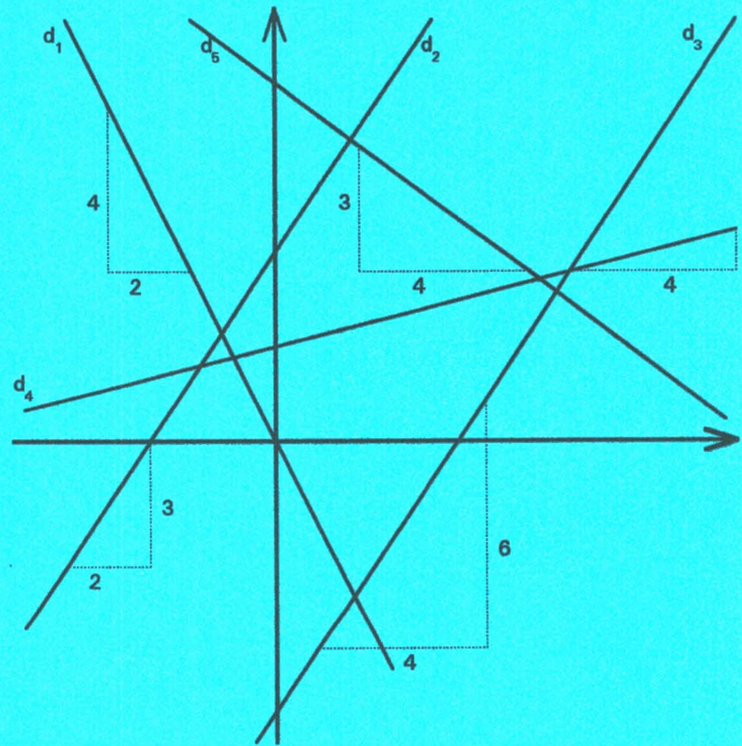
Université Henri Poincaré
NANCY 1
I.R.E.M. DE LORRAINE

PENTE

Classe de 3ème

EQUATIONS DE DROITES



PENTE

© Edité et imprimé par l'Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques - (Université de NANCY I - Faculté des Sciences) - B.P. 239 - 54506 VANDOEUVRE-les-NANCY CEDEX
Dépôt légal : 4ème trimestre 1996
n° de la publication : 2-85406-154-3
Responsable de la publication : Le Directeur de l'IREM, Michel BONN

Les auteurs :

Dany DIDRY

Martine POIROT

Michèle THIRY

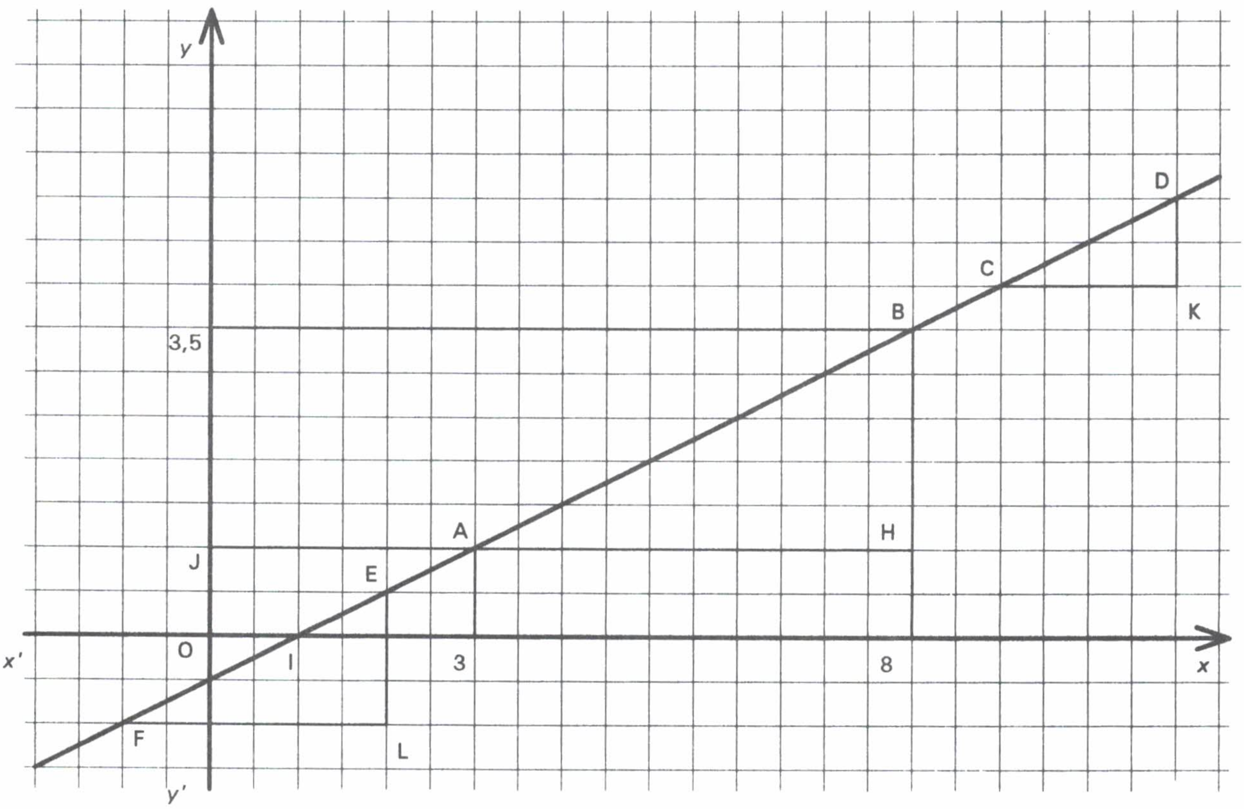
Pente d'une droite en repère orthonormal

I. Activité

Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), pour tout point M, on note x_M son abscisse et y_M son ordonnée.
On écrit : $M(x_M; y_M)$.
Dans le repère ci-dessous, considérons la droite (AB), où A (3 ; 1) et B (8 ; 3,5).

Dans ce cas, comme on a : $x_B > x_A$ et $y_B > y_A$

- la longueur AH est égale à $x_B - x_A = 8 - 3 = 5$. C'est la variation de x entre A et B (ici une augmentation)
- la longueur HB est égale à $y_B - y_A = 3{,}5 - 1 = 2{,}5$. C'est la variation de y entre A et B. (ici encore une augmentation)



Calcule le rapport de ces variations : $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{HB}{AH} = ...$

Recommence avec les points C et D :.....

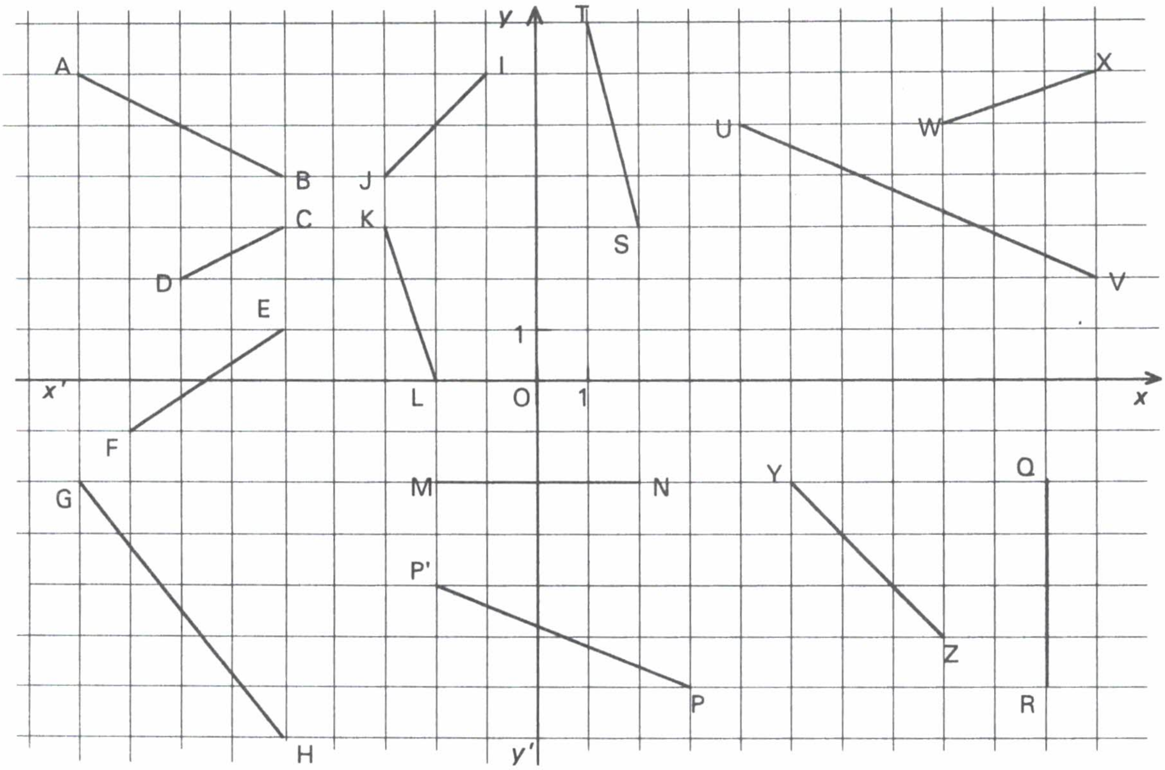
Recommence avec les points E et F :

Plutôt que de faire de nombreux essais, on peut démontrer le résultat suivant :

On considère dans un repère une droite non parallèle à l'axe des ordonnées.
Soit M et N deux points quelconques de cette droite. ($x_M \neq x_N$)
Le rapport $\dfrac{y_N - y_M}{x_N - x_M}$ ne dépend pas des points M et N. Il ne dépend que de la droite.
Ce rapport s'appelle : - **pente** de la droite en repère orthonormal,
- **coefficient directeur** de la droite en repère quelconque.

II. Exercices

1.a) Complète le tableau en précisant s'il s'agit d'une augmentation ou d'une diminution.

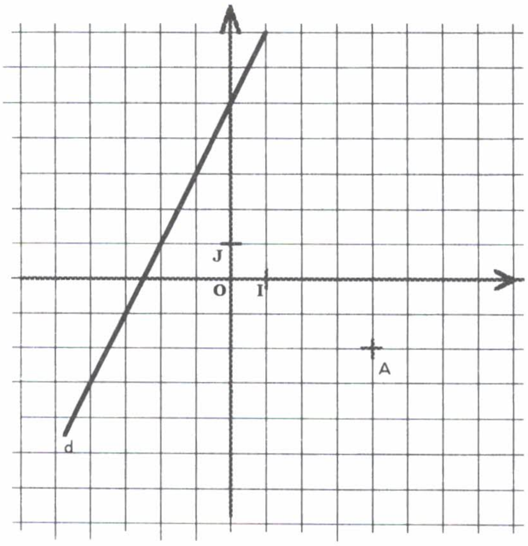


déplacement de	variation des x	variation des y	pente
ex. : A vers B	4 augmentation (A)	-2 diminution (D)	$-\frac{1}{2}$
C vers D			
F vers E			
H vers G			
I vers J			
K vers L			
M vers N			
P vers P'			
Q vers R			
S vers T			
U vers V			
X vers W			
Z vers Y			

1.b) Sur la figure de la page précédente, colorie en vert les droites de pente positive, en rouge celles de pente négative.

Que peut-on dire des droites de pente positive ? des droites de pente négative ?

2.

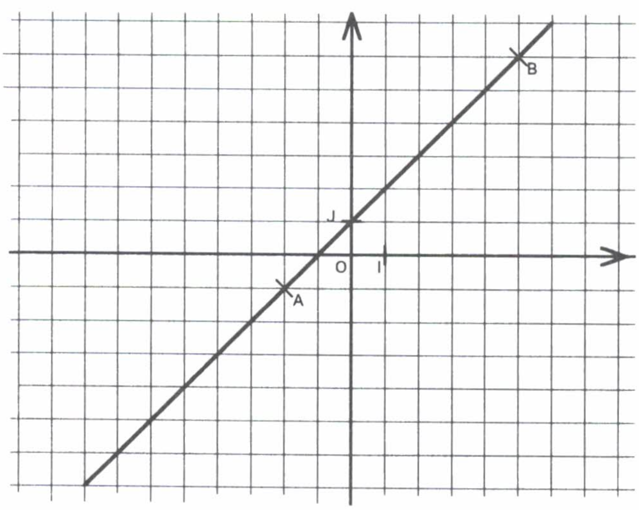


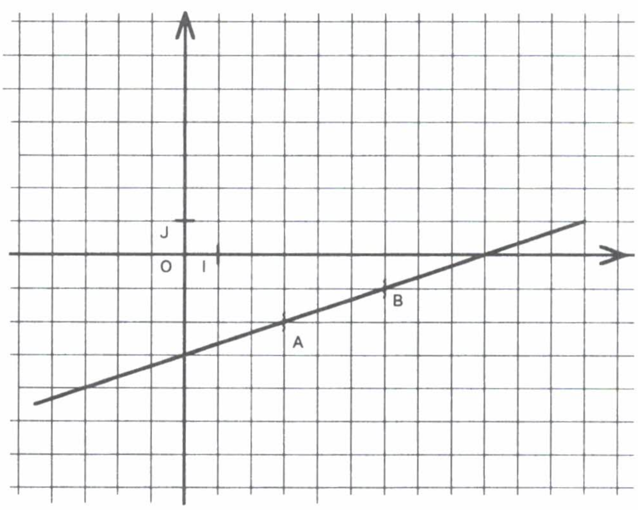
Dans le repère (O, I, J), nous avons tracé la droite d.

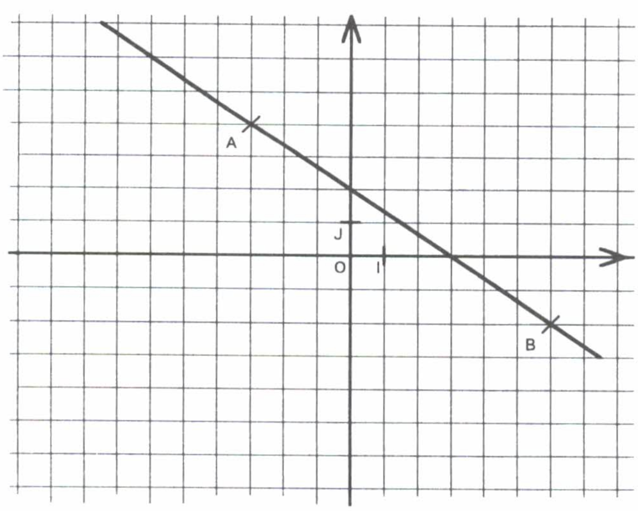
a) Sur cette droite choisis 3 points E, F, G dont les coordonnées sont entières.
Calcule de 3 manières différentes la pente de d.

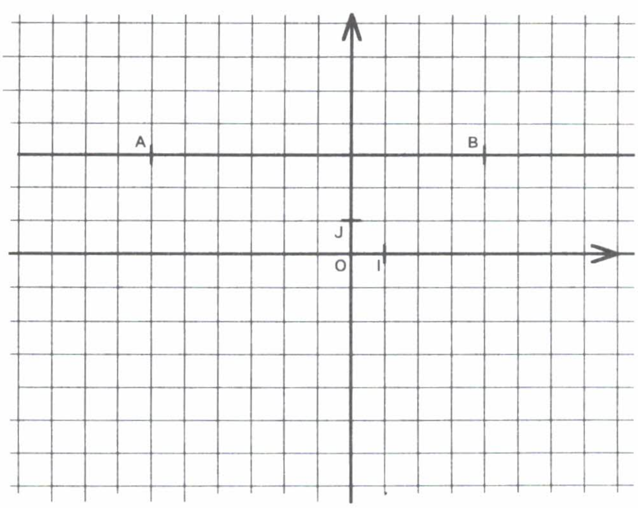
b) En utilisant le quadrillage, trace la parallèle à la droite d passant par le point A.
Quelle est sa pente ?

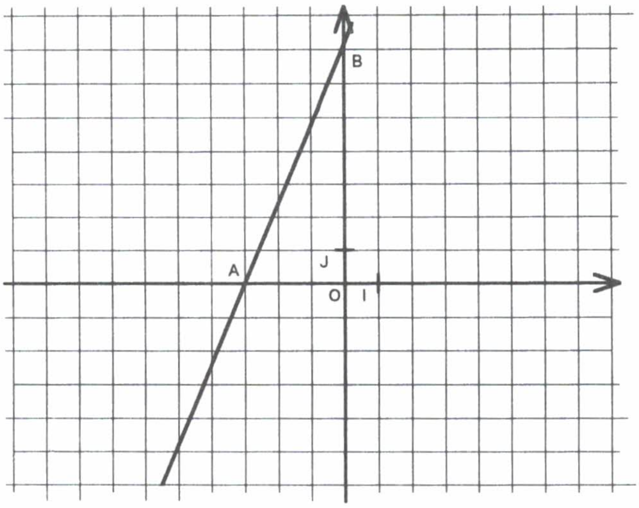
3. En utilisant les coordonnées des points indiqués, calcule le coefficient directeur de chacune des six droites suivantes. Vérifie ton résultat en traçant un triangle rectangle convenable.

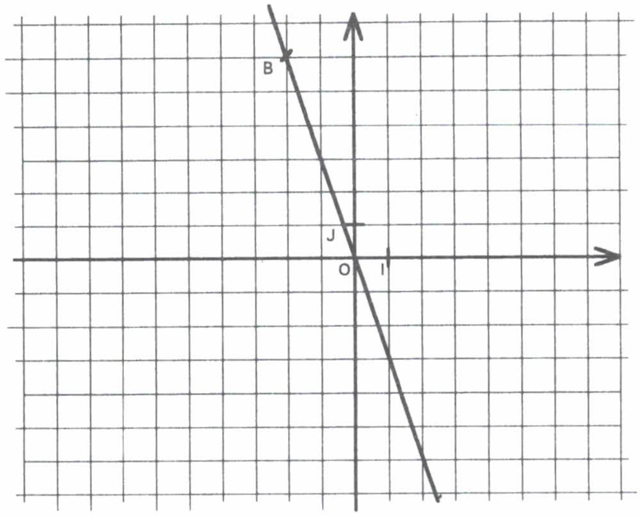






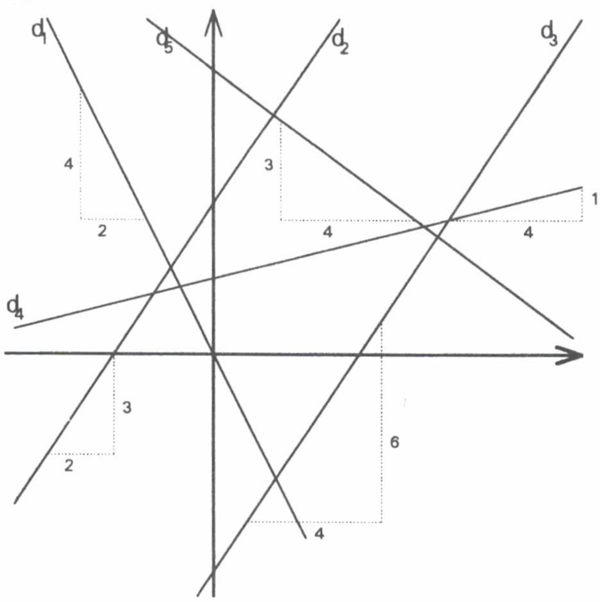






4. Dans un repère orthonormal (unité le cm), trace la droite (CD) qui passe par C (-1 ; -1) et D $(\frac{9}{2};-\frac{1}{2})$. Quelle est sa pente ?

5.



a) Sur cette figure, repère:
- les droites de pente positive en les traçant en vert,
- les droites de pente négative en les traçant en rouge.

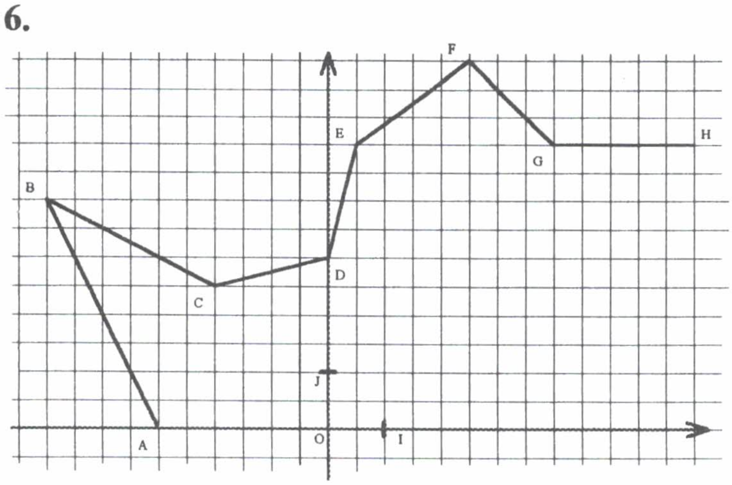
b) En utilisant les triangles rectangles dessinés, trouve la pente de chacune des droites.

p_1 =

p_2 =

Que remarques-tu ?

6.



La ligne brisée ci-contre est formée de 7 segments dont les supports sont des droites.

a) Quelles sont les droites de pente positive ?

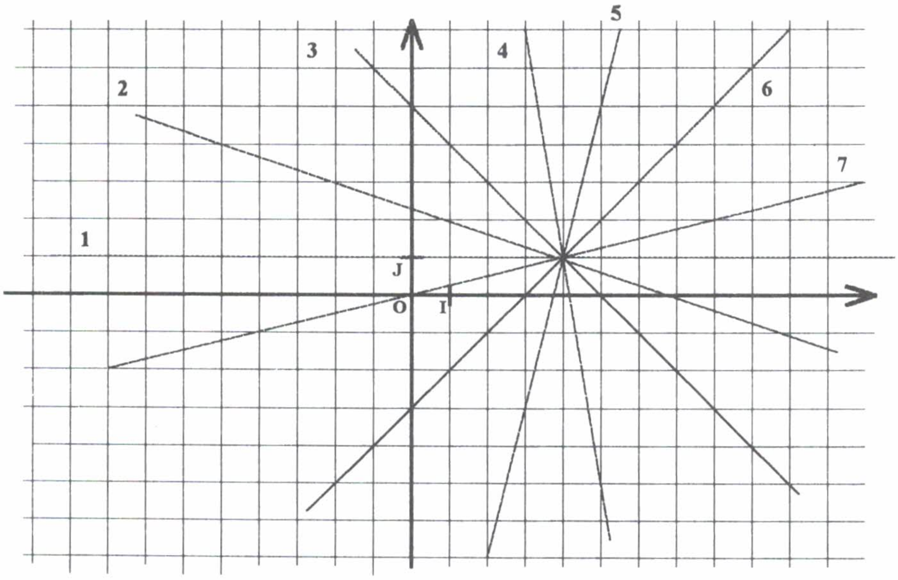
b) Quelles sont les droites de pente négative ?

c) Lis la pente de chacune des droites.

$p_{(AB)}$ =

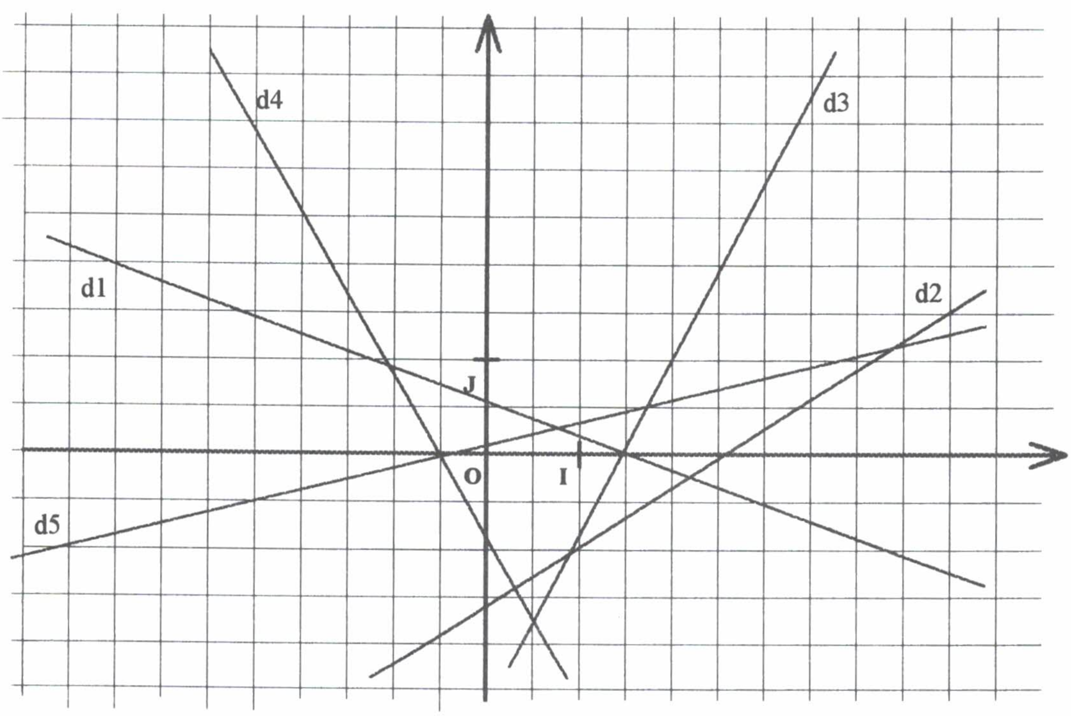
$p_{(BC)}$ =

7. Observe le faisceau de droites ci-dessous puis remplis le tableau en associant à chaque droite sa pente. Il manque deux droites ; trace-les.



n° de la droite	coefficient directeur
	$-\frac{1}{3}$
	0
	0,25
	-1
	4
	-3
	-6
	2
	1

8. Voici cinq droites tracées dans un même repère.



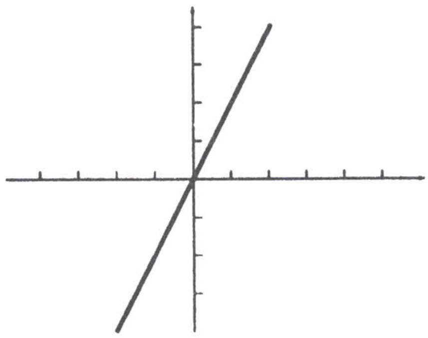
A vue d'oeil, quelles sont celles qui ont une pente positive ?

Quelles sont celles qui ont une pente négative ?

Classe ces droites, de celle qui a la plus petite pente à celle qui a la plus grande.

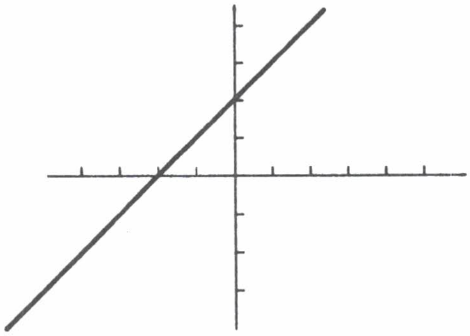
9 . Dans chaque cas, parmi les trois nombres proposés, indique celui qui est la pente de la droite tracée.

1



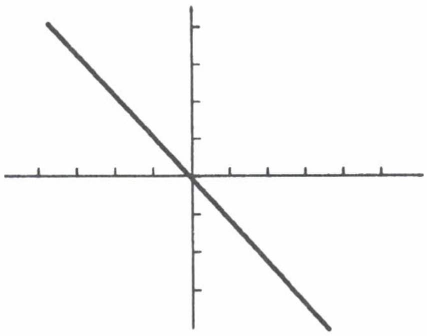
p = – 1
p = 1
p = 2

2



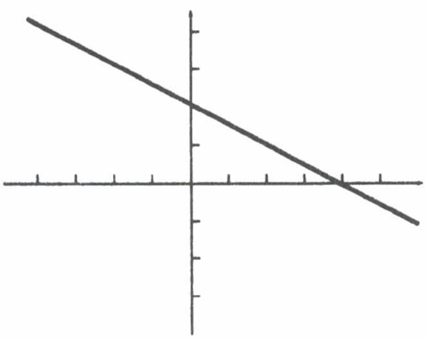
p = – 2
p = 1
p = 1/2

3



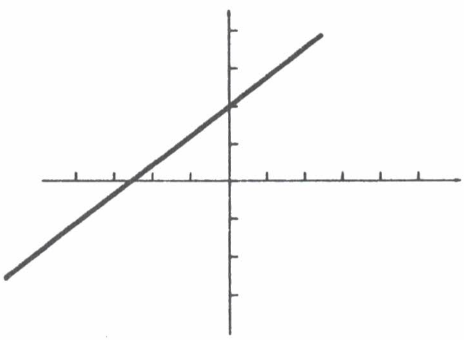
p = – 1
p = 1
p = – 1/2

4



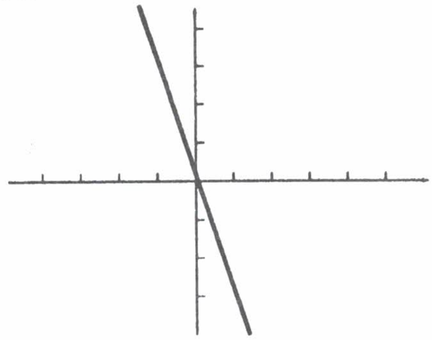
p = 1/2
p = – 2
p = – 1/2

5



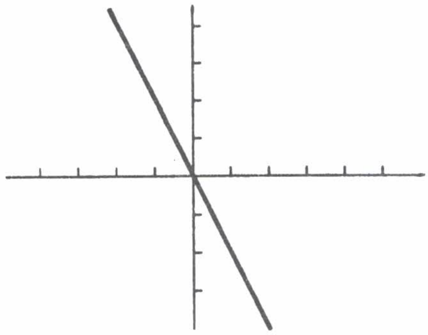
p = 4/5
p = – 2/3
p = – 5/4

6



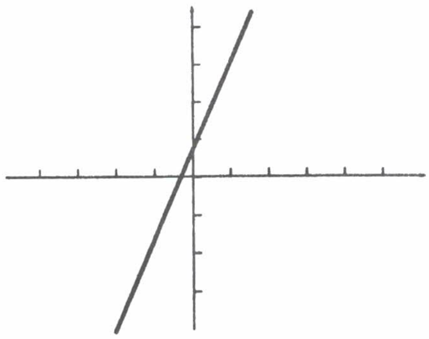
p = – 1/4
p = – 3
p = 3

7



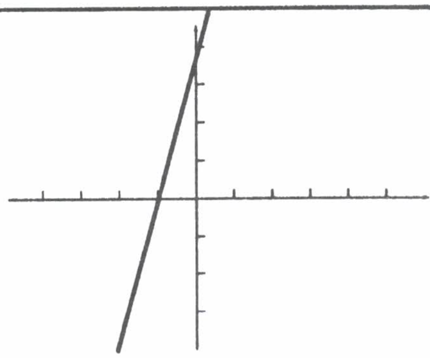
p = – 1
p = – 2
p = 2

8



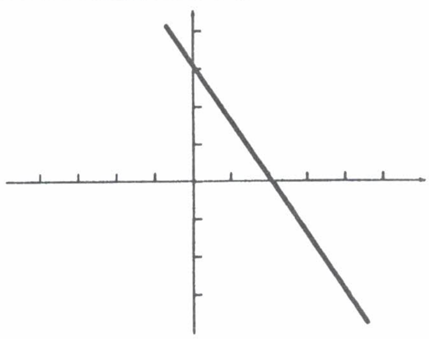
p = 1/2
p = 2
p = 1

9



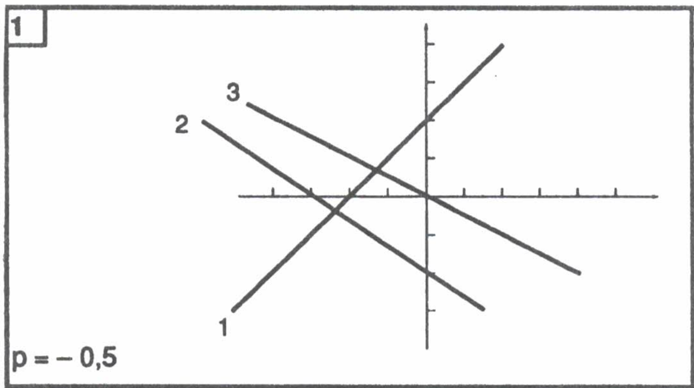
p = – 4
p = 4
p = 1/4

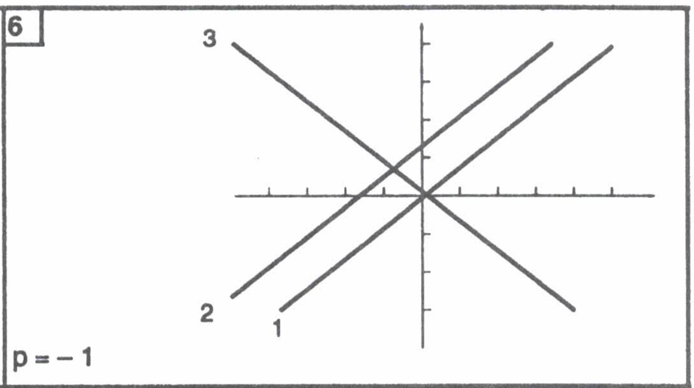
10

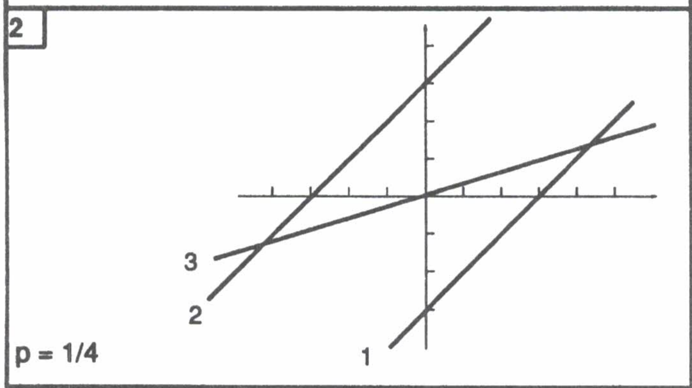


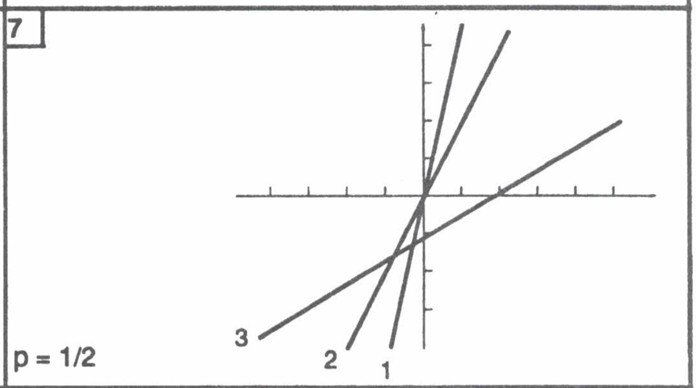
p = – 3/2
p = – 3
p = 2/3

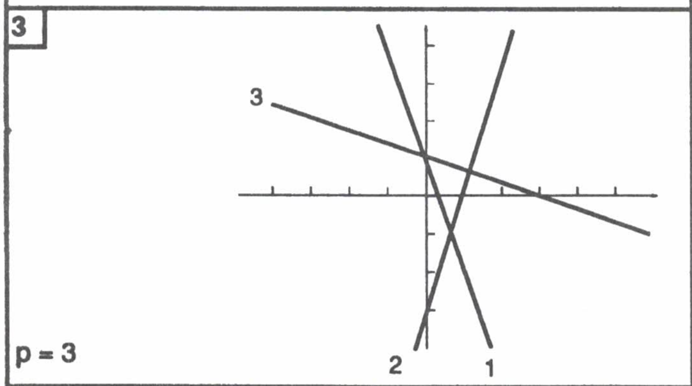
10 . Dans chaque cas, indique le n° de la droite dont la pente est le nombre indiqué

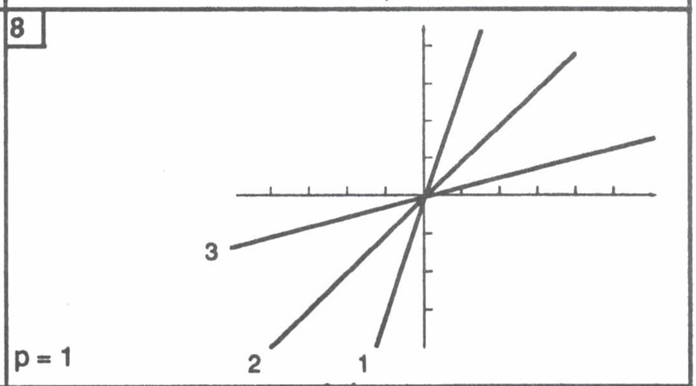


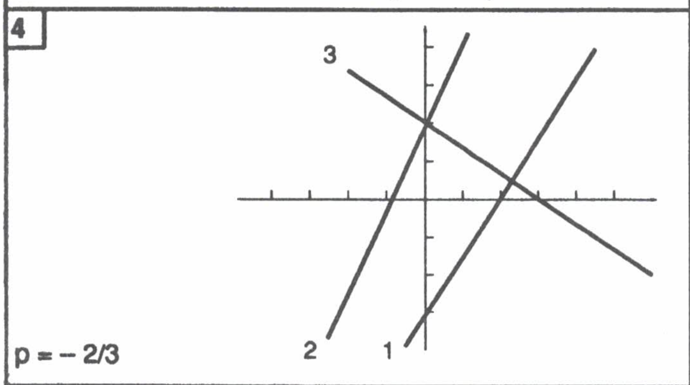


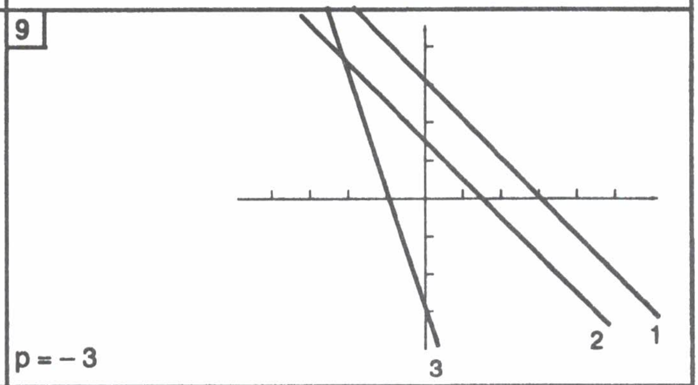


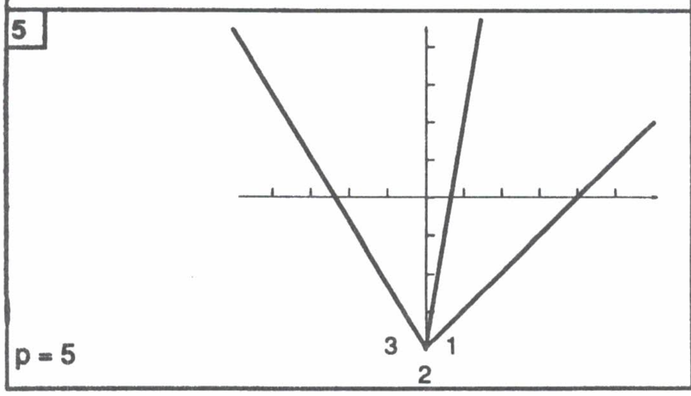


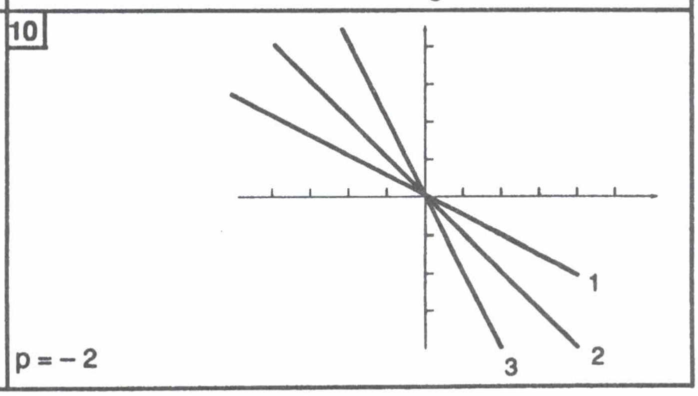




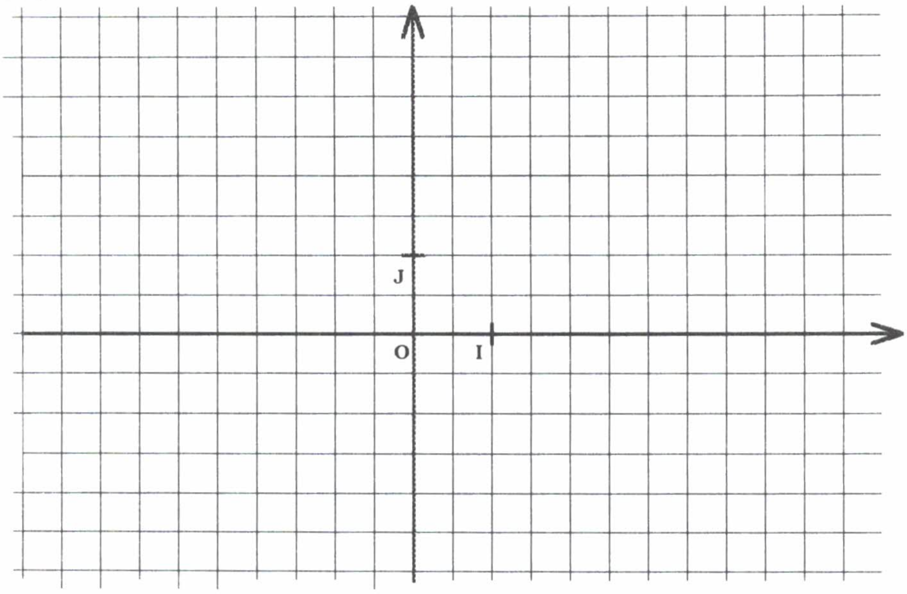








11.



Dans le repère orthonormal ci-dessus, on considère les points suivants :

R (3 ;3) ; S (-3 ; 2) et T (0 ; -2)

Avant de les placer dans le repère, calcule les pentes des côtés du triangle RST.

$p_{(RS)}$ = ; $p_{(ST)}$ = ; $p_{(TR)}$ =

Vérifie tes résultats par simple lecture sur ton dessin.

12. a) Dans le repère ci-contre on veut tracer la droite d_1 de pente $\frac{2}{3}$ passant par A (1 ; 1)

Place A et trouve le point B tel que :

la variation de x entre A et B soit 3

la variation de y entre A et B soit 2.

Trace maintenant d_1.

b) Dans ce même repère on veut tracer d_2 de pente 3 passant par F (3 ; 2).

Complète : $3 = \frac{3}{\dots}$.

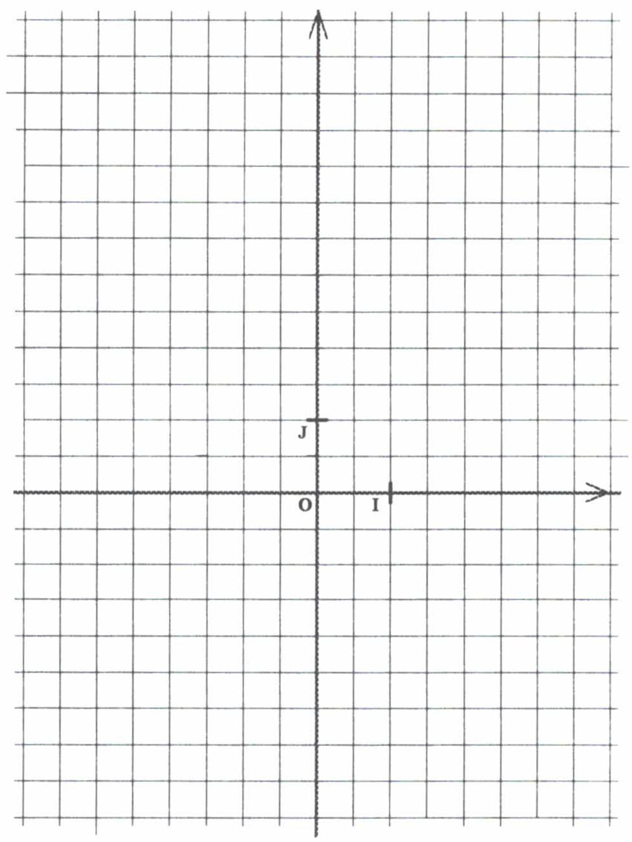
Il faut trouver le point G tel que :

la variation de x entre F et G soit....

la variation de y entre .... et ..... soit.....

Place G et trace d_2.

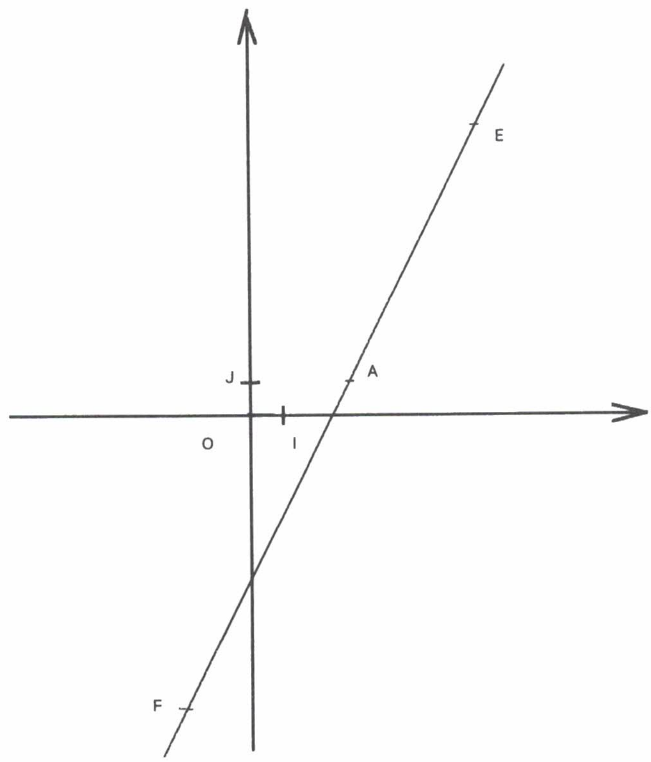
c) Trace de même la droite d_3 de pente $\frac{3}{2}$ passant par K (-1 ; -2), puis la droite d_4 passant par L (3 ; -1) de pente -3.



Equations de droites

I. Activités

1. Dans ce repère, d est la droite de pente 2, qui passe par le point A (3 ; 1).



a) E est le point de d d'abscisse 5,38. En utilisant la pente de d, calcule l'ordonnée de E.

$\dfrac{y_E - y_A}{x_E - x_A} = 2$ donc ....

De même, trouve l'ordonnée du point F d'abscisse -1,79.

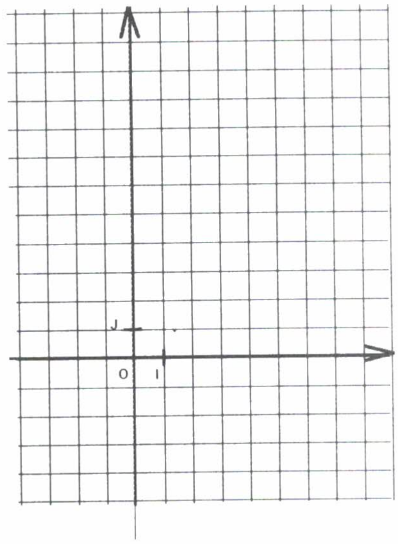
b) En utilisant la même méthode pour un point M quelconque de d, exprime son ordonnée y en fonction de son abscisse x. La relation que tu dois trouver s'appelle une équation de d.

Plus généralement, toute droite de pente **a**, *a une équation de la forme :* $y = \mathbf{a}\,x + \mathrm{b}$.

2. Comment déterminer l'équation d'une droite ?

A. Droite donnée par un point et sa pente :

1) Dans le repère ci-contre, trace la droite δ passant par le point A (2 ; 4), de pente -3.

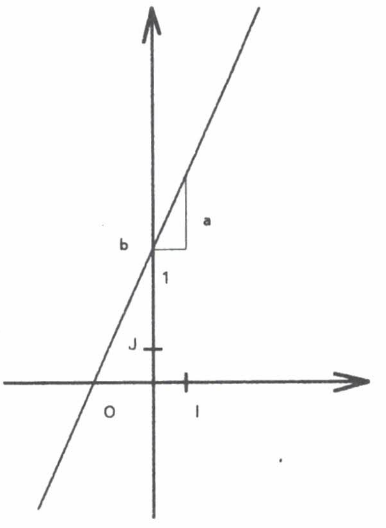


Voici deux méthodes pour déterminer l'équation de δ :

1ère méthode	**2ème méthode**
Si M est un point de cette droite d'abscisse x et d'ordonnée y, sa pente s'écrit : $a = \dfrac{y - y_A}{x - x_A}$ Or on sait que a = -3 ; $x_A = 2$ et $y_A = 4$ donc -3 = $\dfrac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}$ Déduis-en l'équation de δ.	L'équation de cette droite est de la forme : $y = ax + b$ Or on sait que sa pente **a** est ..... donc son équation s'écrit : $y =$......... Le point A appartient à cette droite donc : $y_A = -3x_A + b$ Déduis-en b et l'équation de δ.

2) Utilise ces deux méthodes pour déterminer l'équation de la droite D de pente -2 qui passe par le point K(0 ; 4)

Dans l'équation $y = ax + b$
a est la pente de la droite
et **b est appelé ordonnée à l'origine**.
Le point de coordonnées (0 , b) est le point d'intersection de la droite avec l'axe des ordonnées.

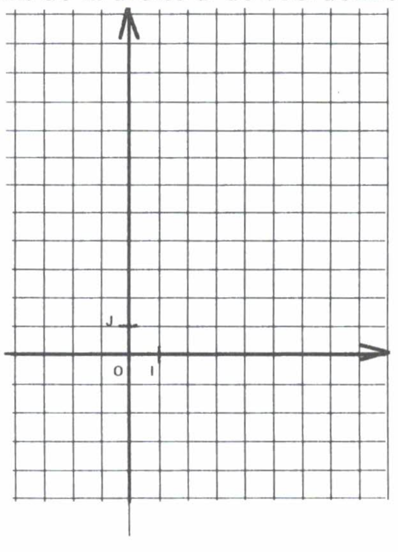


B. Droite donnée par deux de ses points.

1) δ ' est la droite passant par E(3 ; -2) et F(-2 , 3). Détermine l'équation de δ ' .
Commence par calculer la pente de δ '

1ère méthode	**2ème méthode**

2) Trace la droite d' passant par E(5 ; -2) et F(5 ; 4).
- Sur cette droite, choisis 5 points et précise leurs coordonnées. Que remarques-tu ?
- Si M est un point de la droite d' de coordonnées (x ; y), que peut-tu dire de x ?



II. Exercices:

1. a) Donne l'équation de chacune des droites suivantes ; elles passent toutes par le point A (0 ; 4) et la pente a_i de chacune est donnée ci-dessous.

D_1: $a_1 = 1$; $y =$............
D_2: $a_2 = 2$; $y =$............
D_3: $a_3 = -1$; $y =$............
D_4: $a_4 = -2$; $y =$...........
D_5: $a_5 = 0$; $y =$............

Trace ces 5 droites dans un même repère.

b) Donne l'équation de chacune des droites suivantes ; elles ont toutes la même pente $-\frac{1}{2}$ et chacune passe par le point A_i donné ci-dessous.

Δ_1 : $A_1(0;4)$; $y =$...........
Δ_2 : $A_2(0;-2)$; $y =$...........
Δ_3 : $A_3(0;0)$; $y =$...........
Δ_4 : $A_4(0;-\frac{1}{2})$; $y =$...........
Δ_5 : $A_5(0;3)$; $y =$...........

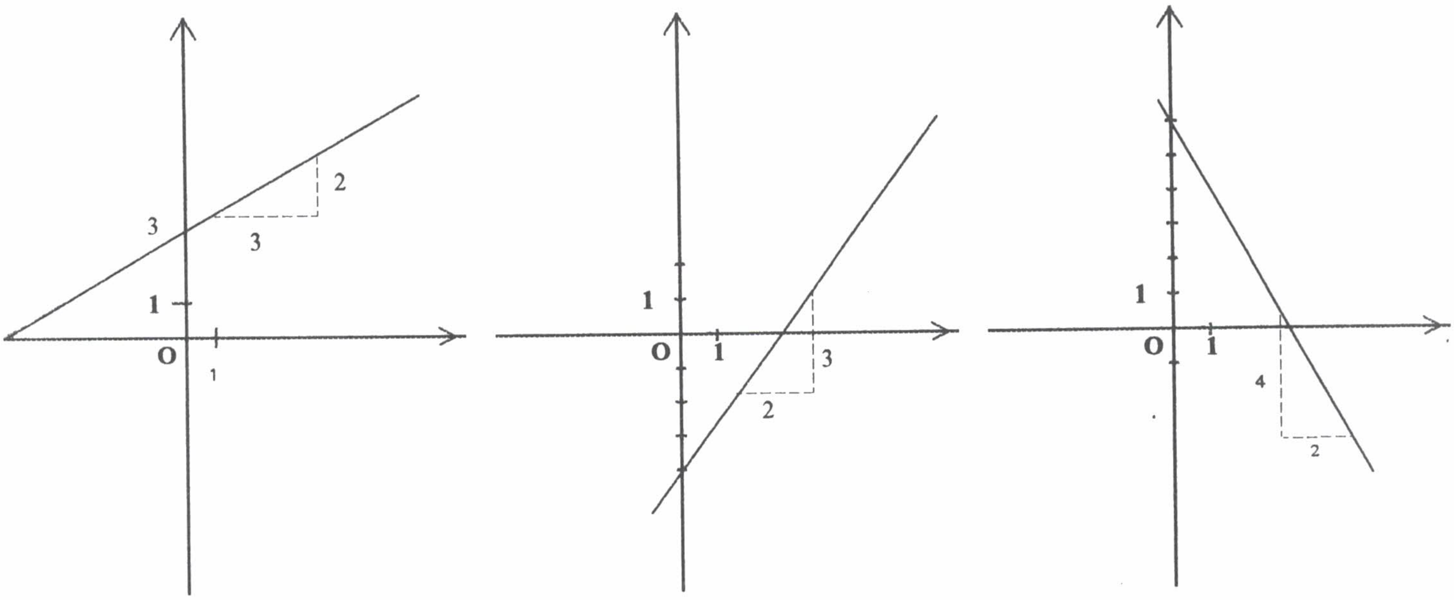
Trace ces 5 droites dans un même repère.

2. Complète le tableau suivant :

équation de la droite	pente de la droite	coordonnées du point de la droite d'abscisse 0	coordonnées du point de la droite d'abscisse 3
$y = 4x + 6$		(0 ; ....)	(3 ; ....)
$y = \frac{3}{7}x$			
$y = 1{,}3x - 2$			
$y = -4$			
$y = -3x - 9$			

3. Détermine les équations des droites (KL), (XY), (MN) et (UV) sachant que :
K(1 ; 4) et L(3 ; -2) ; X(1 ; -5) et Y(-2 ; 10) ; M(4 ; -2) et N(-3 ; -2) ; U(-1 ; 2) et V(-1 ; -4)

4. Donne l'équation des droites ci-dessous :

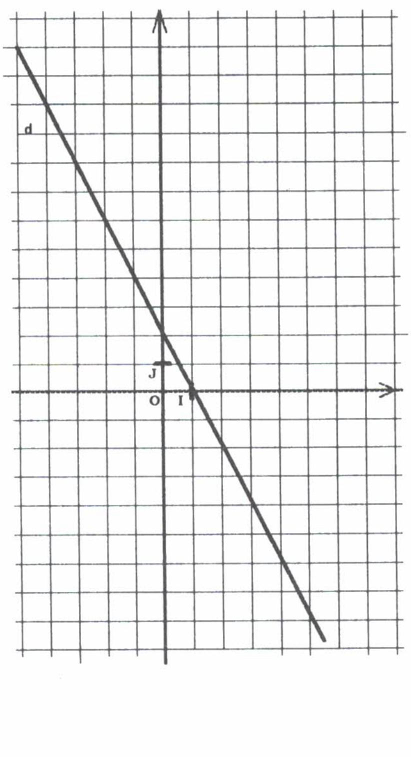


5. Trace dans un repère orthonormal, en utilisant la pente et l'ordonnée à l'origine, la droite d d'équation $y = 3x + 4$

Calcule les ordonnées des points A, B et C d'abscisses respectives 0 ; 1 et -5.
$y_A = 3x_A + 4 =$

Vérifie sur ton dessin que ces points sont sur la droite d que tu as tracée.

6.



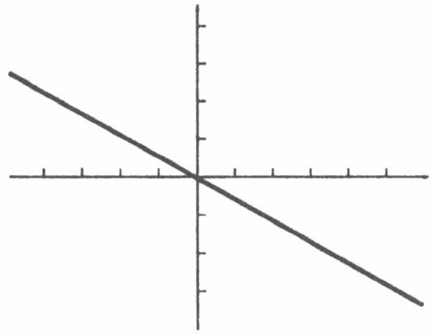
Place sur cette droite d les points :
A d'**abscisse** 4, B d'**abscisse** -1
puis C d'**ordonnée** 0.et D d'**ordonnée** 10.

Complète par lecture :
A(4 ;......) ; B(-1 ; ......) . C(......; 0) ; D(...... ; 10)

Observe la droite d, donne son équation, puis retrouve y_A ; y_B ; x_C ; x_D par le calcul :

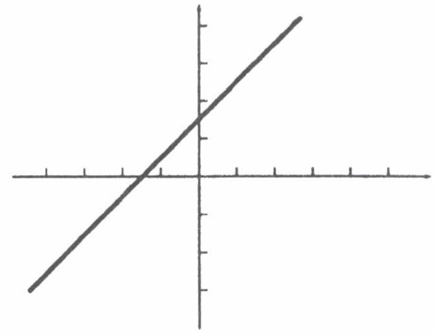
7. Dans chaque cas indique celle des 3 équations qui correspond à la droite tracée.

1



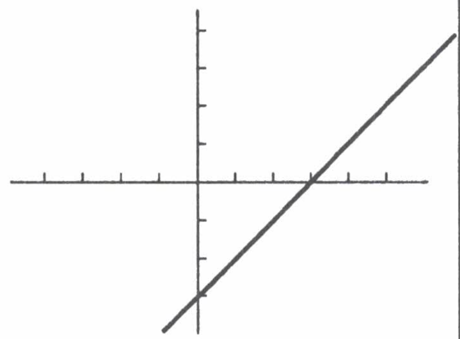
$y = 3x - 1$
$y = -0,5x$
$y = x + 2$

2



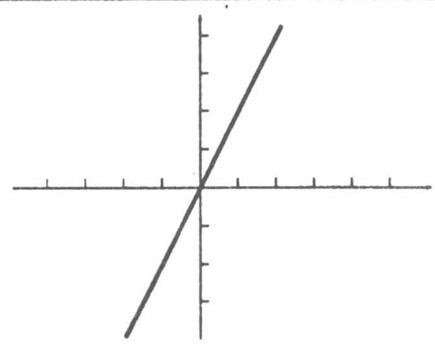
$y = x + 3/2$
$y = 3/2\,x$
$y = -3/2\,x$

3



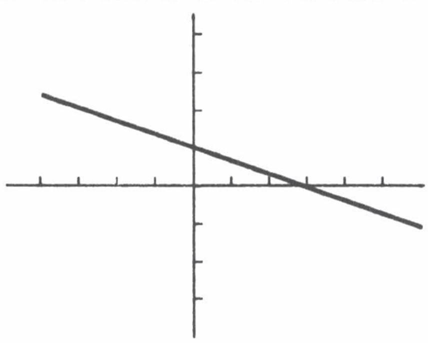
$y = 3x$
$y = x - 3$
$y = x + 3$

4



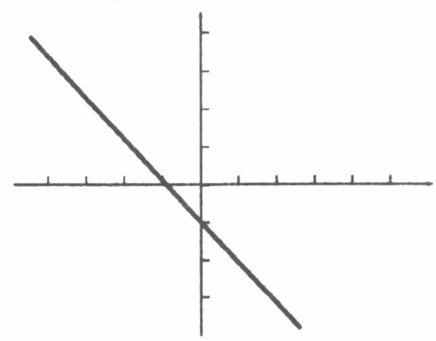
$y = 2x$
$y = 3x$
$y = 1/2\,x$

5



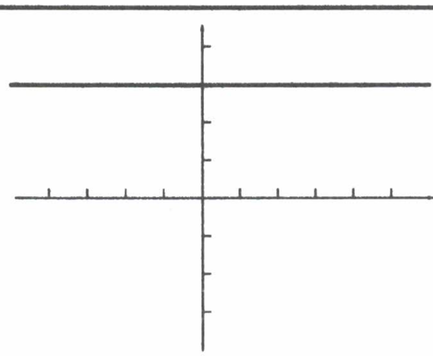
$y = -3x + 1$
$y = 1/3\,x$
$y = -1/3\,x + 1$

6



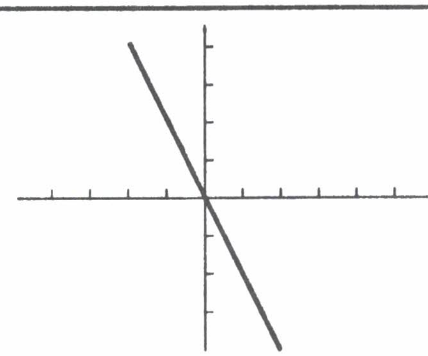
$y = -x + 1$
$y = -x - 1$
$y = x - 1$

7



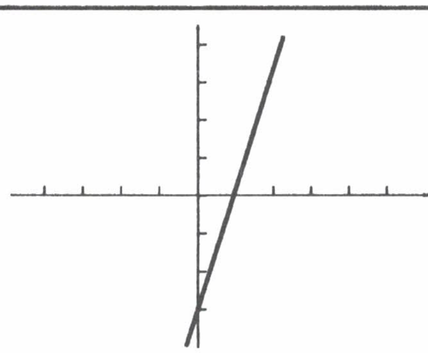
$y = 3x + 2$
$y = 3$
$y = -5x + 2$

8



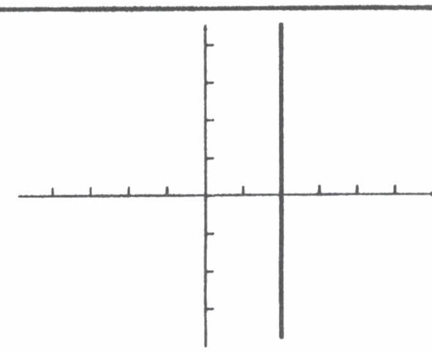
$y = -2x$
$y = 1/2\,x$
$y = -0,5x$

9



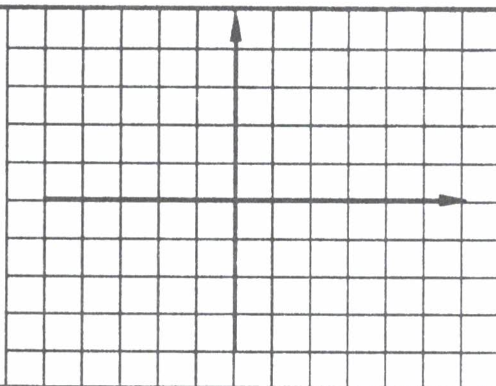
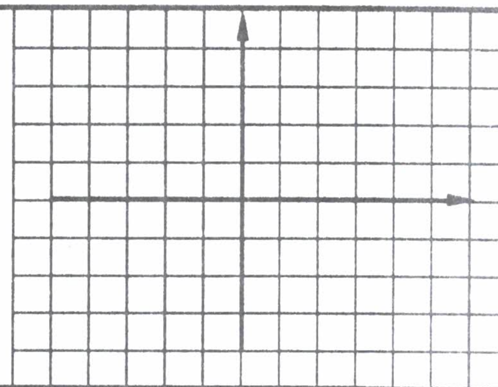
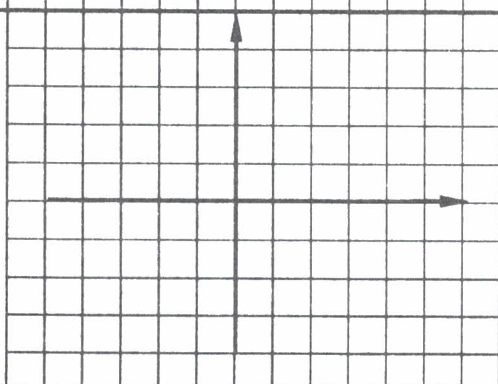
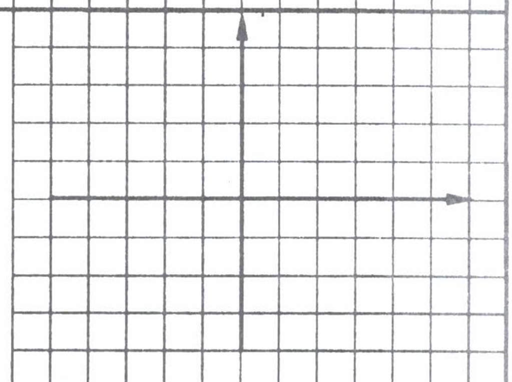
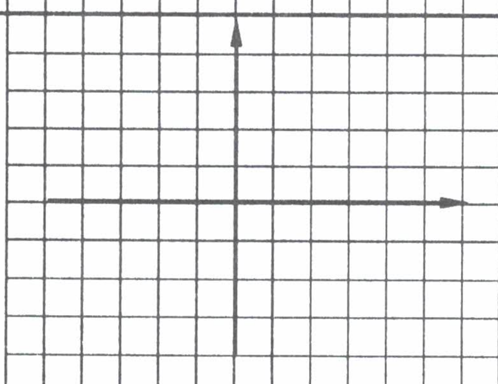
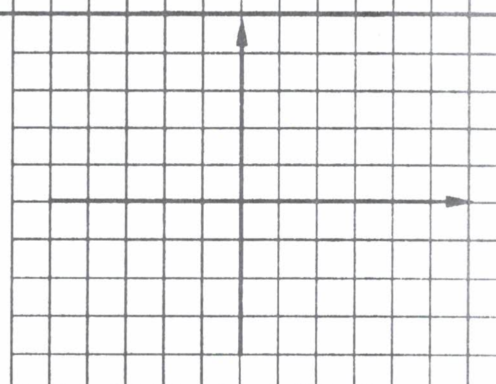
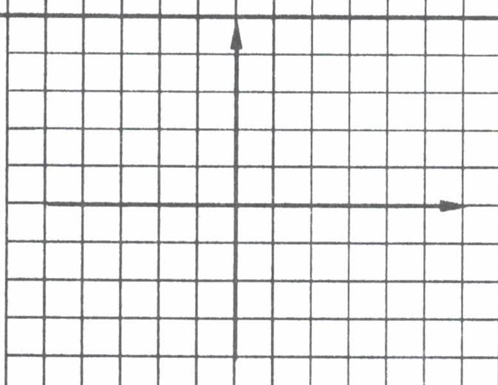
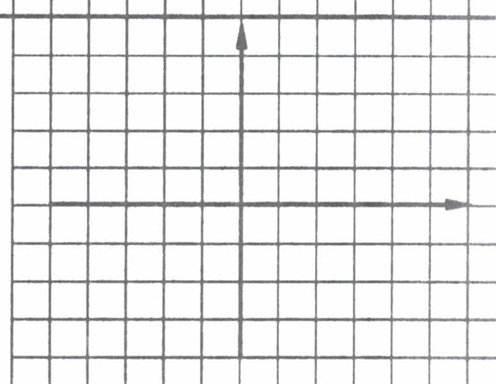
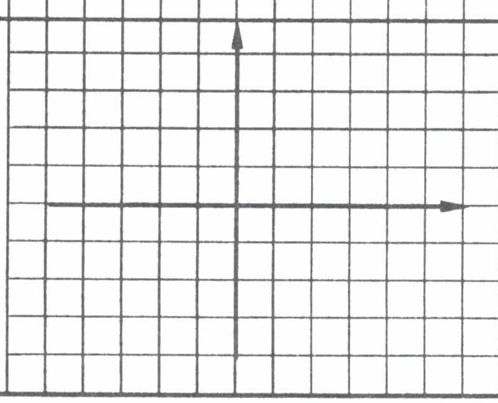
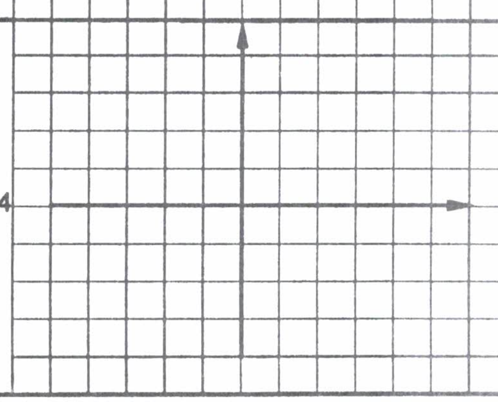
$y = 3x - 3$
$y = 3x + 4$
$y = 3x - 4$

10

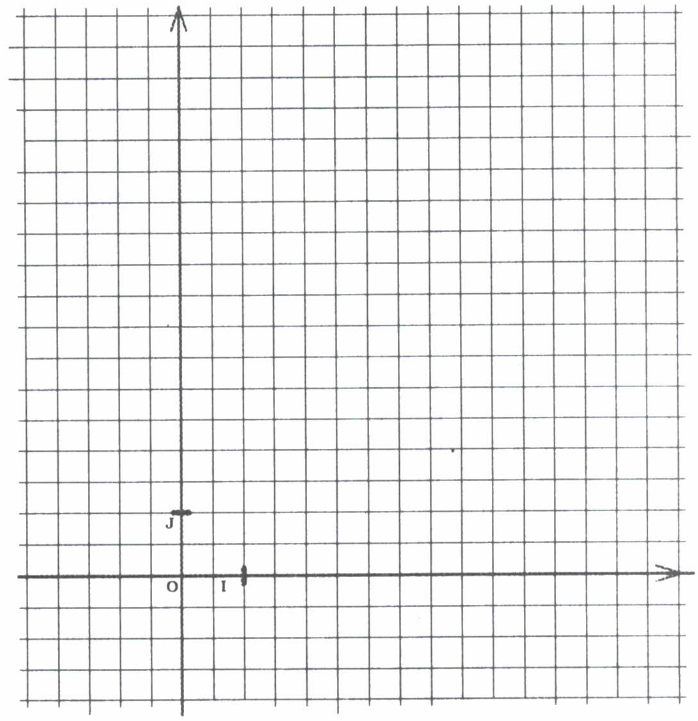


$y = 2x - 1$
$x = 2$
$y = 2$

8. Dans chaque cas, trace la droite dont on donne l'équation. Unité sur chaque axe : 1 petit carreau

$y = 2x + 3$		$y = -2x$	
$y = 3x + 2$		$x = 3$	
$y = -3x - 2$		$y = -x + 1$	
$y = 1/2\,x + 3$		$y = 3x$	
$y = -2$		$y = -1/2\,x + 4$	

9. Dans le repère ci-contre, trace **sans sortir** de la feuille la droite d_1 d'équation : $y = -4x + 18$



- Pour cela, choisis des points A et B dont les coordonnées ne sont pas des nombres trop grands :

x_A =............; y_A =...........
A(..... ; .....)
x_B =............; y_B =.............
B(.... ; .....)

- Utilise les points A et B pour tracer la droite d_1.

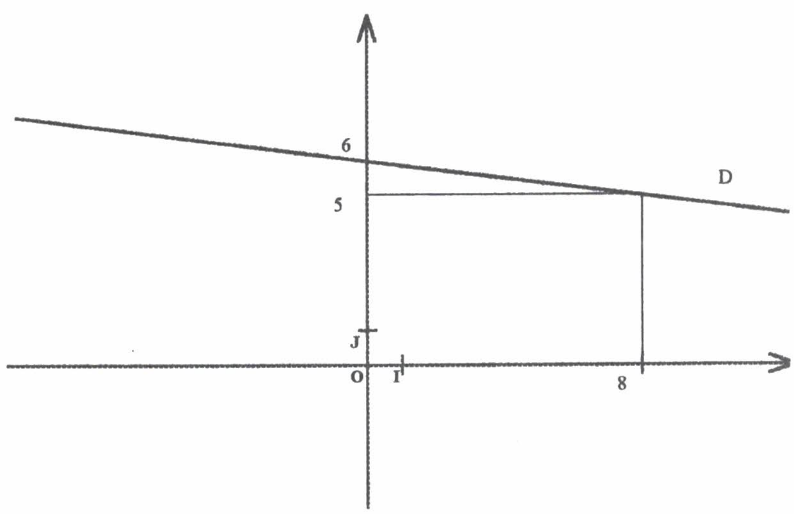
10. En choisissant obligatoirement deux points de coordonnées entières, trace la droite d_2 d'équation $y = \frac{1}{3}x - 7$ dans un repère orthonormal (O, I, J)

Lis les coordonnées des points d'intersection de d_2 avec les axes. Vérifie par le calcul.

Même travail avec la droite d_3 d'équation $y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$.

11. La droite d_4 a pour équation $y = \frac{3}{2}x - 3$. Utilise les points d'intersection de d_4 avec les axes pour la tracer.

12. D est la droite tracée ci-contre. Trouve son équation.



Calcule les coordonnées du point d'intersection de D avec l'axe des abscisses.

Le point T(-7 ; 7) est-il situé sur D ?

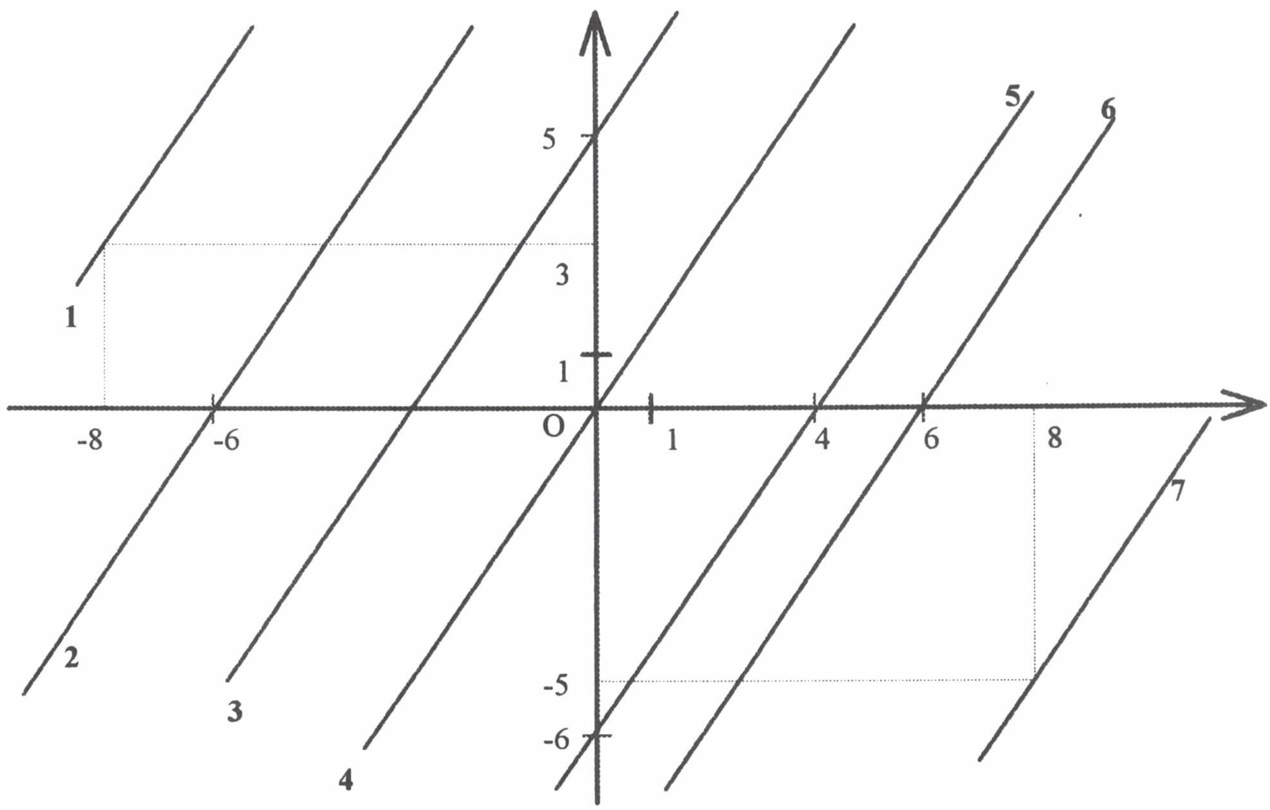
Même question pour Z(40 ; 1).

13. D et D' sont les droites d'équations respectives $y = x + 4$ et $y = -3x + 16$.
On appelle $A(x_A ; y_A)$ leur point d'intersection.

Ecris le système qui va te permettre de calculer $(x_A ; y_A)$.

Résous ce système puis vérifie les coordonnées de A en traçant D et D' dans un même repère.

III. Droites parallèles



1. Observe la figure ci-dessus ; les droites sont parallèles.

L'équation de la droite n°4 est : $y = \frac{3}{2}x$. Trouve les équations des six autres droites.

2.. D est la droite qui passe par le point A (-5 ; 2) et qui est parallèle à la droite d d'équation $y = 3x - 7$. Quelle est la pente de D ? Détermine l'équation de D.
Vérifie tes résultats en traçant d et D dans le même repère.

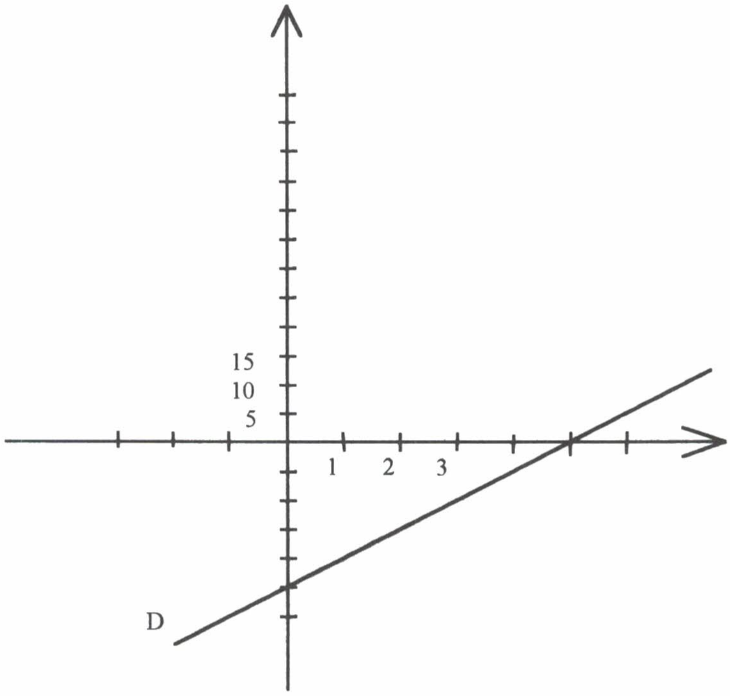
3. Etant donnés les points A (5 ; -3) et B (2 ; 6), détermine l'équation de la droite δ qui passe par C (3 ; -3) et qui est parallèle à la droite (AB).
Vérifie ton résultat sur un dessin.

4. Dans un repère orthonormal (unité : 0,5 cm), place les points A (5 ; 8) ; B (15 ;10) ; C (-5 ; 6) et D (-12 ; 4,5).

a) Utilise les pentes des droites pour prouver que les points A, B et C sont alignés.

b) Le point D appartient-il à la même droite que les points A, B et C ?

5. Dans le repère **orthogonal** ci-dessous (attention aux unités sur chaque axe !), trace les droites Δ et Δ' d'équations respectives $y = -10x + 15$ et $y = -10x + 70$



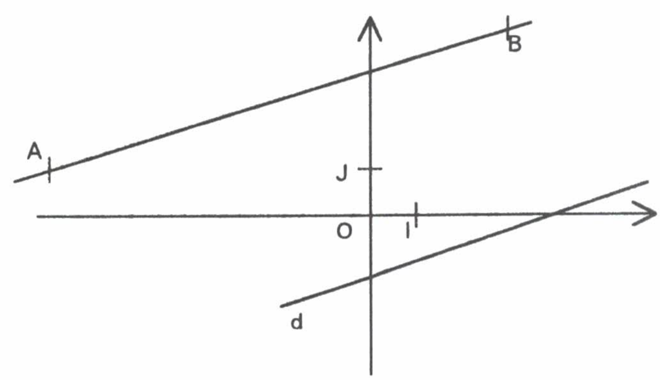
a) A ton avis quel intérêt y-a-t-il à ne pas choisir la même unité sur les deux axes ?

b) Que peux-tu dire des droites Δ et Δ' ?

c) Lis l'équation de la droite D tracée dans ce repère.

d) Détermine l'équation de la droite D', parallèle à D passant par le point R (3 ; 20) et trace-la.

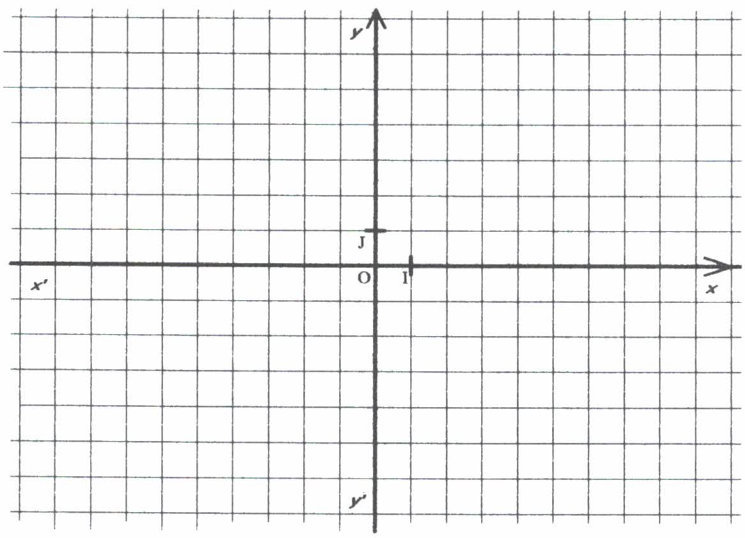
6. Dans ce repère, on donne : A(-7 ; 1), B(3 ; 4) et la droite d d'équation : $y = \frac{1}{3}x - \frac{4}{3}$.
Les droites d et (AB) sont-elles parallèles ?
Justifie la réponse en comparant leurs coefficients directeurs.



IV. Droites perpendiculaires en repère orthonormal

1. *Activités*

1. Trace les droites d et d' bissectrices respectives des angles $x\hat{O}y$ et $x\hat{O}y'$.



a) Donne leurs équations et leurs pentes :

d : $y =$ a =

d' : $y =$ a' =

b) Que peut-on dire des droites d et d' ?

2. Dans chaque cas, trace la droite d' passant par A et perpendiculaire à la droite d.
Lis la pente de d puis celle de d'.

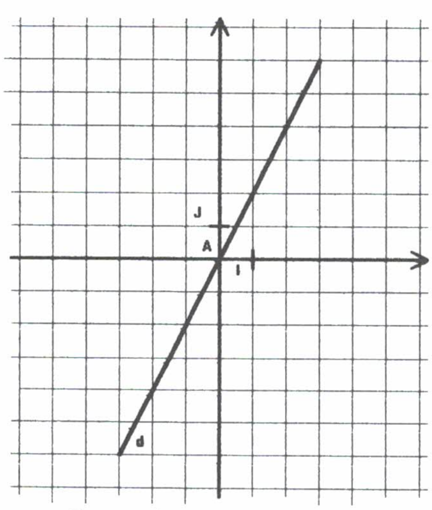


figure 1

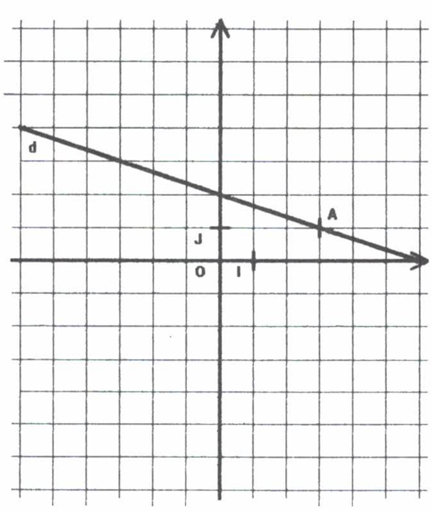


figure 2

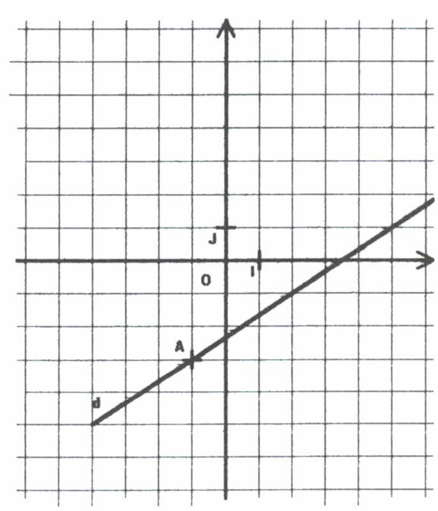


figure 3

3. Utilise uniquement le quadrillage (pas d'équerre !) pour tracer dans chaque cas la droite d', passant par B, perpendiculaire à la droite d.

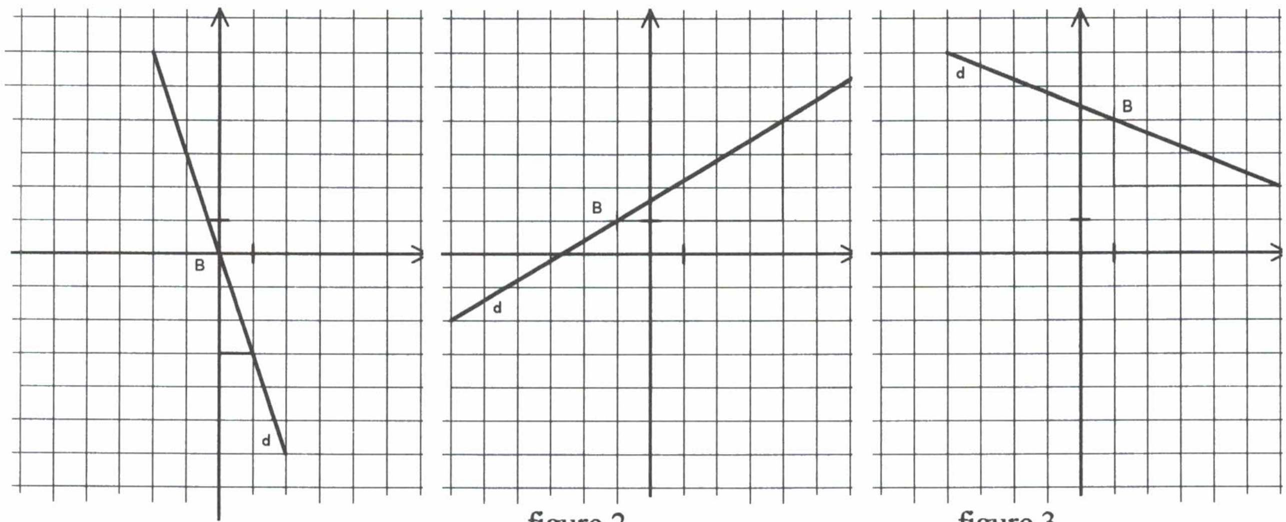


figure 1 figure 2 figure 3

Complète ce tableau :

	figure 1	figure 2	figure 3
pente a de d			
pente a' de d'			

A partir de ces exemples, trouve un lien entre les pentes a et a' de deux droites perpendiculaires.

2. Exercices

1. Parmi les droites suivantes, certaines sont perpendiculaires. Regroupe les droites perpendiculaires.

D_1: $y = \frac{1}{2}x + 5$	D_2: $y = -0{,}2x$	D_3: $y = 5x - 3$	D_4: $y = -x + 3$
D_5: $y = \frac{3}{7}x + 4$	D_6: $y = -2$	D_7: $y = \frac{1}{4}x + 2$	D_8: $y = -2x + 8$
D_9: $y = x$	D_{10}: $y = -\frac{7}{3}x - 9$	D_{11}: $y = 14x - 3$	D_{12}: $x = 7$

2. Détermine l'équation de la droite d' passant par le point A (-2 ; 2), perpendiculaire à la droite d d'équation : $y = \frac{3}{2}x + 3$.

3. On donne les points E (-4 ; 4) ; F (2 ; -4) et G (6 ; -1).

a) En utilisant des pentes, montre que le triangle EFG est rectangle en F.

b) Décris et trace la hauteur issue de F de ce triangle.

c) Quelle est l'équation de cette hauteur ?

4. Place les points A (3 ; 12), B (9 ; -6) et C (15 ; 12) dans un repère orthonormal.

a) Trace la médiatrice du segment [AB]. Détermine son équation.

b) Même travail pour la médiatrice du segment [AC].

c) Calcule les coordonnées du centre Ω du cercle circonscrit au triangle ABC.
Trace ce cercle.