IREM DE LORRAINE

VECTEURS DU PLAN

Livre du Maître

© Edité et imprimé par l'**Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques** - (Université de NANCY I - Faculté des Sciences) - B.P. 239 - 54506 VANDOEUVRE-les-NANCY CEDEX
Dépôt légal : 4ème trimestre 1995
n° de la publication : 2-85406-150-0
Responsable de la publication : Le Directeur de l'IREM, Michel BONN

AVANT-PROPOS

Ce document, à l'usage du professeur, incorpore les exercices dans un plan possible de cours.

Pour assurer la cohérence de l'ensemble, nous nous sommes efforcés de donner toutes les définitions, propriétés et démonstrations. Bien entendu l'exploitation d'un tel document, en particulier l'utilité pour les élèves de certaines démonstrations, reste à l'initiative du professeur.

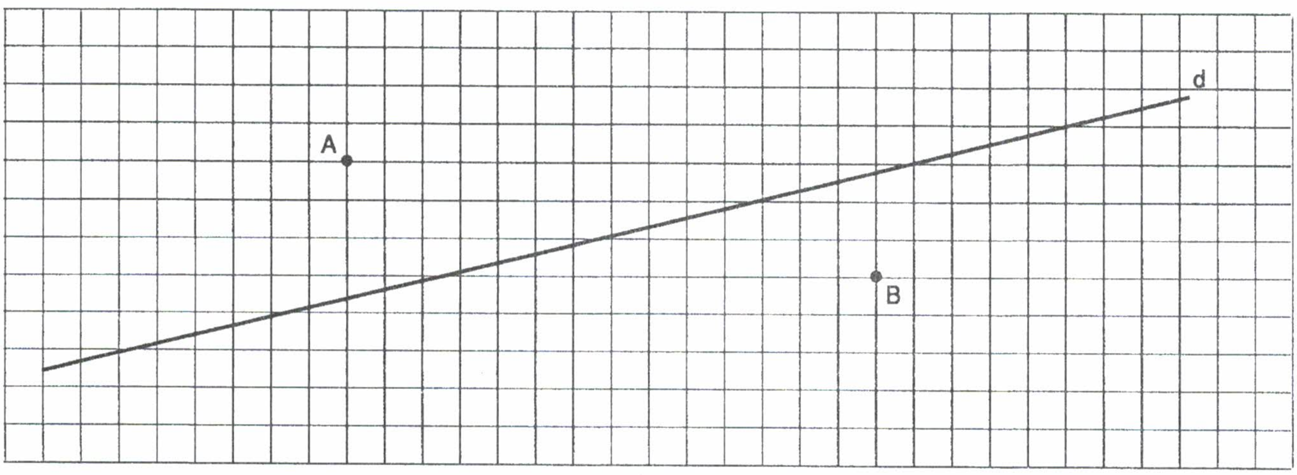
L'ensemble des exercices est regroupé dans un fichier élèves.

I - Définition des vecteurs

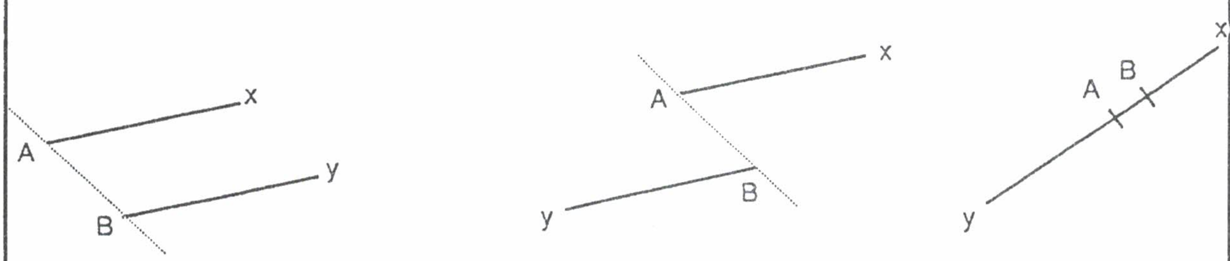
1.1 - Direction et sens

Deux droites, ou deux demi-droites sont dites de **même direction** si, et seulement si, elles sont parallèles.

Exercice 1 : Soit une droite (d) , un point A et un point B non situés sur (d) .
a) Trace une droite passant par A et de même direction que (d). Peux-tu en tracer plusieurs ?
b) Trace une demi-droite d'origine B et de même direction que (d). Peux-tu en tracer plusieurs ?



Deux demi-droites de même direction [A x) et [B y) sont dites de **même sens** si, et seulement si, l'une contient l'autre ou si [A x) et [B y) sont toutes les deux dans le même demi-plan de frontière la droite (AB).

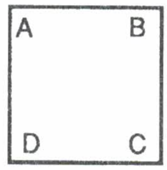


[A x) et [B y) sont de même sens

[A x) et [B y) ne sont pas de même sens

Exercice 2 : Soit un carré ABCD.
Trace la demi-droite d' origine A , de même direction et de même sens que la demi-droite [CB).
Trace la demi-droite d' origine B , de même direction et de même sens que la demi-droite [DC).
Trace la demi-droite d' origine C , de même direction et de même sens que la demi-droite [AD).
Trace la demi-droite d' origine D , de même direction et de même sens que la demi-droite [BA).
Trace la demi-droite d' origine A , de même direction et de même sens que la demi-droite [DB).
Trace la demi-droite d' origine B , de même direction et de même sens que la demi-droite [AC).
Trace la demi-droite d' origine C , de même direction et de même sens que la demi-droite [BD).
Trace la demi-droite d' origine D , de même direction et de même sens que la demi-droite [CA).

Sur ton dessin combien trouves-tu de directions différentes ?
Parmi les demi-droites que tu as dessinées, colorie un représentant de chaque direction .



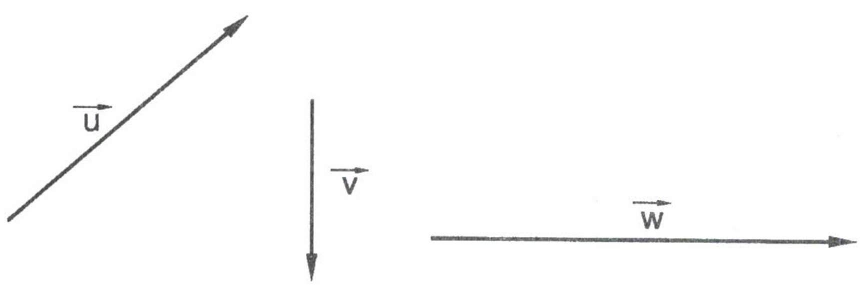
Il résulte de ce qui précède que, pour une direction donnée, on distingue deux sens possibles.

1.2 - Vecteurs non nuls

On appelle **vecteur non nul** la donnée d'une direction, d'un sens sur cette direction et d'une longueur non nulle.

Pour représenter sur un dessin des vecteurs non nuls on peut utiliser des flèches .
On retrouve dans le dessin d'une flèche :

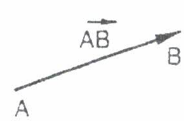
- *une direction* : *la direction de la droite qui porte la flèche ;*
- *un sens* : *le sens indiqué par la flèche ;*
- *une longueur* : *la longueur de la flèche.*



Les vecteurs sont souvent identifiés par une lettre surmontée d'une flèche : $\vec{U}$, $\vec{V}$, $\vec{W}$.

La donnée d'un couple de points (A, B) avec $A \neq B$ permet de définir un vecteur, celui :

- de direction : la direction de la droite (AB) ;
- de sens : celui de A vers B ;
- de longueur : la distance AB.



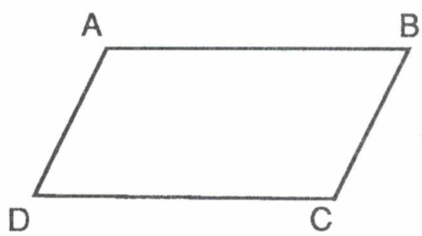
Ce vecteur est noté $\overrightarrow{AB}$ et le couple (A, B) est appelé un **représentant** du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Propriété : Deux couples formés de points distincts (A, B) et (C, D) représentent le même vecteur si, et seulement si,

- les droites (AB) et (CD) sont parallèles ;
- les demi-droites [AB) et [CD) ont même sens ;
- les longueurs AB et CD sont égales.

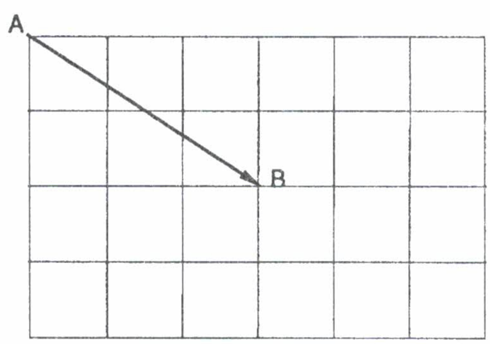
On écrit alors : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Exercice 3 : A B C D est un parallélogramme et I est le milieu de [M N]. Ecris toutes les égalités de vecteurs que tu peux trouver à partir des figures suivantes.

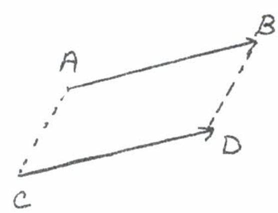


Exercice 4 : En utilisant les noeuds du quadrillage ci-dessous, trace 4 représentants du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Combien de représentants du vecteur $\overrightarrow{AB}$ pourrait-on ainsi construire ?



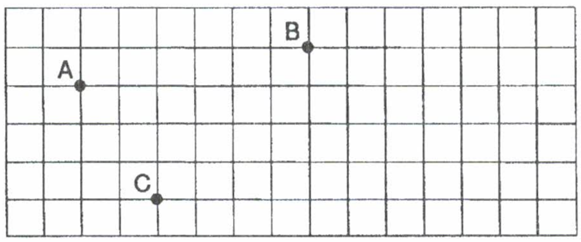
Propriété : Lorsque les droites (AB) et (CD) ne sont pas confondues, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est égal au vecteur $\overrightarrow{CD}$ si, et seulement si, ABDC est un parallélogramme.

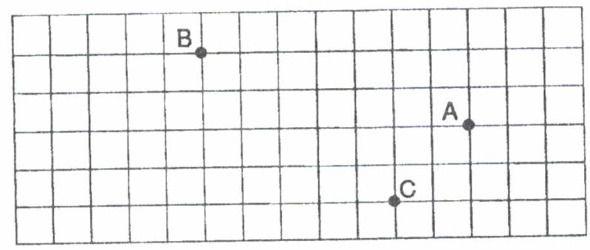


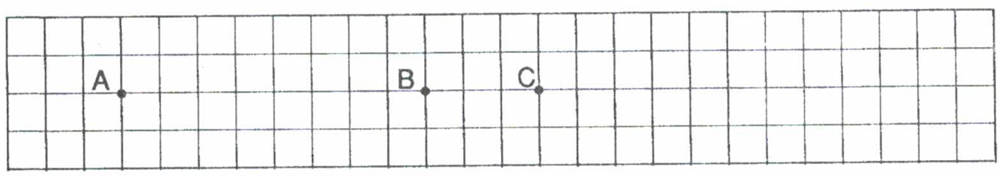
Exercice 5 : Dans le triangle ABC, A' et B' sont les milieux respectifs des côtés [BC] et [AC]. On désigne par K le point tel que $\overrightarrow{A'K} = \overrightarrow{BB'}$.

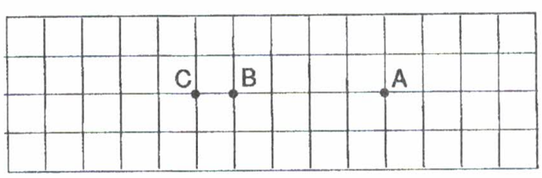
Démontre que A'CKB' est un parallélogramme.

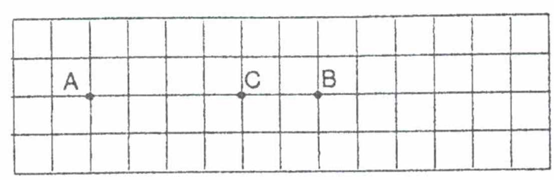
Exercice 6 : Dans chacune des figures suivantes, place un point D tel que $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$.





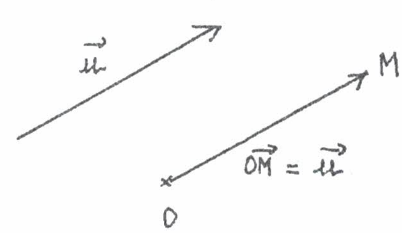






Y-a-t-il des cas où tu peux trouver plusieurs possibilités ?

Propriété : Etant donné un point O et un vecteur $\vec{u}$ non nul, il existe un point M et un seul tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.

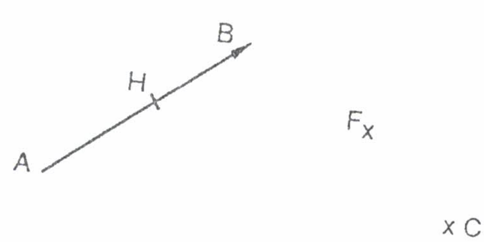


Exercice 7 : Sur le dessin ci-contre :

a) Place le point D tel que $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$.

b) Place le point E tel que $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB}$.

c) Place le point G tel que $\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{AB}$.

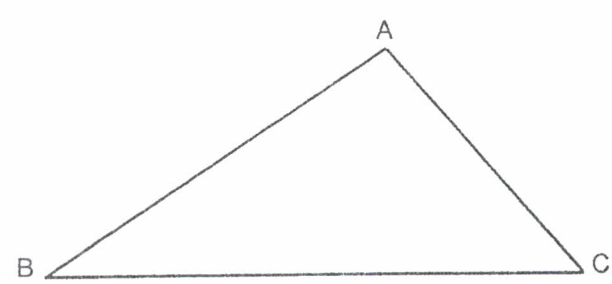


Exercice 8 : Dans le dessin ci-contre :

a) Place le point K tel que $\overrightarrow{KB} = \overrightarrow{CK}$.

b) Peux-tu placer un point D tel que $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DC}$?

c) Place les points M et N tel que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{NB}$.



1.3 - Vecteur nul.

Pour prolonger la notion de vecteur dans le cas où les points A et B sont confondus, nous introduisons un vecteur supplémentaire appelé **vecteur nul** noté $\overrightarrow{AA}$ ou $\vec{0}$.

Ainsi $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ si, et seulement si, A = B.

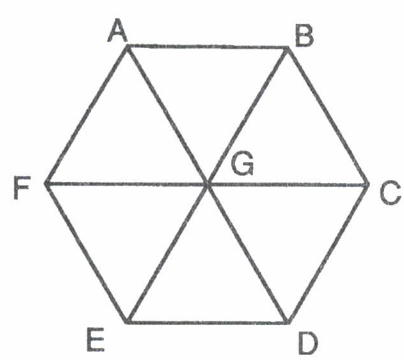
1.4 Colinéarité.

Deux vecteurs non nuls $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont dits **colinéaires** si, et seulement si, ils ont même direction.

En particulier, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont dits colinéaires si, et seulement si, les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

Par convention, le vecteur nul est colinéaire à tout autre vecteur ; ainsi, pour tous points A et B, $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{0}$ sont colinéaires.

Exercice 9 :



La figure ci-dessus représente un hexagone régulier. Ecris en utilisant uniquement les points du dessin :

a) tous les vecteurs non nuls colinéaires à $\overrightarrow{AB}$,

b) tous les vecteurs non nuls colinéaires à $\overrightarrow{CD}$.

Exercice 10 :

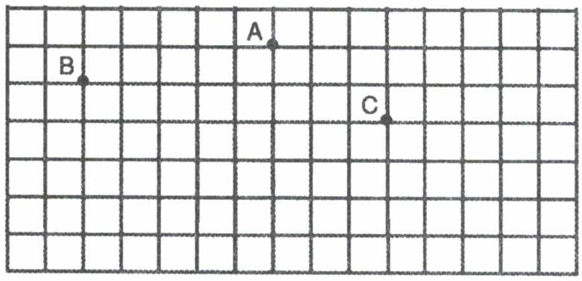
a) Place trois points distincts M_1, M_2 et M_3 tels que $\overrightarrow{AM_1}$, $\overrightarrow{AM_2}$, $\overrightarrow{AM_3}$ soient colinéaires à $\overrightarrow{AB}$.

b) Dessine l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ soit colinéaire à $\overrightarrow{AB}$.

Exercice 11 :

a) Place trois points distincts M_1 , M_2 et M_3 tels que $\overrightarrow{CM_1}$, $\overrightarrow{CM_2}$, $\overrightarrow{CM_3}$ soient colinéaires à $\overrightarrow{AB}$.

b) Dessine l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{CM}$ soit colinéaire à $\overrightarrow{AB}$.



1.5 - Norme d'un vecteur. Vecteur unitaire.

Dans ce paragraphe une unité de longueur a été préalablement choisie.

Soit un vecteur $\vec{u}$ et (A, B) un de ses représentants, on appelle **norme** du vecteur $\vec{u}$ la longueur AB, on la note $\|\vec{u}\|$. Ainsi $\|\overrightarrow{AB}\| = AB$ et $\|\vec{0}\| = 0$.

Si $\|\vec{u}\| = 1$, on dit que $\vec{u}$ est unitaire.

Propriété : $\vec{u} = \vec{0}$ équivaut à $\|\vec{u}\| = 0$.

Exercice 12 : Sur la figure ci-dessous, place M tel que $\overrightarrow{OM}$ soit unitaire et colinéaire à $\vec{u}$. Y a-t-il plusieurs solutions ?

Exercice 13 : Dessine l'ensemble de tous les points M tels que le vecteur $\overrightarrow{AM}$ soit unitaire.

A
x

1.6 - Opposé d'un vecteur.

Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul , on appelle **opposé** de $\vec{u}$ le vecteur :

- de même direction que $\vec{u}$;
- de même norme que $\vec{u}$;
- de sens contraire à celui de $\vec{u}$.

On le note $-\vec{u}$. Par convention l 'opposé du vecteur $\vec{0}$ est $\vec{0}$.

Conséquences

Pour tout vecteur $\vec{u}$, $\|-\vec{u}\| = \|\vec{u}\|$; $-(-\vec{u}) = \vec{u}$.

Pour tous points A et B, $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$.

Exercice 14: Barre les égalités fausses de la liste ci-dessous (I est le milieu de [AB]).

$\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IB}$;

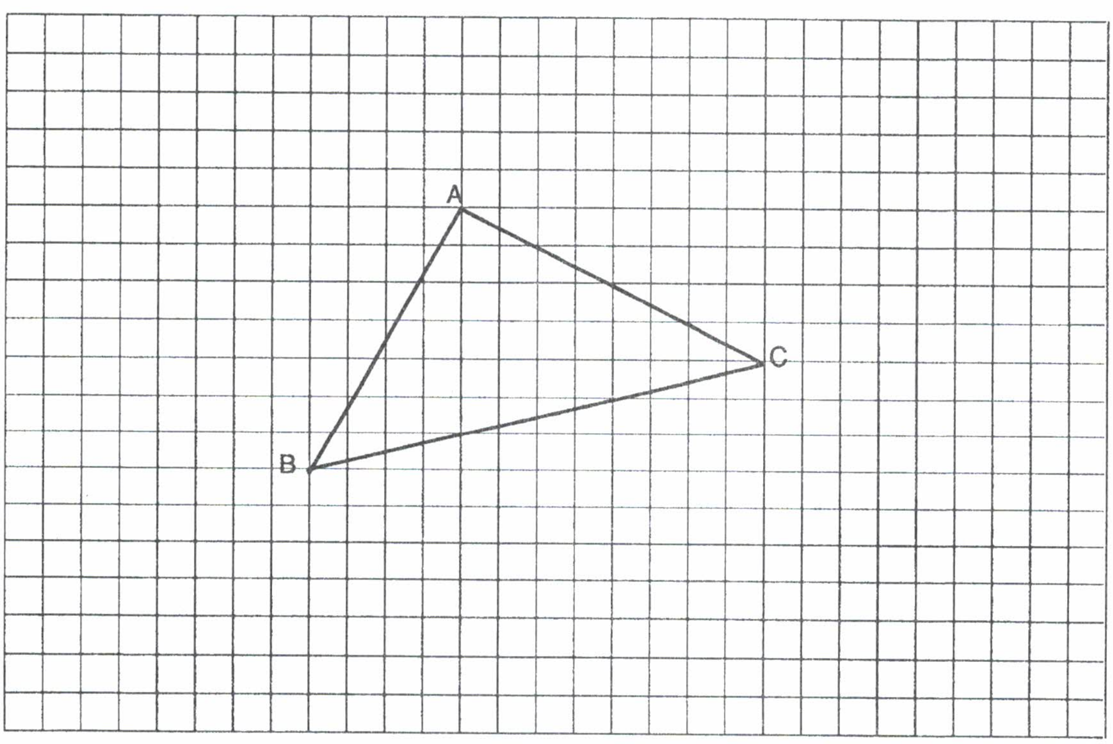
$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$;

$\overrightarrow{BI} = -\overrightarrow{IA}$;

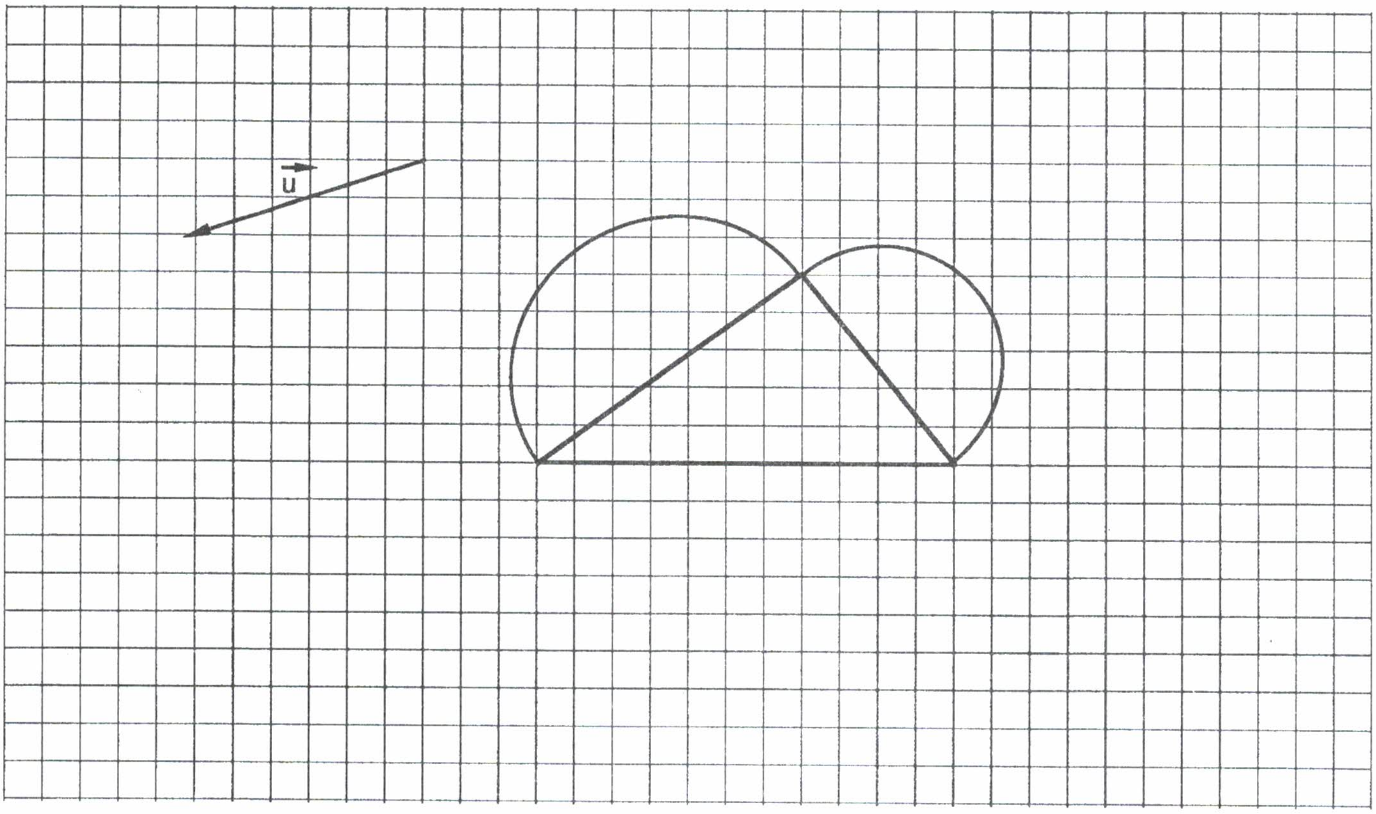
$\overrightarrow{AI} = -\overrightarrow{IB}$;

$\overrightarrow{IB} = -\overrightarrow{IA}$.

Exercice 15 : Place X , Y , Z tels que $\overrightarrow{BX} = -\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CY} = -\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AZ} = -\overrightarrow{BC}$.



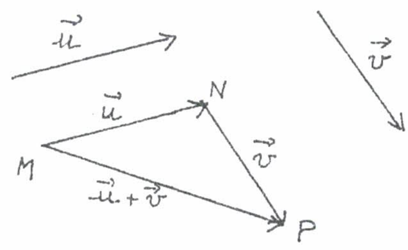
Exercice 16 : Dessine l'image F_1 de la figure F ci-dessous par la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$, puis l'image F_2 de F par la translation de vecteur $-\overrightarrow{u}$. (Utilise deux couleurs différentes).



II - Somme de deux vecteurs

2.1 - Définition et relation de Chasles.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ étant deux vecteurs, on appelle **somme** de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$ le vecteur, noté $\vec{u} + \vec{v}$ obtenu de la manière suivante : on choisit un point M quelconque, puis on construit le point N tel que $\overrightarrow{MN} = \vec{u}$ et le point P tel que $\overrightarrow{NP} = \vec{v}$; alors $\vec{u} + \vec{v}$ est le vecteur $\overrightarrow{MP}$.

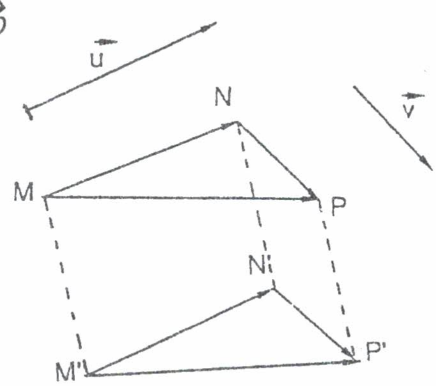


Bien sûr, pour que cette définition ait un sens, il faut absolument s'assurer que le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ obtenu dans cette construction ne dépend pas du choix du point de départ M.

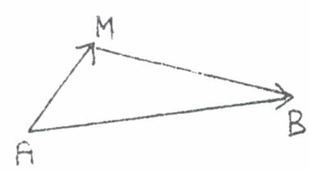
Tout repose sur le résultat suivant : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si, et seulement si, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ (la preuve en est immédiate si C n'est pas sur (AB) : il suffit alors d'exploiter le fait que ABDC est un parallélogramme ; lorsque C est sur (AB) et en supposant par exemple que [CD] est incluse dans [AB], il convient de discuter suivant que C est entre A et B ou non).

Construisons donc à partir de M et M' les points N, P, N', P' tels que $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M'N'} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{N'P'} = \vec{v}$.

De la première égalité on déduit $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'}$ et de la seconde $\overrightarrow{NN'} = \overrightarrow{PP'}$. D'où $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{PP'}$, qui conduit à son tour à $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{M'P'}$.

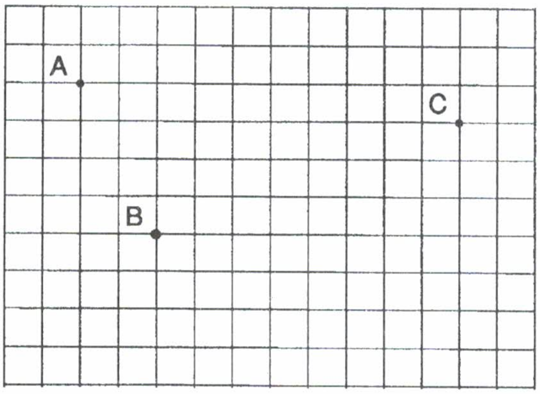


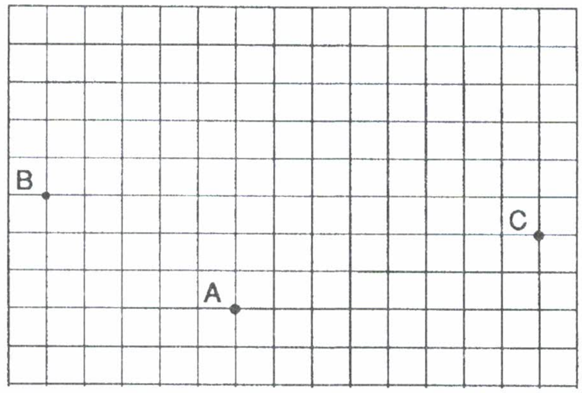
Relation de Chasles : Si A et B sont deux points du plan, pour tout point M du plan, $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB}$.



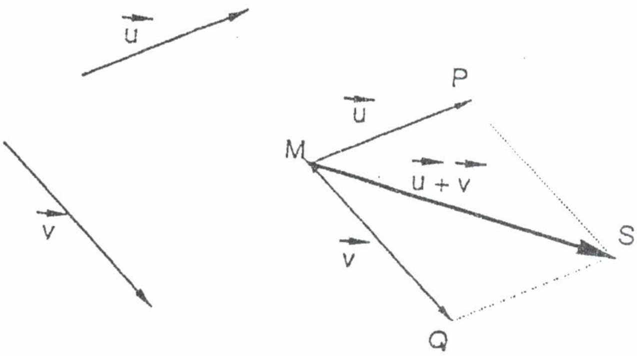
Cette relation résulte de la définition précédente et joue un rôle fondamental dans la simplification des écritures vectorielles.

Exercice 1 : Dans chacun des cas suivants construis le point M tel que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.





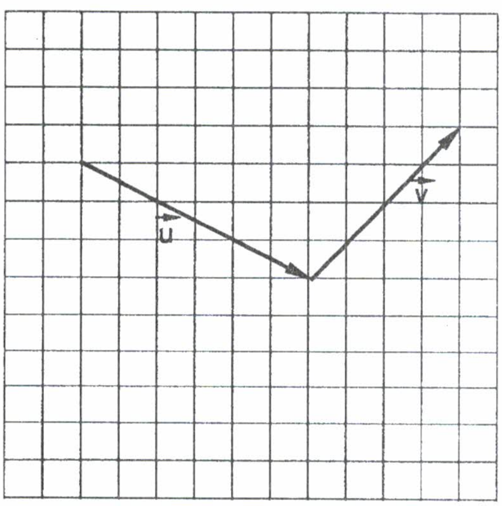
Construction du vecteur somme par la méthode du parallélogramme.
(lorsque les 2 vecteurs sont non colinéaires).

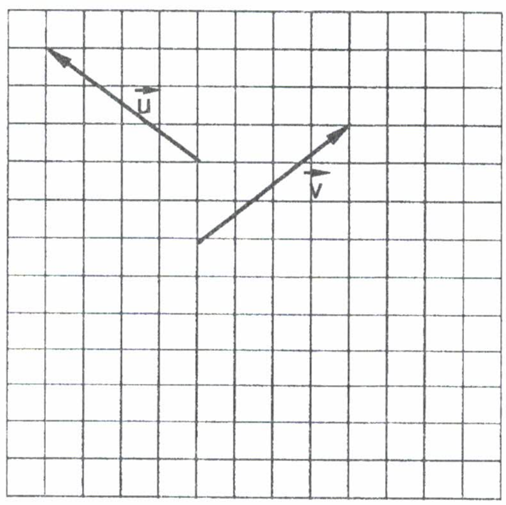


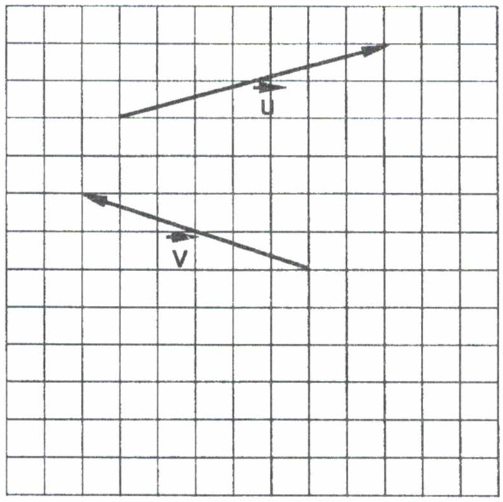
Partant d'un point M quelconque, on place P tel que $\overrightarrow{MP} = \vec{u}$ et Q tel que $\overrightarrow{MQ} = \vec{v}$.
On construit ensuite le point S tel que le quadrilatère MPSQ soit un parallélogramme.

Il est aisé de justifier que $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{MS}$.

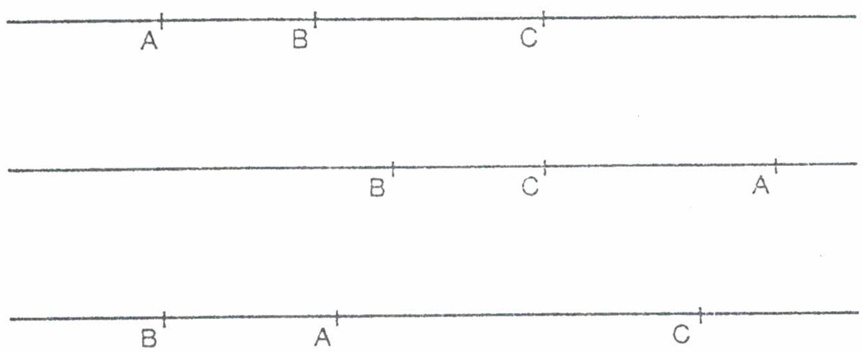
Exercice 2 : Représente sur le quadrillage le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ dans chacun des cas suivants :







Exercice 3 : Dans chacun des cas suivants construis le point M tel que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.



2.2 - Propriétés de l'addition des vecteurs. Somme de plus de deux vecteurs.

Propriétés : Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$:
P_1 $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u} = \vec{0} + \vec{u}$.
P_2 $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0} = (-\vec{u}) + \vec{u}$.
P_3 $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$.
P_4 $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$.
P_5 Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ vérifient $\vec{u} + \vec{v} = \vec{0}$, alors $\vec{v} = (-\vec{u})$.
P_6 Si $\vec{u} + \vec{v} = \vec{u} + \vec{w}$ alors $\vec{v} = \vec{w}$.

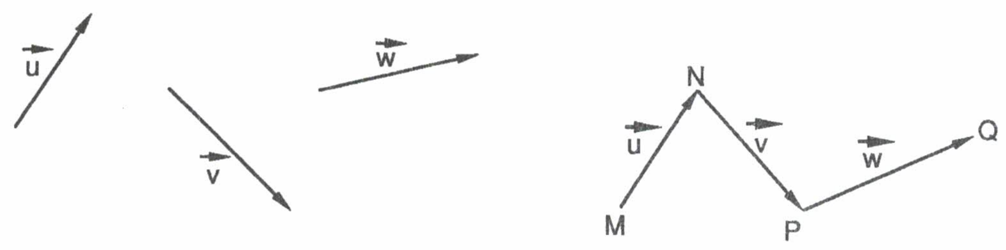
(P_1) et (P_2) paraissent évidentes. Voici une façon de les démontrer.

Soient A et B tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$. La relation de CHASLES nous donne $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AB}$,

$\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA}$, c'est-à-dire respectivement $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$, $\vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$, $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{o}$.

Lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, (P_3) se justifie par un dessin faisant apparaître un parallélogramme.

On complétera le dessin ci-dessous pour justifier (P_4).



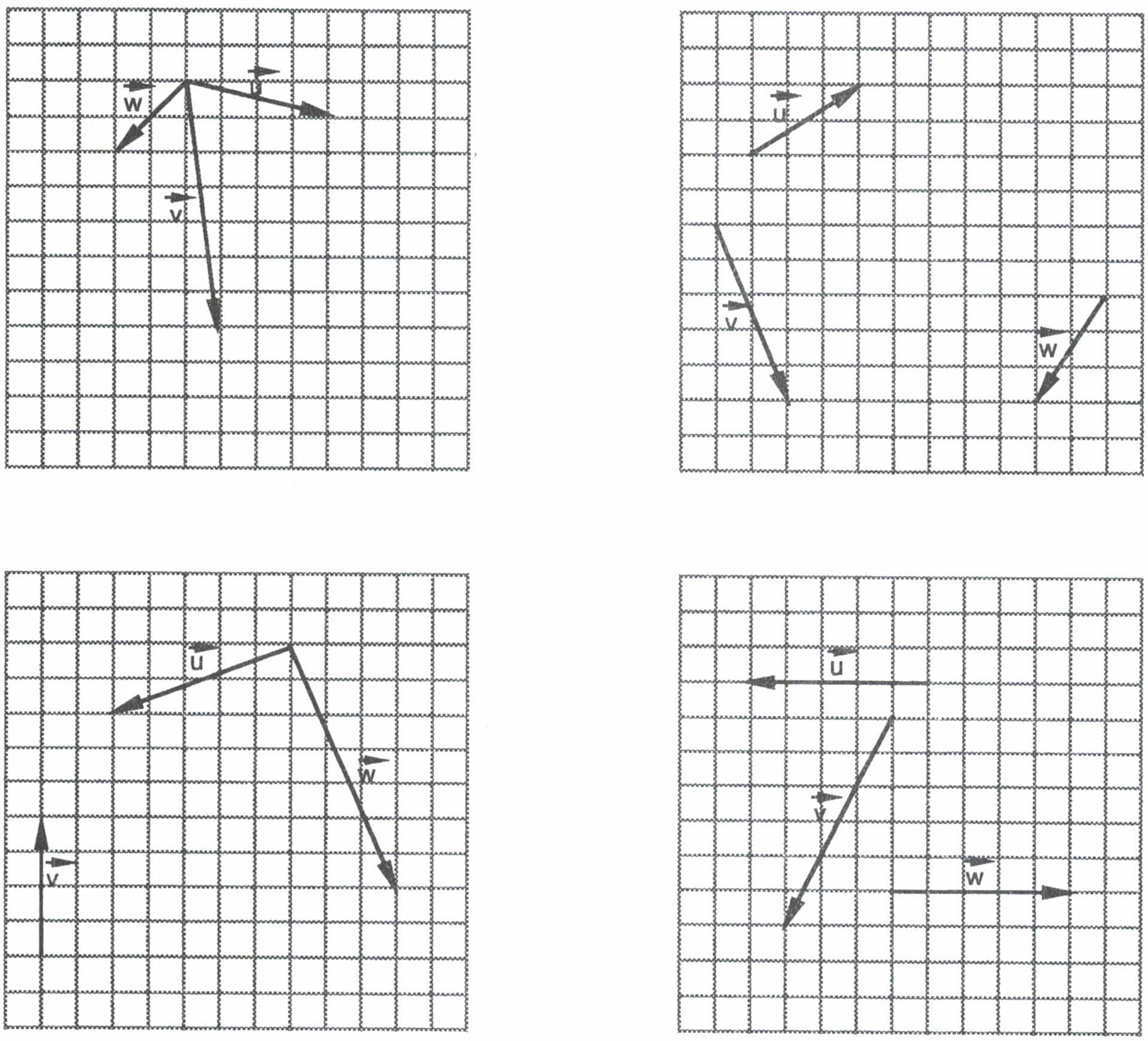
(P_5) se démontre facilement.

Si $\vec{u} + \vec{v} = 0$, alors $(\vec{-u}) + (\vec{u} + \vec{v}) = (\vec{-u}) + \vec{0}$. D'après ($P_1$) et ($P_4$), on a donc :

$(\vec{-u} + \vec{u}) + \vec{v} = -\vec{u}$ soit $\vec{0} + \vec{v} = \vec{-u}$ d'où $\vec{v} = \vec{-u}$.

On démontre (P_6) en ajoutant $-\vec{u}$ aux deux membres de l'égalité.
(P_3) et (P_4) permettent de définir la somme de plusieurs vecteurs que l'on peut alors calculer en les rangeant et en les regroupant dans un ordre quelconque.

Exercice 4 : Dans chacun des cas ci-dessous, représente le vecteur $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$



Exercice 5 : Simplifie les expressions suivantes :

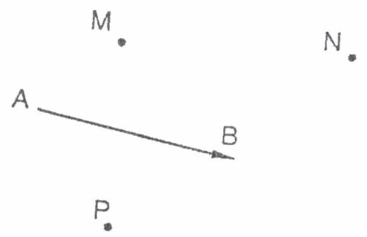
a) $\overrightarrow{HU} + \overrightarrow{ZG} + \overrightarrow{GH} =$

b) $\overrightarrow{XZ} + \overrightarrow{YZ} + \overrightarrow{ZX} =$

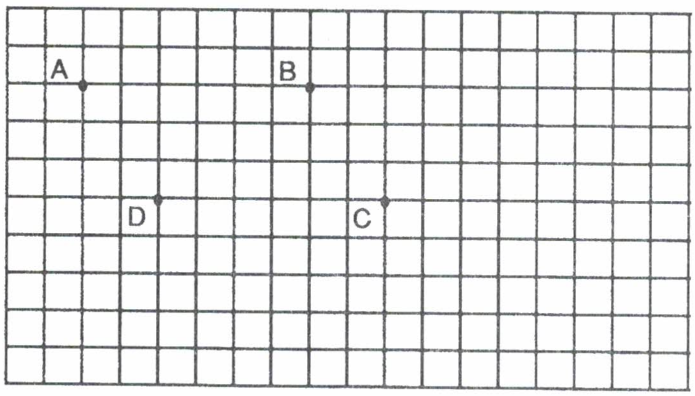
c) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{CD} =$

d) $\overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} =$

Exercice 6 : Exprime de six manières différentes le vecteur $\overrightarrow{AB}$ comme somme de trois vecteurs faisant intervenir les autres points de la figure.



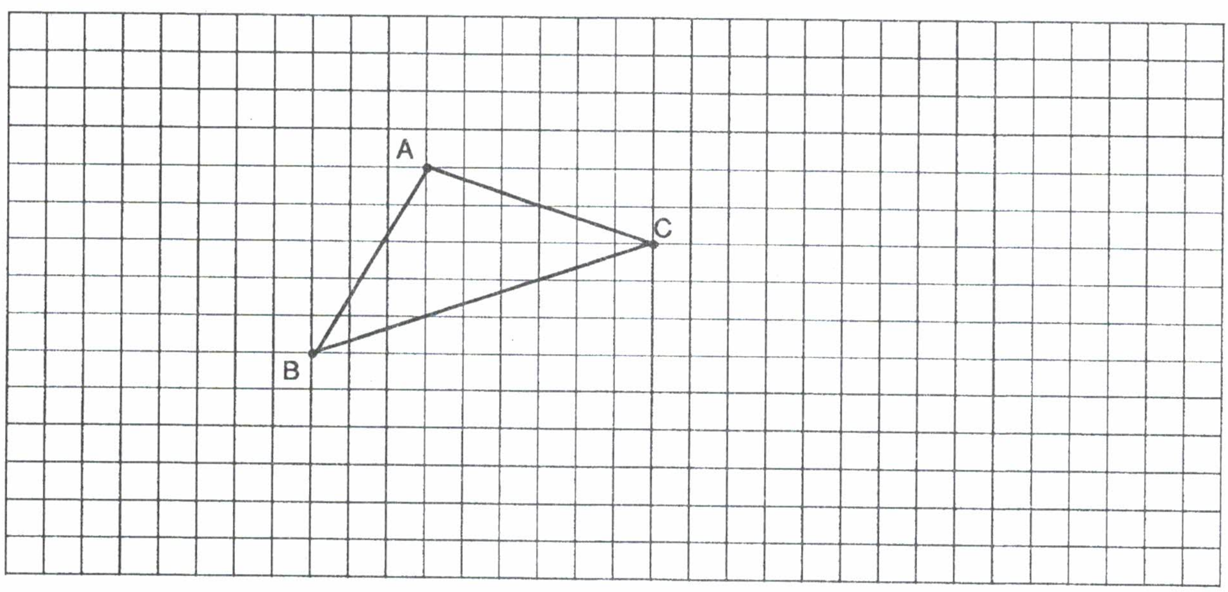
Exercice 7 : ABCD est un parallélogramme. Construis le point M tel que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$.



Que vaut le vecteur $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$? Déduis-en que C est le milieu de [AM].

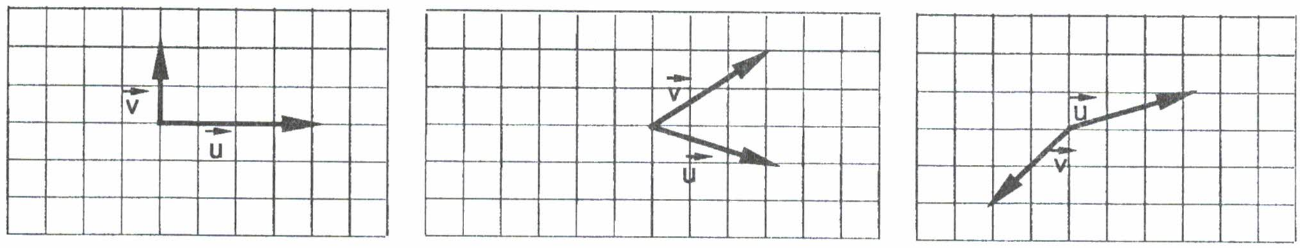
Exercice 8 :

a) Construis sur la figure suivante les points M, N, P tels que
$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}$; $\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$.



b) Construis le point A' tel que $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP}$. Que constates-tu ?
Retrouve ce résultat par un calcul.

Exercice 9 : Dans chacun des cas ci-dessous, représente le vecteur $\vec{w}$ tel que $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$.



Exercice 10 : Etant donné quatre points du plan, démontre que l'on a :

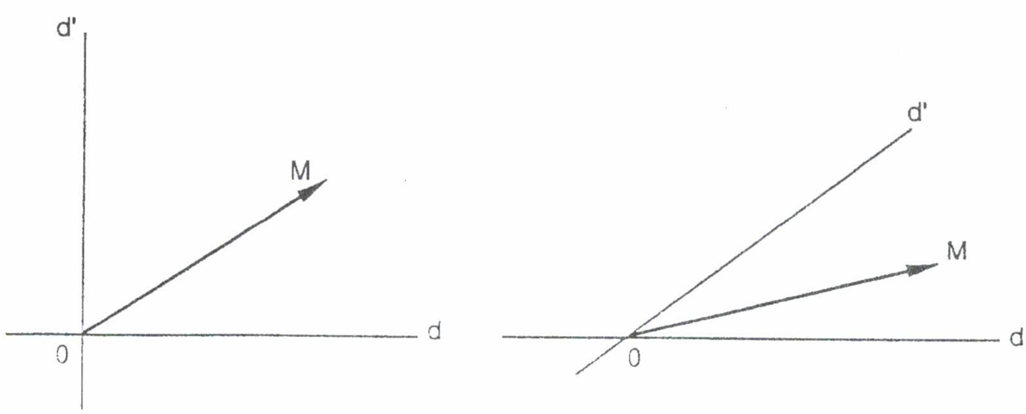
a) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$ (on pourra utiliser la décomposition de $\overrightarrow{AC}$ en $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$) ;
b) $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BA}$;
c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$;
d) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CA}$.

Exercice 11 : A, B, C, D, E et F sont six points du plan. Démontre que l'on a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{EB}$.

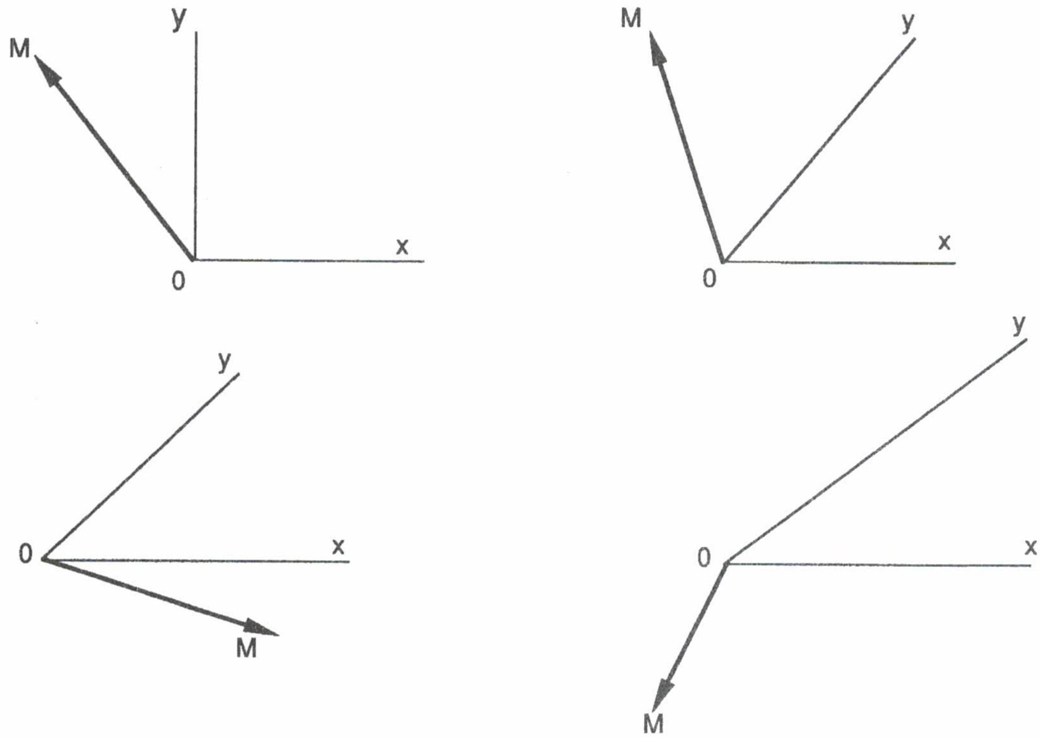
2.3 - Décomposition d'un vecteur en somme de deux vecteurs.

Exercice 12 :

a) Dans chacun des cas suivants, construis les points P et Q situés respectivement sur d et d' tels que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$.



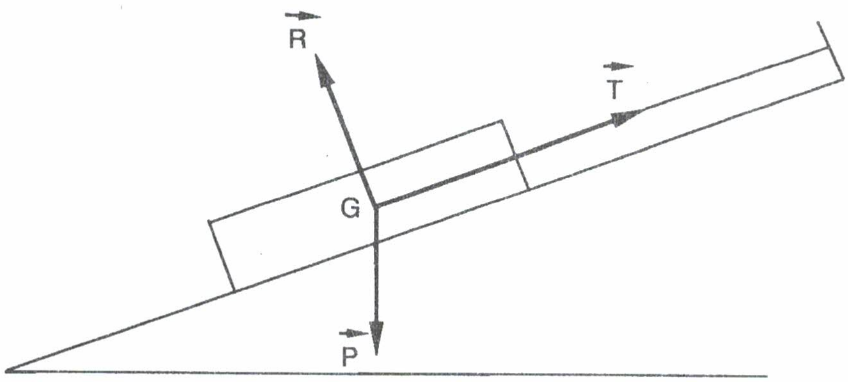
b) Dans chacun des cas suivants, décompose le vecteur $\vec{OM}$ en la somme d'un vecteur $\vec{OP}$ dont la direction est celle de la droite (Ox) et d'un vecteur $\vec{OQ}$ de direction celle de la droite (Oy).



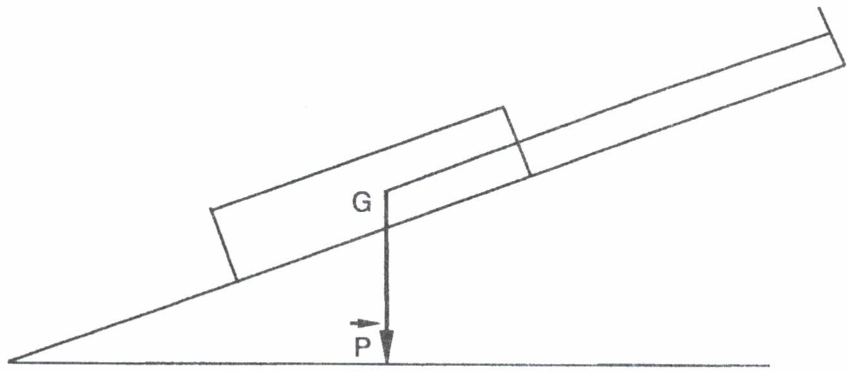
Exercice 13 : La figure ci-dessous représente un chariot sur un plan incliné (sans frottement). Ce chariot est soumis à trois forces : son poids $\vec{P}$; la réaction $\vec{R}$ du support (normale au plan) ; la force $\vec{T}$ exercée par le fil qui le retient.

a) Est-ce que le schéma ci-dessous correspond à une situation d'équilibre ?

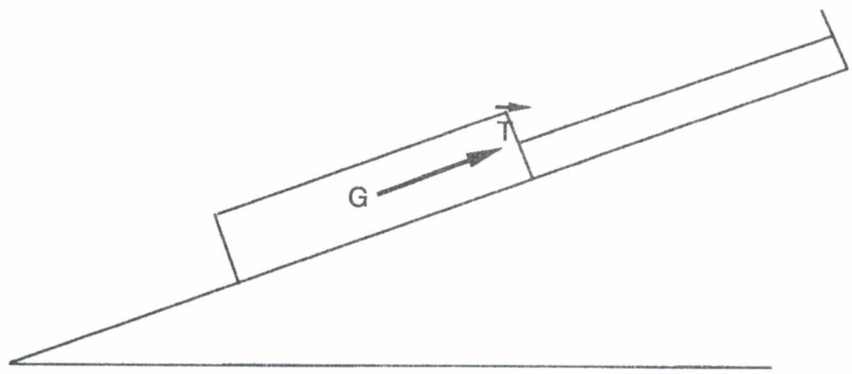
On rappelle que dans ce cas on a : $\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = \vec{0}$. Justifie la réponse.



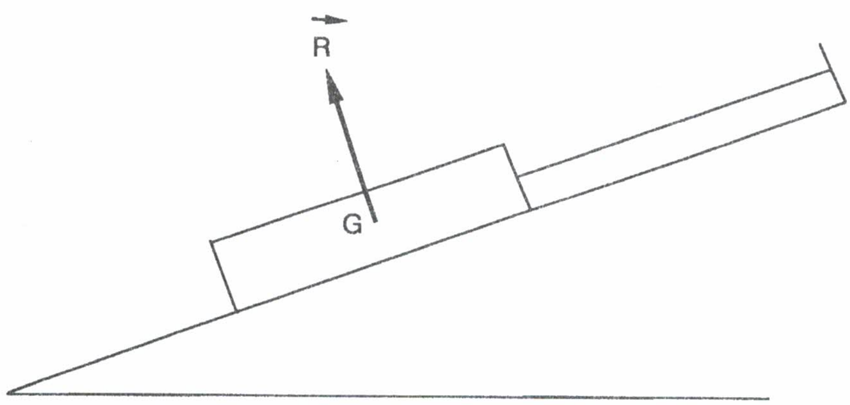
b) On suppose que le chariot est en équilibre. On donne : $\vec{P}$, placer $\vec{R}$ et $\vec{T}$ (commence par représenter la direction de $\vec{R}$ et celle de $\vec{T}$).



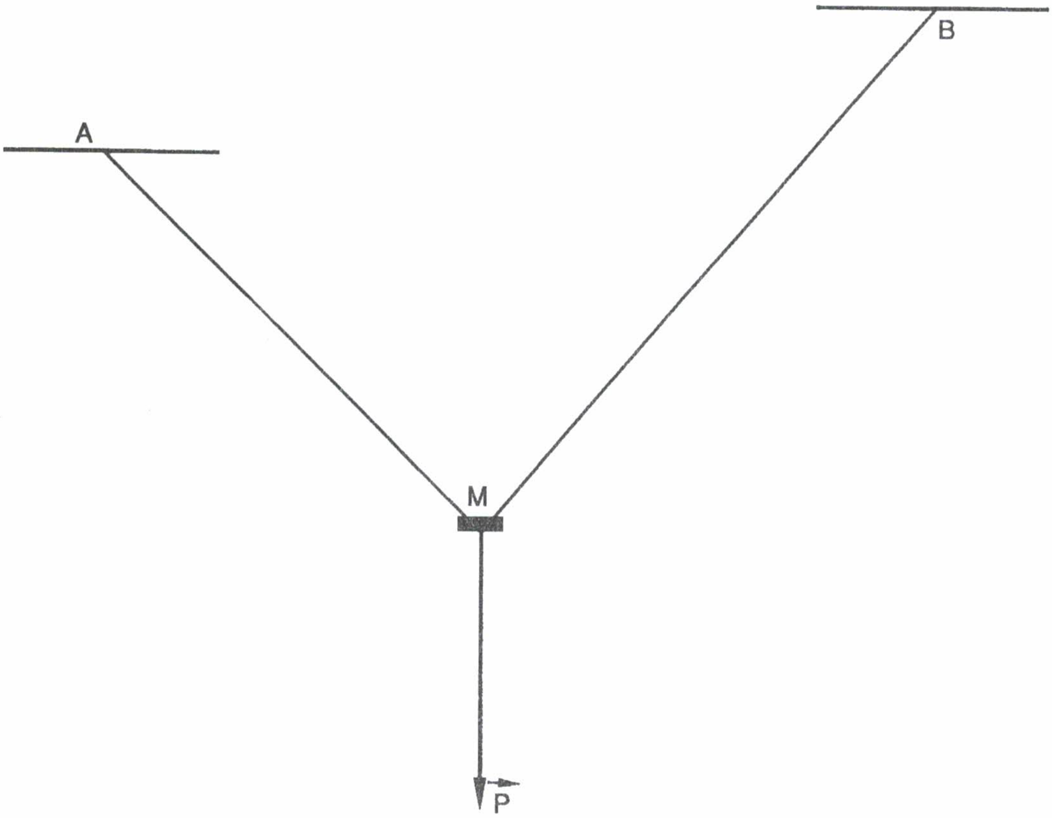
c) On suppose que le chariot est en équilibre. On donne $\vec{T}$, placer $\vec{R}$ et $\vec{P}$ (représente d'abord la direction de $\vec{P}$ et celle de $\vec{R}$).



d) On suppose que le chariot est en équilibre. On donne $\vec{R}$ placer $\vec{T}$ et $\vec{P}$.



Exercice 14 : La figure ci-dessous schématise un objet suspendu à un fil. Représente les vecteurs $\vec{T_1}$ et $\vec{T_2}$ pour que le système soit en équilibre ($\vec{T_1}$ et $\vec{T_2}$ ont bien sûr pour direction celle des droites (MA) et (MB)).

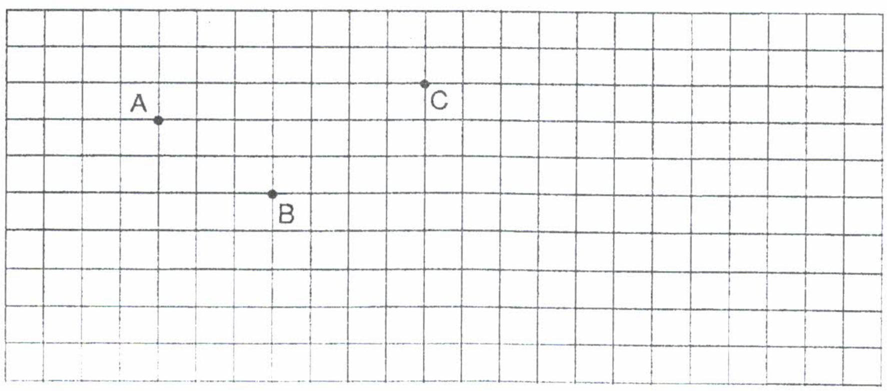


2.4 - Différence de deux vecteurs.

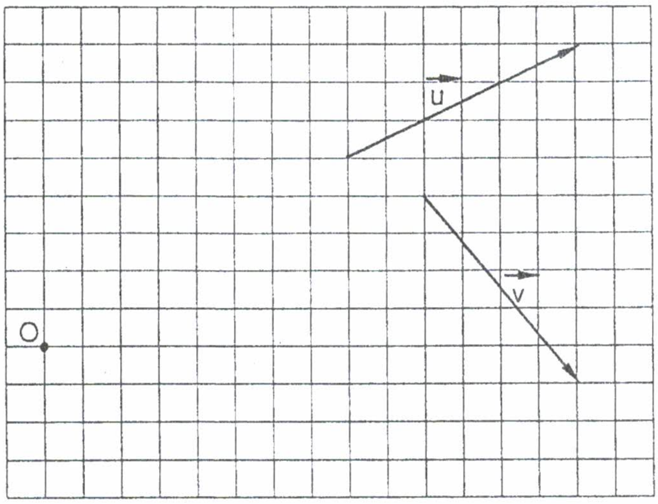
> On appelle **différence** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le vecteur $\vec{u} - \vec{v}$ défini par $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$.
>
> Ainsi pour tout point M, N, R, S : $\vec{MN} - \vec{RS} = \vec{MN} + \vec{SR}$.

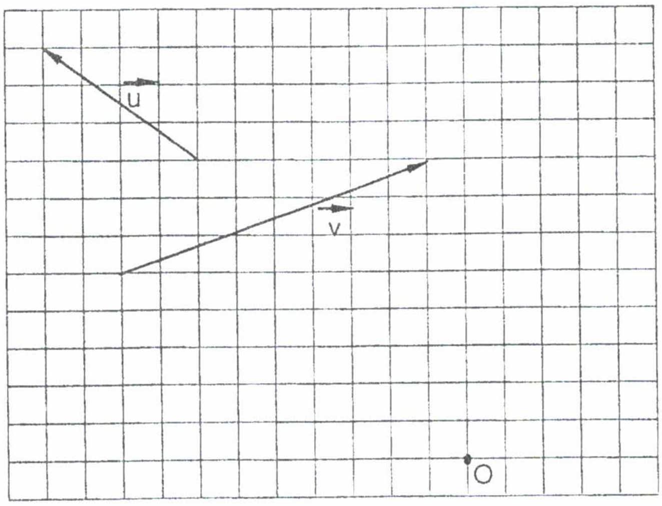
Exercice 15 : Sur le dessin ci-dessous représente les vecteurs $\vec{AN}$, $\vec{BP}$, $\vec{CQ}$ définis par :

$\vec{AN} = \vec{AB} - \vec{BC}$
$\vec{BP} = \vec{BC} - \vec{CA}$
$\vec{CQ} = \vec{CA} - \vec{AB}$

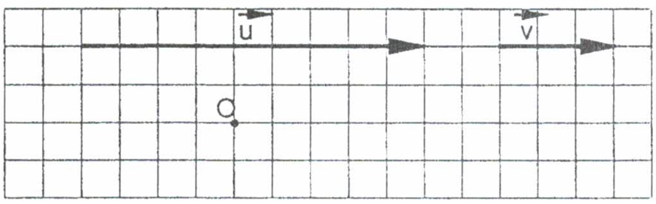


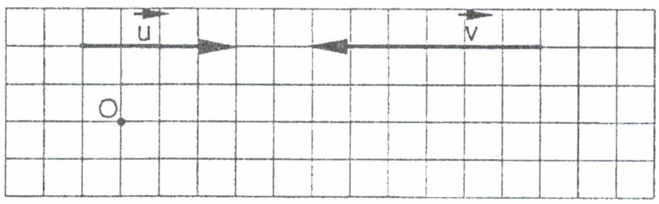
Exercice 16 : Dans chacun des cas suivants place le point M tel que $\vec{OM} = \vec{u} + \vec{v}$ et le point N tel que $\vec{ON} = \vec{u} - \vec{v}$.





Exercice 17 : Dans chacun des cas suivants représente, à partir du point O le vecteur $\vec{u} - \vec{v}$.





Exercice 18 : Calcule $(\vec{v} - \vec{u}) + (\vec{u} - \vec{v})$.

Laquelle des six propriétés énoncées sur l'addition des vecteurs te permet de conclure que $\vec{u} - \vec{v} = -(\vec{v} - \vec{u})$?

Exercice 19 : A l'aide de la relation de CHASLES, démontre que $\vec{OB} - \vec{OA} = \vec{AB}$. Illustre ce résultat par une figure.

Exercice 20 : O, A, B sont trois points non alignés tels que OA = OB.

a) Construis les points S et D tels que : $\vec{OS} = \vec{OA} + \vec{OB}$ et $\vec{OD} = \vec{OA} - \vec{OB}$.

b) Explique pourquoi $\vec{OS}$ et $\vec{OD}$ ont des directions orthogonales.

Exercice 21 : Simplifie :

$\vec{AB} - \vec{AC} + \vec{BD} =$

$\vec{AB} - \vec{CD} + \vec{BD} =$

$\vec{BC} - \vec{BD} + \vec{CA} =$

$\vec{CD} - \vec{AB} + \vec{DB} =$

Exercice 22 : Etant donné quatre points A, B, C, D du plan, démontre que l'on a :

a) $\vec{AC} - \vec{BD} = \vec{AB} - \vec{CD}$ (tu pourras décomposer $\vec{AC}$ en $\vec{AB} + \vec{BC}$) ;

b) $\vec{BA} - \vec{CD} = \vec{BC} - \vec{AD}$.

III - Produit d'un vecteur par un nombre réel

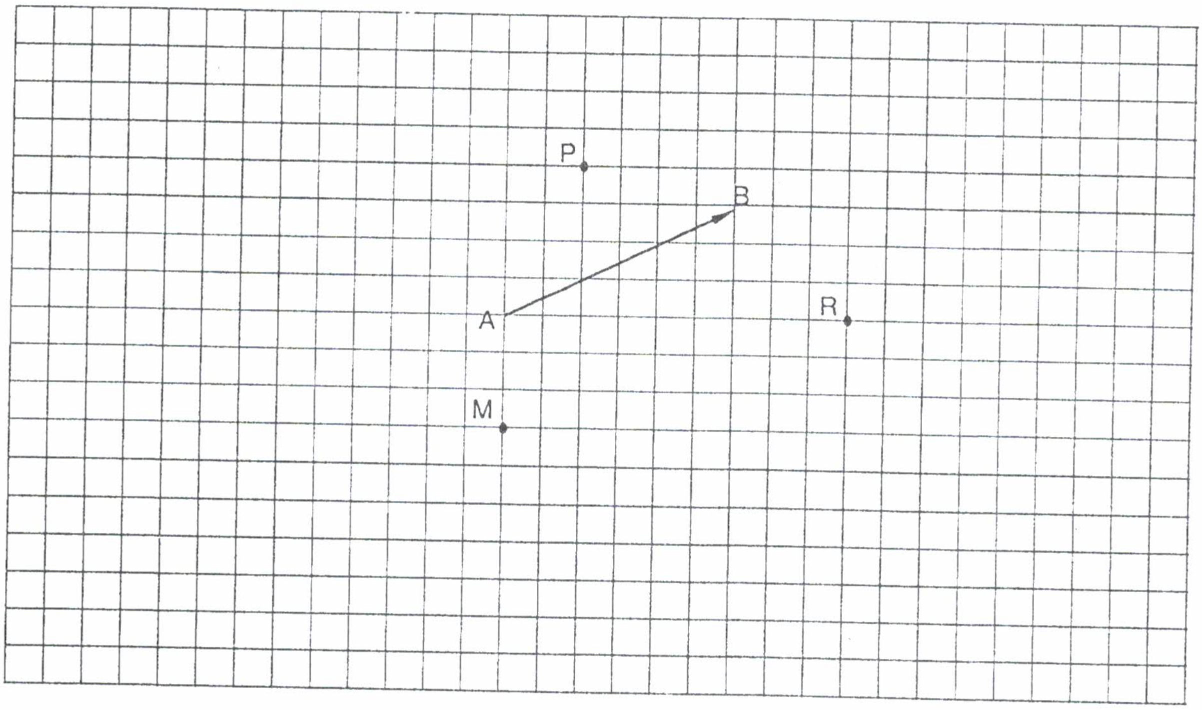
3.1 - Définition

Exercice 1 : Produit d'un vecteur non nul par un nombre réel positif.

a) Représente en rouge le vecteur $\overrightarrow{MN}$ tel que $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{AB}$ aient même direction et même sens et tel que MN = 2 AB. On dit que $\overrightarrow{MN}$ est le produit de $\overrightarrow{AB}$ par 2 ; on note $\overrightarrow{MN} = 2\,\overrightarrow{AB}$.

b) Place le point O tel que $\overrightarrow{PO} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{AB}$. Représente en rouge le vecteur $\overrightarrow{PO}$.

c) Place le point S tel que $\overrightarrow{RS} = \frac{3}{2}\,\overrightarrow{AB}$. Représente en rouge le vecteur $\overrightarrow{RS}$.



Exercice 2 : Produit d'un vecteur par un nombre réel négatif.

Reprends la figure de l'exercice précédent.

a) Représente en vert le vecteur $\overrightarrow{PH}$ tel que $\overrightarrow{PH}$ et $\overrightarrow{AB}$ aient même direction et sens contraire et tel que PH = 2AB. On dit que $\overrightarrow{PH}$ est le produit de $\overrightarrow{AB}$ par − 2 ; on note $\overrightarrow{PH} = (-2)\,\overrightarrow{AB}$.

Observe que $\overrightarrow{PH}$ est l'opposé de $2\,\overrightarrow{AB}$ donc que $\overrightarrow{PH} = -(2\,\overrightarrow{AB})$.

A cause de cela on notera plus simplement $\overrightarrow{PH} = -2\,\overrightarrow{AB}$.

b) Place le point K tel que $\overrightarrow{MK} = (-\frac{3}{2})\,\overrightarrow{AB}$. Représente en vert le vecteur $\overrightarrow{MK}$.

c) Place le point L tel que $\overrightarrow{RL} = (-\frac{4}{3})\,\overrightarrow{AB}$. Représente en vert le vecteur $\overrightarrow{RL}$.

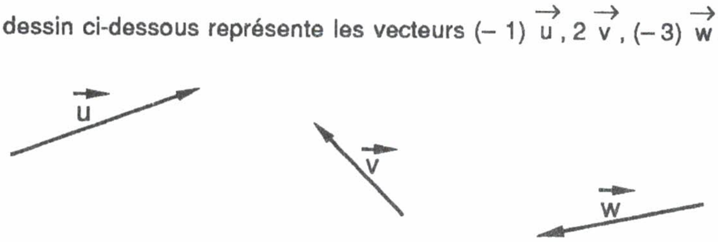
Le **produit** du vecteur non nul $\vec{u}$ par le réel non nul k est le vecteur $\vec{v}$ noté $k\,\vec{u}$ tel que :

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont même direction ;
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de même sens si $k > 0$ et de sens contraire si $k < 0$;
- $\|\vec{v}\| = |k|\,\|\vec{u}\|$.

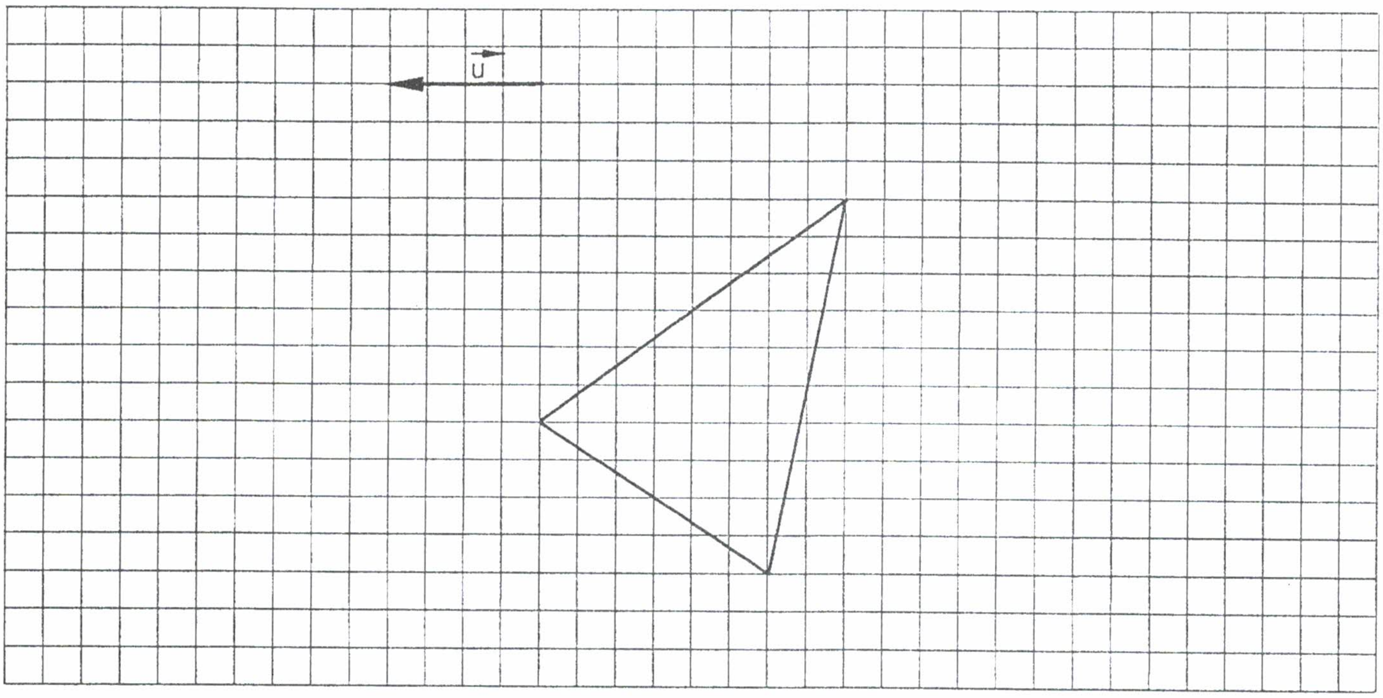
Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou si $k = 0$ alors par définition $k\,\vec{u} = \vec{0}$.

Ainsi pour tout vecteur $\vec{u}$ et pour tout réel k, $0\,\vec{u} = \vec{0}$ et $k\,\vec{0} = \vec{0}$.

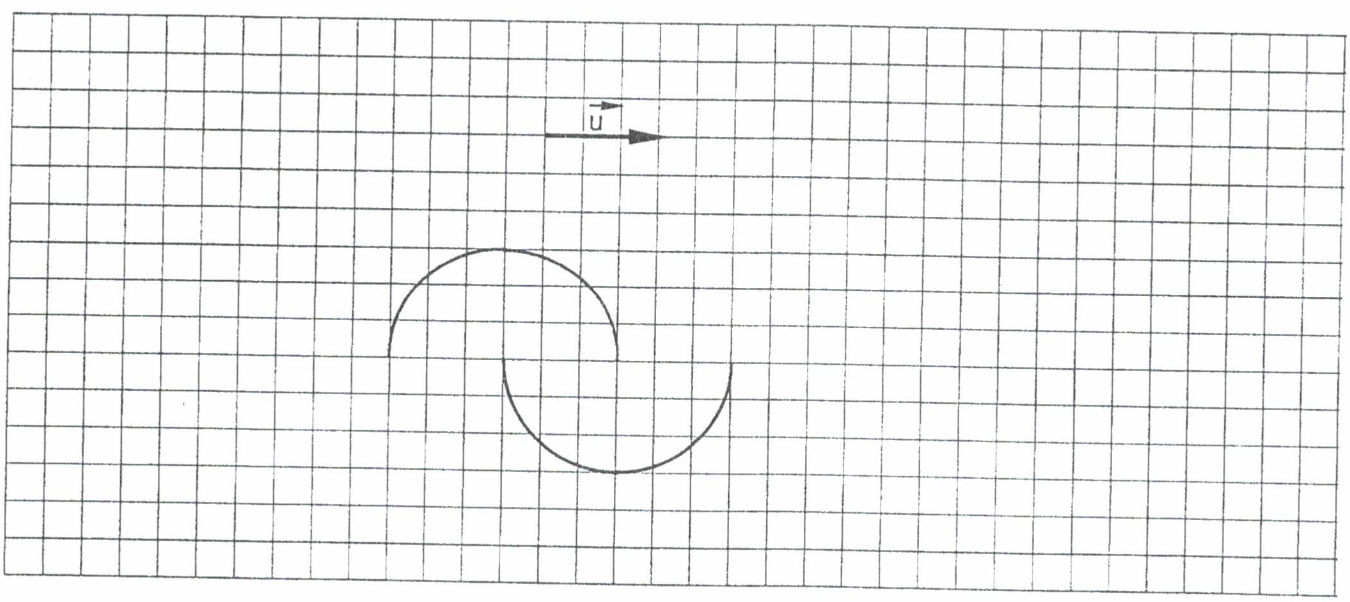
Exercice 3 : Sur le dessin ci-dessous représente les vecteurs $(-1)\ \vec{u}$, $2\ \vec{v}$, $(-3)\ \vec{w}$.



Exercice 4 : Dessine les images du motif ci-dessous par les translations de vecteurs $(-3)\ \vec{u}$, $(-2)\ \vec{u}$, $-\ \vec{u}$, $2\ \vec{u}$ et $3\ \vec{u}$.



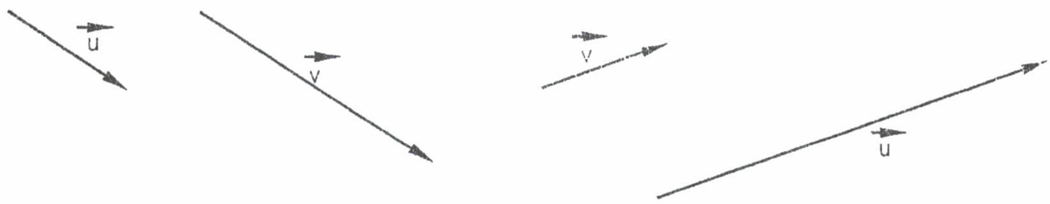
Exercice 5 : Dessine les images du motif ci-dessous par les translations de vecteurs $(-2)\ \vec{u}$, $-\ \vec{u}$, $\vec{u}$, $2\ \vec{u}$, $3\ \vec{u}$ et $4\ \vec{u}$.



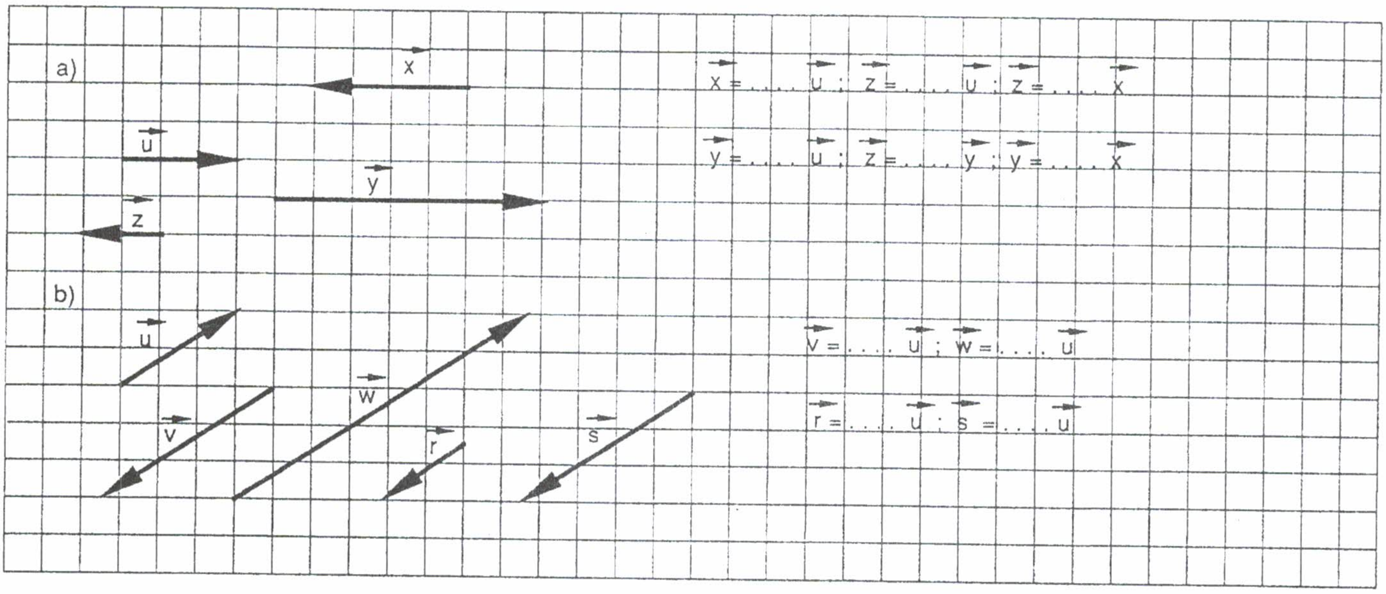
Exercice 6 :

Après avoir comparé les normes de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$, complète les égalités dans les deux cas suivants :

a) $\vec{v} = \ldots\ldots\ldots \vec{u}$; $\vec{u} = \ldots\ldots\ldots \vec{v}$ b) $\vec{v} = \ldots\ldots\ldots \vec{u}$; $\vec{u} = \ldots\ldots\ldots \vec{v}$



Exercice 7 : En utilisant le quadrillage, complète les égalités dans chacun des cas suivants.



3.2 - Lien avec la colinéarité.

Exercice 8 :

a) $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont deux vecteurs colinéaires tels que $\|\vec{U}\| = 2$ et $\|\vec{V}\| = 6$.

Complète les égalités suivantes dans le cas où $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont de même sens :

$$\vec{V} = \ldots \vec{U} \quad ; \quad \vec{U} = \ldots \vec{V}.$$

Complète les égalités suivantes dans le cas où $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont de sens contraire :

$$\vec{V} = \ldots \vec{U} \quad ; \quad \vec{U} = \ldots \vec{V}.$$

b) mêmes questions avec $\|\vec{U}\| = 3$ et $\|\vec{V}\| = 5$.

Exercice 9 :

a) Soit $\vec{v}$ un vecteur non nul. Complète si tu le peux les égalités suivantes :

$\vec{0} = \ldots \vec{v}$; $\vec{v} = \ldots \vec{0}$.

b) Complète $\vec{0} = \ldots \vec{0}$. As-tu plusieurs possibilités ?

c) Que peux-tu dire de $\vec{u}$ si l'égalité $2\vec{u} = 3\vec{u}$ est vraie ?

Propriété : Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** si, et seulement si, il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\,\vec{v}$.

3.3 - Propriétés.

P_1 : Pour tout réel k et tout vecteur $\vec{u}$, $\|k\,\vec{u}\| = |k|\,\|\vec{u}\|$.

P_2 : L'égalité $k\,\vec{u} = \vec{0}$ est réalisée si, et seulement si, $k = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$. En particulier si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $k\,\vec{u} = k'\,\vec{u}$, alors $k = k'$.

P_3 : Pour tout vecteur $\vec{u}$, $1\,\vec{u} = \vec{u}$.

P_4 : Pour tous réels a et b et pour tout vecteur $\vec{u}$, $a(b\,\vec{u}) = (ab)\,\vec{u}$.

(P_1) relève de la définition.
(P_2) se démontre à partir de (P_1).

(P_3) : se justifie en revenant à la définition (distinguer les cas : $\vec{u} = \vec{0}$ et $\vec{u} \neq \vec{0}$).

(P_4) examiner les cas où $a = 0$, $b = 0$, $\vec{u} = \vec{0}$. Sinon, revenir à la définition de l'égalité de deux vecteurs en discutant suivant le signe de a et de b.

Exercice 10 : Sachant que $\vec{v} = 3\,\vec{u}$ et que $\vec{w} = (-2)\,\vec{v}$, exprime $\vec{w}$ en fonction de $\vec{u}$. Fais de même dans chacun des cas suivants :

a) $\vec{v} = (-\frac{3}{2})\,\vec{u}$ et $\vec{w} = (-\frac{4}{3})\,\vec{v}$.

b) $\vec{v} = \sqrt{2}\,\vec{u}$ et $\vec{w} = (-\sqrt{32})\,\vec{v}$.

c) $\vec{u} = (-0{,}8)\,\vec{u}$ et $\vec{w} = 125\,\vec{v}$.

Exercice 11 : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non colinéaires. Que peut-on dire des réels a et b si l'on sait que $a\,\vec{u} = b\,\vec{v}$?

P_5 Pour tous réels a et b et pour tout vecteur $\vec{u}$, $(a + b)\,\vec{u} = a\,\vec{u} + b\,\vec{u}$.

P_6 Pour tout vecteur $\vec{u}$ et tout réel k, $(-k)\,\vec{u} = -(k\vec{u})$.

P_7 Pour tout vecteur $\vec{u}$, $(-1)\,\vec{u} = -\vec{u}$.

Pour établir (P_5) il conviendrait d'examiner de nombreux cas suivant le signe de a, de b, de a + b.
On pourra se contenter de la démontrer dans le cas où $a > 0$ et $b > 0$.

(P_6) se déduit de (P_5) en prenant $a = k$ et $b = -k$.
(P_7) se déduit de (P_6) et de (P_3) (faire $k = 1$).

Notons enfin que (P_6) justifie l'écriture $-k\,\vec{u}$ pour désigner indifféremment $(-k)\,\vec{u}$ ou $-(k\,\vec{u})$.

Exercice 12 : Simplifie les écritures suivantes :

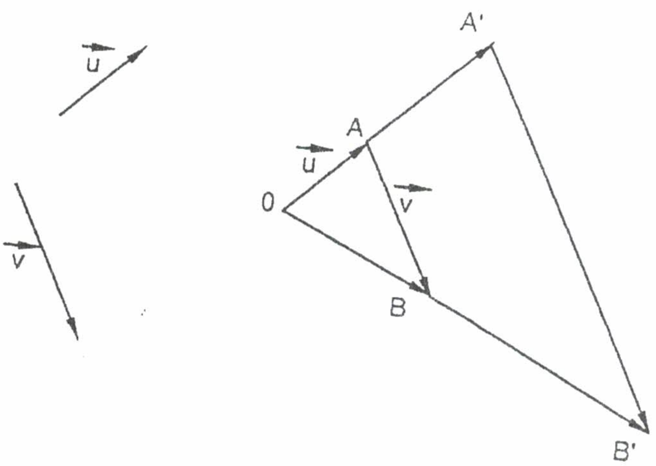
$2\vec{u} + \frac{3}{4}\vec{u} =$ $\qquad$ $2\vec{u} - \frac{10}{3}\vec{u} =$ $\qquad$ $2\vec{u} - 5\vec{u} + 8\vec{u} =$

$\frac{4}{3}\vec{u} - \frac{7}{11}\vec{u} + \frac{10}{33}\vec{u} =$ $\qquad$ $\frac{1}{3}\vec{u} - \frac{2}{17}\vec{u} - \frac{11}{51}\vec{u} =$

P_8	Pour tout réel a et pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$: $a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$.

(P_8) est évidente si $a = 0$.

Si $a > 0$ et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires, on construit les points A, B, A' tels que $\vec{OA} = \vec{u}$, $\vec{AB} = \vec{v}$ et $\vec{OA'} = a\vec{OA}$.



La parallèle à (AB) passant par A' coupe (OB) en B'. Le théorème de THALES vu en 3° permet d'affirmer que $A'B' = a\,AB$ et $OB' = a\,OB$.

Les vecteurs $\vec{OB}$ et $\vec{OB'}$ sont de même sens car la projection conserve l'ordre. On se contentera d'observer que $\vec{AB}$ et $\vec{A'B'}$ sont de même sens. D'où $\vec{A'B'} = a\vec{AB}$ et $\vec{OB'} = a\vec{OB}$, ainsi $\vec{OA'} + \vec{A'B'} = a(\vec{OA} + \vec{AB})$ c'est à dire $a\vec{u} + a\vec{v} = a(\vec{u} + \vec{v})$.

Si $a < 0$ et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires, on se ramène au cas précédent en posant $a = -a'$.

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et non nuls $\quad \vec{v} = k\vec{u}$ et $a(\vec{u} + \vec{v}) = a(\vec{u} + k\vec{u}) = a[(1+k)\vec{u}]$ *d'après (P_5)*

$= [a(1+k)]\vec{u}$ *d'après (P_4)*

$= (a + ak)\vec{u}$

$= a\vec{u} + (ak)\vec{u}$ *d'après (P_5)*

$= a\vec{u} + a(k\vec{u})$ *d'après (P_4).*

Si l'un des deux est nul, l'égalité est évidente.

Exercice 13 : Simplifie les écritures suivantes :

$2\vec{u} + 5(\vec{u} - 2\vec{v}) - 7(\vec{u} + \vec{v})$;

$3\vec{u} - 4(\vec{u} + \vec{v}) + 8(\vec{u} - \vec{v})$;

$7\vec{u} - 3(\vec{u} - \vec{v}) + 2\vec{w}$ sachant que $2\vec{u} - \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$.

Exercice 14 :

a) A et B sont deux points du plan, on suppose qu'un point M vérifie $\overrightarrow{MA} + 3\ \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{0}$.

Justifie que cette relation est équivalente à $4\ \overrightarrow{AM} = 3\ \overrightarrow{AB}$.

Déduis-en que l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA} + 3\ \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{0}$ est réduit à un point. Construis-le.

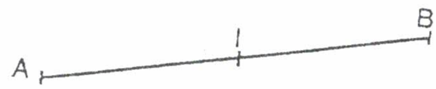
b) Construis de même les points P et Q tels que : $2\ \overrightarrow{PA} + 3\ \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{0}$; $2\,\overrightarrow{QA} - 3\,\overrightarrow{QB} = \overrightarrow{0}$.

IV - Configurations usuelles et vecteurs

4.1 - Milieu d'un segment.

Propriétés :

P_1 : Pour tous points A, B et I du plan, il est équivalent de dire :

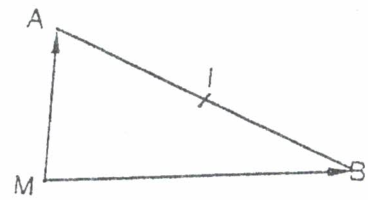


a) I est le milieu de [AB].

b) $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

c) $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$.

d) $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{0}$.



P_2 : Soient A, B et I trois points du plan.

a) Si I est le milieu de [AB], pour tout point M du plan $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\,\overrightarrow{MI}$.

b) Si, pour un point M du plan, $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\,\overrightarrow{MI}$,
alors I est le milieu de [AB].

Exercice 1 : On considère quatre points A, B, C et D tel que $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$.

Soit I tel que $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{0}$.
Démontre que B est le milieu du segment [ID].

Exercice 2 : A, B, C et D étant quatre points du plan, place I tel que $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{0}$, puis le point J tel que $\overrightarrow{JC} + \overrightarrow{JD} = \overrightarrow{0}$

et enfin le point K tel que $\overrightarrow{KI} + \overrightarrow{KJ} = \overrightarrow{0}$. Démontre que $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{KD} = \overrightarrow{0}$, puis que $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$.

Exercice 3 : Trace un triangle ABC.

a) Construis les points I, J et K définis par :

$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AK} = 2\,\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

b) Démontre que J est milieu de [KI].

Exercice 4 : P, Q et R étant trois points du plan, on définit les points A, B et C par :

$$\overrightarrow{PA} = 2\,\overrightarrow{PQ} + \frac{1}{2}\overrightarrow{QR} \quad ; \quad \overrightarrow{PB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{PR}) \quad ; \quad \overrightarrow{PC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{RQ} - 2\,\overrightarrow{PR}.$$

a) Exprime $\overrightarrow{PA}$ et $\overrightarrow{PC}$ en fonction de $\overrightarrow{PQ}$ et de $\overrightarrow{PR}$.
b) Démontre que B est milieu de [AC].

4.2 - Alignement.

Propriété : Soient A, B, M trois points du plan. S'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AM} = k\ \overrightarrow{AB}$, alors A, B, M sont alignés.

Exercice 5 :

a) Trace un triangle ABC. Place J tel que $\overrightarrow{AJ} = \frac{2}{3}\ \overrightarrow{AB}$. Place K tel que $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{2}\ \overrightarrow{BC}$. Place L tel que C soit le milieu de [AL]. Que constates-tu ?

b) Démontre que $\overrightarrow{JK} = \frac{1}{2}\ \overrightarrow{BC} - \frac{1}{3}\ \overrightarrow{BA}$.

c) Démontre que $\overrightarrow{KL} = \frac{3}{2}\ \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}$.

d) Peux-tu maintenant expliquer ce que tu avais constaté ? Quels renseignements supplémentaires as-tu obtenus ?

Exercice 6 :

a) Trace un triangle ABC. Place M tel que $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\ \overrightarrow{AB}$. Place P tel que $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\ \overrightarrow{AC}$. Place N

tel que $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AM}$. Que constates-tu ?

b) Démontre que $\overrightarrow{BN} = \frac{2}{3}\ \overrightarrow{AC} - \frac{2}{3}\ \overrightarrow{AB}$, puis exprime $\overrightarrow{BN}$ en fonction de $\overrightarrow{BC}$. Cela explique-t-il ce que tu avais constaté ? Quels renseignements supplémentaires as-tu ainsi obtenus ?

Exercice 7 : Sur les côtés d'un triangle ABC on place le point I tel que $\overrightarrow{AI} = \frac{3}{4}\ \overrightarrow{AB}$, J tel que $\overrightarrow{BJ} = -\frac{1}{5}\ \overrightarrow{BC}$ et K tel que

$\overrightarrow{CK} = \frac{2}{3}\ \overrightarrow{CA}$.

a) Démontre que $\overrightarrow{IK} = -\frac{3}{4}\ \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\ \overrightarrow{AC}$.

b) Démontre que $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{4}\ \overrightarrow{AB} - \frac{1}{5}\ \overrightarrow{BC}$ puis que $\overrightarrow{IJ} = \frac{9}{20}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{5}\ \overrightarrow{AC}$.

c) Démontre que les points I, J et K sont alignés.

Exercice 8 : Trace un triangle ABC.

a) Place le point M tel que $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\ \overrightarrow{AB}$, et le point N tel que $\overrightarrow{BN} = \frac{2}{3}\ \overrightarrow{BC}$.

b) Démontre que $\overrightarrow{MN} = \frac{2}{3}\ \overrightarrow{AC}$.

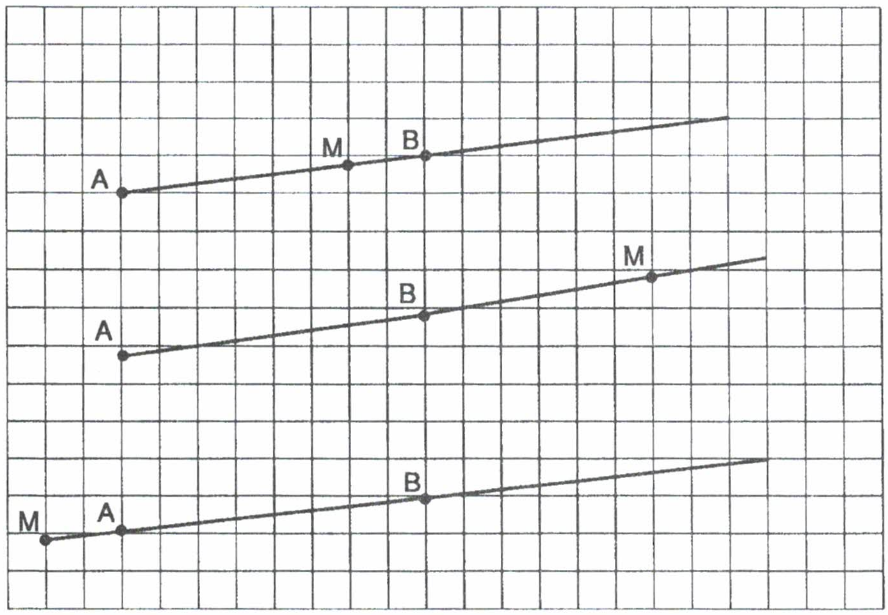
c) Place le point I tel que $\overrightarrow{AI} = \frac{3}{5}\ \overrightarrow{AN}$.

d) Détermine deux réels x et y tels que $\overrightarrow{AI} = x\ \overrightarrow{AC} + y\,\overrightarrow{CB}$.

e) Détermine deux réels z et t tels que $\overrightarrow{CI} = z\,\overrightarrow{CA} + t\,\overrightarrow{CB}$.

f) Démontre que C, I et M sont alignés.

Exercice 9 : Pour chacune des situations ci-dessous, détermine k réel tel que $\overrightarrow{AM} = k\,\overrightarrow{AB}$.



Propriété réciproque : Si trois points A, B, M sont tels que A est différent de B et A, B et M alignés, alors il existe un réel k unique tel que $\overrightarrow{AM} = k\,\overrightarrow{AB}$.

En effet

si M appartient à la demi-droite [AB) il est évident que $\left(\frac{AM}{AB}\right)\overrightarrow{AB}$ *est égal au vecteur* $\overrightarrow{AM}$ *(comparer direction, sens et norme).*

si M n'appartient pas à [AB), on démontre de même que $\left(-\frac{AM}{AB}\right)\overrightarrow{AB}$ *est égal au vecteur* $\overrightarrow{AM}$*.*

Enfin si k' vérifie aussi $\overrightarrow{AM} = k'\overrightarrow{AB}$ *alors* $(k-k')\,\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$ *ce qui entraîne* $k = k'$ *(car* $A \neq B$*).*

4.3 Droite - Demi-droite - Segment.

Propriété : Soient A et B deux points distincts. L'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM} = k\,\overrightarrow{AB}$, où k décrit $\mathbb{R}$, est la droite (AB).

Exercice 10 : Représente ci-dessous :

a) en rouge, l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM} = k\,\overrightarrow{AB}$ avec $0 \leq k \leq 1$.

b) en bleu, l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM} = k\,\overrightarrow{AB}$ avec $k < 0$.

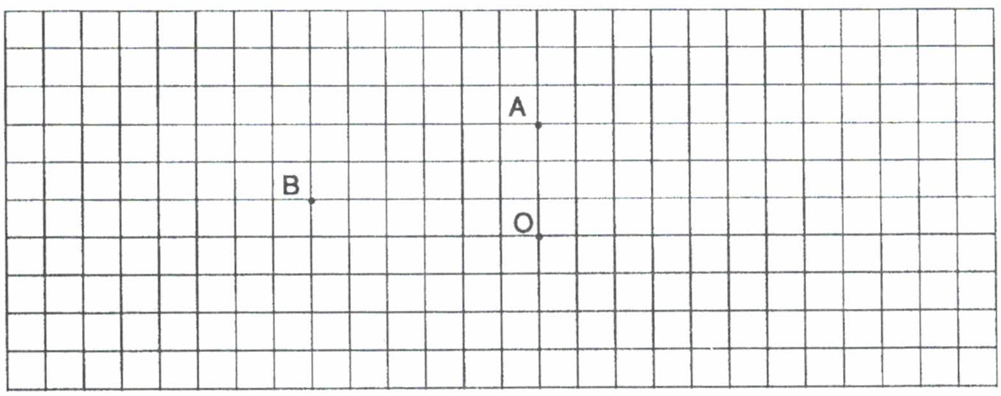
c) en vert, l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM} = k\,\overrightarrow{AB}$ avec $k > 1$.

A x   B x

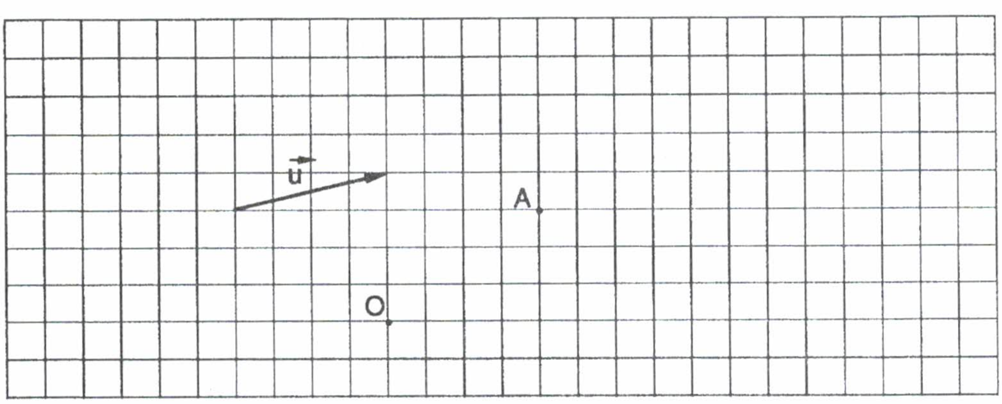
Exercice 11 : Représente ci-dessous l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM} = k\ \overrightarrow{AB}$ avec $-2 \leq k \leq 1$.

B x　　　　A x

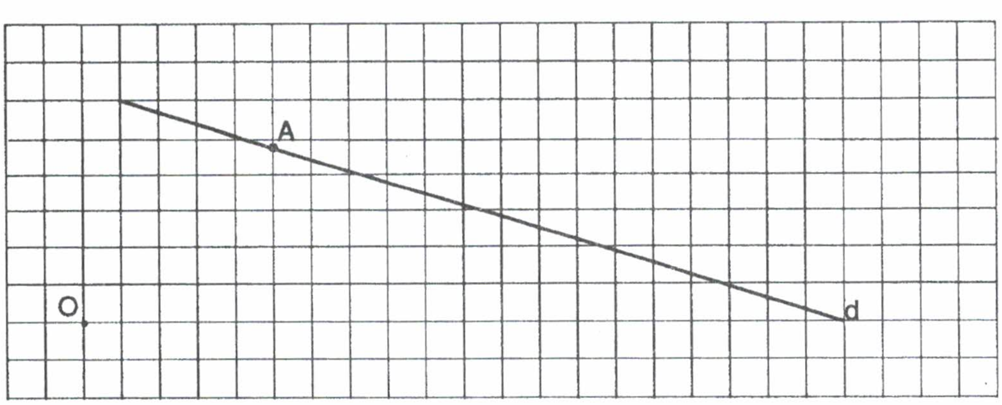
Exercice 12 : Représente ci-contre l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + k\ \overrightarrow{AB}$ avec $k > 0$.



Exercice 13 : Représente ci-contre l'ensemble des points M du plan vérifiant $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + k\ \vec{u}$ avec $-1 \leq k \leq 2$.



Exercice 14 : Représente sur le quadrillage ci-dessous un vecteur $\vec{u}$ tel que la droite d puisse se décrire comme l'ensemble des points M du plan vérifiant $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + k\ \vec{u}$ avec k réel.



As-tu plusieurs possibilités ?

4.4 - Parallélogramme.

Exercice 15 : ABCD est un parallélogramme de centre O.

a) Construis les points I, J, K, L définis par $\vec{AI} = 3\ \vec{AB}$; $\vec{BJ} = 3\ \vec{BC}$; $\vec{CK} = 3\ \vec{CD}$ et $\vec{DL} = 3\ \vec{DA}$.

b) Démontre que DJBL est un parallélogramme.

c) Exprime le vecteur $\vec{IJ}$ en fonction des vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AD}$.
Démontre que IJKL est un parallélogramme.

d) Démontre que O est aussi le centre de IJKL.

Exercice 16 : ABCD est un parallélogramme, k étant un nombre réel non nul, on définit les points P, Q, R et S par $\vec{AP} = k\ \vec{AB}$, $\vec{BQ} = k\ \vec{BC}$, $\vec{CR} = k\ \vec{CD}$ et $\vec{DS} = k\ \vec{DA}$.

a) Fais la figure pour $k = -2$.

b) Démontre dans le cas général que PQRS est un parallélogramme.

4 5 - Centre de gravité d'un triangle.

Exercice 17 : Soit ABC un triangle.

a) Le but de la question est de trouver tous les points M du plan tel que $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = \vec{0}$.

Démontre que $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = \vec{0}$ équivaut à $\vec{AM} = \frac{1}{3}\ (\vec{AB} + \vec{AC})$.

Il existe donc, un et un seul point M, tel que $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = \vec{0}$. Construis ce point.

b) Soit A' le milieu de [BC]. Montre que M, A et A' sont alignés.

c) B' et C' sont les milieux respectifs de [AC] et [BA].
Montre de même que M, B et B' sont alignés, puis les points M, C et C'.

d) Explique pourquoi les résultats obtenus en b) et c) permettent de justifier que les médianes d'un triangle sont concourantes. (Ce point de concours est appelé centre de gravité du triangle).

Propriété : Soit ABC un triangle.Ses médianes sont concourantes en un point G (appelé centre de gravité du triangle) qui vérifient les égalités suivantes :

$\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$;

$\vec{AG} = \frac{2}{3}\ \vec{AA'}$ où A' est le milieu de [BC] ;

$\vec{BG} = \frac{2}{3}\ \vec{BB'}$ où B' est le milieu de [CA] ;

$\vec{CG} = \frac{2}{3}\ \vec{CC'}$ où C' est le milieu de [AB].

Inversement, si un point M vérifie $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = \vec{0}$, ou $\vec{AM} = \frac{2}{3}\ \vec{AA'}$, ou $\vec{BM} = \frac{2}{3}\ \vec{BB'}$, ou $\vec{CM} = \frac{2}{3}\ \vec{CC'}$, (A', B', C' étant les milieux respectifs de [BC], [CA] et ([AB]) alors M est le centre de gravité du triangle ABC.

Exercice 18 : MAB est un triangle ; D est le point tel que MBDA est un parallélogramme et C le symétrique de D par rapport à M.

Exercice 18 : MAB est un triangle ; D est le point tel que MBDA est un parallélogramme et C le symétrique de D par rapport à M.

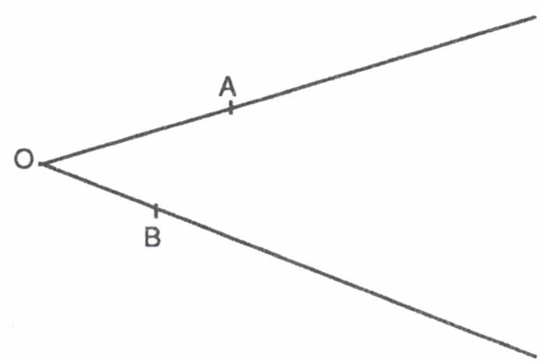
1°) Montre que $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = \vec{0}$.
2°) Soit I le milieu de [BC] et J le milieu de [AC].
Démontre que A, M et I sont alignés et que B, M et J sont alignés.

4.6 - Parallélisme.

Propriétés : Soient A, B, C, D quatre points tels que $A \neq B$ et $C \neq D$.
S'il existe un réel k tel que $\vec{CD} = k\,\vec{AB}$ alors la droite (CD) est parallèle à la droite (AB).

Résultat évident.

Exercice 19 : Place sur la figure ci-dessous les points A', B' vérifiant $\vec{OA'} = -2\,\vec{OA}$, $\vec{OB'} = -2\,\vec{OB}$.



Exprime les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{A'B'}$ en fonction des vecteurs $\vec{OA}$ et $\vec{OB}$.
Déduis-en que les droites (AB) et (A'B') sont parallèles.

Soit OAB un triangle et k un réel non nul. Si A' et B' sont les points définis respectivement par :
$\vec{OA'} = k\,\vec{OA}$ et $\vec{OB'} = k\,\vec{OB}$, alors $\vec{A'B'} = k\,\vec{AB}$ et en particulier la droite (A'B') est parallèle à la droite (AB).

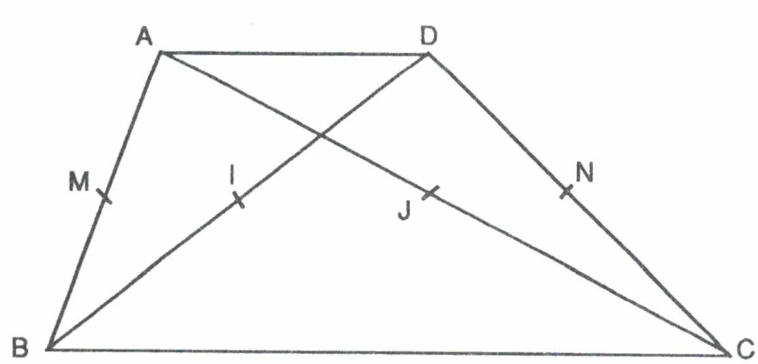
Résultat évident.

On remarquera que dans le cas particulier k = 1/2 on retrouve la configuration de la droite des milieux.

Exercice 20 : ABCD est un trapèze quelconque, M, N, I, J sont les milieux respectifs de [AB] , [DC] , [BD] , [AC] .

a) Exprime $\vec{MN}$ en fonction de $\vec{AD}$ et $\vec{BC}$ (tu pourras partir de la décomposition $\vec{MN} = \vec{MI} + \vec{IN}$).

b) Exprime de même $\vec{IJ}$ en fonction de $\vec{AD}$ et $\vec{BC}$.



Exercice 21 : Soit EFG un triangle et M et N les points définis par $\overrightarrow{EM} = -\frac{2}{7}\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{GN} = \frac{9}{7}\overrightarrow{GE}$.

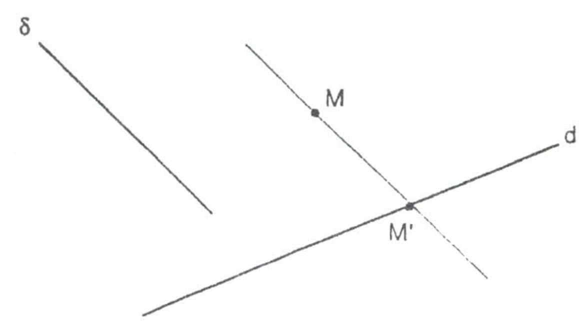
a) Fais une figure à main levée.
b) Démontre que les droites (MN) et (FG) sont parallèles.

Exercice 22 : OAB est un triangle, A' et B' sont les points du plan définis par $\overrightarrow{AA'} = \sqrt{2}\ \overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{BB'} = \sqrt{2}\ \overrightarrow{OB}$.

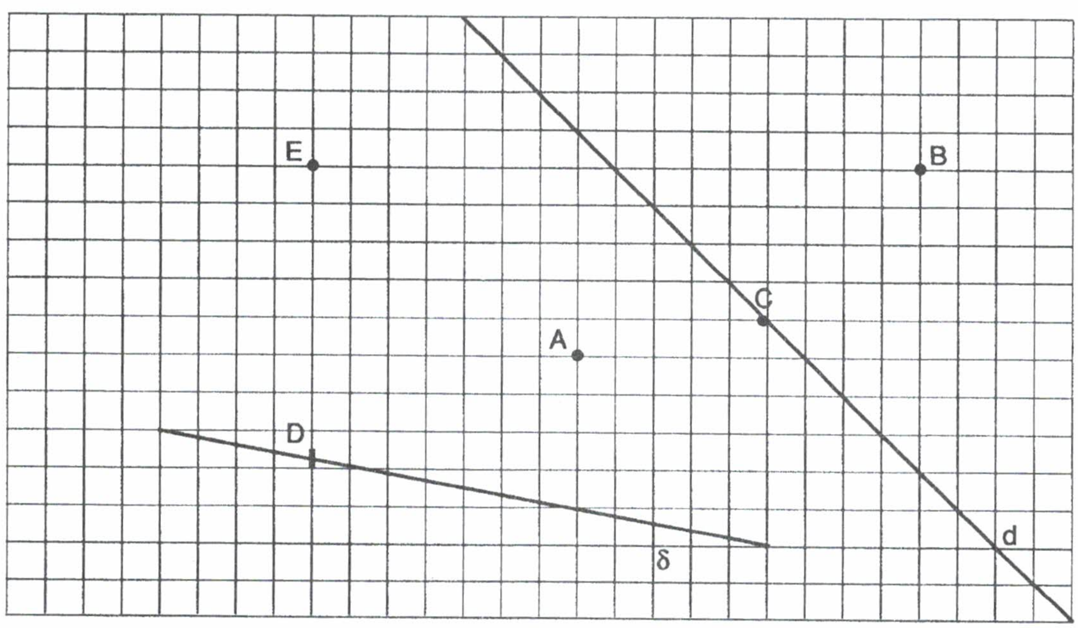
a) Fais une figure à main levée.
b) Démontre que les droites (AB) et (A'B') sont parallèles.

4.7 - Projection parallèle.

d et δ étant deux droites sécantes, on appelle **projeté de M sur d, selon la direction de** δ, le point M', intersection de d avec la parallèle à δ passant par M.



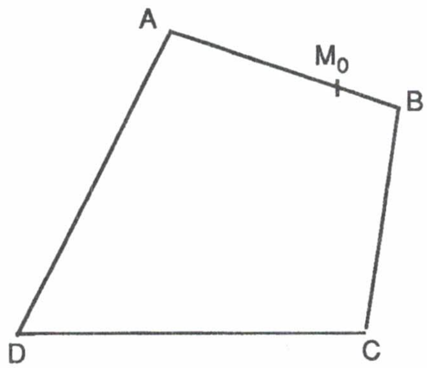
Exercice 23 : Sur la figure ci-dessous, construis les projetés A', B', C', D', E' des points A, B, C, D, E sur d selon la direction de δ.

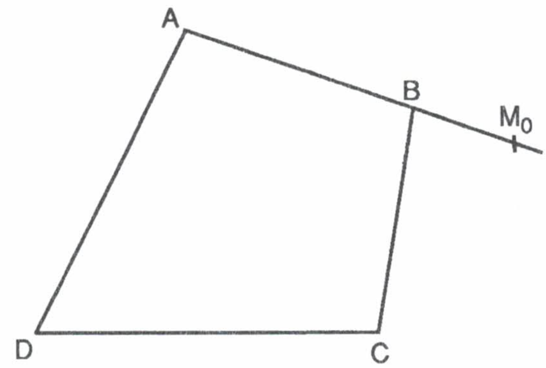


Exercice 24 : Sur chacune des figures ci-dessous, place les points M_1, M_2, M_3, M_4 ainsi définis :

M_1 est le projeté de M_0 sur (BC) selon la direction de (AC),
M_2 est le projeté de M_1 sur (CD) selon la direction de(BD),

M_3 est le projeté de M_2 sur (DA) selon la direction de (AC),
M_4 est le projeté de M_3 sur (AB) selon la direction de (BD).

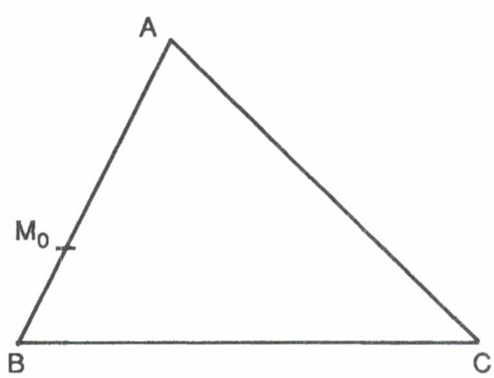


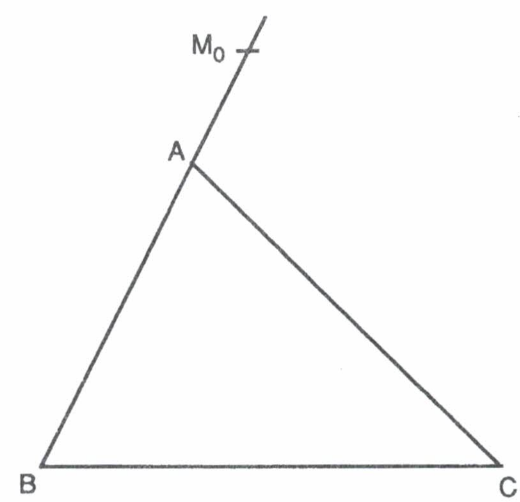


Remarque : Le résultat observé sera justifié à l'exercice n° 30.

Exercice 25 : Sur chacune des figures ci-dessous, place les points M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6 ainsi définis :

M_1 est le projeté de M_0 sur (BC) selon la direction de (AC),
M_2 est le projeté de M_1 sur (CA) selon la direction de (BA),
M_3 est le projeté de M_2 sur (AB) selon la direction de (CB),
M_4 est le projeté de M_3 sur (BC) selon la direction de (AC),
M_5 est le projeté de M_4 sur (CA) selon la direction de (BA),
M_6 est le projeté de M_5 sur (AB) selon la direction de (CB).





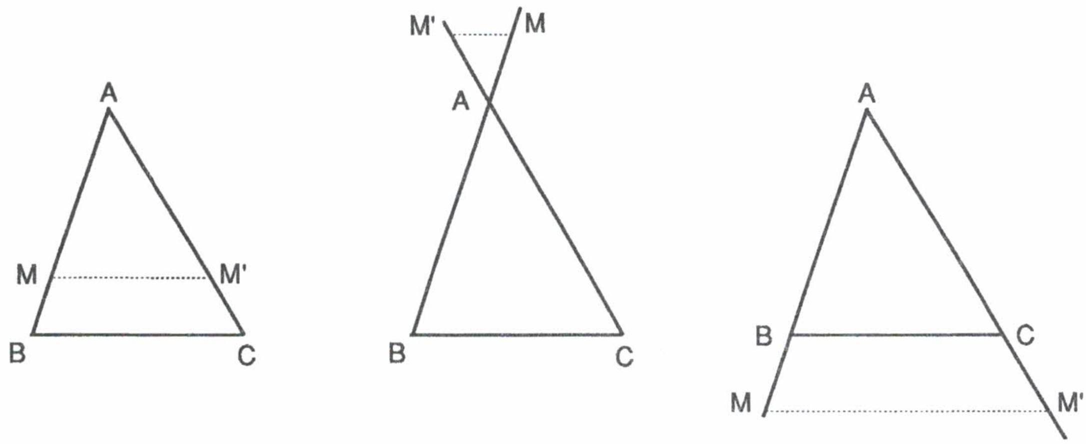
Remarque : Le résultat observé sera justifié à l'exercice n° 29.

Traduction vectorielle du théorème de THALES dans le triangle.

L'énoncé suivant a été vu en classe de 3ème :

Soit ABC un triangle, M un point de la droite (AB), M' un point de la droite (AC). Si M et M' sont distincts de A et si la droite (MM') est parallèle à la droite (BC), alors $\frac{AM}{AB} = \frac{AM'}{AC}$.

Voici trois exemples de figures illustrant les hypothèses de ce théorème :



Traduit vectoriellement, cet énoncé devient :

Soit ABC un triangle, M un point de la droite (AB), M' son projeté sur (AC) selon la direction de (BC).

Notons k le réel tel que $\overrightarrow{AM} = k\,\overrightarrow{AB}$, alors $\overrightarrow{AM'} = k\,\overrightarrow{AC}$.

Nous continuerons à appeler cet énoncé "théorème de THALES dans le triangle".

De plus, sous les hypothèses de ce théorème, on a $\overrightarrow{MM'} = k\,\overrightarrow{BC}$.

Exercice 26 : Soit ABC un triangle, O un point n'appartenant pas aux droites (AB), (AC) et (BC) et A' le point tel que $\overrightarrow{OA'} = \frac{2}{3}\,\overrightarrow{OA}$. La parallèle à (AB) passant par A' coupe (OB) en B' et la parallèle à (BC) passant par B' coupe (OC) en C'.

En considérant les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{A'C'}$, démontre que les droites (AC) et (A'C') sont parallèles.

Exercice 27 : Soit un triangle ABC, B' le milieu de [AC] et le point D tel que $\overrightarrow{BD} = \frac{1}{3}\,\overrightarrow{BC}$. Les parallèles menées par D aux droites (AC) et (AB) coupent respectivement (AB) et (AC) en M et N.

Démontre que les droites (MN) et (BB') sont parallèles.

Exercice 28 : Soit ABCD un parallélogramme, E et F les points tels que $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\,\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CF} = \frac{1}{3}\,\overrightarrow{CA}$.

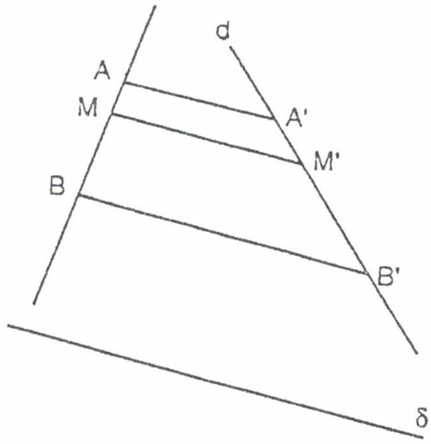
a) Démontre que (DE) est parallèle à (BF).
b) (DE) coupe (AB) en I et (BF) coupe (DC) en J. Démontre que I est le milieu de [AB] et que J est le milieu de [DC].

Propriété vectorielle de la projection parallèle

Le résultat précédent se généralise comme suit :

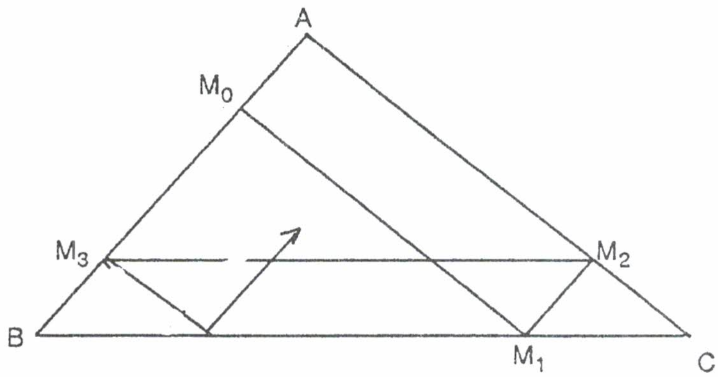
Soient A, B, M trois points alignés de projetés respectifs A', B', M' sur d selon la direction de δ.

Si k est le réel tel que $\overrightarrow{AM} = k\,\overrightarrow{AB}$, alors $\overrightarrow{A'M'} = k\,\overrightarrow{A'B'}$.



Pour démontrer le résultat ci-dessus : on trace la droite d_1 parallèle à d passant par A, elle coupe (MM') et (BB') respectivement en M_1 et B_1 qui vérifient $\overrightarrow{AM_1} = k\,\overrightarrow{AB_1}$ et on utilise les parallélogrammes de la figure pour conclure.

Exercice 29 : Nous reprenons ici la configuration de l'exercice 25.

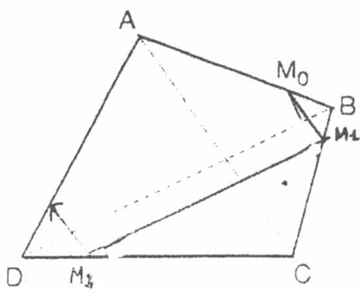


Notons k le réel tel que $\overrightarrow{AM_0} = k\,\overrightarrow{AB}$.

A chaque étape de la construction, écris la relation vectorielle traduisant la projection effectuée.

Démontre ainsi que l'on a bien $M_6 = M_0$.

Exercice 30 : Nous reprenons ici la configuration de l'exercice 24.



Notons k le réel tel que $\overrightarrow{AM_0} = k\,\overrightarrow{AB}$.

A chaque étape de la construction, écris la relation vectorielle traduisant la projection effectuée.

Démontre ainsi que l'on a bien $M_4 = M_0$.

V Mesure algébrique d'un vecteur sur un axe

5.1 Axe

On appelle **vecteur directeur** d'une droite (d), tout vecteur non nul $\vec{u}$ de même direction que celle de (d).

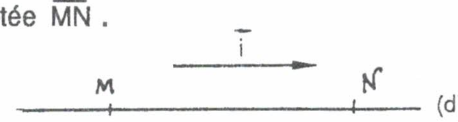
Convenons d'appeler **axe** la donnée d'une droite (d) et d'un vecteur directeur $\vec{i}$ de (d), **unitaire.** On le note $(d, \vec{i})$.

Remarquons qu'une droite (d) est le support de deux axes de sens contraires .

5.2 Mesure algébrique

Soit $(d, \vec{i})$ un axe et M et N deux points de (d). L'unique réel k tel que $\overrightarrow{MN} = k\vec{i}$ s'appelle la **mesure algébrique** de $\overrightarrow{MN}$ sur l'axe $(d, \vec{i})$. Elle est notée $\overline{MN}$.

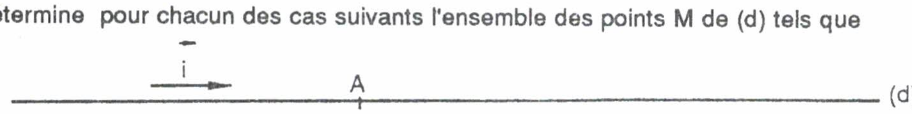
En conséquence $\overrightarrow{MN} = \overline{MN}\,\vec{i}$.



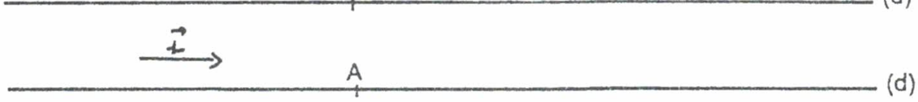
Exercice 1 : Place sur l'axe ci-dessous les points B, C, D et E tels $\overline{AB} = 3$, $\overline{AC} = -4$, $\overline{CD} = 6$ et $\overline{DE} = -7/2$.

Exercice 2 : Détermine pour chacun des cas suivants l'ensemble des points M de (d) tels que

a) MA = 3

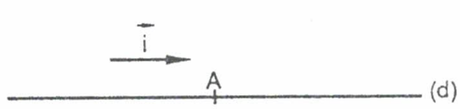


b) $\overline{MA} = 3$

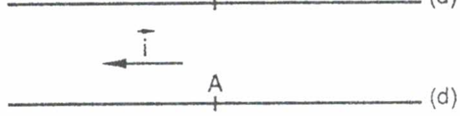


Exercice 3 : Dans chacun des 4 cas suivants détermine l'ensemble des points M de (d) tel que $\overline{AM} \geq 0$.

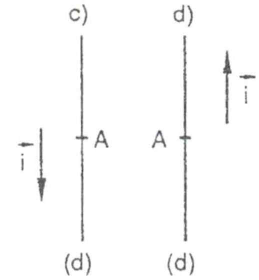
a)



b)



c) d)



Propriétés : Soit $(d, \vec{i})$ un axe et M et N deux points de (d).

P_1: $\overline{NM} = -\overline{MN}$.

P_2 : $\overline{MN} = 0$ si et seulement si $M = N$.

$\overline{MN} > 0$ si et seulement si $\vec{MN}$ et $\vec{i}$ sont de même sens et alors $\overline{MN} = MN$.

$\overline{MN} < 0$ si et seulement si $\vec{MN}$ et $\vec{i}$ sont de sens contraires et alors $\overline{MN} = -MN$.

(P_1) se déduit de $\vec{NM} = -\vec{MN}$.

(P_2) L'égalité $\vec{MN} = \overline{MN}\,\vec{i}$ nous indique que :

* si $\vec{MN}$ et $\vec{i}$ sont de même sens alors $\overline{MN} > 0$ et $\|\vec{MN}\| = \overline{MN}\ \|\vec{i}\| = \overline{MN}$.
* sinon, $\overline{MN} < 0$ et $\|\vec{MN}\| = -\overline{MN}\ \|\vec{i}\| = -\overline{MN}$ et donc $\overline{MN} = -MN$.

Exercice 4 :

a) Soit $(d, \vec{i})$ un axe et M, N, P et Q des points de (d) tels que $M \neq N$ et $P \neq Q$. Justifie que $\overline{MN}$ et $\overline{PQ}$ sont des nombres de même signe si, et seulement si, les vecteurs $\vec{MN}$ et $\vec{PQ}$ sont de même sens.

b) Représente pour chacun des cas suivants l'ensemble des points M de (d) tels que :

$\overline{MA}$ et $\overline{MB}$ sont de même signe

$\overline{MA} \cdot \overline{MB} < 0$

$\overline{AM} / \overline{AB} > 0$

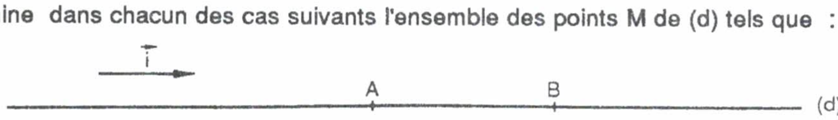
Relation de Chasles :

soit $(d, \vec{i})$ un axe, pour tous points A,B et M de (d) on a : $\overline{AM} + \overline{MB} = \overline{AB}$.

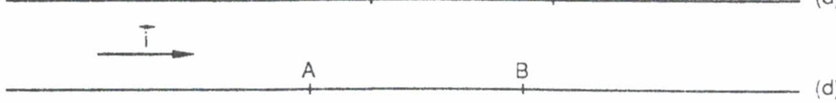
Il suffit de partir de l'égalité $\vec{AM} + \vec{MB} = \vec{AB}$.

Exercice 5 : Détermine dans chacun des cas suivants l'ensemble des points M de (d) tels que :

a) $MA = MB$.

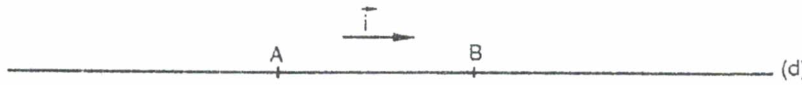


b) $\overline{MA} = \overline{MB}$.



Exercice 6 : Détermine dans chacun des cas suivants l'ensemble des points M de (d) tels que :

a) $MA + MB = AB$.



b) $\overline{MA} + \overline{MB} = \overline{AB}$.

c) $\overline{AM} + \overline{MB} = \overline{AB}$.

Exercice 7 : Détermine dans chacun des cas suivants l'ensemble des points M de (d) tels que:

a) $MA > MB$.

b) $\overline{MA} > \overline{MB}$.

c) $\overline{MA} > \overline{MB}$.

Exercice 8 : Soit $(d, \vec{i})$ un axe, deux points A et B distincts de (d), I étant le milieu de [AB], démontre que, pour tout point M de (d) $\overline{MA} + \overline{MB} = 2\overline{MI}$.

Exercice 9

a) Démontre que quels que soient les points M et N de (d) on a $(\overline{MN})^2 = MN^2$.

b) I étant le milieu de [AB], détermine et représente l'ensemble des points M tels que $\overline{MA} \cdot \overline{MB} = 3\,\overline{IA}^2$.

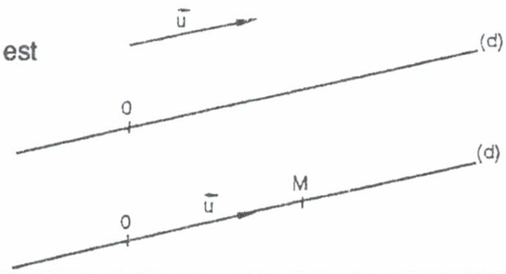
(indication: on pourra montrer au préalable que $\overline{MA} \cdot \overline{MB} = \overline{MI}^2 - \overline{IA}^2$).

VI - Repères - Bases

6.1 - Repères d'une droite.

On appelle **repère** d'une droite tout couple $(O, \vec{u})$ où O est un point de (d) et $\vec{u}$ un vecteur directeur de (d).

Soit M un point de (d), l'unique réel x tel que $\overrightarrow{OM} = x\vec{u}$ s'appelle l'**abscisse** de M dans $(O, \vec{u})$.



Exercice 1 : Soit (d) la droite de repère $(O, \vec{u})$. Place les points I, J, K, L d'abscisses respectives $x_I = 1$; $x_J = \frac{5}{2}$; $x_K = -\frac{3}{4}$ et $x_L = -2$.

Exercice 2 :

Dans le repère $(A, \overrightarrow{AB})$, calculer l'abscisse de A, B, C, D, E et F.

Dans le repère $(C, \overrightarrow{CD})$, calculer l'abscisse de A, B, C, D , E et F.

Exercice 3 :

a) Place sur la droite (d) muni du repère $(O, \vec{i})$ les points M, N, P et Q d'abscisses $x_M = 2$; $x_N = -\frac{3}{4}$; $x_P = \frac{9}{2}$ et $x_Q = -\frac{17}{4}$.

b) Exprime en fonction de $\vec{i}$ les vecteurs $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON}$ puis $\overrightarrow{MN}$.

c) Même question pour $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$ puis $\overrightarrow{QP}$.

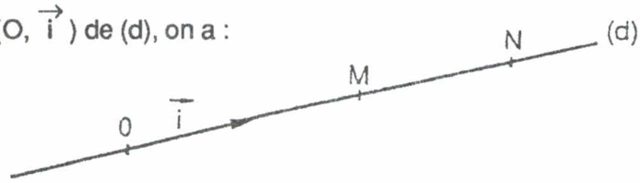
d) Calculer l'abscisse du milieu I de [MN] et celle de J milieu de [QP].

Propriété : A et B étant deux points d'une droite (d), munie d'un repère $(O, \vec{u})$, l'abscisse du milieu I de [AB] vérifie $x_I = (x_A + x_B) / 2$.

Cela résulte de la relation vectotielle $2\,\vec{OI} = \vec{OA} + \vec{OB}$.

Lien entre mesure algébrique et abscisse sur un axe

Soit $(d, \vec{i})$ un axe, dans tout repère de type $(O, \vec{i})$ de (d), on a :
pour tout point M de (d), $\overline{OM} = x_M$.
pour tous points M et N de (d), $\overline{MN} = x_N - x_M$.



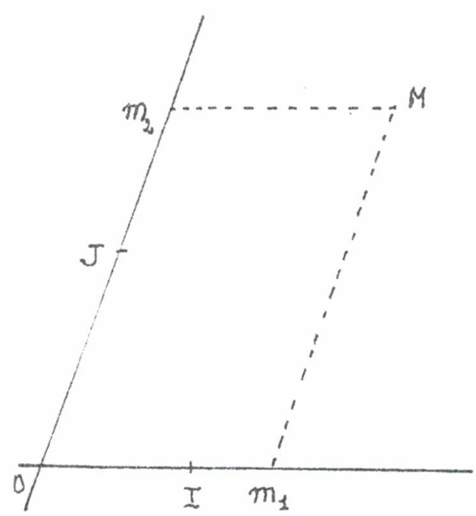
Par définition on a $\vec{OM} = x_M\,\vec{i}$ *et* $\vec{OM} = \overline{OM}\,\vec{i}$ *d'où la première égalité. Pour la seconde, on utilise la relation de Chasles.*

Exercice 4 : Une droite est munie d'un repère $(O, \vec{i})$ où $\vec{i}$ est unitaire. On considère les points A, B, C et D d'abscisses respectives 3, – 7/2, 3/4 et – 1. Déterminer par leur abscisse l'ensemble des points M dans chacun des cas suivants :

a) $2\,\overline{MA} + \overline{MB} = 1$;
b) $\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} = 0$;
c) $\overline{MA} / \overline{MC} = 2$;
d) $\overline{MA} \cdot \overline{MB} = \overline{MC} \cdot \overline{MD}$.

6.2 Repères du plan

Coordonnées d'un point dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$



Soient O, I et J trois points non alignés du plan.

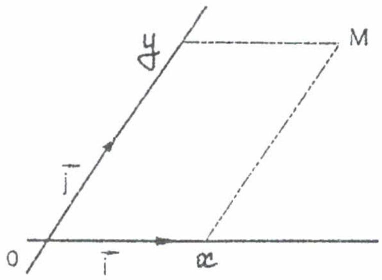
On pose $\vec{i} = \vec{OI}$ *et* $\vec{j} = \vec{OJ}$. *Soit M un point du plan,* m_1 *et* m_2 *ses projections respectives sur (OI) parallèlement à (OJ) et sur (OJ) parallèlement à (OI). On a* $\vec{OM} = \vec{Om_1} + \vec{Om_2}$.

Soit x l'abscisse de m_1 *dans le repère* $(O, \vec{i})$ *et y celle de* m_2 *dans le repère* $(O, \vec{j})$*. alors* $\vec{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$. *L'unicité du couple (x;y) ainsi associé au point M s'obtient aisément :*

(si x' et y' sont tels que $x'\,\vec{i} + y'\,\vec{j} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$ *on en déduit que*

$(x' - x)\,\vec{i} = (y - y')\,\vec{j}$ *d'où* $x' = x$ *et* $y' = y$ *(exercice 11 p24).*

On appelle **repère** du plan tout triplet $(O, \vec{i}, \vec{j})$ où O est un point du plan et $\vec{i}$ et $\vec{j}$ deux vecteurs non colinéaires. Pour tout point M du plan, il existe un unique couple (x;y) de réels tels que $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$.
(x ; y) est appelé le couple de **coordonnées** du point M dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, x est l'**abscisse** du point M y son **ordonnée**. On notera M (x ; y).



Exercice 5 : Le plan est rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Construis les points A,B,C tel que $\vec{OA} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$; $\vec{OB} = -\vec{i} + \vec{j}$; $\vec{OC} = 4\vec{j}$.

Détermine les coordonnées de A, B , C dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

2) Exprime $\vec{AB}$ et $\vec{CA}$ en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

3) Soit D le point tel que $\vec{OD} = \vec{AB}$. Quelles sont les coordonnées de D ?

Exercice 6 : Le plan est rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Construis les points R (2 , – 3) ; S (1 , 4) ; T (– 1 ,0) .

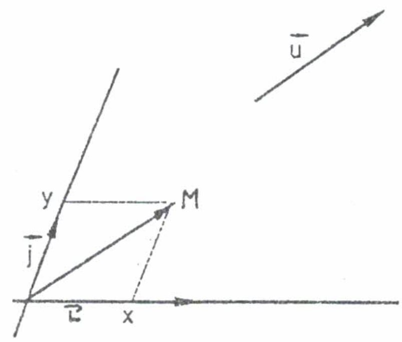
Exprime les vecteurs $\vec{OR}$, $\vec{OS}$, $\vec{OT}$ en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$ .Puis les vecteurs $\vec{RS}$ et $\vec{ST}$.

Coordonnées d'un vecteur dans une base $(\vec{i}, \vec{j})$

$(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère du plan , $\vec{u}$ un vecteur du plan .

Soit M le point tel que $\vec{OM} = \vec{u}$.
Notons (x ; y) les coordonnées de M .

Alors $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ d'où $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$.
On peut démontrer comme précédemment l'unicité du couple (x ; y) ainsi associé au vecteur $\vec{u}$.



On appelle **base** de l'ensemble des vecteurs du plan tout couple $(\vec{i} ; \vec{j})$ de vecteurs non colinéaires .
Pour tout vecteur $\vec{u}$ il existe un unique couple de réels (x ; y) tel que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$.
(x ; y) s'appelle les **coordonnées** du vecteur $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i} ; \vec{j})$. On notera $\vec{u}$ (x ; y)

$\vec{0} = 0\vec{i} + 0\vec{j}$ donc $\vec{0}$ (0 ; 0) ; de même $\vec{i}$ a pour coordonnées (1 ; 0) et $\vec{j}$ (0 ; 1).

Il résulte aussi de la définition que les coordonnées d'un point M dans le repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ sont également les coordonnées du vecteur $\vec{OM}$ dans la base $(\vec{i} ; \vec{j})$.

Exercice 7 : Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on considère le point A (– 1, 2).

1) Soit le vecteur $\vec{u}$ (2,3) et la droite (D) passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$. Place le point B tel que $\vec{AB} = 2\vec{i}$; place le point C tel que $\vec{BC} = 3\vec{j}$. Justifie que (D) = (AC) .

2) Construis la droite (D') passant par A et de vecteur directeur $\vec{v}$ (– 3, 1) .

3) Construis la droite (D") passant par A et de vecteur directeur $\vec{w}$ (900, 450).

Propriétés : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées (x ; y) et (x' ; y') dans la base $(\vec{i} ; \vec{j})$ et k un nombre réel.

P_1 : $\vec{u} = \vec{v}$ équivaut à (x = x' et y = y').

P_2 : $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées (x + x' ; y + y').

P_3 : $k\vec{u}$ a pour cordonnées (kx ; ky).

Soient A et B les points de coordonnées (x_A ; y_A) et (x_B ; y_B) dans le repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

P_4 : $\vec{AB}$ a pour coordonnées ($x_B - x_A$; $y_B - y_A$).

P_5 : Le milieu I de [AB] a pour coordonnées (($x_B + x_A$)/2; ($y_B + y_A$)/2).

Exercice 8 : Dans le plan rapporté à un repère $(O , \vec{i} , \vec{j})$, on considère les points A (– 3 ; 2/3) , B (– 2 ; 11/3) , C(0 ; 3) , D (1 ; 6) et E(– 2 ; – 3) .
1) Démontre que ABDC est un parallélogramme.
2) Trouve les coordonnées du point F tel que ABFE soit un parallélogramme.
3) Détermine les coordonnées des milieux de [BF] et [AC]. Qu'en déduis-tu ?

Exercice 9 : Dans le plan rapporté à un repère $(O , \vec{i} , \vec{j})$ on considère les points A (– 3 ; – 4), B(1 ; – 8) et C (5 ; 6). G est un point de coordonnées (x ; y).
1) On pose $\vec{u} = \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC}$. Exprime les coordonnées de $\vec{u}$ en fonction de x et y.
2) Détermine les coordonnées du centre de gravité du triangle ABC.

Exercice 10 : Dans un repère $(O , \vec{i} , \vec{j})$ on considère le point A (– 3, 1) , le vecteur $\vec{u}$ (2,6) et la droite (d) (A , $\vec{u}$).
1) Représente la droite (d).
2) Construis à partir de A ,le représentant du vecteur directeur de (d) dont la première coordonnée est 1 .

Traduction analytique de la colinéarité.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs de coordonnées (x ; y) et (x' ; y') dans la même base,
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** si et seulement si x y' – y x' = 0.

Démonstration : Supposons $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires .

si $\vec{u} = \vec{0}$ alors x y' – y x' = 0 puisque x = y = 0.

si $\vec{u} \neq \vec{0}$ alors il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\,\vec{u}$ ce qui équivaut à x' = k x et y' = k y ;
donc xy' – yx' = x (ky) – y (kx) = k (xy – yx) = 0.
Réciproquement, on suppose xy' – yx' = 0, soit, xy' = yx'.

Si les quatre nombres sont nuls, $\vec{u} = \vec{v} = \vec{0}$.

Sinon, par exemple si $x \neq 0$, $y' = \frac{yx'}{x}$; donc $\vec{v} = x'\,\vec{i} + \frac{x'y}{x}\,\vec{j} = \frac{x'}{x}(x\,\vec{i} + y\,\vec{j}) = \frac{x'}{x}\,\vec{u}$ ce qui montre la colinéarité.

Exercice 11 : Dans un repère $(O , \vec{i} , \vec{j})$, place les points A (– 1,3), B (1,1) et C (4, – 2).

a) calcule les coordonnées des vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$. Démontre l'alignement des points A, B, C.
b) On considère le point E (x, – 3). Détermine x pour que les points A, B, E soient alignés.

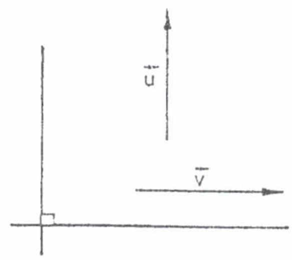
Exercice 12 : Le plan étant rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on considère les points A (734 ; – 2202), B (1101 ; 734), C (367 ; 1835) et D (– 1468 ; 1101).
1) ABCD est-il un trapèze ?
2) Soit E (4037 ; 3303). Les points D, C et E sont-ils alignés ?

Exercice 13 : ABC est un triangle, M le point tel que $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, P le point tel que $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ et N le point tel que $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AM}$. Dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, détermine les coordonnées de M, P et N. Calcule les coordonnées de $\overrightarrow{NB}$ et $\overrightarrow{NC}$. Démontre que $\overrightarrow{NB}$ et $\overrightarrow{NC}$ sont colinéaires. Conclus.

6.3 - Repères orthonormaux.

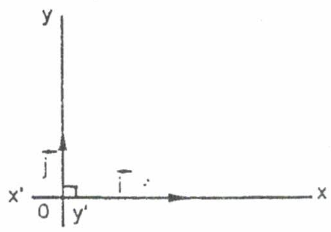
Vecteurs orthogonaux

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls sont orthogonaux s'ils ont des directions perpendiculaires. Par définition le vecteur nul est orthogonal à n'importe quel vecteur .



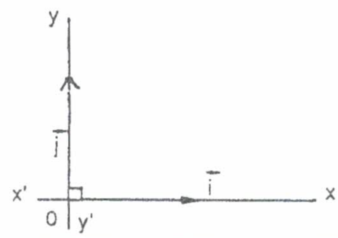
Repère orthogonal

$\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont orthogonaux



Repère orthonormal

$\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont orthogonaux et unitaires



Propriétés : Dans une base orthonormale $(\vec{i}, \vec{j})$, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs de coordonnées (x , y)
et (x' , y'), alors :

P_1 : $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

En conséquence, si A et B sont deux points de coordonnées $(x_A ; y_A)$ et $(x_B ; y_B)$ dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, alors : $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

P_2 : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** si, et seulement si, $xx' + yy' = 0$.

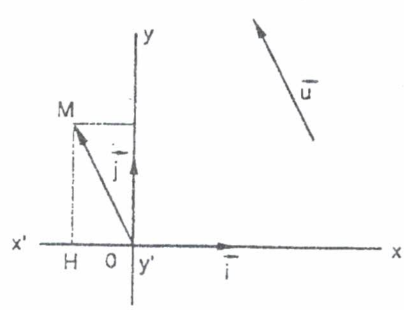
(P_1) Supposons $\vec{u}$ non colinéaire à $\vec{i}$ et non colinéaire à $\vec{j}$.

Soit M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.
On désigne par H le projeté orthogonal de M sur x'Ox
le théorème de Pythagore appliqué au triangle rectangle OHM donne $OM^2 = OH^2 + HM^2$.

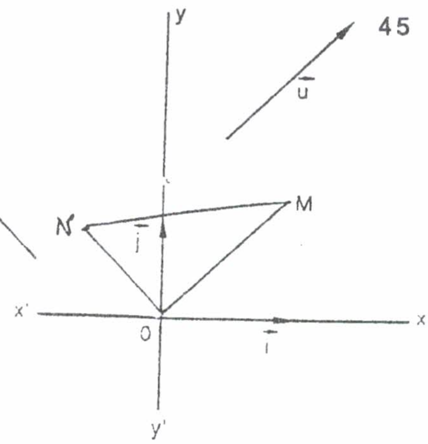
$\|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2$ car $OH = |\overline{OH}| = |x|$ et $HM = |\overline{HM}| = |y|$.

Si $\vec{u}$ est colinéaire à $\vec{i}$, alors M appartient à x'Ox et $\|\vec{u}\| = OM = |x|$.

Si $\vec{u}$ est colinéaire à $\vec{j}$, alors M appartient à y'Oy et $\|\vec{u}\| = OM = |y|$.



Dans ces deux cas la relation $\|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2$ est encore vérifiée.



(P_2) Soit M et N tels que $\vec{u} = \vec{OM}$ et $\vec{v} = \vec{ON}$.

On suppose que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux :
Si l'un des vecteurs est nul, la relation est vérifiée.
Sinon, M et N sont distincts de O et le triangle MON est rectangle en O.
D'après le théorème de Pythagore, on a
$MN^2 = OM^2 + ON^2$, soit $(x - x')^2 + (y - y')^2 = x^2 + y^2 + x'^2 + y'^2$
ou encore $xx' + yy' = 0$.

Réciproquement, on suppose que $xx' + yy' = 0$.

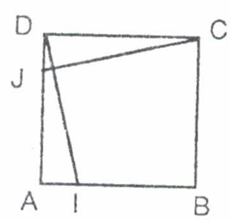
Si l'un des deux vecteurs est nul, alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux .
Sinon, M est différent de O et N est différent de O.
La relation $xx' + yy' = 0$ conduit à $MN^2 = OM^2 + ON^2$, la réciproque du théorème de Pythagore permettant alors de conclure.

Exercice 14: Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points A, B, C, D de coordonnées respectives $(-2,0)$, $(1, -3)$, $(6,2)$, $(3,5)$.
Démontre que le quadrilatère ABCD est un rectangle.

Exercice 15 : Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points P, Q, R et S :
$P(2 + \sqrt{5} ; 3)$, $Q(1 ; 2 + \sqrt{5})$, $R(2 - \sqrt{5} ; 1)$ et $S(3 ; 2 - \sqrt{5})$, démontre que le quadrilatère PQRS est un losange, est-ce un carré ?
Dans chacun des cas suivants, caractérise précisément la nature du quadrilatère PQRS.

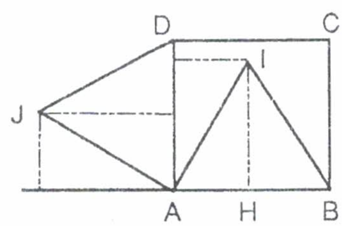
$P(-1 ; -2 - \sqrt{5})$, $Q(\sqrt{5} ; -2)$, $R(1 ; 2 + \sqrt{5})$ et $S(-\sqrt{5} ; 2)$.
$P(-\sqrt{2} ; 1 - \sqrt{2})$, $Q(2 - \sqrt{7}) ; 1 + \sqrt{7})$, $R(2 + \sqrt{2} ; 3 + \sqrt{2})$ et $S(\sqrt{7} ; 3 - \sqrt{7})$.

Exercice 16 : ABCD est un carré et I et J les points tels que
$\vec{AI} = 1/3\ \vec{AB}$ et $\vec{DJ} = 1/3\ \vec{DA}$.



1) Dans le repère $(A, \vec{AB}, \vec{AD})$, calcule les coordonnées des points C, D, I et J.
2) Démontre que les droites (ID) et (CJ) sont perpendiculaires.

Exercice 17 : ABCD est un carré . On construit à l'intérieur du carré le triangle équilatéral ABI et à l'extérieur du carré, le triangle équilatéral DAJ.



1) On note H le milieu de [AB] calcule IH.

En déduire les coordonnées de I dans le repère $(A, \vec{AB}, \vec{AD})$.
2) Calcule de même celles de J.
3) Démontre que les points C, I et J sont alignés.

Exercice 18: Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points $A(101 ; -22)$, $B(107 ; -19)$ et $C(102, -\frac{33}{2})$.

a) Démontre que le triangle ABC est isocèle.
b) Détermine les coordonnées du point D pour que le quadrilatère ACBD soit un losange.

Exercice 19 : Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, soient les points $M(3 ; -6)$ et $N(2\sqrt{5} ; -5)$.
a) Démontre que $OM = ON$.
b) Vérifie par un calcul que $\vec{OM} + \vec{ON}$ est orthogonal à $\vec{OM} - \vec{ON}$. Pouvais- tu prévoir ce résultat géométriquement?

Exercice 20 : Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points A(– 1 ; 3), B(– 3 ; – 1) et C(2 ; 2).

On note P un point de coordonnées (x ; y) tel que $\overrightarrow{AP}$ soit orthogonal à $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BP}$ colinéaire $\overrightarrow{BC}$.
1) Construis P. Que représente - t- il ?
2) Détermine par le calcul les coordonnées du point P. Calcule AP.
3) M étant un point quelconque de la droite (BC), justifie que AM $\geq$ AP.
La distance AP s'appelle la distance du point A à la droite (BC).
4) Calcule de même la distance de B à la droite (AC).

Exercice 21 : Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points A(– 2 ; – 3) et B(4 ; 5) .
1) Le point C(3 ; – 1/2) est - il situé sur la médiatrice de [AB] ? Même question pour le point D(11,– 7).
2) Trouve une relation entre les coordonnées (x ; y) d'un point M pour que ce point soit sur la médiatrice de [AB]
a) En traduisant que M est équidistant de A et de B.

b) En traduisant que $\overrightarrow{IM}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$, avec I milieu de [AB].

Exercice 22 : Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points A(1 ; – 1) , B(9 ; 3) , M(18 ; – 3) et N(10 ; 14).
1) Les points M et N sont-ils symétriques par rapport à la droite (AB) ?
2) En est - il de même avec les points P(7 ; – 3) et Q (3 ; 5) ?

VII Equations de droites

Exercice 1 : Dans un plan rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère le point A(3,1) et le vecteur $\vec{t}$ (2, – 1)
Soit M un point de coordonnées (x,y) .
1) Trouve une relation entre x et y permettant de décider si M appartient à la droite (d) passant par A et de vecteur directeur $\vec{t}$.

(Indication : traduis la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{t}$)
2) Les points B (7,1) ; C (– 2, 2) ; E (– 15 ; 17) et F (597,– 295) appartiennent -ils à la droite (d) ?

Généralisation : Dans un plan rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère le point A(x_0,y_0) et le vecteur non nul $\vec{t}$ (a, b) . M un point de coordonnées (x,y) appartient à la droite (D) passant par A et de vecteur directeur $\vec{t}$ si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{t}$ sont colinéaires, c'est -à-dire si, et seulement si, x et y vérifient $b(x- x_0) - a(y- y_0) = 0$. Cette condition s'appelle une équation cartésienne de la droite (D) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Remarque : cette équation peut aussi s'écrire $bx - ay -bx_0 + ay_0= 0$ autrement dit $ux+vy+w = 0$ en posant $u = b$, $v = -a$ et $w =ay_0- bx_0$ .On notera que les nombres u et v ne sont pas simultanément nuls .

> **Propriété :** Toute droite du plan a dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, une équation de la forme $ux + vy + w = 0$.

Exercice 2 : Dans le plan rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et dans chacun des cas suivants, détermine une équation de la droite (d) passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

1) A (1 , 2) et $\vec{u}$ (3, – 1).
2) A (1/2 , – 3/2) et $\vec{u}$ (2/5, 0).
3) A (– 1 , 1) et $\vec{u}$ $(0, -\sqrt{2})$.
4) A (0, – 5) et $\vec{u}$ (– 420, 1050).

Exercice 3 : Dans le plan rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et dans chacun des cas suivants, détermine une équation de la droite (AB).
1) A (2 , 3) et B (– 1, 5).
2) A (0 , – 2) et B (– 2, 0).
3) A (2,– 1) et B (2, 4).
4) A (– 3, – 1) et B (7,– 1).
5) A (2/3, – 1/2) et B (– 5/7, – 2/7).

Réciproque . u, v et w étant trois réels donnés. On se propose de déterminer l'ensemble Δ des points M du plan dont les coordonnées (x, y) vérifient l'équation (E) $ux+ vy + w = 0$.

1 cas : $u=v=0$,
si $w= 0$ alors tout couple (x, y) est solution de (E) et Δ est le plan .
si $w \neq 0$ alors (E) n'admet aucune solution et $\Delta = \varnothing$.
2 cas : u et v ne sont pas simultanément nuls . Supposons par exemple $v \neq 0$,alors le point M (x , y) appartient à Δ si, et seulement si, $ux + vy + w = 0$, c'est-à-dire $u(x - 0) + v(y - (-\frac{w}{v})) = 0$ (1)

Ce qui équivaut à $\overrightarrow{M_0M}$ et $\vec{t}$ colinéaires où $\vec{t}$ est le vecteur de coordonnées (–v ; u) et M_0 le point de ccordonnées $(0 ; -\frac{w}{v})$. Donc Δ est la droite passant par M_0 et de vecteur directeur $\vec{t}$.

Propriété : Soit u, v, w trois réels tels que $(u, v) \neq (0, 0)$. L'ensemble des points M dont les coordonnées (x, y) vérifient $ux+vy+w = 0$ est une droite dont un vecteur directeur a pour coordonnées $(-v, u)$.

Exercice 4 : Dans le plan rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on considère la droite (D) d'équation $5x-2y+3 = 0$.
a) Donne un point et un vecteur directeur de (D).
b) Détermine l'ordonnée du point A d'abscisse -1.
c) Détermine l'abscisse du point B d'ordonnée $5/4$.
d) Construis (D).

Exercice 5 : Dans le plan rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on considère la droite (D) d'équation $3x-5y+2 = 0$ et la droite (D') d'équation $-6x+10y-15 = 0$.
a) Les droites (D) et (D') sont-elles parallèles ?
b) Ecris une équation de la droite (Δ) parallèle à (D), et passant par O, puis une équation de la droite (Δ') passant par $A(-5, 2)$ et parallèle à (D).

Lien avec les équations réduites

Toute droite (D) non parallèle à l'axe des ordonnées a une équation de la forme $y = mx + p$, le vecteur de coordonnées $(1 ; m)$ est alors un vecteur directeur de (D). Le réel m est appelé coefficient directeur de (D).
Toute droite parallèle à l'axe des ordonnées a une équation de la forme $x = k$.

On sait que toute droite (D) du plan a une équation de la forme $ux + vy + w = 0$ (1) avec $(u, v) \neq (0, 0)$ et pour vecteur directeur $\vec{t}\,(-v, u)$.

•si $v = 0$, (D) est parallèle à l'axe $(O, \vec{j})$ et l'équation (1) devient $ux + w = 0$, soit $x = -\frac{w}{u}$, puisque $u \neq 0$.

•si $v \neq 0$, (D) n'est pas parallèle à l'axe $(O, \vec{j})$ et (1) s'écrit $y = -\frac{u}{v}x - \frac{w}{v}$ donc sous la forme $y = mx + p$. Cette égalité peut s'écrire $mx - y + p = 0$ donc un vecteur directeur de la droite (D) a pour coordonnées $(1, m)$.

Rappel

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, si les droites (D) et (D') ont pour équations $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$ alors
1) (D) et (D') sont parallèles si, et seulement si, $m = m'$.
2) (D) et (D') sont perpendiculaires si, et seulement si, $mm' = -1$.

Démonstration : $\vec{t}\,(1, m)$ *et* $\vec{t'}\,(1, m')$ *sont des vecteurs directeurs respectifs de (D) et (D').*

• (D) est parallèle à (D') équivaut $\vec{t}$ et $\vec{t'}$ colinéaires d'où $1\,m' - 1.m = 0$.

• (D) est perpendiculaire à (D') équivaut $\vec{t}$ et $\vec{t'}$ orthogonaux d'où $1.1 + m.m' = 0$.

Exercice 6 : Dans le plan rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on considère la droite (D) d'équation $12x - 18y + 7 = 0$.
Détermine 3 vecteurs directeurs de (D). Ecris l'équation réduite de (D) et construis (D).

Exercice 7 : Dans le plan rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on considère la droite (D) d'équation $4x + 3y - 1 = 0$.
Les vecteurs suivants dirigent-ils la droite (D) ? $\vec{u}\,(-4, 3)$; $\vec{v}\,(-3, 4)$; $\vec{w}\,(-3, -4)$; $\vec{s}\,(3, 4)$; $\vec{t}\,(3/2, -2)$.
Ecris l'équation réduite de (D) et construis (D).

Exercice 8 : Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on considère la droite (Δ) d'équation $2x - 3y + 5 = 0$ et la droite (Δ') d'équation $3x + 2y - 1 = 0$.

a) Les droites (Δ) et (Δ') sont-elles perpendiculaires ?

b) Ecris une équation de la droite (D) perpendiculaire à (Δ) et passant $A(1, -3)$.

Exercice 9 : Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ une droite (D) a pour équation $y = 3x - 2$

a) Ecris l'équation réduite de la droite (Δ), parallèle à (D), passant par $I(1, -5)$.

b) Ecris l'équation réduite de la droite (Δ'), perpendiculaire à (D), passant par $I(1, -5)$.

Exercice 10 : Dans le plan rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on considère la droite (D) d'équation $2x + 5y - 3 = 0$ et la droite (D') d'équation $y = -2x + 5$. Construis (D) et (D').

a) Détermine une équation de la droite (Δ) parallèle à (D) passant par le point $A(1, -1)$.

b) Détermine une équation de la droite (Δ') parallèle à (D'), et passant par $B(-2,3)$.