Université Henri Poincaré
Nancy 1
I.R.E.M. de Lorraine

La calculatrice graphique au Lycée

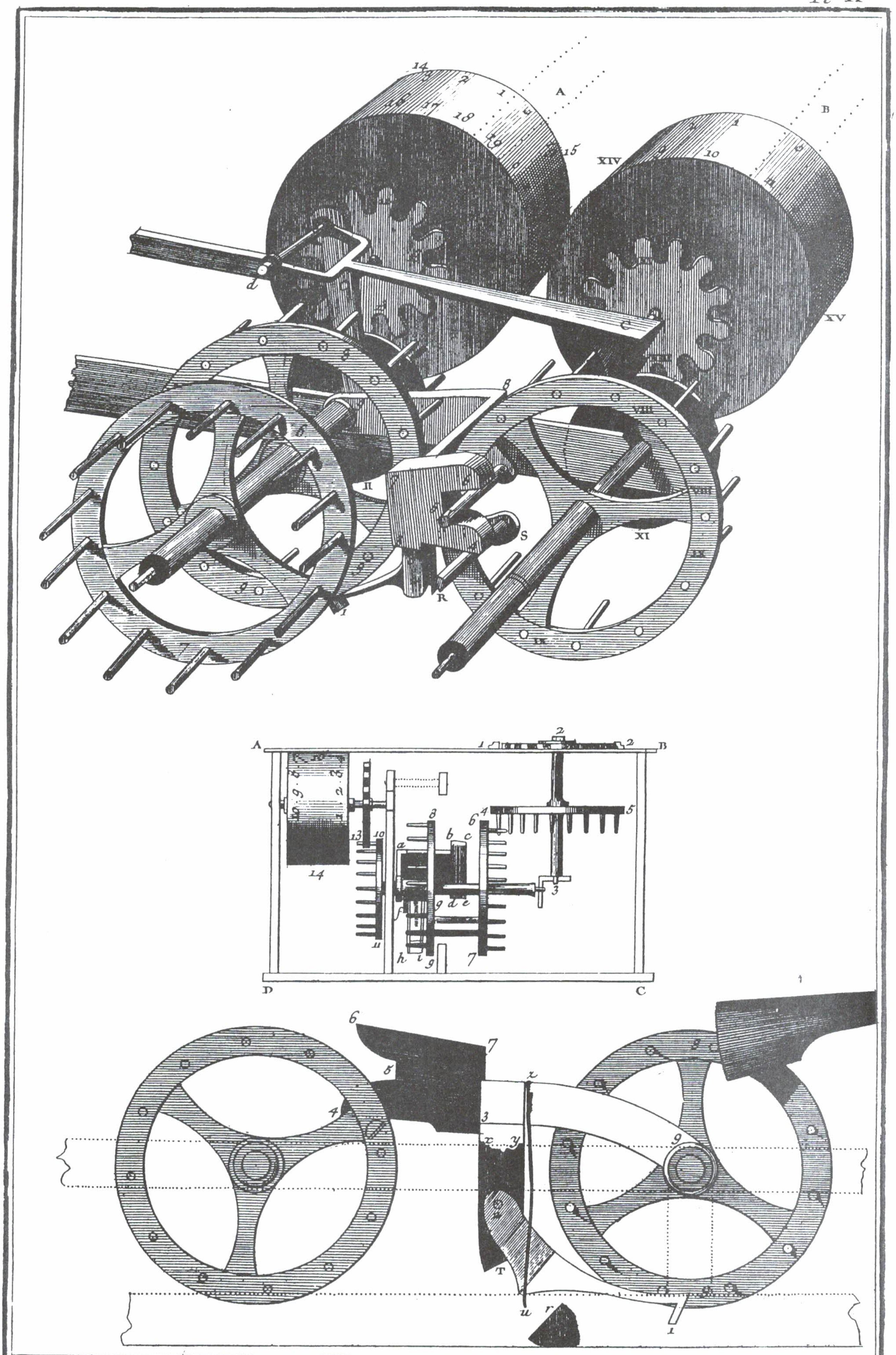
© Edité et imprimé par l'**Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques** - (Université de NANCY I - Faculté des Sciences) - B.P. 239 - 54506 VANDOEUVRE-les-NANCY CEDEX
Dépôt légal : 1er trimestre 1997
n° de la publication : 2-85406-156-X
Responsable de la publication : Le Directeur de l'IREM, Michel BONN

Les auteurs :

- Catherine BRUN
- Francine DOUCHE
- François PROUTEAU
- Jean-Marie PROVIN
- Jacques VERDIER

PLAN DE L'OUVRAGE

Illustration page suivante : la machine à calculer de PASCAL, planche extraite de l'encyclopédie de DIDEROT et D'ALEMBERT.



Goussier Del.   Benard Fecit

Algebre et Arithmétique. Machine Arithmétique de Pascal.

INTRODUCTION

Une confiance aveugle !

On entend souvent dire que les élèves utilisent de façon incorrecte leur calculatrice, et qu'ils lui font une confiance aveugle : quel que soit le résultat affiché sur leur écran, celui-ci est toujours absolument exact !

Mais si le résultat affiché est faux c'est, souvent, parce que l'élève, en résolvant son problème, ne l'a pas traduit correctement (il n'a pas fait les bonnes opérations avec les bonnes données) ; là, la calculatrice n'y est pour rien : des calculs sur papier auraient donné les mêmes résultats (dans la mesure où l'élève aurait été capable de les faire sans calculatrice, ce qui n'est généralement pas le cas des calculs sophistiqués demandés au lycée).

> Il n'y a qu'un point commun entre élèves et professeurs : les uns et les autres estiment que la calculatrice graphique ne nécessite aucun apprentissage particulier
>
> (Luc TROUCHE)

Une autre source d'erreur relativement fréquente, c'est la « faute de frappe » en tapant sur le clavier. Un seul remède : que l'élève donne du sens à ce qu'il fait, et soit capable de se rendre compte que ce qu'il obtient **ne peut pas convenir** eu égard au problème posé.

Mais il peut cependant arriver que ce soit la calculatrice elle-même qui donne des résultats surprenants, ou mal interprétés, à un problème que l'élève pense avoir posé correctement. Et là, nous donnerons dans cette brochure quelques pistes, et quelques exemples d'activités qui permettront aux élèves de mieux maîtriser leur outil : voir par exemple *Les limites de la calculatrice* dans le premier chapitre, ou encore *Particularités et limites de l'écran graphique.*

L'utilisation correcte de la calculatrice devrait donc faire l'objet d'un apprentissage, sous la responsabilité de l'enseignant, et ne plus être laissée à la seule bonne volonté de l'élève.

Un outil banalisé

Chaque élève de lycée possède une calculatrice, et la part des calculatrices graphiques dans ce parc est de plus en plus grande : c'est tout à fait normal, les modèles « bas de gamme » (mais qui ont d'excellentes performances, et suffiront à la majorité des élèves pendant leurs 3 ans de scolarité au lycée), comme la Texas Instruments T.I.80 ou la Casio fx6910 se trouvent maintenant sur le marché aux environs de 250 F. Si l'on compare avec le prix de certains manuels de 1^{ere} S en deux tomes...

> Une utilisation épisodique, ça ne transforme pas un outil en instrument.
>
> Michèle ARTIGUE
> Albi, oct. 1996

La conséquence est que cet outil se banalise : il acquiert, au contraire de l'ordinateur, un statut d'objet personnel pour l'élève, au même titre que son stylo, sa règle graduée ou son compas. C'est un objet qu'il utilise en permanence, sans qu'il n'y prête plus attention, car il croit bien le connaître.

Des chercheurs des I.R.E.M. de Lyon et de Montpellier ont bien étudié ce phénomène : dans des expérimentations qu'ils ont menées, chacun des élèves était en possession d'une T.I.92, prêtée pour l'année, qu'il pouvait emporter chez lui ; on s'est aperçu que cette machine « personnelle » n'avait pas du tout le même statut que la même machine, rétroprojetable, utilisée par le professeur devant toute la classe, ou qu'un écran d'ordinateur utilisé « comme au cinéma ».

A tout moment, sauf stratégie spécifique du professeur dans une séquence, l'élève doit donc avoir sa calculatrice à portée de la main, et avoir le droit de l'utiliser.

La preuve !

Certains objecteront que ce que montre un écran graphique ne peut pas, par essence même, avoir le statut de **preuve** (il l'a pour l'élève !).

Prenons un exemple.
Il s'agit (en classe de première) de démontrer que $\sin(\pi/2 - x) = \cos(x)$.
Une façon de faire sera de tracer, sur la calculatrice, les courbes représentant les deux fonctions, et de constater qu'elles coïncident exactement (en réalité en un nombre fini de points, ceux qui sont sur l'écran). Il s'agit d'une preuve par « ostention », comme celle du physicien. Le professeur de mathématiques récusera cette méthode, et exigera peut-être que l'on fasse un dessin du cercle trigonométrique, où l'on portera les deux arcs (pour une valeur particulière de x, d'ailleurs, et le plus souvent comprise entre 0 et $\pi/2$).
Mais l'élève pourrait se poser la question : **en quoi** l'observation de cette figure est-elle **plus probante** que l'observation de l'écran de la calculatrice ? Que lui répondrait-on ?

Un moyen de contrôle

Parmi les objectifs des classes de lycée, les programmes demandent que la calculatrice soit utilisée comme un **outil de contrôle**. Que contrôler, et comment ?

Généralement pas en refaisant les mêmes calculs ou manipulations une seconde fois de façon identique : on aurait la chance, tout au plus, d'éliminer les « fautes de frappe ».
Il est nécessaire, parfois, de sortir du cadre dans lequel le problème est posé.

Prenons là encore un exemple :
On veut **vérifier** que l'on a bien $x^4 - 5x^2 + 4 = (x - 2)(x - 1)(x + 1)(x + 2)$. Le développement du membre de droite est assez long - si l'élève ne voit pas qu'il faut procéder astucieusement en regroupant les bons facteurs -, et peut aboutir à des erreurs de signe.
Avec une calculatrice graphique, l'élève pourra représenter $f_1(x) = x^4 - 5x^2 + 4$ puis $f_2(x) = (x - 2)(x - 1)(x + 1)(x + 2)$, et constater que les courbes coïncident. Avec les machines actuelles, c'est bien plus rapide que la première méthode : quelques secondes suffisent.

Naguère, on demandait de vérifier en remplaçant x par une valeur « quelconque » et en effectuant les calculs des deux membres séparément. Mais quelles valeurs prenait l'élève ?

x = 0 ou x = 1, pour que cela ne soit pas trop difficile à faire de tête ! Et ainsi beaucoup d'erreurs (fautes de signe devant les coefficients, erreurs d'exposant, etc.) ne pouvaient être décelées. Maintenant, l'élève n'aura pas de mal à faire cette vérification avec une valeur « quelconque » : prenons par exemple x = 12,5498653, que nous mettons dans la mémoire X ; il suffit de taper les deux expressions $X^4 - 5X^2 + 4$ et $(X - 2)(X - 1)(X + 1)(X + 2)$, sans les modifier, et de constater qu'elles donnent toutes deux le même résultat (il s'agissait bien d'un contrôle, et non d'une démonstration).

Il s'agit là d'un excellent moyen de contrôler (dans le cadre du graphique ou du calcul numérique) de résultats acquis par une autre démarche (dans le cadre algébrique).

Une démarche de recherche

Un autre objectif du programme est de développer, chez les élèves, la démarche scientifique, par la résolution de problèmes.
Un exemple « classique », en seconde, est celui de la feuille de papier rectangulaire, de dimensions données, que l'on ampute aux quatre coins de carrés de côté x pour en faire une boite (sans couvercle). On demande aux élèves de déterminer x pour que le volume de la boîte soit maximal.
On trouve cet exemple dans certains manuels avec des valeurs simples (donc entières !) des dimensions de la boîte, qui donnent une solution simple (entière) pour x. Que va faire l'élève ? Il procédera par essais successifs : x = 1, x = 2, x = 3... et trouvera bien sûr la **bonne** réponse ; et comment lui expliquer que la démarche est mauvaise, si la réponse est la bonne ?

L'intérêt de ce problème est d'amener les élèves à la recherche d'un maximum par approximations successives. La solution ne doit pas « tomber juste » ! Il est loisible de prendre, par exemple, 21 et 29,7 cm comme dimensions du rectangle de départ. Les calculs numériques ne gêneront pas, puisque c'est la machine qui les fait : l'élève, débarrassé de ces tâches « embêtantes[1] », pourra se consacrer véritablement à ce qui fait le sens du problème.

Dans cette brochure, deux « narrations de recherche » apporteront la preuve - si elle était nécessaire - que l'on peut **faire** des mathématiques **grâce** aux calculatrices (les énoncés des deux problèmes proposés ne pourraient d'ailleurs pas exister s'il n'y avait pas les calculatrices graphiques).

On ne sait pas
parce que
l'on voit,
mais on voit
ce qu'on
veut savoir

Luc TROUCHE
Albi, oct. 1996

Des réels bien discrets

Dans le cadre des apprentissages fondamentaux, notamment de l'analyse, la calculatrice graphique peut être utilisée comme outil d'illustration. Par exemple pour montrer les graphes des fonctions de référence, des fonctions « associées » (puisque la machine accepte des écritures comme $Y_2 = Y_1(X - 3)$), montrer à quoi correspond la parité, visualiser le nombre infini de solutions d'une équation trigonométrique, permettre d'aborder la notion de limite, etc.

---

[1] Pour lui, élève, bien sûr !

Cependant la calculatrice a ses limites « physiques », et il sera difficile, par exemple, d'introduire correctement la notion de dérivée en utilisant un écran qui a un nombre fini de pixels, et où Δx ne peut pas être inférieur à un certain seuil.

Il faut en effet prêter une grande attention à la conception de l'ensemble **R** qui est induite par l'usage de la calculatrice.
Les programmes actuels (où on ne définit pas **R**) visent à donner à l'élève l'image mentale d'une **droite réelle** : à chaque point de la droite correspond un nombre, à chaque nombre un point, et il n'y a pas de « trou ».
Cependant, un certain nombre d'études didactiques, menées dans les I.R.E.M., montrent qu'une bonne quantité d'élèves ont une vision « atomiste » de la droite : c'est à dire qu'avec un très très fort grossissement, on finirait par obtenir des « trous » ; et cela peut avoir des conséquences surprenantes : deux droites non parallèles peuvent n'avoir aucun point commun si leur point d'intersection correspond à un « trou ». Cette représentation mentale erronée n'est absolument pas due aux calculatrices : on la trouvait déjà chez Aristote !

> L'évaluation à l'entrée en seconde (septembre 1996, 1er exercice) nous montre que le simple calcul numérique n'est pas, loin s'en faut, une opération sans conséquence sur les représentations des élèves. Des nombres « **presque égaux** » comme 13/8 et 10/6 conduisent, via la propriété de Thalès, à des droites « **presque parallèles** ».
> La confiance totale en l'outil n'est pas ébranlée par l'argumentation du professeur, qui apparaît plus comme une argutie de « prof de math » chicanier que comme une preuve formelle.

Mais les calculatrices, qui calculent seulement sur un ensemble discret (et fini) de décimaux, auront peut-être tendance à renforcer cette conception (c'est une hypothèse que nous faisons) ; en effet, pour une calculatrice travaillant avec 13 chiffres sur ses registres internes, il n'y a **effectivement rien** entre 7,159 486 302 551 et 7,159 486 302 552. Un travail sur la notion intuitive de continuité de **R** sera donc de plus en plus nécessaire.

De nouvelles démarches

Grâce à cet outil, de nouvelles pistes, qui ne faisaient pas partie des programmes traditionnels, peuvent être ouvertes.

Pour beaucoup d'élèves, toute équation posée se résout de façon algébrique. C'est le cas au lycée pour les équations polynomiales du premier ou de second degré (ou qui s'y ramènent), pour les équations du type ln(A) = ln(B) ou cos(A) = cos(B) dès que A et B sont des expressions algébriques de l'inconnue x, etc.

Or la règle générale, en mathématique, est qu'**il n'y a pas de méthode algébrique pour résoudre une équation**. On doit utiliser des méthodes d'approximation, qui permettront d'obtenir la solution avec une précision fixée au départ.

La plus connue (par les professeurs) est la méthode de « dichotomie ». C'est qu'elle est très satisfaisante sur le plan théorique, et facile à illustrer au tableau ; mais elle cumule deux inconvénients : sa convergence n'est pas des plus rapides, et elle nécessite l'écriture d'un programme informatique assez complexe, que les élèves ne pourraient pas écrire seuls.

Pour les élèves, la recherche d'une solution approximative pourra se faire graphiquement à l'aide du ZOOM de la calculatrice, et l'on pourra pousser aussi loin que le permettent les limites de la machine.

Si l'on veut faire de l'analyse un peu plus élaborée, on pourra utiliser la méthode de NEWTON. Son inconvénient est qu'elle peut poser des problèmes théoriques de convergence (qui nécessitent pour les résoudre des compétences mathématiques de haut niveau) ; mais, en contrepartie, quand elle « marche » (c'est à dire dans tous les cas non pathologiques), elle donne **extrêmement rapidement** la solution et ne nécessite aucunement l'écriture d'un programme.

Voyons cela sur un exemple particulier, compréhensible en 1^{ere}.
Soit à résoudre $\cos(x) = x$, c'est à dire $\cos(x) - x = 0$, sur $[0 ; \pi/2]$.
Posons $f(x) = \cos(x) - x$, d'où sa dérivée $f'(x) = -\sin(x) - 1$.
La solution est la limite de la suite récurrente $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$; cela peut se comprendre aisément en faisant figurer sur un schéma la tangente à la courbe d'équation $y = f(x)$ au point d'abscisse x_n, qui recoupe Ox en x_{n+1} (que l'on détermine par calcul).
Pour avoir les divers termes de cette suite, pas besoin de programme :
entrons une valeur initiale dans la mémoire X ;
et tapons l'instruction X - (cosX - X)/(-sinX - 1) → X $\boxed{\text{ENTER}}$;
les frappes successives de $\boxed{\text{ENTER}}$ donneront x_1, x_2, x_3... Et l'on s'aperçoit très rapidement de la vitesse de la convergence.

Faudra-t-il modifier **radicalement** les programmes d'analyse, pour les adapter aux outils très puissants dont disposent les élèves ? Nous n'avons pas encore de réponse à cette question, qui se pose dans de nombreux I.R.E.M.. La recherche est en cours...

Mais le baccalauréat ?

L'usage de calculatrices de plus en plus performantes enlève une grande partie de l'intérêt des sujets classiques comme l'étude d'une fonction. C'est pourquoi on assiste, depuis quelque temps, suivant les séries, à l'apparition de nouveaux types de sujets, où le problème d'analyse débute par l'exploitation d'un graphique.

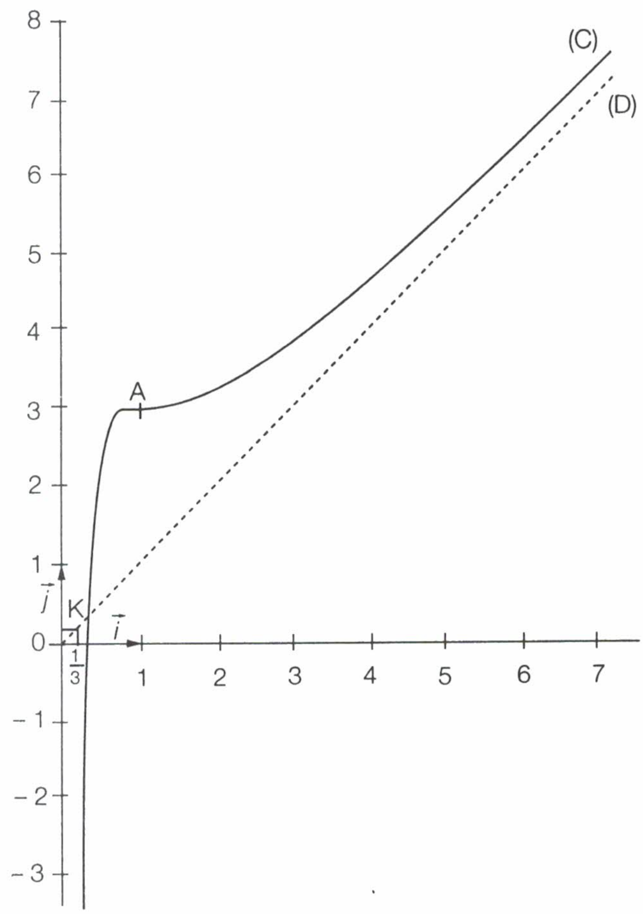
Voici l'exemple du sujet de PONDICHÉRY 1996 (série STT Informatique et gestion) :

PROBLÈME

On considère une fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ dont la courbe représentative (C) est donnée ci-dessous dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, (unités : 1 cm en abscisse, 1 cm en ordonnée).
La droite (D) d'équation $y = x$ a également été représentée dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

Le but du problème est, dans une première partie, de déterminer graphiquement certaines propriétés de la fonction f puis de les **prouver** dans une deuxième partie.

Représentation de f et de son asymptote oblique D



Partie A - Exploitation du graphique

1. On admet que l'axe des ordonnées et la droite (D) sont asymptotes à la courbe (C). À partir de cette hypothèse, donner $\lim_{x \to 0} f(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

2. Le point $K\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$ est le point commun à (C) et (D). D'après la représentation graphique quelle est en fonction de x la position de la courbe (C) par rapport à la droite (D) ?

3. D'après la représentation graphique quel est le sens de variation de f ?

Partie B - Justification des observations graphiques et calcul d'aire

La fonction f est définie par : $f(x) = x + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}$ pour $x > 0$.

1. a. Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ puis $\lim_{x \to +\infty} [f(x) - x]$ et justifier le fait que la droite (D) est asymptote à la courbe (C).

b. En étudiant le signe de $f(x) - x$, retrouver les résultats de la question **A. 2.**

2. a. Montrer que, pour tout x strictement positif, $f(x)$ peut s'écrire :

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x - 1}{x^2}.$$

b. Calculer $\lim_{x \to 0} f(x)$ et justifier le fait que l'axe des ordonnées est asymptote à (C).

3. a. Calculer le nombre dérivé $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = \frac{(x-1)^2(x+2)}{x^3}$ pour $x > 0$.

b. Étudier le signe de $f'(x)$ et donner le tableau de variation de la fonction f.

c. Calculer une équation de la droite (T) tangente au point A d'abscisse 1 de (C).

4. Calculer la valeur exacte, puis la valeur approchée à 10^{-1} près par excès, en cm^2, de l'aire de la surface limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = \frac{1}{3}$ et $x = 3$.

On remarquera cependant que l'utilisation intelligente de la calculatrice est assez peu récompensée dans ce problème.

Il est vrai que la mise en place de nouveaux outils d'évaluation, qui prennent en compte de nouvelles capacités (pas encore clairement définies) et les nouveaux outils (qui évoluent très rapidement) n'est pas simple (c'est un euphémisme).

Ce qui est patent, par contre, c'est que ce sont les élèves les plus défavorisés financièrement (et qui sont souvent en situation d'échec en mathématiques) qui ont le plus besoin de diplômes crédibles, qui possèdent les matériels les moins performants (et parfois des modèles surannés difficiles à exploiter), et pour qui la maîtrise de ces instruments (donc son apprentissage en classe) est la plus nécessaire.

But de la brochure

Par cette brochure, nous voudrions permettre aux professeurs de consacrer du temps, tout au long de l'année, à des activités mathématiques qui intègrent la calculatrice graphique.

C'est pourquoi nous avons conçu un certain nombre de fiches « clés en main » (avec autorisation de photocopie !) pour ceux qui ne veulent pas trop s'investir dans la recherche de « l'ingénierie pédagogique ». Mais il est clair que nous préférerions que chacun s'approprie ces fiches, les modifie, en invente de bien plus pertinentes.

Ces fiches commencent (*1^er^ chapitre*) par l'apprentissage de la partie « calcul » de la machine ; elles se poursuivent (*2^eme^ chapitre*) par la partie « écran graphique ».

Nous avons aussi complété ces chapitres d'un certain nombre de détails techniques, qui permettent de bien comprendre le fonctionnement de la machine ; ils ne sont pas destinés à être enseignés tels quels, mais ils peuvent aider à interpréter certains résultats obtenus par les élèves.

Nous souhaitons bien sûr avoir « en retour » vos remarques, critiques, suggestions, afin de pouvoir améliorer notre produit, ou remettre en cause des conceptions erronées.

Les membres du groupe de recherche :

Catherine BRUN, Lycée Georges de la Tour, METZ
Francine DOUCHE, Lycée Stanislas, NANCY
Jean-Marie PROVIN, Lycée Mendès-France, EPINAL
François PROUTEAU, Lycée Mendès-France, EPINAL
Jacques VERDIER, Lycée Varoquaux, TOMBLAINE

L'APPRENTISSAGE

DE LA CALCULATRICE

EN CLASSE DE SECONDE

La classe de seconde représente pour l'élève un palier important, et souvent difficile à franchir.
Il va se trouver confronté avec de nouvelles méthodes de travail et de nouveaux objectifs, y compris en mathématiques.

Dans cette discipline, il va devoir utiliser une calculatrice d'un modèle nouveau : la syntaxe est fondamentalement différente de celle qu'il avait au collège, les expressions peuvent être entrées de façon littérale (bien que la machine ne fasse que des calculs numériques, le plus souvent approchés ([1])), les capacités de mémoire sont importantes, elle possède un écran graphique (ce n'est pas obligatoire, mais la quasi-totalité des élèves qui changent de machine optent pour un modèle graphique), et des difficultés nouvelles peuvent apparaître, qui étaient insoupçonnables au collège.

D'autre part, l'élève ne devra pas seulement apprendre à utiliser sa calculatrice en tant "qu'outil de calcul" proprement dit, mais aussi en tant qu'outil de contrôle permanent des résultats qu'il aura trouvés par ailleurs.
Cette machine se révélera être pour lui une source de problèmes, dans tous les sens du terme : problèmes qui se poseront à lui du fait des limites calculatoires ou graphiques des capacités de sa machine, mais aussi problèmes - au sens "noble" du terme - qui lui seront posés dans le cadre d'activités de recherche, et qui ne l'auraient pas été si la machine n'existait pas ; nous en proposons quelques exemples dans cette brochure.

Il est donc primordial que, dès le début de l'année, le professeur mette en place (dans quelques T.D. ou modules spécifiques, mais aussi de façon quasi-permanente au fur et à mesure de l'apprentissage des notions nouvelles) des séquences d'apprentissage de l'utilisation "correcte" de la machine.
Elles viseront à familiariser l'élève avec **l'outil**, notamment dans les domaines suivants :

- syntaxe de la nouvelle machine, en particulier la notation préfixée des fonctions (√2 au lieu de 2√), certaines priorités implicites (2X au lieu de 2*X), et le fait que les calculs ne s'exécutent qu'une fois l'expression globale enregistrée (et non plus au fur et à mesure) ;

[1]. Nous avons volontairement "éliminé" de notre travail les calculatrices "formelles", telles la T.I.92, parce qu'on ne les rencontre pas encore en seconde.

- révisions sur l'analyse des expressions mathématiques, et en particulier sur les niveaux de parenthèses nécessaires ;
- l'utilisation des mémoires et de la touche $\boxed{\text{ANS}}$;
- les puissances de 10 et la notation scientifique (ces notions, abordées à partir de la quatrième, ne sont pas encore définitivement acquises : leur apprentissage doit se poursuivre au lycée) ;
- les "limites" de la calculatrice, et en particulier tout ce qui concerne les approximations ;
- une approche de la programmation dans le but de "dresser" un tableau de valeurs d'une fonction ; encore que la "programmation" sera d'autant plus limitée que la plupart des machines possèdent maintenant la capacité de réaliser automatiquement un tel tableau.

Ensuite, au moment où l'on abordera les systèmes linéaires, le signe de (ax+b), et surtout les premières fonctions non-affines, il faudra apprendre à la classe l'utilisation de l'outil qu'est l'écran graphique, avec ses avantages et ses défauts.

Les débuts

SYNTAXE DES MACHINES DE « TYPE LYCÉE »

Nous avons imaginé le déroulement, très tôt dans l'année (le mieux est de choisir le moment où il "reste" autant de calculatrices de type "collège" qu'il y a de nouvelles machines) d'une séquence où les élèves travailleraient en petits groupes, les types de calculatrices étant **les plus hétérogènes possibles** dans chaque groupe.

Le but de cette séquence de T.D. est de faire découvrir aux élèves les différences fondamentales qui existent entre les deux modes de fonctionnement. Certaines questions peuvent paraître ambiguës, mais il s'agit avant tout de susciter la discussion dans le groupe, ce qui favorisera l'apprentissage.

Les extraits des fiches de T.D. proposés aux élèves sont imprimés en encadré sur fond grisé.

FICHE CALCULATRICE N°1

Lors de votre entrée en seconde, vous avez changé ou vous allez changer de calculatrice. Le but de ce T.P. est d'observer les différences entre les calculatrices type « collège » (T.I.30, T.I.40 Galaxy, Casio fx82, fx92, etc.) et les calculatrices type « lycée » (T.I.80, T.I.82, Casio 6900, Casio 8900, etc.).

Modalités du travail : groupes de trois ou quatre élèves, avec au moins une calculatrice de chaque type.

Nom et prénom :	Marque et type calculatrice :
....	....
....	....
....	....
....	....

I. Les touches de base

I.1 Quelle touche utilise-t-on pour obtenir le résultat d'une opération ?

Calc. Collège : .... Calc. Lycée : ....

I.2 Indiquer la séquence à utiliser pour calculer :

15^2	Calc. Collège :	Calc. Lycée : ....
$\sqrt{225}$	Calc. Collège :	Calc. Lycée : ....
$\frac{1}{5}$	Calc. Collège :	Calc. Lycée : ....

Commentaire sur la question I-2 :

La touche [x-1] ou [1/x] n'est pratiquement pas utilisée par les élèves ; il serait bon que le professeur prévoie alors de la leur faire découvrir.
Par ailleurs, certains élèves savent bien manipuler les touches "fraction" de leur calculatrice. Il y a là une ambiguïté sur la consigne : qu'attend-on comme réponse, 1/5 (fraction) ou 0.2 (décimal) ?

I.3 Quelle(s) touches(s) utilise-t-on pour choisir l'unité d'angle - degré ou radian ou grade) ?

	Calc. Collège :	Calc. Lycée : ....

I.4 Indiquer la séquences de touches utilisées pour calculer :

cos60°	Calc. Collège :	Calc. Lycée : ....
sin150°	Calc. Collège :	Calc. Lycée : ....
tan45°	Calc. Collège :	Calc. Lycée : ....

I.5 Indiquer la séquence de touches à utiliser pour déterminer une mesure de l'angle A tel que :

tan A = 1	Calc. Collège :	Calc. Lycée : ....
cos A = ½	Calc. Collège :	Calc. Lycée : ....

I.6 Indiquer le résultat obtenu lorsque vous effectuez les opérations suivantes en utilisant soit la touche d'opération [-] , soit la touche de changement de signe [+/-] ou [(-)] :

2 - 3 :	Calc. Collège [-] :	Calc. Lycée [-] : ....
	Calc. Collège [+/-] :	Calc. Lycée [+/-] : ....
3 x (-2):	Calc. Collège [-] :	Calc. Lycée [-] : ....
	Calc. Collège [+/-] :	Calc. Lycée [(-)] : ....
$\sqrt{(-2)^2}$:	Calc. Collège [-] :	Calc. Lycée [-] : ....
	Calc. Collège [+/-] :	Calc. Lycée [(-)] : ....

Commentaires sur la question I-6 :

La question n'était pas claire. Peut-être aurait-il fallu la formuler autrement : afficher des séquences de touches et faire noter le résultat affiché par l'écran, par exemple :

calc.	[2] [-] [3] [=] donne :	[ ]
collège	[2] [+/-] [3] [=] donne :	[ ]

calc. [2] [-] [3] [EXE] donne : [ ]

lycée [2] [(-)] [3] [EXE] donne : [ ]

et faire analyser ensuite aux élèves la différence entre les deux touches [-] et [(-)].
De même avec les deux autres calculs.

I.7. La correction d'une erreur de frappe :

Vous avez tapé 2x125 au lieu de 2x152.
Comment, si c'est possible, corriger l'erreur, sans tout recommencer, bien sûr ?

Premier cas, si vous n'avez pas encore tapé [=] ou [EXE] ou [ENTER] :
Calc. Collège : .... Calc. Lycée : ....

Deuxième cas, si vous avez déjà tapé [=] ou [EXE] ou [ENTER] :
Calc. Collège : .... Calc. Lycée : ....

II. Les calculs de base

II.1 Tapez [5] [x] [7] [+] [3] [÷] [2] [-] [5]. Quel résultat obtenez-vous ?
Calc. Collège : .... Calc. Lycée : ....

Dans cette séquence, introduisez deux parenthèses (un ouvrante et une fermante) ; combien de résultats différents pouvez-vous obtenir ?

II.2 Sans la calculatrice, calculez :

$A = \frac{120+6}{3} = \dots\dots$, $B = 15 + \frac{3x7}{4+3} = \dots\dots$ et $C = \sqrt{\frac{9 x 12}{5+7}} = \dots\dots$

Indiquez la séquence de touches nécessaires pou calculer A, B et C. Si vous n'obtenez pas le résultat « attendu », quelle était votre erreur ?

A : Calc. Collège : .... Calc. Lycée : ....

B : Calc. Collège : .... Calc. Lycée : ....

C : Calc. Collège : .... Calc. Lycée : ....

Commentaire sur la question II-2 :

Aucun des élèves n'avoue avoir obtenu autre chose que le résultat "attendu".
Peut-être aurait-il fallu modifier la consigne, et demander de faire **d'abord** le calcul mentalement (sans calculatrice ni papier), jusqu'à ce que tous les membres du groupe soient d'accord, et de l'exécuter **ensuite seulement** à la machine.

Dans une autre classe, une collègue a donné l'exercice ci-dessous :

Calculer et donner le résultat sous forme de fraction (réduite) :

$\frac{2}{3}-\frac{9}{7}+\frac{1}{3}-\frac{2}{7}$; $\frac{2}{41}-\frac{3}{34}+\frac{5}{6}$ et $\frac{5}{6} \text{x} \frac{20}{7}-1$

Commentaires : certaines machines n'ont pas directement les fractions au clavier ([2]).
Pour ce qui est des machines possédant la touche a^{b}/c (ou équivalente), il était manifeste - dans cette classe - que les élèves ne l'avaient **pas du tout** manipulée au collège : la calculatrice y aurait-elle été interdite dès qu'il y avait un calcul sur les fractions ?

Par ailleurs, nous avons remarqué que les élèves qui manipulaient **bien** leur calculatrice "collège" étaient extrêmement réticents à utiliser la machine plus sophistiquée que leurs parents venaient de leur acheter : certains ne l'utiliseront que très tard dans l'année, au moment des graphiques de fonctions (et encore, peut-être faudra-t-il les y obliger...).

On peut aussi faire travailler les élèves de façon plus ludique, avec un exercice comme celui présenté ci-contre.

Mettre des parenthèses afin d'obtenir les résultats indiqués :

0,3 - 2,4 x 5,7 / -3,4 + 5 x(-2,4) = 17,955

0,3 - 2,4 x 5,7 / -3,4 + 5 x(-2,4) = 0,8688311688

0,3 - 2,4 x 5,7 / -3,4 + 5 x(-2,4) = -8,064705882

Ecrire le calcul dont l'exécution à la machine est donné par le « programme » suivant :

$\boxed{(}\ \boxed{4}\ \boxed{,}\ \boxed{3}\ \boxed{+}\ \boxed{2}\ \boxed{,}\ \boxed{3}\ \boxed{\text{x}}\ \boxed{(}\ \boxed{5}\ \boxed{,}\ \boxed{1}\ \boxed{-}\ \boxed{2}\ \boxed{,}\ \boxed{7}\ \boxed{)}\ \boxed{)}\ \boxed{\div}\ \boxed{(}\ \boxed{7}\ \boxed{,}\ \boxed{3}\ \boxed{\text{x}}\ \boxed{4}\ \boxed{,}\ \boxed{1}\ \boxed{+}\ \boxed{4}\ \boxed{,}\ \boxed{3}\ \boxed{)}$

2. C'est le cas par exemple de la T.I.82, où l'on calcule d'abord le résultat décimal, puis où on demande sa conversion en fraction par le menu MATH.
Pour la T.I.80, c'est dans le menu $\boxed{\text{MODE}}$ que l'on décide si l'on veut travailler avec les fractions sous la forme $a + {}^{b}/c$ (avec ${}^{b}/c < 1$) ou bien ${}^{d}/c$ (« à la française).

UTILISATION DES MEMOIRES

Les exercices ci-dessous ont un objectif : montrer aux élèves que, grâce à l'utilisation des mémoires, il n'est pas besoin de recopier sur un coin de papier des résultats intermédiaires. Au contraire, le dernier exercice permet de montrer que si l'on procédait ainsi, le résultat ne serait pas obtenu avec la précision souhaitée.

III. L'utilisation des mémoires

III.1 Soit A = $120^2 + 150^2 - 2\times120\times150\times\cos60°$.
Comment stocker le résultat de l'opération précédente en mémoire ? S'il y a plusieurs possibilités, indiquez-les :

Calc. Collège : .... Calc. Lycée : ....

Calculez B = $150\times\sin60°$ = ... et stockez le résultat dans une autre mémoire.

III.2 Comment utiliser un résultat stocké en mémoire ? Indiquez la séquences de touches utilisée pour calculer $h = \dfrac{120\text{x}B}{2\sqrt{A}}$ = ... (à 10^{-4} près).

Autre exercice possible (pour les calculatrices graphiques nouveaux modèles uniquement) :

a) Tapez 2x7 $\boxed{\text{EXE}}$, puis $\boxed{\text{ANS}}$ $\boxed{\text{EXE}}$, puis 2x$\boxed{\text{ANS}}$ $\boxed{\text{EXE}}$, puis $\boxed{\text{ANS}}$ $\boxed{\text{EXE}}$ ..Quel est le rôle de la touche $\boxed{\text{ANS}}$?

b) Tapez 4 $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{\text{X,T}}$ $\boxed{\text{EXE}}$ (sur les Casio, la touche $\boxed{\text{STO}}$ est remplacée par une flèche). Effacez votre écran par $\boxed{\text{CLEAR}}$. Tapez alors 2x $\boxed{\text{X,T}}$: qu'obtenez-vous ? Quel est le rôle de la touche $\boxed{\text{X,T}}$?

c) Indiquez une séquence de touches utilisant la touche $\boxed{\text{X,T}}$ et permettant de calculer :

$$A = 2\text{x}15{,}844^2 - 3\text{x}15{,}844$$

$$B = \dfrac{2\text{x}15{,}844^2 + 300 - \sqrt{15{,}844}}{15{,}844 + \dfrac{2}{15{,}844}}$$

Travail demandé dans une autre classe :

Comment calcule-t-on $\sqrt{7}$ et $3\sqrt{7}$?

Soit $A = \dfrac{3\sqrt{7} - 5}{2 - 0{,}5^2}$. Calculer A, A^2 et $\sqrt{A^2}$.

Dans cet exercice, on demande, bien sûr, un calcul de valeurs approchées.
Le but ici n'est pas seulement d'utiliser une mémoire (pour y stocker la valeur de A), mais surtout de faire remarquer aux élèves que $\sqrt{A^2}$ n'est pas nécessairement A, mais peut être (-A).

Un élève étourdi de première a oublié sa calculatrice. Vous allez effectuer ces calculs, et lui donner les résultats à 10^{-3} près.

1°) a) $A^2 = 150^2 + 220^2 - 2 \times 150 \times 220 \times \cos 110° \approx$ ....
$A = \sqrt{A^2} \approx$ ....
b) $C = \sin B = \frac{220}{A} \times \sin 110° \approx$ ....
c) $B = \sin^{-1}(C) \approx$ ....

2°) $CD = 2 \times 1{,}6 \times \sin 36° \approx$ ....
$HG = 1{,}6 \times \cos 36° \approx$ ....
$\mathcal{A} = 5 \times CD \times HG/2 \approx$ ....
$V = \frac{8}{3} \times \mathcal{A} \approx$ ....
$FG = \sqrt{8^2 + HG^2} \approx$ ....
$\mathcal{A}' = 5 \times \frac{FG \times CD}{2} \approx$ ....

Ces deux derniers exercices ont été donnée en test d'évaluation.
On a pu constater une bonne réussite à la question a) du I, mais pas aux questions b) et c).

L'exercice 2°) nécessite deux mémoires au minimum (et ne peut donc être traité avec une machine de type collège, sauf la T.I.30 qui possède trois mémoires) : une pour y stocker la valeur de CD, réutilisée dans le calcul de $\mathcal{A}'$, l'autre pour y stocker la valeur de HG, qui est réutilisée dans le calcul de FG. Par contre, dans le calcul de $\mathcal{A}$, on peut utiliser $\boxed{\text{ANS}}$ pour HG ; de même, dans le calcul de V on peut utiliser $\boxed{\text{ANS}}$ pour $\mathcal{A}$, et dans le calcul de $\mathcal{A}'$ on peut utiliser $\boxed{\text{ANS}}$ pour FG.
Le lecteur y aura reconnu le calcul de l'aire de la base, du volume, et de l'aire latérale d'une pyramide régulière pentagonale (hauteur : 8 ; rayon du cercle circonscrit à la base : 1.6).

Le tableau suivant donne les résultats obtenus suivant la méthode de travail utilisée :

méthode	1	2	3
CD	1,881	1,881	1,880
HG	1,294	1,294	1,294
$\mathcal{A}$	6,087	6,085	6,081
V	16,231	16,227	16,216
FG	8,104	8,104	8,103
$\mathcal{A}'$	38,108	38,109	38,084

Méthode 1 : correcte, avec utilisation des mémoires.
Méthode 2 : recopiage des valeurs arrondies (correctement) à 10^{-3} près, puis reportées telles quelles dans les calculs ultérieurs (ex. A = 5 x 1,881 x 1,294).
Méthode 3 : comme 2, mais arrondis obtenus par troncature (c'est à dire à 10^{-3} près par défaut).

L'écart absolu entre le résultat maximal et le résultat minimale de V est e = 0,015
L'erreur relative (e/V) est alors d'environ 0,1% dans le calcul de A et V.

L'utilisation de la touche $\boxed{\text{ANS}}$ semble bien maîtrisée par les élèves : bonne réussite aux quatre premiers calculs.
Par contre, un certain nombre d'élèves n'a pas su utiliser les mémoires (certains ont recopié au brouillon des valeurs approchées à 10^{-3} près pour les réutiliser ensuite). Ce qui fait qu'au calcul de FG et de *A'*, la majorité des élèves n'a pas pu poursuivre correctement le calcul.
Pour l'anecdote : les deux seuls élèves qui ont fait un « sans faute » à ce test (il y avait d'autres questions que celle décrite ci-dessus) possédaient respectivement l'un une T.I.30, l'autre une Casio fx6800 !

Les puissances de 10 et la notation scientifique

Les exercices proposés dans ce chapitre constituent la suite de l'apprentissage de la calculatrice en seconde. En effet, l'expérience montre que l'utilisation de la notation scientifique, en particulier sur les calculatrices, n'est pas maîtrisée par les élèves.
Or ceux-ci doivent savoir manipuler correctement cette notation en physique/chimie.

Pour l'ensemble des activités que nous proposons ci-dessous, il faut compter 1,5 h dans une classe « normale », et peut-être même un temps significativement plus long : en effet, il ne faut pas négliger le temps que prendront la lecture et **la compréhension** des consignes.

Les énoncés de cette fiche, tous regroupés, se retrouvent dans les annexes, sur fond blanc, prêts à être photocopiés pour les élèves.

FICHE CALCULATRICE N° 2

Nom :
Prénom :
Calculatrice :

Attention : selon les calculatrices,
remplacez $\boxed{\text{EXE}}$ par $\boxed{=}$ ou par $\boxed{\text{ENTER}}$,
remplacez $\boxed{x^y}$ par $\boxed{\wedge}$ ou par $\boxed{y^x}$,
remplacez $\boxed{\text{EXP}}$ par $\boxed{\text{EE}}$ ou par $\boxed{x10^x}$,
remplacez $\boxed{(-)}$ par $\boxed{+/-}$.

I. Les touches $\boxed{x^y}$ ou $\boxed{\wedge}$, et les touches $\boxed{\text{EXP}}$ ou $\boxed{\text{EE}}$ ou $\boxed{x10^x}$:

Entourez ci-dessus les touches qui sont sur votre calculatrice.

1) Tapez la séquence 2 $\boxed{x^y}$ 3 $\boxed{\text{EXE}}$ notez le résultat :

puis la séquence 2 $\boxed{\text{EXP}}$ 3 $\boxed{\text{EXE}}$ notez le résultat :

Quel sont les rôles de la touche $\boxed{x^y}$ et de la touche $\boxed{\text{EXP}}$?

2) Indiquez la séquence permettant de calculer 25^5, puis celle permettant de calculer 25×10^5.

II. Calculs sur les puissances

1) les « puissances négatives »

Tapez la séquence `$\boxed{2}$ $\boxed{xy}$ $\boxed{(-)}$ $\boxed{3}$ $\boxed{EXE}$ (ou`$\boxed{2}$ $\boxed{xy}$ $\boxed{3}$ $\boxed{+/-}$ $\boxed{=}$ pour les machines de type collège) et notez le résultat obtenu :

Comparez 2^{-3} et 2^3.

Si n est un entier naturel, quelle est la définition de 2^{-n} ? Calculez : 2^{-4} , 2^{-1}, 2^{-2}.

2) « les règles de calcul »

Tapez A = $\boxed{2}$ $\boxed{xy}$ $\boxed{3}$ $\boxed{x}$ $\boxed{2}$ $\boxed{xy}$ $\boxed{2}$ $\boxed{-}$ $\boxed{2}$ $\boxed{xy}$ $\boxed{5}$ $\boxed{EXE}$

B = $\boxed{2}$ $\boxed{xy}$ $\boxed{3}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{2}$ $\boxed{xy}$ $\boxed{2}$ $\boxed{-}$ $\boxed{2}$ $\boxed{EXE}$

C = $\boxed{2}$ $\boxed{xy}$ $\boxed{3}$ $\boxed{xy}$ $\boxed{2}$ $\boxed{-}$ $\boxed{2}$ $\boxed{xy}$ $\boxed{6}$ $\boxed{EXE}$

Pouvait-on s'attendre à ces résultats ?

Quelles sont les règles de calcul sur les puissances ?

En utilisant ces règles de calcul ; calculez de tête :

$A = 2^3 \times 2^{-2}$ $B = (2^{-3})^{-2}$ $C = \frac{2^3}{2^{-2}}$

puis vérifiez avec votre calculatrice (indiquez les séquences utilisés).

3) Les parenthèses, le signe - , et les puissances

Tapez $\boxed{(-)}$ $\boxed{2}$ $\boxed{xy}$ $\boxed{4}$ $\boxed{EXE}$ puis $\boxed{(}$ $\boxed{(-)}$ $\boxed{2}$ $\boxed{)}$ $\boxed{xy}$ $\boxed{4}$ $\boxed{EXE}$ et notez les résultats obtenus. Sont-ils identiques ?

Mêmes calculs en remplaçant $\boxed{4}$ par $\boxed{3}$. Sont-ils identiques ?

Quelles séquences de touches taper pour calculer :

-75^3 ; -75^4 ; $(-75)^4$; $(-2)^3 \times (-3)^2$ et $-2^3 \times (-3)^5$?

Commentaire sur ce dernier exercice :

Il y manque des séquences de touches telles que

$\boxed{(}$ $\boxed{2}$ $\boxed{xy}$ $\boxed{3}$ $\boxed{)}$ $\boxed{xy}$ $\boxed{4}$, $\boxed{2}$ $\boxed{xy}$ $\boxed{3}$ $\boxed{xy}$ $\boxed{4}$, ou $\boxed{2}$ $\boxed{xy}$ $\boxed{(}$ $\boxed{3}$ $\boxed{xy}$ $\boxed{4}$ $\boxed{)}$: en quoi diffèrent-elles ?

Que signifient des écritures telles que : $\left(2^3\right)^4$, 2^{3^4} , $2^{\left(3^4\right)}$? A quelles séquences de touches ci-dessus correspondent-elles ?

D'autre part, si on utilise des machines telles que d'anciennes TI (TI67, etc.), il faut être assez « bon en math » pour calculer a^n si a est négatif, la machine indiquant $\boxed{\text{Error.}}$.
On trouve aussi, sur des machines telles que la Casio 180P, des difficultés dues à la syntaxe ; par exemple, pour calculer $(-3)^4$, faut-il taper $\boxed{3}$ $\boxed{+/-}$ $\boxed{xy}$ $\boxed{4}$ $\boxed{=}$, $\boxed{3}$ $\boxed{xy}$ $\boxed{4}$ $\boxed{+/-}$ $\boxed{=}$, ou bien $\boxed{3}$ $\boxed{xy}$ $\boxed{4}$ $\boxed{=}$ $\boxed{+/-}$?

Attention encore aux machines de type collège : elles génèrent dans ce domaine des erreurs auxquelles on ne pensait pas... Il ne faut pas perdre **le sens** de ce que l'on calcule, et être capable de **ne pas croire** ce qui est affiché sur l'écran.

4) Exposant non entier

Tapez $\boxed{2}$ $\boxed{xy}$ $\boxed{2}$ $\boxed{.}$ $\boxed{5}$, correspondant à $2^{2,5}$. Cela a-t-il un sens pour vous ?
A quoi pourrait bien correspondre la réponse de la calculatrice ?

N.B. Vous découvrirez la définition de a^x pour a > 0 et x réel en classe de terminale.

Commentaire : bien que cela ne figure absolument pas dans le programme de seconde, il peut être intéressant de montrer que certaines expressions, qui n'ont a priori aucun sens (tout comme a^0) pour les élèves, sont cependant calculées par la machine. Dans le cas ci-dessus, on pourra mettre les élèves sur une piste en vérifiant que $2^2 < 2^{2,5} < 2^3$.

III. La notation scientifique et les puissances de 10

1) Tapez 93 768 600 x 5 329 400 $\boxed{\text{EXE}}$

Quel est le résultat affiché sur l'écran : $\boxed{}$? Est-ce une valeur exacte ou approchée ?
Comment doit-on noter ce nombre sur sa copie ?

Mêmes questions avec 93 768 601 x 5 329 433.

Remarque :
Le premier nombre vaut exactement 499 730 376 840 000, et le second 499 733 476 533 233.

2) Pouvez vous afficher sur votre calculatrice le nombre 12 500 000 000 000 (douze mille cinq cents milliards) ?

Si oui tapez-le, suivi de $\boxed{\text{EXE}}$ .Que se passe-t-il?
A partir de quel nombre de chiffres votre calculatrice passe-t-elle en notation scientifique (essayez 111111 $\boxed{\text{EXE}}$ puis 1111111 $\boxed{\text{EXE}}$ puis 11111111 $\boxed{\text{EXE}}$ etc.;)

Si non comment entrer le nombre 12 500 000 000 000 ?

3) Tapez 10 [xy] 3 [EXE] , puis 10 [EXP] 3 [EXE] . Comparez les réponses.
Comment obtenir 10^n (il y a plusieurs façons) ?

Tapez 10 [xy] 2.5, puis 10 [EXP] 2.5. Que se passe-t-il ?
De quelle nature doit être le nombre qu'on affiche après la touche [EXP] ?

4) Tapez 2 [EXP] 3 [x²] [EXE] , puis [(] 2 [EXP] 3 [)] [x²] [EXE] . Concluez.

Les parenthèses sont-elles nécessaires pour calculer $(2 \times 10^3)^2$?
Peut-on calculer $(2 \times 10^3)^2$ en tapant **seulement** sur **4** touches : [ ] [ ] [ ] [ ] ?

Tapez : 2 [x²] [EXP] 6 [EXE] . Que fait la machine ?

Comment obtenir, avec le moins de touches possible, la valeur de :
$(2 \text{x} 10^{-3})^3$? $(-3 \text{x} 10^{-5})$? $2^3 \text{x} 10^{-3}$? $\dfrac{(2\text{x}10^{-2})\text{x}5^3\text{x}10^2}{\left(7\text{x}10^{-5}\right)^3}$?

Et enfin, s'il reste du temps...

5) la touche [INV] [log] ou bien [2nd] [log]

Cette touche est le plus souvent notée [10x] .

Tapez [10x] 3 [EXE] (ou 3 [10x] sur les machines « collège »). Observez.

Tapez 10 [xy] 3 [EXE] (ou 10 [xy] 3 [=]). Observez.

Tapez [10x] 2.5 [EXE] (ou 2.5 [10x] sur les machines « collège »). Observez.

Comparez avec 10 [xy] 2.5 [EXE] .

Pouvez-vous dire quel est le rôle de la touche [10x] ?

Une question que l'on peut poser, à brûle pourpoint, aux élèves :
Y a-t-il une différence entre :

[x10x] [3] [EXE] , [1] [0] [xy] [3] [EXE] et [1] [0] [EE] [3] [EXE] ?

Les limites de la calculatrice

Les quelques exercices qui suivent peuvent être réalisés dans une séance de 1,5 h, voire même 1 h, si on ne veut pas trop s'appesantir sur des explications techniques détaillées.
L'essentiel est que les élèves comprennent que la calculatrice ne fait que du calcul **approché** et que, sauf exception (comme celles des deux derniers exemples), on peut faire confiance à ce qui est affiché sur l'écran.
Mais "confiance" ne signifie pas prendre des valeurs approchées, aussi précises soient-elles, pour des valeurs exactes.

Tape $\boxed{1}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{3}$ $\boxed{\text{EXE}}$ (ou $\boxed{\text{ENTER}}$).
Combien, de chiffres la calculatrice affiche-t-elle ?
Multiplie par 1000 et retranche 333 ; combien de chiffre la calculatrice affiche-t-elle alors ?
Multiplie à nouveau par 1000 et retranche 333, combien de chiffres cette fois ?
Continue....
Peux-tu- expliquer le résultat observé ?

Les énoncés de cette fiche, tous regroupés, se retrouvent dans les annexes, sur fond blanc, prêts à être photocopiés pour les élèves.

Commentaire : le nombre de "3" à l'affichage se réduit.
C'est tout à fait normal, car pour la calculatrice (du moins quand on utilise la touche de division), 1 divisé par 3 ce n'est pas 1/3, mais (par exemple) 0.333333333333. Le nombre de chiffres stocké en mémoire est nécessairement fini.
La première étape du calcul donnera donc 0.333333333333x1000 - 333 = 0.333333333.
Puis 0.333333333x1000 - 333 = 0.333333. Et ainsi de suite.

Par contre, pour les machines qui possèdent un mode fraction, le calcul 1/3x1000 - 333 donne bien 1/3, et le phénomène décrit ci-dessus ne se produit pas.

Le choix de 1/3 est tout à fait opportun, car ce nombre est bien connu des élèves : c'est 0.3333**.....** avec une infinité de trois. Un nombre comme π ou $\sqrt{2}$ est beaucoup moins "connu" (dans la mesure même où il est considéré comme un véritable nombre). Nous allons d'ailleurs nous "occuper" de ce genre de nombres dans l'activité suivante.

A la recherche des décimales cachées.

Tape $\sqrt{2}$ $\boxed{\text{EXE}}$. Recopie l'affichage complet de l'écran sur un papier, recopie-le également dans la calculatrice et stocke ceci dans une mémoire.
Tape $\sqrt{2}$ - [cette mémoire] $\boxed{\text{EXE}}$.
Le résultat est-il nul ?
Sinon, qu'est-ce que cela signifie ?
La valeur affichée sur l'écran pour $\sqrt{2}$ est-elle une valeur approchée par excès ou par défaut ?

Comment peut-on utiliser ce qu'on vient de faire pour écrire $\sqrt{2}$ avec le maximum de décimales possible ?
Calcule le carré du nombre stocké en mémoire au début : trouve-t-on 2 ? Pourquoi ?

Recommence le même exercice, depuis le début, avec $\sqrt{3}$ puis avec $\sqrt{13}$. Que constates-tu ?

Commentaire : le résultat affiché pour $\sqrt{2}$ dépend du modèle de calculatrice utilisé.
Supposons que la machine affiche 1.414213562.
Le calcul de $\sqrt{2}$ - 1.414213562 peut donner, par exemple, 3.7×10^{-10}. Ce qui veut dire que l'on a une meilleure valeur approchée en prenant 1.41421356237.
Mais **attention** : ni l'une ni l'autre de ces valeurs ne sont exactes. En effet, $(1.414213562)^2 = 1.999999998944727844$,
tandis que $(1.41423156237)^2 = 1.9999999999912458800169$ (calculs faits "à la main" !!!).
Sur la calculatrice des élèves, on a beaucoup de chances d'obtenir $(1.414231562)^2 = 1.999999999$.

Ce qui est surprenant avec $\sqrt{13}$ c'est que la valeur approchée affichée est 3.605551275, et que $(3.605551275)^2$ donne "exactement" 13 sur l'écran de la calculatrice !!!

On voit que ces questions de valeurs approchées et de valeurs exactes ne seront pas si simples à assimiler pour un élève de seconde. Il importe que ce dernier comprenne bien qu'il est absolument impossible de donner une **écriture décimale limitée** (quel que soit le nombre de chiffres) d'un nombre comme 1/3, $\sqrt{2}$ ou $\sqrt{13}$.

Où l'on aide la calculatrice

Par quel chiffre se termine $A = 5796543^2$?
Avec combien de chiffres s'écrit A ? (remarquer que $5 \times 10^6 < \sqrt{A} < 6 \times 10^6$).

Calcule A avec la calculatrice. Que remarques-tu ? Peux-tu donner une explication de ce qui est affiché ?
Comment pourrait-on "utiliser" la calculatrice pour obtenir une valeur **exacte** de A ?
[N.B. : remarque que $A = (579 \times 10^4 + 6543)^2$].

L'exercice précédent se passe de commentaire ; c'est une occasion de réinvestir ce qui a été vu à propos de la notation scientifique, et de donner aux élèves un moyen de faire des "grandes multiplications" sans les poser **entièrement** sur le papier.

La calculatrice "se trompe"

Soit $B = X - \sqrt{(X+1)^2 - 4X}$.
Montre que, pour X>1, on a B = 1.
A la calculatrice, calcule B pour $X = 10^{10}, 10^{11}, 10^{12}, 10^{13}, 10^{14} \ldots 10^{20}$. Que remarques-tu ? Quelle est l'explication de ce phénomène ?

Commentaires : pour X suffisamment grand, $\sqrt{(X+1)^2-4X}$ est assimilé à X, et on trouve B = 0 : le 1 dans le développement $(X^2+2X+1) - 4X$ a été négligé devant $X^2 + 2X$, voire même 2X et 4X devant X^2, car la calculatrice ne peut sauvegarder tant de chiffres significatifs (pour $X=10^{15}$, par exemple, la quantité sous le radical vaut exactement :
$10^{30} - 2\times10^{15} + 1 = 999999999999998000000000000001$, ce que la machine ne peut emmagasiner, et remplace par 10^{30}).
Parmi les résultats obtenus, il se peut que la calculatrice donne B = 2... que l'on pourrait aussi expliquer.

La calculatrice "se trompe" (suite)

Avec trois calculatrices différentes, j'ai calculé $A = 9x^4 - y^4 + 2y^2$, pour x = 10864 et y = 18817, et j'ai trouvé respectivement - 841022, 58978 et 815978.
Et toi, combien trouves-tu ? Et tes camarades ?
Parmi toutes ces réponses, de laquelle es-tu sûr qu'elle soit exacte ? Pourquoi ?

Si on utilise $A = (3x^2 - y^2)(3x^2 + y^2) + 2y^2$, combien trouve-t-on ? Sur toutes les calculatrices ?
Montrer **pourquoi** on peut affirmer que, cette fois, le résultat est exact.

Commentaire « technique » :

Prenons par exemple une Texas TI81 ou une Casio 7000G (ces deux machines, comme beaucoup d'autres, répondent 58 978).

L'affichage (à l'écran) de $9x^4$ est $\boxed{1.253722838E17}$, ces machines affichant 10 chiffres significatifs. Mais la recherche de ce qu'il y a exactement dans le registre de calcul donne $9x^4$ = 1.253722838224E17, c'est à dire 125 372 283 822 400 000 (13 chiffres significatifs), alors que la valeur exacte de $9x^4$ est 125 372 283 822 342 144 : il y a déjà là une erreur de 57 856 (par excès).

Pour y^4, l'affichage est $\boxed{1.253722845E17}$, le registre contenant 125 372 284 530 500 000, la valeur exacte étant 125 372 284 530 501 121 (l'erreur n'est là que de 1 121).

Pour la machine, $9x^4 - y^4$ = 125 372 283 822 400 000 - 125 372 284 530 500 000, soit - 708 100 000.
Ajoutés aux 708 158 978 de $2y^2$, cela fait bien 58 978.

Les différences entre calculatrices proviennent de leur capacité à calculer $9x^4 - y^4$.

Par contre, avec la forme factorisée, le calcul de $(3x^2 - y^2)$ et celui de $(3x^2 + y^2)$ se font exactement, car ils ne dépassent pas les capacités de la machine. Et comme $(3x^2 - y^2)$ vaut (-1), le produit de ces deux facteurs est lui aussi calculé de façon exacte par les machines.

Commentaire « pédagogique » :

A notre avis, ce serait aller trop loin en seconde que de vouloir expliquer dans le détail ce qui se passe dans la calculatrice. Il suffit que les élèves aient compris que pour les très grands nombres, la machine ne donne que l'ordre de grandeur du résultat, ce qui suffit généralement à l'utilisateur ; mais que des problèmes peuvent apparaître lorsque l'on veut soustraire deux très grands nombres de même ordre de grandeur.

Pour ceux qui voudraient proposer une activité étudiant ces phénomènes, nous proposons en annexe un devoir de recherche à la maison pour des 1ère S.

UTILISATION DE L'ECRAN GRAPHIQUE

Initiation en classe de seconde

Le travail suivant correspond à une activité de prise de contact avec la partie graphique de la calculatrice.
Il a été conçu pour être fait en seconde, en demi-classe (modules ou T.D.), les élèves travaillant en groupe de trois ou quatre.
Sa durée est estimée à 1,5 H.

Le but de ce T.D. n'est absolument pas d'initier les élèves aux études de fonctions, ni de transformer algébriquement des expressions pour résoudre des équations : c'est pour cela que nous avons choisi des fonctions « assez compliquées », utilisant des polynômes du troisième degré (notons cependant qu'elles sont définies sur l'intervalle **R** entier).
Au contraire, on veut montrer à l'élève qu'il peut, grâce à l'écran graphique, émettre des conjectures (certaines, comme les racines d'une équation, pouvant être confirmées ou infirmées par un calcul a posteriori, d'autres, comme les coordonnées de sommets, ne le pouvant pas).

Une « fiche technique d'utilisation de l'écran graphique », prévue pour la plupart des modèles courants, doit être conjointement distribuée aux élèves. Vous la trouverez en annexe de cette brochure.

Un certain nombre de réponses écrites sont demandées à l'élève, réponses qui dépendent de la marque et du type de machine.
L'objectif est que l'élève garde précieusement ce document par la suite, et qu'il lui serve de référence.

Les quatre pages qui suivent constituent les fiches distribuées aux élèves, et peuvent être photocopiées.

Partie I.

On considère la fonction f définie par **f(x) = x^3 - 13x - 12**.
But de cet exercice :
1°) A l'aide de la calculatrice graphique, représente graphiquement la fonction f.
2°) Soit $\mathcal{C}_f$ courbe obtenue ; déterminer graphiquement les coordonnées des sommets de $\mathcal{C}_f$.

En utilisant la fiche « utilisation de l'écran graphique », indique ci-dessous les instructions nécessaires pour que ta machine puisse faire correctement ce travail :

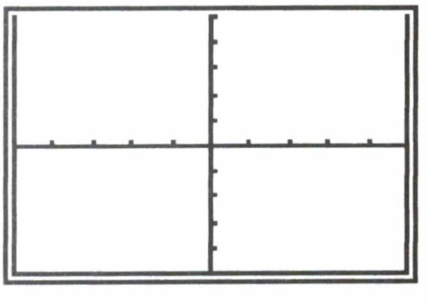
Vérification de la configuration de la machine :

Introduction de l'expression définissant la fonction :

Reproduis la courbe obtenue :

Pour obtenir une courbe « plus complète », il faut changer le cadrage de l'écran graphique.
Avec ta machine, tu choisis :

Et tu obtiens alors la courbe suivante :

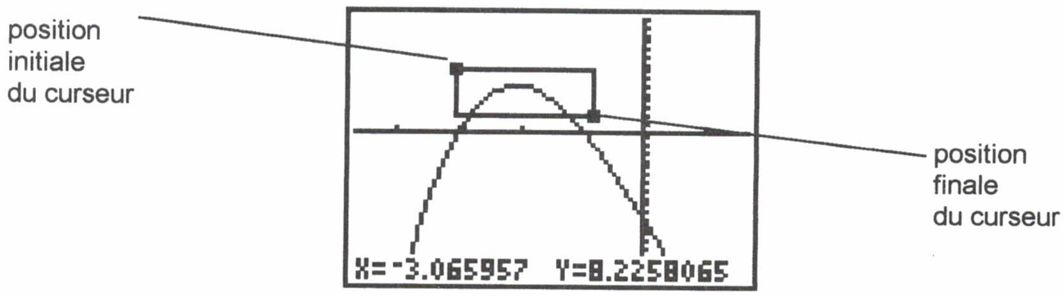


avec $\begin{cases} X\min = \\ X\max = \\ Y\min = \\ Y\max = \end{cases}$

Utilise la touche $\boxed{\text{TRACE}}$ et déplace le curseur sur la courbe $\mathcal{C}_f$ afin de lire les valeurs **approchées** des coordonnées des sommets.

Pour le sommet S_1 : $\begin{cases} x_1 = \\ y_1 = \end{cases}$ Pour le sommet S_2 : $\begin{cases} x_2 = \\ y_2 = \end{cases}$

Pour une meilleure approximation, fais un ZOOM d'une partie de la courbe (avec une « boite à zoom », par exemple) :



Tu trouves :

pour le sommet S_1 : $\begin{cases} x_1 = \\ y_1 = \end{cases}$ et pour le sommet S_2 : $\begin{cases} x_2 = \\ y_2 = \end{cases}$

Partie II.

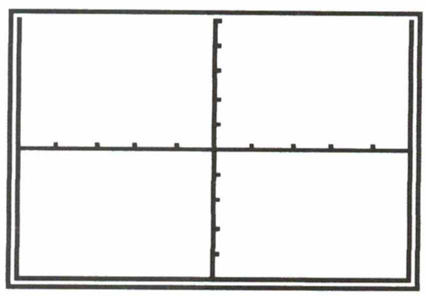
On considère la fonction g définie par : $g(x)=\dfrac{x^3-5x^2+2x+8}{x^2+x+1}$

But de l'exercice :
1°) Représenter graphiquement la fonction g.
2°) Soit $\mathcal{C}_g$ la courbe obtenue ; déterminer graphiquement les coordonnées du sommet de $\mathcal{C}_g$.
3°) Résoudre graphiquement l'équation g(x) = 0.
Soient x_1, x_2 et x_3 les solutions trouvées ; vérifier, par le calcul, si ce sont bien les solutions.

Réponses proposées :

Pour effacer l'écran graphique précédent :

Reproduction de la courbe $\mathcal{C}_g$ obtenue :



Coordonnées du sommet : x_s = y_s = (valeurs approchées).

Pour lire les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}_g$ et de l'axe des abscisses, tu choisis un « cadrage décimal » : $\begin{cases} Xmin= \\ Xmax= \\ Ymin= \\ Ymax= \end{cases}$

Solutions obtenues graphiquement :
x_1 = x_2 = x_3 =

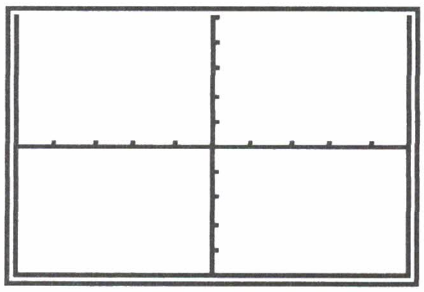
Vérification par le calcul :

Partie III.

But de l'exercice : Représenter simultanément les deux fonctions f et g, afin de déterminer graphiquement les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

Instructions pour que les deux courbes apparaissent simultanément sur l'écran :

Reproduction des deux courbes obtenues :



avec $\begin{cases} Xmin= \\ Xmax= \\ Ymin= \\ Ymax= \end{cases}$

Pour les points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$, on trouve :

$I_1 \left\{ \begin{array}{l} \\ \end{array} \right.$ $I_2 \left\{ \begin{array}{l} \\ \end{array} \right.$ $I_3 \left\{ \begin{array}{l} \\ \end{array} \right.$

Partie IV.

Utiliser la calculatrice graphique pour obtenir une représentation graphique des fonctions définies par une expression de la forme :

$$f_1(x) = ax$$

$$f_2(x) = ax + b$$

$$f_3(x) = ax^2 + bx + c$$

$$f_4(x) = \frac{a}{x}$$

$$f_5(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

$$f_6(x) = \sqrt{ax+b}$$

Particularités et limites de l'écran graphique

Activité proposée en premières S, en classe entière pendant 1 heure.

Objectif : comprendre et interpréter la représentation graphique d'une fonction obtenue sur l'écran de la calculatrice.

Les questions (encadrées ci-après) ont été posées oralement aux élèves ; seules les expressions des fonctions sont écrites au tableau ; aucune fiche n'a été distribuée.

Cependant les énoncés de cette fiche, tous regroupés, se retrouvent dans les annexes, sur fond blanc, prêts à être photocopiés pour être éventuellement distribués aux élèves.

Cette activité a suscité, dans les classes où elle a été proposée, un débat très enrichissant entre les élèves : les observations individuelles de leurs écrans différaient (et étaient parfois contradictoires), mais ils voulaient aller plus loin et avoir des explications à la fois techniques et théoriques.
Elle a permis aux élèves d'avoir une utilisation autonome de la machine graphique pour le contrôle (et la recherche) de ses limites.

Ce qui avait été traité auparavant :
- généralités sur les fonctions, mais rien de particulier sur les domaines de définition ;
- factorisation d'un polynôme par (x - a) ;
- fonctions homographiques (étudiées comme « fonctions associées » à partir de 1/x) ;
- utilisation de la calculatrice pour trouver approximativement les zéros d'une fonction.

Exercice 1

On considère la fonction définie par $f(x)=\sqrt{x^2+4x-5}$.

a) A l'aide d'une machine graphique, déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction f.

b) Déterminer algébriquement ce domaine de définition $\mathcal{D}_f$.

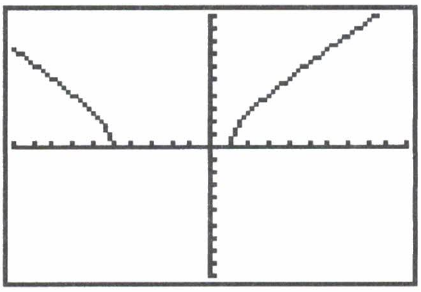
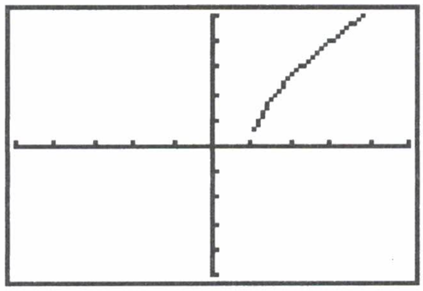
Commentaires :

- Importance du choix de la fenêtre, par $\boxed{\text{WINDOW}}$ ou $\boxed{\text{RANGE}}$, pour obtenir les deux parties de la courbe.
- D'où nécessité de faire une recherche algébrique de $\mathcal{D}_f$ au préalable.

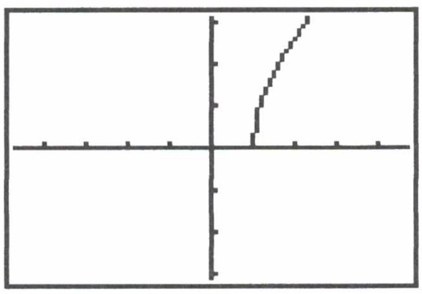
Quelques réactions observées dans les classes :

Certains élèves commencent par calculer Δ et les racines du polynôme, mais la majorité tracent directement le graphe sur leur calculatrice, le plus souvent sur [-10 ; 10] (graphe n°1 ci dessous).

On obtient très rapidement comme réponse $\mathcal{D}_f =]-\infty\,;-5] \cup [1\,;+\infty[$, mais parfois $\mathcal{D}_f = \{-5\,;1\}$.
On peut aussitôt reformuler la question : « Donnez-vous des valeurs **exactes** ou **approchées** ? ».
On peut aussi demander aux élèves de choisir [-5 ; 5] comme intervalle sur la calculatrice (on obtient le deuxième graphique ci-dessous), et d'expliquer ce qui se passe en utilisant la touche $\boxed{\text{TRACE}}$ ([1]).

Il faut expliquer aux élèves l'utilité du **Range décimal** ([-4.7 ; 4.7] sur beaucoup de machines, parfois [-6.3 ; 6.3]) ([2]) : il permet à la commande $\boxed{\text{TRACE}}$ de donner des valeurs de x variant de 0,1 en 0,1, et en particulier ici de « tomber » exactement sur l'abscisse x = 1.



Question supplémentaire qui peut être posée :

En changeant **le minimum de choses** dans l'écriture de f(x), représenter une fonction dont le domaine de définition soit [-5 ; 1], c'est à dire avec « rien » ailleurs.

Quelques réactions observées dans les classes :

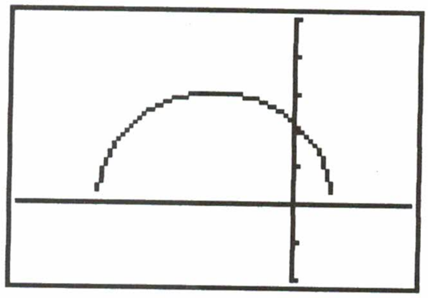
Beaucoup d'élèves, pensant au rôle du signe de a dans l'étude du signe de $ax^2 + bx + c$, proposent d'insérer un signe $\boxed{(-)}$ pour obtenir $f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x - 5}$.Leur surprise est grande de constater que leur écran reste désespérément vide...

---

[1] A noter :
pour les CASIO, la commande $\boxed{\text{TRACE}}$ « saute » les valeurs où f n'est pas définie ;
pour les TEXAS, cette commande « passe » par ces valeurs, mais n'inscrit pas d'ordonnée en face de Y= .

[2] Voir explications techniques en fin de ce chapitre.

D'autres suggèrent alors $f(x)=\sqrt{-(x^2+4x-5)}$ ou $f(x)=\sqrt{-x^2-4x+5}$, et constatent que cela satisfait à la demande. Voir graphe ci-dessous :



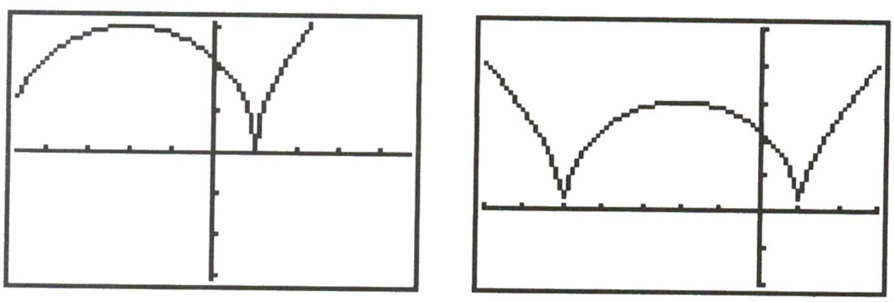
Une explication concernant le Range ou Window est nécessaire, pour justifier le fait que la machine ne trace pas toujours la courbe jusqu'à l'axe des abscisses ([3]) :
N.B. En classe de première S, le professeur pourra - s'il est assez avancé dans le chapitre correspondant de géométrie - faire démontrer que la courbe obtenue est un demi-cercle (en repère orthonormé).

Autre question supplémentaire possible :

Comment obtenir, **avec une seule fonction**, un graphe qui réunisse les deux précédents ?

Il ne s'agit pas, bien sûr, de superposer les deux graphes précédents grâce à deux fonctions Y1 et Y2. La première idée qui jaillit est la suivante : $f(x)=\sqrt{x^2+4x-5}+\sqrt{-\left(x^2+4x-5\right)}$. Là encore, l'écran reste désespérément vide, ce qu'il n'est pas facile d'expliquer aux élèves pour qui « addition » et « réunion », ou « zéro » et « valeur non définie » sont synonymes...Par exemple : *« Un nombre plus rien, ça fait bien le nombre de départ ! »*

On arrive finalement (en donnant quelques coups de pouce) à $f(x)=\sqrt{\left|x^2+4x-5\right|}$, qui s'écrira **Y = √abs(X²+4X-5)** sur la machine :



Tout ce qui précède nécessite déjà une bonne demi-heure de travail. Mais l'expérience montre que la suite ira beaucoup plus vite, les élèves étant bien familiarisés maintenant avec la nécessité de choisir le bon cadrage.

[3] Voir explications techniques en fin de ce chapitre.

Exercice 2

On considère la fonction définie par $f(x)=\dfrac{x+3}{x^3-5x^2+2x+8}$.

a) A l'aide d'une machine graphique, déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction f.

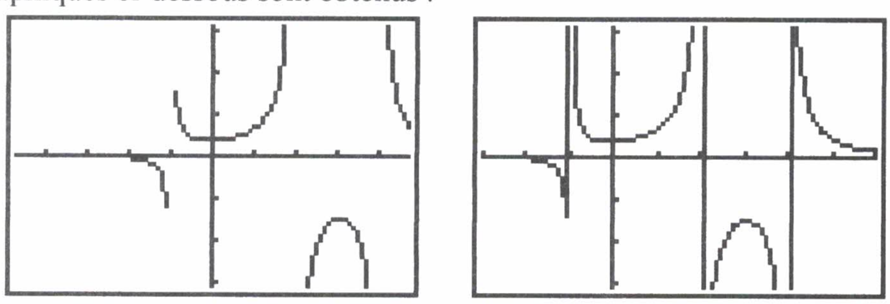
b) Déterminer algébriquement ce domaine de définition $\mathcal{D}_f$.

Commentaires :

Suivant le cadrage choisi, comment interprété la courbe obtenue ?
Problème des « fausses asymptotes » verticales ([4]) tracées par la machine.
Parties de courbes non visibles sur l'écran : nécessité là encore de faire une étude algébrique préalable de $\mathcal{D}_f$ pour pouvoir choisir la fenêtre adéquate.

Quelques réactions observées dans les classes :

Les deux graphiques ci-dessous sont obtenus :



ainsi que la réponse $\mathcal{D}_f = \mathbf{R} \setminus \{-1 ; 2 , 4\}$. Là encore, il faut faire préciser aux élèves si cette dernière réponse correspond à des valeurs exactes ou approchées.
Deux types de justifications sont proposées par les élèves :

- Pour les uns, ayant utilisé le « Zoom Décimal », la commande $\boxed{\text{TRACE}}$ ne donnait effectivement pas de valeur de f(x) pour X = -1, X = 2 et X = 4.
  Même genre de justification : d'autres ont tracé le graphe de $Y=X^3-5X^2+2X+8$ pour trouver les racines du dénominateur et, avec $\boxed{\text{TRACE}}$, obtiennent bien Y=0 pour X = -1, X = 2 et X = 4. Cela nécessite bien sûr une vérification par un calcul **exact** « sur papier ».
- Pour les autres, travaillant directement de façon « algébrique » sur papier, ils recherchent « à la main » une racine évidente, puis effectuent une division de polynômes, ou une factorisation par (x - a), pour trouver les autres racines.

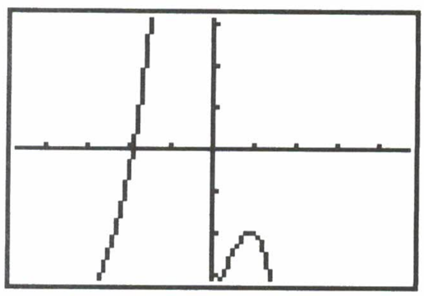
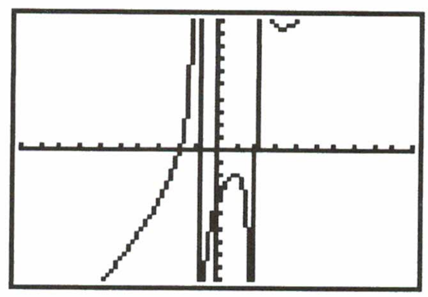
[4] Voir explications techniques en fin de ce chapitre.
Par ailleurs, le groupe a accepté de maintenir l'appellation « verticales » pour des droites parallèles à l'axe des ordonnées, et qui ne sont donc verticales que sur le tableau du professeur ! Cela nous semble un abus de langage non dangereux.

Il faut bien préciser aux élèves que **R** \ {-1 ; 2 , 4 } est la réunion des quatre intervalles]-∞ ; -1[,] -1 ; 2[,]2 ; 4[et]4 ; ∞[, et que, par conséquent, la courbe sera en quatre morceaux.
On peut tracer sur un repère au tableau, en couleur, les trois droites d'équations respectives x = -1, x = 2 et x = 4, expliquer leur rôle, comparer avec les écrans obtenus, et expliquer dans quels cas la machine trace, ou ne trace pas, ces « asymptotes verticales ».

Exercice supplémentaire possible :

Le même que ci-dessus, mais avec $f(x)=\dfrac{2x^3-x^2-5x+8}{x^2-x-2}$.

Les objectifs sont les mêmes que dans le précédent, et cela permettra de consolider les acquis. Une petite différence cependant : avec une fenêtre « standard », rien n'apparaît sur l'écran pour x>2 . Il faut « jouer » sur l'échelle des ordonnées pour voir apparaître ce troisième morceau de courbe :

Exercice 3

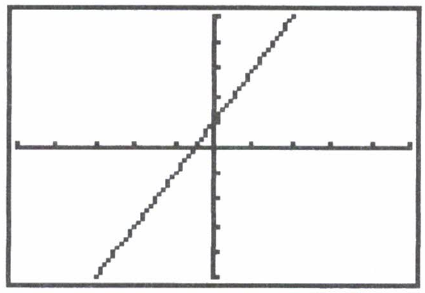
On considère la fonction définie par $f(x)=\dfrac{2x^3-x^2-5x-2}{x^2-x-2}$.

a) A l'aide d'une machine graphique, déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction f.
b) Déterminer algébriquement ce domaine de définition $\mathcal{D}_f$.

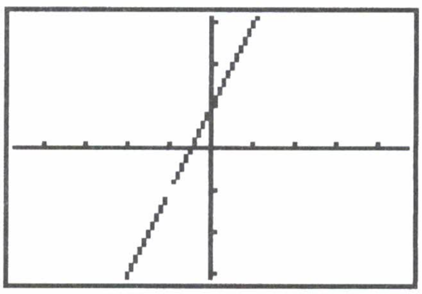
Commentaire :

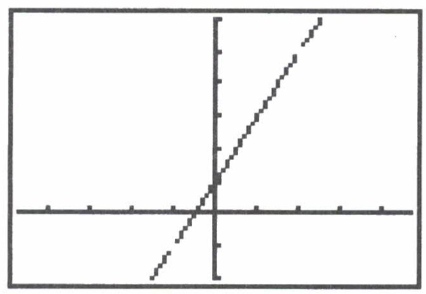
Les élèves, « habitués » par les deux exercices précédents à obtenir des graphes « compliqués », ne s'attendent pas à obtenir ici une droite (dont l'équation est plus habituellement y = ax + b)...Il faudra expliquer ce résultat :

- simplification de l'écriture de f(x) ;
- signification de l'égalité de deux fonctions ;
- interprétation graphique du domaine de définition obtenu algébriquement : comment le faire apparaître ?



La difficulté consiste à faire apparaître les deux « trous » sur l'écran graphique. Un cadrage mal choisi ne permet pas de les visualiser, puisque le calcul de f(x) ne sera pas fait pour les valeurs $x = -1$ et $x = 2$. Un cadrage utilisant le « Zoom Décimal » standard n'en fera apparaître qu'un dans l'écran, l'autre ayant une ordonnée trop grande :





Exercice 4

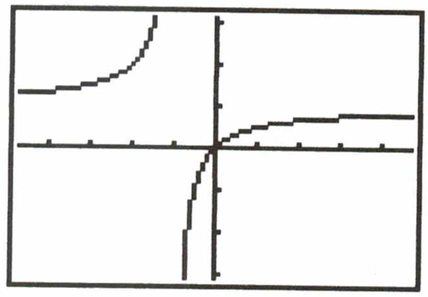
On considère la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}$.

a) A l'aide d'une machine graphique, déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction f.
b) Déterminer algébriquement ce domaine de définition $\mathcal{D}_f$.

Commentaire :

Cette fonction a été choisie pour pouvoir réinvestir le travail fait (si on manque de temps, on la proposera en exercice à la maison).
Mais elle a été choisie de façon « diabolique » : le « trou » n'apparaît pas là où on l'attend...
Pour le mettre en évidence, il faudrait que la machine ne trace pas les axes (ce qui est possible sur la plupart des modèles haut de gamme).

Voici ce qui est obtenu par la plupart des élèves :



On peut noter la difficulté pour certains à concevoir $1+\frac{1}{x}$ comme étant aussi un dénominateur : ils ne perçoivent que le « petit » dénominateur x, et prévoient donc que l'on aura $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$... (donc « quelque chose » de non-défini en x = 0, alors que l'écran **montre** « quelque chose » de défini en x = 0, mais pas en x = -1).

Quelques explications plus techniques

1. L'influence du choix de $\boxed{\text{RANGE}}$ ou de $\boxed{\text{WINDOW}}$ sur $\boxed{\text{TRACE}}$

L'écran de la calculatrice est constitué de pixels. Dans tous les cas, le « pas » vaut : $p = \dfrac{X\max - X\min}{\text{nb. pixels} - 1}$.

Sur beaucoup de modèles actuels, on compte 95 pixels ([5])sur la longueur (c'est à dire pour les abscisses), ce qui fait 94 intervalles.

Si l'on choisit comme intervalle [-10 ; 10], on aura $p = \dfrac{20}{94} \approx 0{,}212\ 765\ 957\,447$.

Les valeurs successives prises par l'abscisse X grâce à la touche... $\boxed{\text{TRACE}}$ seront donc $X_0 = -10$, $X_1 \approx -9{,}787234$, $X_2 \approx -9{,}574468$, ... , $X_{46} \approx -0{,}212766$, $X_{47} = 0$, $X_{48} \approx 0{,}212766$, ... , $X_{93} \approx 9{,}787234$ et $X_{94} = 10$.

Si par contre on choisit comme intervalle [-4,7 ; 4,7], le pas vaut alors $p = \dfrac{9{,}4}{94} = 0{,}1$ exactement. Les valeurs prises par X sont donc $X_0 = -4{,}7$, $X_1 = -4{,}6$, ... , $X_{46} = -0{,}1$, $X_{47} = 0$, $X_{48} = 0{,}1$, ... $X_{93} = 4{,}6$ et $X_{94} = 4{,}7$.

Tout choix de Xmin et Xmax pour lesquels $p = \dfrac{X\max - X\min}{\text{nb. pixels} - 1}$ prend des valeurs « simples » est donc préférable. C'est ce choix qui est fait automatiquement par le $\boxed{\text{RANGE}}$ $\boxed{\textbf{INIT}}$ sur les Casio, et par le $\boxed{\text{ZOOM}}$ **ZDecimal** sur les Texas.

Un cas particulier : la T.I.81 où un tel choix ne peut se faire automatiquement, et où il y a 96 pixels utiles. On pourra prendre par exemple Xmin = -4,7 et Xmax = 4,8.

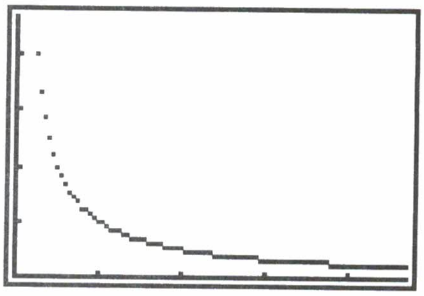
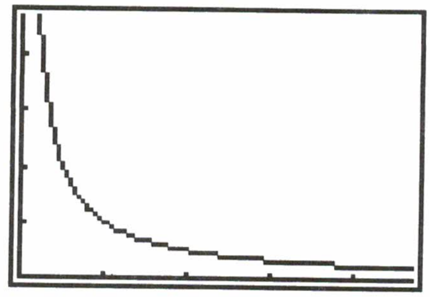
2. *Dot* ou *Connected* ?

Quand la machine est en mode *Dot*, seuls les points dont les abscisses correspondent aux pixels de l'écran sont calculés et placés. Quand la machine est en mode *Connected*, ces dernier points sont aussi placés, mais un programme interne à la machine les joint pour donner l'impression d'une courbe continue.

Voici par exemple ce que cela donne avec $y = \dfrac{1}{x}$, d'abord en *Dot*, puis en *Connected* :

---

[5] 63 pixels sur les Texas TI80, 79 pixels sur les Casio fx-6910G ; 127 pixels sur les Casio fx-9960G.

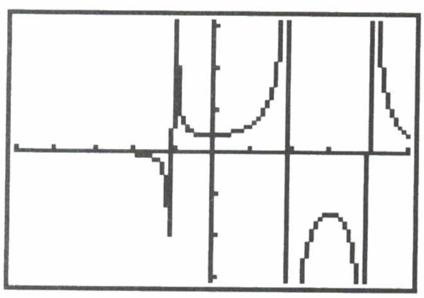
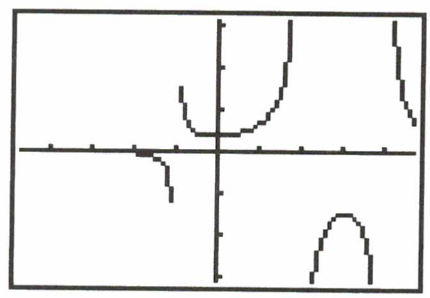
 puis 

On constate, sur l'écran de droite, que, pour x<0,5, des points de même abscisse ont des ordonnées différentes : c'est le résultat de l'algorithme de connexion.

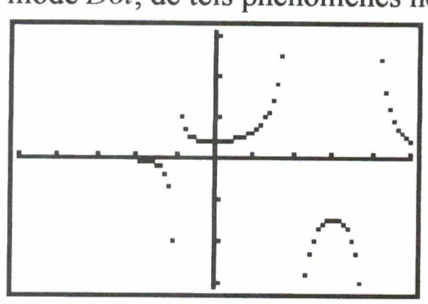
C'est cet algorithme automatisé qui va être la cause des « fausses asymptotes ».

3. Les « fausses asymptotes »

Si nous reprenons l'exemple de $f(x)=\dfrac{x+3}{x^3-5x^2+2x+8}$, en mode *Connected*, d'abord sur [-5 ; 5] puis sur [-4.7 ; 4.7] (dans le cas d'un écran à 95 pixels), on obtient ces écrans :

 puis 

L'explication est la suivante :
Dans le premier cas, la machine devait passer directement du point (X ≈-1.06383 ; Y ≈-1.955133) au point (X ≈-0.9574478 ; Y ≈3.2739062), sans passer par le point d'abscisse -1. L'algorithme de connexion lui a fait joindre ces points, ce qui donne l'apparence d'une barre verticale.
Un peu plus loin, on passe du point (X ≈1.915 ; Y ≈9.502) au point (X ≈2.021 ; Y ≈-39.476) ; bien que situés en dehors de l'écran, l'algorithme de connexion a fonctionné et les a joints, ce qui donne l'impression d'une asymptote.
Il est évident que si on est en mode *Dot*, de tels phénomènes ne peuvent pas se produire :

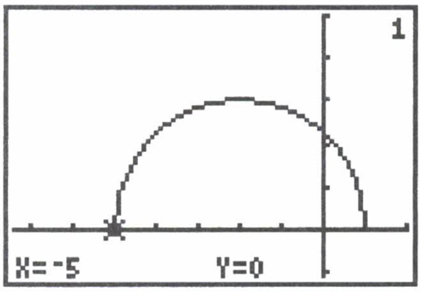
exemple :  sur [-5 ; 5].

Dans le second cas (cf. écran plus haut), la machine « passe » effectivement par les abscisses X = -1 ou X = 2.

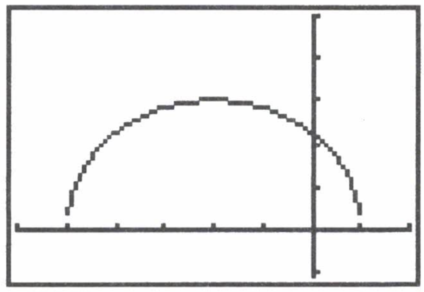
Mais comme ces valeurs ne sont pas dans $\mathcal{D}_f$, les points correspondants n'existent pas, et ils ne peuvent pas être joints ni au point précédent, ni au point suivant. Pour la calculatrice, il y a un « trou » entre la colonne de pixels d'abscisse 1,9 et la colonne de pixels d'abscisse 2,1. Ce trou ne sera pas « comblé », et il n'y aura pas de « fausses asymptotes » bien qu'on soit en mode *Connected*.

4. La « lévitation »

Si nous reprenons l'exemple de $f(x)=\sqrt{-x^2-4x+5}$. Voici les écrans obtenus en prenant comme intervalles [Xmin = -7,4 ; Xmax = 2] puis [Xmin = -6 ; Xmax = 2] :

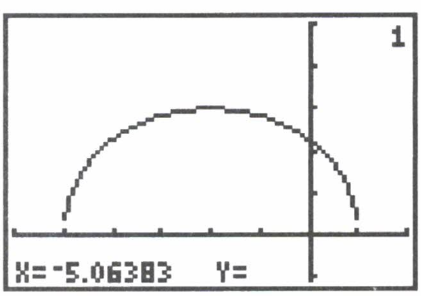


puis

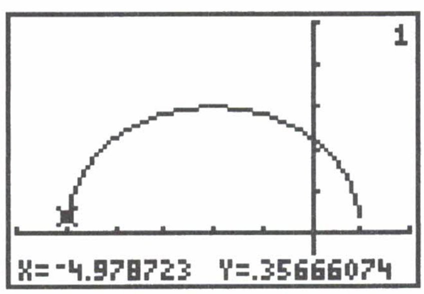


Sur le second écran, la courbe apparaît comme « en lévitation » au dessus de l'axe, alors que le premier schéma correspond à nos attentes.
La raison est la suivante : $\mathcal{D}_f = [\,-5\,;1\,]$
Dans les premier cas, p=0.1 ; la machine calcule pour X = -7.4, X = -7.3, ... , X = -5.1 (valeurs pour les quelles f n'est pas définie, donc aucun point n'est tracé), puis pour X = -5 (elle trouve Y = 0), X = -4.9 (elle trouve Y ≈ 0.768), etc. Le premier point qu'elle place est donc A(-5 ; 0), qu'elle joindra au second point B(-4.9 ; 0.768), etc.
Dans le second cas, l'étude se faisant sur [-6 ; 2], le « pas » vaut environ p ≈ 0.085106383.
Le premier point qui sera calculé aura donc pour abscisse X ≈ -4.978723404 (avec pour ordonnée Y ≈ 0.3566607365). Le point précédent avait pour abscisse X ≈ -5.063829787 et n'appartenait donc pas à $\mathcal{D}_f$. Pour la calculatrice, le point d'abscisse X = -5 n'existe pas dans ce cas.
L'algorithme de connexion n'a donc rien à joindre, car il ne fonctionne que pour des points qui « existent ».

Voici les écrans obtenus avec la touche TRACE dans le cas où Xmin = -6 ; Xmax = 2 :



puis



FICHE TECHNIQUE

UTILISATION DE L'ECRAN GRAPHIQUE POUR UNE COURBE D'EQUATION y = f(x)

A. CONFIGURATION DE LA MACHINE

	« Nouvelles » CASIO	TI80, TI81, TI82, TI83
Pour obtenir un tracé continu de la courbe (c'est, en principe, l'option qui est sélectionnée automatiquement si on n'a pas « bricolé » sa machine).	SetUp **Drawtype** (ou **D-Type**) puis **<u>Con</u>**nected	MODE sélectionner **Func** et **Connected**. Valider par ENTER
Pour obtenir un tracé point par point (seuls les points calculés sont tracés, sans être reliés)	SetUp **Drawtype** (ou **D-Type**) puis **<u>Plot</u>**	MODE sélectionner **Func** et **Dot**. Valider par ENTER

B. INTRODUCTION DE L'EXPRESSION f(x) ET TRACÉ DE LA COURBE

CASIO 6910, 9930, 9960	anciennes CASIO avec icônes	TI80, TI81, TI82, TI83
Icône GRAPH. On obtient la liste des fonctions. Ecrire la fonction puis EXE Taper DRAW (touche F6) pour obtenir la courbe	En mode COMP : Appuyer sur Graph au clavier. On obtient à l'écran **GraphY=** Ecrire la fonction, puis EXE , la courbe se trace à l'écran.	Appuyer sur la touche Y= Ecrire la fonction. Taper GRAPH pour obtenir la courbe.
	<u>Autre méthode</u> : En mode GRAPH , enregistrer la fonction (pour les 9900GC sans couleur, cf. fiche spéciale), puis **Draw**	<u>Remarque</u> : Il est possible de désactiver ou de réactiver une fonction dans le menu Y= : amener le curseur sur = puis faire ENTER . Les fonctions désactivées ne sont pas tracées.
Pour effacer l'écran, désactiver (avec SEL)les fonctions que l'on ne veut plus voir, puis. DRAW	Pour effacer l'écran graphique, CLS EXE (au clavier)	Pour effacer l'écran, désactiver (en mettant le curseur sur =, puis ENTER) les fonctions que l'on ne veut plus voir, puis GRAPH

C. CADRAGE et ZOOMS

CASIO	TEXAS INSTRUMENTS
Touche [RANGE] , ou **V-Window** par [SHIFT] [F3] Ne pas oublier d'appuyer sur [EXE] après chaque donnée modifiée. Remarque : **Scl** correspond à la graduation des axes. **Scl=0** signifie : pas de graduation.	Touche [WINDOW] Remarque : **Scl** correspond à la graduation des axes. **Scl=0** signifie : pas de graduation
INIT (= initial) permet d'avoir des valeurs décimales (c'est à dire variant de 0,1 en 0,1) pour x avec la touche [TRACE] (cf. §D)	Zdec ou ZDecimal permet d'avoir des valeurs décimales (c'est à dire variant de 0,1 en 0,1) pour x avec la touche [TRACE] (cf. §D)

CASIO	TEXAS INSTRUMENTS
Touche [ZOOM] ([SHIFT] [F2]) uniquement quand le graphique est présent sur l'écran **BOX** correspond à la « boite à zoomer » Si [INIT] n'existe pas (anciens modèles), **Zstd** correspond à un Zoom Décimal.	Touche [ZOOM] **ZBox** correspond à la « boite à zoomer » **Zdecimal** permet d'avoir des valeurs décimales (c'est à dire variant de 0,1 en 0,1) pour x avec la touche [TRACE] (cf §D). N'existe pas sur la T.I.81 **Zstandard** correspond à Xmin=-10, Xmax=+10, Ymin=-10 et Ymax=+10.
Fonctionnement de la « boite à zoomer » Principe : on trace à l'intérieur de l'écran un rectangle qui deviendra le nouvel écran. Choisir un des coins du rectangle à l'aide des curseurs [◄] [►] [▲] et [▼] et valider par [EXE] . Choisir le coin diamétralement opposé (la boite se trace alors) et valider par [EXE] . Ce qui était la boite devient la nouvelle fenêtre d'écran.	Fonctionnement de la « boite à zoomer » Principe : on trace à l'intérieur de l'écran un rectangle qui deviendra le nouvel écran. Choisir un des coins du rectangle à l'aide des curseurs [◄] [►] [▲] [▼] et valider par [ENTER] Choisir le coin diamétralement opposé (la boite se trace alors) et valider par [ENTER] . Ce qui était la boite devient la nouvelle fenêtre d'écran.

D. LA TOUCHE [TRACE]

Cette touche sert à repérer les coordonnées d'un point qui se déplace sur une courbe.

Sur toutes le machines, on déplace le point à l'aide des curseurs [◄] et [►] .

S'il y a plusieurs courbes, on passe de l'une à l'autre par [▲] et [▼] .

Les abscisses indiquées par [TRACE] peuvent ne pas être « sympathiques » du tout.

On peut obtenir des valeurs variant de 0,1 en 0,1 pour x si l'on choisit :

- le [RANGE] **Init** sur les Casio (dans **V-Window** sur les tout derniers modèles)
- le zoom **Zdecimal** sur les Texas (sauf TI81)

(NB. Sur TI81, on pourra choisir Xmin=-4.7 et Xmax=4.8 pour obtenir le même effet).

LES PETITS PROBLÈMES RENCONTRES AVEC LES DIVERSES CALCULATRICES

QUESTIONS	RÉPONSES
Quels que soient les nombres utilisés (même entiers) et les opérations faites (même racines ou divisions), la machine répond avec trois chiffres derrière le point décimal.	Le mode d'écriture a été fixé à trois chiffres après le point ; il faut revenir en mode FLOAT (appelé parfois NORM) avec la touche MODE.
Quelques soient les nombres utilisés (même irrationnels), la machine répond avec des fractions.	Il s'agit probablement d'une HP38G, où le mode NUMBER FORMAT a été choisi en FRACTION (la machine donne alors la fraction la plus proche du résultat). Dans ce menu MODES, choisir le format STANDARD.
Les valeurs affichées pour les sinus ou cosinus de 30°, $\pi/6$, etc. sont manifestement fausses. Par exemple sin30 donne -.988...	Vérifiez le mode angulaire de la machine : degrés ou radians ?
La touche puissance (x^y ou ^) et sa fonction inverse ($x^{1/y}$ ou $\sqrt[x]{}$) sont inopérantes. On croirait que la machine ne les enregistre même pas quand on les enfonce.	Il s'agit probablement d'une ancienne Casio, et vous êtes resté en mode STAT. Dans ce mode, ces touches servent à l'entrée des données. Il faut repasser en mode de calcul "normal" : mode COMP (pour Compute).
Je veux faire tracer à ma machine la droite d'équation y = 2x - 3. Je vois apparaître à l'écran une droite qui n'est manifestement pas la bonne (elle a un coefficient directeur négatif et semble passer par l'origine).	Vous avez probablement utilisé le signe (-) unaire au lieu du signe - binaire de la soustraction. La machine a donc interprété 2x multiplié par -3, soit -6x. A l'oeil nu, il est difficile de repérer cette erreur, car la différence de longueur des deux signes - sur l'écran est faible.
Je veux calculer les paramètres d'une série statistique avec fréquences. Sur ma TI82, je place les valeurs de x dans la liste L_1 et les effectifs correspondants dans la liste L_2. J'indique bien ce choix dans le sous-menu Setup, et quand je veux obtenir mes résultats, ERR:STAT s'affiche...	Si vos effectifs sont supérieurs ou égaux à 100, c'est normal : il s'agit d'une erreur de conception de la machine, et il n'y a rien à faire... Ce défaut a été corrigé sur les TI80 et TI83.

Je veux utiliser l'écran graphique pour résoudre une équation du type f(x) = g(x). Je trace les deux courbes, et lorsque je fais un "zoom" pour avoir plus de précision, seule la seconde courbe est tracée, la première a disparu...	Sur les Casio, seule la dernière instruction "Graph Y=" est enregistrée. Si vous voulez que pour tout Zoom, ou changement de RANGE, cela agisse sur les deux courbes, il faut les introduire avec une seule instruction : Graph Y=.... : Graph Y=... (l'une derrière l'autre, séparées par deux points et non par EXE).
Je veux tracer une courbe sur mon écran, et je me retrouve avec tous les graphiques précédents ; si je les efface avec SCL, même celle que je voulais disparaît.	Faites un changement de RANGE, et seule la dernière courbe demandée restera à l'écran (voir réponse précédente).
Je veux tracer la courbe représentative d'une fonction avec ma TI82, et le message suivant apparaît : ERR:DIM MISMATCH (ou ERR:STAT PLOT).	Vous avez certainement "ouvert" le tracé d'un graphique statistique, et les données stockées dans les listes statistiques ne sont pas cohérentes avec cette demande. Allez dans le menu STAT PLOT et choisissez l'option **4:PlotsOff.** De toutes façons, il faut toujours vérifier qu'on ne superpose pas de graphiques statistiques aux représentations graphiques de fonctions (et vice-versa).
Sur certaines TEXAS, si on a rentré une fonction en Y_1, et que l'on demande ensuite $Y_1(2)$, on n'a pas du tout la valeur de la fonction pour x = 2.	Il s'agit d'une TI81. La machine interprète Y_1 seul comme la valeur de la fonction (en prenant pour valeur de la variable ce qui est actuellement stockée dans la mémoire X). Elle interprète $Y_1(2)$ comme le produit de ce résultat par la parenthèse contenant 2, soit $2Y_1$.
J'ai voulu tracer la parabole d'équation $y=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x-1$, et j'ai obtenu une courbe qui ne ressemblait en rien à une parabole	Vous avez certainement utilisé comme syntaxe Y = 1/4X²+1/2X-1. Or la machine a une priorité implicite de multiplication quand un nombre est suivi d'une lettre : 4X², 2X. Elle a donc interprété 1/(4X²)+1/(2X)-1. Il aurait fallu entrer 1/4*X², ou X²/4, ou .25X².
La machine ne trace pas la même courbe pour $y = e^x(e^x - 2)$ et pour $y = e^{2x} - 2e^x$. La syntaxe utilisée pour ces expressions est : Y_1=e^X(e^X-2) et Y_2=e^(2X)-2e^X.	Sur les TI82 et TI85, la multiplication est implicite entre X et (e^X-2) dans la première expression. Si bien que l'on obtient le graphe de $\exp[x(e^x - 2)]$. Il aurait fallu entrer : Y1=e^X*(e^X-2). Ce problème ne se pose pas sur les TI81 ni sur les Casio.

NARRATIONS DE RECHERCHE

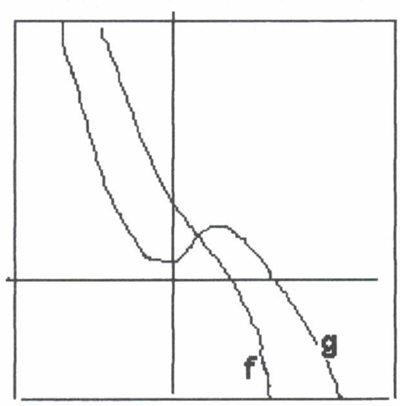
NARRATION DE RECHERCHE N°1

La narration de recherche est un nouveau type d'exercice scolaire, qui a été particulièrement bien décrit dans la brochure de A. CHEVALIER et M. SAUTER, "NARRATION DE RECHERCHE"([1]). Nous ne reprendrons pas ici la description de cette démarche, mais nous en fournirons deux exemples, où la calculatrice était le support du thème étudié.

Voici l'énoncé tel qu'il était fourni aux élèves ; les consignes de travail d'abord, et le problème à chercher proprement dit ensuite :

Première 21 S. Devoir maison n°11 pour le 05/01/95 : NARRATION DE RECHERCHE

Dans ce devoir, comme dans celui du 08/11/94, je vous demande de **relater votre démarche de recherche**, c'est à dire de citer toutes les tentatives ou hypothèses que vous avez faites pour venir à bout du problème.
L'utilisation d'une calculatrice graphique étant pratiquement nécessaire, recopiez sur vos brouillons les écrans que vous avez observés. Par exemple :



(Ces dessins n'ont pas besoins d'être précis, mais **suggestifs**)

Joignez tous vos brouillons, numérotés dans l'ordre chronologique, et si possible **datés**. Précisez toutes les sources de renseignement utilisées.

---

[1] Publication de l'IREM de Montpellier, 1992, 58 pages.
Voir aussi l'article publié dans "PETIT x"n°33, pages 71 à 79.

On considère la fonction f définie par $f(x) = x^3 - x^2 - 2x + 3$,
et la fonction g définie par $g(x) = -x^3 + 3x^2 - 4x + 2$.

On constate que leurs graphes n'ont pas du tout la même forme : l'un a "deux bosses", et pas l'autre.
On admettra que la représentation graphique d'un polynôme du troisième degré donne toujours soit une "courbe à deux bosses", soit une "courbe sans bosse".

On ajoute à la fonction f une fonction affine d, du type $d(x) = ax + b$, et on cherche à déterminer la forme du graphe de la fonction "résultante".

Par exemple : pour $a = 1$ et $b = 1$, le graphe de la fonction somme a "deux bosses" ;
mais pour $a = 3$ et $b = -1$, le graphe de la fonction somme n'a plus de bosses.

On fait la même chose avec la fonction g. Si on lui ajoute une fonction d telle que $d(x) = ax + b$, elle peut changer de forme.

Par exemple : pour $a = 3$ et $b = -1$, elle "gagne" deux bosses.

Le but du problème est de déterminer **le rôle de *a* et de *b*** dans la forme du graphe résultant.

Quand vous aurez trouvé, mettez la conclusion bien en évidence sur votre copie.

L'énoncé de ce problème se retrouve dans les annexes,
sur fond blanc, prêt à être photocopié pour les élèves.

L'objectif d'une telle recherche est de faire comprendre aux élèves la nécessité d'une démarche scientifique expérimentale([2]). Une telle démarche nécessite bien sûr de réaliser au départ un assez grand nombre “d'expériences” (assez grand pour pouvoir émettre des hypothèses, puis pour pouvoir être en mesure de les confirmer ou de les infirmer). Il y a bien sûr une spécificité mathématique par rapport aux autres sciences : une fois “l'intime conviction” acquise quant au résultat, il s'agit d'en apporter une **preuve** (généralement déductive).

Pour qu'ici les élèves puissent réaliser ces “expériences” en grand nombre, il était absolument nécessaire qu'ils possèdent une calculatrice graphique. Et les modèles les plus performants sont ceux qui permettent à la fois de mémoriser simplement et de représenter rapidement un grand nombre de fonctions successivement.

Commentaires :

Tout d'abord, précisons que le chapitre sur l'étude des fonctions à partir des dérivées n'avait pas encore été abordé à ce moment-là. Il ne s'agit donc pas d'un problème où les élèves pouvaient réinvestir dans un autre contexte des notions déjà assimilées.
L'étude des copies a montré que seules quelques redoublantes ont pensé aux dérivées, mais qu'elles ne les ont pas utilisées correctement.

---

[2] (...) Entraîner les élèves à l'activité scientifique et promouvoir l'acquisition de méthodes : la classe de mathématiques est d'abord un lieu de découvertes, d'exploitation de situations (...).
(...) Formuler un problème, conjecturer un résultat, expérimenter sur des exemples, bâtir une démonstration, mettre en oeuvre des outils théoriques, mettre en forme une solution, contrôler les résultats obtenus, évaluer leur pertinence en fonction du problème posé, ne sont que des moments différents d'une même activité mathématique (...)
Extrait des instructions officielles de la classe de seconde, B.O. n°20 du 17 mai 1990.

Par contre les fonctions “associées” du type $f(x+\lambda)$ et $f(x)+\lambda$ avaient été travaillées quelque temps auparavant.
A ce propos, il avait été démontré en classe que toutes les “paraboles”([3]) représentatives des fonctions polynomiales du second degré étaient de même “forme”, c'est à dire que chacune d'elles se déduisait de la parabole “de référence” d'équation $y = x^2$ par une translation et/ou une homothétie. Ajouter une fonction affine à une telle fonction ne peut donc avoir aucune incidence sur sa “forme”.
Il étaient donc naturel que les élèves puissent penser a priori qu'il en serait de même pour les courbes d'équation $y = ax^3+bx^2+cx+d$.

Les démarches des élèves :

Un certain nombre d'élèves n'a pas utilisé ce qui avait été étudié à propos de $f(x)+\lambda$, qui correspond à une translation de vecteur $\lambda.\vec{j}$. Ces élèves ont donc cherché l'incidence de a et de b sur la forme de la courbe, sans se rendre compte tout de suite que seul a était à prendre en compte.

Un exemple extrême est fourni par Valérie et Anne-Françoise qui ont rendu un devoir de 26 pages (!) en essayant (au hasard ?) un grand nombre de valeurs différentes pour **a** et **b**, sans arriver à en induire une propriété généralisable. Il faut dire aussi qu'une de leurs hypothèses de travail semblait (car elle n'était pas explicitée) être la suivante : il faut comparer $|a|$ et $|b|$: *Nous avons commencé par prendre n'importe quelles valeurs pour a et b. En voyant tous nos brouillons, nous pensions que la fonction avait deux bosses lorsque a<0 et b>0 ou lorsque a<0 et b>0.*
Mais nous avons ensuite pensé qu'il n'y avait pas de règle précise, car (voir feuille1) pour a>0 et b<0 il y avait parfois deux bosses ou alors pas de bosse.

Regardons maintenant une autre copie, celle de Frédéric. Il a observé sur son écran les graphes respectifs de $x \mapsto x$, $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto x^3$, ce qui lui a permis de conclure quant à la nature du graphe de $x \mapsto x^3 - x$.
A partir de là, il essaye de déduire l'influence de a sur les bosses dans la fonction $x \mapsto x^3 + ax$, puis dans $x \mapsto cx^3 + ax$, et en déduit le “théorème” suivant (qu'il démontre et vérifie expérimentalement) : *pour une fonction du type $x \mapsto cx^3 + ax$, la courbe aura deux bosses si et seulement si a et c sont de signe contraire. Mais cela n'est plus vrai pour des équations du type $x \mapsto cx^3 +dx^2 + ax$.*
Cette dernière affirmation étant constatée expérimentalement : il a trouvé un contre-exemple sur sa calculatrice.
Malheureusement, la suite de ses conclusions sera erronée : n'ayant pas choisi assez d'exemples, il fait des conjectures fausses sans s'en apercevoir. Mais, comme il est assez bon élève, il précise bien que ce ne sont que des conjectures, et qu'il n'a rien démontré : *Je le pense, mais je ne peux pas le déterminer.*

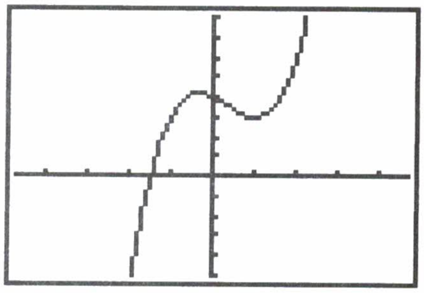
Karima, elle, utilise une démarche très pragmatique, modifiant ses conjectures au fur et à mesure

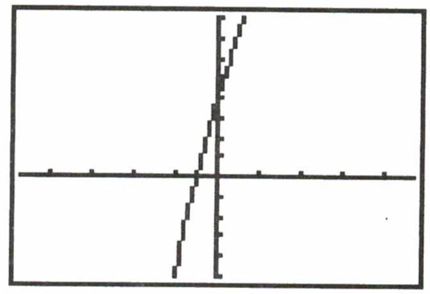
[3] La seule définition de la parabole qui est donnée à ce niveau est bien “courbe dont une équation se ramène à $y = ax^2+bx+c$ “.

des nouveaux tracés observés (on pourrait presque dire : une conjecture nouvelle par écran observé ! ; mais peut-être n'a-t-elle pas voulu montrer tous les essais n'ayant abouti à rien...).

Pour commencer, j'ai cherché si le signe de a avait une importance dans l'existence des bosses, mais les graphes n°1 [a=1 ; b=1] *et n°2* [a=9 ; b=2] *prouvent que cela est faux.*

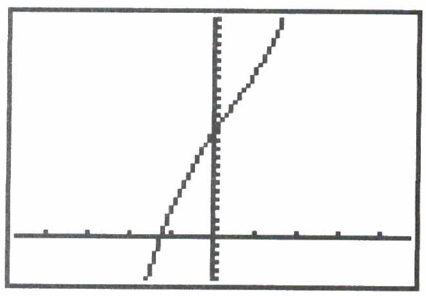
N°1





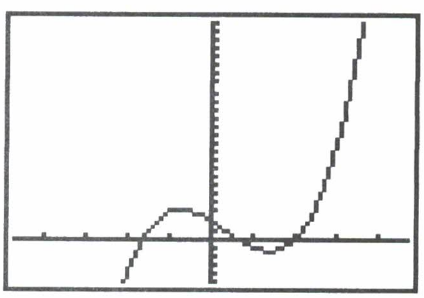
N°2

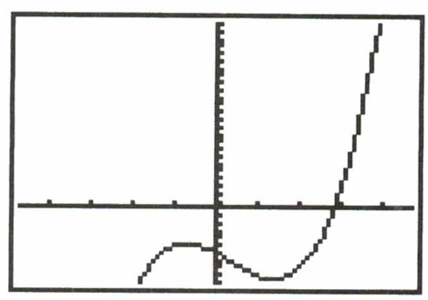
Je remarque que la différence a - b est 0 dans le graphe n°1 et 7 dans le graphe n°2 : donc peut-être que la différence a - b joue un rôle ; mais le graphe n°3 [a=9 ; b=9] *m'a montré mon énorme erreur.*



N°3

Ne sachant plus quoi faire, je suis repartie sur ma première idée, mais lorsque a et b sont négatifs.
Soudain je vois que l'amplitude des graphes n°4 [a=-1 ; b=-1] *et n°5* [a=-1 ; b=-9] *sont les mêmes alors que a a la même valeur.*

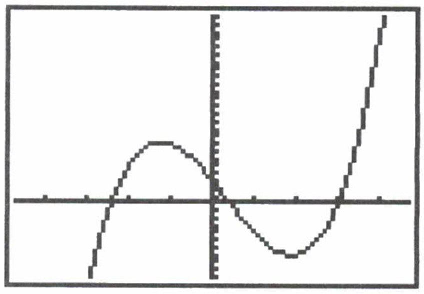
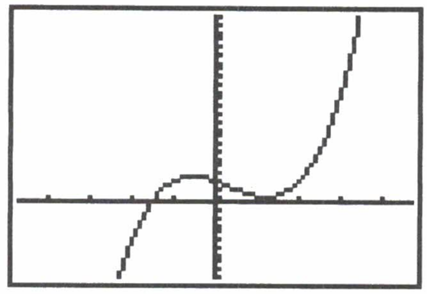




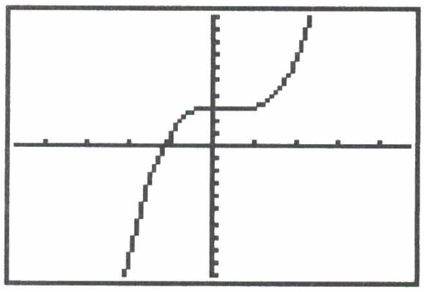
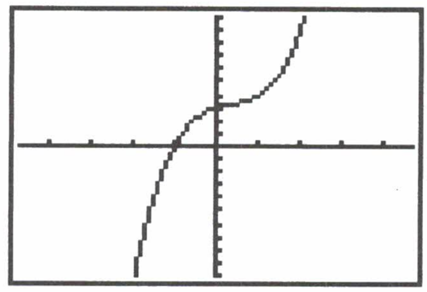
N°4 N°5

A partir de là, elle choisira toujours b=0, mais sans dire tout de suite pourquoi : elle n'écrira qu'à la fin que b faisait subir au graphe des translations de vecteur $b.\vec{j}$.

Les graphes n°6 [a=-5], *n°7* [a=0], *n°8* [a=2] *et n°9* [a=3] *montrent que j'ai raison.*
Je constate que les bosses apparaissent aux environs de 2.

N°6 N°7

N°8 N°9

Un peu plus loin dans sa copie, elle essaye quand même de préciser un peu plus cette valeur : *(...) cependant beaucoup de personnes ont essayé d'avoir une limite plus précise de a ; pour cela je crée un petit programme* (qui ne figure pas sur ses brouillons ni sur sa copie) *et j'obtiens une limite de 2,3.*
Ensuite, en essayant encore de trouver un rapport entre les fonctions et les résultats à l'aide de ma calculatrice, je vois que la fonction f(x) traverse l'axe des x à -1,54... Je l'élève donc au carré et, ô surprise, j'obtiens 2,3. La limite peut donc se trouver avec f(x) = 0. Après une dizaine de zooms grossissants, je me suis rendu compte que l'erreur de mes résultats était de l'ordre du millionième.
Comme quoi le hasard (?) des observations peut parfois amener à des hypothèses totalement erronées : Karima a perdu le "sens" de ce qu'elle avait fait auparavant, et ne s'est plus rendu compte que b avait un rôle à jouer dans la valeur de la solution de f(x) = 0, alors qu'il n'en a aucun dans les bosses.

Le "petit programme" dont parle Karima est peut-être celui que j'ai découvert dans les brouillons de Jean-Luc. Il l'explicite ainsi :

a varie de 3 à 2 de 0,1 en 0,1
puis de 2,4 à 2,3 de 0,01 en 0,01, etc.
x varie de 0 à 2 de 0,05 en 0,05.

Algorithme :

3 va dans la mémoire A
Etiquette 0
0 va dans la mémoire Z
0 va dans la mémoire X
A - 0,1 va dans la mémoire A
Affiche A
Etiquette 1
La valeur de la mémoire Z va dans la mémoire X
X+0,05 va dans la mémoire Z
Calcule f(X)+AX et f(Z)+AZ
Si f(X)+AX est supérieur ou égal à f(Z)+AZ, alors affiche TROUVEE
Si X est plus grand que 2 alors va vers l'étiquette 0
Va vers l'étiquette 1

Il m'a fallu du temps pour comprendre ce qu'il avait voulu faire : d'abord, il n'y a pas de bosses pour $a = 3$, et il y en a deux pour $a = 2$; il va donc "guetter" l'apparition des bosses en diminuant **a** par petites valeurs, jusqu'à leur apparition.
Mais là, ce n'est plus par observation graphique, mais en faisant varier x de 0,05 en 0,05 dans l'intervalle [0 ; 2], car c'est justement dans cet intervalle qu'il avait remarqué auparavant que se situaient les abscisses des bosses.
D'où un algorithme assez complexe, qu'il faut d'ailleurs modifier au fur et à mesure en remplaçant le décrément 0,1 par 0,01 puis 0,001, mais qui aboutit à la réponse 2,333 (dans laquelle il n'a d'ailleurs pas vu 7/3).

Jean-Christophe a lui aussi eu l'idée de chercher la valeur de a par approximations successives, mais uniquement grâce à l'écran graphique : il prend a=2, a=3, a=2,5, etc. et fait à chaque fois des ZOOMS pour bien voir s'il y a ou non une bosse. Il arrive à a=2,33 (la vraie valeur est a=7/3) pour la première fonction et à a=1,01 (la vraie valeur est exactement 1) pour la seconde.

Il n'y a eu que très peu d'élèves, dans la classe, à vouloir chercher **a** par approximations successives, en utilisant les potentialités de l'outil qu'ils avaient entre les mains. Pour les autres, il semble que ce genre de "bricolage" ne ressortisse pas aux mathématiques : seules des démonstrations formelles ont valeur à leurs yeux... malheureusement, elles n'ont conduit ici qu'à des impasses (le concept de dérivée n'ayant pas du tout été abordé).

Pour terminer, je citerai la copie de Pascal, la plus courte de toutes :
Seuls les signes de x^3, de x^2 et de x ont un rôle (il s'est mal exprimé, et a voulu dire les signes des coefficients de x^3, x^2 et x, la suite le montrera). *En faisant varier les signes de x^3, x^2 et x, je trace les 8 combinaisons possibles de courbes :*

$y_1 = x^3 + x^2 + x$	*pas de bosses*
$y_2 = x^3 + x^2 - x$	*deux bosses*
$y_3 = x^3 - x^2 + x$	*pas de bosses*
$y_4 = x^3 - x^2 - x$	*deux bosses*
$y_5 = -x^3 + x^2 + x$	*deux bosses*
$y_6 = -x^3 + x^2 - x$	*pas de bosses*
$y_7 = -x^3 - x^2 + x$	*deux bosses*
$y_8 = -x^3 - x^2 - x$	*pas de bosses*

(réponses uniquement par observation des écrans graphiques)
Autrement dit, en ce qui concerne les bosses de $ax^3 + bx^2 + cx + d$, b n'a aucun rôle.

Et le devoir est terminé...Sans aucun autre essai graphique.
Il conclut cependant :
Pour démontrer cela de façon plus mathématique, c'est à dire moins graphique, il faudrait sans doute utiliser les dérivées (qu'il ne connaît pas, mais les doublants ont fait circuler de l'information *!).*
Mais "ma prof de maths" (personne qu'il a déjà citée : elle lui donne de temps en temps des explications complémentaires, en dehors du lycée) *semble vraiment être en vacances, donc trop fatiguée pour m'expliquer les dérivées. Autrement dit, on s'en tiendra à la méthode graphique.*

NARRATION DE RECHERCHE N°2

Cette narration de recherche était en réalité, dans l'ordre chronologique, la première qui ait été proposée aux élèves.
Peu habitués à ce genre d'exercice, certains ont eu du mal à respecter les consignes (en particulier à rendre leurs brouillons de travail : certains brouillons étaient recopiés - au crayon ! - pour être plus présentables...).
Cependant, la recherche semble avoir été très fructueuse, comme en témoignent les quelques extraits de copies qui figurent ci-dessous, après l'énoncé.

Première S. Devoir maison n°7 du 08/11/94

Le but de ce devoir n'est pas uniquement de trouver la réponse au problème posé. Ce que je demande, c'est :

dans une première partie

de narrer en détail **votre recherche** : tout ce que vous avez fait pour trouver (ou essayer de trouver) : dans l'ordre chronologique, relatez vos essais, les pistes expérimentées (même les fausses)
et de **joindre tous vos brouillons**

<u>Critères d'évaluation de la narration</u> : le style d'écriture (phrases claires), la précision, le respect de la chronologie, la sincérité.

dans une deuxième partie

de prouver (ou d'essayer de prouver) que la solution que vous avez trouvée est effectivement la bonne : c'est à dire de faire **des démonstrations**.

<u>Critères d'évaluation</u> : aucune faute logique, raisonnement déductif à partir des données, justification des liens logiques (par exemple : citer les propriétés utilisées si elles ne sont pas "évidentes").

LE PROBLEME :

Soient f et g les deux fonctions définies sur **R** par :

$$f(x) = \sqrt{\left(x^2 + x + 1\right)} - \sqrt{\left(x^2 - x + 1\right)}$$

$$g(x) = \frac{2x}{\sqrt{\left(x^2 + x + 1\right)} + \sqrt{\left(x^2 - x + 1\right)}}$$

On voudrait savoir ce qui se passe pour x "infiniment grand".

Pour cela, j'ai programmé ma T.I.82 et, pour les valeurs de x égales à 10^{10}, 10^{11}, 10^{12} ..... 10^{17}, voici le tableau de valeurs que j'ai obtenu :

x	f(x)	g(x)
1. E 10	1	1
1. E 11	1	1
1. E 12	1	1
1. E 13	0,5	1
1. E 14	1	1
1. E 15	0	1
1. E 16	0	1
1. E 17	0	1

Comment en déduire ce qui se passe pour x "infiniment grand" ?

L'énoncé de ce problème se retrouve dans les annexes, sur fond blanc, prêt à être photocopié pour les élèves.

Commentaire :

Il est évident que ce devoir a été proposé avant qu'une quelconque approche des limites ait eu lieu. Il s'agissait en effet de laisser aux élèves une grande marge de liberté dans la façon dont ils allaient aborder ce problème, et gérer la contradiction flagrante entre des résultats intuitivement évidents et des réponses contradictoires de la calculatrice (dont nul n'ignore qu'elle ne se trompe jamais !).

Le lecteur trouvera quelques explications « techniques » dans le chapitre **Apprentissage de la calculatrice en seconde, les limites de la calculatrice** de cette même brochure, ainsi que dans l'ouvrage **TI82, mathématiques au lycée** ([4]).

Quelques extraits des copies des élèves ...

... sur la démarche de recherche en général :

J'ai lu et relu l'énoncé plusieurs fois.

Tout se mélange dans ma tête et, à force de trop d'essais, je ne sais plus par où commencer.

Je laisse reposer un jour ou deux pour repartir sur des bases plus saines.

Vous nous avez peut-être donné un tableau faux pour nous lancer sur de fausses pistes.

Tout m'a l'air trop complexe, alors que d'habitude vos solutions sont simples.

La calculette ne peut pas servir dans un problème où il ne faut pas d'arrondis

On m'a dit que...   Le bruit a couru que...

J'ai été aidé par ma soeur.

[4] Daniel VAGOST et Jacques VERDIER, TI82 MATHEMATIQUES AU LYCEE, Editions Dunod-Tech, Paris, 1993, pages 110 à 112.

.... quelques idées pour la résolution de ce problème en particulier

Avec ma calculatrice, je regarde ce que ça donne.

Je réeffectue vos calculs, mais avec ma CASIO.

Tous les résultats numériques affichés sur la calculatrice sont sujets à caution dès que x est trop grand : d'où une différence entre les tableaux.

J'ai essayé de trouver les valeurs ***exactes*** *(en utilisant le moins souvent possible la calculatrice).*

Je me suis demandé s'il y avait un rapport entre f(x) et g(x).

Lorsqu'on trace le graphe des deux fonctions sur la calculatrice, on trouve qu'ils sont identiques.

Si on pouvait démontrer que f(x) = g(x), on n'aurait plus qu'un seul problème à résoudre.

Le résultat f(x) = g(x) est en contradiction avec les tableaux donnés.

J'étudie séparément $x \to \sqrt{(x^2 + x + 1)}$ *et* $x \to \sqrt{(x^2 - x + 1)}$.

Dans un premier temps, je cherche à simplifier f(x) et g(x), mais je n'y arrive pas.

J'ai voulu simplifier pour qu'il y ait moins de $\sqrt{\ }$.

J'ai voulu mettre f(x) au carré pour enlever les racines, mais elles sont restées.

J'ai voulu montrer que f(x) croît quand x croît.

Si la différence entre deux nombre croît, alors la différence entre leurs racines croît.

Hypothèse : f(x) est toujours inférieur à 1, mais s'en rapproche de plus en plus ; je vais essayer de le prouver.

Plus x est grand, plus il est petit par rapport à x^2.

Je considère que $\frac{1}{\infty} = 0$

Si on divise 1 par un nombre très grand, le résultat est d'autant plus proche de zéro que le nombre est grand.

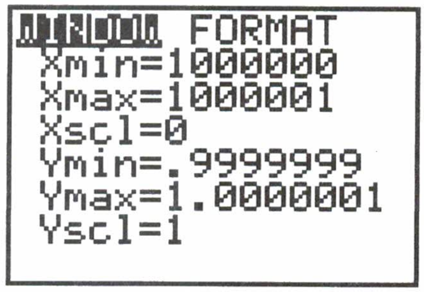
...On constate ici que certains élèves sont déjà assez proches de la notion de limite !

L'électrocardiogramme !

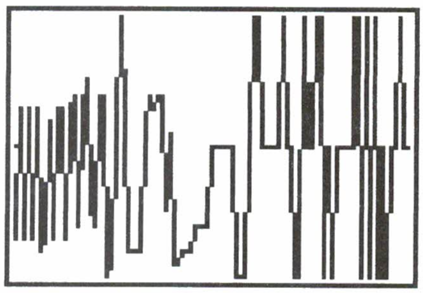
Pascal (un élève !), intrigué par ce "plateau"([5]) qui se stabilise à 1, décide de choisir la fenêtre

[5] Certains appelleraient cela une asymptote...

suivante sur sa calculatrice (une T.I.85) . Il intitule ainsi sa découverte : “Comment transformer une T.I.85 en électrocardiogramme” :



et voici le résultat obtenu :



Il conclut : *décidément, j'explose ma T.I. contre le mur ; en tout cas, je la laisse de côté, car les calculettes ne peuvent guère servir dans un problème où il ne faut pas d'arrondis.*
Et montrant qu'il a bien compris l'esprit retors des professeurs de mathématiques, il continue : *Dans la mesure où g(x) est plus compliquée que f(x), il y a toutes les chances qu'il faille se servir de g(x) plutôt que de f(x)...*

ANNEXES A PHOTOCOPIER

Vous pouvez reproduire ces documents pour les distribuer à vos élèves.
Il vous est cependant demandé de ne pas effacer la mention « I.R.E.M. de LORRAINE »
qui figure en haut de ces pages.

Le T.D. sur l'apprentissage de la partie graphique (seconde) n'est pas reproduit ici : il se trouve directement photocopiable dans le chapitre correspondant.

FICHE CALCULATRICE N°1

Lors de votre entrée en seconde, vous avez changé ou vous allez changer de calculatrice. Le but de ce T.P. est d'observer les différences entre les calculatrices type « collège » (T.I.30, T.I.40 Galaxy, Casio fx82, fx92, etc.) et les calculatrices type « lycée » (T.I.80, T.I.82, Casio 6900, Casio 8900, etc.).

Modalités du travail : groupes de trois ou quatre élèves, avec au moins une calculatrice de chaque type.

Nom et prénom :	Marque et type calculatrice :
....	....
....	....
....	....
....	....

I. Les touches de base

I.1 Quelle touche utilise-t-on pour obtenir le résultat d'une opération ?

Calc. Collège : .... Calc. Lycée : ....

I.2 Indiquer la séquence à utiliser pour calculer :

15^2	Calc. Collège :	Calc. Lycée : ....
$\sqrt{225}$	Calc. Collège :	Calc. Lycée : ....
$\frac{1}{5}$	Calc. Collège :	Calc. Lycée : ....

I.3 Quelle(s) touches(s) utilise-t-on pour choisir l'unité d'angle - degré ou radian ou grade) ?

Calc. Collège : .... Calc. Lycée : ....

I.4 Indiquer la séquences de touches utilisées pour calculer :

cos60°	Calc. Collège :	Calc. Lycée : ....
sin150°	Calc. Collège :	Calc. Lycée : ....
tan45°	Calc. Collège :	Calc. Lycée : ....

I.5 Indiquer la séquence de touches à utiliser pour déterminer une mesure de l'angle A tel que :

tan A = 1	Calc. Collège :	Calc. Lycée : ....
cos A = ½	Calc. Collège :	Calc. Lycée : ....

I.6 Indiquer le résultat obtenu lorsque vous effectuez les opérations suivantes, correspondant à **2 - 3** et à **2x(-3)**, en utilisant soit la touche d'opération $\boxed{-}$, soit la touche de changement de signe $\boxed{+/-}$ ou $\boxed{(-)}$:

calc. $\boxed{2}$ $\boxed{-}$ $\boxed{3}$ $\boxed{=}$ donne : $\boxed{}$

collège $\boxed{2}$ $\boxed{+/-}$ $\boxed{3}$ $\boxed{=}$ donne : $\boxed{}$

calc. $\boxed{2}$ $\boxed{-}$ $\boxed{3}$ $\boxed{\text{EXE}}$ donne : $\boxed{}$

lycée $\boxed{2}$ $\boxed{(-)}$ $\boxed{3}$ $\boxed{\text{EXE}}$ donne : $\boxed{}$

calc. $\boxed{2}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{-}$ $\boxed{3}$ $\boxed{=}$ donne : $\boxed{}$

collège $\boxed{2}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{+/-}$ $\boxed{3}$ $\boxed{=}$ donne : $\boxed{}$

calc. $\boxed{2}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{-}$ $\boxed{3}$ $\boxed{\text{EXE}}$ donne : $\boxed{}$

lycée $\boxed{2}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{(-)}$ $\boxed{3}$ $\boxed{\text{EXE}}$ donne : $\boxed{}$

I.7. La correction d'une erreur de frappe :

Vous avez tapé 2x125 au lieu de 2x152.
Comment, si c'est possible, corriger l'erreur, sans tout recommencer, bien sûr ?

Premier cas, si vous n'avez pas encore tapé $\boxed{=}$ ou $\boxed{\text{EXE}}$ ou $\boxed{\text{ENTER}}$:

Calc. Collège : .... Calc. Lycée : ....

Deuxième cas, si vous avez déjà tapé $\boxed{=}$ ou $\boxed{\text{EXE}}$ ou $\boxed{\text{ENTER}}$:

Calc. Collège : .... Calc. Lycée : ....

II. Les calculs de base

II.1 Tapez $\boxed{5}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{7}$ $\boxed{+}$ $\boxed{3}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{2}$ $\boxed{-}$ $\boxed{5}$. Quel résultat obtenez-vous ?

Calc. Collège : .... Calc. Lycée : ....

Dans cette séquence, introduisez deux parenthèses (un ouvrante et une fermante) ; combien de résultats différents pouvez-vous obtenir ?

II.2 Sans la calculatrice, calculez :

$A = \dfrac{120+6}{3} = \ldots\ldots\ldots$, $B = 15 + \dfrac{3 \text{x} 7}{4+3} = \ldots\ldots\ldots$ et $C = \sqrt{\dfrac{9 \text{x} 12}{5+7}} = \ldots\ldots\ldots$

Indiquez la séquence de touches nécessaires pour calculer A, B et C. Si vous n'obtenez pas le résultat « attendu », quelle était votre erreur ?

A : Calc. Collège : .... Calc. Lycée : ....

B : Calc. Collège : .... Calc. Lycée : ....

C : Calc. Collège : .... Calc. Lycée : ....

III. L'utilisation des mémoires

III.1 Soit A = $120^2 + 150^2 - 2 \times 120 \times 150 \times \cos 60°$.
Comment stocker le résultat de l'opération précédente en mémoire ? S'il y a plusieurs possibilités, indiquez-les :

Calc. Collège : .... Calc. Lycée : ....

Calculez B = $150 \times \sin 60°$ = ... et stockez le résultat dans une autre mémoire.

III.2 Comment utiliser un résultat stocké en mémoire ? Indiquez la séquences de touches utilisée pour calculer $h = \dfrac{120\text{x}B}{2\sqrt{A}}$ = ... (à 10^{-4} près).

III.3 Uniquement pour ceux qui possèdent une touche $\boxed{\text{ANS}}$:

Tapez 2 $\boxed{\text{x}}$ 7 $\boxed{\text{EXE}}$, puis $\boxed{\text{ANS}}$ $\boxed{\text{EXE}}$, puis 2 $\boxed{\text{x}}$ $\boxed{\text{ANS}}$ $\boxed{\text{EXE}}$, puis $\boxed{\text{ANS}}$ $\boxed{\text{EXE}}$, puis 100 $\boxed{-}$ $\boxed{\text{ANS}}$ $\boxed{\text{EXE}}$. Quel est le rôle de la touche $\boxed{\text{ANS}}$?

III.4 Uniquement pour ceux qui possèdent une calculatrice graphique

Tapez $\boxed{4}$ $\boxed{\rightarrow}$ $\boxed{\text{X,T,}\theta}$ $\boxed{\text{EXE}}$ ou $\boxed{4}$ $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{\text{X,T,}\theta}$ $\boxed{\text{EXE}}$, puis effacez l'écran $\boxed{\text{CLEAR}}$.
Tapez 2 $\boxed{\text{x}}$ $\boxed{\text{X,T,}\theta}$, et 2 $\boxed{+}$ $\boxed{\text{X,T,}\theta}$.
Quel est le tôle de la touche $\boxed{\text{X,T,}\theta}$?

FICHE CALCULATRICE N° 2

Nom :
Prénom :
Calculatrice :

Attention : selon les calculatrices, remplacez $\boxed{\text{EXE}}$ par $\boxed{=}$ ou par $\boxed{\text{ENTER}}$,
remplacez $\boxed{x^y}$ par $\boxed{\wedge}$ ou par $\boxed{y^x}$,
remplacez $\boxed{\text{EXP}}$ par $\boxed{\text{EE}}$ ou par $\boxed{x10^x}$,
remplacez $\boxed{(-)}$ par $\boxed{+/-}$.

I. Les touches $\boxed{x^y}$ ou $\boxed{\wedge}$, et les touches $\boxed{\text{EXP}}$ ou $\boxed{\text{EE}}$ ou $\boxed{x10^x}$:

Entourez ci-dessus les touches qui sont sur votre calculatrice.

1) Tapez la séquence 2 $\boxed{x^y}$ 3 $\boxed{\text{EXE}}$ notez le résultat :

puis la séquence 2 $\boxed{\text{EXP}}$ 3 $\boxed{\text{EXE}}$ notez le résultat :

Quel sont les rôles de la touche $\boxed{x^y}$ et de la touche $\boxed{\text{EXP}}$?

2) Indiquez la séquence permettant de calculer 25^5, puis celle permettant de calculer $25x10^5$.

II. Calculs sur les puissances

1) les « puissances négatives »

Tapez la séquence `$\boxed{2}$ $\boxed{x^y}$ $\boxed{(-)}$ $\boxed{3}$ $\boxed{\text{EXE}}$ (ou`$\boxed{2}$ $\boxed{x^y}$ $\boxed{3}$ $\boxed{+/-}$ $\boxed{=}$ pour les machines de type collège) et notez le résultat obtenu :

Comparez 2^{-3} et 2^3.

Si n est un entier naturel, quelle est la définition de 2^{-n} ? Calculez : 2^{-4}, 2^{-1}, 2^{-2}.

2) « les règles de calcul »

Tapez A = $\boxed{2}$ $\boxed{x^y}$ $\boxed{3}$ $\boxed{x}$ $\boxed{2}$ $\boxed{x^y}$ $\boxed{2}$ $\boxed{-}$ $\boxed{2}$ $\boxed{x^y}$ $\boxed{5}$ $\boxed{\text{EXE}}$
B = $\boxed{2}$ $\boxed{x^y}$ $\boxed{3}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{2}$ $\boxed{x^y}$ $\boxed{2}$ $\boxed{-}$ $\boxed{2}$ $\boxed{\text{EXE}}$
C = $\boxed{2}$ $\boxed{x^y}$ $\boxed{3}$ $\boxed{x^y}$ $\boxed{2}$ $\boxed{-}$ $\boxed{2}$ $\boxed{x^y}$ $\boxed{6}$ $\boxed{\text{EXE}}$

Pouvait-on s'attendre à ces résultats ?

Quelles sont les règles de calcul sur les puissances ?

En utilisant ces règles de calcul ; calculez de tête :

$A = 2^3 \times 2^{-2}$ $B = (2^{-3})^{-2}$ $C = \dfrac{2^3}{2^{-2}}$

puis vérifiez avec votre calculatrice (indiquez les séquences utilisés).

3) Les parenthèses, le signe - et les puissances

Tapez $\boxed{(-)}$ $\boxed{2}$ $\boxed{x^y}$ $\boxed{4}$ $\boxed{\text{EXE}}$ puis $\boxed{(}$ $\boxed{(-)}$ $\boxed{2}$ $\boxed{)}$ $\boxed{x^y}$ $\boxed{4}$ $\boxed{\text{EXE}}$ et notez les résultats obtenus. Sont-ils identiques ?
Mêmes calculs en remplaçant $\boxed{4}$ par $\boxed{3}$. Sont-ils identiques ?
Quelles séquences de touches taper pour calculer :
-75^3 ; -75^4 ; $(-75)^3$; $(-75)^4$; $(-2)^3 \times (-3)^2$ et $-2^3 \times (-3)^5$?

4) Exposant non entier

Tapez $\boxed{2}$ $\boxed{x^y}$ $\boxed{2}$ $\boxed{.}$ $\boxed{5}$, correspondant à $2^{2,5}$. Cela a-t-il un sens pour vous ?
A quoi pourrait bien correspondre la réponse de la calculatrice ?

N.B. Vous découvrirez la définition de a^x pour $a > 0$ et x réel en classe de terminale.

III. La notation scientifique et les puissances de 10

1) Tapez 93 768 600 x 5 329 400 $\boxed{\text{EXE}}$

Quel est le résultat affiché sur l'écran : $\boxed{\qquad\qquad\qquad}$? Est-ce une valeur exacte ou approchée ?
Comment doit-on noter ce nombre sur sa copie ?
Mêmes questions avec 93 768 601 x 5 329 433.

2)Pouvez vous afficher sur votre calculatrice le nombre 12 500 000 000 000 (douze mille cinq cents milliards) ?
Si oui tapez-le suivi de $\boxed{\text{EXE}}$ .Que se passe-t-il?
A partir de quel nombre de chiffres votre calculatrice passe-t-elle en notation scientifique (essayez 111111 $\boxed{\text{EXE}}$ puis 1111111 $\boxed{\text{EXE}}$ puis 11111111 $\boxed{\text{EXE}}$ etc.;)
Si non comment entrer le nombre 12 500 000 000 000 ?

3) Tapez 10 $\boxed{x^y}$ 3 $\boxed{\text{EXE}}$, puis 10 $\boxed{\text{EXP}}$ 3 $\boxed{\text{EXE}}$. Comparez les réponses.
Comment obtenir 10^n (il y a plusieurs façons) ?
Tapez 10 $\boxed{x^y}$ 2.5, puis 10 $\boxed{\text{EXP}}$ 2.5. Que se passe-t-il ?

De quelle nature doit être le nombre qu'on affiche après la touche $\boxed{\text{EXP}}$?

4) Tapez 2 $\boxed{\text{EXP}}$ 3 $\boxed{x^2}$ $\boxed{\text{EXE}}$, puis $\boxed{(}$ 2 $\boxed{\text{EXP}}$ 3 $\boxed{)}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{\text{EXE}}$. Concluez.

Les parenthèses sont-elles nécessaires pour calculer $(2 \times 10^3)^2$?
Peut-on calculer $(2 \times 10^3)^2$ en tapant **seulement** sur **<u>4</u>** touches : $\boxed{\quad}$ $\boxed{\quad}$ $\boxed{\quad}$ $\boxed{\quad}$?

Tapez : 2 $\boxed{x^2}$ $\boxed{\text{EXP}}$ 6 $\boxed{\text{EXE}}$. Que fait la machine ?

Comment obtenir, avec le moins de touches possible, la valeur de :
$(2 \times 10^{-3})^3$? (-3×10^{-5}) ? $2^3 \times 10^{-3}$? $\dfrac{(2 \times 10^{-2}) \times 5^3 \times 10^2}{\left(7 \times 10^{-5}\right)^3}$?

T.D. Les limites de la calculatrice.

Le nombre de décimales affichées

Tape $\boxed{1}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{3}$ $\boxed{\text{EXE}}$ (ou $\boxed{\text{ENTER}}$).
Combien, de chiffres la calculatrice affiche-t-elle ?
Multiplie par 1000 et retranche 333 ; combien de chiffre la calculatrice affiche-t-elle alors ?
Multiplie à nouveau par 1000 et retranche 333, combien de chiffres cette fois ?
Continue....
Peux-tu- expliquer le résultat observé ?

A la recherche des décimales cachées.

Tape $\sqrt{2}$ $\boxed{\text{EXE}}$. Recopie l'affichage complet de l'écran sur un papier, recopie-le également dans la calculatrice et stocke ceci dans une mémoire.
Tape $\sqrt{2}$ - [cette mémoire] $\boxed{\text{EXE}}$.
Le résultat est-il nul ?
Sinon, qu'est-ce que cela signifie ?
La valeur affichée sur l'écran pour $\sqrt{2}$ est-elle une valeur approchée par excès ou par défaut ?
Comment peut-on utiliser ce qu'on vient de faire pour écrire $\sqrt{2}$ avec le maximum de décimales possible ?
Calcule le carré du nombre stocké en mémoire au début : trouve-t-on 2 ? Pourquoi ?

Recommence le même exercice, depuis le début, avec $\sqrt{3}$ puis avec $\sqrt{13}$. Que constate-t-on ?

Où l'on aide la calculatrice

Par quel chiffre se termine $A = 5796543^2$?
Avec combien de chiffres s'écrit A ? (remarquer que $5x10^6 < \sqrt{A} < 6x10^6$).

Calcule A avec la calculatrice. Que remarques-tu ? Peux-tu donner une explication de ce qui est affiché ?
Comment pourrait-on "utiliser" la calculatrice pour obtenir une valeur **exacte** de A ?
[N.B. : remarque que $A = (579x10^4 + 6543)^2$].

La calculatrice "se trompe"

Soit $B = X - \sqrt{(X+1)^2 - 4X}$.
Montre que, pour X>1, on a B = 1.
A la calculatrice, calcule B pour $X = 10^{10}, 10^{11}, 10^{12}, 10^{13}, 10^{14} .... 10^{20}$. Que remarques-tu ? Quelle est l'explication de ce phénomène ?

La calculatrice "se trompe" (suite)

Avec trois calculatrices différentes, j'ai calculé $A = 9x^4 - y^4 + 2y^2$, pour x = 10864 et y = 18817, et j'ai trouvé respectivement - 841022, 58978 et 815978.
Et toi, combien trouves-tu ? Et tes camarades ?
Parmi toutes ces réponses, de laquelle es-tu sûr qu'elle soit exacte ? Pourquoi ?

Si on utilise $A = (3x^2 - y^2)(3x^2 + y^2) + 2y^2$, combien trouve-t-on ? Sur toutes les calculatrices ?
Montrer **pourquoi** on peut affirmer que, cette fois, le résultat est exact.

Classe de Première S. Devoir à la maison pour le

Le but de ce devoir est de calculer la valeur exacte de $A = 9x^4 - y^4 + 2y^2$ lorsque $x = 10\,864$ et $y = 18\,817$.

Première partie

Effectuez ce calcul à l'aide de votre calculatrice, en précisant comment vous procédez, et donnez la valeur exacte de A.

Deuxième partie

Voici trois solutions proposées par trois élèves de seconde. Que pensez-vous de ces solutions ?

Solution n°1 :

Sur ma calculatrice, je mets 10 864 dans la mémoire X, et 18 817 dans la mémoire Y. Ensuite je tape au clavier 9 x ^ 4 - y ^ 4 + 2 y ^ 2 et ENTER. J'obtiens A = -22.

Solution n°2 :

Je factorise : $9x^4 - y^4 + 2y^2 = (3x^2 - y^2)(3x^2 + y^2) + 2y^2$.
Je calcule $3x^2 - y^2 = 3 \times 10864^2 - 18817^2$ et je trouve -1.
Par conséquent : $9x^4 - y^4 + 2y^2 = (-1)(3x^2 + y^2) + 2y^2 = y^2 - 3x^2$.
Je calcule $y^2 - 3x^2 = 18817^2 - 3 \times 10864^2$ et je trouve 1.

Donc A = 1.

Solution n°3 :

A la calculatrice, $\frac{18817}{10864} \approx 1.73205081$ et $\sqrt{3} \approx 1.732050808$.
J'en conclu que $\frac{18817}{10864} \approx \sqrt{3}$ (à 10^{-8}) **au pire**.
Donc $18817 \approx 10864\sqrt{3}$, donc $18817^2 \approx 10864^2 \times 3$,
donc $18817^4 \approx 10864^4 \times 9$
donc $9 \times 10864^4 - 18817^4 \approx 0$.

Par conséquent, pour $x = 10864$ et $y = 18817$, on a :
$9x^4 - y^4 + 2y^2 \approx 0 + 2 \times 18817^2 \approx$ **708 158 978**.
C'est bien entendu une valeur approchée de A, car mon calcul était à 10^{-8} près.

Particularités et limites de l'écran graphique

Exercice 1

On considère la fonction définie par $f(x)=\sqrt{x^2+4x-5}$.

a) A l'aide d'une machine graphique, déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction f.

b) Déterminer algébriquement ce domaine de définition $\mathcal{D}_f$.

Questions supplémentaires :

En changeant **le minimum de choses** dans l'écriture de f(x), représenter une fonction dont le domaine de définition soit [-5 ; 1], c'est à dire avec « rien » ailleurs.

Comment obtenir, **avec une seule fonction**, un graphe qui réunisse les deux précédents ?

Exercice 2

On considère la fonction définie par $f(x)=\dfrac{x+3}{x^3-5x^2+2x+8}$.

a) A l'aide d'une machine graphique, déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction f.

b) Déterminer algébriquement ce domaine de définition $\mathcal{D}_f$.

Exercice supplémentaire :

Le même que ci-dessus, mais avec $f(x)=\dfrac{2x^3-x^2-5x+8}{x^2-x-2}$.

Exercice 3

On considère la fonction définie par $f(x)=\dfrac{2x^3-x^2-5x-2}{x^2-x-2}$.

a) A l'aide d'une machine graphique, déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction f.

b) Déterminer algébriquement ce domaine de définition $\mathcal{D}_f$.

Exercice 4

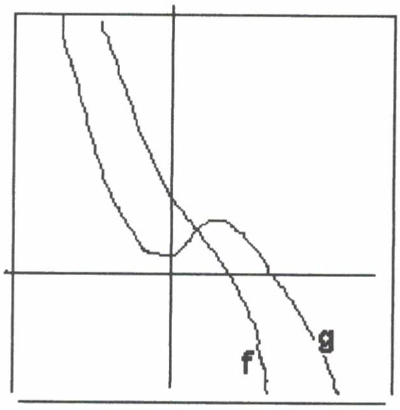
On considère la fonction définie par $f(x)=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}$.

a) A l'aide d'une machine graphique, déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction f.

b) Déterminer algébriquement ce domaine de définition $\mathcal{D}_f$.

NARRATION DE RECHERCHE. Pour le

Dans ce devoir, je vous demande de **relater votre démarche de recherche**, c'est à dire de citer toutes les tentatives ou hypothèses que vous avez faites pour venir à bout du problème.
L'utilisation d'une calculatrice graphique étant pratiquement nécessaire, recopiez sur vos brouillons les écrans que vous avez observés. Par exemple :



(Ces dessins n'ont pas besoins d'être précis, mais **suggestifs**)

Joignez tous vos brouillons, numérotés dans l'ordre chronologique, et si possible **datés**. Précisez toutes les sources de renseignement utilisées.

LE PROBLEME :

On considère la fonction f définie par $f(x) = x^3 - x^2 - 2x + 3$,
et la fonction g définie par $g(x) = -x^3 + 3x^2 - 4x + 2$.

On constate que leurs graphes n'ont pas du tout la même forme : l'un a "deux bosses", et pas l'autre.
On admettra que la représentation graphique d'un polynôme du troisième degré donne toujours soit une "courbe à deux bosses", soit une "courbe sans bosse".

On ajoute à la fonction f une fonction affine d, du type $d(x) = ax + b$, et on cherche à déterminer la forme du graphe de la fonction "résultante".

Par exemple : pour $a = 1$ et $b = 1$, le graphe de la fonction somme a "deux bosses" ;
mais pour $a = 3$ et $b = -1$, le graphe de la fonction somme n'a plus de bosses.

On fait la même chose avec la fonction g. Si on lui ajoute une fonction d telle que $d(x) = ax + b$, elle peut changer de forme.

Par exemple : pour $a = 3$ et $b = -1$, elle "gagne" deux bosses.

Le but du problème est de déterminer **le rôle de *a* et de *b*** dans la forme du graphe résultant.

Quand vous aurez trouvé, mettez la conclusion bien en évidence sur votre copie.

Devoir maison n° pour le

Le but de ce devoir n'est pas uniquement de trouver la réponse au problème posé. Ce que je demande, c'est :

dans une première partie

de narrer en détail **votre recherche** : tout ce que vous avez fait pour trouver (ou essayer de trouver) : dans l'ordre chronologique, relatez vos essais, les pistes expérimentées (même les fausses)
et de **joindre tous vos brouillons**

Critères d'évaluation de la narration : le style d'écriture (phrases claires), la précision, le respect de la chronologie, la sincérité.

dans une deuxième partie

de prouver (ou d'essayer de prouver) que la solution que vous avez trouvée est effectivement la bonne : c'est à dire de faire **des démonstrations**.

Critères d'évaluation : aucune faute logique, raisonnement déductif à partir des données, justification des liens logiques (par exemple : citer les propriétés utilisées si elles ne sont pas "évidentes").

LE PROBLEME :

Soient f et g les deux fonctions définies sur **R** par :

$$f(x) = \sqrt{(x^2 + x + 1)} - \sqrt{(x^2 - x + 1)}$$

$$g(x) = \frac{2x}{\sqrt{(x^2 + x + 1)} + \sqrt{(x^2 - x + 1)}}$$

On voudrait savoir ce qui se passe pour x "infiniment grand".

Pour cela, j'ai programmé ma T.I.82 et, pour les valeurs de x égales à 10^{10}, 10^{11}, 10^{12} ..... 10^{17}, voici le tableau de valeurs que j'ai obtenu.

x	f(x)	g(x)
1. E 10	1	1
1. E 11	1	1
1. E 12	1	1
1. E 13	0,5	1
1. E 14	1	1
1. E 15	0	1
1. E 16	0	1
1. E 17	0	1

Comment en déduire ce qui se passe pour x "infiniment grand" ?