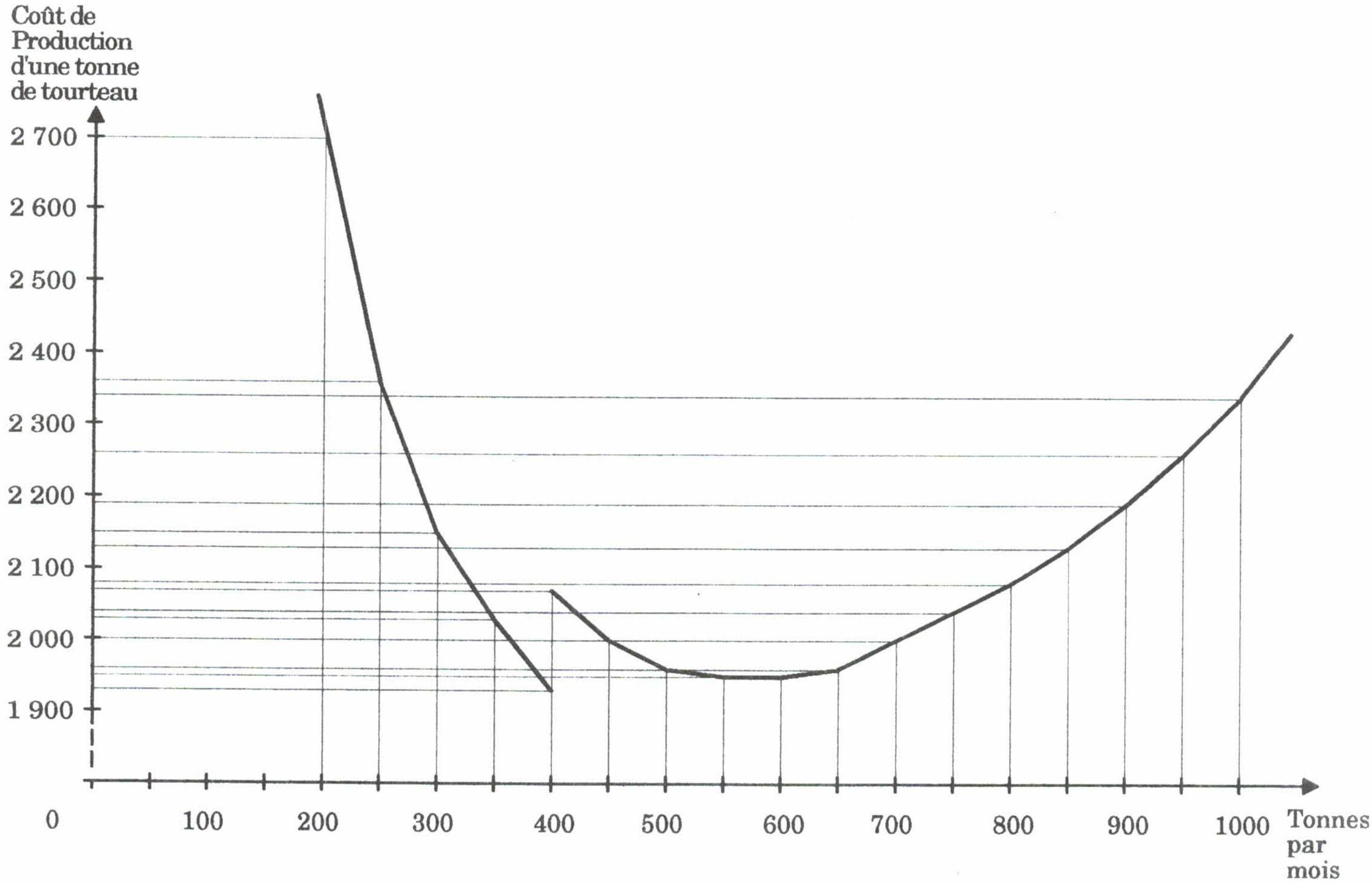
$$y(x) = 350\,000 / x + (288x + 36\,000) / x + 0{,}000\,625x^2 + 0{,}6875x + 250 + 90\,000 / x$$

ou

$$\mathbf{y(x) = (0{,}000625x^3 + 0{,}6875x^2 + 538x + 476\,000) / x}$$

Représentons graphiquement la fonction "Coût de production unitaire" en fonction du nombre de tonnes mensuelles :

x	50	100	150	200	250	300	350	399	400	450	500	550	600	650	700	750	800	850	900	950	1000
y	8 430	4 570	3 300	2 700	2 360	2 150	2 020	1 940	2 070	2 000	1 970	1 950	1 960	1 970	2 000	2 040	2 080	2 130	2 190	2 260	2 330



Calculs

$7^{3,2} = 506,19$; $7^{0,35} = 1,976$; $7^{-1,25} = 0,0878$; $7^{-6} = 8,5 \times 10^{-6}$; $\log 8 = 0,903$

$\log 100 = 2$; $\log(-3)$ n'existe pas ; $\log 10^6 = 6$; $\log 10^{-5} = -5$; $\ln 32,65 = 3,486$

$\ln 100 = 4,605$; $\ln(-5,2)$ n'existe pas ; $\ln e^4 = 4$; $\ln e^{-6} = -6$; $\ln e/2 = 0,307$

$e^{4,2} = 66,686$; $e^{12} = 162754,79$; $e^{-3} = 0,0498$; $e^{-2/3} = 0,513$; $e^{\sqrt{7}} = 14,094$

Equations

$\log x = 4 \implies$ **$x = 10000$**

$\log x = -2 \implies$ **$x = 0,01$**

$\log x = 0,2 \implies$ **$x = 1,585$**

$2 \log x = 4,25 \implies$ **$x = 133,352$**

$10^x = 30 \implies$ **$x = 1,477$**

$3^x = 14,5 \implies$ **$x = 2,434$**

$1,5^x = 6,25 \implies$ **$x = 4,52$**

$(-7)^x = 13,2 \implies$ **impossible**

$4,5^{-x} = 12,4 \implies$ **$x = -1,674$**

$\log(x+2) = \log(2x-5)$; $D =]\,2,5\,;+\omega\,[$; **$x = 7$**

$\ln(x-6) + \ln(x+1) = 0$; $D =]\,6\,;+\omega\,[$; $x - 6 = 1/x+1 \implies$ **$x = 6,14$**

$2\ln(x+2) - \ln(x+5) = 0$; $D =]-2\,;+\omega\,[$; $(x+2)^2 = x+5 \implies x^2 + 3x - 1 = 0$
on trouve **$x' = 0,303$** (ε D) et $x'' = -3,3$ qui ne convient pas

$\ln(x-1) + \ln(x+2) = \ln(4x^2 + 3x - 7)$; $D =]\,1\,;+\omega\,[$
$\implies x^2 + x - 2 = 4x^2 + 3x - 7 \implies 3x^2 + 2x - 5 = 0$
on trouve $x' = -5/3$ qui ne convient pas et $x'' = 1$ qui ne convient pas;

l'équation n'a pas de solution

$\begin{cases} x + y = 6 \\ \ln x + \ln y = 3\ln 2 \end{cases}$ x et y > 0 en remarquant que $\ln x + \ln y = \ln xy$

on obtient le système équivalent :

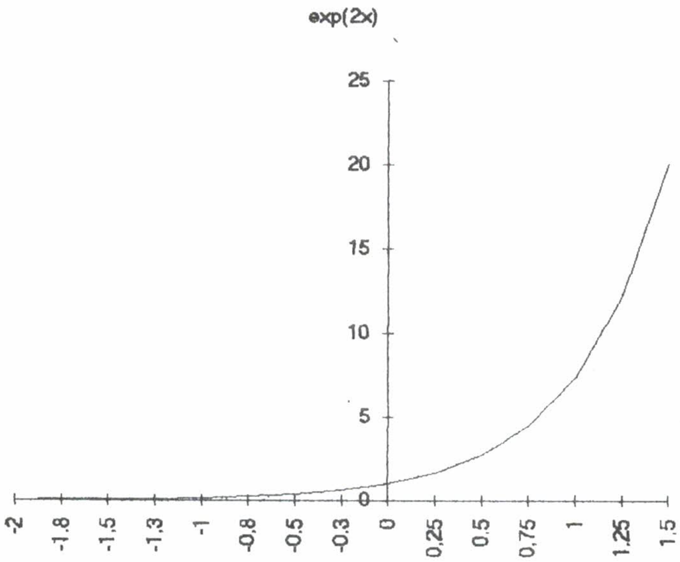
$\begin{cases} x + y = 6 \\ xy = 8 \end{cases}$ s'ils existent, x et y sont solutions de l'équation $X^2 - 6X + 8 = 0$

on trouve **$x = 4$ et $y = 2$ ou $x = 2$ et $y = 4$**

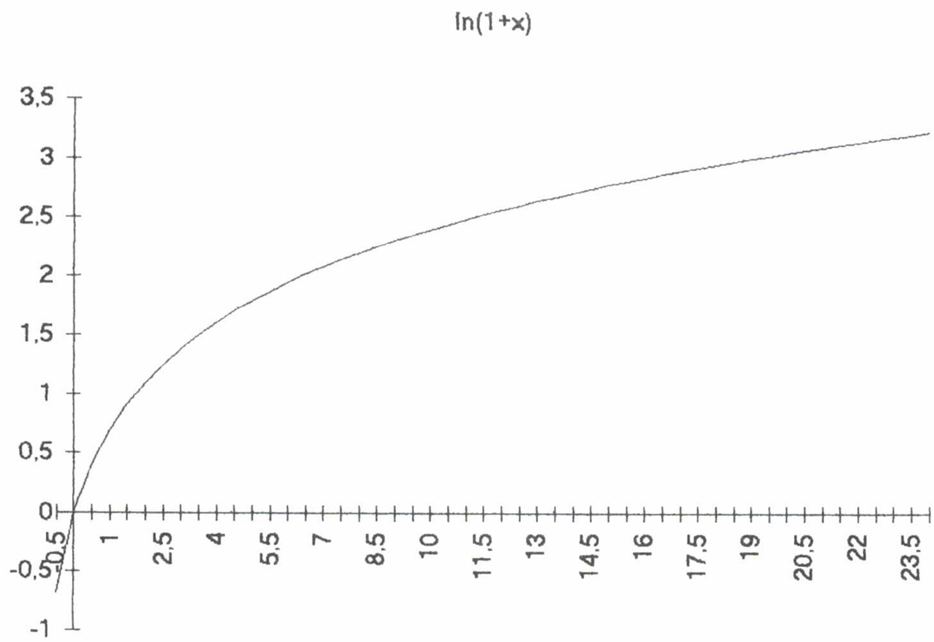
Fonctions

1) f(x) = e^{2x} ; f '(x) = 2 e^{2x} ; la dérivée est toujours positive, la fonction est croissante.

x	-2	-1	0	0,25	0,5	0,75	1	1,5
exp (2x)	0,018	0,135	1	1,649	2,718	4,48	7,39	20,08



2) f (x) = ln (1 + x) ; D =] -1 ; +ω [; f ' (x) = 1 / 1+x
f ' (x) > 0 sur D; la fonction f est croissante.



Durand

$C_n = C_0 (1 + t)^n$ ==> $150000 = 50000 (1 + 0,085)^n$ ==> $1,095^n = 3$

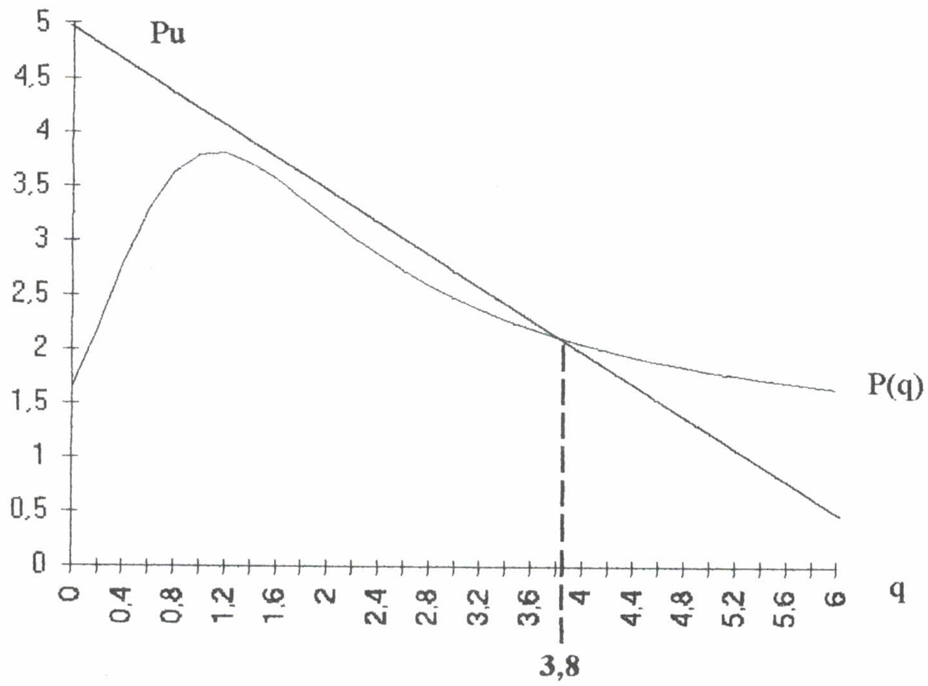
$n = \dfrac{\log 3}{\log 1,085}$ **= 13,5 ans**

En musique

1) $P (q) = e^{\frac{3q + 1}{q^2 + 2}}$; $P'(q) = \dfrac{-3q^2 - 2q + 6}{(q^2 + 2)^2} \, e^{\frac{3q + 1}{q^2 + 2}}$

La dérivée a le signe de $-3q^2 - 2q + 6$ $(q>0)$ qui est positif pour $0 < q < 1,12$

q	0		1,12		+ ω
P'(q)		+	0	-	
P(q)	1,65	↗	3,82	↘	- ω



La fabrication de la chaîne Hi fi sera bénéficiaire à partir de $3,8 \times 10^4$ unités

Photocopies

1) soit n le nombre d'années cherché :
$50000 = 120000 \times 0,88^n$ ==> 0,88n = 5/12 ==> n = 6,8 soit **n = 7 ans**

2) Le nouveau prix d'une machine identique sera $120000 \times 1,045^7 = 163\,303$ F

Pour acheter une machine plus performante, il faudra débourser 20% de plus soit une somme totale de 195 964 F.
En déduisant les 50 000 F de reprise, il reste à investir une somme de **145 964 F**

3) $145964 = 100000 \times 1,045^n$ n étant le nombre d'années

On trouve n = 8,6 soit environ **9 ans**

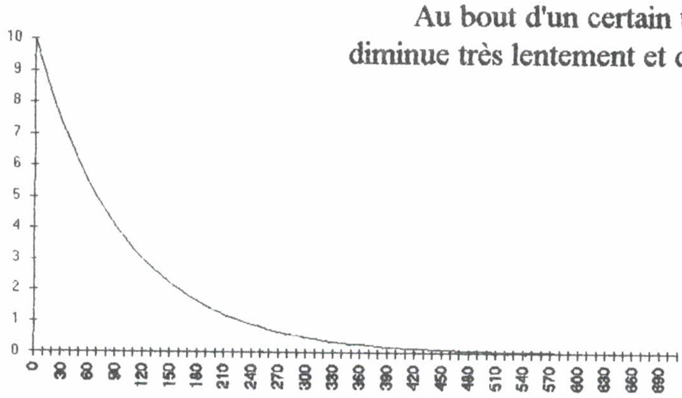
Sécheresse

1) **$V = 10 \times 0,99^x$**

2) $10 \times 0,99^x = 5$ ==> $0,99^x = 0,5$ ==> $x = \dfrac{\log 0,5}{\log 0,99} = 68,96 \simeq$ **69 m**

3) $10 \times 0,99^x = 0$ l'équation n'a pas de solution, le seau ne sera jamais entièrement vide.

Au bout d'un certain temps, le volume diminue très lentement et devient négligeable.



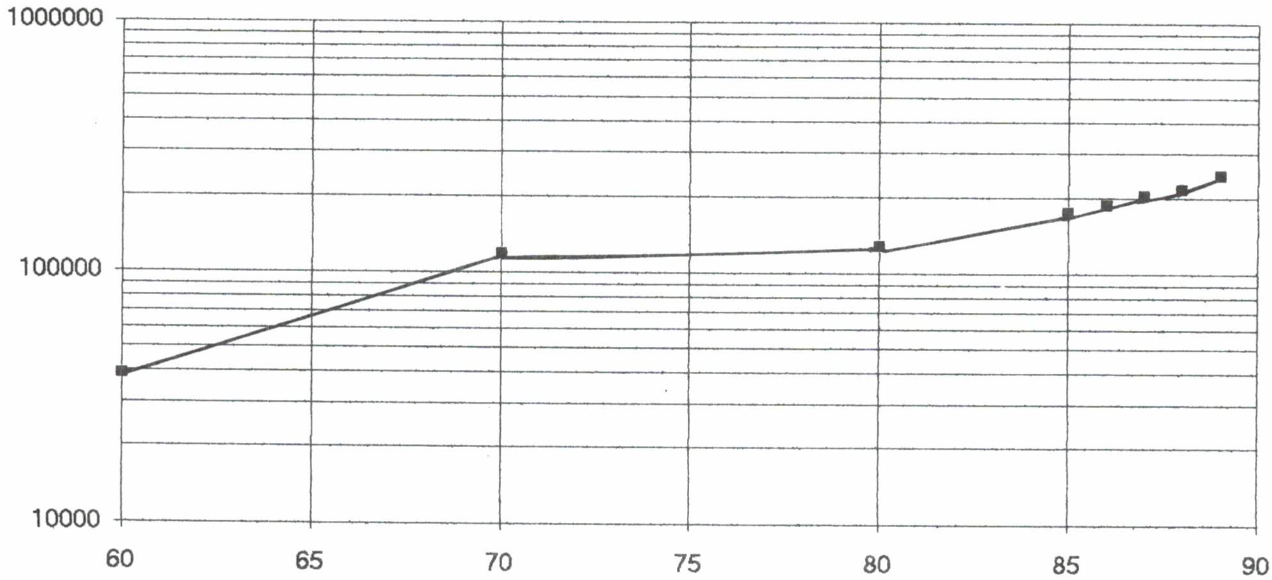
4) Soient v la vitesse du jardinier, t le taux de fuite et x la distance parcourue;
on a $t = 0,036 / v$ et $V = 10 \times (1 - t)^x = 10 \times (1 - t)^{100}$; or on veut $V = 2/3 \times 10$

d'où $2/3 \times 10 = 10\,(1 - 0,036 / v)^{100}$ soit $2 / 3 = (1 - 0,036 / v)^{100}$
ou encore $(2/3)^{1/100} = 1 - 0,036 / v$

d'où $v = \dfrac{0,036}{1 - 2/3^{\,1/100}}$ et **v = 8,9 Km/H**

Papier Semi-logarithmique

Bourses



Boum !